二集一

華氏中西算學全書二集

華氏中西算學

全書初集

行素軒

校本

微積溯源八卷前四卷爲微分術後四卷爲積分術乃算學中最深之事也余既與西士傅蘭雅譯畢代數術二十五卷更思求其進境故又與傅君譯此書焉先是咸豐年間曾有海寗李壬叔與西士偉烈亞力譯出代微積拾級一書流播海內余素與壬叔相友得讀其書粗明微積二術之梗概所以又譯此書者蓋欲補其所略也書中代數之式甚繁校算不易則劉君省菴之力居多今刻工已竣矣故序之曰吾以爲古時之算法惟有加減而已其乘與除乃因加減之不勝其繁故更立二術以使之簡易也開方之法又所以濟除法之窮者也蓋算學中自有加減乘除開方五法而一切淺近易明之數無不可通矣惟人之心思智慮日出不窮往往以能人之所不能者爲快遇有窒礙難通之處輒思立法以濟其窮故有減其所不可減而正負之名不得不立矣除其所不受除而寄母通分之法又不得不立矣代數中種種記號之法皆出於不得已而立者也惟每立一法必能使繁者爲簡難者爲易遲者爲速而算學之境界藉此得更進一層如是屢進不已而所立之法於是乎日多矣微分積分者蓋又因乘除開方之不勝其繁且有窒礙難通之處故更立此二術以濟其窮又使簡易而速者也試觀圜徑求周眞數求對數等事雖無微分積分之時亦未嘗不可求惟須乘除開方數十百次其難有不可言喻者不如用微積之法理明而數捷也然則謂加減乘除開方代數之外更有二術焉一曰微分一曰積分可也其積分術爲微分之還原猶之開平方爲自乘之還原除法爲乘之還原減法爲加之還原也然加與乘其原無不可還而微分之原有可還有不可還是猶算式中有不可開之方耳又何怪焉如必曰加減乘除開方已足供吾之用矣何必更究其精是舍舟車之便利而必欲負重遠行也其用力多而成功少蓋不待智者而辨矣同治十三年九月十八日金匱華蘅芳序

新學會校正賜書堂石印

英國華里司輯　英國　傅蘭雅　口譯
金匱　華蘅芳　筆述

論變數與函數之變比例

第一款　用代數以解任何曲線其中每有幾種數其大小恆有定率者　如橢圓之長短徑拋物線之通徑變曲線之屬徑之類是也

又每有幾種數可有任若干相配之同數其大小恆不能有定率者　如曲線任一點之縱橫線是也

數旣有此兩種分別則每種須有一總名以賅之故名其有定之數曰常數無定之數曰變數

凡常數之同數不能增亦不能損

凡變數之同數能變爲大亦能變爲小故其從此同數變至彼同數之時必歷彼此二數間最小最微之各分數

如平圓之半徑爲常數而其任一段之弧或弧之弦矢切割各線及各線與弧所成之面皆謂之變數

橢圓之長徑短徑皆爲常數而其曲線之任一段或曲線上任一點之縱橫線並其形內形外所能作之任何線或面或角皆謂之變數

拋物線之通徑爲常數而其曲線之任一段或任一點之縱橫線或弧與縱橫線所成之面皆謂之變數　他種曲線亦然

凡常數恆以甲乙丙丁等字代之凡變數恆以天地人等字代之

第二款　若有彼此二數皆爲變數此數變而彼數因此數之變而亦變者則彼數爲此數之函數

如平圓之八線皆爲弧之函數　若反求之亦可以弧爲八線之函數

又如重學中令物體前行之力與其物所行之路皆爲時刻之函數

如有式 $地=\frac{甲+天}{甲-天}$ 此式中甲爲常數天爲自主之變數地爲天之函數故地之同數能以天與甲明之

如有式 $天=\frac{地+一}{甲(地-一)}$ 此式中甲與一皆爲常數地爲自主之變數天爲地之函數故天之同數可以地與甲及一明之

如有式 $地=甲+乙天+丙天$ 或 $地=\sqrt{甲+乙天+天}$ 或 $地=\frac{丙+天}{甲+\sqrt{乙天}}$ 其甲乙丙爲常數天爲自變

之數而戊皆爲天之函數.

凡函數之中可以有數箇自主之變數.

如有式 戊＝一甲天⊥乙天地⊥丙地″ 則天與地皆爲自主之變數戊爲天地兩變數之函數.

凡變數之函數其形雖有多種然每可化之使不外乎以下數類.

甲天 天甲 對天 正弦天 餘弦天 等類是也

凡函數爲 天″ 之類其指數爲常數則可從天之卯方用代數之常法化之而以有窮之項明其函數之同數故謂之代數函數亦謂之常函數.

如有式 戊＝一甲丿⊥ √甲⊥天／乙天⊥丙天 此種函數其戊之同數可用加減乘除開方等法而得之.

凡函數爲 甲天 對天 之類則其函數之同數不能以有窮之項明之故謂之越函數越者超越於尋常之意也.

凡函數爲 正弦天 餘弦天 及 正切天 正割天 之類則其函數之同數皆可以平圓之各線明之故謂之圓函數亦謂之角函數.

以上三種函數常函數越函數圓函數也若已知天之同數則其函數之同數即可求得故名此三種函數爲陽函數因其顯而易明故謂之陽函數.

更有他種函數必先解其方程式令函數中之各變數分開然後能求其同數者.

如有式 戊天＝ 戊⊥天／戊丅天 其戊爲天之函數如欲求其戊與天相配之同數必先解其二次方程式始能通此種之式名曰天之陰函數因其雜糅未明故謂之陰函數 反之亦可云天爲戊之陰函數.

如解其方程式爲 戊＝二［丿⊥天］⊥［天／閏六天⊥一］ 則戊變爲天之陰函數

昔代數之家凡遇須用開平方之處每于其式之左旁作一根字以記之如 根天 爲天之平方根後又變通其法而以根號記之如 √天 爲天之平方根此代數之例也.

茲可仿照此例，凡遇某變數之函數亦用一號以記之。所以凡有任何變數之函數皆可書一函字于其變數之旁，以爲識別。

如天之函數則作函天或作函㊝，皆言天之函數也。所以凡見變數之左旁有一函字者，其函字並非代天之倍數，其意謂是某變數之函數也。

用此法則可將 戊＝天^{甲}　戊＝甲^{天}　戊＝對天　戊＝正弦天　戊＝餘弦天 各種之式以一語賅之，謂之 戊＝函天 或 戊＝函㊝。

若函數從兩箇變數而成，其天與地皆爲自主之變數，其式如 戊＝甲天^{二}丄乙天地丄丙地^{二} 者，則可以 戊＝函(天，地) 別之。函數爲多箇變數所成者，仿此推之。

惟函數只指其變數言之，若其甲乙丙丁各常數，雖多不論。

第三款　凡觀此書者，必先明變數與函數變比例之限。如幾何原本中證明平圜之面積必比其外切多等邊形之面積微小，若其外切多等邊形之邊愈多，則其面積愈近于平圜之面積。所以可設平圜之面積爲任何小，而切其圜外爲多等邊形，可使多等邊形之面積與平圜之面積較，其數甚小于所設之圜面積。再設其多等邊形之面積爲級數，而其邊之變率可每變多若干倍，則其多等邊形之面積必漸與平圜之面積相近，而以平圜爲其限。雖切于圜外之多等邊形，其邊任變至若何多，其面積總不能等于平圜之面積，然其級數之總數可比平圜之面積，所差甚微，其較數之小可小至莫可名言。

若用此法于圜內容多等邊形，則其多等邊形之面積亦以平圜之面積爲限。

總言之，凡平圜之周爲其內容外切多等邊形之限。

如代數術第二百六十六款言，如令甲代平圜之任何弧，則 $\frac{正弦甲}{甲}$ 恆大于半徑，而 $\frac{正切甲}{甲}$ 恆小于半徑。然令其弧爲任何小，則其式之同數必甚近于半徑，而其所差之數可小至不能以言語形容。所以此兩數中間之數爲一（即半徑也），故其公限亦爲一。

由此可見凡弧與弦切三者之中，任取其二以相較，其比例之限必相等。

如代數術中亦曾證甲弧爲 $\frac{卯正切}{卯甲}$ 與 $\frac{卯正弦}{卯甲}$ 兩式之限惟其卯必爲任何大.

依代數術第五十六款之例 $\frac{一}{一丅天}=一丄天丄天^{二}丄天^{三}丄\cdots$ 卽 $\frac{一丅天^{卯}}{一丅天}$ 若天變至小于一而卯大至無窮則 $天^{卯}=〇$ 而式變爲 $\frac{一}{一丅天}$. 所以任取其級數若干項之和必小于 $\frac{一}{一丅天}$. 惟其項愈多則與 $\frac{一}{一丅天}$ 愈相近而其所差之數可小至莫可名言則可見 $\frac{一}{一丅天}$ 必爲其諸級總數之限.

若依二項例之式 $(一丄\frac{天}{卯})^{卯}=一丄天丄(一丅\frac{一}{卯})\frac{天^{二}}{一\cdot二}丄(一丅\frac{一}{卯})(一丅\frac{二}{卯})\frac{天^{三}}{一\cdot二\cdot三}丄\cdots$ 其卯之同數無論如何必合于理惟卯若爲大數則其各項之乘數 $一丅\frac{一}{卯}$ $一丅\frac{二}{卯}$ 之類與一相較之差甚小若卯愈大則其差愈微. 若令卯爲任何大則各乘數可略等于一所以得 $(一丄\frac{天}{卯})^{卯}=一丄天丄\frac{天^{二}}{一\cdot二}丄\frac{天^{三}}{一\cdot二\cdot三}丄\cdots$ 甲.

曾在代數術第一百七十七款中證甲式之右邊爲由函數 $戊^{天}$ 而成其戊之同數爲 $二.七一八二八一八\cdots$ 卽訥白爾對數之根也. 所以卯若愈大則 $(一丄\frac{天}{卯})^{卯}$ 必愈與 $戊^{天}$ 相近而其限爲 $戊^{天}$.

如令天＝一則 $(一丄\frac{一}{卯})^{卯}$ 之限爲戊卽 $(一丄\frac{一}{卯})^{卯}=戊=二.七一八二八一八\cdots$ 故其函數爲常數

第四款 惟因函數之同數本從變數而生故變數之同

數變則函數之同數亦必因之而變。

設天爲自變之數，戌爲函數，而 $戌=天^{2}$。若令天之變大之數爲辛，則天變至 $天+辛$ 之時，其函數戌亦必因此變大。若以 $戌'$ 代其函數之新同數，則 $戌'=(天+辛)^{2}=天^{2}+二天辛+辛^{2}$，卽 $戌'=戌+二天辛+辛^{2}$，而 $戌'-戌=二天辛+辛^{2}$。故可見天之長數若爲辛，則戌之長數必爲 $戌'-戌$，卽 $二天辛+辛^{2}$。若以天之長數與函數之長數比，則爲 $\frac{戌'-戌}{辛}=二天+辛$。

設函數之式爲 $戌=天^{三}$，令天之長數爲辛，而以函數之新同數爲 $戌'$，則

$$戌'=(天+辛)^{三}\begin{cases}=天^{三}+三天^{二}辛+三天辛^{二}+辛^{三}\\=戌+三天^{二}辛+三天辛^{二}+辛^{三}\end{cases}$$

而 $\frac{戌'-戌}{辛}=三天^{二}+三天辛+辛^{二}$。可見天變爲 $天+辛$ 之時，其函數 $戌'$ 必變爲 $戌+三天^{二}辛+三天辛^{二}+辛^{三}$，其所長之數爲 $三天^{二}辛+三天辛^{二}+辛^{三}$。此式中之各項皆爲辛之整方與他數相乘所成。又可見變數與函數之變比例，其式爲 $三天^{二}+三天辛+辛^{二}$，其初項 $三天^{二}$ 與天之長數辛無相關。

設函數之式爲 $戌=天^{四}$，令天之長數爲辛，而以 $戌'$ 爲函數之新同數，則 $戌'=戌+四天^{三}辛+六天^{二}辛^{二}+四天辛^{三}+辛^{四}$，而 $\frac{戌'-戌}{辛}=四天^{三}+六天^{二}辛+四天辛^{二}+辛^{三}$。

由此可見天若變爲 $天+辛$，則其各函數之新同數如左：

如 $戌=天^{二}$，則 $戌'=戌+二天辛+辛^{二}$；

如 $戌=天^{三}$，則 $戌'=戌+三天^{二}辛+三天辛^{二}+辛^{三}$；

如 $戌=天^{四}$，則 $戌'=戌+四天^{三}辛+六天^{二}辛^{二}+四天辛^{三}+辛^{四}$；

其餘類推。

總言之若以卯為天之任何整指數而令天之長數為辛又以巳午未申等字挨次而代辛之各方之倍數則函數 $戊=天^{卯}$ 之新同數必為 $戊'=戊+巳辛+午辛^{二}+未辛^{三}+申辛^{四}+\cdots\cdots$ 由是知函數之新同數必為級數其初項戊為函數之原同數其餘各項為天之長數辛之各整方以巳午未申之類為各倍數其各倍數皆為天之別種函數其式亦從本函數而生

由以上各式又可見函數為 $戊=天^{二}$ $戊=天^{三}$ $戊=天^{四}$ 之類則其變數與函數之變比例必為

$$\frac{戊'-戊}{辛}=二天+辛$$

$$\frac{戊'-戊}{辛}=三天^{二}+三天辛+辛^{二}$$

$$\frac{戊'-戊}{辛}=四天^{三}+六天^{二}辛+四天辛^{二}+辛^{三}$$

之類總之若以卯為天之整指數則 $戊=天^{卯}$ 之變比例必為

$$\frac{戊'-戊}{辛}=巳+午辛+未辛^{二}+申辛^{三}+\cdots\cdots$$

由此可見變數天之長數與函數 $戊=天^{卯}$ 之長數其變比例 $\frac{戊'-戊}{辛}$ 之同數 $巳+午辛+未辛^{二}+申辛^{三}+\cdots\cdots$ 可分之為兩式 其一式為巳 此式與天之長數辛無相關 又一式為 $午辛+未辛^{二}+申辛^{三}+\cdots\cdots$ 即 $辛(午+未辛+申辛^{二}+\cdots\cdots)$ 此式因以辛為乘數故辛若變小其數亦必隨辛而變小如令辛為任何小則此式之數可小至甚近于〇故此數可以不計而以巳為變比例之限

設有繁函數之式 $戊=甲+乙天+丙天^{二}$ 令天之長數為辛則天變為 $天+辛$ 之時其函數之同數必變為

$$戊'\begin{cases}=甲+乙(天+辛)+丙(天+辛)^{二}\\=甲+乙天+丙天^{二}+(乙+二丙天)辛+丙辛^{二}\end{cases}$$

故

$$戊'-戊=(乙+二丙天)辛+丙辛^{二}$$

而

$$\frac{戊'-戊}{辛}=乙+二丙天+丙辛$$

其 $乙+二丙天$ 為本函數變比例之限

以此法徧試各種特設之函數見其皆有相類之性情所以設例如左

例曰命任何自主之變數爲天而令天之任何函數等于戊則天變爲$天丄辛$之時函數之新同數爲$戊' = 戊丄巳辛丄午辛^{二}丄未辛^{三}丄\cdots\cdots$其變數與函數之變比例爲$\frac{戊'丅戊}{辛} = 巳丄午辛丄未辛^{二}丄申辛^{三}丄\cdots\cdots$此式中之初項巳爲變比例之限無論何種函數其限皆可依此例求之

由以上所論變數之長數與函數之長數相關之理可于算學中開出兩種極廣大極精微之法

其第一種爲有任何變數之任何函數而求其變數與函數變比例之限

其第二種爲有任何變數與函數變比例之限而求其函數之原式

此兩種法若細攷其根源卽奈端所謂正流數反流數也亦卽來本之所謂微分算術積分算術也又卽拉果闌諸所謂函數變例也

論各種函數求微分之公法

第五款

若函數之式爲$戊 = 天^{二}$令天變爲$天丄辛$則函數之新同數必爲$戊' = 天^{二}丄二天辛丄辛^{二}$其與原同數之較爲$戊'丅戊$卽$二天辛丄辛^{二}$此式之初項$二天辛$名之曰溢率

依同理推之若函數之式爲$戊 = 天^{三}$令天變爲$天丄辛$則函數之新同數爲$戊' = 天^{三}丄三天^{二}辛丄三天辛^{二}丄辛^{三}$其與原同數之較爲$戊'丅戊$卽$三天^{二}辛丄三天辛^{二}丄辛^{三}$其初項$三天^{二}辛$爲溢率

若函數之式爲$戊 = 天^{四}$而天變爲$天丄辛$則函數之新同數與原同數之較爲$四天^{三}辛丄六天^{二}辛^{二}丄四天辛^{三}丄辛^{四}$而其溢率爲$四天^{三}辛$

總言之凡天之函數無論為某方極可以 $天+辛$ 代其天而變其函數之同數為 $戊+己辛+午辛^{二}+未辛^{三}\cdots\cdots$ 乃以原同數戊減之得 $己辛+午辛^{二}+未辛^{三}\cdots\cdots$ 而取其初項 $己辛$ 為溢率

準此推之則知天之溢率即為其長數辛惟因函數之溢率每藉天之長數而生故微分術中恆以 $彳天$ 代天之溢率其彳號者非天之倍數不過謂是天之溢率耳溢率之名本為流數術中所用而彳號者即微字之偏旁故微分之術用之

如有式 $戊=天^{二}$ 則 $彳戊=二天彳天$ 此式之意謂戊之微分等于 $二天$ 乘天之微分猶言函數戊之溢率等于以 $二天$ 乘其天之溢率也

如有式 $戊=天^{三}$ 則 $彳戊=三天^{二}彳天$ 此式之意謂戊之微分等于 $三天^{二}$ 乘天之微分猶言函數戊之溢率等于以 $三天^{二}$ 乘其天之溢率也

第六款

惟因每遇 $戊=天^{二}$ 則 $彳戊=二天彳天$ 所以可寫之如 $\frac{彳戊}{彳天}=二天$ 此為天微分之倍數亦謂之微係數

又依前法推之如函數之式為 $戊=天^{三}$ 則 $彳戊=三天^{二}彳天$ 而 $\frac{彳戊}{彳天}=三天^{二}$ 其 $三天^{二}$ 為原函數 $戊=天^{三}$ 之微係數

總言之無論何種函數之微係數皆可以 $\frac{彳戊}{彳天}$ 代之而函數之新同數為 $戊+己辛+午辛^{二}+\cdots\cdots$ 所以 $\frac{彳戊}{彳天}=己$ 其己為天之他函數其形每隨函數之式而變如知戊之同數為何式則其己之同數即易求得

凡函數之欲求微分者先于其式之左旁作一彳號以記之 如有 $(甲+天)(乙-天)$ 式欲求其微分則可先作 $彳(甲+天)(乙-天)$

凡函數之欲求微係數者于其式之左旁作彳號又以 $彳天$ 為其分母 如有 $(甲+天)(乙-天)$ 式欲求其微係數則作 $\frac{彳}{彳天}(甲+天)(乙-天)$

從以上各款諸說易知求微分之公法

法曰無論天之任何函數欲求微分則以 $天+辛$ 代其原式

中之天而詳之依辛之整方數自小而大序之取其初有辛之項而以伏代其辛即得

如有式$戊＝甲天⊥乙天^{二}$欲求其微係數．則以$天⊥辛$代其天而令函數之新同數爲$戊'$則得

$$戊'\begin{cases}＝甲(天⊥辛)⊥乙(天⊥辛)^{二}\\＝甲天⊥乙天^{二}⊥(甲⊥二乙天)辛⊥乙辛^{二}\\＝戊⊥(甲⊥二乙天)辛⊥乙辛^{二}\end{cases}$$

取其初有辛之項$(甲⊥二乙天)辛$以伏代其辛即得$彳戊＝(甲⊥二乙天)伏$故其$\frac{伏}{彳戊}＝甲⊥二乙天$

第七款　上款之法必令天變爲$天⊥辛$而詳其函數之同數爲級數此乃論其立法之理當如是也惟求得級數之後所用者僅爲其辛一方之項則但能求得此項已足用矣．前于第四款中言此項之倍數爲變數與函數變比限之限．又于第六款中言此項之倍數謂之微係數．然則求函數之微係數與求變數與函數變比例之限其法本無異也．

如有式$戊＝\frac{天}{甲}$則$戊'＝\frac{天⊥辛}{甲}$而$戊'丅戊＝\frac{天⊥辛}{甲}丅\frac{天}{甲}$即$戊'丅戊＝\frac{天(天⊥辛)}{丅甲辛}$故其變比例之式爲$\frac{辛}{戊'丅戊}＝\frac{天(天⊥辛)}{丅甲}$惟此式可不待詳爲級數而始得其變比例之限因可見辛愈小則其式愈近于$丅\frac{天^{二}}{甲}$故此式必即爲$\frac{伏}{彳戊}$之同數所以得$彳戊＝丅\frac{天^{二}}{甲伏}$

若以戊爲任何函數之原同數而以$天⊥辛$代其天則其函數之新同數爲$戊'＝戊⊥巳辛⊥午辛^{二}⊥未辛^{三}⊥……$即得$\frac{辛}{戊'丅戊}＝巳⊥午辛⊥未辛^{二}⊥……$惟因$\frac{辛}{戊'丅戊}$之限爲巳．故得$\frac{伏}{彳戊}＝巳$而$彳戊＝巳伏$

由此得一解曰．凡微分之術其意專爲求任何變數與函數同時變大之限耳．

凡求任何函數之微分．不過將一尋常之代數式另用他法以變化之因其變化之法．與代數中常用之法異

則不得不另有一名以別之故謂之微分術

第八款　凡變數與函數變比例之限無論以何數爲主其形必同

如戊爲天之函數若天變爲$天\perp辛$則戊變爲$戊\perp巳辛\perp午辛^{二}\perp未辛^{三}\perp\cdots\cdots$其巳午未各數俱爲天之他函數從本函數所生如令其$巳辛\perp午辛^{二}\perp未辛^{三}\perp\cdots\cdots=壬$則天與戊同時變大之數爲辛與壬如依代數術第一百六十三款之法反求其級數則得$辛=\frac{壬}{巳}\top\frac{午壬^{二}}{巳^{三}}\perp\cdots\cdots$故其變數與函數之公比例爲$\frac{辛}{壬}=\frac{一}{巳}\top\frac{午壬}{巳^{三}}\perp\cdots\cdots$故$\frac{辛}{壬}$之限爲$\frac{一}{巳}$而$\frac{壬}{辛}$之限爲巳此即$\frac{一}{\frac{一}{巳}}$也

第九款　由此易知凡有相等之函數則其微係數亦必相等

如戊與亥爲兩函數而$戊=亥$其天變爲$天\perp辛$之時戊變爲$戊'$亥變爲$亥'$則$戊'=亥'$而$戊'\top戊=亥'\top亥$故$\frac{戊'\top戊}{辛}=\frac{亥'\top亥}{辛}$如以巳與午各爲其變比例之限則$巳=午$故$巳微=午微$而$戊微=亥微$

由此可見凡函數之式無論如何改形若其同數無異者則其微係數必同

如函數之原式爲$天\perp甲$若改其形爲$\frac{(天\perp甲)(天\top甲)}{天\top甲}$則此式之微係數與原式之微係數必無異

惟此理若反言之而謂相等之微係數必從相等之函數而生則不盡然

如函數之式爲$戊=甲\perp乙天$令天變爲$天\perp辛$而戊變爲$戊'$則$戊'=甲\perp乙天\perp乙辛$故得$\frac{戊'\top戊}{辛}=乙$觀此可知其常數之項甲不能入變比例之限內故其微係數必與$戊=乙天$之微係數無異惟微係數乙既能

屬于本函數 $甲 \perp 乙天$ 又能屬于他函數 $乙天$ 所以有下例

例曰凡變數與常數相加減之函數其微係數中不見其加減之常數　惟變數與常數相乘除者則其微係數中有常數爲倍數

求兩函數相乘積之微分

第十款

凡變數之函數無論其形如何皆可以第六款之公法求其微分然不如每種異形之函數各設一專法以求之則更簡捷

如有式 $戌 = 未申$ 其未與申各爲天之函數今欲得一法專能求未申相乘積之微分若令天變爲 $天 \perp 辛$ 則未申二函數必變爲

$$未' = 未 \perp 巳辛 \perp 午辛^{二} \perp \cdots\cdots$$

$$申' = 申 \perp 巳'辛 \perp 午'辛^{二} \perp \cdots\cdots$$

其巳午爲由未函數所得之天之他函數其巳′午′爲由申函數所得之天之他函數

再令 $戌' = 未'申'$ 則依法得 $戌' = 未'申' = 未申 \perp (未巳' \perp 申巳)辛 \perp (未午' \perp 巳巳' \perp 申午)辛^{二} \perp$ 以戌代其未申移順而以辛約之則得

$$\frac{辛}{戌' \top 戌} = 未巳' \perp 申巳 \perp (未午' \perp 巳巳' \perp 申午)辛 \perp \cdots$$

此式中之未巳′與申巳兩項乃天之他函數而與辛無涉者其餘各項俱有辛之各方爲乘數設辛爲甚微則其所乘之衆項亦甚微故其變比例之限爲 $\frac{辛}{戌' \top 戌} = 未巳' \perp 申巳$ 惟

因 $巳 = \frac{辛}{未' \top 未}$　$巳' = \frac{辛}{申' \top 申}$ 故可依第六款之法以 $\frac{彳天}{彳戌}$ 代其 $\frac{辛}{戌' \top 戌}$ 以 $\frac{彳天}{彳未}$ 代其 $\frac{辛}{未' \top 未}$ 以 $\frac{彳天}{彳申}$ 代其 $\frac{辛}{申' \top 申}$ 則得 $\frac{彳天}{彳戌} = 未\frac{彳天}{彳申} \perp 申\frac{彳天}{彳未}$ 而 $彳戌 = 未彳申 \perp 申彳未$ 故得

專法如左

凡求同變彼此兩函數相乘積之微分法將此函數乘

彼函數之微分又將彼函數乘此函數之微分而以乘得之兩式相加即得

求多函數連乘積之微分

第十一款

前款論函數之式為 $\text{戌}=\text{未申}$ 則 $\text{彳戌}=\text{申彳未}+\text{未彳申}$ 所以 $\frac{\text{彳戌}}{\text{戌}}=\frac{\text{彳未}}{\text{未}}+\frac{\text{彳申}}{\text{申}}$ 由此推之如戌為三箇同變數之函數連乘如 未酉亥 可令其 $\text{申}=\text{酉亥}$ 則亦能為 $\text{戌}=\text{未申}$ 而 $\frac{\text{彳戌}}{\text{戌}}=\frac{\text{彳未}}{\text{未}}+\frac{\text{彳申}}{\text{申}}$ 惟因 $\text{申}=\text{酉亥}$ 可依同例得 $\frac{\text{彳申}}{\text{申}}=\frac{\text{彳酉}}{\text{酉}}+\frac{\text{彳亥}}{\text{亥}}$ 所以 $\frac{\text{彳戌}}{\text{戌}}=\frac{\text{彳未}}{\text{未}}+\frac{\text{彳酉}}{\text{酉}}+\frac{\text{彳亥}}{\text{亥}}$ 若仍將 未申 代還其戌而以常法化之則為 $\text{彳戌}=\text{酉亥彳未}+\text{未亥彳酉}+\text{未酉彳亥}$ 故得專法如左

凡求同變數之若干函數連乘積之微分法以各本函數之微分與其餘之各他函數連乘而以各乘得之式相加即得

此法易用一總式以明之無論其同變數之函數有若干數連乘皆可以一例推之

如多函數連乘之式為 未申酉亥 則其微分之式為

$$\text{彳}(\text{未申酉亥})=\text{未申酉亥}\left[\frac{\text{彳未}}{\text{未}}+\frac{\text{彳申}}{\text{申}}+\frac{\text{彳酉}}{\text{酉}}+\frac{\text{彳亥}}{\text{亥}}\right]$$

求變數之分函數微分

第十二款

若有分數之式其母子為同變數之各函數則欲得其求微分之專法可令 $\text{戌}=\frac{\text{未}}{\text{申}}$ 則 $\text{未}=\text{戌申}$ 而 $\text{彳未}=\text{戌彳申}+\text{申彳戌}$ 乃以其戌之同數 $\frac{\text{未}}{\text{申}}$ 代其戌則 $\text{彳未}=\frac{\text{未彳申}}{\text{申}}+\text{申彳戌}$ 而 $\text{彳戌}=\frac{\text{申彳未}-\text{未彳申}}{\text{申}^{2}}$ 故得專法如左

凡同變數之函數若為分數則求微分之法可將分母乘其分子之微分乃以分子乘分母之微分減之而以分母之平方約之

此法亦可用一總式以明之

惟因 $戌=\frac{申}{未}$ 之微分為 $\frac{戌}{彳戌}=\frac{未}{彳未}丅\frac{申}{彳申}$ 所以 $戌=\frac{亥地}{未申酉}$ 之微分為 $\frac{戌}{彳戌}=\frac{未}{彳未}⊥\frac{申}{彳申}⊥\frac{酉}{彳酉}丅\frac{亥}{彳亥}丅\frac{地}{彳地}$ 由此推之則 $戌=\frac{亥地}{未申酉}$ 之微分當為 $\frac{戌}{彳戌}=\frac{未申酉}{彳(未申酉)}丅\frac{亥地}{彳(亥地)}$ 又依第十一款之例其 $\frac{未申酉}{彳(未申酉)}=\frac{未}{彳未}⊥\frac{申}{彳申}⊥\frac{酉}{彳酉}$ 而 $\frac{亥地}{彳(亥地)}=\frac{亥}{彳亥}⊥\frac{地}{彳地}$ 故得 $\frac{戌}{彳戌}=\frac{未}{彳未}⊥\frac{申}{彳申}⊥\frac{酉}{彳酉}丅\frac{亥}{彳亥}丅\frac{地}{彳地}$ 由是知若有分數之函數其分母分子為任若干同變數之函數連乘之積如 $\frac{亥地}{未申酉}$ 者可以 $彳\left(\frac{亥地}{未申酉}\right)=\frac{亥地}{未申酉}\left[\frac{未}{彳未}⊥\frac{申}{彳申}⊥\frac{酉}{彳酉}丅\frac{亥}{彳亥}丅\frac{地}{彳地}\right]$ 之式明之

求變數諸乘方之微分

第十三款　茲欲攷任何函數地之任何乘方求微分之專法其地或為自變之數或為他變數之函數皆可

先設 $戌=地^{卯}$ 其卯為任何整數則其函數之詳式必有卯箇地連乘如 $戌=地\cdot地\cdot地\cdot地\cdots\cdots$ 則依第十一款之例 $\frac{戌}{彳戌}=\frac{地}{彳地}⊥\frac{地}{彳地}⊥\frac{地}{彳地}\cdots\cdots$ 其項必有卯數故即 $\frac{戌}{彳戌}=\frac{地}{卯彳地}$ 而得 $彳戌=\frac{地}{卯彳地}戌=卯地^{卯丅一}彳地$

設函數為分指數如 $戌=地^{\frac{卯}{寅}}$ 則 $戌^{寅}=地^{卯}$ 若依第九款之例則得 $卯戌^{寅丅一}彳戌=寅地^{卯丅一}彳地$ 而 $彳戌=\frac{卯}{寅}\times\frac{戌^{寅丅一}}{地^{卯丅一}}彳地$ 惟因 $戌=地^{\frac{卯}{寅}}$ $戌^{寅丅一}=地^{卯丅\frac{卯}{寅}}$ 所以 $\frac{戌^{寅丅一}}{地^{卯丅一}}=地^{\frac{卯}{寅}丅一}$ 而 $彳戌=\frac{卯}{寅}地^{\frac{卯}{寅}丅一}彳地$

再設卯為負指數無論為整數為分數則 $戌=地^{丅卯}$ 即 $戌=\frac{一}{地^{卯}}$ 若依第十二款之例因其分子為常數故其分子之微分當

為○而得 $彳天=\frac{-卯彳地}{地^{卯+一}}$ 即 $彳天=-卯地^{-卯-一}彳地$

合觀本款之各式可見地之指數卯無論為正為負爲

整為分其微分之式必爲 $彳(地^{卯})=卯地^{卯-一}彳地$ 故得專法如左

凡求函數任何乘方之微分法將其原指數以一減之爲新指數而以原指數爲其倍數又以變數之微分乘之卽得 惟其原函數若本有常數爲倍數者則其原倍數必仍在乘數之中

如函數之式爲 $戊=甲天^{卯}$ 則其微分之式爲 $彳(甲天^{卯})=卯甲天^{卯-一}彳天$

求函數諸乘方之微分更有簡便之法可藉代數術第一百六十款與一百六十一款之二項例而得所以于此不論者因二項之例亦可由微分而得余欲用微分之術證明二項之例以便于用故俟後詳論之

求變數平方根之微分

用前法已能求各負方之微分惟因 $\sqrt{地}=地^{\frac{一}{二}}$ 爲微分術中常見之式所以必更設一最易之專法以便于用

依本款求諸乘方微分之法 $彳(地^{\frac{一}{二}})=\frac{一}{二}地^{\frac{一}{二}-一}彳地$ 卽 $彳(地^{\frac{一}{二}})=\frac{一}{二}地^{-\frac{一}{二}}彳地$ 卽 $彳(\sqrt{地})=\frac{彳地}{二\sqrt{地}}$ 所以得專法如左

凡求函數平方根之微分法以函數之微分爲實而二倍其原函數之平方根以約之卽得

求重函數之微分

第十四款 設有地爲天之函數而戊爲地之函數欲求其戊與天相配之微分

令天變其同數爲 $天+辛$ 則地變爲 $地'=地+巳辛+午辛^{二}+未辛^{三}+\cdots\cdots$ 乃令 $巳辛+午辛^{二}+未辛^{三}+\cdots\cdots=子$ 則地變爲 $地+子$

惟因戊爲地之函數若地變爲 $地+子$ 則戊變爲 $戊'=戊+巳'子+午'子^{二}+未'子^{三}+\cdots\cdots$ 其巳' 午'

天各數爲地之他函數與子及辛皆無相關所以子此級數中以子之同數 $已辛+午辛^2+\cdots$ 代之則天變爲 $天+辛$ 之時其戊之同數必變爲 $戊'=戊+已'已辛+(已''午+午'已'^2)辛^2+\cdots$ 所以得 $\frac{戊'-戊}{辛}=已'已+(已''午+午'已'^2)辛+\cdots$ 如令辛爲甚小則其限必爲 $\frac{戊'-戊}{辛}=已'已$ 惟因地爲天之函數故 $已=\frac{彳地}{彳天}$ 又因戊爲地之函數故 $已'=\frac{彳戊}{彳地}$ 如知戊亦可爲天之函數則 $\frac{彳戊}{彳天}=\frac{戊'-戊}{辛}=已'已$ 由此可見 $\frac{彳戊}{彳天}=\frac{彳戊}{彳地}\times\frac{彳地}{彳天}$ 而 $彳戊=\left(\frac{彳戊}{彳地}\times\frac{彳地}{彳天}\right)彳天$ 故得專法如左

凡有地爲天之函數戊爲地之函數而欲求其微分者法先以戊專爲地之函數而求其微係數又以地專爲天之函數而求其微係數乃將兩微係數相乘又以彳天乘之即爲戊之微分

已知 $\frac{彳戊}{彳地}\times\frac{彳地}{彳天}=\frac{彳戊}{彳天}$ 如令 $戊=天$ 則變其式爲 $\frac{彳天}{彳地}\times\frac{彳地}{彳天}=\frac{彳天}{彳天}=一$ 所以可作 $\frac{彳天}{彳地}=\frac{一}{\frac{彳地}{彳天}}$

由是知凡以天爲地之函數與以地爲天之函數其兩微係數必可互爲倒數（以法爲實以實爲法謂之倒數）此例可由第八款得之

第十五款

求多項函數之微分

如有同變數之若干函數合成一多項之式則求此多項式之微分亦可設一專法

設亥地人爲變數天之任何函數欲求 $戊=甲+乙亥+丙地-丁人$ 之微分若天變爲 $天+辛$ 而其同時中亥變爲 $亥+已辛+午辛^2+\cdots$ 地變爲 $地+已'辛+午'辛^2+\cdots$ 人變爲 $人+已''辛+午''辛^2+\cdots$ 戊變爲 $戊'$ 故得

$$戊'=\left\{\begin{array}{l}甲+乙亥+丙地-丁人\\+(乙已+丙已'-丁已'')辛\\+(乙午+丙午'-丁午'')辛^2\\+\cdots\cdots\end{array}\right.$$

如以戊代其右邊之上層移其

項而以辛約之則得 $\frac{彳戊}{辛}=乙巳+丙巳-戊巳+(乙辛+丙辛-戊辛)辛+\cdots\cdots$ 觀其各限可見 $\frac{彳戊}{辛}$ 爲戊之微係數而巳與巳及巳爲亥與地及人之微係數所以

其 $\frac{彳戊}{彳天}=\frac{彳乙}{彳天}+\frac{彳丙}{彳天}-\frac{彳戊}{彳天}$ 而 $彳戊=彳乙+彳丙-彳戊$ 故得專法如左

凡有同變數之各函數和較而成之多項式則其總函數之微分必等于各函數微分之和較而其常數之項恆變爲〇

代函數求微分各題

第十六款 以上各專法已足爲任何代數之函數求微分之用兹設數題以明之

一題 設有 $戊=甲天^{五}$ 欲求其微分之式

此式與公式 $戊=甲天^{卯}$ 爲一類所以可用第十三款之法求其微分得 $彳戊=五甲天^{四}彳天$

二題 設有 $戊=\frac{甲}{天^{五}}$ 欲求其微分之式

惟因 $戊=\frac{甲}{天^{五}}$ 即 $戊=甲天^{-五}$ 故如法求得 $彳戊=-五甲天^{-六}彳天$ 即 $彳戊=-\frac{五甲彳天}{天^{六}}$

三題 設有 $戊=\sqrt{天}$ 欲求其微分之式

惟因 $戊=\sqrt{天}$ 即 $戊=天^{\frac{一}{二}}$ 故如法求得 $彳戊=\frac{一}{二}天^{-\frac{一}{二}}彳天$ 即 $彳戊=\frac{彳天}{二\sqrt{天}}$

四題 設有 $戊=甲天^{三}+乙天^{二}+丙天+戊$ 欲求其微分之式

此爲多項之函數故如法求得 $彳戊=三甲天^{二}彳天+二乙天彳天+丙彳天$ 即 $彳戊=(三甲天^{二}+二乙天+丙)彳天$ 其常數之項戊于求微分之時變爲〇而不見

五題　設有 $戊=(甲丄乙天^{卯})^{巳}$ 欲求其微分之式

此可令 $地=甲丄乙天^{卯}$ 則 $戊=地^{巳}$ 而 $彳戊=巳地^{巳丅一}彳地$ 惟因 $地^{巳丅一}=(甲丄乙天^{卯})^{巳丅一}$ 而 $彳地=乙卯天^{卯丅一}彳天$ 所以得 $彳戊=乙卯巳(甲丄乙天^{卯})^{巳丅一}天^{卯丅一}彳天$

此題之式若不用地代其括弧內之數而以 $甲丄乙天^{卯}$ 爲一箇箇函數其戊爲箇函數之某方而依第十三款之法求之亦通

六題　設有 $戊=天^{三}(甲丄天)^{二}$ 此題爲表明第十款之法 欲求其微分之式

令 $巳=天^{三}$ $午=(甲丄天)^{二}$ 則 $戊=巳午$ 故得 $彳戊=午彳巳丄巳彳午$ 惟因 $彳巳=三天^{二}彳天$ $彳午=二(甲丄天)彳天$ 所以 $彳戊=三天^{二}(甲丄天)^{二}彳天丄二天^{三}(甲丄天)彳天$ 即 $彳戊=天^{二}(甲丄天)(三甲丄五天)彳天$

若平常習算之時可不必用巳午二數相代而即以原式如法求之亦同

七題　設有 $戊=天(一丄天)(一丄天^{二})$ 其戊爲同變數之三箇函數連乘之積 欲求其微分之式

依第十一款之法得 $彳戊=(一丄天)(一丄天^{二})彳天丄天(一丄天^{二})彳天丄二天^{二}(一丄天)彳天$ 又以常法化之得 $彳戊=(一丄二天丄三天^{二}丄四天^{三})彳天$

又法可從本公式 $彳(未申酉)=未申酉\left[\frac{彳未}{未}丄\frac{彳申}{申}丄\frac{彳酉}{酉}\right]$ 得 $彳戊=天(一丄天)(一丄天^{二})\left[\frac{彳天}{天}丄\frac{彳天}{一丄天}丄\frac{二天彳天}{一丄天^{二}}\right]$ 此式易化爲 $彳戊=(一丄二天丄三天^{二}丄四天^{三})彳天$

八題　設有 $戊=\frac{一丄天^{二}}{天}$ 此爲分數之函數 欲求其微分之式

依第十三款之法得

$$彳戊=\frac{(一+天^{二})^{二}}{(一+天^{二})彳天-二天^{二}彳天}$$

即

$$彳戊=\frac{(一+天^{二})^{二}}{(一-天^{二})彳天}$$

九題　設有

$$戊=\frac{天^{四}+天^{二}+一}{天^{三}+天}=\frac{天^{四}+天^{二}+一}{天(天^{二}+一)}$$

欲求其微分之式

將所設之式與本公式

$$彳\left[\frac{酉}{申未}\right]=\frac{酉}{申未}\left[\frac{未}{彳未}+\frac{申}{彳申}-\frac{酉}{彳酉}\right]$$

相比則

$$天=未$$

$$天^{二}+一=申$$

$$天^{四}+天^{二}+一=酉$$

所以得

$$彳戊=\frac{天^{四}+天^{二}+一}{天^{三}+天}\left[\frac{天}{彳天}+\frac{一+天^{二}}{二天彳天}-\frac{天^{四}+天^{二}+一}{(四天^{三}+二天)彳天}\right]$$

化之得

$$彳戊=\frac{(天^{四}+天^{二}+一)^{二}}{-(天^{六}+四天^{四}+四天^{二}-一)彳天}$$

十題　設有

$$戊=三地^{二}$$

$$地=天^{三}+甲天$$

此題爲表明第十四款之法

欲求其微分之式

如法求之則

$$\frac{彳地}{彳戊}=六地$$

$$\frac{彳天}{彳地}=三天^{二}+甲$$

所以

$$\frac{彳地}{彳戊}\times\frac{彳天}{彳地}=六地(三天^{二}+甲)$$

即

$$\frac{彳地}{彳戊}\times\frac{彳天}{彳地}=一八天^{二}地+六甲地$$

惟因

$$彳戊=\frac{彳地}{彳戊}\times\frac{彳天}{彳地}彳天$$

故得

$$彳戊=一八天^{二}地彳天+六甲地彳天$$

此式亦可由他法而得蓋因其

$$戊=三地^{二}$$

則

$$彳戊=六地彳地$$

又因

$$地=天^{三}+甲天$$

則

$$彳地=三天^{二}彳天+甲彳天$$

故可將彳地之同數代入彳戊之同數中其所得之式亦爲

$$彳戊=一八天^{二}地彳天+六甲地彳天$$

求二項例之證

第十七款　以下各款之法必用二項例推之故茲款特用微分之法證明其例以便于用

設有二項之式 $(1+天)^{卯}=1+呷天+𠮙天^{2}+𠰶天^{3}+叮天^{4}+\cdots\cdots$ 其指數卯可任為或正或負或整或分之數則從此式易知其各項之倍數呷𠮙𠰶叮等類皆從指數卯所生而與天之同數無涉又因式之左右既為相等之數則其微分之式左右同故可依第九款之法各求其微分得 $卯(1+天)^{卯-1}彳天=呷彳天+2𠮙天彳天+3𠰶天^{2}彳天+4叮天^{3}彳天+\cdots\cdots$ 若兩邊各以彳天徧約之又以 $\frac{1+天}{卯}$ 徧通之則得 $(1+天)^{卯}=\frac{呷}{卯}+\frac{呷+2𠮙}{卯}天+\frac{2𠮙+3𠰶}{卯}天^{2}+\frac{3𠰶+4叮}{卯}天^{3}+\cdots\cdots$ ㈠又由原式得 $(1+天)^{卯}=\frac{卯}{卯}+\frac{卯呷天}{卯}+\frac{卯𠮙天^{2}}{卯}+\frac{卯𠰶天^{3}}{卯}+\cdots\cdots$ ㈡則㈠㈡兩式右邊之多項其形雖不相同其數必無異因其式皆能等于 $(1+天)^{卯}$ 故也所以

$$\left.\begin{aligned}呷&=卯\\呷+2𠮙&=卯呷\\2𠮙+3𠰶&=卯𠮙\\3𠰶+4叮&=卯𠰶\\&\cdots\cdots\end{aligned}\right\}則\left\{\begin{aligned}呷&=卯\\𠮙&=\frac{卯-1}{2}呷\\𠰶&=\frac{卯-2}{3}𠮙\\叮&=\frac{卯-3}{4}𠰶\\&\cdots\cdots\end{aligned}\right.$$

故可用代法得 $(1+天)^{卯}=1+\frac{卯}{1}天+\frac{卯(卯-1)}{1\cdot2}天^{2}+\frac{卯(卯-1)(卯-2)}{1\cdot2\cdot3}天^{3}+\cdots\cdots$ 以 $\frac{天}{甲}$ 代其天兩邊俱以甲^{卯}通之則得

$$(甲+天)^{卯}=甲^{卯}+\frac{卯}{1}甲^{卯-1}天+\frac{卯(卯-1)}{1\cdot2}甲^{卯-2}天^{2}+\frac{卯(卯-1)(卯-2)}{1\cdot2\cdot3}甲^{卯-3}天^{3}+\cdots\cdots$$

第十八款　上款攷證二項例之法為微分積分中常用之式本款亦然

凡遇相等之式如 $甲+乙天+丙天^{2}+丁天^{3}+\cdots\cdots=呷+𠮙天+𠰶天^{2}+叮天^{3}+\cdots\cdots$ ㈠者若其各項中之倍數皆為常數而天為同變之數則左右各項中之各倍數必挨次

相同故可合之爲一公共之式

此因其天爲變數故可設想其天變至極小而無異于○則得 甲一$甲'$ 如將㊀式中兩邊相等之甲$甲'$截去而以天約其所餘之各項則得

$$乙+丙天+丁天^{二}+\cdots\cdots=乙'+丙'天+丁'天^{二}+\cdots\cdots$$

此式中若令天無異于○則乙必無異于$乙'$如是累推之則得

$$甲=甲',\quad 乙=乙',\quad 丙=丙',\quad 丁=丁',\quad 戊=戊'\cdots\cdots$$

越函數微分

第十九款 越函數爲指函數與對函數之總名茲款先論指函數求微分之專法

設有指函數之式 $戊=甲^{天}$ 其指數天爲變數而甲爲常數令天之長數爲辛則天變爲$天+辛$戊變爲$戊'$故得 $戊'=甲^{天+辛}$ 即 $戊'=甲^{天}甲^{辛}$ 所以 $戊'-戊=甲^{天}甲^{辛}-甲^{天}$ 即 $戊'-戊=甲^{天}(甲^{辛}-一)$ 而 $\frac{戊'-戊}{辛}=甲^{天}\frac{甲^{辛}-一}{辛}$ 欲求其變比例之限則必攷辛變至甚小之時 $\frac{甲^{辛}-一}{辛}$ 所向之限

如令 $甲=一+丙$ 則依第十七款之例得

$$甲^{辛}=(一+丙)^{辛}=一+辛丙+\frac{辛(辛-一)}{一\cdot二}丙^{二}+\frac{辛(辛-一)(辛-二)}{一\cdot二\cdot三}丙^{三}+\cdots\cdots$$

所以

$$\frac{甲^{辛}-一}{辛}=丙+\frac{辛-一}{二}丙^{二}+\frac{(辛-一)(辛-二)}{二\cdot三}丙^{三}+\cdots\cdots$$

惟因辛可爲甚小故式之右邊可甚近于

$$丙+\frac{-一}{二}丙^{二}+\frac{-一\times-二}{二\times三}丙^{三}+\frac{-一\times-二\times-三}{二\times三\times四}丙^{四}+\cdots\cdots$$

即甚近

$$丙-\frac{丙^{二}}{二}+\frac{丙^{三}}{三}-\frac{丙^{四}}{四}+\cdots\cdots=(甲-一)-\frac{(甲-一)^{二}}{二}+\frac{(甲-一)^{三}}{三}-\frac{(甲-一)^{四}}{四}+\cdots\cdots$$

準代數術第一百七十三款及此書中以後所證知此級

數能明甲之訥對所以 $\frac{辛}{甲^{辛}\top一}$ 之限爲 訥甲 而 $\frac{彳天}{彳戊}=\frac{辛}{ˊ戊\top戊}=甲^{戊}(訥甲)$ 即 $彳戊一(訥甲)甲^{戊}彳天$ 故得專法如左

凡求常數變方之微分法將常數之訥對與變指數之微分乘之即得此爲求指函數微分之法

第二十款　凡甲底之對數若以戊爲甲對之越函數則欲得其求微分之專法可依代數術第一百六十五款之法得之

設有式 $天=甲^{戊}$ 若天變爲 $天\perp辛$ 而戊變爲 ˊ戊 則 $天\perp辛=甲^{ˊ戊}$ 所以得 $辛=甲^{ˊ戊}\top甲^{戊}$

即 $辛=甲^{戊}(甲^{ˊ戊\top戊}\top一)$ 即 $辛=天(甲^{ˊ戊\top戊}\top一)$ 如令 $子=ˊ戊\top戊$ 則 $\frac{ˊ戊\top戊}{辛}=\frac{子}{天(甲^{子}\top一)}$ 而 $\frac{辛}{ˊ戊\top戊}=\frac{天}{一}\times\frac{甲^{子}\top一}{子}$ 觀此式之左右

兩邊欲求其變比之限則依上款之法令其天變至甚小則 $\frac{甲^{子}\top一}{子}=\frac{訥甲}{一}$ 所以得 $\frac{彳天}{彳戊}=\frac{訥甲}{一}\times\frac{天}{一}$ 令嗩爲常乘數即對數底訥對之倒數若依代數術第一百七十二款則爲對數之根即得 $彳戊=\frac{天}{嗩彳天}$ 故得專法如左

凡求任何數之對數微分法將本數之微分以本對數之根乘之而以本數約之即得

若求訥對之微分必令 $嗩=一$ 此例須謹記之

第二十一款　圓函數微分

玆款欲明圓函數 正弦天 與 餘弦天 求微分之專法

設有式 $戊=正弦天$ 若天變爲 $天\perp辛$ 而戊變爲 ˊ戊 則 $ˊ戊=正弦(天\perp辛)$ 依代數術第二百四十款之法 $ˊ戊\top戊=正弦(天\perp辛)\top正弦天$ 即 $ˊ戊\top戊=二餘弦(天\perp\frac{辛}{二})正弦\frac{辛}{二}$ 故得 $\frac{辛}{ˊ戊\top戊}=餘弦(天\perp\frac{辛}{二})\frac{\frac{辛}{二}}{正弦\frac{辛}{二}}$ 若令辛爲甚小則其 $餘弦(天\perp\frac{辛}{二})$ 之限爲 餘弦天 而 $\frac{\frac{辛}{二}}{正弦\frac{辛}{二}}$ 之限依代數術第二百六十六

之例應等于一（即半徑也）故得

彳天/彳戊 = 辛/(戊'丅戊) = 餘弦天 而 彳戊 = 彳天餘弦天

設有式 戊 = 餘弦天 如前求之則 戊' = 餘弦(天丄辛) 而 戊'丅戊 = 餘弦(天丄辛)丅餘弦天 即 戊'丅戊 = 丅二正弦(天丄½辛)正弦½辛 故 辛/(戊'丅戊) = 丅正弦(天丄½辛) ½辛/正弦½辛 令辛爲甚小而求其限得 彳天/彳戊 = 辛/(戊'丅戊) = 丅正弦天 而 彳戊 = 丅彳天正弦天 由以上二式得專法如左

凡正弦之微分爲其弧微分與餘弦相乘之數。凡餘弦之微分爲正弦變號與弧微分相乘之數（案本當皆以半徑約之因半徑之數恆爲一故可省也）故餘弦之微分爲負（其負號之故因負則其弧每能增大正則其弧每能減小所以必用負號此須記之）餘弦之微分又有他術可求之其所得之式與前無異故可爲本法之證

如令亥爲正弦地爲餘弦則 地' = 丅亥' 如求其微分得 地彳地 = 丅亥彳亥 惟因天爲其弧 彳亥 = 地彳天 所以 地彳地 = 丅亥地彳天 而 彳地 = 丅亥彳天

第二十二款 凡切線割線之函數皆從正弦餘弦之函數而成故其求微分之法可依類得之

一式 設有 戊 = 正切天 = 餘弦天/正弦天 則依第十二款第二十一款之例可得

彳戊 = 餘弦²天/(彳(正弦天)餘弦天丄彳(餘弦天)正弦天) = 餘弦²天/((餘弦²天丄正弦²天)彳天) = 餘弦²天/彳天 所以得 彳戊 = 彳天正割²天 即 彳戊 = 彳天(一丄正切²天)

二式 設有 戊 = 餘切天 則依同法得 彳戊 = 正弦²天/丅彳天 = 丅彳天餘割²天 即 彳戊 = 丅彳天(一丄餘切²天)

三式 設有 $戊＝正割天＝\frac{餘弦天}{一}$ 則依同法求之得 $彳戊＝\frac{餘弦^{二}天}{彳天正弦天}＝彳天正切天正割天$

四式 設有 $戊＝餘割天＝\frac{正弦天}{一}$ 則依同法求之得 $彳戊＝丅\frac{正弦^{二}天}{彳天餘弦天}＝丅彳天餘切天餘割天$

第二十三款 茲款論求弧微分之法

既有 $戊＝正弦天$ $戊＝餘弦天$ 等類之正函數則必有與此相配之反函數其反函數為 $戊＝弧(正弦＝天)$ $戊＝弧(餘弦＝天)$ 會有英國算學士以 $戊＝正弦^{丅一}天$ 明 $正弦＝天$ 之弧以 $戊＝餘弦^{丅一}天$ 明 $餘弦＝天$ 之弧故弧之微分可求

一式 設有 $戊＝弧(正弦＝天)＝正弦^{丅一}天$ 則 $天＝正弦戊$ 而 $彳天＝彳戊餘弦戊＝彳戊\sqrt{一丅天^{二}}$ 所以得 $彳戊＝\frac{\sqrt{一丅天^{二}}}{彳天}$

二式 設有 $戊＝弧(餘弦＝天)＝餘弦^{丅一}天$ 則 $天＝餘弦戊$ 而 $彳天＝丅彳戊正弦戊＝丅彳戊\sqrt{一丅天^{二}}$ 所以得 $彳戊＝\frac{\sqrt{一丅天^{二}}}{丅彳天}$

三式 設有 $戊＝弧(正切＝天)＝正切^{丅一}天$ 則 $天＝正切戊$ 而 $彳天＝彳戊(一丄天^{二})$ 所以得 $彳戊＝\frac{一丄天^{二}}{彳天}$

四式 設有 $戊＝弧(餘切＝天)＝餘切^{丅一}天$ 則 $天＝餘切戊$ 而 $彳天＝丅彳戊(一丄天^{二})$ 所以得 $彳戊＝\frac{一丄天^{二}}{丅彳天}$

五式 設有 $戊＝弧(正割＝天)＝正割^{丅一}天$ 則 $天＝正割戊$ 而 $彳天＝彳戊正割戊正切戊＝彳戊天\sqrt{天^{二}丅一}$ 所以得 $彳戊＝\frac{天\sqrt{天^{二}丅一}}{彳天}$

六式　設有 $戊=訥(訥訥=天)=訥訥^{丅}天$ 則依同法求得 $彳戊=\frac{天\,[天]\,一}{丅\,彳天}$

繁函數求微分諸題

第二十四款　以上各款已明越函數圓函數求微分之專法故玆款用其各法以求繁函數之微分

一題　設函數之式為 $戊=天^{地}$ 欲求其微分之式

此式為有變數天自乘至地方即為變數變方之函數也故可依對數之例令 $訥戊=地訥天$ 而 $亥=訥戊$ $人=訥天$ 則 $亥=地人$ 依第十款之例可得 $彳亥=地彳人\perp人彳地$ 故又可依第二十款之例令

$$彳亥=彳(訥戊)=\frac{彳戊}{戊}$$

$$彳人=彳(訥天)=\frac{彳天}{天}$$

則其 $\frac{彳戊}{戊}=\frac{地彳天}{天}\perp彳地訥天$ 故求得

$$彳戊\begin{cases}=戊\left[\frac{地彳天}{天}\perp彳地訥天\right]\\=天^{地}\left[\frac{地彳天}{天}\perp彳地訥天\right]\\=天^{地丅一}地彳天\perp天^{地}訥天彳地\end{cases}$$

二題　設函數之式為 $戊=天^{天}$ 欲求其微分之式

則可依前法求之得其微分之式為

$$彳戊=天^{天}(一\perp訥天)彳天$$

三題　設函數之式為 $戊=甲^{乙^{天}}$ 欲求其微分之式

則可令 $乙^{天}=地$ 則 $戊=甲^{地}$ 故又可依第十九款之例得

$$彳戊=訥甲\,甲^{地}彳地$$

$$彳地=訥乙\,乙^{天}彳天$$

所以得其微分之式為

$$彳戊=訥甲\,訥乙\,甲^{乙^{天}}乙^{天}彳天$$

四題　設函數之式爲 $戊=對\left(\dfrac{\sqrt{甲\perp天}}{天}\right)$ 欲求其微分之式

可令 $\dfrac{\sqrt{甲\perp天}}{天}=人$

則 $彳戊=\dfrac{人}{彳人}$

惟因 $彳人=\dfrac{甲\perp天}{彳天\sqrt{甲\perp天}\ \Big|\ \dfrac{\sqrt{甲\perp天}}{天彳天}}=\dfrac{(甲\perp天)^{\frac{三}{二}}}{甲彳天}$

故求得 $彳戊=\dfrac{天(甲\perp天)}{甲彳天}$

五題　設函數之式爲 $戊=對\left[\dfrac{\sqrt{一\perp天}\perp\sqrt{一\top天}}{\sqrt{一\perp天}\top\sqrt{一\top天}}\right]$ 欲求其微分之式

可令

$地=\sqrt{一\perp天}\perp\sqrt{一\top天}$

$人=\sqrt{一\perp天}\top\sqrt{一\top天}$

則 $戊=對\left[\dfrac{人}{地}\right]=對(地)\top對(人)$

而 $彳戊=\dfrac{地}{彳地}\top\dfrac{人}{彳人}$

惟因 $彳地=\dfrac{二\sqrt{一\perp天}}{彳天}\top\dfrac{二\sqrt{一\top天}}{彳天}=\dfrac{二\sqrt{一\top天^{二}}}{\top彳天}\left(\sqrt{一\perp天}\top\sqrt{一\top天}\right)$

即 $彳地=\dfrac{二\sqrt{一\top天^{二}}}{\top人彳天}$

又其 $彳人=\dfrac{二\sqrt{一\perp天}}{彳天}\perp\dfrac{二\sqrt{一\top天}}{彳天}=\dfrac{二\sqrt{一\top天^{二}}}{彳天}\left(\sqrt{一\perp天}\perp\sqrt{一\top天}\right)=\dfrac{二\sqrt{一\top天^{二}}}{地彳天}$

所以 $\dfrac{地}{彳地}\top\dfrac{人}{彳人}=\dfrac{二地\sqrt{一\top天^{二}}}{\top人彳天}\top\dfrac{二人\sqrt{一\top天^{二}}}{地彳天}=\dfrac{二地人\sqrt{一\top天^{二}}}{\top(地^{二}\perp人^{二})彳天}$

又因

$地^{二}\perp人^{二}=四$

$地人=二天$

所以求得 $彳戊=\dfrac{天\sqrt{一\top天^{二}}}{\top彳天}$

六題　設函數之式爲 $戊=對\left(天\perp\sqrt{一\top天^{二}}\right)$ 欲求其微分之式

如法求之得其微分之式爲 $彳戊=\dfrac{\sqrt{一\top天^{二}}}{彳天}$

七題　設函數之式爲 $戊=對\left[\dfrac{\sqrt{一\top天^{二}}\perp天}{\sqrt{一\top天^{二}}\top天}\right]^{二}$ 欲求其微分之式

如法求之得其微分之式爲 $彳戌＝\frac{一丄天^{二}}{彳天}$

第二十五款 此爲對函數圜函數在繁函數中之各題

一題 設函數之式爲 $戌＝對(正弦天)$ 欲求其微分之式

則如法求之得其微分之式爲

$彳戌＝\frac{正弦天}{彳餘弦天}＝彳餘切天$

二題 設函數之式爲 $戌＝對(正切天)$ 欲求其微分之式

則如法求之得其微分之式爲

$$彳戌\begin{cases}＝\frac{正切天}{彳正割^{二}天}\\ ＝\frac{正弦天\ 餘弦天}{彳天}\\ ＝\frac{正弦二天}{二彳天}\end{cases}$$

第二十六款 此款爲繁式角函數之題

一題 設函數之式爲 $戌＝正切^{丅一}天$ 欲求其微分之式

此式之意其天爲切線而戌爲其有此切線之弧故

可令 $人＝餘弦卯戌餘弦^{卯}戌$

而求其 $\frac{彳戌}{彳人}$ 則

$彳天＝\frac{正割戌}{彳戌}＝彳餘弦戌$

而

$$彳人\begin{cases}＝丅卯彳戌(正弦卯戌餘弦^{卯}戌丄餘弦卯戌正弦戌餘弦^{卯丅一}戌)\\ ＝丅卯彳戌餘弦^{卯丅一}戌(正弦卯戌餘弦戌丄餘弦卯戌正弦戌)\\ ＝丅卯彳戌餘弦^{卯丅一}戌正弦(卯丄一)戌\end{cases}$$

故

$\frac{彳戌}{彳人}＝丅卯正弦(卯丄一)戌餘弦^{卯丄一}戌$

二題 設函數之式爲 $戌＝餘切^{丅一}天$ 欲求其微分之式

則可令 $人＝正弦卯戌餘弦^{卯}戌$

而求其 $\frac{彳戌}{彳人}$ 則

$$彳人\begin{cases}＝卯彳戌(餘弦卯戌餘弦^{卯}戌丅正弦卯戌正弦戌餘弦^{卯丅一}戌)\\ ＝卯彳戌餘弦^{卯丅一}戌(餘弦卯戌餘弦戌丅正弦卯戌正弦戌)\\ ＝卯彳戌餘弦^{卯丅一}戌餘弦(卯丄一)戌\end{cases}$$

故求得其微

分之式爲

$\frac{\text{狀}}{\text{狄}}$ ＝卯餘弦（卯丨一）辰餘弦 戌$^{\text{此}}$

興化劉彝程校算

英國華里司輯

英國 傅蘭雅 口譯
金匱 華蘅芳 筆述

疊求微係數

第二十七款 凡將變數之任何函數求其微分則其所得之微係數必爲一新函數 此新函數亦可求其微分則其所得之微係數必又爲第二新函數 此第二新函數又可求其微分則其所得之微係數必又爲第三新函數 如是累求至微係數爲○而止 其每次所得之新函數均與原函數之形相類

如從原函數 $戊＝天^{卯}$ 可得 $\frac{彳戊}{彳天}＝卯天^{卯丅一}$ 若令 $己＝卯天^{卯丅一}$ 又可得 $\frac{彳己}{彳天}＝卯(卯丅一)天^{卯丅二}$ 再令 $午＝卯(卯丅一)天^{卯丅二}$

又可得 $\frac{彳午}{彳天}＝卯(卯丅一)(卯丅二)天^{卯丅三}$ 如是遞求之至其微係數爲常數則止惟亦有任求至多次而不止者

凡累次所得之新函數巳午未等類與原函數戊如何相關可用一記號以顯之

假如 $己＝\frac{彳戊}{彳天}$ $午＝\frac{彳己}{彳天}$ 則 $午＝\frac{彳\left(\frac{彳戊}{彳天}\right)}{彳天}$ 此式中之 $\frac{彳\left(\frac{彳戊}{彳天}\right)}{彳天}$ 可作 $\frac{彳^{二}戊}{彳天^{二}}$ 是也

如此則 $己＝\frac{彳戊}{彳天}$ $午＝\frac{彳己}{彳天}＝\frac{彳^{二}戊}{彳天^{二}}$ 所以凡用 $午＝\frac{彳^{二}戊}{彳天^{二}}$ 之式其意謂函數戊已求微係數兩次而午爲其第二新函數也

凡疊求微係數之時必視其 $彳天$ 如常數則可由新函數午而得 $未＝\frac{彳午}{彳天}＝\frac{彳^{三}戊}{彳天^{三}}$ 如是類推之累求至多次無不一例

惟其 $彳^{二}戊$ 與 $彳天^{二}$ 必用心別之切不可混視如 $彳^{三}戊$ 之意謂函數戊已求微分三次而 $彳天^{三}$ 之意乃言 $彳天$ 之三方也 $\frac{彳^{三}戊}{彳天^{三}}$ 者言其新函數爲第三次微係數也因其每次求微分時皆視前次之 $彳天$ 如常數故以 $彳天$ 之各方約之也

一式 設函數爲 $戊＝甲天^{卯}$ 若其指數卯爲正整之數如 $戊＝甲天^{五}$ 則疊求其微係數得

$$\frac{彳戊}{彳天}＝五甲天^{四}$$
$$\frac{彳^{二}戊}{彳天^{二}}＝四·五甲天^{三}$$
$$\frac{彳^{三}戊}{彳天^{三}}＝三·四·五甲天^{二}$$
$$\frac{彳^{四}戊}{彳天^{四}}＝二·三·四·五甲天$$
$$\frac{彳^{五}戊}{彳天^{五}}＝二·三·四·五甲$$

巳求至

微係爲常數故其級數必至此而盡。惟卯若爲負數或分數者則其級數不能盡。

凡每次之微係數各以其求微分之次數名之。如 $\frac{\text{彳天}}{\text{彳地}}$ 爲第一次微係數，$\frac{\text{彳天}^{二}}{\text{彳}^{二}\text{地}}$ 爲第二次微係數，$\frac{\text{彳天}^{三}}{\text{彳}^{三}\text{地}}$ 爲第三次微係數，其餘仿此類推。

如函數爲 $\text{地}=\text{天}^{五}$ 則名其 $\frac{\text{彳天}}{\text{彳地}}=\text{五天}^{四}$ 爲函數之第一次微分，$\frac{\text{彳天}^{二}}{\text{彳}^{二}\text{地}}=\text{二〇天}^{三}$ 爲第二次微分，$\frac{\text{彳天}^{三}}{\text{彳}^{三}\text{地}}=\text{六〇天}^{二}$ 爲第三次微分，其餘亦仿此類推。

茲又設各種函數之式以明疊求微係數之法

二式　設函數爲 $\text{地}=\text{甲}^{天}$ 欲求其各次微係數。

則如法疊求之得

$\frac{\text{彳天}}{\text{彳地}}=\text{訥甲}\;\text{甲}^{天}$

$\frac{\text{彳天}^{二}}{\text{彳}^{二}\text{地}}=(\text{訥甲})^{二}\,\text{甲}^{天}$

$\frac{\text{彳天}^{三}}{\text{彳}^{三}\text{地}}=(\text{訥甲})^{三}\,\text{甲}^{天}$

$\frac{\text{彳天}^{四}}{\text{彳}^{四}\text{地}}=(\text{訥甲})^{四}\,\text{甲}^{天}$

……

三式　設函數爲 $\text{地}=\text{對天}$ 欲求其各次微係數。

則如法疊求之得

$\frac{\text{彳天}}{\text{彳地}}=\frac{\text{天}}{\text{寅}}$

$\frac{\text{彳天}^{二}}{\text{彳}^{二}\text{地}}=丅\frac{\text{天}^{二}}{\text{寅}}$

$\frac{\text{彳天}^{三}}{\text{彳}^{三}\text{地}}=丄\frac{\text{天}^{三}}{\text{一・二寅}}$

$\frac{\text{彳天}^{四}}{\text{彳}^{四}\text{地}}=丅\frac{\text{天}^{四}}{\text{一・二・三寅}}$

……

四式　設函數爲 $\text{地}=\text{正弦天}$ 欲求其各次微係數。

則如法疊求之得

$\frac{\text{彳天}}{\text{彳地}}=\text{餘弦天}$

$\frac{\text{彳天}^{二}}{\text{彳}^{二}\text{地}}=丅\text{正弦天}$

$\frac{\text{彳天}^{三}}{\text{彳}^{三}\text{地}}=丅\text{餘弦天}$

$\frac{\text{彳天}^{四}}{\text{彳}^{四}\text{地}}=\text{正弦天}$

……

五式　設函數爲 $\text{地}=\text{餘弦天}$ 欲求其各次微係數。

則如法疊求之得

$\frac{\text{彳天}}{\text{彳地}}=丅\text{正弦天}$

$\frac{\text{彳天}^{二}}{\text{彳}^{二}\text{地}}=丅\text{餘弦天}$

$\frac{\text{彳天}^{三}}{\text{彳}^{三}\text{地}}=\text{正弦天}$

$\frac{\text{彳天}^{四}}{\text{彳}^{四}\text{地}}=\text{餘弦天}$

……

六式　設函數爲 $\text{地}=\frac{\text{甲}^{二}丅\text{天}^{二}}{\text{甲}}$ 欲求其各次微係數。

則如法疊求之得

$\frac{\text{彳天}}{\text{彳地}}=\frac{(\text{甲}^{二}丅\text{天}^{二})}{丅\text{二甲天}}$

$\frac{\text{彳天}^{二}}{\text{彳}^{二}\text{地}}=\frac{(\text{甲}^{二}丅\text{天}^{二})^{二}}{丅\text{二甲}^{二}丅\text{六甲天}^{二}}$

$\frac{\text{彳天}^{三}}{\text{彳}^{三}\text{地}}=\frac{(\text{甲}^{二}丅\text{天}^{二})^{三}}{\text{二四甲天}丅\text{二四甲天}^{三}}$

……

論戴勞所設之例

第二十八款　戴氏之術其源亦從尤拉之紀函數法而生，故茲款先論尤拉之法。

如令函(天)爲變數天之任何函數以天丄辛代其天而令其新函數爲函(天丄辛)則此式可詳之爲級數函(天)丄巳辛丄午辛^{二}丄未辛^{三}丄……其巳午未各數爲天之他新函數由原函數而生皆與辛無涉

第二十九款　上款之例爲尤拉所設後有拉果闌諸著書論函數嘗證此例不誤茲節錄其證法如下

凡詳天丄辛所成之新函數爲級數因其天爲不定之數故諸項中辛之各方不能有分數之指數

因辛之根指數必從原函數之根指數而出故易知以天丄辛代天之時仍爲不定之數則與不加辛無異故其形不能與原式不類　若反言之則可云依各次方程式之例其式之根有若干同數必等于原式根指數之數由此可見凡虛函數內有若干不同之根其數必等于所有之各根和數

所以若將函(天丄辛)詳之爲級數而初項中有戊辛$^{\frac{寅}{卯}}$之形者其函(天)必爲虛式且必有若干箇不同之根　若他項中之辛有分指數者亦然

若詳得之級數其形如函(天)丄巳辛丄午辛^{二}丄未辛^{三}丄……者則其函(天)之各同數可與根式$\sqrt[卯]{天^{寅}}$所有之卯箇各同數相合所以函(天丄辛)之級數其同數不能比此更多

依此證法則知凡以天與辛爲不定之數則此例絕無誤處　若其天有任何一定之同數者則此例有時不可通因其中之定同數每能滅去函(天)內之數箇同數而其函(天丄辛)中之同數不能與之同滅所以不可通

第三十款　前款已證明凡詳變數天之任何新函數爲級數者其各項中之辛不能有分指數故可知各項中辛之方數亦不能爲負數　若級數之各項中有一項爲$\frac{未}{辛^{寅}}$其寅爲正整之數者則令辛＝〇之時此項必變爲無窮大而其函(天丄辛)與函(天)亦必變爲無窮大惟依天爲變數之意其天既可大可小無一定之同數何以此項能恆爲無窮所以知級數各項中

之辛必不能有負數及分數為其指數．

第三十一款．

以上已證明函(天丄辛)之級數其公式必為函(天丄辛)=函(天)丄巳辛丄午辛^{二}丄未辛^{三}丄……今本款欲攷明原函數函(天)與他函數巳午未各數相關之理．西歷紀歲一千七百○五年間有英國算學之士名戴勞者，始攷明此理，立一求級數之公法，其立術之源詳見戴氏所著之書中．茲述其法如下．

法以天之任何函數為函(天)=戊．令天變為天丄辛則得函(天丄辛)=戊丄巳辛丄午辛^{二}丄未辛^{三}丄申辛^{四}丄……(一)．設以天代其天丄辛，再變為天丄子，則子辛二數皆與天無相關．所以天丄辛變為天丄辛丄子，而函(天丄辛)變為函(天丄辛丄子)．若欲求其(天丄辛)=戊丄巳辛丄午辛^{二}丄未辛^{三}丄……(一)所變之新式，則有兩法．一可令辛丄子代(一)式中之辛而詳其各項為級數，則得

函(天丄辛丄子)=

戊丄巳辛丄午辛^{二}丄未辛^{三}丄申辛^{四}丄……

丄巳子丄二午辛子丄三未辛^{二}子丄四申辛^{三}子丄……

丄午子^{二}丄三未辛子^{二}丄六申辛^{二}子^{二}丄……

丄未子^{三}丄四申辛子^{三}丄……

丄申子^{四}……．

又一法可令天丄子代其天而詳其(一)式之巳午未各函數為級數，其詳法如左．

惟因函(天)=戊，若天變為天丄子，則戊變為戊丄巳子丄午子^{二}丄未子^{三}丄申子^{四}丄……．此式中之子宛如(一)式函(天丄辛)=戊丄巳辛丄午辛^{二}丄未辛^{三}丄……中之辛．設函(天丄辛)式中之天變為天丄子，則其各項中之乘

數必變爲 巳=巳|巳子|巳子²|巳子³…… 午=午|午子|午子²|午子³…… 未=未|未子|未子²|未子³…… 申=申|申子|申子²|申子³…… 其巳午未巳辛未各數爲天

從巳午未所生之函數故得 函(天)(辛子) = 戊|巳子|午子²|未子³|申子⁴…… |巳辛|巳辛子|巳辛子²|巳辛子³…… |午辛²|午辛²子|午辛²子²…… |未辛³|未辛³子…… |申辛⁴…… |……

乃將兩法所求得之函(天)(辛子)二級數齊其各項合辛與子相似之各方及其乘數倍數皆彼此相等 案此即用第十八款之法也

則必得 二午=巳午 三未=午未 四申=未申 …… 所以 午=二巳 未=三午 申=四未 …… 惟依微分之理其巳爲 戊巳辛|…… 級數中辛之倍數所以 巳=$\frac{\text{微戊}}{\text{微天}}$ 又其午爲午求微分時所得之微係數 午|午辛|…… 級數中子之倍數所以

得 午=$\frac{\text{微午}}{\text{微天}}$ 又以同理得 未=$\frac{\text{微未}}{\text{微天}}$ 申=$\frac{\text{微申}}{\text{微天}}$ 其他仿此類推

所以共得 巳=$\frac{\text{微戊}}{\text{微天}}$ 午=$\frac{\text{二巳}}{\text{二}}$=…… 未=…… 申=…… 乃以此各同數代入 戊巳辛|午辛²|未辛³|申辛⁴…… 之各項中則(一)式變爲 函(天辛)=戊|$\frac{\text{微戊}}{\text{微天}}$辛|…… 而其戊爲函(天)此乃戴勞所設之例也

第三十二款 茲用他法以求戴勞之級數比前法更捷

法以戊爲亥人之任何函數則 戊=函(亥人) 此式中之亥與人無論以何者爲變數何者爲常數其微係數必同試設數式以明之

設有式 戊=(亥人) 如令亥爲變數人爲常數則 $\frac{\text{微戊}}{\text{微亥}}$=卯(亥人)^{卯一} 如令人爲變數亥爲常數則 $\frac{\text{微戊}}{\text{微人}}$=卯(亥人)^{卯一} 可見其微係數之形無異

設有式 $戊＝甲^{\frac{地}{人}}－甲^{\frac{天}{人}}$ 則其 $\frac{彳戊}{彳天}$ 與 $\frac{彳戊}{彳地}$ 皆爲 $甲^{\frac{天}{人}}(\frac{甲}{人})$ 即 $甲^{\frac{地}{人}}(\frac{甲}{人})$

更有一證大約必能自明

設有 $亥\bot人＝天$ 而 $函(亥\bot人)＝函(天)$ 則無論令亥變爲 $亥\bot辛$ 而人不變或令人變爲 $人\bot辛$ 而亥不變俱得 $函(亥\bot人\bot辛)＝函(天\bot辛)$ 其級數之公式 $函(天)\bot巳\bot午辛\bot未辛\bot申辛\cdots\cdots$ 無論亥與人彼此迭爲常變其各項中之倍數巳午未各數恆必有一定之同數

惟依第七款之例既有 $巳＝\frac{彳天}{彳函(天)}＝\frac{彳(亥\bot人)}{彳函(亥\bot人)}$ 又知亥爲變數人爲常數則 $巳＝\frac{彳亥}{彳函(亥\bot人)}$ 人爲變數亥爲常數則 $巳＝\frac{彳人}{彳函(亥\bot人)}$ 所以 $\frac{彳亥}{彳函(亥\bot人)}＝\frac{彳人}{彳函(亥\bot人)}$ 此式之左右兩邊爲 $函(亥\bot人)$ 式中亥與人彼此互相爲常變二數所求得之偏微係數惟因其數恆相同故 $\frac{彳亥}{彳函(亥\bot人)}$ 與 $\frac{彳人}{彳函(亥\bot人)}$ 均爲 $亥\bot人$ 之新函數所以可用 $函(亥\bot人)$ 以紀之

依此理又可從 $\frac{彳亥}{彳函(亥\bot人)}＝\frac{彳人}{彳函(亥\bot人)}$ 而得 $\frac{彳^二亥}{彳函(亥\bot人)}＝\frac{彳^二人}{彳函(亥\bot人)}$ 如此則可見 $函(亥\bot人)$ 之第二次微係數亦無論亥爲變數人爲常數或人爲變數亥爲常數其所得之數必同由是推之可知各次之微係數莫不如是

第三十三款

再設 $函天＝戊$ 爲天之任何函數若天變爲 $天\bot辛$ 則戊變爲 $函(天\bot辛)＝戊$ 此式已于第二十九款及三十款證明 $戊＝戊\bot巳辛\bot午辛^二\bot未辛^三\bot\cdots\cdots$ 其巳午未各數

俱爲天之他函數而與辛絕不相關惟因戊既與右邊之諸項相等則其微係數亦必相等故無論辛天兩項彼此孰爲常變亦必如是　設先以天爲變數辛爲常數求得

$$\frac{彳戊}{彳天}=\frac{彳巳}{彳天}\perp\frac{彳午}{彳天}辛\perp\frac{彳未}{彳天}\frac{辛^{二}}{}\perp\frac{彳申}{彳天}辛^{三}\cdots\cdots$$

㈠另以辛爲變數天爲常數求得

$$\frac{彳戊}{彳辛}=巳\perp二午辛\perp三未辛^{二}\perp四申辛^{三}\cdots\cdots$$

㈡

又依上款之證知 $\frac{彳戊}{彳天}=\frac{彳戊}{彳辛}$ 所以知㈠㈡兩式右邊之級數必彼此相等則其各項亦必挨次相等因兩式之各項中辛之各方既相等則凡與辛無涉之項以及辛同方之倍數亦必各挨次相等故知

$$巳=\frac{彳戊}{彳天},\quad 二午=\frac{彳巳}{彳天},\quad 三未=\frac{彳午}{彳天},\quad 四申=\frac{彳未}{彳天}\cdots\cdots$$

因此知 $巳=\frac{彳戊}{彳天}$ 則

$$午=\frac{一}{二}\times\frac{彳巳}{彳天}=\frac{一}{二}\times\frac{彳^{二}戊}{彳天^{二}}$$

$$未=\frac{一}{三}\times\frac{彳午}{彳天}=\frac{一}{二\cdot三}\times\frac{彳^{三}戊}{彳天^{三}}$$

$$申=\frac{一}{四}\times\frac{彳未}{彳天}=\frac{一}{二\cdot三\cdot四}\times\frac{彳^{四}戊}{彳天^{四}}$$

以下各級數可依此類推

所以得總式

$$函(天\perp辛)=戊\perp\frac{彳戊}{彳天}辛\perp\frac{彳^{二}戊}{彳天^{二}}\times\frac{辛^{二}}{二}\perp\frac{彳^{三}戊}{彳天^{三}}\times\frac{辛^{三}}{二\cdot三}\cdots\cdots$$

由此可見天之任何長數爲辛則天之任何函數戊之長數必爲

$$戊\perp\frac{彳戊}{彳天}\times\frac{辛}{一}\perp\frac{彳^{二}戊}{彳天^{二}}\times\frac{辛^{二}}{一\cdot二}\perp\frac{彳^{三}戊}{彳天^{三}}\times\frac{辛^{三}}{一\cdot二\cdot三}\cdots\cdots$$

此式與戴之式無異

成此級數之法遞求函數之各次微係數而以辛之各次整方乘之又以一、一·二、一·二·三各數挨次約之即得

第三十四款　茲將戴勞之法詳各函數爲級數

設函(天)爲 $戊=天^{卯}$ 欲以戴氏之術詳之爲級數

則令 $函(天\perp辛)=(天\perp辛)^{卯}$ 依第十三款及第二十七款之例疊求其各次微係數得

$$\frac{彳戊}{彳天}=卯天^{卯丅一}$$

$$\frac{彳^{二}戊}{彳天^{二}}=卯(卯丅一)天^{卯丅二}$$

$$\frac{彳^{三}戊}{彳天^{三}}=卯(卯丅一)(卯丅二)天^{卯丅三}$$

$$\frac{彳^{四}戊}{彳天^{四}}=卯(卯丅一)(卯丅二)(卯丅三)天^{卯丅四}$$

$$\cdots\cdots$$

以此各同數

代入戴氏之公式中卽得 $(天\,丄\,辛)^{甲} = 天^{甲}\,丄\,\frac{甲}{一}\,天^{甲\,丅\,一}\,辛\,丄\,\frac{甲(甲\,丅\,一)}{一\cdot二}\,天^{甲\,丅\,二}\,辛^{二}\,丄\,\frac{甲(甲\,丅\,一)(甲\,丅\,二)}{一\cdot二\cdot三}\,天^{甲\,丅\,三}\,辛^{三}\,丄\cdots$ 此爲二項例之式與代數術第一百六十款中所詳之式合.

第三十五款

設 $函(天)$ 爲 $甲^{天}$ 此式爲常數之變方欲詳之爲級數.

則令 $微 = (甲\,丅\,一)\,丅\,\frac{(甲\,丅\,一)^{二}}{二}\,丄\,\frac{(甲\,丅\,一)^{三}}{三}\,丅\,\frac{(甲\,丅\,一)^{四}}{四}\,丄\cdots$ 此爲甲之訥對級數乃依第十九款之法疊求其各微係數得

$$\frac{伏函}{伏天} = 微\,甲^{天}$$

$$\frac{伏^{二}函}{伏天^{二}} = 微^{二}\,甲^{天}$$

$$\frac{伏^{三}函}{伏天^{三}} = 微^{三}\,甲^{天}$$

$$\frac{伏^{四}函}{伏天^{四}} = 微^{四}\,甲^{天}$$

$$\cdots\cdots$$

又因 $函(天\,丄\,辛) = 甲^{天\,丄\,辛} = 甲^{天}\,甲^{辛}$ 所以得

$$甲^{天}\,甲^{辛} = 甲^{天}\,丄\,微\,甲^{天}\,辛\,丄\,\frac{微^{二}\,甲^{天}\,辛^{二}}{一\cdot二}\,丄\,\frac{微^{三}\,甲^{天}\,辛^{三}}{一\cdot二\cdot三}\,丄\,\frac{微^{四}\,甲^{天}\,辛^{四}}{一\cdot二\cdot三\cdot四}\,丄\cdots$$

若將此式之兩邊俱以 $甲^{天}$ 約之而以天代其辛則得

$$甲^{天} = 一\,丄\,微天\,丄\,\frac{微^{二}\,天^{二}}{一\cdot二}\,丄\,\frac{微^{三}\,天^{三}}{一\cdot二\cdot三}\,丄\,\frac{微^{四}\,天^{四}}{一\cdot二\cdot三\cdot四}\,丄\cdots$$

如令 $天 = 一$ 則得

$$甲 = 一\,丄\,微\,丄\,\frac{微^{二}}{一\cdot二}\,丄\,\frac{微^{三}}{一\cdot二\cdot三}\,丄\,\frac{微^{四}}{一\cdot二\cdot三\cdot四}\,丄\cdots$$

如令 $天 = \frac{一}{微}$ 則得

$$甲^{\frac{一}{微}} = 一\,丄\,一\,丄\,\frac{一}{一\cdot二}\,丄\,\frac{一}{一\cdot二\cdot三}\,丄\,\frac{一}{一\cdot二\cdot三\cdot四}\,丄\cdots$$

由此可見 $甲^{\frac{一}{微}}$ 之同數爲常數如將其各項合爲一數則得

$$甲^{\frac{一}{微}} = 二\cdot七一八二八一八二八四五九$$

此數卽爲訥對之底因其爲以後所常用之數故以戊字代之爲 $甲^{\frac{一}{微}} = 戊$ 則 $甲 = 戊^{微}$ 而

$$戊^{微天} = 一\,丄\,微天\,丄\,\frac{微^{二}\,天^{二}}{一\cdot二}\,丄\,\frac{微^{三}\,天^{三}}{一\cdot二\cdot三}\,丄\,\frac{微^{四}\,天^{四}}{一\cdot二\cdot三\cdot四}\,丄\cdots$$

如令 $地 = 微天$ 則

$$戊^{地} = 一\,丄\,地\,丄\,\frac{地^{二}}{一\cdot二}\,丄\,\frac{地^{三}}{一\cdot二\cdot三}\,丄\,\frac{地^{四}}{一\cdot二\cdot三\cdot四}\,丄\cdots$$

從

此式可見戊之性情甚奇

第三十六款

設 $函(天)$ 為 $戊=對天$ 此為甲底之對數 欲詳之為級數 則可依第二十款之例疊求其微係數得

$$\frac{彳戊}{彳天}=\frac{一}{呷天}$$

$$\frac{彳^{二}戊}{彳天^{二}}=丅\frac{一}{呷天^{二}}$$

$$\frac{彳^{三}戊}{彳天^{三}}=\frac{一\cdot二}{呷天^{三}}$$

$$\frac{彳^{四}戊}{彳天^{四}}=丅\frac{一\cdot二\cdot三}{呷天^{四}}$$

$$\frac{彳^{五}戊}{彳天^{五}}=\frac{一\cdot二\cdot三\cdot四}{呷天^{五}}$$

……

以此各同數代入戴氏之公式中則得

$$函(天丄辛)=對(天丄辛)=$$

$$對天丄\frac{一}{呷}\left[\frac{辛}{天}丅\frac{辛^{二}}{二天^{二}}丄\frac{辛^{三}}{三天^{三}}丅\frac{辛^{四}}{四天^{四}}丄\cdots\right]$$

如令

$$天=一$$

$$對一=〇$$

又以天代其辛則得

$$對(一丄天)=\frac{一}{呷}\left[天丅\frac{天^{二}}{二}丄\frac{天^{三}}{三}丅\frac{天^{四}}{四}丄\cdots\right]$$

此為 $一丄天$ 之甲底對數

又因前款中曾言 $甲=戊^{呷}$ 而其

$$呷=(甲丅一)丅\frac{(甲丅一)^{二}}{二}丄\frac{(甲丅一)^{三}}{三}丅\frac{(甲丅一)^{四}}{四}丄\cdots$$

依代數術第十八卷之理則呷為戊底之甲對所以

$$對甲=(甲丅一)丅\frac{(甲丅一)^{二}}{二}丄\frac{(甲丅一)^{三}}{三}丅\frac{(甲丅一)^{四}}{四}丄\cdots$$

此式中如以 $一丄天$ 代其甲又以天代其呷則得

$$對(一丄天)=天丅\frac{天^{二}}{二}丄\frac{天^{三}}{三}丅\frac{天^{四}}{四}丄\frac{天^{五}}{五}丅\frac{天^{六}}{六}丄\cdots$$

此式為 $一丄天$ 之戊底對數

合觀以上所得戊底甲底兩種對數之式可見戊底之

對數式中其常數呷必為

$$\text{呷}=\frac{\text{一}}{(\text{甲}-\text{一})-\frac{(\text{甲}-\text{一})^{\text{二}}}{\text{二}}+\frac{(\text{甲}-\text{一})^{\text{三}}}{\text{三}}-\frac{(\text{甲}-\text{一})^{\text{四}}}{\text{四}}+\cdots}$$

此即訥對之根也。

凡言戊底之對數者，皆為訥白爾對數，其戊之同數恆為二·七一八二八一八二八四五九有奇。昔人因其能明雙曲線之面積，故謂之雙曲線對數（此名今已不用）。近時之人即名之曰訥對。凡遇訥對之式，皆以訥字別之。所以戊底之對數恆作

$$\text{訥}(\text{一}+\text{天})=\text{天}-\frac{\text{天}^{\text{二}}}{\text{二}}+\frac{\text{天}^{\text{三}}}{\text{三}}-\frac{\text{天}^{\text{四}}}{\text{四}}+\frac{\text{天}^{\text{五}}}{\text{五}}-\cdots$$

又因前款曾證 $\text{呷}=\frac{\text{一}}{\text{訥甲}}$，所以凡甲底之對數恆作

$$\text{對}(\text{一}+\text{天})=\frac{\text{一}}{\text{訥甲}}\left[\text{天}-\frac{\text{天}^{\text{二}}}{\text{二}}+\frac{\text{天}^{\text{三}}}{\text{三}}-\frac{\text{天}^{\text{四}}}{\text{四}}+\cdots\right]$$

其常乘數 $\frac{\text{一}}{\text{訥甲}}$ 名曰對數之根。

布里格斯（即巴理知也）所設之對數表，其甲＝一〇，故謂之十進對數。其

$$\text{訥}(\text{一〇})=\text{二·三〇二五八五〇九二九九四}$$

而

$$\frac{\text{一}}{\text{訥}(\text{一〇})}=\text{·四三四二九四四八一九〇三}$$

此為常對數之根。

第三十七款

設有 $\text{函}(\text{天})=\text{戊}=\text{正弦天}$，欲詳之為級數，則如法疊求其各次之微係數得

$$\frac{\text{微戊}}{\text{微天}}=\text{餘弦天}$$
$$\frac{\text{微}^{\text{二}}\text{戊}}{\text{微天}^{\text{二}}}=-\text{正弦天}$$
$$\frac{\text{微}^{\text{三}}\text{戊}}{\text{微天}^{\text{三}}}=-\text{餘弦天}$$
$$\frac{\text{微}^{\text{四}}\text{戊}}{\text{微天}^{\text{四}}}=\text{正弦天}$$
$$\frac{\text{微}^{\text{五}}\text{戊}}{\text{微天}^{\text{五}}}=\text{餘弦天}$$
$$\cdots\cdots$$

以此各同數代入戴氏之公式得

$$\text{函}(\text{天}+\text{辛})=\text{正弦}(\text{天}+\text{辛})=\text{正弦天}+\text{餘弦天}\frac{\text{辛}}{\text{一}}-\text{正弦天}\frac{\text{辛}^{\text{二}}}{\text{一·二}}-\text{餘弦天}\frac{\text{辛}^{\text{三}}}{\text{一·二·三}}+\text{正弦天}\frac{\text{辛}^{\text{四}}}{\text{一·二·三·四}}+\cdots\cdots$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\text{正弦天}\left[\text{一}-\frac{\text{辛}^{\text{二}}}{\text{一·二}}+\frac{\text{辛}^{\text{四}}}{\text{一·二·三·四}}-\frac{\text{辛}^{\text{六}}}{\text{一·二·三·四·五·六}}+\cdots\right]\\+\text{餘弦天}\left[\text{辛}-\frac{\text{辛}^{\text{三}}}{\text{一·二·三}}+\frac{\text{辛}^{\text{五}}}{\text{一·二·三·四·五}}-\frac{\text{辛}^{\text{七}}}{\text{一·二·三·四·五·六·七}}+\cdots\right]\end{array}\right.$$

設有 函(天)＝餘弦天 欲詳之爲級數，則如法疊求其各次之微係數得

$\frac{微}{微天}$＝－正弦天

$\frac{微^{二}}{微天^{二}}$＝－餘弦天

$\frac{微^{三}}{微天^{三}}$＝正弦天

$\frac{微^{四}}{微天^{四}}$＝餘弦天

$\frac{微^{五}}{微天^{五}}$＝－正弦天

……

以此各同數代入戴氏之公式得

函(天＋辛)＝餘弦(天＋辛)＝餘弦天－正弦天 $\frac{辛}{一}$－餘弦天 $\frac{辛^{二}}{一·二}$＋正弦天 $\frac{辛^{三}}{一·二·三}$＋餘弦天 $\frac{辛^{四}}{一·二·三·四}$……

＝餘弦天 $\left[一－\frac{辛^{二}}{一·二}＋\frac{辛^{四}}{一·二·三·四}－\frac{辛^{六}}{一·二·三·四·五·六}……\right]$

－正弦天 $\left[辛－\frac{辛^{三}}{一·二·三}＋\frac{辛^{五}}{一·二·三·四·五}－\frac{辛^{七}}{一·二·三·四·五·六·七}……\right]$

如令

吧＝一－$\frac{辛^{二}}{一·二}$＋$\frac{辛^{四}}{一·二·三·四}$－$\frac{辛^{六}}{一·二·三·四·五·六}$……

吽＝辛－$\frac{辛^{三}}{一·二·三}$＋$\frac{辛^{五}}{一·二·三·四·五}$－$\frac{辛^{七}}{一·二·三·四·五·六·七}$……

以代入所得之兩級數中則得

正弦(天＋辛)＝吧正弦天＋吽餘弦天

餘弦(天＋辛)＝吧餘弦天－吽正弦天

若將其吽吧更迭消去則得

吧＝餘弦天 餘弦(天＋辛)＋正弦天 正弦(天＋辛)

吽＝正弦天 餘弦(天＋辛)－餘弦天 正弦(天＋辛)

又依代數術第二百三十九款令

餘弦辛＝吧

正弦辛＝吽

又以天代其辛則得

餘弦天＝一－$\frac{天^{二}}{一·二}$＋$\frac{天^{四}}{一·二·三·四}$－$\frac{天^{六}}{一·二·三·四·五·六}$……

正弦天＝天－$\frac{天^{三}}{一·二·三}$＋$\frac{天^{五}}{一·二·三·四·五}$－$\frac{天^{七}}{一·二·三·四·五·六·七}$……

案此兩式若于 正弦(天＋辛)、餘弦(天＋辛) 之級數中令天＝○，即可得之，其曲折比此更省。

第三十八款

設以切線爲天而求其弧函數之級數。

則令 戌＝正切天 從第二十三款得

$\frac{微戌}{微天}$＝$\frac{一}{一＋天^{二}}$＝餘弦^{二}戌

$\frac{微^{二}戌}{微天^{二}}$＝－餘弦戌 餘弦戌 ……

欲疊求其各次之微係數，可依第二十六款所設之第一第二兩式，求繁式角函數微分之法疊求之，則得其各次之微係數如左。

如依一式得 $\frac{\text{氐}}{\text{微}}=\top\text{正弦二戊}\,\text{餘弦}^{\text{二}}\text{戊}$ 依二式得 $\frac{\text{三氐}}{\text{微}}=\top\text{二餘弦三戊}\,\text{餘弦}^{\text{三}}\text{戊}$ 又依一式得 $\frac{\text{四氐}}{\text{微}}=\text{二三正弦四戊}\,\text{餘弦}^{\text{四}}\text{戊}$

又依二式得 $\frac{\text{五氐}}{\text{微}}=\text{二三四餘弦五戊}\,\text{餘弦}^{\text{五}}\text{戊}$ 又依一式二式得 $\frac{\text{六氐}}{\text{微}}=\top\text{二三四五正弦六戊}\,\text{餘弦}^{\text{六}}\text{戊}$ $\frac{\text{七氐}}{\text{微}}=\top\text{二三四五六餘弦七戊}\,\text{餘弦}^{\text{七}}\text{戊}$ ……

以此各次微係數之同數代入戴氏之公式中又令 正切戊＝天 正切戊＝天丄辛 則得

$$\begin{aligned}\text{戊}=\text{戊}&\perp\text{餘弦戊}\,\text{餘弦戊}\frac{\text{一}}{\text{辛}}\\&\top\text{正弦二戊}\,\text{餘弦}^{\text{二}}\text{戊}\frac{\text{二}}{\text{辛}^{\text{二}}}\\&\top\text{餘弦三戊}\,\text{餘弦}^{\text{三}}\text{戊}\frac{\text{三}}{\text{辛}^{\text{三}}}\\&\perp\text{正弦四戊}\,\text{餘弦}^{\text{四}}\text{戊}\frac{\text{四}}{\text{辛}^{\text{四}}}\\&\perp\text{餘弦五戊}\,\text{餘弦}^{\text{五}}\text{戊}\frac{\text{五}}{\text{辛}^{\text{五}}}\\&\top\text{正弦六戊}\,\text{餘弦}^{\text{六}}\text{戊}\frac{\text{六}}{\text{辛}^{\text{六}}}\\&\top\cdots\cdots\end{aligned}$$

此為弧背最密之率 如令戊弧為〇則 正弦戊 正弦二戊 …… 各等于〇而 餘弦戊 之各方皆等于一故其式變為

$$\text{戊}=\text{正切戊}\perp\frac{\text{三}}{\text{正切}^{\text{三}}\text{戊}}\top\frac{\text{五}}{\text{正切}^{\text{五}}\text{戊}}\perp\frac{\text{七}}{\text{正切}^{\text{七}}\text{戊}}\top\cdots\cdots$$

此即古累固里所設之級數也

案代數術第二百七十款中亦有求此級數之法與此款之法絕不相同而所得之式無異若令平圓之半徑為一而以其半周為周率則周率為三一四一五九二六五三五八九有奇

論馬格老臨之例

第三十九款 馬格老臨之級數公式見于其所著之流數術中其立術之理與戴氏之術相通

前已攷知如令 $\text{函}(\text{天})=\text{戊}$ 為任何變數天之任何函數則其詳得之式為

$$\text{函}(\text{天}\perp\text{辛})=\text{戊}\top\frac{\text{氐}}{\text{微}}\text{辛}\top\frac{\text{二氐}}{\text{微}}\times\frac{\text{一二}}{\text{辛}^{\text{二}}}\top\frac{\text{三氐}}{\text{微}}\times\frac{\text{一二三}}{\text{辛}^{\text{三}}}\top\cdots\cdots$$

如令 $\text{天}=〇$ 而 $\text{函}(\text{天})=\text{戊}$ 變為 戊 其 $\frac{\text{氐}}{\text{微}}$ 變為 戊 其 $\frac{\text{二氐}}{\text{微}}$ 變為 戊 以下類推則戴氏式變為

$$\text{函}(\text{辛})=\text{戊}\top\text{戊辛}\top\text{戊}\frac{\text{一二}}{\text{辛}^{\text{二}}}\top\text{戊}\frac{\text{一二三}}{\text{辛}^{\text{三}}}\top\cdots\cdots$$

其

以天代其辛則得 $函(天)=𠵷+𠵷'天+\frac{𠵷''天^{二}}{一\cdot二}+\frac{𠵷'''天^{三}}{一\cdot二\cdot三}+\cdots$ 由此可見天之函數戊若詳之為級數而有 $戊=呷+吆天+㕦天^{二}+叮天^{三}+\cdots$ 之形者則其呷吆㕦叮各倍數俱為常數此因 $天=〇$ 之時其𠵷必同于戊而其 $\frac{彳𠵷}{}$ $\frac{彳^{二}𠵷}{}$ $\frac{彳^{三}𠵷}{}$ 各數必同于各次之微係數 $\frac{彳戊}{彳天}$, $\frac{彳^{二}戊}{彳天^{二}}$, $\frac{彳^{三}戊}{彳天^{三}}$ 故知 $呷=𠵷$, $吆=𠵷'$, $㕦=\frac{𠵷''}{二}$, $叮=\frac{𠵷'''}{二\cdot三}$ ……

所以得 $戊=𠵷+𠵷'天+\frac{𠵷''天^{二}}{一\cdot二}+\frac{𠵷'''天^{三}}{一\cdot二\cdot三}+\cdots$ 此為馬格老臨所設之式.

第四十款 茲設數題以明馬氏術之用.

設有函數 $戊=(甲+天)^{卯}$ 欲詳之為級數, 則疊求各次之微係數 得

$\frac{彳戊}{彳天}=卯(甲+天)^{卯-一}$,

$\frac{彳^{二}戊}{彳天^{二}}=卯(卯-一)(甲+天)^{卯-二}$,

$\frac{彳^{三}戊}{彳天^{三}}=卯(卯-一)(卯-二)(甲+天)^{卯-三}$,

……

令 $天=〇$ 則

$戊=甲^{卯}=𠵷$,

$\frac{彳戊}{彳天}=卯甲^{卯-一}=𠵷'$,

$\frac{彳^{二}戊}{彳天^{二}}=卯(卯-一)甲^{卯-二}=𠵷''$,

$\frac{彳^{三}戊}{彳天^{三}}=卯(卯-一)(卯-二)甲^{卯-三}=𠵷'''$,

……

代入馬氏式即得

$(甲+天)^{卯}=甲^{卯}+卯甲^{卯-一}天+\frac{卯(卯-一)甲^{卯-二}天^{二}}{一\cdot二}+\frac{卯(卯-一)(卯-二)甲^{卯-三}天^{三}}{一\cdot二\cdot三}+\cdots$

第四十一款

設有 $戊=甲^{天}$ 亦可用馬氏式詳之為級數.

依第十九款之法令 $呷=訥甲$ 則

$\frac{彳戊}{彳天}=呷甲^{天}$,

$\frac{彳^{二}戊}{彳天^{二}}=呷^{二}甲^{天}$,

$\frac{彳^{三}戊}{彳天^{三}}=呷^{三}甲^{天}$,

……

又令 $天=〇$ 則

$戊=一$,

$\frac{彳戊}{彳天}=呷$,

$\frac{彳^{二}戊}{彳天^{二}}=呷^{二}$,

$\frac{彳^{三}戊}{彳天^{三}}=呷^{三}$,

……

從馬氏式得

$甲^{天}=一+呷天+\frac{呷^{二}天^{二}}{一\cdot二}+\frac{呷^{三}天^{三}}{一\cdot二\cdot三}+\cdots$

則與

用戴氏之法（第三十五款）所得之式同

第四十二款

設有 戊＝對卯天 則用馬氏之術不能詳之為級數

此因其 甲卯天 $\frac{\text{甲卯天}}{\text{天微}}$ 如令 天＝○ 則 戊 及 $\frac{\text{戊微}}{\text{天微}}$ 與以下各次之微係數俱變為無窮所以其級數不能以馬氏之術求之

如有 戊＝對（卯丄天） 則可用馬氏之術詳之為級數

依第二十款之法疊求微係數得 $\frac{\text{戊微}}{\text{天微}}=\frac{\text{甲卯}}{\text{卯丄天}}$ $\frac{\text{二戊微}}{\text{二天微}}=\text{丅}\frac{\text{甲卯}}{(\text{卯丄天})^{二}}$ $\frac{\text{三戊微}}{\text{三天微}}=\frac{\text{一·二甲卯}}{(\text{卯丄天})^{三}}$ ……

令 天＝○ 則 戊＝對卯 $\frac{\text{戊微}}{\text{天微}}=\frac{\text{甲卯}}{一}$ $\frac{\text{二戊微}}{\text{二天微}}=\text{丅}\frac{\text{甲卯}}{一}$ $\frac{\text{三戊微}}{\text{三天微}}=\frac{\text{甲卯}}{\text{一·二}}$ …… 用此代入馬氏之式中得

對（卯丄天）＝對卯丄甲卯 $\left[\frac{\text{天}}{\text{卯}}\ \text{丅}\ \frac{\text{天}^{二}}{\text{二卯}^{二}}\ \text{丄}\ \frac{\text{天}^{三}}{\text{三卯}^{三}}\ \text{丅}\ \cdots\cdots\right]$

如于此式中令 卯＝一 則 對卯＝○ 而得 對（一丄天） 之級數與

第三十六款所得之式同

第四十三款

用馬氏之術亦可詳 戊＝正弦天 及 戊＝餘弦天 之級數絕不費力

如將 戊＝正弦天 依法求之則 戊＝○ $\frac{\text{戊微}}{\text{天微}}=一$ $\frac{\text{二戊微}}{\text{二天微}}=○$ $\frac{\text{三戊微}}{\text{三天微}}=\text{丅}一$ …… 故得

正弦天＝天 $\text{丅}\ \frac{\text{天}^{三}}{\text{一·二·三}}\ \text{丄}\ \frac{\text{天}^{五}}{\text{一·二·三·四·五}}\ \text{丅}\ \cdots\cdots$

如將 戊＝餘弦天 依法求之則 戊＝一 $\frac{\text{戊微}}{\text{天微}}=○$ $\frac{\text{二戊微}}{\text{二天微}}=\text{丅}一$ $\frac{\text{三戊微}}{\text{三天微}}=○$ …… 故得

餘弦天＝一 $\text{丅}\ \frac{\text{天}^{二}}{\text{一·二}}\ \text{丄}\ \frac{\text{天}^{四}}{\text{一·二·三·四}}\ \text{丅}\ \frac{\text{天}^{六}}{\text{一·二·三·四·五·六}}\ \text{丄}\ \cdots\cdots$

第四十四款

設有 戊＝正弦天 此式中之天為正弦戊為其弧背 亦可用馬氏術詳其級數

依第二十三款之法疊求其各次之微係數則可得

$\frac{微戊}{微天}=(一-天^{二})^{-\frac{一}{二}}$

$\frac{微^{二}戊}{微天^{二}}=天(一-天^{二})^{-\frac{三}{二}}$

$\frac{微^{三}戊}{微天^{三}}=(一-天^{二})^{-\frac{三}{二}}+三天^{二}(一-天^{二})^{-\frac{五}{二}}$

$\frac{微^{四}戊}{微天^{四}}=九天(一-天^{二})^{-\frac{五}{二}}+一五天^{三}(一-天^{二})^{-\frac{七}{二}}$

……

令 $天=○$ 則

$戊=○$

$\frac{微戊}{微天}=一$

$\frac{微^{二}戊}{微天^{二}}=○$

$\frac{微^{三}戊}{微天^{三}}=一$

$\frac{微^{四}戊}{微天^{四}}=○$

$\frac{微^{五}戊}{微天^{五}}=九$

……

用此各同數于馬氏之式中即得

$戊=天+\frac{一}{二}\cdot\frac{天^{三}}{三}+\frac{一\cdot三}{二\cdot四}\cdot\frac{天^{五}}{五}+\frac{一\cdot三\cdot五}{二\cdot四\cdot六}\cdot\frac{天^{七}}{七}+\cdots\cdots$

第四十五款

論戴氏之術所不能馭之題

戴氏之術能詳 $戊=函(天)$ 為

$函(天+辛)=戊+\frac{微戊}{微天}\times\frac{辛}{一}+\frac{微^{二}戊}{微天^{二}}\times\frac{辛^{二}}{一\cdot二}+\frac{微^{三}戊}{微天^{三}}\times\frac{辛^{三}}{一\cdot二\cdot三}+\cdots\cdots$

前各款中已證其必合于理矣惟戴氏設此級數之例恆以天為不定之數所以凡所設之函數其天之同數若本有一定者則與戴氏立術之例不合故有時不能用戴氏之術求之

設有 $戊=乙(甲-天)^{\frac{一}{二}}$ 則其

$\frac{微戊}{微天}=\frac{-乙(甲-天)^{-\frac{一}{二}}}{二}$

$\frac{微^{二}戊}{微天^{二}}=\frac{-乙(甲-天)^{-\frac{三}{二}}}{四}$

……若依戴氏之術則其

$函(辛+天)=乙(甲-天-辛)^{\frac{一}{二}}$

即為

$函(天+辛)=乙(甲-天)^{\frac{一}{二}}-\frac{乙(甲-天)^{-\frac{一}{二}}辛}{二}-\frac{乙(甲-天)^{-\frac{三}{二}}辛^{二}}{八}\cdots\cdots$

此式中天之同數若大于甲則合于理故能得其 $乙(甲-天-辛)^{\frac{一}{二}}$ 之真同數 若天之同數等于甲則 $天-甲=○$ 而其級數變為

$乙○-\frac{乙○^{-\frac{一}{二}}辛}{二}-\frac{乙○^{-\frac{三}{二}}辛^{二}}{八}\cdots\cdots$

則為無用之式因其凡有分母為○之項皆大至無窮故也

如于 $乙(甲-天+辛)^{\frac{一}{二}}$ 之式中令 $天=甲$ 而變其式為 $乙辛^{\frac{一}{二}}$ 則此式可有兩箇

相同之式一爲 $\frac{\text{辛}}{\text{乙}}$ 一爲 $\frac{\text{辛}}{\text{乙}}$ 所以若但用戴氏之術詳之因其級數爲辛之各整方所成則只能有一箇同數而不能得兩箇同數也故不能合

由是知凡遇特設之函數其天之同數若有一定之數如 $\text{天}=\text{甲}$ 者則此種函數不能用戴氏之術解之其所以不能解之故非其理有誤也乃因其立術之例本非謂天有一定之同數也

第四十六款

設有 $\text{戊}=\frac{(\text{天}-\text{甲})}{\text{乙}}$ 依法疊求其各次之微係數得 $\frac{\text{彳戊}}{\text{彳天}}=+\frac{(\text{天}-\text{甲})}{\text{二乙}}$ $\frac{\text{彳}^2\text{戊}}{\text{彳天}^2}=\frac{(\text{天}-\text{甲})}{\text{六乙}}$ …… 則以各同數代入戴氏之式中得 $\text{函}(\text{天}+\text{辛})=\frac{(\text{天}-\text{甲}+\text{辛})}{\text{乙}}=\frac{(\text{天}-\text{甲})}{\text{乙}}+\frac{(\text{天}-\text{甲})}{\text{二乙}}\text{辛}-\frac{(\text{天}-\text{甲})}{\text{三乙}}\text{辛}+\cdots\cdots$ 此式中若令其天之同數或大于甲或小于甲則級數皆合于理若令 $\text{天}=\text{甲}$ 則其級數變爲 $\frac{0}{\text{乙}}+\frac{0}{\text{二乙}}\text{辛}-\frac{0}{\text{三乙}}\text{辛}+\cdots\cdots$ 卽不合于理矣因辛之各方其倍數皆爲無窮故不能求

如于 $\frac{(\text{天}-\text{甲}+\text{辛})}{\text{乙}}$ 之式中令 $\text{天}=\text{甲}$ 則式變爲 $\frac{\text{辛}}{\text{乙}}=\text{乙}\,\text{辛}$ 欲依戴氏之術詳之因其辛之指數爲負則其數非辛之正整各方之級數所能賅所以戴氏之術難馭此種之題

第四十七款

往時算學家以爲凡創立一術而名之曰公式則不當有不可通之題至拉果蘭諸始明戴氏術所不能通之例其說曰凡特設之函數中其天若有定同數者則其新函數中必有 $\text{吧}\,\text{辛}^{-\text{卯}}$ 或 $\text{吽}\,\text{辛}^{\frac{\text{卯}}{\text{寅}}}$ 之形在其各項內故依戴氏之術求之其公級數中各項之倍數至卯項之後必變爲無窮 反言之則可云天若有一定之同數者必能令公級數之倍數爲無窮則其變得之級數中必有辛之分數負數之各方所以戴氏之術不能馭此種之題也

凡戴氏之術所不能馭之題微分術中亦有他法可解之卽用尋常之代數法亦可解之

求雙變數微分

第四十八款 以上各款所論之求微分法其函數之變數皆分開如 $地=甲+乙天+丙天^{二}$ 其地爲天之陽函數。然用代數所得之式每有兩箇自主之變數交互雜糅如 $地^{二}-二寅天地+天^{二}-甲=〇$ 者假使可解開其式而得地之同數如 $地=寅天\pm\sqrt{甲+(寅^{二}-一)天^{二}}$ 則右邊之各項中但有天爲變數卽亦可依以上各款之法求其微分惟每有所遇之式其變數不能如此分開者所以必立一專術以馭之

第四十九款 無論用何法將兩箇彼此不相關之變數合成一相等之式卽方程式其公式必爲 $函(天,地)=〇$ 其天地間之一點以代與字也。此式中之變數地必能以天明之所以其地之同數無論何法求之皆可作 $地=呋天$ 其 呋天 者謂天與各常數所成之式也如將地之此同數代入公式卽得 $函(天,呋天)=〇$ 則此式中但有變數天在其內且其天之同數無論如何必能合于本式之理。

設其式爲 $函(天,地)=函(天,呋天)$ 以戊代之又令天變爲 $天+辛$ 則依戴氏之術其新同數必爲 $戊'=戊+\frac{微戊}{微天}辛+\frac{微^{二}戊}{微天^{二}}\frac{辛^{二}}{二}+\frac{微^{三}戊}{微天^{三}}\frac{辛^{三}}{二\cdot三}+\frac{微^{四}戊}{微天^{四}}\frac{辛^{四}}{二\cdot三\cdot四}+\cdots\cdots$ 若令 $函(天,地)=戊=〇$。則 $戊'=〇$。是以知 $戊'$ 之同數中辛之各方之倍數亦必各等于〇。此依第十八款之例也所以從 $戊=函(天,地)=〇$ 可得級數中辛之各方之倍數

$\frac{微戊}{微天}=〇$。

$\frac{微^{二}戊}{微天^{二}}=〇$。

$\frac{微^{三}戊}{微天^{三}}=〇$。

……

如原式之理無誤則此各式亦必合理

第五十款

設有 $地^{二}\perp天^{二}=甲^{二}$ 即 $地^{二}\perp天^{二}\top甲^{二}=○$ ㈠ 其甲爲常數天與地爲變數 令 $戊=地^{二}\perp天^{二}\top甲^{二}$ 依法求其微係數

$\frac{彳地}{彳天}二地\perp二天=○$

$\frac{彳地}{彳天}=\top\frac{天}{地}$ ㈡ 如欲求第二次微係數可令 $\frac{彳地}{彳天}=巳$ 則

$\frac{彳巳}{彳天}二地巳\perp二天=○$ 又

因巳爲天與地之函數而地又爲天之函數故可以巳爲天之函數而求得 $\frac{彳巳}{彳天}=\left[地\frac{彳巳}{彳天}巳\frac{彳地}{彳天}\perp一\right]=○$ 惟因 $巳=\frac{彳地}{彳天}$ 則 $\frac{彳巳}{彳天}=\frac{彳^{二}地}{彳天^{二}}$ 故 $\frac{彳巳}{彳天}=\left[地\frac{彳^{二}地}{彳天^{二}}\perp\frac{彳地}{彳天}\perp一\right]=○$ ㈢

又因 $\frac{彳^{二}地}{彳天^{二}}=\top\frac{\left(\frac{彳地}{彳天}\right)\perp一}{地}$ 而 $\frac{彳地}{彳天}=\top\frac{天}{地}$ 故 $\frac{彳^{二}地}{彳天^{二}}=\top\frac{地\perp天}{地}$ ㈣ 如欲求第三次微係數可令 $\frac{彳^{二}地}{彳天^{二}}=午$ 又令巳代㈢式中之 $\frac{彳地}{彳天}$ 則其 $\frac{彳}{彳天}\left(地午\perp巳\perp一\right)=○$ 又因巳午皆爲天與地之函數而地爲天之函數故又可以巳午爲天之函數其微係數之式中除了天與地之外其各項必有 $\frac{彳午}{彳天}$ $\frac{彳地}{彳天}$ $午\frac{彳^{二}地}{彳天^{二}}$ $巳\frac{彳地}{彳天}$ 在其內故求得 $\frac{彳^{三}地}{彳天^{三}}$ 可用㈣㈡兩式中之 $\frac{彳^{二}地}{彳天^{二}}$ $\frac{彳地}{彳天}$ 之同數以天與地明之

第五十一款　從以上兩款所攷之理得一專法可求天函數中地之微係數其天與地相關之理可以相等之式明之

法將原式之各項聚于一邊而求其微分令地爲天之函數而以彳天約之則所得之式中可有 $\frac{彳地}{彳天}$ 之同數

再將此式之各項求其微分而令地與 $\frac{彳地}{彳天}$ 爲天之函數則所得之式中可有 $\frac{彳^{二}地}{彳天^{二}}$ 與 $\frac{彳地}{彳天}$ 在其內將此式與前式相合即能得 $\frac{彳^{二}地}{彳天^{二}}$ 之同數　再將此式之各項求其微分而令地與 $\frac{彳地}{彳天}$ $\frac{彳^{二}地}{彳天^{二}}$ 爲天之函數則所得之式中可有 $\frac{彳^{三}地}{彳天^{三}}$ $\frac{彳^{二}地}{彳天^{二}}$ $\frac{彳地}{彳天}$ 在其內將此式與前兩式相合即能得 $\frac{彳^{三}地}{彳天^{三}}$ 之同數　如是累求之可至任何次

設地爲天之函數能令 $丙\top二寅天地\perp天\top甲=○$ ㈠ 欲求其各次微係數

則如法求第一次微分得 $(地丅寅天)彳地丄(寅地丅天)彳天=〇$ 故 $\frac{彳天}{彳地}=\frac{地丅寅天}{寅地丅天}$ ㊁ 再如法求得

$\frac{二彳天}{彳地}=\frac{(地丅寅天)}{(一丅寅)天}\times\frac{彳天}{彳地}丅\frac{(地丅寅天)}{(一丅寅)地}$ ㊂ 以㊀式中 $\frac{彳天}{彳地}$ 之同數代入此式得

$\frac{二彳天}{彳地}=丅(一丅寅)\frac{(地丅寅天)^{二}}{地^{二}丅二寅天地丅天^{二}}丅\frac{(地丅寅天)^{二}}{(一丅寅)甲}$ ㊃

如將㊂式中之 $\frac{二彳天}{彳地}$ 與 $\frac{彳天}{彳地}$ 為天之函數再求微係數得 $\frac{三彳天}{彳地}=吧\frac{二彳天}{彳地}丅吽\frac{彳天}{彳地}丅味$ ㊄ 其吧吽味為地與天相合而成之式若以㊃㊁兩式之同數代其 $\frac{二彳天}{彳地}$ $\frac{彳天}{彳地}$ 即可得 $\frac{三彳天}{彳地}$ 之同數其各項中但有天地兩元

第五十二款　凡從所設之代數式而用微分之法求得之他式名之曰流數亦謂之微分式　其生此微分式之代數式名曰原式　其能求得 $\frac{彳天}{彳地}$ 之同數者名曰第一次微分式　其能求得 $\frac{二彳天}{彳地}$ 之同數者名曰第二次微分式　其餘仿此類推

如原式為 $地^{二}丄二寅天地丅天^{二}丅甲=〇$ 則其 $\frac{彳天}{彳地}\frac{地丅寅天}{寅地丅天}=〇$ 為第一次微分式其能得 $\frac{二彳天}{彳地}(一丅寅)\frac{(地丅寅天)^{二}}{地^{二}丅二寅天地丅天^{二}}=〇$ 者為第二次微分式即 $\frac{二彳天}{彳地}丅\frac{(地丅寅天)}{(一丅寅)天}\times\frac{彳天}{彳地}丅\frac{(地丅寅天)}{(一丅寅)地}=〇$ 是也

第五十三款　無論何次之微係數必從其原式而生所以無論用何法合其數次之微係數而成一式必與原式之理相合　又其函數地無論有若干同數（如前式有兩同數）其微係數中凡有地在內者其同數亦必合理

依第十五款之例凡函數之中有常數為加減之項者求微分之時其常數必變為〇　今特申明此例言各次之微分式亦然

如原式為 $地=甲天丄乙$ 其甲乙為常數則其微分之式為 $彳地=甲彳天$ 故原

式中之乙不見而甲所能有之同數仍與原式無異

如欲令原式所生之各式中乙所能有之同數其理亦

然可變原式之形爲 $\frac{天}{地}=甲\,丄\,\frac{天}{乙}$ 而求其微分則可使甲不見

而乙仍在其微分式中如 $\frac{天}{二天地彳地\,丅\,地彳天}=\frac{天}{丅\,乙彳天}$ 故 $二天地彳地\,丅\,(地^{二}\,丅\,乙)彳天=〇$ 而 $\frac{彳天}{彳地}=\frac{二天地}{地^{二}\,丅\,乙}$ 則此式能

明乙與天地 $\frac{彳天}{彳地}$ 各數如何相關而與常數甲無涉

如將 $地=甲天\,丄\,乙$ 與 $二地彳地=甲彳天$ 用代數之常法消去其甲亦能得 $\frac{彳天}{彳地}=\frac{二天地}{地^{二}\,丅\,乙}$ 若

其原式之常數非在一次微分中消去者可將其同數

代入原式而化之其所得之式各項中必有一項之乘

數大于 $\frac{彳天}{彳地}$ 之一次之方

如所設之原式爲 $地^{二}\,丅\,二甲地\,丄\,天=甲$ 則其微分之式爲 $地彳地\,丅\,甲彳地\,丄\,天彳天=〇$ 故 $甲=\frac{彳地}{地彳地\,丄\,天彳天}$ 如將

甲之同數代入原式而化之爲 $(天\,丅\,地^{二})\frac{彳天}{彳地}\,丅\,四天地\frac{彳天}{彳地}\,丄\,天=〇$ 則此式能明天地

與 $\frac{彳天}{彳地}$ 相關之理而與甲之同數無涉

若于原式中以甲爲主而化之爲 $甲=丅地\,\pm\sqrt{二地^{二}\,丅\,天}$ 則其甲獨爲一

項故求微分而甲不見即得 $彳地\frac{\pm\sqrt{二地^{二}\,丅\,天}}{二地彳地\,丅\,天彳天}=〇$ 將此式化去其平方

根之號則與前得之式無異

第五十四款　凡原式中無論有若干常數若每次求微

分能消去一常數者則疊求微分能將常數逐一消去

如原式爲 $地=寅(甲\,丄\,天)$ 則第一次求微分得 $地\frac{彳天}{彳地}=丅寅天$ 再求其微分得

$地\frac{臨}{戌}+\frac{地}{氐}=-寅$ 將此式中 $-寅$ 之同數代入前式。卽變爲 $一=\frac{地}{氐}地天-\frac{地}{乙}天-\frac{地}{氐}乙$ 則與甲寅二常數無涉。

求隱分之數

第五十五款　若有分數之函數，其變數至一定之同數，而分母分子能同時俱變爲○者，則謂之隱分數。

如有分數之式 $\frac{天^2-甲^2}{天-甲}$ 此爲能隱之分數，因 $天=甲$ 則分母分子皆爲○，而其式變爲 $\frac{○}{○}$ 故也。觀此形宛如其分數之定同數無法可求，然而不難知也。

惟因 $\frac{天^2-甲^2}{天-甲}=\frac{(天+甲)(天-甲)}{天-甲}=天+甲$ 故 $天=甲$ 則其原式之眞同數必爲 $甲+甲=二甲$ 由是知原式于 $天=甲$ 之時必變爲 $\frac{○}{○}$ 者，因其分母子有 $天-甲$ 爲公約數，所以天等于甲之時母子能皆變爲○。

設分數之式爲 $\frac{天^3-天^2甲-天甲^2+甲^3}{甲天-甲^2}$ 若 $天=甲$ 則式變爲 $\frac{○}{○}$。欲求其同數，則可將原式之母子各以公約數 $天-甲$ 約之，則其式變爲 $\frac{天-甲}{甲}$ 若于此式中再令 $天=甲$ 則其式變爲 $\frac{○}{甲}$。卽知其分數之同數等于○。

設分數之式爲 $\frac{甲天-甲^2}{天^2-二甲天+甲^2}$ 若 $天=甲$ 則式變爲 $\frac{○}{○}$。欲求其同數，則可依前法以公約數 $天-甲$ 約其原式之母子，得 $\frac{甲}{天-甲}$ 如于此式中再令 $天=甲$ 則式變爲 $\frac{甲}{○}$。卽知原式之同數爲無窮。

以上所設之數式，其母子之公約數皆爲易知，惟亦有其公約數不易知者。

如有式 $\frac{一-正弦天+餘弦天}{正弦天+餘弦天-一}$ 其天爲一象限之時（卽弧等于二分周率之時也）則其式變爲 $\frac{○}{○}$。求其同數之法見第五十七款四式。

第五十六款　凡隱分數之母子俱爲代數之函數者原可用代數術第二十款之法求其最大公約數以約之惟微分術中又有公解法比代數之術更簡

如以吧吘各代其子母之天函數則其分函數之式爲 $\frac{吧}{吘}$ 若 $天=甲$ 則母子皆爲○（其甲爲已知之數）乃令天變爲 $天+辛$ 依戴氏之術詳其分函數爲級數得

$$\frac{吧+\frac{彳吧}{彳天}辛+\frac{彳^{二}吧}{彳天^{二}}\times\frac{辛^{二}}{一\cdot二}+\frac{彳^{三}吧}{彳天^{三}}\times\frac{辛^{三}}{一\cdot二\cdot三}+\cdots\cdots}{吘+\frac{彳吘}{彳天}辛+\frac{彳^{二}吘}{彳天^{二}}\times\frac{辛^{二}}{一\cdot二}+\frac{彳^{三}吘}{彳天^{三}}\times\frac{辛^{三}}{一\cdot二\cdot三}+\cdots\cdots}$$ （一）

因所設之例如天等于甲則吧吘皆爲○故可于（一）式中截去此兩項而以 $吧'$ $吧''$ $吧'''$ 代其分子項中吧之各次微係數以 $吘'$ $吘''$ $吘'''$ 代其分母項中吘之各次微係數乃以辛徧約其母子則得

$$\frac{吧'+\frac{吧''辛}{二}+\frac{吧'''辛^{二}}{二\cdot三}+\cdots\cdots}{吘'+\frac{吘''辛}{二}+\frac{吘'''辛^{二}}{二\cdot三}+\cdots\cdots}$$ （二）

如于（二）式中令 $辛=○$ 則變爲 $\frac{吧'}{吘'}$（三）以甲代此式中之天即得 $\frac{吧}{吘}$ 之眞同數　此因先令天變爲 $天+辛$ 而後令 $天=甲$ 再令 $辛=○$ 則與徑令 $天=甲$ 者其事無異故得數必同也

若甲代（三）式中之天而 $吧'$ 或 $吘'$ 有一變爲○者其 $\frac{吧}{吘}$ 之同數非等于○即等于無窮視○爲子母而異　若甲代（三）式中之天而 $吧'$ $吘'$ 同時皆變爲○者則可將（二）式中之 $吧'$ $吘'$ 截去而化其式爲

$$\frac{\frac{吧''}{二}+\frac{吧'''辛}{二\cdot三}+\cdots\cdots}{\frac{吘''}{二}+\frac{吘'''辛}{二\cdot三}+\cdots\cdots}$$

乃于此式中令 $辛=○$ 則式變爲 $\frac{吧''}{吘''}$ 以甲代此式中之天即可得 $\frac{吧}{吘}$ 之眞同數　以下可仿此類推

第五十七款　由以上之理得一專法可求隱分之定同數　其法曰令所設之分數等于 $\frac{吧}{吘}$ 若天等于甲之時而其吧與吘皆變爲○者則求其分數之同數可將分子之微係數以分母之微係數約之而令所得之式爲 $\frac{吧'}{吘'}$ 乃以甲代其天若其式不變爲 $\frac{○}{○}$ 者則其所得之式即爲所求之同數　若以甲代其天而其式能變爲 $\frac{○}{○}$ 者則將其 $\frac{吧'}{吘'}$ 如法再求微分而得新分數 $\frac{吧''}{吘''}$ 復以甲代其天若其式不變爲 $\frac{○}{○}$ 者則此所得之式必爲所求之同數　如以甲代天而其式仍變爲 $\frac{○}{○}$ 者仿此類推

茲設數式于後以明此法之用

一式　設有 $一丄天丄天^{二}丄天^{三}\cdots丄天^{卯丅一}$ 此式共有卯項故總數爲 $\frac{天丅一}{天^{卯}丅一}$ 若 $天=一$ 則總數變爲 $\frac{○}{○}$ 欲求其同數

可令 $呬=天^{卯}丅一$ $呷=天丅一$ 求得 $\frac{彳天}{彳呬}=卯天^{卯丅一}=呬'$ $\frac{彳天}{彳呷}=一=呷'$ 故 $\frac{呷'}{呬'}=卯天^{卯丅一}$ 令 $天=一$ 則 $\frac{呷'}{呬'}=卯$ 故

知原式之定同數爲卯

二式　設有 $\frac{乙天^{二}丅二乙丙天丄乙丙^{二}}{甲天^{二}丅二甲丙天丄甲丙^{二}}=\frac{呷}{呬}$ 若 $天=丙$ 則其式變爲 $\frac{○}{○}$ 欲求其原式

之定同數

則如法求之 $\frac{彳天}{彳呬}=二甲天丅二甲丙=呬'$ $\frac{彳天}{彳呷}=二乙天丅二乙丙=呷'$ 故 $\frac{呷'}{呬'}=\frac{二乙天丅二乙丙}{二甲天丅二甲丙}=\frac{乙天丅乙丙}{甲天丅甲丙}$ 令 $天=丙$ 其分數仍變爲

$\frac{○}{○}$ 則如法再求一次得 $\frac{彳天}{彳呬'}=二甲=呬''$ $\frac{彳天}{彳呷'}=二乙=呷''$ 故 $\frac{呷''}{呬''}=\frac{乙}{甲}$ 復令 $天=丙$

則式仍爲 $\frac{乙}{甲}$ 故知原式之定同數卽爲 $\frac{乙}{甲}$

三式　設有 $\frac{天}{甲^{天}丅乙^{天}}$ 若 $天=○$ 則變爲 $\frac{○}{○}$ 欲求其定同數

如法得 $\frac{彳天}{彳呬}=訥(甲)甲^{天}丅訥(乙)乙^{天}=呬'$ $\frac{彳天}{彳呷}=一=呷'$ 令 $天=○$ 則 $\frac{呷'}{呬'}$ 之同數變爲 $訥(甲)丅訥(乙)=訥\frac{乙}{甲}$ 卽所

求之同數也

四式　設有 $\frac{正弦天丄餘弦天丅一}{一丅正弦天丄餘弦天}$ 若 $天=\frac{二}{周}$ 則式變爲 $\frac{○}{○}$ 欲求其同數

如法求之 $\frac{彳天}{彳呬}=丅餘弦天丅正弦天=呬'$ $\frac{彳天}{彳呷}=餘弦天丅正弦天=呷'$ 故 $\frac{呷'}{呬'}=\frac{餘弦天丅正弦天}{丅餘弦天丅正弦天}$ 令 $天=\frac{二}{周}$ 則 $餘弦天=○$ $正弦天=一$ 所以知原

式之定同數爲 $\frac{丅一}{丅一}$ 卽等于一

五式 設有 $\frac{甲丅天}{甲^{卯}丅天^{卯}}$ 若 $天＝甲$ 則式變為 $\frac{○}{○}$. 欲求其同數.

其 $吧＝甲^{卯}丅天^{卯}$. $吘＝甲丅天$. 依法得 $吧＝\frac{氐}{祀}＝丅天^{卯}\left[訥天⊥\frac{天}{天丅卯}\right]$. $吘＝\frac{氐}{衶}＝丅一$. 故 $\frac{吘}{吧}＝天^{卯}\left[訥天⊥\frac{天}{天丅卯}\right]$. 令 $天＝甲$ 則其式變為 $甲^{卯}\left[訥甲⊥\frac{甲}{甲丅卯}\right]$ 即所求之同數也.

第五十八款 上款之法若遇 $\frac{吘}{吧}$ 不能用戴氏之術詳其級數者則不能馭.

凡天等于甲之時其分數變為 $\frac{○}{○}$ 而不能用前款之法求其同數者可于 $\frac{吘}{吧}$ 式中以 $甲⊥辛$ 代其天又詳其式為漸增之級數依辛之方數序之如 $\frac{呷辛^{角}⊥叱辛^{角}⊥\cdots}{㖞辛^{角}⊥叱辛^{角}⊥\cdots}$ 令 $辛＝○$ 即可得其 $\frac{吘}{吧}$ 之同數.

惟此式之形共有三種. 一為 角 大于 角. 一為 角 等于 角. 一為 角 小于 角.

其 角 大于 角 及 角 等于 角 者可作 $\frac{呷⊥乜辛^{角}⊥\cdots}{呷辛^{角}⊥叱辛^{角}⊥\cdots}$ 此式若為 角 大于 角 則令 $辛＝○$ 之時其分數必等于○. 若 角 等于 角 則令 $辛＝○$ 之時其分數必變為 $\frac{呷}{㖞}$.

其 角 小于 角 者可作 $\frac{呷辛^{角}⊥叱辛^{角}⊥\cdots}{㖞⊥叱辛^{角}⊥\cdots}$ 此式中若令 $辛＝○$ 則其分數必為無窮.

總之此法專藉其級數之初項以得分數之眞同數.

第五十九款 茲款之法可以馭凡能變形為 $\frac{○}{○}$ 之各種分數. 法曰以 $甲⊥辛$ 代其原式中之天而將其分母子詳為級數又化為最簡之形令其辛等于○即得.

設有式 $\frac{(天丅甲)^{\frac{二}{三}}}{(天^{二}丅甲^{二})^{\frac{二}{三}}}$ 若 $天＝甲$ 則變為 $\frac{○}{○}$. 欲求其同數. 此式不能以微分之術得其同數.

依本款之法可將 $甲⊥辛$ 代其天而變其式為 $\frac{辛^{\frac{二}{三}}}{(二甲辛⊥辛^{二})^{\frac{二}{三}}}$ 乃令

辛等于○即得 $\frac{二甲}{三}$ 爲所求之眞同數

用此法以求隱分之同數凡微分所不能駁者此法能駁之即微分所能駁者用此法或能更捷于微分

如有式 $\frac{[illegible]}{[illegible]}$ 若 天＝甲 則變爲 $\frac{○}{○}$ 如用微分必求四次始得

若用本款之法以 甲丄辛 代其天即變爲 $\frac{[illegible]}{[illegible]}$ 將其根號內之數詳爲級數則

$$\sqrt{甲^{二}丄二甲辛}=甲丄辛丅\frac{辛^{二}}{二甲}丄\frac{辛^{三}}{二甲^{二}}丅\frac{五辛^{四}}{八甲^{三}}\cdots$$

$$\sqrt{甲^{二}丅辛^{二}}=甲丅\frac{辛^{二}}{二甲}丅\frac{辛^{四}}{八甲^{三}}\cdots$$

以此代入前式中而令 辛＝○ 即得 $\frac{二甲}{三}$ 爲所求之同數

興化劉彝程校算

英國華里司輯

英國　傅蘭雅　口譯
金匱　華蘅芳　筆述

求函數極大極小之數

第六十款　函數既能因變數而變則其同數能為正亦能為負自〇起以至無窮

凡欲明此理者可設想其變數以各平分由漸而大或由漸而小則函數必因之而變惟函數之變非亟隨變數之大小而增減故其各同數可比變數先增而後減亦可比變數先減而後增或其大小可迭更數次

所以可依作曲線之法令變數天為橫線變數地為縱線以作各函數之曲線則知其曲線各有性情有漸與軸線相離而不復相近者如拋物線雙曲線有先與軸線漸相離而其後復漸與軸線相近者如平圓橢圓線有與軸線遠而復近近而復遠者如擺線

若函數之各同數先增而後減則其各數中必有一數大于前後兩數故名此數為極大

若函數之各同數先減而後增則其各數中必有一數小于前後兩數故名此數為極小

凡變其函數之同數能有若干極大極小之數必依界說之理

說之理

界說曰函數極大之數必比其前一數大亦必比其後一數大函數極小之數必比其前一數小亦必比其後一數小所以函數之各同數自大而小自小而大共有若干次則必有若干極大極小之數

第六十一款　茲將前款之理證明之以便于用

凡有級數之形如巳辛丄午辛丄未辛丄申辛丄……若其辛為未定之數則與巳午未各數無相關故可令辛為某數任約其何項而能大于以後諸項之和數

如將巳辛丄午辛丄未辛丄申辛丄……變為辛（巳丄午辛丄未辛丄申辛丄……）令辛為甚小則午辛丄未辛丄申辛丄……可小于任何能名之數所以午辛丄未辛丄申辛丄……必可小于巳而午辛丄未辛丄申辛丄……必可小于巳辛其所小之率可至任何比例　又以同理可令未辛丄申辛丄……小于午故其未辛丄申辛丄……可

小于午辛其餘各項仿此類推　所以 $巳辛 + 午辛 + 未辛 + 申辛 \cdots\cdots$ 級數之內可有一辛之同數能令某項以後之諸項與本項爲同號

第六十二款　令天之任何函數爲地若天爲某數之時能令地爲極大或極小者則以 $天 - 辛$ 與 $天 + 辛$ 各代其函數之天其所得之二同數必俱小于地之大同數或俱大于地之小同數

如命以 $天 - 辛$ 代天所得之同數爲 $地_一$ 又命以 $天 + 辛$ 代天所得之同數爲 $地_二$ 則依戴氏之術其級數爲

$$地_一 = 地 - \frac{彳地}{彳天}辛 + \frac{彳^二地}{彳天^二}\frac{辛^二}{一\cdot二} - \frac{彳^三地}{彳天^三}\frac{辛^三}{一\cdot二\cdot三} + \cdots\cdots$$

$$地_二 = 地 + \frac{彳地}{彳天}辛 + \frac{彳^二地}{彳天^二}\frac{辛^二}{一\cdot二} + \frac{彳^三地}{彳天^三}\frac{辛^三}{一\cdot二\cdot三} + \cdots\cdots$$

此兩式其 $\frac{彳地}{彳天}$ 若不爲〇則 $地_一$ 與 $地_二$ 不能同時俱大小于地　蓋 $\frac{彳地}{彳天}$ 若不爲〇則必有一辛之同數能令 $\frac{彳地}{彳天}辛$ 與以後諸項之較大于任所定之比例而其以 $\mp\frac{彳地}{彳天}辛$ 爲初項之兩箇級數一爲正一爲負所以其地之同數不能在 $地_一$ $地_二$ 二數之間爲極大極小

若函數之同數果可爲極大極小則 $\frac{彳地}{彳天}$ 必能等于〇

所以凡欲令函數之同數爲極大極小者必令 $\frac{彳地}{彳天} = 〇$ 則其級數變爲

$$地_一 = 地 + \frac{彳^二地}{彳天^二}\frac{辛^二}{一\cdot二} - \frac{彳^三地}{彳天^三}\frac{辛^三}{一\cdot二\cdot三} + \cdots\cdots$$

$$地_二 = 地 + \frac{彳^二地}{彳天^二}\frac{辛^二}{一\cdot二} + \frac{彳^三地}{彳天^三}\frac{辛^三}{一\cdot二\cdot三} + \cdots\cdots$$

如此則可令辛爲某數而得 $地_一$ $地_二$ 之數如其兩數俱小于地則地之同數爲極大如其兩數俱大于地則地之同數爲極小

惟有時令 $\frac{彳地}{彳天} = 〇$ 其天之同數亦能令 $\frac{彳^二地}{彳天^二} = 〇$ 則其級數之式變爲

$$地_一 = 地 - \frac{彳^三地}{彳天^三}\frac{辛^三}{一\cdot二\cdot三} + \frac{彳^四地}{彳天^四}\frac{辛^四}{一\cdot二\cdot三\cdot四} - \cdots\cdots$$

$$地_二 = 地 + \frac{彳^三地}{彳天^三}\frac{辛^三}{一\cdot二\cdot三} + \frac{彳^四地}{彳天^四}\frac{辛^四}{一\cdot二\cdot三\cdot四} + \cdots\cdots$$

如于此兩式中令 $\frac{彳^三地}{彳天^三} = 〇$ 而其天有一箇同數能令 $\frac{彳^三地}{彳天^三}$ 爲有窮之數者則函數之同數亦能有極大極小否則函數之同數不能有極大極小

第六十三款　凡地爲天之函數而欲求其極大極小之

數其公法如下

法曰令函數之$\frac{彳戊}{彳天}$為○而求其天之各同數以代其$\frac{彳^{二}戊}{彳天^{二}}$式中之天若所得者為負數則函數為極大若所得者為正數則函數為極小若所得者為○則令$\frac{彳^{二}戊}{彳天^{二}}$為○而求其天之各同數代其$\frac{彳^{二}戊}{彳天^{二}}$式中之天如前別其正負以定函數之極大極小其餘仿此類推

第六十四款　凡攷函數之極大極小惟以馬格老臨初設之法為準茲設數題以明其法之用

案微分術中此類之題大有趣味者甚多惜限于卷帙不能多錄故僅附十題而已

一題　設有$戊=二甲天\top天^{二}$求其有極大極小之數否

如法求其第一次微係數得$\frac{彳戊}{彳天}=二(甲\top天)$如令$二(甲\top天)=○$則$天=甲$以代入第二次微係數得$\frac{彳^{二}戊}{彳天^{二}}=\top二$因其數為負依第六十三款之例知$天=甲$之時其函數之同數為極大故以甲代原式中之天得$戊=甲^{二}$為極大之同數

二題　設有$戊=天^{二}\perp三天\perp二$求其有極大極小之數否

如法求之則$\frac{彳戊}{彳天}=二天\perp三$令$二天\perp三=○$則得$天=\top\frac{二}{三}$惟因$\frac{彳^{二}戊}{彳天^{二}}=二$其數為正所以知$天=\top\frac{二}{三}$之時函數之同數為極小故以天之同數代入原式得$戊=\top\frac{四}{一}$

三題　設有$戊=天^{三}\top一五天^{二}\perp五六天\top六○$求其有極大極小之數否

如法求之其$\frac{彳戊}{彳天}=三天^{二}\top三○天\perp五六$$\frac{彳^{二}戊}{彳天^{二}}=六天\top三○$如令$三天^{二}\top三○天\perp五六=○$則$天=\frac{三}{一五\perp\top\sqrt{五七}}$以天之同數代入$\frac{彳^{二}戊}{彳天^{二}}=六天\top三○$之同數中則得$\frac{彳^{二}戊}{彳天^{二}}=六天\top三○=\perp\top二\sqrt{五七}$觀此式可知函數之

同數有一數爲極大亦有一數爲極小故得 $天=\frac{三}{一五丄\sqrt{五七}}$ 則 $戊=丅三〇丅\frac{九}{三八}\sqrt{五七}$ 爲極小 $天=\frac{三}{一五丅\sqrt{五七}}$ 則 $戊=丅三〇丄\frac{九}{三八}\sqrt{五七}$ 爲極大

四題 設有 $戊=天^{五}丅五天^{四}丄五天^{三}丄一$ 求其有極大極小之數否

如法求之其 $\frac{戌}{彳天}=五天^{四}丅二〇天^{三}丄一五天^{二}=五天^{二}(天^{二}丅四天丄三)$

$\frac{戌^{二}}{彳天^{二}}=二〇天^{三}丅六〇天^{二}丄三〇天=一〇天(二天^{二}丅六天丄三)$

令 $\frac{戌}{彳天}=五天^{二}(天^{二}丅四天丄三)=〇$ 則天有四箇同數爲 $天=三$ $天=一$ $天=〇$ $天=〇$ 以此四同數各代入 $\frac{戌^{二}}{彳天^{二}}$ 之式中即知其 $天=三$ 則 $戊=丅二六$ 爲極小 $天=一$ 則 $戊=二$ 爲極大 $天=〇$ 則 $\frac{戌^{二}}{彳天^{二}}=〇$ 故知函數之同數只能有一箇極大之數一箇極小之數

五題 設有 $地=天^{天}$ 求其有極大極小之數否

依第二十四款二式得 $\frac{戌}{彳天}=天^{天}(一丄納天)$ 所以 $\frac{戌^{二}}{彳天^{二}}=天^{天}\left[天^{丅一}丄(一丄納天)^{二}\right]$ 惟因 $天^{天}$ 不能爲〇所以必令 $一丄納天=〇$ 則 $納天=丅一$ 而 $天=戊^{丅一}$ 故以 $戊^{丅一}$ 代其第二次微係數中之天得 $\frac{戌^{二}}{彳天^{二}}=\left(戊^{丅一}\right)^{戊^{丅一}}\times戊$ 因此數爲正所以知 $天=戊^{丅一}$ 之時則 $天^{天}=\left(戊^{丅一}\right)^{戊^{丅一}}$ 爲函數極小之數

六題 設有四直線長短各不相等欲作四不等邊形令其面積最大

先令其四直線甲乙戊己爲圖中四不等形之各邊則

$呷叱=甲$　$叱呐=乙$　$呐叮=戊$　$叮呷=己$

又以天代叱角亥代叮角地代呷叱呐叮四不等形之面積又從呷向呐作呷呐對角線

依平三角之理

$$甲^{二}+乙^{二}-二甲乙餘弦天=呷呐^{二}$$
$$戊^{二}+己^{二}-二戊己餘弦亥=呷呐^{二}$$

所以得

$$二甲乙餘弦天-二戊己餘弦亥=甲^{二}+乙^{二}-戊^{二}-己^{二}$$ ㈠

又因呷叱呐三角形

$$面積=\tfrac{一}{二}甲乙正弦天$$

呷叮呐三角形

$$面積=\tfrac{一}{二}戊己正弦亥$$

所以

$$地=\tfrac{一}{二}甲乙正弦天+\tfrac{一}{二}戊己正弦亥$$ ㈡

將此式求其微係數令等于〇則得

$$\frac{彳地}{彳天}=\tfrac{一}{二}甲乙餘弦天+\tfrac{一}{二}戊己\frac{彳亥}{彳天}餘弦亥=〇$$ ㈢

亦求㈠式之微係數令等于〇則得

$$甲乙正弦天-戊己\frac{彳亥}{彳天}正弦亥=〇$$

所以

$$戊己\frac{彳亥}{彳天}=甲乙\frac{正弦天}{正弦亥}$$

以此數從㈢式得

$$甲乙\left[餘弦天+\frac{正弦天餘弦亥}{正弦亥}\right]=〇$$

所以

$$正弦亥餘弦天+餘弦亥正弦天=〇$$

依代數術第二百三十九款則

$$正弦(天+亥)=〇$$
$$天+亥=一周$$

由此可見叱叮二角之和必等于二直角所以知四不等邊形若容于平圓之內則其面積爲最大

惟因

$$餘弦天=-餘弦亥$$
$$正弦天=正弦亥$$

故從㈠㈡兩式得

$$二(甲乙+戊己)餘弦天=甲^{二}+乙^{二}-戊^{二}-己^{二}$$
$$二(甲乙+戊己)正弦天=四地$$

以此二式左右各自乘而後相加又令

$$餘弦天^{二}+正弦天^{二}=一$$

得

$$四(甲乙+戊己)^{二}=(甲^{二}+乙^{二}-戊^{二}-己^{二})^{二}+十六地^{二}$$

則

$$十六地^{二}=四(甲乙+戊己)^{二}-(甲^{二}+乙^{二}-戊^{二}-己^{二})^{二}$$

此兩式之右邊

能化爲兩箇乘數如

$二甲乙丄二戊己丄甲乙丅戊己＝(甲乙丄戊己)(甲乙丅戊己)$

$二甲乙丄二戊己丅甲乙丄戊己＝(戊己丄甲乙)(戊己丅甲乙)$

從此又能化得

$(甲丄乙丄戊丅己)(甲丄乙丅戊丄己)(戊丄己丄甲丅乙)(戊丄己丅甲丄乙)$

令 $申＝\frac{甲丄乙丄戊丄己}{二}$ 則

$\frac{甲丄乙丄戊丅己}{二}＝申丅己$

$\frac{甲丄乙丅戊丄己}{二}＝申丅戊$

$\frac{戊丄己丄甲丅乙}{二}＝申丅乙$

$\frac{戊丄己丅甲丄乙}{二}＝申丅甲$

所以得

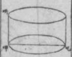
$一六地^2＝一六(申丅甲)(申丅乙)(申丅戊)(申丅己)$

即

$地＝\sqrt{(申丅甲)(申丅乙)(申丅戊)(申丅己)}$

則是用微分及代數術而得一絕妙之幾何理也

七題　欲作一平底直邊圓形之量酒器令其內沾酒之面最少求器徑與高之比例



令 $天＝甲乙$ 爲器之徑 $玄＝丙甲$ 爲器之深 以三·一四一六爲周率 又令器內之容積爲丙 則依幾何之理其底之面積爲 $\frac{周天^2}{四}$ 器之圍爲 $周天$ 而其內曲面積爲 $周天玄$ 故器之內容積爲 $丙＝\frac{周天^2玄}{四}$ 所以 $玄＝\frac{四丙}{周天^2}$ 而器之內曲面爲 $\frac{四丙}{天}$ 如令器內沾酒之全面積爲地則其

$地＝\frac{周天^2}{四}丄\frac{四丙}{天}$

所以令其

$\frac{微地}{微天}＝\frac{二周天}{四}丅\frac{四丙}{天^2}$

則

$\frac{微^2地}{微天^2}＝\frac{二周}{二}丄\frac{八丙}{天^3}$

故

$周天^3＝八丙＝二周天^2玄$

即

$天＝二玄$

故知器之底徑倍于其高則沾酒之面最少（因其微地爲正故爲極小之數）

八題　設于燈下視一細物已知物距燈底之數求燈火高若干度則光最明

如圖呷點爲一細物呷吆爲物距燈底之遠呐爲燈火發光之點呐吆爲燈高吆爲燈底點

觀此圖則易知呷點受光之大小與呐呷之長短及光線遇物面所成之角皆有相關　設其物受光之面爲平置之面則依光學之理如其光線之斜度不變而遠近變則物面受光之大小與其遠近線之平方有反比例如其遠近不變而斜度變則物面受光之大小與其光線遇物面所成角之正弦有正比例所以欲知物面受光最多之度可以下式明之

$\frac{正弦呷}{呷呐^2}＝\frac{吆呐}{呷呐^3}$

若令

$甲＝呷吆$

$天＝呷呐$

又令物面在呷所受之光率爲地

則 $\frac{地}{一} = \frac{呷丙}{吃丙} \times \frac{呷丙}{呷吃} \times \frac{一}{二} = \frac{甲}{正弦天餘弦天}$ 而其 $\frac{戊}{地} = (餘弦天 \top 二正弦天餘弦天 \perp 天) \frac{甲}{一}$ 惟因

$二正弦天餘弦天 = 正弦二天$

$\frac{餘弦天}{正弦天} = \frac{一 \perp 餘弦二天}{一 \top 餘弦二天} \quad \frac{二}{一}$

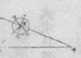
$餘弦二天 = 三$

故檢八線表

其二天當為七十度三十二分天當為三十五度十六分則得 $吃丙 = 呷乙 \times 七二$ 所以火之高當為十分呷吃之七

九題　求水星之光最大之時星與日地所成之交角各若干度

依天文重學之理凡水星之光最大之時非星之正望之時因水星正望之時離日已遠且能與日同見所以其光不能極大若水星上下弦之時其有光之面正向日故從地面視之所見之光面窄其光亦不能極大所以水星之光最大之時必在其弦望之間



如圖呻為日戌為地球呷叮吃呐為水星其呷叮吃為向日有光之半面呐吃叮為向地之半面如將呻亥引長至吃則從地球上所見之光必為叮亥與吃亥間之面此面必與戌亥呻為垂面則易知地上所見之水星光面必為新月形其明處之寬等于叮亥吃角之正矢而叮亥吃角等于戌亥吃角因此二角若以吃亥戌角加之皆成正角故也惟因新月形之面積恆與其寬窄之數有比例所以若令全圓之面為一則所見之光面必為戌亥吃角之大矢即 $一 \perp 餘弦戌亥呻$ 又因星光之濃淡與星距日之平方有反比例所以星光之大小必從星與日相距之方位並星距地之遠近以推之則必與 $\frac{一 \perp 餘弦戌亥呻}{戌呷}$ 有比例

令地日相距為甲＝戌呻星日相距為乙＝亥呻星地相距為天＝亥戌

則 $餘弦戌亥呻 = \frac{二乙天}{天 \perp 乙 \top 甲}$ 而 $一 \perp 餘弦戌亥呻 = \frac{二乙天}{天 \perp 二乙天 \top 乙 \top 甲} = \frac{二乙天}{(天 \perp 乙 \top 甲)(天 \perp 乙 \top 甲)}$ 若以人為水星之光率則 $人 = \frac{二乙天}{(天 \perp 乙 \top 甲)(天 \perp 乙 \top 甲)}$ 以此

式求其微係數令等于〇得

$\frac{秋}{仏}=\frac{二乙天}{(天丄乙丄甲)(天丄乙丅甲)}\left[\frac{天丄乙丄甲}{一}\丄\frac{天丄乙丅甲}{一}\丅\frac{天}{三}\right]\丅一$

所以

$三(甲丅乙)\丅四乙天\丅天^{二}＝〇$

而

$天^{二}\丄四乙天＝三(甲丅乙)$

故得

$天＝\丅\sqrt{三甲\丄乙^{二}}\丅二乙$

惟天之負同數不合于用所以得

$天＝\sqrt{三甲\丄乙^{二}}\丅二乙$

惟因

$甲＝一〇〇〇$

$乙＝七二三三$

故

$天＝四三\cdot$

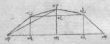
則求得亥戍呻角爲三十九度四十三分三十秒

戍亥呻角爲一百十七度五十五分二十秒

亥呻戍角爲二十二度二十一分十秒

十題　設欲以四箇平面相合爲三脊形之屋背每面之斜樑長短輕重兩兩相等其屋之濶屋頂之高于簷皆爲已定之數其近頂之樑與出簷之樑長短亦已有定比例求四樑各以本重相定之式

如圖呷吃叮吃呷爲屋背之形呷吃吃叮叮吃吃呷爲四條斜樑其長短輕重之數呷吃與呷吃等吃叮與吃叮等呷呷爲屋之濶叮呐爲頂高于簷皆爲已定之數　若設想各樑交接之處呷吃叮吃各點皆爲活節則將此屋面翻轉向下而自呷呷二點倒懸之依靜重學之理其懸而能相定之公重心必甚低設乘其懸而相定之時復翻轉而正置之而不改其各樑之交角則各面必仍能相定而其公



重心在高處矣　故于圖作吃吃線與呷呷平行又作垂線吃戍吃戍又作呷叮線則吃呷呐角等于吃呷呐角可以天代之叮吃吧角等于叮吃吧角可以亥代之又令呷吃與吃叮之比爲寅與卯則可將寅卯代樑之長短輕重率而求叮呐線上公重心之高

依三角形之理

$\frac{吃}{戍}＝寅正弦天$

$\frac{叮}{吧}＝卯正弦亥$

故

$\frac{叮}{呐}＝寅正弦天\丄卯正弦亥$

依靜重學之理呷吃呷吃兩樑之重心高于呷呷爲

$\frac{吃}{戍}\cdot\frac{一}{二}＝\frac{一}{二}寅正弦天$

吃叮吃叮兩樑之重

心在 亥弦正卯丄天弦正寅＝（呵呐／吧㕭）二 凡求公重心之法必將各重心距某點之

數各與其本重相乘幷之乃以各重之和約之卽得

公重心距某點之數所以依此法求得四棵之公重

心離呷呷線之高爲 二（寅丄卯）＝亥弦正卯丄（天弦正寅二）卯丄天弦正寅 此數若以地代之又化去

其常分母 二（寅丄卯） 卽得 亥弦正卯丄天弦正寅二（卯寅二）（寅二）＝地 爲極大之式因已知呷㕭爲呷

呷之半所以 呷㕭＝亥弦餘卯丄天弦餘寅 爲常數 從極大之式得 ○＝亥弦餘卯丄天弦餘寅（卯寅二）（寅二）＝$\frac{\text{氐}}{\text{地}}$ 以此從

其常數之式得 一＝$\frac{\text{氐}}{\text{亥}}$亥弦正卯丄天弦正氐 所以得 $\frac{\text{氐}}{\text{亥}}$＝$\frac{\text{亥弦正卯}}{\text{天弦正寅}}$ 如將 $\frac{\text{氐}}{\text{亥}}$ 之同數

代入 $\frac{\text{氐}}{\text{地}}$ 之同數中則得 $\frac{\text{亥弦正}}{\text{天弦正亥弦餘卯寅}}$丄天弦餘（卯寅二）（寅二）＝○ 從此式得 二 $\frac{\text{卯}}{\text{寅}}$＝$\frac{\text{亥切正}}{\text{天切正}}$ ㈠

凡用四斜面所成之屋背其斜樑兩兩相等者俱可

以此式明其各面相定之公重心

若作呷叮線而命叮呷㕭角爲氐則 $\frac{\text{呷㕭}}{\text{叮㕭}}$＝氐切正 故叮呷㕭

角亦爲已知之角則叱呷叮角必等于天丄氐而叱叮呷

角必等于亥丄氐惟因呷叱叮三角形其呷角之正弦與

叮角之正弦比若叮叱邊與叱呷邊之比所以其天丄氐

之正弦與亥丄氐之正弦比必若卯與寅之比所以又得

$\frac{\text{寅}}{\text{卯}}$＝$\frac{\text{（亥丄氐）弦正}}{\text{（氐丄天）弦正}}$ ㈡ 若呷叱叮叮呷叱同積之比已有定率卽可從

㈠㈡兩式而得天亥兩角則其餘各數亦可求得

求亥天兩角之法若用平常之消法須解四次方程

方通故惟檢八線表爲便

設其櫟呷吃與吃叮等長則 寅＝卯 而其㈠㈡兩式必變為

$\frac{\text{正切亥}}{\text{正切天}}=\text{三}$

正弦(天丅氐)＝正弦(氐丅亥)

其

天丄亥＝二氐

則從

$\frac{\text{正切亥}}{\text{正切天}}=\frac{\text{餘弦天正弦亥}}{\text{正弦天餘弦亥}}=\text{三}$

式得

$\frac{\text{正弦天餘弦亥丄餘弦天正弦亥}}{\text{正弦天餘弦亥丅餘弦天正弦亥}}=\frac{\text{正弦(天丄亥)}}{\text{正弦(天丅亥)}}=\frac{\text{二}}{\text{一}}$

所以

正弦(天丄亥)＝二正弦(天丅亥)＝二正弦二氐

如將亥之同數 二氐丅天 代其本數得

正弦二(天丅氐)＝二正弦二氐

如此則可得天角之數而其

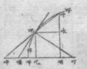
亥＝二氐丅天

觀以上之解法可知重學中相定之理能用微分術推之者最多最廣此書中因各事不過略舉一二所以不能多設此種之題

求曲線之切線式

第六十五款　無論何種曲線其切線必有公式

設呷吧吁為任何曲線呻叮為其軸線呷為其原點吧為曲線上任一點呷吃為吧點之橫線以天代之吧吃為吧點之縱線以地代之作吧哂線與曲線相切于吧而遇軸線于哂又過吧點任作呻吧咋線再遇曲線于咋亦遇軸線于呻從咋點作咋呐線與軸線為垂線又從吧點作吧味線與咋呐為垂線則吧味等于吃呐以辛代之又以延代咋味即為與天丄辛橫線相配之縱線



依同式三角形之理

咋味：吧味：：吧吃：呻吃

即

延丅地：辛：：地：呻吃

惟依第三十一款戴氏之例

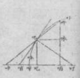
$\text{延丅地}=\frac{\text{彳天}}{\text{彳地}}\text{辛丄}\frac{\text{彳天}}{\text{彳地}}\text{辛丄}\cdots$

故以辛約其比例之前兩率則得

$\frac{\text{彳天}}{\text{彳地}}\text{丄}\frac{\text{彳天}}{\text{彳地}}\text{辛丄}\cdots\text{：一：：地：呻吃}$

此式無論辛之長數為大為小必合于理　若令辛漸變小則咋點漸與吧點相近而咋吧呻線必漸與吧哂線相近故其呻點必漸近哂點若辛小至不見則咋點必與

吧點合而呷必爲哂則叱呷必變爲叱哂故其比例之式必變爲$叱哂:地::\text{彳天}:\text{彳地}$其叱哂名曰次切線

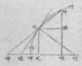


從此例可知無論何種曲線若令其任點吧之橫線爲天縱線爲地則其次切線之公式必爲$叱哂=地\div\frac{\text{彳地}}{\text{彳天}}=地\frac{\text{彳天}}{\text{彳地}}$（一）由是知凡曲線之次切線恆等于縱線之微係數約其縱線之數亦卽爲橫線之微係數與縱線相乘之數

次切線之式已知則切線之式亦易知

從吧點作切線之垂線與軸線遇于叮其吧叮線名曰法線

從叮點至縱線遇軸之點叱其叱叮線名曰次法線



因哂叱吧三角形與吧叱叮三角形爲同式故有比例式$哂叱:叱吧::吧叱:叱叮$卽$\text{彳天}:\text{彳地}::地:叱叮$由此得$叱叮=地\frac{\text{彳地}}{\text{彳天}}$（二）爲次法線之公式

惟因吧哂叱角之正切等于$\frac{吧叱}{哂叱}$又吧叮叱角之正切等于$\frac{吧叱}{叮叱}$所以得$正切哂=\frac{\text{彳地}}{\text{彳天}}$　$正切叮=\frac{\text{彳天}}{\text{彳地}}$（三）

又因哂叱吧與吧叱叮兩箇三角形$吧哂=\sqrt{吧叱^{2}+叱哂^{2}}$　$吧叮=\sqrt{吧叱^{2}+叱叮^{2}}$所以得切線之公式爲$吧哂=地\sqrt{一+\frac{\text{彳天}^{2}}{\text{彳地}^{2}}}$（四）法線之公式爲$吧叮=地\sqrt{一+\frac{\text{彳地}^{2}}{\text{彳天}^{2}}}$（五）

第六十六款　茲將以上所得之各公式以推數種曲線之題明其用法如下

一題　設有曲線爲拋物線欲求其次切線次法線之式

則仍用前圖以呷叮爲軸線呷爲頂點如以甲代其通徑則本曲線之式爲$地^{2}=甲天$所以$二地\text{彳地}=甲\text{彳天}$而$\frac{\text{彳地}}{\text{彳天}}=\frac{甲}{二地}$故得其次切線之式爲$叱哂=地\frac{\text{彳天}}{\text{彳地}}=地\div\frac{甲}{二地}=\frac{二甲天}{甲}=二天$所以知拋物線之次切線爲

橫線呷吃之倍一

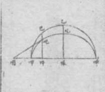
又求其次法線之式得

$\frac{吃}{叮}=\frac{犾}{拋}地=\frac{二犾}{甲犾}=\frac{二}{甲}$

所以知拋物線之次法線恆等于半通徑其數爲常數。

二題　設有曲線爲橢圓形欲求其次切線之式。

如圖哏呷爲半長徑哏吃爲半短徑哏爲縱橫線之原點。令哏呷爲甲哏吃爲乙哏吽爲天吧吽爲地則依本曲線之理有比例式



$甲^2:乙^2::(甲\top天)(甲\perp天):地^2$ 所以 $地^2=\frac{乙^2}{甲^2}(甲^2\top天^2)$ 而 $地拋=\top\frac{乙^2}{甲^2}天犾$ 故得其次切線之式爲 $\frac{吽}{唷}=\frac{拋}{犾}地=\top\frac{甲^2\top天^2}{甲^2}\cdot\frac{甲^2}{天}=\top\frac{甲^2\top天^2}{天}$。

案前款攷次切線之公式其所用之橫線乃是與次切線同在一邊者故其次切線之號爲正茲因本圖之次切線不與橫線在一邊所以其號爲負。

如不論次切線與橫線彼此之方向如何而但令其 $\frac{吽}{唷}=\frac{天^2}{甲}\top天$ 則得 $\frac{哏}{唷}=\frac{天^2}{甲}$ 所以有比例之式 $哏吽:哏呷::哏呷:哏唷$ 由此可見橢圓之長短二徑若變爲相等則橢圓變爲平圓其次切線因與長短二徑之比例無相關所以橢圓變至平圓其次切線之式仍不變。

三題　設曲線爲雙曲線欲求其切線之式

則命其半橫徑哏呷爲甲半屬徑爲乙哏爲原點哏吽橫線爲天吧吽縱線爲地　依圓錐曲線之理 $地^2=\frac{乙^2}{甲^2}(天^2\top甲^2)$ 故其 $地拋=\frac{乙^2}{甲^2}天犾$ 所以得次切線之式爲

$\frac{吽}{唷}=\frac{拋}{犾}地=\frac{乙^2天}{甲^2地}=\frac{天^2\top甲^2}{天}=天\top\frac{甲^2}{天}$

而

$\frac{哏}{唷}=哏吽\top吽唷=\frac{甲^2}{天}$

由此可

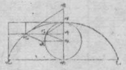
見其天若爲有窮之數則其切線遇軸之點恆在心頂二點之間惟天爲無窮之時則㖒哂爲○而其切線變爲漸近線

四題　求擺線之切線式

此題必先以代數幾何之法攷明其條段之理而後方可用公式求之

設有平圓形輥行于直線之上如車輪之行于軌中者然從其圓周之任一點初切于直線之時起輥至此點復與直線相切爲止則其點所過之迹必成擺線其底線之長等于平圓之周

如圖呷哂叮平圓形爲母輪吃乙直線爲擺線之底



吃呷乙爲擺線此線爲母輪之呷點初從切于吃點之時其輪向右輥行至此點切于底線之乙點而止則其呷點所行之迹卽成擺線

其呷叮哂母輪行至一半之時呷點在擺線之頂點㖒爲母輪之心呷哂爲母輪之徑此亦名擺線之軸

試任取呷叮爲母輪之任一弧從其弧端作㖒叮半徑設使母輪從哂向吃而行其所行之路至等于呷叮弧之時則其呷㖒半徑必爲吧𠯆且必與㖒叮平行此因呷㖒半徑繞其母輪之行心而旋則其旋動之角恆與母輪行過之路有比例卽與呷叮弧有比例所以㖒叮與𠯆吧平行而相等若自吧點作直線過叮點而遇呷哂于咋則此線必與𠯆㖒平行亦必與呷哂成直角　又因吧叮等于𠯆㖒亦等于呷叮弧故若以呷哂爲橫軸吧爲曲線之任一點則其縱線吧咋必等于母輪之呷叮弧與其本弧正弦之和此卽擺線之幾何例也

如命母輪之半徑爲甲而以呷㖒叮角爲亥則其呷叮弧等于吧叮而

吧叮＝甲亥

叮咋＝甲正弦亥

所以若令

呷咋＝天

吧咋＝地

則本曲線之式爲

天＝甲(一−餘弦亥)

地＝甲(亥−正弦亥)

由此二式可攷擺線之各種性情

如欲求其切線之式可依微分之法得

彳天＝甲彳亥正弦亥

彳地＝甲彳亥(一−餘弦亥)

則其

$\frac{地}{伏}=\frac{一-餘弦亥}{正弦亥}$

故其次切線之式爲

$呷-地=\frac{地}{伏}=\frac{一-餘弦亥}{(一-正弦亥)正弦亥}(呷-呷)$

所以

$呷\cdot叮\cdot\cdot吧\cdot咋$

惟依平圓形之理

$\frac{呷\cdot叮\cdot\cdot叮\cdot呷}{咋\cdot咋\cdot\cdot咋\cdot咋}$

所以

$\frac{吧\cdot咋\cdot\cdot叮\cdot呷}{咋\cdot哂\cdot\cdot咋\cdot咋}$

故吧咋哂與叮咋呷兩箇三角形爲同式而切線吧哂恆與叮呷通弦平行

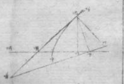
五題 設有對數曲線式 $地=甲^{天}$ 求其次切線之式

則求得 $地-伏=甲\,訥甲(伏-天)$ 所以 $\frac{地}{伏}=\frac{一}{訥甲}$ 可見對數曲線之次切線恆爲已知之常數

論極曲線之切線法線公式

第六十七款

設哼吧吁爲曲線其成此曲線之法有帶徑呷吧繞呷極而旋其呷極爲已知之呷哂方向線上已知之點則吧點行成曲線



若從呷點向哂作呷吧之垂線又以吧爲切線作曲線之切線與前所作之垂線遇于哂則切線吧哂與軸交于哂又自吧點作吧咋爲軸線之垂線再自吧點作吧哂之垂線吧叮遇哂呷引長之線于叮則吧叮爲法線吧哂爲切線呷哂爲次切線呷叮爲次法線

合橫線呷咋爲天縱線吧咋爲地帶徑呷吧爲未其變角吧呷哂爲亥切軸交角吧哂呷爲酉則其天地未皆可爲亥角之函數

因哂吧呷角爲吧哂呷與吧呷哂和角之餘角即酉之餘角故依代數術第二百二十六與二百四十一兩款之例得

$正切\frac{哂}{吧呷}=\frac{一}{正切(亥丄酉)}=\frac{一-正切亥\,正切酉}{正切亥丄正切酉}$

惟因

$正切亥=\frac{天}{地}$

$正切酉=\frac{呷咋}{吧咋}=\frac{伏}{地}$

所以

$正切\frac{哂}{吧呷}=\frac{一-\frac{天}{地}\frac{伏}{地}}{\frac{天}{地}丄\frac{伏}{地}}=\frac{天伏-地地}{天地丄地伏}$

而

$\frac{天}{地地伏}=\ldots=\frac{餘弦亥}{未}$

所以其

$\text{天彳}\top\text{地伏}=\text{彳依}\frac{\text{餘弦亥}}{\text{天}}=\text{未彳依}$

$\text{天伏}\bot\text{地彳}=\text{三彳}(\text{天}\bot\text{地})=\text{三彳}(\text{未})=\text{未彳}$

所以 $\text{正切}\frac{\text{呾}}{\text{呷}}=\frac{\text{未彳}}{\text{未依}}=\frac{\text{彳}}{\text{未依}}$ 惟依三角形之理 $\frac{\text{呾}}{\text{呷}}=\frac{\text{呷}}{\text{吧}}\text{正切}\frac{\text{呾吧}}{\text{呷}}$ 故其次

切線之式為 $\frac{\text{呾}}{\text{呷}}=\frac{\text{未}}{\text{依}}\text{未}$ 又因 $\text{呾}:\text{呷}::\text{呷}:\text{吧}::\text{呷}:\text{吧}$ 故其次法線之式為 $\frac{\text{呷}}{\text{叮}}=\frac{\text{依}}{\text{彳}}$

題 設曲線為亞幾默德螺線其式為 $\text{亥}=\text{甲未周}$ 其周字以代

兩個正角之和甲為已知之線求其次切線

則令 $\text{亥}=\text{二周}$ 為未之同數求得其次切線之式為 $\frac{\text{彳}}{\text{依}}=\text{未}^{2}\frac{\text{甲}}{\text{二周未}}$

論曲線之漸近線

第六十八款

有數種曲線其縱橫線愈長則切線與橫軸相交之處距原點愈遠故其切線不能為漸近線

有數種曲線其切線與橫軸相交之點距原點為有窮之數則其切線能為曲線之漸近線

如從六十六款第三題次切線為 $\frac{\text{咋}}{\text{哂}}=\frac{\text{地}}{\text{伏}}\text{地}$ 以橫線 $\frac{\text{呷}}{\text{咋}}=\text{天}$ 減之

得 $\frac{\text{地}}{\text{伏}}\text{地}\top\text{天}$ 為呷哂之公式若天為無窮之時其呷哂為有窮則其曲線能有漸近線若天為無窮之時呷哂亦為無窮則其曲線不能有漸近線

如雙曲線之次切線為 $\frac{\text{地}}{\text{伏}}\text{地}=\text{天}\top\frac{\text{天}}{\text{甲}}$ 所以 $\frac{\text{地}}{\text{伏}}\text{地}\top\text{天}=\top\frac{\text{天}}{\text{甲}}$ 若天為無窮則 $\top\frac{\text{天}}{\text{甲}}=\text{〇}$ 所以知雙曲線之漸近線必過原點

如拋物線之次切線為 $\frac{\text{地}}{\text{伏}}\text{地}=\frac{\text{甲}}{\text{二地}}$ 所以 $\frac{\text{地}}{\text{伏}}\text{地}\top\text{天}=\frac{\text{甲}}{\text{二地}}\top\text{天}=\text{二天}\top\text{天}=\text{天}$ 若天為無窮則其式亦為無窮所以知拋物線不能有漸近之線

凡攷曲線之切線式為曲線理中最要之事從此法又可求縱橫線最大最小之數並可攷明諸曲線數理中各異之性情

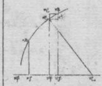
求曲線界內之面積微分並曲線之微分

第六十九款

凡欲明曲線變化之理可令天爲自主之變數以代其曲線任一點之橫線則其曲線之任一段弧或弧與其縱橫線界內之面積以及曲線所能有之他變數皆可爲變數之函數

若曲線爲有極之曲線而欲攷其曲線界內之面積則可令帶徑與其有定方向之線所成之角爲自主之變數而其曲線之縱橫線並曲線與帶徑及定方向線界內之面積及他變數皆爲本角之函數

凡求曲線界內之面積設呐吧爲任何曲線呷吃爲橫軸呷爲軸線上已知之點呐爲曲線上已知之點吧吽啐呼爲曲線上任兩點之縱線呐叮爲呐點之縱線又從吧啐兩點作吧吰及啐吧二線與啐呼吧吽爲垂線



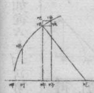
令 呷吽＝天　吧吽＝地　吧吽呐叮面積＝申　呷呼＝天　啐呼＝地　啐呼叮呐面積＝申　則 吽呼＝天仸　而 吧啐呼吽面積＝甶申　惟因啐呼縱線爲從吧吽縱線變大而成所以吧啐呼吽面積必大于吧吽呼吰面積而小于吧啐呼吽面積故其甶申必大于（天天）地而小于（天天）地其 $\frac{天天}{甶申}$ 必大于地而小于地所以啐呼若愈近于吧吽則地漸等于地故 $\frac{仸}{伸}=\frac{天天}{甶申}=$ 地 而 伸＝地仸 （一）

故得專法如左

凡求曲線與縱橫線界內面積之微分法以縱線與橫線之微分相乘即得

以上所得之式其縱線必與軸線爲正交若其縱線與軸線爲斜交者則以斜若干度爲角故甶申大于（天天）地正弦角而小于（天天）地正弦角如前法求之得 伸＝仸地正弦角 （二）

第七十款



如欲求極曲線面積之微分則令吃爲極點其吧吃帶徑以未代之其吧吃吽變角以亥代之又令吧呐叮吃面積爲申吃吽橫線爲天吧吽縱線爲地則可用前款之法以求其極曲線面積吧呐叮吃之微分

如

神＝彳(呬吧叮咋面積)丄彳(吧叮吃面積)

惟因

彳(呬吧叮咋面積)＝丨地伏

彳(吧叮吃面積)＝彳(三天地)＝三地伏丄三天𠀤

所以

神＝丅地伏丄三地伏丄三天𠀤＝三(天𠀤丅地伏)＝三天彳(天地)

此依第十二款之法所得也

惟吧吃咋正三角形內

吃咋＝天＝夾餘弦亥

而

天地＝正切亥

則

彳(天地)＝餘弦亥／弦

此依第二十二款之例所得也

而

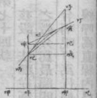
神＝三夾弦

㊂故得專法如左

凡極曲線面積之微分等于帶徑之平方乘極角之微分而以二約之

第七十一款　前于第二十一款中已致明平圓之弧微分茲欲推廣此例以致明任何曲線微分之公式故必先設一幾何之題證明其理以便于用

題曰設有任何種曲線之一段呬吧嘆叮其曲線在吧嘆二點之間恆與其軸線呷吃漸相離或漸相近其吧咋及嘆唧爲吧嘆二點之縱線其吧呼及嘆啐爲吧嘆二點之切線被引長之縱線所截于呼于啐則吧嘆一段曲線之長恆在吧呼與嘆啐之間試以下法證之



作吧嘆通弦則易見吧呼線與唧嘆縱線引長所成之呼角必銳于通弦吧嘆與唧嘆縱線所成之吧嘆唧角而嘆啐線與吧咋縱線引長所成之嘆啐咋角必鈍于吧嘆唧角所以吧嘆唧角之正弦必大于呼角之正弦而小于嘆啐咋角之正弦惟因弧必大于通弦所以知嘆啐必小于吧嘆弧又因旺爲吧呼與嘆啐兩線之交點其吧旺啐與嘆旺呼兩箇三角形已知其吧旺旺呼長于啐旺旺嘆所以吧呼必長于吧旺與旺嘆之和惟依幾何之公理吧嘆弧必小于吧旺旺嘆之和所以知吧嘆弧必小于吧旺

第七十二款

令呷吃爲軸線呷爲原點呬吧嘆叮爲任何曲線呬爲曲線上已知之點從吧點作吧咸線從啐作啐吧線皆與呷吃軸線平行令

呷咋＝天

呷唧＝夭

吧咋＝地

呬吧＝人

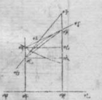
呬嘆＝人

則其

吧咸＝夭丅天

吧嘆弧＝人丅人

因吧嘆小于吧呼而大于



嗔啐所以$\frac{天}{人}$小于$\frac{吧哦}{吧呼}$而大于$\frac{啐吧}{啐嗔}$惟$\frac{吧哦}{吧呼}$與$\frac{啐吧}{啐嗔}$為呼吧哦角嗔啐吧角之割線所以$\frac{天}{人}$之比例可以大小于此二角割線之數明之

設$\frac{天}{人}$與$\frac{天}{人}$其比例恆變小則啐吧二角必漸近相等至此二角相等之時其比例之限$\frac{彳天}{彳人}$必等于呼吧哦角之正割

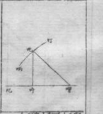
前已于第六十五款證明凡有直線與任何曲線相切則此直線與軸線相交或與平行于軸線之他線相交其所成之角等于$\frac{彳天}{彳地}$所以知呼吧哦角之正割必等于$\sqrt{一+\frac{彳天^2}{彳地^2}}$所以其$\frac{彳天}{彳人}=\sqrt{一+\frac{彳天^2}{彳地^2}}$而$彳人=\sqrt{彳天^2+彳地^2}$㈠故得專法如左

凡曲線微分之平方恆等于縱橫兩線之微分平方相加之式

第七十三款

若欲求極曲線之微分可令甲代其帶徑亥代其變角而如法推之

如圖呷吃為已知方向之線呷為極點呐吧叮為極曲



線吧為曲線上之任一點吧呷為帶徑吧呷吃為變角呷吽為吧點之橫線吧吽為吧點之縱線

令

$呷吽=天$

$吧吽=地$

則

$天=甲餘弦亥$

$地=甲正弦亥$

而

$彳天=-甲正弦亥彳亥+餘弦亥彳甲=-地彳亥+\frac{天}{甲}彳甲$

$彳地=甲餘弦亥彳亥+正弦亥彳甲=天彳亥+\frac{地}{甲}彳甲$

$彳天^2=地^2彳亥^2+\frac{天^2}{甲^2}彳甲^2-\frac{二天地}{甲}彳亥彳甲$

$彳地^2=天^2彳亥^2+\frac{地^2}{甲^2}彳甲^2+\frac{二天地}{甲}彳亥彳甲$

所以

$彳天^2+彳地^2=(天^2+地^2)(彳亥^2+彳甲^2)$

惟因

$彳天^2+彳地^2=彳人^2$

$天^2+地^2=甲^2$

所以得

$彳人^2=甲^2彳亥^2+彳甲^2$

而

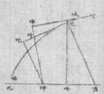
$彳人=\sqrt{甲^2彳亥^2+彳甲^2}$㈡

由是知極曲線之微分可用變角之微分與帶徑之微分以明之

第七十四款

茲設一法即從極曲線所有之代數式而得其極曲線之微分為最簡明之式

令呐吧叮為任何極曲線之弧呷吃為已知方向之直線呷為直線內已知之極點吧為曲線上之任一點若



以吧點爲切點而作切線吧叱又自呷點作呷吧線爲切線之垂線如知呷叱之長與呷吧及呷叱所成之吧呷叱變角有相關之理卽可查得此變角與呷吧之長短如何相配如此則其切線之方向亦易知之而用微分之法可得其吧叱切線之公式故可用此法以求極曲線任何點之切線

第七十五款　仍用前圖明之

設叮爲曲線上之他點令叮哱爲切線呷哱爲其垂線

又以代法

叱呷叱角＝戊　哱呷叱角＝戊′　呷吧＝巳　呷哱＝巳′　吧吧＝酉　叮哱＝酉′　呐吧弧＝人　呐叮弧＝人′

則可從圖中各線之方位知 哱哝/吁哝 (吁哝/叮吁 丄 吁吧/吁哝) ＝ 哝吧/吁叮 (吁吧/吁哝 丄 吁哝/哝吧) ＝ 吧吧/哱叮 依三角之法 吧呷/吁吧 ＝ 巳正切(戊′丅戊) 又 呷吧/吁吧 正切 ＝ 吁/吧呼

因呷叱吁三角形與哝哱吁三角形爲同式則吁呷吧角與哱哝吁角相等所以 哱/哝 ＝ 吁/哝 餘弦(戊′丅戊) 故可作 酉′丅酉＝吧/哝(哝/叮丅巳) 正切(戊′丅戊)丄(一丅餘弦(戊′丅戊)) 吁/哝 此式如以 戊′丅戊

約之則得 (戊′丅戊)/(酉′丅酉) ＝ 吧/哝 (哝/叮丅巳) (戊′丅戊)/正切(戊′丅戊) 丅 (戊′丅戊)/(一丅餘弦(戊′丅戊)) 吁/哝 設其叮吧二點漸相近以至相合則得

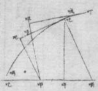
其變比例之限爲 (戊′丅戊)/(酉′丅酉) ＝ 戊/酉　(戊′丅戊)/(哝吧丅哝叮) ＝ 戊/巳　(戊′丅戊)/正切(戊′丅戊) ＝ 一　(戊′丅戊)/(一丅餘弦(戊′丅戊)) ＝ (戊′丅戊)/(二正弦²(戊′丅戊)) ＝ ○ 總之得 戊/酉 ＝ 戊/巳 巳 所

以其 巳＝酉丄巳戊 而 戊(人丅酉)＝巳戊

以上之式因其圖中之弧與切線爲同方向故其酉爲負若弧與切線有對面之方向者則其酉必爲正而其

微分之式必爲 $彳(\text{人}丨\text{酉})=\text{巳}彳\text{戌}$ 所以其公式爲 $彳(\text{人}丨\text{酉})=\text{巳}彳\text{戌}$ ㊂

極曲線之弧微分亦可不必以酉明之因其 $\frac{\text{呷}}{\text{吧}}丨\frac{\text{呷}}{\text{吁}}=\frac{\text{吁}}{\text{哰}}丨\frac{\text{呷}}{\text{吧}}丨\frac{\text{呷}}{\text{哰}}$ 式中之



$\frac{\text{吁}}{\text{哰}}=\frac{\text{哰}}{\text{吱}}\text{正切}\frac{\text{哰吱}}{\text{吁}}$ 卽 $\frac{\text{吁}}{\text{哰}}=\frac{\text{哰}}{\text{吱}}\text{正切}(\text{戌}丨\text{戌})$ 而 $\frac{\text{呷}}{\text{吧}}=\frac{\text{呷}}{\text{吁}}\text{餘弦}(\text{戌}丨\text{戌})$ 故以 $\text{戌}丨\text{戌}$ 約之卽可得 $\frac{\text{戌}丨\text{戌}}{\text{乜}\text{巳}}=\frac{\text{哰}}{\text{吱}}\frac{\text{戌}丨\text{戌}}{\text{正切}(\text{戌}丨\text{戌})}丨\frac{\text{戌}丨\text{戌}}{丨\text{餘弦}(\text{戌}丨\text{戌})}\frac{\text{呷}}{\text{吁}}$ 推其變比例之限 $\frac{\text{哰}}{\text{吱}}=\text{酉}$ 則 $\frac{\text{戌}丨\text{戌}}{\text{正切}(\text{戌}丨\text{戌})}=一$ $\frac{\text{戌}丨\text{戌}}{丨\text{餘弦}(\text{戌}丨\text{戌})}=\bigcirc$ 卽得 $\frac{\text{戌}}{\text{乜}}=\text{酉}$ 若弧

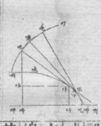
與切線吧吧爲同方向則酉爲正若異方向則酉必爲

負又因 $\text{栖}=丨\frac{\text{戌}}{\text{乜}}$ 所以得極曲線之微分式爲 $\text{人}=\text{巳}彳\frac{\text{戌}}{丨\text{乜}}\text{戌}=\left(\text{巳}丨\frac{\text{戌}}{\text{乜}}\right)\text{戌}$ ㊃ 此卽

依前款之理所求得之式也

論漸伸之曲線

第七十六款 以漸伸之法作曲線創自晦正士（西名）惟其時尚未有微分算術故晦氏所著之書專藉幾何之例以明之



設叱哰吱爲曲面側視之形叱哰吱哂爲絲線線之一端定于曲面之叱點其又一端恆有力牽之使線與凸面相合之處仍爲曲線而其相離之處爲直線則此線之直處爲曲線之切線 若其牽力漸自哂移向叮則切點自吱移向叱而其線之一端行成哂吧叮曲線

此卽漸伸線之作法也凡本曲線之曲面若非無窮大及無窮小者皆可依此法以作他曲線

第七十七款 凡作哂吧叮曲線之時所用之曲面吱哰叱謂之母曲線其所成之哂吧叮曲線謂之子曲線其作此子曲線所用之線謂之漸伸線

詳觀子曲線由漸伸線而成有五件要例

一其漸伸線離吱哰弧之一段直線哰吧爲母曲線哰點之切線

二其吧啐必與啢吧吖子曲線吧點之切線為垂線其同時中所成子曲線之極小分略等于以啐為心以吧啐為半徑所作平圜弧之極小分

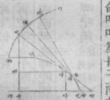
三其子曲線吧啢間之曲率必比以吧啐為半徑之平圜弧更曲而子曲線吧吖間之曲率必比以吧啐為半徑之平圜弧更直其所以如此之故因其線端若自吧向啢而行則其直線吧啐漸短若自吧向吖而行則其直線吧啐漸長

四惟因子曲線自吧漸向啢則其曲率彎于吧啐為半徑之平圜若自吧漸向吖則其曲率直于吧啐為半徑之平圜則惟有子曲線吧點之曲率適等于吧啐為半徑之平圜所以可合其母曲線之啐點為子曲線在吧點時之平圜心故名其吧啐直線為吧點之曲率半徑以此半徑所成之平圜謂之合吻圜因其平圜之曲率能與子曲線吧處之曲率相合甚密故也　惟應知凡曲線之合吻圜不能有公截面因其相合于吧之處不過一點除此一點以外兩線仍為相離　又可知合吻圜之相切比本曲線與他平圜之相切更為親密

五凡漸伸線所成之子曲線為以其母曲線之各點為心所成之界

第七十八款　玆欲求得曲率半徑之公式並任何曲線以漸伸之法所成之子曲線公式則可由此以知各曲線之性情

命呷吃為母子兩曲線之公軸呷為原點啐為吧點合吻圜之心吧啐為曲率半徑又令啐為吧點合吻圜之心而以吧啐為其曲率半徑又將兩曲率半徑引長之至與軸線遇于啣啣二點㖞為其引長線相交之點



乃以代法合 呷吘＝天 吧吘＝地 啢吧＝人 啢吧＝人 吧啣呷＝亥 吧啣呷＝亥 吧啐＝未 則依三角形之理 吧㖞＝吧㖞正弦 吧㖞＝吧㖞正弦 所以 設其吧吧二點漸相近而至于合則易知㖞㖞之限為吧啐即吧點之曲率半徑而其之限必為 吧吧＝$\frac{1}{2}$(亥) 其吧㖞㖞吧㖞㖞兩角正弦之限必為其角之弧度而其兩正弦之和之限必為吧㖞吧角之弧度惟因

$\text{亥}=\frac{\text{呷𠼟呷}}{\text{吧𠼟吧}}$ 所以可見 $\text{未}=\frac{\text{亥}}{\text{夊}}\cdot\frac{\text{亥}}{\text{人}}$ 爲其曲率半徑之限故得 $\text{未}=\frac{\text{孩}}{\text{仸}}$ ㈠

此爲曲率半徑之第一箇公式

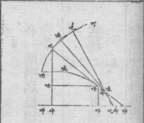
如令 $\frac{\text{仸}}{\text{地}}=\text{巳}$，$\frac{\text{仸}}{\text{𠯈}}=\frac{\text{仸}}{\text{祀}}=\text{午}$，則依第七十二款之例 $\text{仸}=\sqrt{\text{陔}}\,\text{地}=\text{仸}\sqrt{\text{丄}\frac{\text{仸}}{\text{𠯈}}}=\text{仸}\sqrt{\text{丄巳}}$ 曾于第六十五款中論曲線之切線微分已攷得 $\text{正切亥}=\frac{\text{地}}{\text{仸}}$ 則 $\text{正切亥}=\frac{\text{巳}}{\text{一}}$ 而 $\text{正割亥}=\frac{\text{巳}}{\sqrt{\text{丄巳}}}$，$\text{彳}(\text{正切亥})=\text{彳正割亥}=\frac{\text{巳}}{\text{祀}}$ 所以 $\frac{\text{巳}}{\text{丄巳}}\,\text{孩}=\frac{\text{巳}}{\text{午仸}}$，$\text{孩}=\frac{\text{丄巳}}{\text{午仸}}$ 如將此孩與仸之同數代入㈠式中則得 $\text{未}=\frac{\text{丄}(\text{丄巳})}{\text{午}}=\frac{\text{仸}(\text{丄地})}{\text{仸}}$ ㈡

此爲曲率半徑之第二箇公式

若命子曲線之法線吧呷爲申則于吧吽呷直角形內依三角之理得 $\text{正割亥}=\frac{\text{呷}}{\text{吧吽}}$ 則其 $\text{正割亥}=\frac{\text{申}}{\text{地}}$ 惟因 $\text{正切亥}=\frac{\text{地}}{\text{仸}}=\frac{\text{巳}}{\text{一}}$ 所以 $\frac{\text{申}}{\text{地}}=\text{正割亥}=\sqrt{\text{丄巳}}$ 又 $\sqrt{\text{丄巳}}=\frac{\text{地申}}{\text{地}}$，$(\text{丄巳})=\frac{\text{申}}{\text{地}}$ 若以此各同數代入㈡式則 $\text{未}=\frac{\text{申}}{\text{午地}}=\frac{\text{申}}{\text{地}}\times\frac{\text{地}}{\text{仸}}$ ㈢ 此爲曲率半徑之第三箇公式

再依第七十四款之例從軸線上呷點作與吧點切線成直角之呷吧線此用七十四款之圖以巳代之又以亥代其吔呷吔角此角即等于法線吧呷與軸線呷吔所成之角則因 $\text{仸}=(\text{巳})\frac{\text{𠯈}}{\text{祀}}\text{孩}$ 故可由㈠式而得 $\text{未}=\text{巳}\frac{\text{孩}}{\text{祀}}$ ㈣ 此爲曲率半徑之第四箇公式

第七十九款　如欲知漸伸線之毋曲線或哼吃之性情如何則可自任一點哼作哼吁線與呷吃爲垂線又作



哶吒線與吧哶爲垂線又令母曲線之原點呷亦爲子曲線之原點

令 $呷吁=角$ $哶吁=亢$ 則吧哶吒直角形之內

其 $\frac{哶}{吒}=\frac{吧哶}{餘弦哶}$ $=\frac{未}{餘弦亥}$ $\frac{吧}{吒}=\frac{未}{正弦亥}$ 所以 $角=天丅未餘弦亥$ $亢=地丄未正弦亥$ 惟因 $正切亥=\frac{巳}{一}$ 所

以 $餘弦亥=\frac{一}{\sqrt{一丄巳^{二}}}$ $正弦亥=\frac{巳}{\sqrt{一丄巳^{二}}}$ 由此得 $角=天丅\frac{午}{巳}(一丄巳^{二})$ $亢=地丄\frac{午}{一}(一丄巳^{二})$ 如將巳與午之原同數

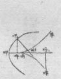
代還之卽得 $角=天丅\frac{彳地}{彳天}\times\frac{彳天^{二}丄彳地^{二}}{彳天彳^{二}地}$ $亢=地丄\frac{彳天^{二}丄彳地^{二}}{彳天彳^{二}地}$ 此式與曲率半徑之㊁㊂兩式

內其天皆爲自主之變數而地爲天之函數

第八十款　以漸伸之法審各種曲線之形其中有一理可令若干種曲線能改爲等長之直線因曲率半徑之長（如前圖之吧哶）等于已伸之直線（如呐哶）與未伸之曲線（哶呐弧）相和故也　惟所設之曲線能作曲率半徑者其數無窮故別無他法可求之惟有以代數式之各項明其能作本曲線之曲率半徑之母曲線則其曲率半徑必能與母曲線之長爲眞相等

第八十一款　茲設數題以攷明各種曲線之形

一題　設曲線爲拋物線欲攷其爲何種曲線漸伸所成



如呷吧爲拋物線呷呐爲其軸以丙代其通徑令 $呷吁=天$ $吧吁=地$ 爲曲線上任一點之縱橫線　其呐哶爲母曲線哶爲母曲線上之任一點令此點之縱橫線 $呷吁=角$ $哶吁=亢$ 則呷吧爲子曲線而 $吧哶=未$ 爲其曲率半徑

依拋物線之本式 $地^{二}=丙天$ 所以 $\frac{彳天}{彳地}=巳=\frac{二地}{丙}$ 則 $一丄巳^{二}=\frac{四地^{二}}{丙丄四地^{二}}=\frac{四天}{丙丄四天}$ 其 $\frac{彳^{二}天}{彳地^{二}}=\frac{彳巳}{彳地}=午=\frac{二彳天}{丙彳地}\times\frac{地}{一}=\frac{四地^{二}}{丙}$

故 $未=\frac{午}{(一丄巳^{二})^{\frac{三}{二}}}=\frac{二丙}{(丙丄四地^{二})^{\frac{三}{二}}}=\frac{二丙}{(丙丄四丙天)^{\frac{三}{二}}}=\frac{丙}{二\sqrt{(丙丄四天)^{三}}}$ 此爲用㊁式所求得之曲率半徑也

如令其法線 $\frac{吧}{卯}=申$ 則依第七十八款之㊂式得

$$未=\top\frac{午地}{申}=\frac{丙}{四申}=\frac{(三丙)}{申}$$

卽爲 $\frac{半通徑}{法線}$ 再查其母曲線有

$$角=天\top\frac{午}{巳}(\bot巳)=天\top\frac{二}{四天\bot丙}=三天\bot三丙$$

$$亢=地\top\frac{午}{\bot巳}=地\top\frac{丙}{丙\bot四地}=\top\frac{丙}{四地}$$

故

$$天=\frac{三}{二}\left(角\top\frac{二}{三}丙\right)$$

$$地=\top\left(\frac{四}{丙亢}\right)^{三}$$

因依拋物線之式 $丙天=地^{二}$ 所以其母曲線之式爲

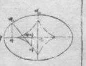
$$亢^{二}=\frac{二七丙}{一六}\left(角\top\frac{二}{三}丙\right)^{三}$$

如令 $呷呷=\frac{二}{一}丙$ 則哂爲已知之點而 $哂呼=角\top\frac{二}{三}丙$ 若令 $哂呼=天$ $哞呼=亢=\top地$ 則母曲線之式爲

$$地^{二}=\frac{二七丙}{一六}天^{三}$$

由此知以漸伸之法所成之曲線若爲拋物線則其母曲線必爲半立方拋物線此乃用微分算學所攷明之一種曲線也

二題　設曲線爲橢圓線欲攷其爲何種曲線漸伸所成



如呷吃爲橢圓線喉呷爲半長徑喉吃爲半短徑令 $喉呷=甲$ $喉吃=乙$ $戊=\sqrt{甲^{二}\top乙^{二}}$ 爲其中距乃以喉爲原點又令 $喉呼=天$ $吧呼=地$ $哞吧=未$ 則其 $哞吧=未$ 爲吧點之曲率半徑

因橢圓線之本式爲

$$\frac{甲^{二}}{天^{二}}\bot\frac{乙^{二}}{地^{二}}=一$$

卽

$$乙^{二}天^{二}\bot甲^{二}地^{二}=甲^{二}乙^{二}$$

所以

$$\frac{彳天}{彳地}=巳=\top\frac{甲^{二}地}{乙^{二}天}$$

則其

$$\bot巳^{二}=\frac{甲^{二}}{乙^{二}}\times\frac{甲^{二}地^{二}}{甲^{四}(甲^{二}\top乙^{二})天^{二}}=\frac{甲^{二}}{乙^{二}}\times\frac{甲^{二}地^{二}}{甲^{四}\top戊^{二}天^{二}}$$

其

$$\frac{彳天}{彳地}=\frac{彳巳}{彳地}=午=\top\frac{甲^{二}地}{乙^{二}}\times\frac{甲^{二}地}{乙^{二}天}=\top\frac{甲^{二}地}{乙^{二}}$$

故其

$$\frac{午}{(\bot巳^{二})^{\frac{三}{二}}}=\frac{甲乙}{\top一}\left(甲^{四}\top戊^{二}天^{二}\right)^{\frac{三}{二}}=\frac{甲乙}{\top一}\left(乙^{四}\top戊^{二}地^{二}\right)^{\frac{三}{二}}$$

所以其曲率半徑之式必爲

$$未=\frac{甲乙}{一}\left(\frac{甲}{戊天}\right)^{\frac{二}{三}}=\frac{甲乙}{一}\left(\frac{乙}{戊地}\right)^{\frac{二}{三}}=\frac{甲乙}{一}\left(\frac{甲地}{}+\frac{乙天}{}\right)^{\frac{二}{三}}$$

㈠、又從 $未=\frac{地午}{申}$ 式，其申等于法線吧哪，得未之別箇同數為 $未=\frac{乙^{二}}{甲}$，惟因 $\frac{甲^{二}}{乙}$ 為橫軸之半通徑，所以又得 $未=\frac{半通徑}{半徑^{二}}$ ㈡、案此㈠㈡兩式皆為曲率半徑之式。

如欲求其漸伸之母曲線，則令哼為母曲線之任一點，以哌呼橫線為角，以哼呼縱線為亢，乃將巳乜午三者之同數各代入第七十九款之式中，則可得其

$$角=天\left(\frac{甲地}{乙天}\times\frac{乙}{甲地}\times\frac{甲}{乙}\times\frac{甲地}{甲戊天}\right)=\frac{甲}{戊天}$$

$$亢=地\left(\frac{乙}{甲地}\times\frac{甲地}{乙戊地}\right)=\frac{乙}{戊地}$$

再將其角亢代天地，則得

$$\frac{甲}{天}=\left(\frac{戊}{甲天}\right)^{\frac{二}{三}}$$

$$\frac{乙}{地}=\left(\frac{戊}{乙地}\right)^{\frac{二}{三}}$$

以此代入橢圓之本式 $\frac{甲}{天}+\frac{乙}{地}=一$，則得

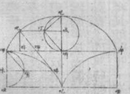
$$\left(\frac{戊}{甲天}\right)^{\frac{二}{三}}+\left(\frac{戊}{乙地}\right)^{\frac{二}{三}}=一$$

即

$$(甲天)^{\frac{二}{三}}+(乙地)^{\frac{二}{三}}=(甲-乙)^{\frac{二}{三}}$$

此母曲線之形甚奇，為其與橢圓之形甚相近故也。

三題　設已知漸伸所成之子曲線為擺線，求其母曲線之式。



如呷叱呻為擺線，呷哂呻為擺線之底，叱哂為其軸，叱叮哂為母輪，吧為擺線上之任一點，試自吧點作吧啵直線與底平行，而遇母輪于叮，又自吧點作吧吽直線與底為垂線，令吧哼為擺線之曲率半徑。

凡擺線之式，若令母輪之半徑為一，又令

$$\frac{哂}{吽}=\frac{吧}{啵}=天$$

$$\frac{吧}{吽}=\frac{啵}{哂}=地$$

$$\frac{叱叮}{弧}=亥$$

則依六十六款第四題之例

$$天=亥+正弦亥$$

$$地=一-餘弦亥$$

所以

$$\text{扶}=\text{㧗}(一-餘弦亥)$$

$$\text{梔}=\text{㧗}\,正弦亥$$

而

$$\frac{扶}{梔}=巳=\frac{一+餘弦亥}{正弦亥}$$

$$一+巳^{二}=\frac{一+餘弦亥}{二}$$

$$祀=\frac{一+餘弦亥}{㧗}$$

$$\frac{扶}{梔}=\frac{扶}{祀}=午=\frac{(一+餘弦亥)}{}$$

所以得

$$未=\frac{午}{(一+巳^{二})^{\frac{三}{二}}}=\sqrt{八(一-餘弦亥)}$$

如于母輪內作哂

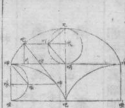
叮通弦而依代數術第二百四十九款之例則可知

$\frac{玄}{正弦}=二=\frac{玄}{餘弦}=一$

$\frac{呐叮通弦}{二}=正弦\frac{呐叮弧}{二}$ 所以得 $\frac{呐叮通弦}{二}=\frac{未}{吧啐}$ 惟依第六十六款之證其吧

點之切線必與呐叮之外弧通弦叱叮平行今因吧啐爲吧點切線之垂線所以吧啐必與呐叮通弦平行是以知擺線任何點之曲率半徑其方位與大小皆非無法之形

如欲求其母曲線之式亦可用第七十九款之公式求之或從其曲率半徑吧啐求之其法如下



如呷啐吧爲母曲線作呷呐之垂線呷呲其長短與叱呐相等乃以此爲徑而作呷嗔呲半平圓形又自啐點作呷呲之垂線啐味與半平圓之弧線相交于嗔又令吧啐線遇呷呐于咿

則因 $\frac{呷呐}{}=\frac{叱叮呐餘}{}$ 又 $\frac{呐咿}{}=\frac{叮吔}{叱叮弧}$ 所以 $\frac{咿呷}{}=\frac{呐叮弧}{}$ 惟因 $\frac{啐咿}{}=\frac{吧咿}{}$ 故 $\frac{吧咿}{}=\frac{咿啐}{}$ 則吧哦與啐味

二平行線之距呐呷爲相等所以 $\frac{吔哦}{}=\frac{味嗔}{}$ 而 $\frac{呐叮弧}{}=\frac{呷嗔弧}{}$ 所以其

$\frac{呷嗔通弦}{呐叮通弦}=\frac{叮呐呷角}{呐呷嗔角}$ 惟因 $\frac{呐叮}{}=\frac{吧咿}{咿啐}$ 所以 $\frac{呷嗔}{}=\frac{咿啐}{}$ 其呷嗔與咿啐之所以相

等者因 $\frac{嗔啐}{}=\frac{呷啐}{}=\frac{呐叮弧}{}=\frac{呷嗔弧}{}$ 又因 $\frac{啐味}{}=\frac{呷嗔弧}{}$ 正弦 $\frac{嗔味}{}$ 由此可見啐爲有等底之半

段擺線呷啐吧曲線上之任一點惟因呲呷吧眞爲呐叱呷半段擺線之面積移至呷啐吧之方位其叱點移至呷其呷點移至吧其呐點移至呲而成如將其又半面呷呐叱移至吧呷呲之方位則在吧呷之曲線爲呷吧叱之他支而吧呷爲叱呷之他支惟其方位則相反

由以上所攷得之各理可見如將吧呲呷與吧呲呷兩箇半擺面置于一箇垂面內垂面者直向地心之面也則其吧點在上而其呲吧呲與地平線平行若自吧點用一繩長如吧吧一端繫定于吧點其又一端垂以重物令其重物以推引之力往來擺動于垂面之內則其物所行之迹亦爲擺線此爲擺線理中最奇怪之性

情

晦正士攷得此理之時亦云物行于擺線之上無論其動速率大小如何其一往一返所歷之時刻必各大相等此乃動重學中之一種妙理也

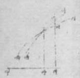
興化劉彝程校算

英國華里司輯
英國 傅蘭雅 口譯
金匱 華蘅芳 筆述

論曲線相切

第八十二款　昔時幾何之家曾經推賾周折攷知切線與不多幾種曲線相切之例如亞不羅尼斯論平圓與圓錐各曲線相切之理是也其論中所謂從曲線內任已知之點所能作與本曲線相切最密之線此理至創立微分算學之後始能得其大略

第八十三款　諸曲線之中惟有平圓之曲率能處處相同所以可用平圓之曲率比較任何曲線之各點曲率惟任何曲線之各點曲率不但能與平圓相切最密亦能以同法攷拋物線與任何曲線相切之理或可求任類之曲線與所設之曲線相切

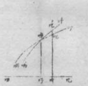


設 $地=函(天)$ $玄=呐(天)$ 爲圖中呐吧叮呐吧叮兩曲線之式其公軸爲呷叱其呷爲縱橫線之公原點令天爲公橫線地爲呐叮曲線任點吧之縱線玄爲呐吖曲線任點吧之縱線再設天變爲 $天\perp辛$ 之時其地變爲 $地'$ 其玄變爲 $玄'$ 則依戴氏之術詳其 $地'$ $玄'$ 得

$$地'=地\perp\frac{彳地}{彳天}辛\perp\frac{彳^2地}{彳天^2}\frac{辛^2}{1\cdot2}\perp\cdots$$

$$玄'=玄\perp\frac{彳玄}{彳天}辛\perp\frac{彳^2玄}{彳天^2}\frac{辛^2}{1\cdot2}\perp\cdots$$

因其兩曲線有公點哱而在此哱點處 $地=玄$ 如其式能得 $\frac{彳地}{彳天}=\frac{彳玄}{彳天}$ 則兩曲線在吧點相切而不能再有他曲線亦切吧點而過其兩曲線之間若云能之則必其曲線能有相同之性情者方可



令 $哱吁=地=玄$

$吖吽=辛$

$吧哱=地'$

$吧吽=玄'$

又令 $戊=哱$ 爲過哱點之第三條曲線之縱線而以 $戊'$ 爲其與 $天\perp辛$ 相配之同數則

$$戊'=戊\perp\frac{彳戊}{彳天}辛\perp\frac{彳^2戊}{彳天^2}\frac{辛^2}{1\cdot2}\perp\cdots$$

茲欲證明除 $\frac{彳戊}{彳天}=\frac{彳地}{彳天}=\frac{彳玄}{彳天}$ 之外不能有第三條曲線于離開哱點之時過其哱吧哱吧之間

假如能之，則總因 $\frac{二}{辛}\left(\frac{伕}{伐}\right)\left(\frac{伕}{㘿}\right)丅辛\left(\frac{伕}{伐}\right)\left(\frac{伕}{㘿}\right)丅戊丅地=亥丅地=\frac{吔}{吧}$ 又因在啐點有 $地=亥$ 之形，亦因所

設之曲線式內 $\frac{伕}{㘿}=\frac{伕}{伐}$ 則其 $\frac{六}{辛}\left(\frac{伕}{伐}\right)丅\left(\frac{伕}{㘿}\right)丅\frac{二}{辛}\left(\frac{伕}{伐}\right)丅\left(\frac{伕}{㘿}\right)=亥丅地$ 此爲呥吀曲線與哂吀

曲線兩縱線之相較數吧吔之公式，此式無論 $辛=\frac{吥}{吥}$ 之大

小如何，必合于理。

依此法推之，其第一條曲線之縱線 $地$ 與第二條曲線

之縱線 $戊$，其相較之數可以公式 $\frac{二}{辛}\left(\frac{伕}{伐}\right)丅\left(\frac{伕}{㘿}\right)丅辛\left(\frac{伕}{伐}\right)丅\left(\frac{伕}{㘿}\right)丅戊丅地=戊丅地$ 明之。若令 $地=戊$ 則

式變爲 $\frac{二}{辛}\left(\frac{伕}{伐}\right)丅\left(\frac{伕}{㘿}\right)丅辛\left(\frac{伕}{伐}\right)丅\left(\frac{伕}{㘿}\right)=戊丅地$ 惟其第二條曲線若于離開公點啐之後

能過其第一條曲線與第二條曲線之間，其在啐點之

時必略有 $亥丅地$ 大于 $戊丅地$ 之意，則將其 $亥丅地$ 之級數與 $戊丅地$ 之級

數俱以辛約之，卽得 $\frac{二}{辛}\left(\frac{伕}{伐}\right)丅\left(\frac{伕}{㘿}\right)丅\frac{六}{辛}\left(\frac{伕}{伐}\right)丅\left(\frac{伕}{㘿}\right)$ 大于 $\frac{二}{辛}\left(\frac{伕}{伐}\right)丅\left(\frac{伕}{㘿}\right)丅\frac{伕}{伐}丅\frac{伕}{㘿}$ 此兩式中其 $辛=\frac{吥}{吥}$ 之

同數無論如何，必合于理，則辛可爲任何小而 $亥丅地$ 級數

之各項可以小于能名之數，故其 $戊丅地$ 級數之限可以甚

近于 $\frac{伕}{伐}丅\frac{伕}{㘿}$ 由是知其限若非等于○，則其兩箇級數不

能相等，所以其 $\frac{伕}{㘿}$ 若不與 $\frac{伕}{伐}$ 相等，則必不能有第

三條曲線過其兩曲線之間之吧點

若其$\frac{彳亥}{彳天}=\frac{彳地}{彳天}$則可有第三條曲線能過其兩曲線之間然

其$\frac{彳亥}{彳天}\top\frac{彳地}{彳天}$若大于$\frac{彳亥}{彳天}\top\frac{彳地}{彳天}$即$\frac{彳亥}{彳天}$大于$\frac{彳亥}{彳天}$則亦不能也

第八十四款

又如有任兩種曲線其式爲$地=函(天)$、$亥=函(天)$而其兩縱線$地=亥$者則

其$\frac{彳亥}{彳天}=\frac{彳地}{彳天}$、$\frac{彳亥}{彳天}=\frac{彳地}{彳天}$即不能有第三條曲線其式如$戊=函(天)$而與前

兩種曲線亦有公共之縱線所以知除$\frac{彳戊}{彳天}=\frac{彳地}{彳天}$、$\frac{彳戊}{彳天}=\frac{彳地}{彳天}$之外

不能更有他曲線過其兩線之間此款所證之例與前款以戴氏之術證法相同

以上所特設之例亦屬于曲線相切之公理中今述其公理如下

凡有兩條曲線在某點有公縱橫線而縱線之第一次微係數相等者則不能更有過其切點之他曲線在此兩曲線之間除非與公橫線相配之微係數等于其二縱線之微係數者方可

若有兩條曲線非但其第一次微係數相等而其第二次微係數亦相等者則亦不能更有過其切點之他曲線在其兩曲線之間除非其曲線之縱線一二兩次微係數亦能等于兩曲線之一二兩次微係數者方可

如是推之以至各次微係數莫不皆然蓋兩曲線只能于縱線相等之點相切耳然則其微係數之相等者不過顯出不能有微係數不相等之他曲線過其兩曲線之間而已

從以上諸說可見任有何數種曲線其相切之法皆可分之爲數類

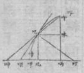
凡兩曲線之縱線相等而縱線之第一次微係數亦相等者則其所切之曲線可謂之有第一類相切之曲線

若兩曲線之縱線相等縱線之第一次微係數相等而其縱線之第二次微係數亦相等者則其所切之曲線可謂之有第二類相切之曲線其餘各類仿此推之

第八十五款

以下各款欲攷明各種曲線相切之理今兹款先從曲線與直線相切論起

設哰吧吁爲任何曲線與吧哂直線相切于吧其呷爲曲直兩線之公原點



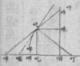
令 呷吒—天 吧吒=地 則其曲線之式可以 地=函(天) 明之令 哂呷=丙 呷吒=天 吧吒=亥 吧哂吒呷=角 則其直線之式可以 亥=函(丙,天) 明之

因其曲直兩線有公原點故 地=亥 因知丙與角為常數故

從直線之式得 $\frac{伕}{孩}$=正切角 惟依前款之公理 $\frac{伕}{𢓭}=\frac{伕}{孩}$ 故得 $\frac{伕}{𢓭}$=正切角

此式與前在第六十五款所得之式同由此得次切線之式為

吧哂$=\frac{地}{正切角}=\frac{地}{\frac{伕}{𢓭}}$

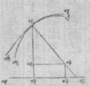


直線吧哂與曲線相切之間不能更有他直線過其二線之間而亦切于吧點 如云能之則試作吧呻直線過其吧點而遇軸線于呻令 哂呻=丙 呷吒=天 吧吒—戊 吧呻吒哂—角 則其吧呻直線之式必為

戊—函(丙,天) 正切角 所以 $\frac{伕}{襪}$=正切角 若欲令其吧呻線能過吧哂直線與啐吧曲線之間則依第八十三款之例必令 $\frac{伕}{襪}=\frac{伕}{孩}=\frac{伕}{𢓭}$ 所以必得 正切角=正切角 而 角=角 可見其吧呻必變而與吧哂相合所以依求限之法惟有吧哂直線能為曲線吧點之切線

第八十六款

今欲論平圓與任何種曲線相切



設哂吧吋為任何曲線哂吧吋為平圓俱以呷吁為公軸線呷為兩曲線之公原點啐為平圓之心自啐作啐吧為平圓之半徑引長之遇軸線于啣又作啐吽與啐吁為吧吽及呷吽之垂線

令 呷吽=天 吧吽—地 為哂吧吋曲線上任點吧之縱橫線令 呷吽—天 吧吽—亥 為哂吧吋平圓周上任點吧之縱橫線又令平圓心之縱

橫線 $\text{呷}\text{哼}=\text{角}、\text{亢}$ 平圓之半徑 $=\text{未}$ 則其哂吧叮曲線之公式可

作 $\text{地}=\text{函}(\text{天})$ 又因 $\text{呷哼}=\text{角}\top\text{天}$、$\text{吧哇}=\text{地}\top\text{亢}$、$\text{吧哼}=\text{未}$ 則其平圓之式必為 $(\text{角}\top\text{天})^{二}\perp(\text{地}\top\text{亢})^{二}=\text{未}^{二}$ ㈠ 欲求其

第一類相切必得 $\frac{\text{彳地}}{\text{彳天}}=\frac{\text{彳地}}{\text{彳天}}$ 因知其角亢未三者俱為常數

故其 $\frac{\text{彳地}}{\text{彳天}}=\frac{\text{地}\top\text{亢}}{\text{角}\top\text{天}}$ 令 $\text{地}=\text{亥}$ 即得 $\frac{\text{彳地}}{\text{彳天}}=\frac{\text{地}\top\text{亢}}{\text{角}\top\text{天}}$ ㈡ 此式之右邊能明哰吧吘角之切線所以依第六十五款之例其吧唎線為曲線吧點之法線如欲知平圓與曲線能在吧點有公切線否可求其第二次微係數得 $\frac{\text{彳}^{二}\text{地}}{\text{彳天}^{二}}=\frac{\text{一}\top\frac{\text{亥}\top\text{亢}}{\text{角}\top\text{天}}\times\frac{\text{彳地}}{\text{彳天}}}{\text{角}\top\text{天}}=\top\frac{(\text{角}\top\text{天})^{二}\perp(\text{亥}\top\text{亢})^{二}}{(\text{角}\top\text{天})^{三}}$ 如平圓與曲線能有第二類之相切則必得 $\frac{\text{彳}^{二}\text{地}}{\text{彳天}^{二}}=\frac{\text{彳}^{二}\text{地}}{\text{彳天}^{二}}$ 所以可令其 $\text{亥}=\text{地}$ 則 $(\text{角}\top\text{天})^{二}\perp(\text{亥}\top\text{亢})^{二}=\text{未}^{二}$ 而其 $\frac{\text{彳}^{二}\text{地}}{\text{彳天}^{二}}=\top\frac{\text{未}^{二}}{(\text{角}\top\text{天})^{三}}$ ㈢ 由以上㈠㈡㈢式能定平圓之半徑未並其心之縱橫線角亢從㈠㈢兩式得

$$\text{角}\top\text{天}=\frac{(\text{彳地})^{三}}{\text{未}^{二}\,\text{彳天}^{三}}\ \ \ \text{地}\top\text{亢}=\frac{(\text{彳地})^{三}}{\text{未}^{二}\,\text{彳天}^{三}}$$

以此兩式從㈢式得

$$\text{未}=\top\frac{\text{彳天}\,\text{彳}^{二}\text{地}}{(\text{彳天})^{三}}$$

$$\text{角}=\text{天}\top\frac{\text{彳地}}{\text{彳天}}\cdot\frac{\text{彳天}\,\text{彳}^{二}\text{地}}{(\text{彳天})^{三}}$$

$$\text{亢}=\text{地}\perp\frac{\text{彳天}^{二}}{\text{彳}^{二}\text{地}}$$

從以上角亢未三式能定其切于曲線內平圓之方位並其大小則易見其平圓之半徑及圓心之縱橫線與前卷第七十八七十九兩款所攷者同所以知凡以漸伸之理所定各曲線之曲率半徑之合吻圓即為平圓與曲線相切之式此為第二類相切

蓋因曲線之每點只能有一箇平圓與之相切極密而不能更有他平圓過其切點而在其本平圓與曲線之間所以依漸伸之理所攷得之合吻圓必為與曲線相切最密之平圓

第八十七款　從以上兩款所論直線與曲線相切為第一類相切平圓與曲線相切為第二類相切可知其相切之類數必從其切于各曲線之本曲線式中所有之

常數之項數而定之

如直線之式有兩箇常數，則僅能爲第一類相切。平圓之式有三箇常數，則可有第二類相切，則易知任兩種曲線式所能作至幾次微係數每次皆相等者，其次數及類數，必比其所切之曲線式中常數之項數少一數。

如拋物線之式爲 地＝角⊥亢天⊥氐天^{二}。從此式及其各次微係數，能定其與他曲線有幾類相切。因此式有角亢氐三箇常數，只能求至第二次微係數，所以知拋物線與他曲線相切，至多只能有第一第二兩類，而不能有多于第二類之相切。

惟立方拋物線，其式爲 地＝角⊥亢天⊥氐天^{二}⊥房天^{三}。此式因有四箇常數，故能有三類相切。他式仿此類推。

求兩箇變數之疊微分

第八十八款　令戊爲有天與地兩箇自主之變數之函數，如 戊＝甲天⊥乙天地⊥丙地。其公式爲 戊＝函（天，地）。令天變其同數爲 天⊥辛，令地變其同數爲 地⊥子，而原函數戊變爲新同數戊，則 戊＝函（天⊥辛，地⊥子）。茲欲將戊詳之爲級數，其各項以辛與子之整方明之。

如其式爲特設之式，則其法易于自明。惟其式若爲公式，則可依戴氏之術求之，如下。

凡有兩箇自變數之函數，或先令 天⊥辛 代其天而詳其函數爲級數，依辛之各方序之，再于其式中以 地⊥子 代地而後依子之各方序之，以成各項。或反之，先令 地⊥子 代其地而詳其函數爲級數，依子之各方序之，再于其式中以 天⊥辛 代天而後依辛之各方序之，以成各項。兩法之所得者，其數必同。

設有函數之式爲 戊＝函（天，地）。如令其天變爲 天⊥辛，則依戴氏之術

得

$$\text{函}(\text{天}+\text{辛},\text{地})=\text{戊}+\frac{\text{彳戊}}{\text{彳天}}\text{辛}+\frac{\text{彳}^2\text{戊}}{\text{彳天}^2}\times\frac{\text{辛}^2}{\text{一}\cdot\text{二}}+\frac{\text{彳}^3\text{戊}}{\text{彳天}^3}\times\frac{\text{辛}^3}{\text{一}\cdot\text{二}\cdot\text{三}}+\cdots$$

因其求微分之時以天為變數地為常數所以此式中之地只在函數戊並其各次微係數$\frac{\text{彳戊}}{\text{彳天}}$、$\frac{\text{彳}^2\text{戊}}{\text{彳天}^2}$各他函數之內

再設地之同數變為$\text{地}+\text{子}$則級數中首項之函數戊必變為

$$\text{戊}+\frac{\text{彳戊}}{\text{彳地}}\text{子}+\frac{\text{彳}^2\text{戊}}{\text{彳地}^2}\times\frac{\text{子}^2}{\text{一}\cdot\text{二}}+\frac{\text{彳}^3\text{戊}}{\text{彳地}^3}\times\frac{\text{子}^3}{\text{一}\cdot\text{二}\cdot\text{三}}+\cdots$$

而其$\frac{\text{彳戊}}{\text{彳天}}$變為

$$\frac{\text{彳戊}}{\text{彳天}}+\frac{\text{彳}^2\text{戊}}{\text{彳地彳天}}\text{子}+\frac{\text{彳}^3\text{戊}}{\text{彳地}^2\text{彳天}}\times\frac{\text{子}^2}{\text{一}\cdot\text{二}}+\frac{\text{彳}^4\text{戊}}{\text{彳地}^3\text{彳天}}\times\frac{\text{子}^3}{\text{一}\cdot\text{二}\cdot\text{三}}+\cdots$$

其$\frac{\text{彳}^2\text{戊}}{\text{彳天}^2}$變為

$$\frac{\text{彳}^2\text{戊}}{\text{彳天}^2}+\frac{\text{彳}^3\text{戊}}{\text{彳地彳天}^2}\text{子}+\frac{\text{彳}^4\text{戊}}{\text{彳地}^2\text{彳天}^2}\times\frac{\text{子}^2}{\text{一}\cdot\text{二}}+\frac{\text{彳}^5\text{戊}}{\text{彳地}^3\text{彳天}^2}\times\frac{\text{子}^3}{\text{一}\cdot\text{二}\cdot\text{三}}+\cdots$$

其$\frac{\text{彳}^3\text{戊}}{\text{彳天}^3}$變為

$$\frac{\text{彳}^3\text{戊}}{\text{彳天}^3}+\frac{\text{彳}^4\text{戊}}{\text{彳地彳天}^3}\text{子}+\frac{\text{彳}^5\text{戊}}{\text{彳地}^2\text{彳天}^3}\times\frac{\text{子}^2}{\text{一}\cdot\text{二}}+\frac{\text{彳}^6\text{戊}}{\text{彳地}^3\text{彳天}^3}\times\frac{\text{子}^3}{\text{一}\cdot\text{二}\cdot\text{三}}+\cdots$$

因其函數戊、$\frac{\text{彳戊}}{\text{彳天}}$、$\frac{\text{彳}^2\text{戊}}{\text{彳天}^2}$……求微分之時以地為變數天為常數故將其應代之處如法代之即能得$\text{函}(\text{天}+\text{辛},\text{地}+\text{子})$之級數為

$$\begin{aligned}&\text{戊}+\frac{\text{彳戊}}{\text{彳地}}\text{子}+\frac{\text{彳}^2\text{戊}}{\text{彳地}^2}\times\frac{\text{子}^2}{\text{一}\cdot\text{二}}+\cdots\\&+\frac{\text{彳戊}}{\text{彳天}}\text{辛}+\frac{\text{彳}^2\text{戊}}{\text{彳地彳天}}\text{辛子}+\cdots\\&+\frac{\text{彳}^2\text{戊}}{\text{彳天}^2}\times\frac{\text{辛}^2}{\text{一}\cdot\text{二}}+\cdots\end{aligned}$$

如不先以$\text{天}+\text{辛}$代天而先以$\text{地}+\text{子}$代地則可得$\text{函}(\text{地}+\text{子},\text{天}+\text{辛})$之級數為

$$\begin{aligned}&\text{戊}+\frac{\text{彳戊}}{\text{彳天}}\text{辛}+\frac{\text{彳}^2\text{戊}}{\text{彳天}^2}\times\frac{\text{辛}^2}{\text{一}\cdot\text{二}}+\cdots\\&+\frac{\text{彳戊}}{\text{彳地}}\text{子}+\frac{\text{彳}^2\text{戊}}{\text{彳天彳地}}\text{辛子}+\cdots\\&+\frac{\text{彳}^2\text{戊}}{\text{彳地}^2}\times\frac{\text{子}^2}{\text{一}\cdot\text{二}}+\cdots\end{aligned}$$

惟因其$\text{函}(\text{天}+\text{辛},\text{地}+\text{子})$與$\text{函}(\text{地}+\text{子},\text{天}+\text{辛})$兩式之級數必相等則兩式之各級中凡有辛子同方之項亦必相等故去其相同之項得

$$\frac{\text{彳}^2\text{戊}}{\text{彳地彳天}}=\frac{\text{彳}^2\text{戊}}{\text{彳天彳地}}$$

第八十九款　由前款之末式能證微分算學中一種最要之理

凡函數戊為天與地兩箇自主之變數所成者其微分可分為兩次以求之或先令天為變數地為常數後令

地為變數天為常數或先令地為變數天為常數後令天為變數地為常數所得之數必同

惟因 $\frac{彳地}{彳天}$ 為將天地兩變數之函數戊先以天為變數地為常數後以地為變數天為常數兩次各求微分所得之式所以此式可變之為 $\frac{彳^{二}戊}{彳地彳天}$ 以便于用

如此書之則前款用多語所證之例可作 $\frac{彳^{二}戊}{彳天彳地}=\frac{彳^{二}戊}{彳地彳天}$ 設式中之彳天彳地或獨多一次者則可仿照此例作 $\frac{彳^{三}戊}{彳天彳地彳天}=\frac{彳^{三}戊}{彳天^{二}彳地}=\frac{彳^{三}戊}{彳地彳天^{二}}$ 或 $\frac{彳^{二}戊}{彳天彳地}=\frac{彳^{二}戊}{彳地彳天}$

等類之式以記之

設有式 $戊=天^{三}地^{五}$ 欲詳之為級數

則如法求之其 $\frac{彳戊}{彳天}=三天^{二}地^{五}$

$\frac{彳戊}{彳地}=五天^{三}地^{四}$

$\frac{彳^{二}戊}{彳天彳地}=一五天^{二}地^{四}$

$\frac{彳^{二}戊}{彳地彳天}=一五天^{二}地^{四}$

$\frac{彳^{三}戊}{彳天^{二}彳地}=三〇天地^{四}$

$\frac{彳^{三}戊}{彳地彳天^{二}}=三〇天地^{四}$

再用前之簡寫法令 $戊=函(天,地)$ 則得 $函(天+辛,地+子)$ 等于

$$戊+\left[\frac{彳戊}{彳天}辛+\frac{彳戊}{彳地}子\right]+\left[\frac{彳^{二}戊}{彳天^{二}}\times\frac{辛^{二}}{二}+\frac{彳^{二}戊}{彳地彳天}辛子+\frac{彳^{二}戊}{彳地^{二}}\times\frac{子^{二}}{二}\right]+\left[\frac{彳^{三}戊}{彳天^{三}}\times\frac{辛^{三}}{二三}+\frac{彳^{三}戊}{彳地彳天^{二}}\times\frac{辛^{二}子}{二}+\frac{彳^{三}戊}{彳地^{二}彳天}\times\frac{辛子^{二}}{二}+\frac{彳^{三}戊}{彳地^{三}}\times\frac{子^{三}}{二三}\right]\cdots\cdots$$

此即為函數之全級數

第九十款

凡戊為天之任何函數而天變為 $天+辛$ 則戊變為 $戊+巳辛+午辛^{二}+\cdots\cdots$ 可令彳天代其辛而變為 $戊+巳彳天+午彳天^{二}+\cdots\cdots$ 此以戊之微分為巳彳天即以其項內辛之最簡之方為彳天而其微係數巳可以 $\frac{彳戊}{彳天}$ 明之

茲欲推廣其例將兩箇變數之函數如 $函(天,地)$ 變其辛為彳天變其子為彳地則其所變得之新函數可作 $函(天,地)+彳函=\frac{彳戊}{彳天}彳天+\frac{彳戊}{彳地}彳地$ 由此可

見凡兩箇變數之函數其全微分可分之爲兩箇偏微分其獨令天爲變數所得之微分式 $\frac{彳天}{彳戊}彳天$ 爲天之偏微分其獨令地爲變數所得之微分式 $\frac{彳地}{彳戊}彳地$ 爲地之偏微分故得專法如左

凡有兩箇變數之函數欲求其微分可依第十至二十三款求一箇變數之函數微分法任將一箇變數先求其函數之偏微分後將又一箇變數亦求其函數之偏微分其兩箇偏微分之和即爲函數之全微分

依此法求之則得

$$彳(天\bot地)=彳天\bot彳地$$

$$彳(天地)=地彳天\bot天彳地$$

$$彳\left(\frac{地}{天}\right)=\frac{地}{彳天}\top\frac{地}{天彳地}=\frac{地}{地彳天\top天彳地}$$

乃令

$$戊=天^{寅}地^{卯}$$

即得

$$\frac{彳天}{彳戊}彳天=寅天^{寅\top一}地^{卯}彳天$$

$$\frac{彳地}{彳戊}彳地=卯天^{寅}地^{卯\top一}彳地$$

所以得

$$彳戊=\frac{彳天}{彳戊}彳天\bot\frac{彳地}{彳戊}彳地=天^{寅\top一}地^{卯\top一}(寅地彳天\bot卯天彳地)$$

第九十一款　凡求函數之偏微分寫其算式之時有數件要事必留意辨別之

即如 $\frac{彳天}{彳戊}彳天$ 不可誤作 彳戊 蓋戊若爲一箇變數之函數則其微分之式可作 彳戊 若戊爲兩箇變數之函數則其微分之式不可作 彳戊 此因其 $\frac{彳天}{彳戊}$ 在此例中有特意指出以天爲偏變之數與只有天爲變數之兩微係數相較之級數中以彳天約其初項所得之數故也

其 $\frac{彳地}{彳戊}$ 之于地亦然

其 $\frac{彳天}{彳戊}$ 與 $\frac{彳地}{彳戊}$ 恆爲函數戊之第一次偏微係數總言之 $\frac{彳天^{寅}彳地^{卯}}{彳^{寅\bot卯}戊}$ 爲寅$\bot$卯次之偏微係數此即以天偏爲變數求微分至寅次以地偏爲變數求微分至卯次所得之式也

凡獨變之函數其每次之微係數均只一式惟兩變之函數其第一次微係數有兩式第二次微係數有三式以下每多一次則多一式其各次微係數從疊求偏微分之法得之

即如將 $彳戊=\frac{彳天}{彳戊}彳天\bot\frac{彳地}{彳戊}$ 再求其 $\frac{彳天}{彳戊}$ 即 $\frac{彳地}{彳戊}$ 之微分而代入其本

式中卽得

$$彳\frac{彳戊}{彳天}=\frac{彳^2戊}{彳天^2}彳天+\frac{彳^2戊}{彳地彳天}彳地$$

$$彳\frac{彳戊}{彳地}=\frac{彳^2戊}{彳天彳地}彳天+\frac{彳^2戊}{彳地^2}彳地$$

因其第二次微分不過爲第一次微分之微分所以爲

$$彳^2戊=\frac{彳^2戊}{彳天^2}彳天^2+二\frac{彳^2戊}{彳天彳地}彳天彳地+\frac{彳^2戊}{彳地^2}彳地^2$$

其伕與彳地可視之如常數而其但有伕或彳地爲分母之倍數者可以作爲相等如是再求之卽可得函數戊之第三次微分其多次之微分皆可仿此推之

第九十二款　以上所論之理亦可通之于任若干變數之函數

如令 $戊=函(酉、天、地、人)$ 則其微分之式爲

$$彳戊=\frac{彳戊}{彳酉}彳酉+\frac{彳戊}{彳天}彳天+\frac{彳戊}{彳地}彳地+\frac{彳戊}{彳人}彳人$$

其 $\frac{彳戊}{彳酉}$、$\frac{彳戊}{彳天}$、$\frac{彳戊}{彳地}$、$\frac{彳戊}{彳人}$ 各式爲設其酉天地人各偏爲變數所求得函數戊之偏微係數

以上所論偏微分之算式乃算學士文氏那所設之法也其偏微係數 $\frac{彳戊}{彳天}$ 尤拉恐不知者誤認作戊之全微分彳戊與天之微分式伕相比則可誤作

$$\frac{彳戊}{彳天}=\frac{\frac{彳戊}{彳酉}彳酉+\frac{彳戊}{彳天}彳天+\frac{彳戊}{彳地}彳地+\frac{彳戊}{彳人}彳人}{彳天}$$

故尤拉將此比例式以 $\frac{彳戊}{彳天}$ 明之而其以天偏爲變數所求得之偏微係數則于其外加括弧而作 $\left(\frac{彳戊}{彳天}\right)$ 以別之如此分別則兩式恆不得相混矣然余以爲卽使不如此分別觀其所設之題及其所有之式亦易知其爲兩者之中之何式

改其自主之變數

第九十三款　凡地爲天之任何函數則地之同數必因天而變而其天爲自變之數此例前已言之惟有時必反其所設之例而令天爲地之函數始便于算茲欲攷得數箇公法令其從天函數所得之地微分能改至天爲地之函數

設 $地=函(天)$ 令天變爲 $天+辛$ 地變爲 $地+子$ 依戴氏之例得

$$子=\frac{彳地}{彳天}辛+\frac{彳^{二}地}{彳天^{二}}\cdot\frac{辛^{二}}{二}+\frac{彳^{三}地}{彳天^{三}}\cdot\frac{辛^{三}}{二\cdot三}+\cdots\quad(一)$$

如反之令天爲地之函數如 $天=函(地)$ 以同法得

$$辛=\frac{彳天}{彳地}子+\frac{彳^{二}天}{彳地^{二}}\cdot\frac{子^{二}}{二}+\frac{彳^{三}天}{彳地^{三}}\cdot\frac{子^{三}}{二\cdot三}+\cdots\quad(三)$$

將(一)式子之同數代入(三)式又因欲省其繁式令

$$\frac{彳地}{彳天}=地'\qquad\frac{彳^{二}地}{彳天^{二}}=地''$$

$$\frac{彳天}{彳地}=天'\qquad\frac{彳^{二}天}{彳地^{二}}=天''$$

$$\cdots\cdots$$

則得

$$辛=天'\left(地'辛+地''\frac{辛^{二}}{二}+地'''\frac{辛^{三}}{二\cdot三}+\cdots\right)+\frac{天''}{二}\left(地'辛+地''\frac{辛^{二}}{二}+地'''\frac{辛^{三}}{二\cdot三}+\cdots\right)^{二}+\cdots\cdots$$

如將此式中各括弧內之數自乘得第二三四各本次之方而將辛之同方聚爲一項則得

$$〇=(天'地'-一)辛+(天'地''+天''地'^{二})\frac{辛^{二}}{二}+(天'地'''+三天''地'地''+天'''地'^{三})\frac{辛^{三}}{二\cdot三}+\cdots\cdots$$

如欲令此式中辛之各方之倍數必等于〇則必令

$$天'地'-一=〇$$

$$天'地''+天''地'^{二}=〇$$

$$天'地'''+三天''地'地''+天'''地'^{三}=〇$$

$$\cdots\cdots$$

由此各式得

$$地'=\frac{一}{天'}$$

$$地''=-\frac{天''}{天'^{三}}$$

$$地'''=\frac{三天''^{二}}{天'^{五}}-\frac{天'''}{天'^{四}}$$

$$地''''=-\frac{一五天''^{三}}{天'^{七}}+\frac{一〇天''天'''}{天'^{六}}-\frac{天''''}{天'^{五}}$$

$$\cdots\cdots$$

反之得

$$天'=\frac{一}{地'}$$

$$天''=-\frac{地''}{地'^{三}}$$

$$天'''=\frac{三地''^{二}}{地'^{五}}-\frac{地'''}{地'^{四}}$$

$$天''''=-\frac{一五地''^{三}}{地'^{七}}+\frac{一〇地''地'''}{地'^{六}}-\frac{地''''}{地'^{五}}$$

$$\cdots\cdots$$

茲欲顯明以上各式之用法故將第七十八款所有之曲率半徑第(三)式試改之其式本以地爲天之函數今欲改作天爲地之函數 如將前所設之各種記號之法用入其本式中得

$$末=-\frac{(一+地'^{二})^{\frac{三}{二}}}{地''}$$

則

$$地'=\frac{一}{天'}$$

$$地''=-\frac{天''}{天'^{三}}$$

又以此代入上

式中則得 未＝天/(天┴一)＝彳伕/(伕┴地) 即改得之式也

第九十四款　有時不令天地二變數彼此互為函數而令其天地二變數為第三箇變數之函數為最便

即如幾何學中以天與地為曲線之縱橫線固可令其縱橫線彼此互為函數亦可令其縱橫線為切線與軸線所成之角之函數而其角即為自主之變數

或如重學中令天與地為拋物于空中所行曲線任點之縱橫線則可令天地為酉之函數其酉為物行之速

設酉變為酉┴壬之時則天變為天┴辛而地變為地┴壬因算式欲從簡省故令 天/天 ……代其 彳酉/彳伕 合 地/地 ……代其 彳酉/彳地 令 (地)(地) ……代其 伕/地 伕/地 ……則依戴氏之例可從 地＝函(天) 而得 子＝(地)辛┴(地)辛二/二┴…… (一) 從 地＝函(酉) 而得 子＝地壬┴地壬二/二┴…… (二) 從 天＝函(酉) 而得 辛＝天壬┴天壬二/二┴…… (三) 其

子辛壬三箇長數同時而生所以在任何同時中各式必合于理如將(三)式中辛之同數代入(一)式再令子之兩箇同數合為一式則得 (地)[天壬┴天壬二/二]┴(地)[天壬┴天壬二/二]二/二……＝地壬┴地壬二/二…… 所以可用自乘之法並令其壬之同方各倍數為〇則依常法得 天(地)＝地 天(地)┴天(地)＝地 ……所以得 (地)＝天/地 (地)＝天/(地┴天(地)) ……

茲試將第七十八款所有之曲率半徑第(三)式依本款之法作 未＝[一┴(地)二]三/二/(地) 以(地)(地)之同數代入此式則變為 未＝[天二┴地二]三/二/(天地┴地天) 如

于此式中以$\frac{通}{茯}$代其天，以$\frac{通}{地}$代其地，以$\frac{通}{茯}$代其天，以$\frac{通}{地}$代其地，則式變為未$=\frac{地茯\top茯地}{(茯\perp地)}$，此式內雖不見其自主之變數酉，惟用此式之時，必勿忘其自主之變數為酉，則不誤矣。

論無窮小數之理 案以上各款之法，乃為流數之法，因此節所論者，乃眞為微分之法。舊譯代微積拾級，既以流數為微分，則不便更改，以淆讀者之耳目，所以不得不以微分為無窮小數，讀是書者會通其意，勿泥其名可也。

第九十五款　凡心中所能設想其數為無窮者，其意可以界說明之。

界說曰：凡數如能增之者，則其數不可謂之無窮。

卽如$天\perp甲$之式，如令其天為無窮，則不可以加其甲。如加之，則天既為無窮，又能加一甲數，是與界說之理不合矣。茲欲證其界說之理，令$\frac{甲}{一}\perp\frac{天}{一}=積$㈠，將此式以$天甲$乘之，則變為$天\perp甲=積甲天$㈡。設其天大至無窮，則$\frac{天}{一}$能小至無窮，而無異于○。所以㈠式必變為$積=\frac{甲}{一}$，卽$積甲=一$，將此同數代入㈡式，則變為$天\perp甲=天$，可見天為無窮大，則$天\perp甲$與天無異，所以天若為無窮大，則可視卬為無窮小。

惟此不過論其數之相比之理，如此耳。若天能有有窮之同數，而甲之比天為無窮小者，則前所證之理亦未嘗不合。

如將乙與$\frac{人}{乙}$相比，若令人恆增大，則$\frac{人}{乙}$必恆變小。如是則其$\frac{人}{乙}$可小于所能名之數。人若大至無窮，則$\frac{人}{乙}$變為○。所以其與乙相比者，可棄之不論。

凡數之相比，與其所用之率數大小無相關，所以凡各數之半或任何等分，與其全有相同之比例。

凡代數之式所用之各元，原非以代一定之大小也，但以代其各數彼此之倍數而已（其倍數都以一為主），所以用代數之各式能代其各數之比例，而其用以相比之各數本為大本為小不論。

卽如以各變數之微分為各變數長大之比例，亦為恆相近之比例，而其所長之數可以任為大，任為小，所以來本之創立一說，以長數之小至無窮者為微分，有八

本其說而設一理，名曰無窮小數之理，已有人從此理究明幾何與格致諸學中最深最奧之真理。

第九十六款　各種算學中，如果許用甚小之數入算，則其甚小之數自然必分為數類。

即如平圓之徑與通弦之比，等于通弦與正矢之比，所以其通弦若比圓徑為甚小，則為第一類甚小之數，然其正矢比通弦亦為甚小，所以正矢與圓徑之比為第二類甚小之數。

又如連比例級數一　天　天^{二}　天^{三}┃若天為甚小，則其第一級一為有窮之數，其第二級天為第一類甚小之數，其第三級天^{二}為第二類甚小之數，其第四級天^{三}為第三類甚小之數，其他仿此類推。

依同理推之，設甲乙二數皆為第一類甚小之數，則其二數相乘之積甲乙為第二類甚小之數，因可設想一與甲之比若乙與其甲乙之比，則甲乙為一與甲與乙之第四率，而其第一率一為有窮之數，所以甲乙為第二類任小之數。

由是推之，設以三箇第一類甚小之數連乘，或以一箇第一類任小之數與一箇第二類甚小之數相乘，其乘得之積皆為第三類甚小之數。

第九十七款　如以甚小之長數為微分，則求微分之各法最易顯明。

如有式戊＝天地，設于其戊、天、地各數中各增一甚小之數，為彳戊、彳天、彳地，則得

戊┴彳戊＝(天┴彳天)(地┴彳地)＝天地┴天彳地┴地彳天┴彳天彳地

去其與原式相同之戊及天地，則彳戊＝天彳地┴地彳天┴彳天彳地，惟因其彳戊與天彳地及地彳天皆為第一類甚小之數，而其彳天彳地則為第二類甚小之數，其第二類甚小之數已小至無可比，故可棄之不用，而作彳戊＝天彳地┴地彳天，即與第十款所得之式合。

第九十八款

此理中可設想任何曲線為多等邊形之無數甚小之多等邊所成，其每邊為本曲線之微分，所以弧之微分為甚小句股形之弦，而其縱橫線之微分為句與股，如

以天代横線，地代縱線，人代其弧，卽得 $\text{㣎人}^2=\text{㣎天}^2+\text{㣎地}^2$

又以同法，令申代曲線之面積，則申之長數爲 $\text{㣎申}=\text{地㣎天}$ 此式內之第二項 㣎天^2 爲第三類甚小之數，已與第一類甚小之數，其小無比，所以可棄之而作 $\text{㣎申}=\text{地㣎天}$ 卽與第六十九款所得之式同。

平圜之正弦餘弦及弧，其甚小之長數所成之句股形，與正弦餘弦及半徑所成之句股形，恆爲同式，所以如令天代其弧，而以一爲半徑，則得

$$\frac{\text{㣎(正弦天)}}{\text{㣎天}}=\frac{\text{餘弦天}}{1}$$

$$\frac{\text{㣎(餘弦天)}}{\text{㣎天}}=\frac{-\text{正弦天}}{1}$$

所以

$$\text{㣎(正弦天)}=\text{餘弦天㣎天}$$

$$\text{㣎(餘弦天)}=-\text{正弦天㣎天}$$

卽與第二十一款所得之式合。

又如依甚小數之理，亦易求次切線之式，因以横線之微分爲第一率，縱線之微分爲第二率，縱線爲第三率，則次切線爲第四率，所以可用比例式以求得次切線之式爲 $\text{次切}=\frac{\text{地㣎天}}{\text{㣎地}}$ 其横線與縱線若同時漸增，則其他用正號，若非同時漸增，則用負號。

攷甚小數之理，能在極深之幾何題中，令微分之法更便于用，又在一切格致之學，亦大有裨益，總之算學家總要從最捷之徑，得其所求之事，而徑之最捷者，莫過于此。

近時有法蘭西算學之士名普韋生者，其續印之重學全書，都以此法推算，而不更用他法，良以各種算學中，惟有此法最佳也。

興化劉彝程校算

英國華里司輯

英國　傅蘭雅　口譯
金匱　華蘅芳　筆述

論反流數

第九十九款　反流數者即積分算學也此法專以任何函數之微分求其原函數之式

論流數之學者名其所求之函數爲反流數微分之家名其原函數爲微分式之積故名之曰積分術

第一百款　凡有任何函數之積恆能依公法求其微分但無一公法能還原而徑得其積惟有循其求微分之原路步步退回始可得之

若其求微分之法每步之迹俱爲明顯則從其原路退回固是甚易然往往有其原路之迹已滅而不易見或其所設之式非從求微分之法而徑得者則無迹可循非各設專法不能求之

第一百〇一款　凡微分式之欲求積分者可先用一號以記之其所用之號爲禾（即積字之簡式也）

假如有 伏伕 欲求其積分則可先作 禾伏伕 以記之

第一百〇二款　前于第九款中已證明凡變數與常數相加減之函數其微係數中不見其常數之項

即如 伕＝柄 式之微分則其常數 柄 不見故凡以微分之式反求其積者必加減常數 柄 方爲全積　其 丄柄 爲未定之常數初創此式之人名之曰改正數近時之人名之曰定常數其數及號之正負不能預定必從所設之題而定之

論獨變之函數

第一百〇三款　函數之第一種其微分之公式爲 伕伏 其 伕 爲獨變數 天 之任何函數其形可有數種

實函數之形有如 呷天寅丄叱天卯丄喕天巳丄……＝戌 者則爲整級數有如 $\frac{\text{呻天寅丄吼天卯丄哂天巳丄……}}{\text{呷天寅丄叱天卯丄喕天巳丄……}}=\frac{\text{咳}}{\text{戌}}$ 者則爲級數之分數

虛函數之形如 戌咳（寅/卯） 越函數之形如 函（戌對戌） 及 函（戌三弦亥） ……

求實函數微分式之積分

第一百〇四款

實函數之最簡者其形如 $甲天^{卯}$ 其微分之式為 $卯甲天^{卯丅一}彳天$ 所以可令 $卯丅一＝寅$ 即 $卯＝寅⊥一$ 以求之

設有微分式

$$彳地＝甲天^{寅}彳天$$

則

$$地＝禾甲天^{寅}彳天＝\frac{甲}{寅⊥一}天^{寅⊥一}⊥哂$$

所以凡有獨項微分如 $甲天^{寅}彳天$ 者欲求其積分可將其變數之指數增一為新指數乃以新指數與彳天相乘之數約之

其未定之常數哂可令其形為 $丅\frac{甲乙^{寅⊥一}}{寅⊥一}$ 即得

$$禾甲天^{寅}彳天＝\frac{甲(天^{寅⊥一}丅乙^{寅⊥一})}{寅⊥一}$$

若 $天＝乙$ 之時其積能不見者必有此形

第一百〇五款 有一種特設之式不能用上款之法求其積分

如于 $甲天^{卯}彳天$ 之式中令 $卯＝丅一$ 則式變為

$$禾\frac{甲彳天}{天}＝禾甲天^{丅一}彳天＝\frac{甲(天^{〇}丅乙^{〇})}{〇}＝\frac{甲(一丅一)}{〇}＝\frac{〇}{〇}$$

從此式不能求得何數故謂之絕積分

然所謂絕者乃其外貌耳非真不可求也如令 $卯⊥一＝寅$ 依第三十五款之理得

$$天^{寅}＝一⊥(訥天)寅⊥(訥天)^{二}\frac{寅^{二}}{二}⊥\cdots\cdots$$

$$乙^{寅}＝一⊥(訥乙)寅⊥(訥乙)^{二}\frac{寅^{二}}{二}⊥\cdots\cdots$$

$$天^{寅}丅乙^{寅}＝(訥天丅訥乙)寅⊥[(訥天)^{二}丅(訥乙)^{二}]\frac{寅^{二}}{二}⊥\cdots\cdots$$

$$\frac{天^{寅}丅乙^{寅}}{寅}＝訥天丅訥乙⊥[(訥天)^{二}丅(訥乙)^{二}]\frac{寅}{二}⊥\cdots\cdots$$

則因 $卯⊥一＝寅＝〇$ $卯＝丅一$ 而

$$禾\frac{甲彳天}{天}＝甲[訥天丅訥乙]＝甲訥天⊥哂$$

此款所用之式與第二十款求對數微分之式同

第一百〇六款

設有微分式

$$彳地＝甲天^{寅}彳天⊥乙天^{卯}彳天⊥丙天^{巳}彳天$$

則從第一百〇四款之法易知

$$地＝\frac{甲天^{寅⊥一}}{寅⊥一}⊥\frac{乙天^{卯⊥一}}{卯⊥一}⊥\frac{丙天^{巳⊥一}}{巳⊥一}⊥哂$$

無論所設之式其項如何多此例必為真其式中之末項哂以代諸項積分數中各常數之和

總之多項微分式無論其各項之正負如何依第十五

款之例 $彳(戊丄亥丅人)＝彳戊丄彳亥丅彳人$ 故 $戊丄亥丅人＝禾彳戊丄禾彳亥丅禾彳人$ 若以吧咋味代天之任函數則 $禾(吧彳天丄咋彳天丅味彳天)＝禾吧彳天丄禾咋彳天丅禾味彳天$

第一百〇七款 若令戊與亥為變數之任何函數則可

從 $彳(戊亥)＝戊彳亥丄亥彳戊$ 改知 $禾亥彳戊＝戊亥丅禾戊彳亥$ 又可從 $彳(甲戊)＝甲彳戊$ 改知 $禾甲味彳天＝甲禾味彳天$ 亦可從分數之微分式改知 $禾\frac{亥^{二}}{彳亥}＝\frac{亥}{戊}丅禾\frac{亥}{彳戊}$

第一百〇八款

一題 設有微分式 $彳地＝(甲天丄乙)^{寅}彳天$ 欲求其積分

此式可化為級數依多項之法以求其積分亦可令

$人＝甲天丄乙$ 則 $天＝\frac{甲}{人丅乙}$ $彳天＝\frac{甲}{彳人}$ 乃依代法得 $彳地＝\frac{甲}{人^{寅}彳人}$ 求積分得 $地＝\frac{甲(寅丄一)}{人^{寅丄一}}丄丙＝\frac{甲(寅丄一)}{(甲天丄乙)^{寅丄一}}丄丙$

二題 設有微分式 $彳地＝(甲天^{卯}丄乙)^{寅}天^{卯丅一}彳天$ 欲求其積分

此式可令 $甲天^{卯}丄乙＝人$ 如前法求其積分得 $地＝\frac{卯甲(寅丄一)}{(甲天^{卯}丄乙)^{寅丄一}}丄丙$

第一百〇九款 茲欲論分函數之微分式求積分之法

先從式之最簡者論起

凡分數之微分式其形如 $彳地＝\frac{(甲天丄乙)^{卯}}{甲天^{寅}彳天}$ (一) 者可令 $人＝甲天丄乙$ 則其 $天＝\frac{甲}{人丅乙}$ $彳天＝\frac{甲}{彳人}$ 所以 $彳地＝\frac{甲^{寅丄一}人^{卯}}{甲(人丅乙)^{寅}彳人}$ (二) 若化其 $(人丅乙)^{寅}$ 為級數而各項以 $彳人$ 乘之

以 $人^{卯}$ 約之則其變得之多項微分式各項俱有 $丙人^{己}彳人$ 之形

故可將其各項依第一百〇四款之法一一求其積分

而合之

題　設有微分式 $彳地=\frac{(甲天丄乙)^{\frac{一}{二}}}{卯天彳天}$ 欲求其積分

以此式與㊀式相比知 寅$=$三　卯$=$二 則從㊁式得 $彳地=\frac{甲^{三}人^{二}}{卯(人^{二}丅乙)^{二}彳人}$ 依法

化之為級數得 $彳地=\frac{甲^{三}}{卯}\left[人^{二}彳人丄二乙彳人丄\frac{三乙^{二}}{人^{二}}彳人丄\frac{乙^{三}}{人^{四}}彳人\right]$ 求其積分得

$地=\frac{甲^{三}}{卯}\left[\frac{人^{三}}{三}丄二乙人丅\frac{三乙^{二}}{人}丅\frac{乙^{三}}{三人^{三}}\right]丄丙$ 再將人之同

數代還之則得

$地=\frac{甲^{三}}{卯}\left[\frac{一}{三}(甲天丄乙)^{\frac{三}{二}}丄二乙(甲天丄乙)^{\frac{一}{二}}丅\frac{三乙^{二}}{(甲天丄乙)^{\frac{一}{二}}}丅\frac{乙^{三}}{三(甲天丄乙)^{\frac{三}{二}}}\right]丄丙$

第一百十款

凡微分式若為實分數必能化之為 $\frac{天^{寅}丄甲天^{寅丅一}丄乙天^{寅丅二}丄\cdots\cdots丄庚}{(甲'天^{卯}丄乙'天^{卯丅一}丄丙'天^{卯丅二}丄\cdots\cdots丄庚')}彳天$ 之形

凡求實分數微分式之積分其公法必將實分數微分式化為多項微分式令其各項中之分母更簡而不同謂之散分數

凡欲化所設之實分數為散分數必使其分母等于〇則 $天^{卯}丄甲'天^{卯丅一}丄乙'天^{卯丅二}丄\cdots\cdots丄庚'=〇$ 令此式之各根為 天$=$甲　天$=$甲′　天$=$甲″　天$=$甲‴ ⋯⋯ 俱為不相同之數則依代數術第九十九款之法其式之左邊為有卯箇乘數 天丅甲　天丅甲′　天丅甲″　天丅甲‴ ⋯⋯ 連乘所成之積故可令所設之實分數等于 $\frac{子}{天丅甲}彳天$　$\frac{子'}{天丅甲'}彳天$　$\frac{子''}{天丅甲''}彳天$ ⋯⋯ 散分數之和

而散分數之分母卽爲實分母之各乘數其各分子內之㖈㖈㖈……爲未定之常數(卽泛倍數)乃將其散分數齊同通分令其總分母與所設之實分母相同如此則可將左右兩邊分子內天之同方之倍數作爲相等于是可化得數箇方程式從此數箇方程式可求得㖈㖈㖈㖈……之各同數茲設一式以爲則

設有微分式 天丄㖈天丄叱天丄㕦 / (㖈天丄叱天丄㕦)𠀤 欲求其積分 則可令其分母等于各乘數如 (天丄甲)(天丄甲)(天丄甲) 若不計所設式中之𠀤可令其實分數等于 㖈/(天丄甲) 丄 㖈/(天丄甲) 丄 㖈/(天丄甲) 將此式齊同通分得 㖈(天丄甲)(天丄甲)丄㖈(天丄甲)(天丄甲)丄㖈(天丄甲)(天丄甲) / (天丄甲)(天丄甲)(天丄甲) 若將其分子內各乘數相乘得積則爲 㖈(天丄甲)(天丄甲)丄㖈(天丄甲)(天丄甲)丄㖈(天丄甲)(天丄甲)天丄㖈甲甲丄㖈甲甲丄㖈甲甲 此式無論其天之同數如何必與所設實分數之分子相等故依代數術第十八卷之例其天之同方之各倍數亦必爲相等所以可得三箇相等式

㖈丄㖈丄㖈＝㖈

㖈(甲丄甲)丄㖈(甲丄甲)丄㖈(甲丄甲)＝叱

㖈甲甲丄㖈甲甲丄㖈甲甲＝㕦

此三式各就其本式而論皆不過一次故可從此三式求得㖈㖈㖈各同數則其散分數

之式爲 $\frac{天丄甲天丄乙天丄丙}{(彳天丄乙天丄丙)^{彳}}=\frac{天丄甲}{彳天}\,|\,\frac{天丄甲}{彳天}\,|\,\frac{天丄甲}{彳天}$ 如令 天丄甲＝人 則 彳＝彳 故 $\frac{天丄甲}{彳天}=\frac{人}{彳人}$。此式之積分爲 彳訥人＝彳訥(天丄甲) 又以同法推得 禾 $\frac{天丄甲}{彳天}$＝彳訥(天丄甲) 禾 $\frac{天丄甲}{彳天}$＝彳訥(天丄甲) 所以得 禾 $\frac{天丄甲天丄乙天丄丙}{(彳天丄乙天丄丙)彳天}$＝彳訥(天丄甲)丄彳訥(天丄甲)丄彳訥(天丄甲)丄常數＝訥[(天丄甲)(天丄甲)(天丄甲)]丄常數

此法若充極其量可推凡有分母能化爲一次不相等各乘數之各實分數且此法中除化其分母爲乘數之外別無難爲之事

第一百十一款　若所設之微分式其分母之根有數箇相等者則必依式而改其法

假如其分母 天丅甲天丅 丄……丄 內有一乘數爲 (天丄甲) 之形則必另設一箇分數 $\frac{(天丄甲)}{(天丄\ldots)\ldots}$ 將此式又化爲散分數與他乘數之散分數

齊同通分乃令其分子之諸項等于所設實分數內分子之諸項如前法求其同方之倍數則可化爲多項之式以求積分

第一百十二款　觀前款所論可見凡合于相等乘數之散分數其形如 $\frac{(天丄甲)}{彳天}\,|\,\frac{(天丄甲)}{彳天}\ldots\ldots\,|\,\frac{天丄甲}{彳天}$ 所以可用此式代其相等之分數而將其 $\frac{(天丄甲)}{彳天}$ 等類之各項一一求其積分 如令 天丄甲＝人 則 其 彳＝彳 即可得 禾 $\frac{(天丄甲)}{彳天}$＝禾 $\frac{人}{彳人}$＝$\frac{丅丄}{丙人}$＝$\frac{(丅丨巳)(天丄甲)}{彳}$ 故各項之積分俱可以對數明之除末式 禾 $\frac{天丄甲}{彳天}$ 之外必有對數在其式內

第一百十三款　設分母之乘數爲虛式則必有兩兩之形如 天丄角丄亢 天丅角丅亢 其相

乘之積必爲天丄二角天丄甬丄亢如遇此種之式莫妙于將所設之式化其分母爲一次二次之實乘數（此事依相等式之理恆能爲之）惟分母之虛乘數若有數雙俱相等者則所設之微分式其分母內必有一乘數之方其形如（天丄二角天丄甬丄亢）而其單乘數必爲第一次乘數天丄二角天丄甬丄亢如欲化其數雙相等之乘數爲散分數必設天丄二角天丄甬丄亢分呼天呾氐及（天丄二角天丄甬丄亢）分呼天丄昧天丄地氐或不用上式則用分數之級數（天丄二角天丄甬丄亢）分呼天呾氐…其各倍數仍依前數款之法定之

第一百十四款

如欲求其天丄二角天丄甬丄亢分呼天呾氐式之積分可見其分母天丄二角天丄甬丄亢＝（天丄甬丄亢）故可令天丄角＝人則（天丄甬丄亢）分呼天呾氐＝人丄亢分呼人丄呾氐＝人丄亢分呼人丄呾氐其呾者以代常數呾丄呼角也其第一項散分數可以對數明其積分因令人丄亢＝戊則人氐＝戊氐從此可得禾人丄亢分呼人氐＝…＝呼二對戊＝呼二對人丄亢㊀其第二項散分數可令人＝亢亥則人丄亢分呾氐＝亢分呾×亥氐分一丄亥已于第二十三款證明亥氐分一丄亥爲有切線爲亥之弧微分式故可以正切下亥明其積分（其切線亥爲之）

弧則得

[illegible]

[illegible]

(二)將(一)(二)兩式相加得

[illegible]

以人與呷之同數代還之卽得

[illegible]

[illegible]

第一百十五款

如欲求其 [illegible] 式之積分則可令 天角＝人 又 [illegible] 化之爲散分數如

[illegible]

求其第一項之積分可令 [illegible] 則 [illegible] 故得

[illegible]

求其第二項之積分必識別得

[illegible]

此式之右邊第一項可以代數明之其第二項爲比左邊之分母次一方之積分式若欲將此式之各項化爲微分式只須將右邊之第一項求其微分其餘兩項除去其積分之號卽爲化得之微分式又因其各項中公乘數可棄之不用故可得相等式

[illegible]

惟因人爲未定之數必得

[illegible]

從此兩式得

[illegible]

將此嘆呼二同數代入所設之

式內卽得

禾$\frac{(人\perp元)^{廿}}{彳人}=\frac{(二廿二)元^{二}}{一}\times\frac{(人\perp元)^{廿}}{人}\perp\frac{(二廿二)元}{二廿三}$禾$\frac{(人\perp元)^{廿}}{彳人}$

以廿一代廿得

禾$\frac{(人\perp元)^{廿}}{彳人}=\frac{(二廿四)元}{一}\times\frac{(人\perp元)^{廿}}{人}\perp\frac{(二廿四)元}{二廿五}$禾$\frac{(人\perp元)^{廿}}{彳人}$

以廿二代廿得

禾$\frac{(人\perp元)^{廿}}{彳人}=\frac{(二廿六)元}{一}\times\frac{(人\perp元)^{廿}}{人}\perp\frac{(二廿六)元}{二廿七}$禾$\frac{(人\perp元)^{廿}}{彳人}$依

此法遞推之則知禾$\frac{(人\perp元)^{廿}}{彳人}$可藉代數及他積分式禾$\frac{(人\perp元)^{廿}}{彳人}$明之而其他積分式又可藉他代數式及積分式禾$\frac{(人\perp元)^{廿}}{彳人}$明之如是屢推之以至其他積分式爲禾$\frac{人\perp元}{彳人}$則此式能以平圜之弧明之可爲已知之數故用前法推至此處必止因再變一次其積分必爲禾$\frac{(人\perp元)}{彳人}$之形則其倍數爲無窮不能用以致知所求之事也

從此可見本款之求積分法爲最佳最盛之法以其能遞生多式也

觀以上各款所論之事可見凡有實分數之微分式皆能用代數與對數及平圜弧各法明其積分祇須化其所設之式爲散分數耳其散分數之分母或爲二項之式或爲三項之式

第一百十六款 茲設數題如法求之以明實分數微分式求積分之法

一題 設有微分式$\frac{天\top 甲}{甲\ 彳天}$欲求其積分因能化其分母天^{二}甲$^{二}=(天\top甲)(天\perp甲)$所以可令$\frac{(天\top甲)(天\perp甲)}{甲\ 彳天}=\left[\frac{天\top甲}{甲}\ \frac{天\perp甲}{乙}\right]彳天$將此式齊出其彳而將右邊齊同通分得$\frac{(天\top甲)(天\perp甲)}{甲}=\frac{(甲\perp乙)天\perp(甲\top乙)甲}{(天\top甲)(天\perp甲)}$乃令甲$=(甲\perp乙)天\perp(甲\top乙)甲$因其天爲未定之數則依第十八款之理必爲$(甲\top乙)甲=甲$，$甲\perp乙=〇$從此二式求得甲$=\frac{一}{二}$，乙$=\top\frac{一}{二}$以此兩同數代入前式中則得$\frac{天\ 甲}{甲\ 彳天}=\frac{一}{二}\times\frac{天\top甲}{彳天}\top\frac{一}{二}\times\frac{天\perp甲}{彳天}$又依

法求其積分得

$禾\frac{天-甲}{甲𢓍}=\frac{二}{一}訥(天-甲)-\frac{二}{一}訥(天+甲)+㖦$

$=\frac{二}{一}訥\frac{天-甲}{天+甲}+㖦=訥\left[\frac{天-甲}{天+甲}\right]+㖦$

二題　設有微分式 $\frac{甲天-天^{二}}{甲+乙天^{二}}𢓍$ 欲求其積分

因其分母之乘數爲天與 $甲-天^{二}$ 而其 $甲-天^{二}$ 能化爲 $(甲-天)(甲+天)$ 所以

可畱出其式中之𢓍而令

$\frac{天(甲-天)(甲+天)}{甲+乙天}=\frac{天}{呷}+\frac{甲-天}{吃}+\frac{甲+天}{㖦}$

將此式之右邊齊同

通分之得

$\frac{天(甲-天)(甲+天)}{呷甲+甲(吃+㖦)天+(吃-呷-㖦)天^{二}}$

令左右兩邊天之同方之倍數爲相

等則得

$呷甲=甲$

$甲(吃+㖦)=〇$

$吃-呷-㖦=乙$

此三箇簡方程式中其未知之數

呷吃㖦可以依代數術第八卷之各法求其同數則

得

$呷=甲$

$吃=\frac{二}{一}(甲+乙)$

$㖦=-\frac{二}{一}(甲+乙)$

所以

$\frac{甲天-天^{二}}{甲+乙天^{二}}𢓍=\frac{天}{甲𢓍}+\frac{(甲-天)}{甲+乙}𢓍-\frac{二(甲+天)}{甲+乙}𢓍$

求其積分得

$禾\frac{甲天-天^{二}}{甲+乙天}𢓍=甲訥天+\frac{二}{甲+乙}訥(甲-天)+\frac{二}{甲+乙}訥(甲+天)+㖦$

惟依

對數之理

$訥吃+訥卄=訥(吃卄)$

又

$卯訥吃=訥吃^{卯}$

故其積分又可以他式

$禾\frac{甲天-天^{二}}{甲+乙天^{二}}𢓍=訥\frac{(甲-天)^{\frac{二}{甲+乙}}}{天^{甲}}+㖦$

明之

三題　設有微分式 $\frac{天^{二}-六天+八}{三天+五}𢓍$ 欲求其積分

欲化其分母爲簡乘數可令

$天^{二}-六天+八=〇$

開得其方根爲

$天=二$

$天=四$

所以 $天^{二}丅六天丄八=(天丅二)(天丅四)$ 題出題式中之𢓔而令其 $\frac{(天丅二)(天丅四)}{三天丅五}=\frac{天丅二}{呷}\bot\frac{天丅四}{吼}=\frac{(天丅二)(天丅四)}{(呷\bot吼)天丅四呷丅二吼}$ 乃使左右分子內天之同方之倍數為相等則

$呷\bot吼=三$

$丅四呷丅二吼=丅五$

從此兩式得

$呷=丅\frac{二}{一}$

$吼=\frac{二}{七}$

所以得積分之式為

$禾\frac{天^{二}丅六天\bot八}{(三天丅五)𢓔}=丅\frac{二}{一}禾\frac{天丅二}{𢓔}\bot\frac{二}{七}禾\frac{天丅四}{𢓔}=$

$\frac{二}{七}訥(天丅四)丅\frac{二}{一}訥(天丅二)\bot呐$

四題　設有微分式 $\frac{(天丅甲)(天丅甲)}{天^{三}𢓔}$ 欲求其積分此題之式分母中有相等乘數

可令題式為 $\frac{(天丅甲)(天丅甲)}{天^{三}𢓔}=\frac{(天丅甲)(天丅甲)}{天^{三}𢓔}$ 則可依第一百十二款之法化之

為 $\frac{(天丅甲)(天丅甲)}{天^{三}}=\frac{天丅甲}{呷}\bot\frac{天丅甲}{吼}\bot\frac{天丅甲}{呐}=$

$\frac{(天丅甲)(天丅甲)}{呷(天丅甲)\bot吼(天丅甲)\bot呐(天丅甲)}=$

$\frac{(天丅甲)(天丅甲)}{呷甲\bot吼甲\bot呐甲\bot(呷丅二甲呐)天\bot(吼\bot呐)天^{二}}$

乃令其天之同方之倍數為相等則

$呷甲\bot吼甲\bot呐甲=〇$

$呷丅二甲呐=〇$

$吼\bot呐=一$

從此三式依常法求其呷吼呐之各同數得

$呷=\frac{三}{甲}$

$吼=\frac{四}{三}$

$呐=\frac{四}{一}$

則其變形之微分式為

$\frac{(天丅甲)(天丅甲)}{天^{三}𢓔}=\frac{二}{甲}\times\frac{(天丅甲)}{𢓔}\bot\frac{三}{四}\times\frac{天丅甲}{𢓔}\bot\frac{一}{四}\times\frac{天丅甲}{𢓔}$

故其

$禾\frac{(天丅甲)}{𢓔}=\frac{丅一}{天丅甲}$

$禾\frac{天丅甲}{𢓔}=訥(天丅甲)$

$禾\frac{天丅甲}{𢓔}=訥(天丅甲)$

以散分數之原倍數還之又依常法添入未定之常數則得

$禾\frac{(天丅甲)(天丅甲)}{天^{三}𢓔}=$

$\frac{二}{甲}\times\frac{一}{天丅甲}\bot\frac{三}{四}訥(天丅甲)\bot\frac{四}{一}訥(天丅甲)\bot常數$

五題　設有微分式 $\frac{天^{三}\,天\,丄\,二}{天(天丄一)^{二}(天丅一)^{二}}\,彳天$ 欲求其積分

其分母中有兩雙相等之乘數故可依第一百十二款之法令 $\frac{天^{三}\,天\,丄\,二}{天(天丄一)^{二}(天丅一)^{二}} = \frac{呷}{天}\,丄\,\frac{吃}{(天丄一)^{二}}\,丄\,\frac{呐}{天丄一}\,丄\,\frac{叮}{(天丅一)^{二}}\,丄\,\frac{哦}{天丅一}$ 將左邊之各項齊同通分又令左右兩邊天之同方之倍數爲相等而求其呷吃呐叮哦之各同數則得

$呷 = 二$

$吃 = \frac{丅一}{二}$

$呐 = \frac{丅四}{三}$

$叮 = 一$

$哦 = \frac{丅四}{三}$

如此則可化其微分式爲 $\frac{二\,彳天}{天}\,丅\,\frac{一\,彳天}{二(天丄一)^{二}}\,丅\,\frac{四\,彳天}{五(天丄一)}\,丄\,\frac{彳天}{(天丅一)^{二}}\,丅\,\frac{四\,彳天}{三(天丅一)}$ 故求得積分之式爲

$禾\frac{天^{三}\,天\,丄\,二}{天(天丄一)^{二}(天丅一)^{二}}\,彳天 = 二\,訥天\,丄\,\frac{一}{二(天丄一)}\,丅\,\frac{四}{五}\,訥(天丄一)\,丅\,\frac{一}{天丅一}\,丅\,\frac{四}{三}\,訥(天丅一)\,丄\,常數$

六題　設有微分式其分母中第二箇乘數爲第一箇乘數之函數而不能化其函數爲整乘數者則如所設之微分式爲 $\frac{天\,丅\,一}{(甲\,丄\,乙天)\,...}\,彳天$ 欲求其積分

觀題式可見其分母 $天^{二}\,丅\,一 = (天丅一)(天丄一)$ 而其 $天^{二}\,丄\,天\,丄\,一$ 不能化爲整乘數但可令 $天^{二}\,丄\,天\,丄\,一 = 〇$ 而解此二次式爲兩箇虛乘數如 $天 = \frac{丅一\,\pm\,\sqrt{丅三}}{二}$ 則其 $天^{二}\,丄\,天\,丄\,一 = \left(天\,丄\,\frac{一\,丅\,\sqrt{丅三}}{二}\right)\left(天\,丄\,\frac{一\,丄\,\sqrt{丅三}}{二}\right)$ 若欲免此虛式可依第一百十三款令 $\frac{...}{(天丅一)(天^{二}丄天丄一)(甲丄乙天)} = \frac{呷}{天丅一}\,丄\,\frac{吃天\,丄\,呐}{天^{二}丄天丄一}$ 將此式之右邊齊同通分乃令左右兩邊天之同方之倍數爲相等用常法求得其同數

$呷 = \frac{二}{甲\,丄\,乙}$

$吃 = \frac{丅二}{甲\,丄\,乙}$

$呐 = \frac{丅一}{甲\,丄\,乙}$

則可化其

所設之微分式爲

$$\frac{(天-一)(天^{二}+天+一)}{甲+乙天^{三}}彳天=\frac{三}{甲+乙}\times\frac{彳天}{天-一}+三\times\frac{天^{二}+天+一}{(甲+乙)天^{三}+甲乙}彳天$$

此式之左邊其第一項之積分可以對數明之欲求第二項之積分可令其分母$天^{二}+天+一$變爲$(天+\frac{一}{二})^{二}+\frac{三}{四}$又令其$天+\frac{一}{二}=人$則$天=人-\frac{一}{二}$，$彳天=彳人$故其分子之式可變爲

$$(甲+乙)天+二甲-乙=(甲+乙)人+\frac{三}{二}(甲-乙)$$

所以

$$\frac{三}{二}\times\frac{天^{二}+天+一}{(甲+乙)天^{二}+甲乙}彳天=\frac{三}{甲+乙}\times\frac{人彳人}{人^{二}+\frac{三}{四}}+\frac{三}{二}\cdot\frac{甲-乙}{甲+乙}\times\frac{彳人}{人^{二}+\frac{三}{四}}$$

此式右邊之第一項可以對數明其積分欲化第二項使簡可令$人^{二}+\frac{三}{四}=亥$則$人彳人=\frac{一}{二}彳亥$所以$\frac{人彳人}{人^{二}+\frac{三}{四}}=\frac{\sqrt{三}}{三}\times\frac{一}{二}\cdot\frac{彳亥}{亥}$總之

以所有之各法化其所設之微分式以便于求積分者其式爲

$$\frac{天^{三}-一}{(甲+乙天)}彳天=\frac{三}{甲+乙}\times\frac{彳天}{天-一}-\frac{三}{甲+乙}\times\frac{人彳人}{人^{二}+\frac{三}{四}}-\frac{\sqrt{三}}{甲+乙}\times\frac{一}{二}\cdot\frac{彳亥}{亥}$$

故求得其積分之式爲

$$禾\frac{天^{三}-一}{(甲+乙天)}彳天=\frac{三}{甲+乙}對(天-一)-\frac{六}{甲+乙}對(人^{二}+\frac{三}{四})-\frac{\sqrt{三}}{甲+乙}正切^{-一}\frac{二人}{\sqrt{三}}+常數$$

如于此積分式內令人與亥以其有天之項之各同數代之即得所求之積分式爲

$$禾\frac{天^{三}-一}{(甲+乙天)}彳天=\frac{三}{甲+乙}對\frac{(天-一)^{二}}{天^{二}+天+一}-\frac{\sqrt{三}}{甲+乙}正切^{-一}\left(\frac{二天+一}{\sqrt{三}}\right)+常數$$

第一百十七款　以上各款（謂從第一百十款至第一百十五各款也）以泛倍數之法化實分數爲散分數其立法之理比他法爲淺惟其周折太多最費工夫故不便于用茲更設簡便之

法如下.

如 $\frac{\text{咳}}{\text{戓}}$ 為最簡之實分數,而其分母中有一次式不相等之乘數,一為 $\text{天}\perp\text{甲}$,一為吘,則其兩乘數相乘之積必為 $\text{咳}=(\text{天}\perp\text{甲})\text{吘}$ 可令其 $\frac{\text{咳}}{\text{戓}}=\frac{\text{天}\perp\text{甲}}{\text{呷}}\perp\frac{\text{吘}}{\text{吧}}$ 此式中之呷為與天不相關之常數,其吧與吘為天之函數,而其天為變數,如將前式化為同母之分數,而勿忘其 $\text{咳}=(\text{天}\perp\text{甲})\text{吘}$ 即得相等式 $\text{戓}=\text{呷}\text{吘}\perp\text{吧}(\text{天}\perp\text{甲})$ 此式內若依分數之例,其戓與吘不能以 $\text{天}\perp\text{甲}$ 約之,若令 $\text{天}\perp\text{甲}=〇$ 即 $\text{天}=\top\text{甲}$ 因此可令戌與午代戓與吘之同數,則式變為 $\text{戌}=\text{呷}\text{午}$ 所以 $\text{呷}=\frac{\text{午}}{\text{戌}}$ 即為散分數內分子之同數,依此法又能求得各散分數中分子之同數.

假如有欲化之分數

$$\frac{\text{咳}}{\text{戓}}=\frac{(\text{天}\perp\text{甲})(\text{天}\perp\text{乙})}{\text{寅天}\perp\text{卯}}=\frac{\text{天}\perp\text{甲}}{\text{呷}}\perp\frac{\text{天}\perp\text{乙}}{\text{吃}}$$

則

$$\frac{\text{天}\perp\text{乙}}{\text{寅天}\perp\text{卯}}=\text{呷}\perp\frac{\text{天}\perp\text{乙}}{\text{吃}}(\text{天}\perp\text{甲})\quad ㈠$$

$$\frac{\text{天}\perp\text{甲}}{\text{寅天}\perp\text{卯}}=\text{吃}\perp\frac{\text{天}\perp\text{甲}}{\text{呷}}(\text{天}\perp\text{乙})\quad ㈡$$

令 $\text{天}=\top\text{甲}$ 從㈠式得

$$\text{呷}=\frac{\top\text{甲}\perp\text{乙}}{\top\text{寅甲}\perp\text{卯}}=\frac{\text{甲}\top\text{乙}}{\text{寅甲}\top\text{卯}}$$

令 $\text{天}=\perp\text{乙}$ 從㈡式得

$$\text{吃}=\frac{\text{甲}\perp\text{乙}}{\text{寅乙}\perp\text{卯}}$$

所以得

$$\frac{(\text{天}\perp\text{甲})(\text{天}\perp\text{乙})}{\text{寅天}\perp\text{卯}}=\frac{\text{甲}\perp\text{乙}}{一}\left[\frac{\text{天}\perp\text{甲}}{\text{寅甲}\top\text{卯}}\top\frac{\text{天}\top\text{乙}}{\text{寅乙}\top\text{卯}}\right]$$

求之.

第一百十八款 散分數中呷吃各同數亦可用微分術

如用前款之 $\text{咳}=(\text{天}\perp\text{甲})\text{吘}$ 式求其微係數得 $\frac{\text{伕}}{\text{裓}}=\text{吘}\perp\frac{\text{伕}}{\text{吘}}(\text{天}\perp\text{甲})$ 又設 $\text{天}=\top\text{甲}$ 之時其 $\frac{\text{伕}}{\text{裓}}$ 變為亥,若吘之同數為午,則 $\text{亥}=\text{午}$ 又因其 $\text{呷}=\frac{\text{午}}{\text{戌}}$ 所以知 $\text{呷}=\frac{\text{亥}}{\text{戌}}$.

如用前款之 $\text{咳}=(\text{天}\perp\text{甲})(\text{天}\perp\text{乙})$ 式求其微係數得 $\frac{\text{伕}}{\text{裓}}=二\text{天}\perp\text{甲}\perp\text{乙}$ 令 $\text{天}=\top\text{甲}$ 則得 $\frac{\text{伕}}{\text{裓}}=\top\text{甲}\perp\text{乙}=\text{亥}$ 令 $\text{天}=\perp\text{乙}$ 則得 $\frac{\text{伕}}{\text{裓}}=\text{甲}\perp\text{乙}=\text{亥}$ 則從 $\text{亥}=\text{午}$ 之式可得呷吃各同數,與前款

所得者無異

第一百十九款

設分數 $\frac{咳}{戌}$ 其分母為 $咳=(天\perp甲)^{卯}咋$ 卽為有卯箇相等之乘數與其他數咋相乘之積故可令所設之式為

$$\frac{咳}{戌}=\frac{咋(天\perp甲)^{卯}}{戌}$$

$$\frac{(天\perp甲)^{卯}}{呷}\perp\frac{(天\perp甲)^{卯丅一}}{吃}\perp\frac{(天\perp甲)^{卯丅二}}{哂}\perp\cdots\perp\frac{天\perp甲}{戌}\perp\frac{咋}{吧}$$

其呷吃哂……戌各為未知之常數其吧咋為天之函數

若以 $(天\perp甲)^{卯}$ 乘其各項卽變為

$$\frac{咋}{戌}=呷\perp吃(天\perp甲)\perp哂(天\perp甲)^{二}\perp\cdots\perp戌(天\perp甲)^{卯丅一}\perp\frac{咋}{吧}(天\perp甲)^{卯}$$

令 $天=丅甲$ 則戌與咋必能有一定之同數仍令戌午代其同數則所有以 $天\perp甲$ 乘之之項俱不見而其 $呷=\frac{午}{戌}$ 則呷之同數亦為已知之數矣

惟因 $\frac{咋}{戌丅呷咋}=吃(天\perp甲)\perp哂(天\perp甲)^{二}\perp\cdots$ 此式之左邊其分子 $戌丅呷咋$ 必能以 $天\perp甲$ 度之可命之為 $戌_{二}(天\perp甲)$ 所以得

$$\frac{咋}{戌_{二}}=吃\perp哂(天\perp甲)\perp\cdots\perp戌(天\perp甲)^{卯丅二}\perp\frac{咋}{吧}(天\perp甲)^{卯丅一}$$

此式中之戌二因不能以 $天\perp甲$ 度之故令 $天=丅甲$ 則其戌二必能有一定之同數若以戌二代其同數則其咋之同數與前所得者同而其以 $(天\perp甲)$ 乘之之項必不見故得 $吃=\frac{午}{戌_{二}}$ 其自哂至戌各同數亦依此法求之

茲特設一題以明此法之用

題 設有 $\frac{咳}{戌}=\frac{(一\perp天)(一\perp天)}{天}$ 欲化之為散分數

則可令

$\frac{(一丄天)(一丅天)}{天^{二}} = \frac{(一丅天)^{二}}{呷}\,丄\,\frac{(一丅天)^{二}}{吧}\,丄\,\frac{一丅天}{哂}\,丄\,\frac{一丄天}{吧}$

以$(一丅天)^{三}$乘之爲

$\frac{一丄天}{天} = 呷\,丄\,吧(一丅天)\,丄\,哂(一丅天)^{二}\,丄\,\frac{一丄天}{吧}(一丅天)^{三}$

令

$一丅天 = 〇$

則

$天 = 一$

即得

$呷 = 二$

而

$\frac{一丄天}{天}\,丅\,呷 = \frac{丅二(一丄天)}{一丄天}(一丅天) =$

$吧(一丅天)\,丄\,哂(一丅天)^{二}\,丄\,\frac{一丄天}{吧}(一丅天)^{三}$

其

$\frac{丅二(一丄天)}{一丄天} = 吧\,丄\,哂(一丅天)\,丄\,\frac{一丄天}{吧}(一丅天)^{二}$

再令

$天 = 一$

則得

$吧 = 丅三$

而

$\frac{丅二(一丄天)}{一丄天}\,丄\,吧 = \frac{二(一丄天)}{丅天}(一丅天)$

$= 哂(一丅天)\,丄\,\frac{一丄天}{吧}(一丅天)^{二}$

則其

$\frac{二(一丄天)}{丅天} = 哂\,丄\,\frac{一丄天}{吧}(一丅天)$

再令

$天 = 一$

則得

$哂 = 丅四$

故其化得之分數爲

$\frac{(一丄天)(一丅天)^{三}}{天^{二}} = \frac{二}{(一丅天)^{三}}\,丅\,\frac{三}{(一丅天)^{二}}\,丅\,\frac{四}{一丅天}\,丄\,\frac{一丄天}{吧}$

第一百二十款

前款之分數其分子中呷吧哂之各同數亦可用微分術求之

依第四十二款之法得

$㖡 = 吘\left[呷\,丄\,吧(天丄甲)\,丄\,哂(天丄甲)^{二}\,丄\,\cdots\,丄\,㖡(天丄甲)^{吘}\,丄\,吧(天丄甲)^{呷}\right]$

(一)若將此式疊求其微係數至(吘丅一)次再令其

$天丄甲 = 〇$

則(一)式及其所求得之各次微係數必爲

$㖡 = 呷吘$

$\frac{彳㖡}{彳天} = 呷\frac{彳吘}{彳天}\,丄\,吧吘$

$\frac{彳^{二}㖡}{彳天^{二}} = 呷\frac{彳^{二}吘}{彳天^{二}}\,丄\,二吧\frac{彳吘}{彳天}\,丄\,二哂吘$

$\frac{彳^{三}㖡}{彳天^{三}} = 呷\frac{彳^{三}吘}{彳天^{三}}\,丄\,三吧\frac{彳^{二}吘}{彳天^{二}}\,丄\,六哂\frac{彳吘}{彳天}\,丄\,六叮吘$

從此各式能定其呷吧哂等各同數惟勿忘每次求微分之後必令$丅甲$代其微係數中之天 此式中求吘之同數其法最便只須以$(天丄甲)^{吘}$約

其咳即可得之若依第一百十八款之法求之亦通

第一百二十一款 若其欲化之分數 $\frac{咳}{喊}$ 其分母中有相等乘數之二次式在內如 天^{二}丄二角天丄角^{二}丄亢^{二} 而不能化爲兩箇整乘數者則其式中之 咳＝(天^{二}丄二角天丄角^{二}丄亢^{二})咋 可令 $\frac{咳}{喊}=\frac{天^{二}丄二角天丄角^{二}丄亢^{二}}{呷天丄吃}丄\frac{咋}{吧}$ 則 喊＝(呷天丄吃)咋丄吧(天^{二}丄二角天丄角^{二}丄亢^{二}) 此式中之天如將 天^{二}丄二角天丄角^{二}丄亢^{二}＝〇 之任一虛根代之則其有吧之項必不見而變得兩種式一爲實一爲虛必令其實者與虛者相等則可得兩箇方程式從此兩式可求得呷吃之同數

題 設有 $\frac{(天丅一)(天^{二}丄天丄一)}{天}=\frac{天^{二}丄天丄一}{呷天丄吃}丄\frac{咋}{吧}$ 欲求其呷吃之同數

則可化之爲 天＝(呷天丄吃)(天丅一)丄吧(天^{二}丄天丄一) ㊀ 若令 天^{二}丄天丄一＝〇 則 天＝丅$\frac{二}{一}$丄$\frac{二}{一}$√丅三 故可將天之同數代入㊀式而序其各項則式變爲 丅$\frac{二}{一}$丄$\frac{二}{一}$√丅三＝丅$\frac{二}{三}$吃丄($\frac{二}{一}$吃丅呷)√丅三 由此得 丅$\frac{二}{三}$吃＝丅$\frac{二}{一}$ $\frac{二}{一}$吃丅呷＝$\frac{二}{一}$ 所以求得 吃＝$\frac{三}{一}$ 呷＝丅$\frac{三}{一}$

第一百二十二款 設其分數爲 $\frac{咳}{喊}=\frac{(天^{二}丄二角天丄角^{二}丄亢^{二})^{酉}}{呷天丄吃}丄\frac{(天^{二}丄二角天丄角^{二}丄亢^{二})^{酉丅一}}{呻天丄叮}丄\cdots丄\frac{咋}{吧}$ 則其 咳＝(天^{二}丄二角天丄角^{二}丄亢^{二})^{酉}咋 所以 $\frac{咋}{喊}$＝(呷天丄吃)丄(呻天丄叮)(天^{二}丄二角天丄角^{二}丄亢^{二})丄$\cdots$丄$\frac{咋}{吧}$(天^{二}丄二角天丄角^{二}丄亢^{二})^{酉}咳 此式爲前兩款

之式相弁而成故必依同法解之將天丄二角天丄角丄亢=○之任一虛根代

其天則凡有(天丄二角天丄角丄亢)之各方乘之之項俱不見而變爲吘/咳=呷天丄吃

此式內咳與吘合于前式內天之同數故亦有未丄申丅丅=未丅申丅丅之形

其未與申爲未定之常數呷與吃所成故呷吃之同數

可從未=未 申=申兩式求得之

茲將前式求其微係數又于所得之式中去其所有以

天丄二角天丄角丄亢爲倍數之各項得 $\frac{\text{天}}{\text{(吘/咳)}}$=呷丄(二天丄二角)(呐天丄叮) 此式中之天若將天丄二角天丄角丄亢=○之虛根

代之而合其所得之虛實兩式爲相等則得兩箇方程

式從此能求其呐叮之同數

題 設有 (天丄二天丄二)/(天丄二天丄天丄三) = (天丄二天丄二)/(呷天丄吃) 丄 (天丄二天丄二)/(呐天丄叮) 欲求呷吃呐叮各同數

則將分數化去其母爲天丄二天丄天丄三=呷天丄吃丄(呐天丄叮)(天丄二天丄二) ㊀ 以天丄二天丄二=○之一根天=一丄丅代入㊀

式而變爲丅叮丅丅=呷丄丄呷丅丅 從此式得呷丄吃=丅四 呷=丅 所以又可得吃=丅三 若將呷

吃兩同數代入㊀式而移其項爲天丄二天丄二天=(呐天丄叮)(天丄二天丄二) 再求其微分而

以袛約之爲 $三天^{\top}四天\bot 二 = \top (呷天 \top 叮)(二天 \top 二) \bot 一$ (二)再以 $\bot \frac{\top}{}$ 代其天則(二)式變爲 $\top \bot \frac{\top}{} = \top \bot 呷 \bot (呷 \bot 叮) \frac{\top}{}$ 從

此得 呷＝一 叮＝〇 所以分數 $\frac{(天^{二}\top 天\bot 二)}{天^{三}\top 天^{二}\bot 天 \top 三}$ 可化爲 $\frac{(天^{二}\top 天\bot 二)}{天 \bot 三} \bot \frac{天^{二}\top 天 \bot 二}{天}$

案微分式中往往有一種實分數其分母爲 $天^{\prime} \frac{}{\top} 二天 \cdots \bot 一$ 或 $天^{\prime} \frac{}{\top} 一$ 之形者已在代數術第二百七十四款至二百七十八款詳論此種函數能化爲一次二次之簡乘數既化之後即可依本卷各法求其積分

興化劉彝程校算

英國華里司輯　英國傅蘭雅口譯
金匱華蘅芳筆述

求虛函數微分式之積分

第一百二十三款　凡微分式內之虛函數若能變之為實函數者則可依前卷之各法求其積分

如有微分式 $\frac{一\top\sqrt{天}}{(一\perp\sqrt[三]{天}\top\sqrt{天})禾天}$ 觀此式易知若令 $天=人^{六}$ 則所有根號內之數易開其方因 $禾天=六人^{五}禾人$ 故可變所設之微分式為 $\frac{一\perp人^{二}}{六人^{五}禾人(一\perp人^{三}\top人^{二})}$ 此式若以分母約分子可得 $\top六(人^{六}\top人^{五}\perp人^{四}\top人^{三}\perp人^{二}\top一)禾人\top\frac{一\perp人^{二}}{六禾人}$ 其積分為 $\top六\left[\frac{八}{人^{八}}\top\frac{七}{人^{七}}\perp\frac{六}{人^{六}}\top\frac{五}{人^{五}}\perp\frac{三}{人^{三}}\top人\perp正切^{\top一}人\right]\perp常數$ 再將人之同數[illegible]代[illegible]之部能[illegible]各項明其積分

第一百二十四款

茲專論微分式內之有虛函數其形如 $\sqrt{甲\perp乙天\perp丙天^{二}}$ 者此種虛函數不外乎下兩式一為 $吧禾\sqrt{甲\perp乙天\perp丙天^{二}}$ 一為 $\frac{\sqrt{甲\perp乙天\perp丙天^{二}}}{吧禾}$ 其吧為天之任何實函數

惟此兩式亦可以一總式包括之如將其第一式依其根之次數自乘而以未乘之虛函數為其分母則可變之為 $\frac{\sqrt{甲\perp乙天\perp丙天^{二}}}{吧(甲\perp乙天\perp丙天^{二})禾}$ 而與第二式為同類

其簡式 $\frac{\sqrt{甲\perp乙天\perp丙天^{二}}}{禾}$ 之形有兩種。一。其分母內之丙為正。二。其分母內之丙為負

第一百二十五款　茲先論其第一種丙為正者

設有微分式 $\frac{\sqrt{甲\perp乙天\perp丙天^{二}}}{彳天}$ 欲求其積分可令 $\sqrt{甲\perp乙天\perp丙天^{二}}=巳地\perp\frac{地}{午}$ (一) 其巳午為未定之常數乃將其左右兩邊之數各自乘而變為無根號之式如 $甲\perp乙天\perp丙天^{二}=巳^{二}地^{二}\perp二巳午\perp\frac{地^{二}}{午^{二}}$ 若欲令此式之左邊變為正乘方之式必將其第一項移至右邊而兩邊俱以丙乘之又各以 $\frac{四}{乙^{二}}$ 加之則變為 $\frac{四}{乙^{二}}\perp乙丙天\perp丙^{二}天^{二}=丙\left[巳^{二}地^{二}\perp二巳午\top甲\perp\frac{四丙}{乙^{二}}\perp\frac{地^{二}}{午^{二}}\right]$ 再令其右邊之 $二巳午\top甲\perp\frac{四丙}{乙^{二}}=\top二巳午$ 即 $四巳午=\frac{四丙}{四甲丙\top乙^{二}}$ 如此則恆可變為正乘方式 $\frac{四}{乙^{二}}\perp乙丙天\perp丙^{二}天^{二}=丙\left[巳地\perp二巳午\perp\frac{地}{午}\right]$ 乃將其左右兩邊各開平方得 $\frac{二}{乙}\perp丙天=\sqrt{丙}\left[巳地\perp\frac{地}{午}\right]$ (二) 將此式求微分得 $\sqrt{丙}彳天=\frac{地}{彳地}\left[巳地\perp\frac{地}{午}\right]=\frac{地}{彳地}\sqrt{甲\perp乙天\perp丙天^{二}}$ 從此式又可得 $\frac{\sqrt{甲\perp乙天\perp丙天^{二}}}{彳天}=\frac{\sqrt{丙}}{一}\times\frac{地}{彳地}$ (三) 乃將 $\sqrt{丙}$ 約(二)式以與(一)式相加得 $\frac{二\sqrt{丙}}{乙}\perp天\sqrt{丙}\perp\sqrt{甲\perp乙天\perp丙天^{二}}=二巳地$ 配其對數即得 $訥\left[\frac{二\sqrt{丙}}{乙}\perp天\sqrt{丙}\perp\sqrt{甲\perp乙天\perp丙天^{二}}\right]=訥(地)\perp訥(二巳)$ (四) 惟因 $訥(地)=禾\frac{地}{彳地}\perp呐$ 其呐為任何常數故可令之為 $呐=呐\perp訥(二巳)$ 其呐又為他常數所以 $訥(地)\perp訥(二巳)=禾\frac{地}{彳地}\perp呐$ 將此式與(三)(四)兩式

相比得

禾 $\frac{\sqrt{甲\lfloor乙天\rfloor丙天}}{获} = \frac{丙}{二}$ 訥 [$\frac{二丙}{乙}$ 天 $\sqrt{丙}\sqrt{甲\lfloor乙天\rfloor丙天}$] 昞

$= \frac{丙}{二}$ 訥 [乙 $\lfloor$ 二丙天 $\lfloor$ 二丙 $\sqrt{甲\lfloor乙天\rfloor丙天}$] 昞

此式中各項對數之函數所不同者.

惟在常數 訥(二丙) 而已.

第一百二十六款　茲論其第二種丙爲負者

如有微分式 $\frac{\sqrt{甲\lfloor乙天\rfloor丙天}}{获}$ 欲求其積分. 則可令其式中之分母 $\sqrt{甲\lfloor乙天\rfloor丙天二} = 巳正弦斗$ (一). 其巳爲未定之常數斗爲變角. 則 甲 乙 丙天 = 巳正弦斗 = 巳巳餘弦斗 依前款之法變之得 $\frac{四}{乙}\lfloor二乙丙天\lfloor丙天 = 丙巳餘弦斗$ $\frac{四}{乙}\lfloor甲丙\rfloor巳丙$ 此式之左邊已爲正乘方若欲變其右

邊亦爲正乘方可令 丙巳 $= \frac{四}{乙}\lfloor甲丙$. 即 巳丙 $= \frac{二}{\sqrt{乙\lfloor四甲丙}}$ (二). 由此得 $\frac{四}{乙}\lfloor乙丙天\lfloor丙天 = 丙巳餘弦斗$. 兩邊

各開平方得 $\frac{二}{乙}\rfloor丙天 = \sqrt{丙巳餘弦斗}$ (三). 求其微分而以 丙 約之得 获 $= \frac{丙}{斗}$ 巳正弦斗 $= \frac{丙}{斗}\sqrt{甲\lfloor乙天\rfloor丙天}$. 所

以 $\frac{\sqrt{甲\lfloor乙天\rfloor丙天}}{获} = \frac{丙}{一}$ 斗. 求其積分得 禾 $\frac{\sqrt{甲\lfloor乙天\rfloor丙天}}{获} = \frac{丙}{一}$ 斗 $\lfloor$ 常數. 如欲求其斗則從 (三) (二) 兩式得 餘弦斗 $= \frac{二丙巳}{乙\lfloor二丙天} = \frac{\sqrt{乙\lfloor四甲丙}}{乙\lfloor二丙天}$. 所以其積分之式可爲

禾 $\frac{\sqrt{甲\lfloor乙天\rfloor丙天}}{获} = \frac{丙}{一}$ 餘弦 $\frac{\sqrt{乙\lfloor四甲丙}}{乙\lfloor二丙天}$ 昞. 或爲

禾 $\frac{\sqrt{甲\lfloor乙天\rfloor丙天}}{获} = \frac{丙}{一}$ 正弦 $\frac{\sqrt{乙\lfloor四甲丙}}{二丙天\lfloor乙}$ 昞. 此兩式 [illegible]

因其餘弦之角亥與正弦之角㚒其較恆為正角所以其較角為常數而兩角之積分不拘乎此兩式之外

第一百二十七款

如有微分式 $\frac{\sqrt{甲\perp乙天\perp丙天^{二}}}{天^{卯}伏}$ 欲求其積分

因其卯為任何整數故可令 $呹=\sqrt{甲\perp乙天\perp丙天^{二}}$ 而 $地=天^{寅}\sqrt{甲\perp乙天\perp丙天^{二}}=天^{寅}呹$ 則 $地^{二}=甲天^{二寅}\perp乙天^{二寅\perp一}\perp丙天^{二寅\perp二}$ 將此式求其微分得

$$地㕭=[二寅甲天^{二寅\top一}\perp(二寅\perp一)乙天^{二寅}\perp(二寅\perp二)丙天^{二寅\perp一}]伏$$

以 $地=天^{寅}呹$ 約之得

$$二㕭=二寅甲\frac{呹}{天^{寅\top一}伏}\perp(二寅\perp一)乙\frac{呹}{天^{寅}伏}\perp(二寅\perp二)丙\frac{呹}{天^{寅\perp一}伏}$$

乃令 $寅\perp一=卯$ 則 $寅=卯\top一$，$寅\top一=卯\top二$

$$二寅=二卯\top二$$
$$二寅\perp一=二卯\top一$$
$$二寅\perp二=二卯$$

由此得

$$二㕭=(二卯\top二)甲\frac{呹}{天^{卯}伏}\perp(二卯\top一)乙\frac{呹}{天^{卯\top一}伏}\perp二卯丙\frac{呹}{天^{卯\top二}伏}$$

依法序其各項得

$$\frac{呹}{天^{卯}伏}=\frac{卯丙}{㕭}\top\frac{二卯\top一}{二卯\top二}\times\frac{丙}{乙}\times\frac{呹}{天^{卯\top一}伏}\top\frac{卯}{卯\top一}\times\frac{丙}{甲}\times\frac{呹}{天^{卯\top二}伏}$$

所以可將此式求其積分而以地與呹所代之數仍還之則可得

$$禾\frac{\sqrt{甲\perp乙天\perp丙天^{二}}}{天^{卯}伏}=$$
$$\frac{㕭丙}{一\,天^{卯}\sqrt{甲\perp乙天\perp丙天}}\top\frac{二卯\top三}{二卯\top二}\times\frac{丙}{乙}禾\frac{\sqrt{甲\perp乙天\perp丙天}}{天^{卯\top一}伏}\top\frac{卯\top二}{卯\top一}\times\frac{丙}{甲}禾\frac{\sqrt{甲\perp乙天\perp丙天}}{天^{卯\top二}伏}$$

則此式之積分今以寅函數並同類之他

積分式其天之方數降等者明之

若欲將此式如第一百二十五六兩款之 $禾\frac{\sqrt{甲⊥乙天⊥丙天^{二}}}{彳天}$ $禾\frac{\sqrt{甲⊥乙天⊥丙天^{二}}}{彳天}$ 兩式之法求其同數則因前兩款之式其卯等于○而此式不能如此求之若令 $卯＝○$ 則卯入于各分數之分母內而其項俱變爲無窮　惟可令 $卯＝一$ 則式之右邊所有兩箇降等之積分式其末一箇可不見因其倍數爲○故也

所以可令公式中 $卯＝一$ 而從 $卯＝○$ 得 $禾\frac{\sqrt{甲⊥乙天⊥丙天^{二}}}{天彳天}＝\frac{丙}{一}\sqrt{甲⊥乙天⊥丙天^{二}}⊥\frac{二丙}{乙}禾\frac{\sqrt{甲⊥乙天⊥丙天^{二}}}{彳天}$ 之同數又可令公式中 $卯＝二$ $卯＝三$ 而從 $卯＝一$ $卯＝二$ 之式得其同數如是推之可求至卯爲任何數惟其卯必爲正整之數

第一百二十八款　若令卯爲負數則其式可變爲他形法以 $丅卯$ 代其卯而將所得之各項從新排列之則其式爲

$$禾\frac{天^{卯}\sqrt{甲⊥乙天⊥丙天^{二}}}{彳天}＝\frac{(卯丅一)甲}{丅一}\times\frac{天^{卯丅一}}{\sqrt{甲⊥乙天⊥丙天^{二}}}丅\frac{二卯丅三}{二卯丅二}\times\frac{甲}{乙}禾\frac{天^{卯}\sqrt{甲⊥乙天⊥丙天^{二}}}{彳天}丅\frac{卯丅一}{卯丅二}\times\frac{甲}{丙}禾\frac{天^{卯}\sqrt{甲⊥乙天⊥丙天^{二}}}{彳天}$$

而此式中之卯可以正數代之

第一百二十九款

惟 $卯＝一$ 者則不能用前款之變式因分母內凡有 $卯丅一$ 者其項俱變爲無窮故 $\frac{天\sqrt{甲⊥乙天⊥丙天^{二}}}{彳天}$ 之積分必分求之令 $天＝地^{丅一}$ 則 $\frac{天}{彳天}＝\frac{地}{丅彳地}$

所以其 $\frac{天\sqrt{甲⊥乙天⊥丙天^{二}}}{彳天}＝\frac{\sqrt{丙⊥乙地⊥甲地^{二}}}{丅彳地}$ 惟此變式之微分其積分之形有兩種視

甲之正負而異

如甲爲正數則依第一百二十五款之法得積分之式爲

$$\frac{\sqrt{甲}}{一}訥\left(乙+二甲地+二\sqrt{甲}\sqrt{丙+乙地+甲地^2}\right)+呞$$

其$\sqrt{甲}$可任爲正負之數如令之爲負則積分之式變爲

$$\frac{\sqrt{-甲}}{一}訥\left(乙+二甲地+二\sqrt{-甲}\sqrt{丙+乙地+甲地^2}\right)+呞$$

以地之同數$\frac{天}{一}$代還之則得

$$禾\frac{天\sqrt{甲+乙天+丙天^2}}{彳天}=\frac{\sqrt{甲}}{一}訥\frac{天}{二甲+乙天+二\sqrt{甲}\sqrt{甲+乙天+丙天^2}}+呞$$

惟須勿忘其$\sqrt{甲}$或可爲正或可爲負

如甲爲負數則

$$\frac{天\sqrt{甲+乙天-丙天^2}}{彳天}=\frac{\sqrt{丙+乙地-甲地^2}}{-彳地}$$

依第一百二十六款得其積分式

$$禾\frac{\sqrt{丙+乙地-甲地^2}}{-彳地}$$

$$=\frac{\sqrt{甲}}{一}正弦^{-1}\frac{\sqrt{乙^2+四甲丙}}{二甲地-乙}+呞$$

$$=\frac{\sqrt{甲}}{一}餘弦^{-1}\frac{\sqrt{乙^2+四甲丙}}{二甲地-乙}+呞$$

以$\frac{天}{一}$代其地卽得

$$禾\frac{天\sqrt{甲+乙天-丙天^2}}{彳天}=\frac{\sqrt{甲}}{一}餘弦^{-1}\frac{天\sqrt{乙^2+四甲丙}}{二甲+乙天}+呞$$

第一百三十款 以上各款之法（謂從第一百二十五款至一百二十九款也）已足爲多種微分式求積分之用

卽如從第一百二十五款之法可得

$$禾\frac{\sqrt{甲+天^2}}{彳天}=訥\left(天+\sqrt{甲+天^2}\right)+呞$$

及

$$禾\frac{\sqrt{二乙天+天^2}}{彳天}=訥\left(乙+天+\sqrt{二乙天+天^2}\right)+呞$$

從一百二十九款之法可得

$$禾\frac{天\sqrt{甲+丙天^2}}{甲彳天}=訥\frac{天}{二\sqrt{甲}-二\sqrt{甲}\sqrt{甲+丙天^2}}+呞$$

若以訥$(二\sqrt{甲})$約之令$\frac{訥(二\sqrt{甲})}{呞}$爲呞則

$$禾\frac{天\sqrt{甲+丙天^2}}{甲彳天}=訥\frac{天}{\sqrt{甲}-\sqrt{甲+丙天^2}}+呞$$

此式又可用法變之因其

$$禾\frac{天\sqrt{甲+丙天^2}}{二甲彳天}=訥\frac{-丙天^2}{\left(\sqrt{甲}-\sqrt{甲+丙天^2}\right)^2}+呞$$

而

$$-丙天^2=\left(\sqrt{甲}-\sqrt{甲+丙天^2}\right)\left(\sqrt{甲}+\sqrt{甲+丙天^2}\right)$$

所以

代而化之可得

$$禾\frac{天\sqrt{甲丄丙天^{二}}}{甲伕}=\frac{二}{二}訥\frac{甲丄\sqrt{甲丄丙天^{二}}}{甲丅\sqrt{甲丄丙天^{二}}}丄呐$$

由此可見凡積分之式每能隨其所用之常數而有多種變形

第一百三十一款

凡對函數之積分每類中各有其相配之一幅積分數可以角度或平圜之弧明之

即如依第一百二十六款之法可得

$$禾\frac{\sqrt{甲丅天}}{伕}=正弦^{丅一}\frac{甲}{天}丄呐$$

及

$$禾\frac{\sqrt{甲天丅天}}{伕}=餘弦^{丅一}\left(一丅二\frac{甲}{天}\right)丄呐$$

又如依第一百二十九款第二法可得

$$禾\frac{天\sqrt{天丅甲}}{甲伕}=$$

$$正割^{丅一}\frac{甲}{天}丄呐=餘弦^{丅一}\frac{天}{甲}丄呐$$

第一百三十二款

玆款特設一式以明微分式內有平方根號而欲求其積分之法

如有微分式 $\frac{天}{伕}\sqrt{\frac{天丅乙}{甲丅天}}$ 欲求其積分　則依已知之法變之得

$$\frac{天}{伕}\sqrt{\frac{天丅乙}{甲丅天}}=\frac{天\sqrt{(甲丅天)(天丅乙)}}{甲伕}丅\frac{\sqrt{(甲丅天)(天丅乙)}}{天伕}$$

此兩項之微分其第一項有他法可明之為

$$丅\frac{乙}{甲}\times\frac{\sqrt{(甲\frac{天}{一})(\frac{天}{一}乙)}}{\frac{天}{一}彳(\frac{天}{一})}$$

所以得

$$\frac{天}{伕}\sqrt{\frac{天丅乙}{甲丅天}}=\frac{\sqrt{(甲丅天)(天丅乙)}}{丅天伕}丅\frac{乙}{甲}\times\frac{\sqrt{(甲\frac{天}{一})(\frac{天}{一}乙)}}{\frac{天}{一}彳(\frac{天}{一})}$$

可見其兩項之式眞爲相類　如欲求其第一項之積分可令其

$$天=甲餘弦^{二}升丄乙正弦^{二}升$$

則

$$天伕=二(乙丅甲)正弦升餘弦升彳升$$

而其

$\frac{甲}{一}\frac{天}{一} = \left(\frac{甲}{一}\frac{乙}{一}\right)$正弦斗 (一)

$\frac{天}{一}\frac{乙}{一} = \left(\frac{甲}{一}\frac{乙}{一}\right)$餘弦斗 (二)

所以

$\frac{(甲天)(天乙)}{天秋} = \frac{(甲乙)餘弦斗\,正弦斗}{(甲乙)餘弦斗\,正弦斗斜} = 斜$

又依同法令

$\frac{天}{一} = \frac{甲}{一}$餘弦井$\frac{乙}{一}$正弦井

則得

$\frac{天}{一}\left(\frac{天}{一}\right) = \left(\frac{甲}{一}\frac{乙}{一}\right)$正弦井餘弦井耕

而其

$\frac{甲}{一}\frac{天}{一} = \left(\frac{甲}{一}\frac{乙}{一}\right)$正弦井 (三)

$\frac{天}{一}\frac{乙}{一} = \left(\frac{甲}{一}\frac{乙}{一}\right)$餘弦井 (四)

所以又得

$\frac{(甲天)(天乙)}{天\,(天)} = \frac{(甲乙)正弦井餘弦井}{(甲乙)正弦井餘弦井耕} = 耕$

總之其斗井二角如

能爲

餘弦$= \frac{甲乙}{天乙}$

餘弦井$= \frac{天}{甲}$餘弦斗

則

$\int \frac{天}{秋}\frac{天乙}{甲天} = 斗 \frac{乙}{甲}$ 井 常數

求二項微分式之積分

第一百三十三款

此種微分式可用公式

$天^{丙}\,秋\,(甲乙天^{丁})^{壬}$

明之茲欲查出用何式能

變其微分式爲實函數

如令

$甲乙天^{丁} = 人^{午}$

則

$(甲乙天^{丁})^{壬} = 人^{巳}$

而

$天^{丁} = \frac{乙}{人甲}$

所以

$天^{丙} = \left(\frac{乙}{人甲}\right)^{\frac{丙}{丁}}$

而

$天^{丙}\,秋 = \frac{卯乙}{午}\,人^{午}\left(\frac{乙}{人甲}\right)^{\frac{丙}{丁}-一}\,秋$

則所設之微

分式變爲

$\frac{卯乙}{午}\,人^{午}\,秋\left(\frac{乙}{人甲}\right)^{\frac{丙}{丁}-一}$

此式遇

$\frac{卯}{寅}$

能爲整數者必爲實函數

設其微分式爲

$天^{丙}\,秋\,(甲乙天^{丁})^{壬}$

則此式合于前例因其

$寅 = 九$

$卯 = 三$

$\frac{卯}{寅} = 三$

故能變其形爲

$\frac{三乙}{午}\,人^{午}\,秋\left(\frac{乙}{人甲}\right)^{二}$

設其微分式爲

$天^{丙}\,秋\,(甲乙天^{丁})^{壬}$

則可變之使其括弧中天之指數

爲負

法將括弧內之數變爲 甲天乙丄彳 約天甲即得 天午彳 㐅(甲丄乙天)壬 ＝ 天甲彳 㐅[(甲天卯丄乙)天甲]壬 ＝ 天卯丅辰彳 㐅(甲天卯丄乙)壬 又

依前法變之至其末式中之 寅卯丄卯巳午 每遇能爲整數之時

則微分式可爲實函數或可云每遇 寅卯丄巳午 能爲整數則

其微分式可變爲實函數

設有微分式 天卯彳 㐅(甲丄乙天)辰 此式亦與以上所言者爲一類因其

卯寅＝五三 巳午＝一三 寅卯丄巳午＝六三＝二 故可用此諸數于 天卯丅辰彳 㐅(甲天卯丄乙)壬 之式中得 甲天卯丄乙＝午人 從

此式化得 甲丄乙天卯＝天卯人午 若徑將其 天卯彳 㐅(甲丄乙天卯)午 如法變之則易知所得

之式必與用 天卯丅辰彳 㐅(甲天卯丄乙)壬 之式所得者相同

第一百三十四款

有時其微分之式 天卯彳 㐅(甲丄乙天卯)壬 不能徑求積分則必變爲簡式

以求之其法與第一百十三款之理相同惟因 禾戊亥＝戊亥丅禾戊亥 所以

凡遇微分式若能化其式爲兩箇乘數其一箇乘數能求其積分而以亥明之其又一箇乘數以戊明之則其全微分式之積分必可從求 微亥 之積分而得 用此法變得之微分有時可比所設之式更簡故其積分更易求 此爲最妙之法其用甚廣名曰分求積分之法

茲因欲從簡易故令巳代其 巳午 惟推算之時須勿忘

巳之所代者常爲分數則所設之微分式變爲 天巳彳 㐅(甲丄乙天)巳 化

此式爲兩箇乘數其有數法茲言其最便之法如左

變其式爲 $天^{寅-卯}天^{卯-一}彳天(甲+乙天^{卯})^{巳}$ 其一箇乘數 $天^{卯-一}彳天(甲+乙天^{卯})^{巳}$ 爲能求積分者依第一百〇八款之法無論巳所代之分數如何必能得其積分所以可用核代之則

$$戌=\frac{(甲+乙天^{卯})^{巳+一}}{乙卯(巳+一)}$$

$$亥=天^{寅-卯}$$

由此得

$$禾天^{寅-一}彳天(甲+乙天^{卯})^{巳}=\frac{天^{寅-卯}(甲+乙天^{卯})^{巳+一}}{乙卯(巳+一)}-\frac{寅-卯}{乙卯(巳+一)}禾天^{寅-卯-一}彳天(甲+乙天^{卯})^{巳+一}$$

惟因

$$禾天^{寅-卯-一}彳天(甲+乙天^{卯})^{巳+一}=禾天^{寅-卯-一}彳天(甲+乙天^{卯})^{巳}(甲+乙天^{卯})=甲禾天^{寅-卯-一}彳天(甲+乙天^{卯})^{巳}+乙禾天^{寅-一}彳天(甲+乙天^{卯})^{巳}$$

以此代入前式中而將其 $禾天^{寅-一}彳天(甲+乙天^{卯})^{巳}$ 之同數各項聚而化之卽得(甲)式如左

(甲)式

$$禾天^{寅-一}彳天(甲+乙天^{卯})^{巳}=\frac{天^{寅-卯}(甲+乙天^{卯})^{巳+一}}{乙(巳卯+寅)}-\frac{甲(寅-卯)}{乙(巳卯+寅)}禾天^{寅-卯-一}彳天(甲+乙天^{卯})^{巳}$$

觀此易知凡求 $天^{寅-一}彳天(甲+乙天^{卯})^{巳}$ 之積分者可變之爲求 $天^{寅-卯-一}彳天(甲+乙天^{卯})^{巳}$ 式之積分所以此式又可變爲求 $天^{寅-二卯-一}彳天(甲+乙天^{卯})^{巳}$ 之積分法將 $寅-卯$ 代(甲)式中之寅再將其 $寅-卯$ 變爲 $寅-二卯$ 則能用 $禾天^{寅-二卯-一}彳天(甲+乙天^{卯})^{巳}$ 而求 $禾天^{寅-卯-一}彳天(甲+乙天^{卯})^{巳}$ 順是以下仿此類推

總言之若以未代其變化之次數則至末得 $禾天^{寅丅未卯丅一}彳天(甲丄乙天^{卯})^{巳}$ 而其末式必為

$$禾天^{寅丅(未丅一)卯丅一}彳天(甲丄乙天^{卯})^{巳}＝\frac{乙[巳卯丄寅丅(未丅一)卯]}{天^{寅丅未卯}(甲丄乙天^{卯})^{巳丄一}}丅\frac{乙[巳卯丄寅丅(未丅一)卯]}{甲(寅丅未卯)}禾天^{寅丅未卯丅一}彳天(甲丄乙天^{卯})^{巳}$$

從此可知寅若為卯所可度則能用代數之式明其 $天^{寅丅一}彳天(甲丄乙天^{卯})^{巳}$ 之積分因遞次變化之至末次之積分式必以 $寅丅未卯＝〇$ 為天之方數故也。

用茲款之法所求得之積分與用第一百三十三款之法所得者無異。

第一百三十五款

又有一種變化之法可將其括弧外之指數遞損其一數。

用此法惟須知其

$$禾天^{寅丅一}彳天(甲丄乙天^{卯})^{巳}＝禾天^{寅丅一}彳天(甲丄乙天^{卯})^{巳丅一}(甲丄乙天^{卯})＝甲禾天^{寅丅一}彳天(甲丄乙天^{卯})^{巳丅一}丄乙禾天^{寅丄卯丅一}彳天(甲丄乙天^{卯})^{巳丅一}$$

如將呷式中之寅變為 $寅丄卯$ 又將其巳變為 $巳丅一$ 則其式變為

$$禾天^{寅丄卯丅一}彳天(甲丄乙天^{卯})^{巳丅一}＝\frac{乙(巳卯丄寅)}{天^{寅}(甲丄乙天^{卯})^{巳}}丅\frac{甲寅}{乙}禾天^{寅丅一}彳天(甲丄乙天^{卯})^{巳丅一}$$

以此代入前式即得吃式如左

吃式

$$禾天^{寅丅一}彳天(甲丄乙天^{卯})^{巳}＝\frac{巳卯丄寅}{天^{寅}(甲丄乙天^{卯})^{巳}}丄\frac{巳卯丄寅}{巳卯甲}禾天^{寅丅一}彳天(甲丄乙天^{卯})^{巳丅一}$$

依此式可令其巳遞減一數。若與呷式並

用之可令 禾天^丁彳天(甲乙天)^卯 積 禾天^丁彳天(甲乙天)^卯 而得其 未卯 爲 ... 內所能有卯之

最大之倍數其申爲巳所能有之最大整數

如有式 禾天彳天(甲乙天)^卯 可依㊥式遞次消化之爲 禾天彳天(甲乙天)^卯 禾天彳天(甲乙天)^卯 又依

㊂式消化其 禾天彳天(甲乙天) 爲 禾天彳天(甲乙天) 禾天彳天(甲乙天)

第一百三十六款 從以上兩款之式易知其寅與卯若

爲負數則不能依㊥㊂兩式而求其積分因其指數必

反增故也然若反其術而用之亦未嘗不可通

卽如從㊥式得 禾天^寅彳天(甲乙天)^卯 ＝ ... 以寅代其寅則得㊈式如左

㊇式 禾天^寅彳天(甲乙天)^卯 ＝ ... 依此式則能減其括弧外變數之指數因如

令寅代其寅中之寅則爲寅故也

若欲反其㊂式可令 禾天^丁彳天(甲乙天)^卯 ＝ ... 以巳代其巳則得㊉式如左

式(卯) 積$\frac{\top昃}{天丣伓}$

依此式則能減其括弧之指數因巳若爲負數則其卜能變爲卜故也

第一百三十七款

如有式積$\frac{\top昃}{天丣伓}$其寅爲正整之數令

甲$=$一

乙$=\top$

卯$=$二

乙$=\top$三

卽可得

積$\frac{\top昃}{天丣伓}$

若以寅代其丣則得

積$\frac{\top昃}{天伓}$

如令寅之各同數爲遞加之奇數則

積$\frac{\top昃}{天伓}$

積$\frac{\top昃}{天伓}$

積$\frac{\top昃}{天伓}$

積$\frac{\top昃}{天伓}$

⋮

從此得

積$\frac{\top昃}{天伓}$

積$\frac{\top昃}{天伓}$

⋮

則其求各積分之法自明又每式必加一常數

若寅之各同數爲偶則

積$\frac{\top昃}{天伓}$

積$\frac{\top昃}{天伓}$

積$\frac{\top昃}{天伓}$

⋮

依第二十三款之理以此各式從

積$\frac{\top昃}{伓}=$正弦$\frac{\top}{天}\top$常數

之例令所有天爲正弦之弧

爲呷，即得

$$\int\frac{d\text{天}}{\sqrt{1-\text{天}^{2}}}=\text{呷}+\text{常數}$$

$$\int\frac{\text{天}^{2}d\text{天}}{\sqrt{1-\text{天}^{2}}}=-\frac{\text{天}}{2}\sqrt{1-\text{天}^{2}}+\frac{1}{2}\text{呷}+\text{常數}$$

$$\int\frac{\text{天}^{4}d\text{天}}{\sqrt{1-\text{天}^{2}}}=-\left(\frac{\text{天}^{3}}{4}+\frac{1\cdot3\,\text{天}}{2\cdot4}\right)\sqrt{1-\text{天}^{2}}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\text{呷}+\text{常數}$$

$$\int\frac{\text{天}^{6}d\text{天}}{\sqrt{1-\text{天}^{2}}}=-\left(\frac{\text{天}^{5}}{6}+\frac{5\,\text{天}^{3}}{4\cdot6}+\frac{3\cdot5\,\text{天}}{2\cdot4\cdot6}\right)\sqrt{1-\text{天}^{2}}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\text{呷}+\text{常數}$$

……

第一百三十八款　前款之式其寅俱爲正數茲款乃論寅爲負數之式。

從(哂)式得

$$\int\frac{\text{天}^{\text{寅}}d\text{天}}{\sqrt{1-\text{天}^{2}}}=-\frac{\text{天}^{\text{寅}-1}\sqrt{1-\text{天}^{2}}}{\text{寅}}+\frac{\text{寅}-1}{\text{寅}}\int\frac{\text{天}^{\text{寅}-2}d\text{天}}{\sqrt{1-\text{天}^{2}}}$$

以$-\text{寅}$代其$\text{寅}-2$，則變爲

$$\int\frac{d\text{天}}{\text{天}^{\text{寅}}\sqrt{1-\text{天}^{2}}}=-\frac{\sqrt{1-\text{天}^{2}}}{(\text{寅}-1)\text{天}^{\text{寅}-1}}+\frac{\text{寅}-2}{\text{寅}-1}\int\frac{d\text{天}}{\text{天}^{\text{寅}-2}\sqrt{1-\text{天}^{2}}}$$

惟此式中之寅不能等于一，因$\text{寅}-1$則其分母爲○，而其倍數必爲無窮之故也。

寅等于一之式，可從第一百三十款之例得

$$\int\frac{d\text{天}}{\text{天}\sqrt{1-\text{天}^{2}}}=\text{呐}\frac{\text{天}}{1+\sqrt{1-\text{天}^{2}}}+\text{常數}$$

再令

$\text{寅}=3$
$\text{寅}=5$
……

即得

$$\int\frac{d\text{天}}{\text{天}^{3}\sqrt{1-\text{天}^{2}}}=-\frac{\sqrt{1-\text{天}^{2}}}{2\,\text{天}^{2}}+\frac{1}{2}\int\frac{d\text{天}}{\text{天}\sqrt{1-\text{天}^{2}}}$$

$$\int\frac{d\text{天}}{\text{天}^{5}\sqrt{1-\text{天}^{2}}}=-\frac{\sqrt{1-\text{天}^{2}}}{4\,\text{天}^{4}}+\frac{3}{4}\int\frac{d\text{天}}{\text{天}^{3}\sqrt{1-\text{天}^{2}}}$$

$$\int\frac{d\text{天}}{\text{天}^{7}\sqrt{1-\text{天}^{2}}}=-\frac{\sqrt{1-\text{天}^{2}}}{6\,\text{天}^{6}}+\frac{5}{6}\int\frac{d\text{天}}{\text{天}^{5}\sqrt{1-\text{天}^{2}}}$$

……

再令

$\text{寅}=2$
$\text{寅}=4$
$\text{寅}=6$
……

即得

$$\int\frac{d\text{天}}{\text{天}^{2}\sqrt{1-\text{天}^{2}}}=-\frac{\sqrt{1-\text{天}^{2}}}{\text{天}}+\text{常數}$$

$$\int\frac{d\text{天}}{\text{天}^{4}\sqrt{1-\text{天}^{2}}}=-\frac{\sqrt{1-\text{天}^{2}}}{3\,\text{天}^{3}}+\frac{2}{3}\int\frac{d\text{天}}{\text{天}^{2}\sqrt{1-\text{天}^{2}}}$$

$$\int\frac{d\text{天}}{\text{天}^{6}\sqrt{1-\text{天}^{2}}}=-\frac{\sqrt{1-\text{天}^{2}}}{5\,\text{天}^{5}}+\frac{4}{5}\int\frac{d\text{天}}{\text{天}^{4}\sqrt{1-\text{天}^{2}}}$$

……

此款所論之各式，皆可如前款之法得其級數之式，以對數及代數明其積分。

第一百三十九款　以級數求積分法

如將函(昋)詳爲級數，則其 $禾\,昋\,伇$ 易求得之，因祇須將級數之各項用第一百○四款之法，一一求其積分故也。

即如

$$昋=甲\perp乙天\perp丙天^{二}\perp丁天^{三}\perp\cdots\cdots$$

兩邊俱以伇乘之，各項求積分，得

$$禾\,昋\,伇=\frac{甲天}{一}\perp\frac{乙天^{二}}{二}\perp\frac{丙天^{三}}{三}\perp\cdots\cdots\perp常數$$

若其昋詳得之級數中，有任一項之形爲 $\frac{天}{戊}$，則此項之積分數依第二十款之例，必爲 $戊訥天$。

茲設數題于下，以明本款之法。

一題　設微分式爲 $\frac{伇}{甲\perp天}$，欲求其積分，則依第二十款之例，已知其級數中有 $甲\perp天$ 之訥對，惟依除法則得

$$\frac{一}{甲\perp天}=\frac{一}{甲}\top\frac{天}{甲^{二}}\perp\frac{天^{二}}{甲^{三}}\top\frac{天^{三}}{甲^{四}}\perp\cdots\cdots$$

以伇徧乘之而求其積分，則得

$$禾\frac{伇}{甲\perp天}=\frac{天}{甲}\top\frac{天^{二}}{二甲^{二}}\perp\frac{天^{三}}{三甲^{三}}\top\frac{天^{四}}{四甲^{四}}\perp\cdots\cdots\perp丙$$

此級數能明其積分之公式，而不論其專式內之用法，如令其級數爲明 $訥(甲\perp天)$，即得

$$訥(甲\perp天)=\frac{天}{甲}\top\frac{天^{二}}{二甲^{二}}\perp\frac{天^{三}}{三甲^{三}}\top\frac{天^{四}}{四甲^{四}}\perp\cdots\cdots\perp丙$$

其常數丙非爲未定之數，故其天之同數無論如何必能合于此式之用。如令 $天=〇$，則級數中有天之各項俱不見，而得 $訥甲=丙$。如此則丙之同數已知，所以得

$$訥(甲\perp天)=訥甲\perp\frac{天}{甲}\top\frac{天^{二}}{二甲^{二}}\perp\frac{天^{三}}{三甲^{三}}\top\cdots\cdots$$

此式與第八十六款所得者同。

二題　設有微分式 $\frac{\text{彳天}}{\text{一}\perp\text{天}^{\text{二}}}$ 欲以級數明其積分

則以約法得 $\frac{\text{一}}{\text{一}\perp\text{天}^{\text{二}}}=\text{一}\top\text{天}^{\text{二}}\perp\text{天}^{\text{四}}\top\text{天}^{\text{六}}\cdots\cdots$ 將此式之兩邊俱以彳天乘之乃如法求各項之積分則得積分之式爲 $\text{禾}\frac{\text{彳天}}{\text{一}\perp\text{天}^{\text{二}}}=\text{天}\top\frac{\text{天}^{\text{三}}}{\text{三}}\perp\frac{\text{天}^{\text{五}}}{\text{五}}\top\frac{\text{天}^{\text{七}}}{\text{七}}\cdots\cdots\perp\text{呐}$ 此式若但以代數之法攷之不能得其呐之同數惟從第二十二款之第三式則知 $\frac{\text{彳天}}{\text{一}\perp\text{天}^{\text{二}}}$ 爲以天爲切線半徑爲一之弧微分式故用 $\text{正切}^{\top\text{一}}\text{天}$ 以明其級數則 $\text{正切}^{\top\text{一}}\text{天}=\text{天}\top\frac{\text{天}^{\text{三}}}{\text{三}}\perp\frac{\text{天}^{\text{五}}}{\text{五}}\top\frac{\text{天}^{\text{七}}}{\text{七}}\cdots\cdots\perp\text{呐}$ 求其呐之定同數之法可令 $\text{正切}^{\top\text{一}}\text{天}$ 及天爲任何相配之各同數而攷之惟因 $\text{正切}^{\top\text{一}}\text{天}=〇$ 則 $\text{天}=〇$ 所以知級數中有天之各項不見之時必得 $〇=〇\perp\text{呐}$ 故知其常數呐必等于〇

三題　欲以天之斂級數明 $\frac{\text{彳天}}{\text{一}\perp\text{天}^{\text{二}}}$ 之積分因前題之解法其所得之級數中天之各方漸增大而爲發級數惟此式亦可以漸減之項明之故更設此題

先以約法得 $\frac{\text{一}}{\text{天}^{\text{二}}\perp\text{一}}=\frac{\text{一}}{\text{天}^{\text{二}}}\top\frac{\text{一}}{\text{天}^{\text{四}}}\perp\frac{\text{一}}{\text{天}^{\text{六}}}\top\frac{\text{一}}{\text{天}^{\text{八}}}\cdots\cdots$ 則 $\text{禾}\frac{\text{彳天}}{\text{天}^{\text{二}}\perp\text{一}}=\top\frac{\text{一}}{\text{天}}\perp\frac{\text{一}}{\text{三天}^{\text{三}}}\top\frac{\text{一}}{\text{五天}^{\text{五}}}\cdots\cdots\perp\text{呐}$ 即 $\text{正切}^{\top\text{一}}\text{天}=\top\frac{\text{一}}{\text{天}}\perp\frac{\text{一}}{\text{三天}^{\text{三}}}\top\frac{\text{一}}{\text{五天}^{\text{五}}}\cdots\cdots\perp\text{呐}$ 此式中若令 $\text{天}=〇$ 則不能攷得其呐之同數因 $\text{弧}=〇$ 則 $\text{天}=〇$ 而級數之各項皆爲無窮之故惟令其弧爲象限則 $\text{弧}=\frac{\text{周}}{\text{二}}$ 而天爲無窮其級數之各項俱爲〇而 $\frac{\text{周}}{\text{二}}=\text{呐}$ 所以得 $\text{正切}^{\top\text{一}}\text{天}=\frac{\text{周}}{\text{二}}\top\frac{\text{一}}{\text{天}}\perp\frac{\text{一}}{\text{三天}^{\text{三}}}\top\frac{\text{一}}{\text{五天}^{\text{五}}}\cdots\cdots$

四題　設有正弦爲天之弧微分式$\frac{彳天}{\sqrt{一\text{丅}天^{二}}}$欲以級數之法求其積分

則依二項例得

$$\frac{一}{\sqrt{一\text{丅}天^{二}}}=(一\text{丅}天^{二})^{\text{丅}\frac{一}{二}}=一\text{丄}\frac{一}{二}天^{二}\text{丄}\frac{一\cdot三}{二\cdot四}天^{四}\text{丄}\frac{一\cdot三\cdot五}{二\cdot四\cdot六}天^{六}\text{丄}\frac{一\cdot三\cdot五\cdot七}{二\cdot四\cdot六\cdot八}天^{八}\text{丄}\cdots\cdots$$

所以得

$$正弦^{\text{丅}一}天=禾\frac{彳天}{\sqrt{一\text{丅}天^{二}}}=天\text{丄}\frac{一}{二\cdot三}天^{三}\text{丄}\frac{一\cdot三}{二\cdot四\cdot五}天^{五}\text{丄}\frac{一\cdot三\cdot五}{二\cdot四\cdot六\cdot七}天^{七}\text{丄}\cdots\cdots$$

此式中令$天=〇$則$正弦^{\text{丅}一}〇=〇$而其左右兩邊之項同時俱變爲〇故不必有常數配之自能相等

第一百四十款　凡用級數以求積分其意謂積分之眞同數不能得則可用此法以求其略近之數也所以必用各法求得數種級數而擇其最易密合者用之

凡發級數其天之指數爲正則其方數恒增除其天本爲甚微之數以外皆不合于用如前款二題所得者是也惟其天之指數若爲負者即爲斂級數除天爲大數以外亦不合于用

第一百四十一款　用級數之法以求積分不過欲查得一式能分爲多項而各求其積分耳雖所分之各項其形與$\frac{彳天}{甲天^{黄}}$爲一類者亦可用之蓋無論其各項之形如何祇須其化得之級數能以代數對數或平圜之弧明之者皆可用之總以其函數之同數最易知而得數易密者爲佳因其所用之若干項和數與其全積分數所差極微故可用也

凡必用級數以求積分者因其全積分式之性情不能以有窮之項明之故不得已而借代數對數或平圜弧各式以無窮級數明之然則級數求積分之法必爲他法所不能得者方可用此法也

如能將各種函數與變數相配以其各同數列爲表則用以求積分最便惟因造此表之工夫極大卷帙必多而用此表之時甚少所以無人爲之凡立成之表能省人推算之工者除八線表之外惟有對數表而已

第一百四十二款

求對函數微分式之積分

如有微分式$吧彳天(對天)$欲求其積分其吧爲天之對函數則可

用 $禾戌彳亥=戌亥丅禾亥彳戌$ 之例令 $戌=(訥天)^{卯}$ 則 $彳戌=卯(訥天)^{卯丅一}\frac{彳天}{天}$ 又令 $彳亥=吧彳天$ 因欲從簡易故可令其 $禾吧彳天=嗔$ 則

$$禾吧彳天(訥天)^{卯}=嗔(訥天)^{卯}丅卯禾\frac{彳天}{天}(訥天)^{卯丅一}嗔$$

如將其 $禾\frac{彳天}{天}嗔$ 以嗔代之則為

$$禾\frac{彳天}{天}嗔(訥天)^{卯丅一}=嗔(訥天)^{卯丅一}丅(卯丅一)禾\frac{彳天}{天}(訥天)^{卯丅二}嗔$$

依此法屢變化之則可令其對數之指數遞損一數而藉同類之式得其積分。設有 $吧=天^{寅}$ 卽可得

$$禾天^{寅}彳天(訥天)^{卯}=\frac{天^{寅丄一}}{寅丄一}(訥天)^{卯}丅\frac{卯}{寅丄一}禾(訥天)^{卯丅一}天^{寅}彳天$$

如是遞變之可得

$$禾天^{寅}彳天(訥天)^{卯}=天^{寅丄一}\left[\frac{(訥天)^{卯}}{寅丄一}丅\frac{卯(訥天)^{卯丅一}}{(寅丄一)^{二}}丄\frac{卯(卯丅一)(訥天)^{卯丅二}}{(寅丄一)^{三}}丅\cdots\cdots\right]$$

觀此式易知其卯若為整正之數則其級數恆能有窮。

一百四十三款　卯若為負整數則用 $禾戌彳亥=戌亥丅禾亥彳戌$ 其對數之方必增大如

$$\frac{吧彳天}{(訥天)^{卯}}=\frac{吧天}{丅卯丄一}(丅卯丄一)(訥天)^{丅卯}\frac{彳天}{天}$$

若令 $吧天=戌$，$\frac{彳天}{天(訥天)^{卯}}=彳亥$ 則 $\frac{(訥天)^{丅卯丄一}}{丅卯丄一}=亥$ 而其

$$禾\frac{吧彳天}{(訥天)^{卯}}=\frac{吧天(訥天)^{丅卯丄一}}{丅卯丄一}丅\frac{一}{丅卯丄一}禾(訥天)^{丅卯丄一}彳(吧天)$$

設 $吧=天^{寅}$ 則上式又可變為

$$禾\frac{天^{寅}彳天}{(訥天)^{卯}}=\frac{天^{寅丄一}}{(丅卯丄一)(訥天)^{卯丅一}}丄\frac{寅丄一}{卯丅一}禾\frac{天^{寅}彳天}{(訥天)^{卯丅一}}$$

如是屢變之至末必可藉 $禾\frac{天^{寅}彳天}{訥天}$ 而得其積分。再令 $天^{寅丄一}=人$ 則 $訥天=\frac{訥人}{寅丄一}$，$天^{寅}彳天=\frac{彳人}{寅丄一}$ 所以 $\frac{天^{寅}彳天}{訥天}=\frac{彳人}{訥人}$ 此為最奇之越函數其積分除用無窮級數之外無他法能明之。

求指函數微分式之積分

第一百四十四款　從第十九款已知 $彳(甲^{天})=訥甲\,甲^{天}\,彳天$ 所以 $禾甲^{天}彳天=\frac{甲^{天}}{訥甲}丄呷$ 惟因 $彳天=\frac{彳(甲^{天})}{甲^{天}\,訥甲}$ 所以咳若爲甲^{天}之任何對函數則令 $甲^{天}=戊$ 卽得 $咳彳天=\frac{戊彳戊}{咳訥甲}$ 若就戊而論之此式有代數之形如令 $咳=\frac{F(甲^{天})}{甲^{天}}$ 卽可得 $禾\frac{F(甲^{天})彳天}{甲^{天}}=禾\frac{訥甲\,F(戊)}{彳戊}$ 此式之級數可依以上各款之法求之

設人爲天之任何函數令戊爲其訥一之數則 $彳(人戊^{天})=戊^{天}彳人丄戊^{天}人彳天$ 所以其 $禾戊^{天}彳天\left(人丄\frac{彳人}{彳天}\right)=人戊^{天}丄呷$ 若令 $人=天^{三}丅一$ 則 $\frac{彳人}{彳天}=三天^{二}$ 而 $禾戊^{天}彳天(三天^{二}丄天^{三}丅一)=戊^{天}(天^{三}丅一)丄呷$

第一百四十五款　其餘各式可用第一百三十四款之法分求其積分

設有微分式 $天^{卯}甲^{天}彳天$ 欲求其積分則可從 $禾戊彳按=戊按丅禾按彳戊$ 式之例令其 $戊=天^{卯}$ $彳按=甲^{天}彳天$ 卽得 $禾天^{卯}甲^{天}彳天=\frac{訥甲}{甲^{天}天^{卯}}丅\frac{訥甲}{卯}禾天^{卯丅一}甲^{天}彳天$ 再將其 $甲^{天}天^{卯丅一}彳天$ 以同法遞變若干次至末則得

$$禾天^{卯}甲^{天}彳天=\frac{甲^{天}}{訥甲}\left[天^{卯}丅\frac{卯天^{卯丅一}}{訥甲}丄\frac{卯(卯丅一)天^{卯丅二}}{(訥甲)^{二}}\cdots\cdots\mp\frac{卯(卯丅一)\cdots\cdots二\cdot一}{(訥甲)^{卯}}\right]丄呷$$

卽所求之式也

第一百四十六款　若卯爲負指數則可依同法以天之

指數增之故可從 $\int 天^{戊}彳天=\frac{天^{戊+一}}{戊+一}$ 式之例令 $戊=\frac{天}{甲}-一$，$彳戊=\frac{彳天}{甲}$ 即可得 $\int\frac{天^{卯}彳天}{甲^{天}}=\frac{(卯-一)天^{卯-一}}{甲^{天}訥甲}+\frac{卯}{訥甲}\int\frac{天^{卯-一}彳天}{甲^{天}}$ 如

是屢變至末則 $\int\frac{天^{卯}彳天}{甲^{天}}$ 可藉 $\int\frac{天彳天}{甲^{天}}$ 而得若令 $甲^{天}=人$ 則 $天訥甲=訥人$，$天=\frac{訥人}{訥甲}$

$彳天=\frac{一}{訥甲}\times\frac{彳人}{人}$ 所以 $\frac{天彳天}{甲^{天}}=\frac{訥人}{(訥甲)^{二}}\times\frac{彳人}{人}$，$\int\frac{天彳天}{甲^{天}}=\frac{一}{(訥甲)^{二}}\int\frac{訥人彳人}{人}$ 求此二積分之同數其難大略相

同算學家曾經極費心思求其解法大約除用無窮級

數之外無他法可得其同數

第一百四十七款　卯若爲分指數則可用以上各法將

其天之指數變之得一分數在○與$\pm一$之間乃用無

窮之級數求其積分

凡求 $\frac{天^{卯}彳天}{甲^{天}}$ 之積分無論用何法皆可用 $\frac{吧彳天}{甲^{天}}$ 代之惟其吧必

爲天之任何函數

求圜函數角函數微分式之積分

第一百四十八款　凡有一箇變數之圜函數微分或角

函數微分其求積分有數法

第一法以天爲正弦之弧令 $正弦天=人$ 則 $餘弦天=\sqrt{一-人^{二}}$，$彳天=\frac{彳人}{\sqrt{一-人^{二}}}$ 而 $正弦^{寅}天餘弦^{卯}天彳天=人^{寅}(一-人^{二})^{\frac{卯-一}{二}}彳人$ 若其

卯爲奇數則依二項之法變化而得之式其方根之號

可不見　若其寅爲奇數而括弧外人之指數加一與

括弧內人之指數相等者則合于第一百三十三款之

第一例而其微分式可變爲實函數　若寅卯俱爲偶

數則合于一百三十三款之第二例而其積分亦可求

題　設其微分式爲 $正弦^{二}天彳天$ 欲求其積分

則令 $正弦天=人$ 即可變其微分式爲 $\frac{人^{二}彳人}{\sqrt{一-人^{二}}}$ 乃依第一百三十

七款之法求其積分得

$$\int\frac{人^{二}彳人}{\sqrt{一-人^{二}}}=\frac{一}{二}(弧正弦天-正弦天餘弦天)$$

第一百四十九款

第二法其正弦之方或餘弦之方可以化爲級數而其級數之各項以正弦之弧或餘弦之弧爲乘數者則其各項之形必如 彳餘弦子天 或 彳正弦子天 惟因

禾彳餘弦子天 ＝ $\frac{壬}{子}$ 正弦子天 ⊥ 丙

禾彳正弦子天 ＝ ⊤ $\frac{壬}{子}$ 餘弦子天 ⊥ 丙

故其積分易得

一題 設其微分式爲 彳天餘弦^{五}天 欲求其積分

則可從代數術第二百五十八款得

餘弦^{五}天 ＝ $\frac{一六}{一}$（餘弦五天 ⊥ 五餘弦三天 ⊥ 一〇餘弦天）

所以求得其積分式爲

禾彳天餘弦^{五}天 ＝ $\frac{八〇}{一}$ 正弦五天 ⊥ $\frac{四八}{五}$ 正弦三天 ⊥ $\frac{八}{五}$ 正弦天 ⊥ 丙

此爲常用之法因任幾倍弧之正弦餘弦比正弦餘弦之方其數更易得也

二題 設其微分式爲 彳天餘弦^{二}天正弦^{三}天 欲求其積分

則可從代數術第二百六十款之式得

餘弦^{二}天正弦^{三}天 ＝ $\frac{一六}{一}$（⊤ 正弦五天 ⊥ 正弦三天 ⊥ 二正弦天）

以彳天乘之而求其積分得

禾彳天餘弦^{二}天正弦^{三}天 ＝ $\frac{八〇}{一}$ 餘弦五天 ⊤ $\frac{四八}{一}$ 餘弦三天 ⊤ $\frac{八}{一}$ 餘弦天 ⊥ 丙

第一百五十款

第三法已于代數術第二百七十款內言戊爲訥對之

底則

$$\text{餘弦天}=\frac{二}{戊^{\sqrt{\top}天}\perp戊^{\top\sqrt{\top}天}}$$

$$\text{正弦天}=\frac{二\sqrt{\top}}{戊^{\sqrt{\top}天}\top戊^{\top\sqrt{\top}天}}$$

從此式能將圜函數微分式內有正弦餘弦爲指數者變爲有指函數與對函數之微分則可用第一百四十款至一百四十五款之各法求其積分

第一百五十一款

第四法凡微分式如

$$彳天\,\text{餘弦}^{卯}天\,\text{正弦}^{寅}天$$

者求其積分之法能將其式變爲他微分式令正弦餘弦之指數爲更小之數

如依

$$禾戊彳亥=戊亥\top禾亥彳戊$$

之例令

$$戊=\text{正弦}^{寅\top一}天$$

$$彳亥=彳天\,\text{正弦}天\,\text{餘弦}^{卯}天$$

即得

$$亥=\top\frac{卯\perp一}{\text{餘弦}^{卯\perp一}天}$$

故其

$$禾彳天\,\text{餘弦}^{卯}天\,\text{正弦}^{寅}天=\top\frac{卯\perp一}{\text{正弦}^{寅\top一}天\,\text{餘弦}^{卯\perp一}天}\perp\frac{卯\perp一}{寅\top一}禾彳天\,\text{餘弦}^{卯\perp二}天\,\text{正弦}^{寅\top二}天$$

此式中之

$$\text{餘弦}^{卯\perp二}天$$

若以其同數

$$\text{餘弦}^{卯}天(\top\text{正弦}^{二}天)$$

代之而移其項則得

$$禾彳天\,\text{餘弦}^{卯}天\,\text{正弦}^{寅}天=\top\frac{寅\perp卯}{\text{正弦}^{寅\top一}天\,\text{餘弦}^{卯\perp一}天}\perp\frac{寅\perp卯}{寅\top一}禾彳天\,\text{餘弦}^{卯}天\,\text{正弦}^{寅\top二}天$$

爲(角)式

若將所設之式化爲兩箇乘數如

$$彳天\,\text{正弦}^{寅}天\,\text{餘弦}天$$

與

$$\text{餘弦}^{卯\top一}天$$

而依前法變之則可得

$$禾彳天\,\text{餘弦}^{卯}天\,\text{正弦}^{寅}天=\frac{寅\perp卯}{\text{正弦}^{寅\perp一}天\,\text{餘弦}^{卯\top一}天}\perp\frac{寅\perp卯}{卯\top一}禾彳天\,\text{餘弦}^{卯\top二}天\,\text{正弦}^{寅}天$$

爲(亢)式

觀以上兩式其(角)式能將正弦之指數遞變小其(亢)式能將餘弦之指數遞變小若其寅與卯爲正整之數則

將(角)(亢)兩式迭用之可得其積分

如有

禾伏正弦天餘弦天＝⊤五/一 正弦天餘弦天 ⊥五/三 禾伏正弦天餘弦天

則

禾伏正弦天餘弦天＝三/二 正弦天餘弦天 ⊥三/二 禾伏正弦天

惟因

禾伏正弦天＝⊤三/二 餘弦天 ⊥丙

所以得

禾伏正弦天餘弦天＝餘弦天（⊤五/二 正弦天餘弦天 ⊥一五/二 正弦天 ⊤四五/二）⊥丙

第一百五十二款

其寅與卯若爲負指數則必改其公式法將(角)式之卯變爲⊤卯即得

禾 餘弦天/伏正弦天 ＝ ⊤(寅⊤卯)餘弦天/正弦天 ⊥寅⊤卯/寅⊥一 禾 餘弦天/伏正弦天

爲(氐)式

依此式遞變之則所求之積分可藉 餘弦天/伏正弦天 (一)或 餘弦天/伏 (二)之積分而得視寅之奇偶而異

如令 餘弦天＝人 則(一)式變爲 ⊤人/伏人 而其積分易得 欲求其(二)式之積分在下款明之

若將公式(亢)令其指數卯變爲負又令其右邊之數爲此邊獨有之項變其卯爲卯⊥二（謂令其右邊之指數卯獨變而左邊不變也）則得(房)式如左

如

禾 餘弦天/伏正弦天 ＝ (卯⊤一)餘弦天/正弦天 ⊤卯⊤一/寅⊤卯⊥二 禾 餘弦天/伏正弦天

爲(房)式

依此式遞變之則所求之積分可藉 伏正弦天 (一)或 餘弦天/伏正弦天 (三)而

得視卯之奇偶而異其㊀式可依㊃式求其積分其㊂式求積分之法俟後詳解之

第一百五十三款

若寅或卯等于〇即得

$$禾\,彳天\,正弦^{寅}天=-\frac{寅}{餘弦天\,正弦^{寅丅一}天}丄\frac{寅}{寅丅一}禾\,彳天\,正弦^{寅丅二}天$$

$$禾\,彳天\,餘弦^{卯}天=\frac{卯}{正弦天\,餘弦^{卯丅一}天}丄\frac{卯}{卯丅一}禾\,彳天\,餘弦^{卯丅二}天$$

$$禾\frac{正弦^{寅}天}{彳天}=-\frac{(寅丅一)正弦^{寅丅一}天}{餘弦天}丄\frac{寅丅一}{寅丅二}禾\frac{正弦^{寅丅二}天}{彳天}$$

$$禾\frac{餘弦^{卯}天}{彳天}=\frac{(卯丅一)餘弦^{卯丅一}天}{正弦天}丄\frac{卯丅一}{卯丅二}禾\frac{餘弦^{卯丅二}天}{彳天}$$

第一百五十四款 若其正弦餘弦之指數皆為負可將其分子以 $餘弦^{二}天丄正弦^{二}天=一$ 乘之則得

$$禾\frac{正弦^{寅}天\,餘弦^{卯}天}{天}=禾\frac{正弦^{寅丅二}天\,餘弦^{卯}天}{彳天}丄禾\frac{正弦^{寅}天\,餘弦^{卯丅二}天}{彳天}$$

此各積分有 $正弦天$ 或 $餘弦天$ 在其分母內因 $寅=卯$ 而 $正弦天\,餘弦天=\frac{二}{一}正弦二天$ 故可令 $二天=人$ 而變其積分之式為前款中第三式之形

第一百五十五款 茲款特設數種簡要之題以畢圜函數微分中求積分之事

一題 設有微分式如 $\frac{正弦天}{彳天}$ 欲求其積分 則因 $正弦天=二正弦\frac{二}{一}天\,餘弦\frac{二}{一}天$ 所以

$$\frac{正弦天}{彳天}=\frac{二正弦\frac{二}{一}天\,餘弦\frac{二}{一}天}{彳天}=\frac{\frac{二}{一}\times正切\frac{二}{一}天}{彳天\,正割^{二}\frac{二}{一}天}=\frac{正切\frac{二}{一}天}{彳正切\frac{二}{一}天}$$

故求得

$$禾\frac{正弦天}{彳天}=訥\left(正切\frac{二}{一}天\right)丄丙$$

二題 設有微分式如 $\frac{餘弦天}{彳天}$ 欲求其積分 以 $\frac{二}{一}周$ 代九十度之弧令 $天=\frac{二}{一}周丅人$ 則其 $彳天=丅彳人$ $餘弦天=正弦人$

$$禾\frac{餘弦天}{彳天}=禾\frac{正弦人}{丅彳人}=$$

$$丅訥正切\frac{二}{一}人=訥\frac{正切\frac{二}{一}人}{一}丄丙$$

惟

因 $\frac{正切二人}{一}=\frac{正切(\frac{四}{周}丄\frac{二}{天})}{一}=正切(\frac{四}{周}丄\frac{二}{天})$ 所以求得

$$禾\frac{餘弦天}{彳天}=訥正切(\frac{四}{周}丄\frac{二}{天})丄丙$$

以上兩題之積分亦可以他法明之如

$$禾\frac{正弦天}{彳天}=\frac{二}{一}訥\frac{一丅餘弦天}{一丄餘弦天}丄丙$$

$$禾\frac{餘弦天}{彳天}=\frac{二}{一}訥\frac{一丄正弦天}{一丅正弦天}丄丙$$

是也

三題　設有微分式如 $\frac{正切天}{彳天}$ 欲求其積分

惟因 $禾\frac{正切天}{彳天}=禾\frac{正弦天}{彳天餘弦天}$ 所以其積分之式爲

$$訥(正弦天)丄丙$$

四題　設有微分式如 $彳天正切天$ 欲求其積分

則因 $禾彳天正切天=禾\frac{餘弦天}{彳天正弦天}$ 所以其積分之式爲

$$訥\frac{餘弦天}{一}丄丙$$

以上各款之法已足備尋常算學中求積分之用故下卷且未暇論積分術中奧賾之理而先將以上之理解明幾何中各種最要之題

興化劉彝程校算