Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2019/2020**

Bündel, Garben und Kohomologie

Vorlesung 18

Der Modul der Kähler-Differentiale

Auf einer Mannigfaltigkeit M gibt es das Tangentialbündel $TM \to M$, das zu einem Punkt $P \in M$ aus dem Tangentialraum T_PM besteht, der durch Äquivalenzklassen von differenzierbaren Kurven

$$[-\epsilon, \epsilon] \longrightarrow M$$

durch P gegeben ist. Das Tangentialbündel ist ein reelles Vektorbündel auf M, das charakteristisch für die Mannigfaltigkeit ist und mit dessen Hilfe man viele Invarianten für die Mannigfaltigkeit definieren kann. Wir wollen ein entsprechendes Objekt für ein Schema (sagen wir vom endlichen Typ über einem Körper) definieren. Eine unmittelbare Übertragung des analytischen Konzeptes ist nicht möglich, da es keinen direkten Ersatz für die differenzierbaren Kurven gibt. Wir orientieren und daher an einem anderen Gesichtspunkt des Tangentialbündels. Einen (stetigen oder differenzierbaren) Schnitt im Tangentialbündel (über einer offenen Menge $U \subseteq M$) nennt man ein (stetiges oder differenzierbares) Vektorfeld. Ein Vektorfeld F ordnet jedem Punkt $P \in U$ einen Tangentialvektor $F(P) = T_PM$ zu. Man kann nun differenzierbare Funktionen auf M entlang eines Vektorfeldes F ableiten und erhält dabei wieder eine Funktion. Dazu setzt man

$$(D_F(f))(P) := (D_{F(P)}f)(P),$$

wobei die Richtungsableitung $(D_{F(P)}f)(P)$ von f in Richtung $F(P)$ in P bezeichnet. Diese Richtungsableitung kann man auf jeder Karte ausrechnen, das Ergebnis ist wegen der Kettenregel unabhängig von der gewählten Karte. Wenn M unendlich oft differenzierbar ist, so ergibt dies eine Abbildung

$$D_F\colon\, C^\infty(U, \mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(U, \mathbb{R}),\ f \longmapsto D_F(f).$$

Diese Abbildung ist eine $\mathbb{R}$-lineare Derivation im Sinne der folgenden rein algebraischen Definition. Wir werden aufbauend auf Derivationen den Modul der Kähler-Differentiale einführen und daraus dual ein Tangentialgarbe im schematheoretischen Kontext entwickeln, die ferner lokal frei ist, wenn das Schema keine Singularitäten besitzt. In dieser Vorlesung betrachten wir die affine Situation und verzichten auf Beweise.

Definition 18.1. Es sei R ein kommutativer Ring, A eine kommutative R-Algebra und M ein A-Modul. Dann heißt eine R-lineare Abbildung

$$\delta\colon\, A \longrightarrow M$$

mit
$$\delta(ab) \;=\; a\delta(b) + b\delta(a)$$
für alle $a, b \in A$ eine R- *Derivation* (mit Werten in M).

Die dabei verwendete Regel nennt man *Leibniz-Regel*. Oft ist $M = A$. Für den Polynomring $A = R[X_1, \ldots, X_n]$ sind beispielsweise die i-ten (formalen) partiellen Ableitungen
$$\frac{\partial}{\partial X_i}$$
R-Derivationen von A nach A. Die Menge der Derivationen von A nach M ist in natürlicher Weise ein A-Modul. Er wird mit $\operatorname{Der}_R(A, M)$ bezeichnet.

Definition 18.2. Es sei R ein kommutativer Ring und A eine kommutative R-Algebra. Der von allen Symbolen $d(a)$, $a \in A$, erzeugte A-Modul, modulo den Identifizierungen
$$d(ab) = ad(b) + bd(a) \text{ für alle } a, b \in A$$
und
$$d(ra + sb) = rd(a) + sd(b) \text{ für alle } r, s \in R \text{ und } a, b \in A\,,$$
heißt *Modul der Kähler-Differentiale* von A über R. Er wird mit
$$\Omega_{A|R}$$
bezeichnet.

Bei dieser Konstruktion startet man also mit dem freien A-Modul F mit da, $a \in A$ als Basis und bildet den A-Restklassenmodul zu demjenigen Untermodul, der von den Elementen
$$d(ab) - ad(b) - bd(a)\,(a, b \in A)$$
und
$$d(ra + sb) - rd(a) - sd(b)\,(r, s \in R \text{ und } a, b \in A)$$
erzeugt wird. Die Abbildung
$$d\colon A \longrightarrow \Omega_{A|R},\ a \longmapsto d(a) = da,$$
heißt die *universelle Derivation*. Man prüft sofort nach, dass es sich um eine R-Derivation handelt. Die Elemente in $\Omega_{A|R}$ heißen (algebraische) *Differentialformen*.

Lemma 18.3. *Sei R ein kommutativer Ring und A eine kommutative R-Algebra. Dann besitzt der A-Modul $\Omega_{A|R}$ der Kähler-Differentiale die folgende universelle Eigenschaft. Zu jedem A-Modul M und jeder R-Derivation*
$$\delta\colon A \longrightarrow M$$
gibt es eine eindeutig bestimmte A-lineare Abbildung
$$\epsilon\colon \Omega_{A|R} \longrightarrow M$$
mit $\epsilon \circ d \;=\; \delta$.

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □

Diese Aussage kann man auch so ausdrücken, dass eine natürliche A-Modulisomorphie

$$\mathrm{Der}_R\,(A, M) \cong \mathrm{Hom}_A\left(\Omega_{A|R}, M\right)$$

vorliegt. Insbesondere ist

$$\mathrm{Der}_R\,(A, A) \cong \mathrm{Hom}_A\left(\Omega_{A|R}, A\right) = {\Omega_{A|R}}^*,$$

wobei rechts der Dualmodul genommen wird.

Lemma 18.4. *Sei R ein kommutativer Ring, A eine kommutative R-Algebra und $\Omega_{A|R}$ der Modul der Kähler-Differentiale. Dann gelten folgende Eigenschaften.*

(1) *Es ist $dr = 0$ für alle $r \in R$.*
(2) *Man kann*
$$\Omega_{A|R}$$
als den Restklassenmodul des freien A-Moduls zur Basis da, $a \in A$, modulo dem Untermodul, der von den Leibnizrelationen und von dr, $r \in R$, erzeugt wird, beschreiben.
(3) *Bei $A = R[x_1, \ldots, x_n]$ ist dx_i, $i = 1, \ldots, n$, ein A-Modulerzeugendensystem von $\Omega_{A|R}$.*
(4) *Sei $A = R[x_1, \ldots, x_n] = R[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{a}$. Für ein Polynom $F \in R[X_1, \ldots, X_n]$ und das zugehörige Element $f = F(x_1, \ldots, x_n) \in A$ gilt in $\Omega_{A|R}$ die Beziehung*
$$df = \frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_n)dx_1 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial x_n}(x_1, \ldots, x_n)dx_n,$$
wobei $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ die i-te partielle Derivation bezeichnet.
(5) *Zu einem kommutativen Diagramm*
$$\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & S \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \stackrel{\varphi}{\longrightarrow} & B\,, \end{array}$$
wobei die Pfeile Ringhomomorphismen repräsentieren, gibt es eine eindeutig bestimmte A-lineare Abbildung
$$\Omega_{A|R} \longrightarrow \Omega_{B|S},\ da \longmapsto d\varphi(a).$$

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □

Lemma 18.5. *Es sei R ein kommutativer Ring und $A = R[X_1, \ldots, X_n]$ der Polynomring in n Variablen über R. Dann ist der Modul der Kähler-Differentiale der freie A-Modul zur Basis*

$$dX_1, dX_2, \ldots, dX_n\,.$$

Die universelle Derivation ist bezüglich dieser Basis durch

$$A \longrightarrow AdX_1 \oplus \cdots \oplus AdX_n,\ F \longmapsto dF = \frac{\partial F}{\partial X_1} dX_1 + \cdots + \frac{\partial F}{\partial X_n} dX_n,$$

gegeben.

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □

Im Allgemeinen ist der Modul der Kähler-Differentiale nicht frei.

Lemma 18.6. *Es sei R ein kommutativer Ring, A eine kommutative R-Algebra und $S \subseteq A$ ein multiplikatives System. Dann ist*

$$\Omega_{A_S|R} \cong \left(\Omega_{A|R}\right)_S.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 18.19. □

Lemma 18.7. *Es sei R ein kommutativer Ring und es seien A und B kommutative R-Algebren und*

$$\varphi\colon\ A \longrightarrow B$$

ein R-Algebrahomomorphismus. Dann ist die Sequenz

$$\Omega_{A|R} \otimes_A B \longrightarrow \Omega_{B|R} \longrightarrow \Omega_{B|A} \longrightarrow 0$$

von B-Moduln exakt. Dabei geht $da \otimes b$ auf $bd\varphi(a)$ und db (in $\Omega_{B|R}$) auf db (in $\Omega_{B|A}$).

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □

Kähler-Differentiale und Jacobi-Matrix

Lemma 18.8. *Es sei R ein kommutativer Ring, es sei A eine kommutative R-Algebra und $I \subseteq A$ ein Ideal mit dem Restklassenring $B = A/I$. Dann ist die Sequenz*

$$I/I^2 \longrightarrow \Omega_{A|R} \otimes_A B \longrightarrow \Omega_{B|R} \longrightarrow 0$$

von B-Moduln exakt. Dabei geht $a \in I$ auf $da \otimes 1$ und $da \otimes b$ auf bda.

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □

Korollar 18.9. *Es sei R ein kommutativer Ring und es sei A eine kommutative endlich erzeugte R-Algebra, die als*

$$A = R[X_1, \ldots, X_n]/(F_1, \ldots, F_k)$$

gegeben sei. Dann ist

$$\Omega_{A|R} = \bigoplus_{i=1}^{n} AdX_i/(dF_1, \ldots, dF_k).$$

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □

Bemerkung 18.10. Es sei R ein kommutativer Ring und es sei A eine kommutative endlich erzeugte R-Algebra, die als

$$A = R[X_1, \ldots, X_n]/(F_1, \ldots, F_k)$$

gegeben sei. Dann ist nach Lemma 18.4 (4)

$$dF_j = \frac{\partial F_j}{\partial X_1} dX_1 + \cdots + \frac{\partial F_j}{\partial X_n} dX_n$$

und nach Korollar 18.9 gibt es eine exakte Sequenz

$$A^k \xrightarrow{M} A^n \longrightarrow \Omega_{A|R} \longrightarrow 0\,,$$

wobei

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial F_k}{\partial X_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_1}{\partial X_n} & \cdots & \frac{\partial F_k}{\partial X_n} \end{pmatrix}$$

die transponierte Jacobi-Matrix (ohne Auswertung an einem Punkt) ist. Die Standardvektoren e_j werden auf dX_j abgebildet und die Spaltenvektoren $\begin{pmatrix} \frac{\partial F_j}{\partial X_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial F_j}{\partial X_n} \end{pmatrix}$, die die Nullelemente dF_j repräsentieren, sind die Bilder der durch die Matrix gegebenen Abbildung.

Glattheit und Regularität

Definition 18.11. Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und seien $F_1, \ldots, F_s \in K[X_1, \ldots, X_n]$ Polynome mit der zugehörigen affin-algebraischen Menge

$$Y = V(F_1, \ldots, F_s) \subseteq \mathbb{A}_K^n.$$

Es sei $P \in Y$ ein Punkt von Y mit der Eigenschaft, dass Y im Punkt P die Dimension d besitze. Dann heißt P ein *glatter Punkt* von Y, wenn der Rang der Matrix

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial X_j} \right)_{i,j}$$

im Punkt P mindestens $n - d$ ist. Andernfalls heißt der Punkt *singulär*.

Zu einer K-Algebra

$$A = K[X_1, \ldots, X_n]/(f_1, \ldots, f_m)$$

und einem Punkt $P = (a_1, \ldots, a_n) \in V = V(f_1, \ldots, f_m)$ mit zugehörigem maximalen Ideal $\mathfrak{m}_P \subseteq A$ und Lokalisierung

$$R = A_{\mathfrak{m}_P} = \mathcal{O}_{V,P}$$

ist

$$\Omega_{R|K} = \Omega_{A|K} \otimes_A R,$$

und die Tensorierung

$$\Omega_{R|K} \otimes_R K \,=\, \Omega_{A|K} \otimes_A K$$

zur Restekörperauswertung

$$A \longrightarrow A_{\mathfrak{m}} \longrightarrow A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}} = K$$

spielt eine besondere Rolle. Es ergibt sich ein direkter Zusammenhang zum Dualraum des extrinsischen Tangentialraumes von V an P. Das bedeutet, dass $\Omega_{R|K} \otimes_R K$ in natürlicher Weise der Kotangentialraum im Punkt P ist.

Lemma 18.12. *Es sei K ein Körper,*

$$A \,=\, K[X_1, \ldots , X_n]/(f_1, \ldots , f_m)$$

eine endlich erzeugte K-Algebra und $P \,=\, (a_1, \ldots , a_n) \,\in\, V \,=\, V(f_1, \ldots , f_m)$ ein Punkt des zugehörigen Nullstellengebildes mit zugehörigem maximalen Ideal $\mathfrak{m}_P \,\subseteq\, A$ und Lokalisierung

$$R \,=\, A_{\mathfrak{m}}.$$

Dann ist der Tangentialraum zu V in P in kanonischer Weise der duale Vektorraum zu $\Omega_{R|K} \otimes_R K$.

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □

Definition 18.13. Ein noetherscher lokaler Ring $(R, \mathfrak{m})$ der Dimension n heißt *regulär*, wenn es n Elemente $f_1, \ldots , f_n \in \mathfrak{m}$ gibt, die das maximale Ideal $\mathfrak{m}$ erzeugen.

Lemma 18.14. *Es sei K ein Körper und R eine lokale kommutative K-Algebra und es sei die Gesamtabbildung*

$$K \longrightarrow R \longrightarrow R/\mathfrak{m}$$

ein Isomorphismus. Dann ist die Abbildung

$$\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \longrightarrow \Omega_{R|K} \otimes_R R/\mathfrak{m},\ [f] \longmapsto df \otimes 1,$$

ein $R/\mathfrak{m}$-Modulisomorphismus.

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □

Ohne die Voraussetzung, dass die natürliche Abbildung zwischen dem Grundkörper und dem Restklassenkörper ein Isomorphismus ist, gilt diese Aussage nicht, siehe Aufgabe 18.23.

Bemerkung 18.15. In der Situation von Lemma 18.12 kann man direkt eine Beziehung zwischen dem (extrinsischen) Tangentialraum, der als Kern der Jacobi-Matrix gegeben ist, und dem Dualraum zu $\mathfrak{m}_P/\mathfrak{m}_P^2$ stiften. Es sei

$$v \,=\, \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \,\in\, T_PV \,=\, \operatorname{kern}\left(\operatorname{Jak}(f_1, \ldots , f_m)_P\right).$$

Dies definiert eine Abbildung

$$\mathfrak{m}_P \longrightarrow K,\ g \longmapsto (dg)_P \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = v_1 \partial_1 g(P) + \cdots + v_n \partial_n g(P),$$

dabei wird, in analytischer Sprache, einer Funktion g die Auswertung in P ihrer Richtungsableitung in Richtung v zugeordnet. Die Kernbedingung stellt dabei sicher, dass Funktionen aus dem Ideal $(f_1, \ldots, f_m)$ auf 0 abgebildet werden und die Abbildung auf dem maximalen Ideal des Restklassenringes wohldefiniert ist. Nach der Produktregel wird dabei $\mathfrak{m}_P^2$ auf 0 abgebildet und es ergibt sich eine K-lineare Abbildung

$$\mathfrak{m}_P / \mathfrak{m}_P^2 \longrightarrow K.$$

SATZ 18.16. *Es sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper*

$$P \in V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}_K^n$$

ein Punkt der affin-algebraischen Menge zum Ideal $\mathfrak{a} = (f_1, \ldots, f_m)$ mit dem lokalen Ring

$$R = (K[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{a})_{\mathfrak{m}_P}.$$

Dann ist der Punkt genau dann glatt, wenn R regulär ist.

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □

SATZ 18.17. *Es sei K ein vollkommener Körper und R die Lokalisierung einer endlich erzeugten K-Algebra. Der Restklassenkörper $R/\mathfrak{m}$ sei isomorph zu K. Dann ist R genau dann regulär, wenn der Modul der Kähler-Differentiale frei ist und sein Rang mit der Dimension des Ringes übereinstimmt.*

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □

Ohne die Voraussetzung, dass der Grundkörper vollkommen ist, ist diese Aussageb nicht richtig, siehe Aufgabe 18.24.

KOROLLAR 18.18. *Es sei $V \subseteq \mathbb{A}_K^n$ eine zusammenhängende glatte Varietät über einem vollkommener Körper K und es sei R der affine Koordinatenring zu V. Dann ist der Modul der Kähler-Differentiale $\Omega_{R|K}$ lokal frei von konstantem Rang* $\dim(R)$ *und insbesondere ein projektiver Modul.*

Beweis. Dieser Beweis wurde in der Vorlesung nicht vorgeführt. □

BEISPIEL 18.19. Wir betrachten die reelle Sphäre

$$S^2 = \left\{ (x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

mit dem affinen Koordinatenring

$$R = \mathbb{R}[X,Y,Z]/\left(X^2 + Y^2 + Z^2 - 1\right).$$

Der R-Modul der Kählerdifferentiale ist nach Korollar 18.9 gleich

$$\Omega_{R|\mathbb{R}} = RdX \oplus RdY \oplus RdZ/(XdX + YdY + ZdZ).$$

Eine direkte Überprüfung zeigt, dass die reelle Sphäre glatt ist. Nach Satz 18.17 ist somit $\Omega_{R|\mathbb{R}}$ lokal frei (von konstantem Rang 2). Dies kann man auch direkt von der Darstellung her begründen, siehe Aufgabe 18.25. Dagegen ist $\Omega_{R|\mathbb{R}}$ nicht frei. Dies ist eine algebraische Version des Satzes vom Igel, dass man ihn nicht glattkämmen kann, also die Stacheln nicht wirbelfrei tangential an die Kugel anlegen kann.

Der Tangentialraum zu einer polynomialen Abbildung $f\colon \mathbb{A}_K^n \to \mathbb{A}_K^m$ mit dem Nullstellengebilde $V = V(f_1, \ldots, f_m) \subseteq \mathbb{A}_K^n$ an einem Punkt $P \in V$ ist

$$T_P V := \operatorname{kern}\left(\operatorname{Jak}(f_1, \ldots, f_m)_P\right) = \{v \in \mathbb{A}_K^n \mid \operatorname{Jak}(f_1, \ldots, f_m)_P(v) = 0\}.$$

Wenn P ein regulärer Punkt der Abbildung ist und man den Satz über implizite Abbildungen anwenden kann, so handelt es sich um einen linearen Unterraum, dessen Dimension mit der (Mannigfaltigkeits-)Dimension von V übereinstimmt. Diese Konstruktion ist extrinsisch, sie hängt von der Einbettung von V in den affinen Raum ab. Wir möchten eine intrinsische Version des Tangentialraumes vorstellen, der nur von V bzw. dem affinen Koordinatenring abhängt. Dazu führen wir den Modul der Kähler-Differentiale ein, der für jede R-Algebra A eine duale Version des Tangentialraumes liefert.

Abbildungsverzeichnis