Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2018/2019**

Grundkurs Mathematik I

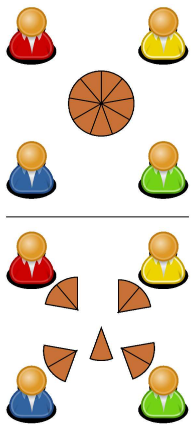
Vorlesung 14

Kunst gibt nicht das
Sichtbare wieder, sondern
Kunst macht sichtbar

Paul Klee

Division mit Rest

Jede natürliche Zahl lässt sich bekanntlich als eine Ziffernfolge „im Zehnersystem“ ausdrücken. Dies beruht auf der (sukzessiven) Division mit Rest. Eine natürliche Zahl ist nicht durch jede natürliche Zahl teilbar, die Division mit Rest liefert eine Operation, die stets durchführbar ist.



Satz 14.1. *Sei d eine fixierte positive natürliche Zahl. Dann gibt es zu jeder natürlichen Zahl n eine eindeutig bestimmte natürliche Zahl q und eine eindeutig bestimmte natürliche Zahl r, $0 \leq r \leq d-1$, mit*

$$n = qd + r.$$

Beweis. Zur Existenz. Dies wird durch Induktion über n bewiesen. Es sei $d > 0$ fixiert. Der Induktionsanfang ergibt sich direkt mit $q = 0$ und $n = 0$. Für den Induktionsschluss sei die Aussage für n bewiesen, d.h. wir haben eine Darstellung $n = dq + r$ mit $r < d$ und müssen eine ebensolche Darstellung für $n+1$ finden. Wenn $r = d-1$ ist, so ist

$$n + 1 = dq + r + 1$$

und wegen $r+1 < d$ ist dies eine gesuchte Darstellung. Ist hingegen $r = d-1$, so ist

$$n+1 = dq+r+1 = dq+d = d(q+1)+0,$$

und dies ist eine gesuchte Darstellung. Zur Eindeutigkeit. Sei $qd+r = n = \tilde{q}d+\tilde{r}$, wobei die Bedingungen jeweils erfüllt seien. Es sei ohne Einschränkung $\tilde{r} \geq r$. Dann gilt $(q-\tilde{q})d = \tilde{r}-r$. Diese Differenz ist nichtnegativ und kleiner als d, links steht aber ein Vielfaches von d, so dass die Differenz 0 sein muss und die beiden Darstellungen übereinstimmen. □

Bei der Division mit Rest nennt man auch n *Dividend* und d *Divisor*. Die Zahl q nennt man *Quotienten* oder *ganzzahligen Anteil* und r den *Rest*.

Bemerkung 14.2. Zu gegebenen natürlichen Zahlen n, d mit $d \geq 1$ findet man die Division mit Rest, also die Darstellung $n = qd+r$, indem man der Reihe nach die Vielfachen von d betrachtet. Das größte Vielfache von d (gleich oder) unterhalb von n ist das gesuchte qd, insbesondere muss das nächste Vielfache $(q+1)d > n$ sein. Der Rest ergibt sich dann als $r = n-qd$.

In der Schule verwendet man häufig eine Darstellung für die Division mit Rest wie

$$n \text{ durch } d \text{ ist } q \text{ Rest } r\,.$$

Dies ist in Hinblick auf die mathematische Weiterverarbeitung ungünstiger als die im Satz verwendete Gleichungsform.

Zifferndarstellung für natürliche Zahlen

Mit der Division mit Rest können wir die Existenz und Eindeutigkeit der üblichen Zifferndarstellung einer natürlichen Zahl beweisen. Hinter der Zifferndarstellung verbirgt sich eine Mischung aus Addition, Multiplikation und Potenzierung (*gemischte Darstellung*). Wir konzentrieren uns hauptsächlich auf die Ziffernentwicklung im *Dezimalsystem* (oder *Zehnersystem*).

Satz 14.3. *Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es eindeutig bestimmte natürliche Zahlen k und $r_0, r_1, r_2, \ldots, r_k$ mit $0 \leq r_i \leq 9$ und mit $r_k \neq 0$ (außer bei $n=0$) mit der Eigenschaft*

$$n = \sum_{i=0}^{k} r_i 10^i.$$

Beweis. Wir beweisen die Existenzaussage durch Induktion über n. Für $n = 0$ wählt man $k = 0$ und $r_0 = 0$. Sei nun $n \geq 1$ und die Aussage für kleinere Zahlen schon bewiesen. Nach Satz 14.1 mit $d = 10$ gibt es eine Darstellung

$$n = q \cdot 10 + r_0$$

mit r_0 zwischen 0 und 9. Es ist $q < n$, deshalb gilt nach Induktionsvoraussetzung die Aussage für q. D.h. man kann

$$q = \sum_{i=0}^{\ell} s_i 10^i$$

mit $0 \leq s_i \leq 9$ (bei $q = 0$ ist dies als leere Summe zu lesen) und mit $s_\ell \neq 0$ schreiben. Daher ist

$$\begin{aligned} n &= q \cdot 10 + r_0 \\ &= \left(\sum_{i=0}^{\ell} s_i 10^i \right) \cdot 10 + r_0 \\ &= \sum_{i=0}^{\ell} \left(s_i 10^{i+1} \right) + r_0 \\ &= \sum_{j=1}^{\ell+1} \left(s_{j-1} 10^j \right) + r_0 \end{aligned}$$

eine Darstellung der gesuchten Art. Dabei ist $r_j = s_{j-1}$ für $j \geq 1$ und $k = \ell + 1$. Die Eindeutigkeit folgt ebenfalls aus der Eindeutigkeit bei der Division mit Rest, siehe Aufgabe 14.16. $\square$

Eine natürliche Zahl wird im Zehnersystem einfach dadurch angegeben, dass die Ziffern nebeneinander hingeschrieben werden, wobei links die höchststellige Ziffer (die vorderste Ziffer) und rechts die niedrigststellige Ziffer, also die Einerziffer, steht. Die Zahl

$$4 \cdot 10^5 + 6 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$$

wird also einfach als

$$463075$$

geschrieben (in der gemischten Summen-und Produktdarstellung hätte man den Ausdruck $0 \cdot 10^2$ auch weglassen können, nicht aber in der Dezimaldarstellung). Eine beliebige natürliche Zahl im Dezimalsystem mit k Ziffern gibt man als

$$a_{k-1} a_{k-2} \ldots a_2 a_1 a_0$$

an, was die Zahl

$$a_{k-1} 10^{k-1} + a_{k-2} 10^{k-2} + \cdots + a_2 10^2 + a_1 10 + a_0$$

bedeutet. Man beachte, dass wegen der gewünschten Kongruenz $a_i 10^i$ die Durchnummerierung der Ziffern bei 0 anfängt, und somit bei insgesamt k Ziffern die höchststellige Ziffer die Nummer $k - 1$ besitzt. Wenn man von der i-ten Ziffer spricht, meint man die Ziffer, die sich auf 10^i bezieht. Von daher spricht man besser von der Einerziffer (bezieht sich auf $1 = 10^0$), der Zehnerziffer, der Hunderterziffer, der Tausenderziffer u.s.w. Gelegentlich ist es sinnvoll, auch Ziffernentwicklungen zuzulassen, die vorne mit Nullen beginnen, beispielsweise wenn man bei der Addition zweier natürlicher Zahlen gleich viele Ziffern haben möchte. Die Potenzen 10^i nennt man auch die *Bündelungseinheiten*. Man fasst eine Zahl in Bündel von solchen Einheiten zusammen, wobei von einem Bündel maximal 9 genommen werden, da 10 Bündeleinheiten durch die nächsthöhere Bündelungseinheit ausgedrückt werden kann (und muss, um eine eindeutige Darstellung zu erreichen). Wenn eine große Punktmenge vorliegt, so wird dieses Bündelungsprinzip sichtbar, wenn man zuerst 10-Bündel formt (indem man jeweils 10 Punkte zusammenfasst, umkreist, markiert), dann zehn Zehnerbündel zu einem Hunderterbündel zusammenfasst und so weiter.

Bemerkung 14.4. Aus dem Beweis zu Satz 14.3 kann man ablesen, wie man zu einer irgendwie gegebenen natürlichen Zahl n die Entwicklung im Zehnersystem erhält. Man dividiert die Zahl n durch 10 und der Rest gibt die Endziffer. Dann zieht man von n diesen Rest ab und weiß, dass diese Zahl ein Vielfaches von 10 ist. Man dividiert sie durch 10 und bestimmt erneut den Rest, der die Zehnerziffer gibt, u.s.w. Bei diesem Verfahren berechnet man also die Ziffern von hinten nach vorne.

Ein anderes Verfahren, bei dem man die Ziffern von vorne nach hinten berechnet, geht folgendermaßen: Man bestimmt die maximale Zehnerpotenz 10^k, die in n hineinpasst, es muss also

$$10^k \leq n < 10^{k+1}$$

gelten. Dann findet man das maximale Vielfache von 10^k, das in n hineinpasst, also die Zahl z mit

$$z \cdot 10^k \leq n < (z+1)10^k.$$

Diese Zahl muss zwischen 1 und 9 liegen. Der Wert

$$z = 0$$

kann nicht sein, da ansonsten $n < 10^k$ im Widerspruch zur Wahl der Zehnerpotenz wäre, ein Wert $z \geq 10$ kann nicht sein, da ansonsten

$$n \geq z10^k \geq 10^{k+1}$$

wäre, was wieder der Wahl der Zehnerpotenz widerspricht. Diese Ziffer $z = c_k$ ist dann die Anfangsziffer der Dezimalentwicklung. Nun rechnet man

$$n - c_k 10^k$$

und weiß nach der Wahl von k und c_k, dass diese neue Zahl $\tilde{n}$ echt kleiner als 10^k ist. Man bestimmt das maximale Vielfache von 10^{k-1} unterhalb von $\tilde{n}$, der Vorfaktor (der 0 sein kann) ergibt die Ziffer c_{k-1} und man zieht das Vielfache von $\tilde{n}$ ab und wiederholt das Verfahren.

Bemerkung 14.5. Es sei eine natürliche Zahl in der Form

$$n = c_k 10^k + c_{k-1} 10^{k-1} + \cdots + c_2 10^2 + c_1 10^1 + c_0 10^0$$

gegeben, wobei die c_i beliebige natürliche Zahlen sind, also nicht unbedingt kleiner als 10 sein müssen. Die zu n gehörige Dezimalentwicklung erhält man sukzessive durch folgende Vorgehensweise. Man führt für c_0 die Division mit Rest durch 10 durch und erhält eine Darstellung

$$c_0 = 10 \cdot q_0 + a_0$$

mit einem Rest a_0, $0 \leq a_0 < 10$. Damit ist

$$\begin{aligned} n &= c_k 10^k + c_{k-1} 10^{k-1} + \cdots + c_2 10^2 + c_1 10^1 + c_0 10^0 \\ &= c_k 10^k + c_{k-1} 10^{k-1} + \cdots + c_2 10^2 + c_1 10^1 + (10 \cdot q_0 + a_0)\, 10^0 \\ &= c_k 10^k + c_{k-1} 10^{k-1} + \cdots + c_2 10^2 + c_1 10^1 + q_0 10 + a_0 10^0 \\ &= c_k 10^k + c_{k-1} 10^{k-1} + \cdots + c_2 10^2 + (c_1 + q_0)\, 10^1 + a_0 10^0 . \end{aligned}$$

Somit haben wir eine neue Darstellung von n, bei der die Einerziffer kleiner als 10 ist. Als nächstes arbeitet man den neuen Vorfaktor (also $c_1 + q_0$) zu 10^1 ab und bringt ihn auf die erlaubte Zifferngestalt, wobei der davor liegenden Vorfaktor wieder geändert wird. Dies führt letztlich zur Darstellung im Dezimalsystem.

Bemerkung 14.6. Für Rechnungen ist das Dezimalsystem sehr gut geeignet, wie die aus der Schule bekannten und im Laufe der Vorlesung zu entwickelnden Algorithmen zeigen werden, für theoretische Überlegungen und Beweise, auch über das Dezimalsystem selbst, ist die obige gemischte Summen- und Produktdarstellung besser geeignet, da darin die grundlegenden Verknüpfungen auf den natürlichen Zahlen sichtbar werden.

Eine zu Satz 14.3 entsprechende Aussage gilt für jede *Basis* $g \geq 2$ statt $g = 10$. Bei $g = 2$ spricht man vom *Dualsystem*, die einzigen Ziffern sind 0 und 1, bei $g = 3$ vom *Dreiersystem* mit den Ziffern $0, 1, 2$ u.s.w. Bei $g = 16$ spricht man vom *Hexadezimalsystem* und verwendet die Ziffern $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F$.

Dass das Dezimalsystem nur eine unter vielen möglichen Darstellungen einer natürlichen Zahl ist, wird besonders deutlich, wenn man Darstellungen in verschiedenen Ziffernsystemen (oder *Stellenwertsystemen*) ineinander umrechnet.

Beispiel 14.7. Wir wollen die im Dezimalsystem gegebene Zahl 187 im Dreiersystem ausdrücken. Dazu müssen wir die größte Dreierpotenz finden, die unterhalb 187 liegt. Das ist

$$81 = 3^4$$

(da $243 = 3^5$ zu groß ist). Für diese Potenz müssen wir schauen, wie oft sie in 187 hineingeht. Wegen

$$2 \cdot 81 = 162 < 187$$

sind das zweimal. Wir wissen daher, dass die Entwicklung der Zahl im Dreiersystem $2 \cdot 3^4$ beinhaltet, die Ziffer 2 steht somit als Anfangsziffer fest. Die weitere Ziffernentwicklung hängt jetzt nur von der Differenz

$$187 - 162 = 25$$

ab. Diese Zahl ist kleiner als

$$27 = 3^3,$$

was bedeutet, dass die dritte Dreierpotenz „gar nicht“ und das heißt hier mit der Ziffer 0 vorkommt. Wir arbeiten dann mit 25 und mit der nächstkleineren Dreierpotenz weiter, also mit

$$9 = 3^2.$$

Diese hat wieder zweimal Platz in 25, die Differenz ist

$$25 - 18 = 7.$$

Die

$$3 = 3^1$$

passt wieder zweimal rein, übrig bleibt 1. Im Dreiersystem lautet also die Ziffernentwicklung

$$20221\,.$$

Diese Ziffernfolge kann man sukzessive notieren (Nullen nicht vergessen) oder aber in der Rechnung stets deutlich machen, auf welche Potenz sich der jeweilige Rechenschritt bezieht und dann zum Schluss daraus die Ziffernfolge ablesen.

Abbildungsverzeichnis