Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2015/2016**

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Arbeitsblatt 28

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 28.1. Betrachte die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

und die drei Zerlegungen

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Welche ist (sind) die kanonische additive Zerlegung im Sinne von Satz 28.1 (und bezüglich welcher Basis)?

Übungsaufgaben

Aufgabe 28.2. Es sei

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-1\,n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass D mit jeder anderen $n \times n$-Matrix M genau dann kommutiert, wenn alle Diagonaleinträge übereinstimmen.

Aufgabe 28.3. Beschreibe die direkte Summenzerlegung der p_i bezüglich der Haupträume aus dem Beweis zu Satz 28.1.

Aufgabe 28.4. Eine lineare Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

werde bezüglich der Standardbasis durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

beschrieben. Finde eine Basis, bezüglich der φ durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

beschrieben wird.

Aufgabe 28.5. Eine lineare Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

werde bezüglich der Standardbasis durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 7 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

beschrieben. Finde eine Basis, bezüglich der φ durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

beschrieben wird.

Aufgabe 28.6.*

Bestimme zur reellen Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

die jordansche Normalform. (Es muss keine Basis angegeben werden, bezüglich der jordansche Normalform vorliegt.)

Aufgabe 28.7.*

Es sei M eine nilpotente $n \times n$-Jordanmatrix. Zeige, dass die Kerne $\operatorname{kern} M^i$ eine Fahne in K^n bilden.

Aufgabe 28.8. Es sei M eine $n \times n$-Jordanmatrix zum Eigenwert λ. Bestimme das Minimalpolynom von M.

Aufgabe 28.9. Es sei M eine $n\times n$-Matrix mit den Jordanblöcken $J_1, \ldots, J_k$, wobei die Diagonaleinträge konstant gleich λ seien. Bestimme das Minimalpolynom von M.

Aufgabe 28.10.*

Es sei M eine Matrix in jordanscher Normalform, wobei nur ein Eigenwert auftrete. Zeige, dass die Anzahl der Jordanblöcke in M gleich der Dimension des Eigenraumes ist.

Aufgabe 28.11. Zeige, dass das Produkt von zwei Matrizen in jordanscher Normalform nicht in jordanscher Normalform sein muss.

Aufgabe 28.12. Es sei M eine $n\times n$-Matrix in jordanscher Normalform und es sei D die zugehörige Diagonalmatrix. Zeige, dass die kanonische additive Zerlegung im Sinne von Satz 28.1 gleich

$$M = D + (M - D)$$

ist.

Aufgabe 28.13. Zeige, dass es eine Familie von (bis zu) 2^{n-1} verschiedenen $n \times n$-Matrizen mit der Eigenschaft gibt, dass jeder nilpotente Endomorphismus auf einem n-dimensionalen Vektorraum V durch eine der Matrizen beschrieben werden kann.

Aufgabe 28.14. Zeige, dass sich jeder nilpotente Endomorphismus auf einem vierdimensionalen Raum auf genau eine der folgenden Gestalten bringen lässt.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 28.15.*

Es sei

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

mit $\lambda \in K$. Zeige durch Induktion, dass

$$M^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$$

ist.

Man sagt, dass ein Körper K *positive Charakteristik* besitzt, wenn für eine positive natürliche Zahl $p \in \mathbb{N}_+$ die Gleichung $p = 0$ gilt. Die Körper $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ haben diese Eigenschaft nicht, man sagt, dass sie Charakteristik 0 haben. Endliche Körper haben positive Charakteristik, und zwar ist die Charakteristik immer eine Primzahl.

Aufgabe 28.16. Es sei K ein Körper mit positiver Charakteristik $p > 0$. Zeige, dass die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

die endliche Ordnung p besitzt.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 28.17. (3 Punkte)

Eine lineare Abbildung

$$\varphi \colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

werde bezüglich der Standardbasis durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

beschrieben. Finde eine Basis, bezüglich der φ durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

beschrieben wird.

Aufgabe 28.18. (4 Punkte)

Bestimme eine Basis, bezüglich der die durch

$$M = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

gegebene lineare Abbildung jordansche Normalform besitzt.

Aufgabe 28.19. (3 Punkte)

Es sei M eine Jordanmatrix zum Eigenwert λ. Zeige, dass der Eigenraum von M zum Eigenwert λ eindimensional ist und dass es keine weiteren Eigenvektoren gibt.

Aufgabe 28.20. (4 Punkte)

Es sei

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

ein Endomorphismus, der bezüglich einer geeigneten Basis durch eine $n \times n$-Jordanmatrix beschrieben wird. Zeige, dass es keine direkte Summenzerlegung

$$V = U \oplus W$$

in φ-invariante Untervektorräume $U, W \subset V$ gibt.

Aufgabe 28.21. (8 (4+2+2) Punkte)

Es seien $n \in \mathbb{N}_+$ und ein Körper K der Charakteristik 0 fixiert. Zu einer nilpotenten $n \times n$-Matrix M sei $\exp M$ durch

$$\exp M = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} M^k$$

definiert.

a) Zeige, dass für vertauschbare nilpotente Matrizen M, N die Gleichheit

$$\exp (M + N) = \exp M \circ \exp N$$

gilt.

b) Zeige, dass für eine nilpotente Matrix M die Matrix $\exp M$ invertierbar ist.

c) Zeige, dass für eine nilpotente Matrix M die Matrix $\exp M$ unipotent ist.