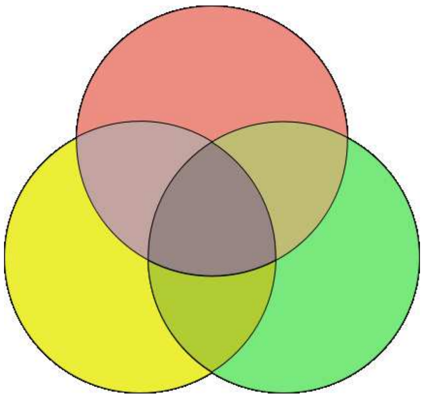
Prof. Dr. H. Brenner Osnabrück WS 2017/2018

# Lineare Algebra und analytische Geometrie I

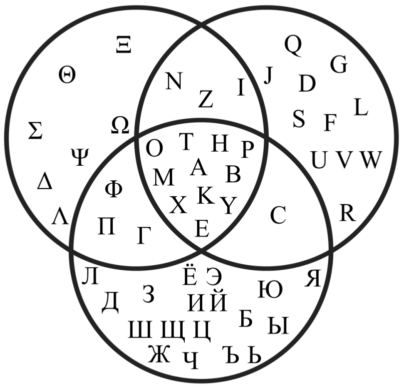
## Arbeitsblatt 1

### Die Pausenaufgabe

Aufgabe 1.1. Skizziere ein Mengendiagramm, das zu vier Mengen alle möglichen Schnittmengen darstellt.



Ein abstraktes und




ein konkretes Mengendiagramm.

### Übungsaufgaben

Aufgabe 1.2. Es sei $LA$ die Menge der Großbuchstaben des lateinischen Alphabets, $GA$ die Menge der Großbuchstaben des griechischen Alphabets und $RA$ die Menge der Großbuchstaben des russischen Alphabets. Bestimme die folgenden Mengen.

(1) $GA \setminus RA$.
(2) $(LA \cap GA) \cup (LA \cap RA)$.
(3) $RA \setminus (GA \cup RA)$.
(4) $RA \setminus (GA \cup LA)$.
(5) $(RA \setminus GA) \cap ((LA \cup GA) \setminus (GA \cap RA))$.

Aufgabe 1.3. Bestimme für die Mengen

$$M = \{a, b, c, d, e\},\ N = \{a, c, e\},\ P = \{b\},\ R = \{b, d, e, f\}$$

die Mengen

(1) $M \cap N$,
(2) $M \cap N \cap P \cap R$,
(3) $M \cup R$,

(4) $(N \cup P) \cap R$,
(5) $N \setminus R$,
(6) $(M \cup P) \setminus (R \setminus N)$,
(7) $((P \cup R) \cap N) \cap R$,
(8) $(R \setminus P) \cap (M \setminus N)$.

AUFGABE 1.4. Skizziere die folgenden Teilmengen im $\mathbb{R}^2$.

(1) $\{(x, y) | \, x = 5\}$,
(2) $\{(x, y) | \, x \geq 4 \text{ und } y = 3\}$,
(3) $\{(x, y) | \, y^2 \geq 2\}$,
(4) $\{(x, y) | \, |x| = 3 \text{ und } |y| \leq 2\}$,
(5) $\{(x, y) | \, 3x \geq y \text{ und } 5x \leq 2y\}$,
(6) $\{(x, y) | \, xy = 0\}$,
(7) $\{(x, y) | \, xy = 1\}$,
(8) $\{(x, y) | \, xy \geq 1 \text{ und } y \geq x^3\}$,
(9) $\{(x, y) | \, 0 = 0\}$,
(10) $\{(x, y) | \, 0 = 1\}$.

Welche geometrische Gestalt haben die Mengen, in deren Beschreibung nur eine (oder gar keine) Variable vorkommt?

AUFGABE 1.5.*

Es seien $A$, $B$ und $C$ Mengen. Beweise die Identität

$$A \setminus (B \cap C) \, = \, (A \setminus B) \cup (A \setminus C) \, .$$

AUFGABE 1.6. Es seien $A$, $B$ und $C$ drei Mengen. Man beweise die folgenden Identitäten.

(1) $A \cup \emptyset = A$,
(2) $A \cap \emptyset = \emptyset$,
(3) $A \cap B = B \cap A$,
(4) $A \cup B = B \cup A$,
(5) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$,
(6) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,
(7) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
(8) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
(9) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

AUFGABE 1.7. Es seien $M$ und $N$ disjunkte Mengen und $x \in M$. Zeige, dass auch $M \setminus \{x\}$ und $N \cup \{x\}$ disjunkt sind und dass

$$M \cup N \, = \, (M \setminus \{x\}) \cup (N \cup \{x\})$$

gilt.

AUFGABE 1.8. (1) Skizziere die Menge $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \, 4x - 7y = 3\}$ und die Menge $N = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \, 3x + 2y = 5\}$.
(2) Bestimme den Durchschnitt $M \cap N$ zeichnerisch und rechnerisch.

Aufgabe 1.9. Wir betrachten die beiden Mengen

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle|\, -3x+2y-6z=0 \right\}$$

und

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle|\, 7x-5y-4z=0 \right\}.$$

Finde eine Beschreibung für den Durchschnitt

$$G := E \cap F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle|\, -3x+2y-6z=0 \text{ und } 7x-5y-4z=0 \right\}$$

wie in Beispiel 1.2.

Aufgabe 1.10.

(1) Zeige, dass die Menge

$$\left\{ (x,y) \in \mathbb{Z}^2 \,|\, 3x+5y=6 \right\}$$

nicht leer ist.

(2) Zeige, dass die Menge

$$\left\{ (x,y) \in \mathbb{Z}^2 \,|\, 6x+9y=5 \right\}$$

leer ist.

Aufgabe 1.11. Beschreibe für je zwei (einschließlich dem Fall, dass das Produkt mit sich selbst genommen wird) der folgenden geometrischen Mengen ihre Produktmenge.

(1) Eine Kreislinie $K$.
(2) Ein Geradenstück $I$.
(3) Eine Gerade $G$.
(4) Eine Parabel $P$.

Welche Produktmengen lassen sich als eine Teilmenge im Raum realisieren, welche nicht?

Aufgabe 1.12. Es seien $M$ und $N$ Mengen und seien $A \subseteq M$ und $B \subseteq N$ Teilmengen. Zeige die Gleichheit

$$(A \times N) \cap (M \times B) = A \times B.$$

Aufgabe 1.13. Es seien $A$ und $B$ disjunkte Mengen und $C$ eine weitere Menge. Zeige die Gleichheit

$$C \times (A \uplus B) = (C \times A) \uplus (C \times B).$$

Aufgabe 1.14. Es seien $A$ und $B$ disjunkte Mengen. Zeige die Gleichheit

$$(A \uplus B) \times (A \uplus B) = (A \times A) \uplus (A \times B) \uplus (B \times A) \uplus (B \times B).$$

## Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 1.15. (2 Punkte)

Skizziere die folgenden Teilmengen im $\mathbb{R}^2$.

(1) $\{(x,y) \mid |2x| = 5 \text{ und } |y| \geq 3\}$,
(2) $\{(x,y) \mid -3x \geq 2y \text{ und } 4x \leq -5y\}$,
(3) $\{(x,y) \mid y^2 - y + 1 \leq 4\}$,
(4) $\{(x,y) \mid xy = 2 \text{ oder } x^2 + y^2 = 1\}$.

Aufgabe 1.16. (2 (1+1) Punkte)

(1) Skizziere die Menge $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -5x + 2y = 6\}$ und die Menge $N = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 7x - 5y = 4\}$.
(2) Bestimme den Durchschnitt $M \cap N$ zeichnerisch und rechnerisch.

Aufgabe 1.17. (1 Punkt)

Gilt für die Vereinigung von Mengen die „Abziehregel“, d.h. kann man aus $A \cup C = B \cup C$ auf $A = B$ schließen?

Aufgabe 1.18. (5 Punkte)

Beweise die mengentheoretischen Fassungen einiger aristotelischer Syllogismen. Dabei bezeichnen $A, B, C$ Mengen.

(1) Modus Barbara: Aus $B \subseteq A$ und $C \subseteq B$ folgt $C \subseteq A$.
(2) Modus Celarent: Aus $B \cap A = \emptyset$ und $C \subseteq B$ folgt $C \cap A = \emptyset$.
(3) Modus Darii: Aus $B \subseteq A$ und $C \cap B \neq \emptyset$ folgt $C \cap A \neq \emptyset$.
(4) Modus Ferio: Aus $B \cap A = \emptyset$ und $C \cap B \neq \emptyset$ folgt $C \not\subseteq A$.
(5) Modus Baroco: Aus $B \subseteq A$ und $B \not\subseteq C$ folgt $A \not\subseteq C$.

Aufgabe 1.19. (2 Punkte)

Es seien $M$ und $N$ Mengen und seien $A_1, A_2 \subseteq M$ und $B_1, B_2 \subseteq N$ Teilmengen. Zeige die Gleichheit

$$(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2) = (A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2).$$

Aufgabe 1.20. (4 Punkte)

Es seien $A$ und $B$ zwei Mengen. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(1) $A \subseteq B$,
(2) $A \cap B = A$,
(3) $A \cup B = B$,
(4) $A \setminus B = \emptyset$,
(5) Es gibt eine Menge $C$ mit $B = A \cup C$,
(6) Es gibt eine Menge $D$ mit $A = B \cap D$.

# Abbildungsverzeichnis