Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2018**

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Vorlesung 55

Beispiel 55.1. Sei K ein Körper. Wir betrachten zu zwei endlichen Indexmengen I und J die Abbildungsräume $\text{Abb}\,(I,K)$ und $\text{Abb}\,(J,K)$, die beide K-Vektorräume sind. In welcher Beziehung stehen sie zur Abbildungsmenge

$$\text{Abb}\,(I \times J, K)\,?$$

Zu Abbildungen $f \in \text{Abb}\,(I,K)$ und $g \in \text{Abb}\,(J,K)$ kann man einfach eine Abbildung auf $I \times J$ erhalten, die man $f \otimes g$ nennt (sprich f tensor g) und die durch

$$(f \otimes g)(i,j) \,:=\, f(i) \cdot g(j)$$

festgelegt ist. Für die Standardvektoren gilt dabei

$$e_i \otimes e_j \,=\, e_{(i,j)}.$$

Jedes Element $h \in \text{Abb}\,(I \times J, K)$ kann man insbesondere als eine Linearkombination zu Elementen $f \otimes g$ schreiben, aber nicht jedes h hat diese einfache Gestalt. Es gilt

$$(a_1 f_1 + a_2 f_2) \otimes g \,=\, a_1(f_1 \otimes g) + a_2(f_2 \otimes g)$$

und entsprechend in der zweiten Komponente.

In dieser Vorlesung führen wir eine wichtige Konstruktion für Vektorräume ein, das sogenannte *Tensorprodukt*, das im soeben betrachteten Spezialfall den Abbildungsraum auf der Produktmenge ergibt; es ist also

$$\text{Abb}\,(I,K) \otimes_K \text{Abb}\,(I,K) \,\cong\, \text{Abb}\,(I \times J, K)\,.$$

Die Eigenschaften des konstruierten Objektes sind dabei wichtiger als die Konstruktion selbst. Die Konstruktion ist sehr abstrakt und beruht auf der Konstruktion von Restklassenräumen und folgender Konstruktion.

Zu einer beliebigen Symbolmenge S und einem Körper K kann man den Vektorraum $K^{(S)}$ konstruieren, der aus allen Abbildungen

$$S \longrightarrow K$$

besteht, die überall bis an endlich vielen Stellen den Wert 0 besitzen. Wenn man mit e_s diejenige Abbildung bezeichnet, die an der Stelle s den Wert 1 und sonst überall den Wert 0 besitzt, so besteht $K^{(S)}$ aus allen endlichen Summen

$$\sum_{s \in S} a_s e_s\,.$$

Die e_s bilden also eine Basis dieses Raumes.

Diese Konstruktion ist wiederum ein Spezialfall der direkten Summe von (im Allgemeinen) unendlich vielen K-Vektorräumen, und zwar wird hier die direkte Summe des Vektorraums K mit sich selbst so oft genommen, wie es S vorgibt.

Das Tensorprodukt von Vektorräumen

Es sei K ein Körper und $V_1, \ldots, V_n$ seien K-Vektorräume. Wir erinnern daran, dass eine multilineare Abbildung in einen weiteren K-Vektorraum W eine Abbildung

$$\psi\colon V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow W$$

ist, die in jeder Komponente K-linear ist, wenn man alle anderen Komponenten festlässt. Wir wollen einen Vektorraum U konstruieren zusammen mit einer multilinearen Abbildung

$$\varphi\colon V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow U$$

derart, dass es zu jeder multilinearen Abbildung ψ wie oben eine lineare Abbildung

$$L\colon U \longrightarrow W$$

mit $\psi = L \circ \varphi$ gibt. Dadurch werden multilineare Abbildungen auf lineare Abbildungen auf einem neuen Vektorraum zurückgeführt.

Definition 55.2. Es sei K ein Körper und $V_1, \ldots, V_n$ seien K-Vektorräume. Es sei F der von sämtlichen Symbolen $(v_1, \ldots, v_n)$ (mit $v_i \in V_i$) erzeugte K-Vektorraum (wir schreiben die Basiselemente als $e_{(v_1,\ldots,v_n)}$). Es sei $U \subseteq F$ der von allen Elementen der Form

(1) $re_{(v_1,\ldots,v_{i-1},v_i,v_{i+1},\ldots,v_n)} - e_{(v_1,\ldots,v_{i-1},rv_i,v_{i+1},\ldots,v_n)}$,
(2) $e_{(v_1,\ldots,v_{i-1},u+w,v_{i+1},\ldots,v_n)} - e_{(v_1,\ldots,v_{i-1},u,v_{i+1},\ldots,v_n)} - e_{(v_1,\ldots,v_{i-1},w,v_{i+1},\ldots,v_n)}$,

erzeugte K-Untervektorraum von F. Dann nennt man den Restklassenraum F/U das *Tensorprodukt* der V_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Es wird mit

$$V_1 \otimes_K V_2 \otimes_K \cdots \otimes_K V_n$$

bezeichnet.

Häufig schreibt man einfach $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$. Die Bilder von $e_{(v_1,\ldots,v_n)}$ in $V_1 \otimes_K V_2 \otimes_K \cdots \otimes_K V_n$ bezeichnet man mit

$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \, .$$

Dies ist also die Äquivalenzklasse von $e_{(v_1,\ldots,v_n)}$ zu der durch den Untervektorraum U gegebenen Äquivalenzrelation. Jedes Element aus $V_1 \otimes_K \cdots \otimes_K V_n$ besitzt eine (nicht eindeutige) Darstellung als

$$a_1 v_{1,1} \otimes \cdots \otimes v_{1,n} + \cdots + a_m v_{m,1} \otimes \cdots \otimes v_{m,n}$$

(mit $a_i \in K$ und $v_{i,j} \in V_j$). Insbesondere bilden die *zerlegbaren Tensoren* $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$ ein K-Erzeugendensystem des Tensorprodukts. Die definierenden

Erzeuger des Untervektorraums werden zu Gleichungen im Tensorprodukt, sie drücken die Multilinearität aus. Insbesondere gilt

$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_{i-1} \otimes r v_i \otimes v_{i+1} \otimes \cdots \otimes v_n \;=\; v_1 \otimes \cdots \otimes v_{j-1} \otimes r v_j \otimes v_{j+1} \otimes \cdots \otimes v_n$$

für beliebige i, j und

$$\begin{aligned} v_1 \otimes \cdots \otimes v_{i-1} \otimes (u+w) \otimes v_{i+1} \otimes \cdots \otimes v_n = & v_1 \otimes \cdots \\ & \otimes v_{i-1} \otimes u \otimes v_{i+1} \otimes \cdots \otimes v_n + v_1 \otimes \cdots \otimes v_{i-1} \otimes w \otimes v_{i+1} \otimes \cdots \otimes v_n . \end{aligned}$$

Beispiel 55.3. Zu $K = \mathbb{R}$ und $V_1 = \mathbb{R}^2$ und $V_1 = \mathbb{R}^3$ sind die Elemente aus F (im Sinne der Definition 55.2) Linearkombinationen wie

$$4e_{\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}\right)} - 5e_{\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right)} + 6e_{\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}\right)} .$$

Mit den Standardvektoren des $\mathbb{R}^2$ bzw. des $\mathbb{R}^3$ ist dies

$$4e_{(3e_1+2e_2, 6e_1-e_2+5e_3)} - 5e_{e_1+7e_2, 3e_1+3e_2+4e_3} + 6e_{(2e_1+4e_2, -4e_1+7e_2+8e_3)} .$$

Da die Tupel untereinander verschieden sind, kann man diesen Ausdruck in F nicht vereinfachen. Das Bild dieses Elementes in $F/U = \mathbb{R}^2 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3$ ist

$$\begin{aligned} 4(3e_1 + 2e_2) \otimes (6e_1 - e_2 + 5e_3) - 5(e_1 + 7e_2) \otimes (3e_1 + 3e_2 + 4e_3) \\ + 6(2e_1 + 4e_2) \otimes (-4e_1 + 7e_2 + 8e_3). \end{aligned}$$

Diesen Ausdruck kann man wesentlich vereinfachen.

Wichtiger als die Konstruktion des Tensorprodukts ist die folgende *universelle Eigenschaft.*

Lemma 55.4. *Es sei K ein Körper und seien $V_1, \ldots, V_n$ Vektorräume über K.*

(1) *Die Abbildung*

$$\pi \colon V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow V_1 \otimes_K \cdots \otimes_K V_n,\ (v_1, \ldots, v_n) \longmapsto v_1 \otimes \cdots \otimes v_n,$$

ist K-multilinear.

(2) *Es sei W ein weiterer K-Vektorraum und*

$$\psi \colon V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow W$$

eine multilineare Abbildung. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte K-lineare Abbildung

$$\bar{\psi} \colon V_1 \otimes_K \cdots \otimes_K V_n \longrightarrow W$$

mit $\psi = \bar{\psi} \circ \pi$.

Beweis. (1) folgt unmittelbar aus der Definition des Tensorprodukts. (2). Da die $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$ ein K-Erzeugendensystem von $V_1 \otimes_K \cdots \otimes_K V_n$ sind und

$$\bar{\psi}(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = \psi(v_1, \ldots, v_n)$$

gelten muss, kann es maximal eine solche lineare Abbildung geben. Zur Existenz betrachten wir den K-Vektorraum F aus der Konstruktion des Tensorproduktes. Die $e_{(v_1,\ldots,v_n)}$ bilden eine Basis von F, daher legt die Vorschrift

$$\tilde{\psi}\left(e_{(v_1,\ldots,v_n)}\right) := \psi(v_1, \ldots, v_n)$$

eine lineare Abbildung

$$\tilde{\psi} \colon F \longrightarrow W$$

fest. Wegen der Multilinearität von ψ wird der Untervektorraum U auf 0 abgebildet. Daher induziert diese Abbildung nach dem Faktorisierungssatz eine K-lineare Abbildung

$$\overline{\psi} \colon F/U \cong V_1 \otimes_K \cdots \otimes_K V_n \longrightarrow W.$$

□

Korollar 55.5. *Es sei K ein Körper und seien $V_1, \ldots, V_n$ und W Vektorräume über K. Dann gibt es eine natürliche Isomorphie*

$$\mathrm{Hom}_K\left(V_1 \otimes \cdots \otimes V_n, W\right) \longrightarrow \mathrm{Mult}\left(V_1, \ldots, V_n, W\right), \, \varphi \longmapsto \varphi \circ \pi.$$

Beweis. Aus Lemma 55.4 (2) folgt unmittelbar, dass eine Bijektion vorliegt. □

Korollar 55.6. *Es sei K ein Körper und seien $V_1, \ldots, V_n$ Vektorräume über K. Dann gibt es eine natürliche Isomorphie*

$$\left(V_1 \otimes \cdots \otimes V_n\right)^* \longrightarrow \mathrm{Mult}\left(V_1, \ldots, V_n, K\right), \, \varphi \longmapsto \varphi \circ \pi.$$

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus Korollar 55.5, angewendet auf $W = K$. □

Bemerkung 55.7. Bei $V = V_1 = V_2$ und $W = K$ sind die multilinearen Abbildungen von $V_1 \times V_2$ nach W einfach die Bilinearformen auf V. Korollar 55.6 besagt in dieser Situation, dass der Dualraum zu $V \otimes V$ alle Bilinearformen repräsentiert. Bei $V = K^n$ entspricht das Standardskalarprodukt (diese Bezeichnung ist nur bei $K = \mathbb{R}$ korrekt) der Linearform $\varphi \colon V \otimes V \to K$, die durch

$$\varphi(e_i \otimes e_j) = \delta_{ij}$$

festgelegt ist.

Das Tensorprodukt ist durch diese universelle Eigenschaft bis auf (eindeutige) Isomorphie festgelegt, damit ist folgendes gemeint.

Satz 55.8. *Es sei K ein Körper und seien $V_1, \ldots, V_n$ Vektorräume über K. Es sei Z ein K-Vektorraum zusammen mit einer multilinearen Abbildung*

$$\rho\colon V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow Z,$$

die zusammen die universelle Eigenschaft aus Lemma 55.4 (2) erfüllen. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Isomorphismus

$$V_1 \otimes \cdots \otimes V_n \longrightarrow Z.$$

Beweis. Da $V_1 \times \cdots \times V_n \to Z$ multilinear ist, gibt es aufgrund der universellen Eigenschaft des Tensorproduktes eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung

$$V_1 \otimes \cdots \otimes V_n \longrightarrow Z.$$

Wegen der vorausgesetzten universellen Eigenschaft von Z und der Multilinearität von $\pi\colon V_1 \times \cdots \times V_n \to V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ gibt es auch eine lineare Abbildung

$$Z \longrightarrow V_1 \otimes \cdots \otimes V_n.$$

Wegen der universellen Eigenschaft müssen diese invers zueinander sein. □

Daher ist diese universelle Eigenschaft wichtiger als die oben durchgeführte Konstruktion des Tensorprodukts.

Lemma 55.9. *Es sei K ein Körper und seien $V_1, \ldots, V_n$ Vektorräume über K. Dann gelten die folgenden Rechengesetze.*

(1) *Für Vektoren $v_j \in V_j$ und $c \in K$ ist*

$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_i \otimes cv_i \otimes v_{i+1} \otimes \cdots \otimes v_n \,=\, c\left(v_1 \otimes \cdots \otimes v_i \otimes v_i \otimes v_{i+1} \otimes \cdots \otimes v_n\right).$$

(2) *Für Vektoren $v_j \in V_j$ ist*

$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_i \otimes 0 \otimes v_{i+1} \otimes \cdots \otimes v_n \,=\, 0$$

(3) *Es seien $v_{1j}, \ldots, v_{m_j j} \in V_j$ und $a_{ij} \in K$. Dann ist*

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{i=1}^{m_1} a_{i1} v_{i1}\right) \otimes \cdots \otimes \left(\sum_{i=1}^{m_n} a_{in} v_{in}\right) \\ = &\sum_{(i_1,\ldots,i_n) \in \{1,\ldots,m_1\} \times \cdots \times \{1,\ldots,m_n\}} a_{i_1} \cdots a_{i_n} v_{i_1 1} \otimes \cdots \otimes v_{i_n n}. \end{aligned}$$

Beweis. (1) ergibt sich unmittelbar aus der Konstruktion. (2) folgt aus (1). (3) folgt aus dem Distributivgesetz für multilineare Abbildungen. □

Beispiel 55.10. Im $\mathbb{R}^2 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^2$ gilt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} &= (5e_1 - 7e_2) \otimes (-3e_1 + 4e_2) \\ &= -15e_1 \otimes e_1 + 20e_1 \otimes e_2 + 21e_2 \otimes e_1 - 28e_2 \otimes e_2. \end{aligned}$$

Lemma 55.11. *Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Dann gelten folgende Eigenschaften.*

(1) *Es ist*

$$V \otimes_K 0 \,=\, 0.$$

(2) *Es ist*

$$V \otimes_K K \,=\, V,$$

wobei $v \otimes s$ *dem Vektor* sv *entspricht.*

Beweis. (1) folgt aus Lemma 55.9 (2).
(2). Die Skalarmultiplikation

$$V \times K \longrightarrow V,\ (v,s) \longmapsto sv,$$

ist multilinear, daher gibt es nach Lemma 55.4 eine lineare Abbildung

$$V \otimes K \longrightarrow V,\ v \otimes s \longmapsto sv.$$

Diese ist surjektiv, da $v \otimes 1$ auf v abgebildet wird. Ein Element im Tensorprodukt hat die Gestalt

$$\sum_{i=1}^n a_i(v_i \otimes s_i) \,=\, \sum_{i=1}^n (a_is_i)(v_i \otimes 1) \,=\, \left(\sum_{i=1}^n a_is_iv_i \right) \otimes 1.$$

Wenn dieses auf 0 abgebildet wird, so ist also

$$\sum_{i=1}^n a_is_iv_i \,=\, 0$$

und damit ist das Tensorelement auch 0, die Abbildung ist also auch injektiv. □

Satz 55.12. *Es sei* K *ein Körper und seien* $V_1,\ldots,V_n$ *Vektorräume über* K. *Es seien* $J_1,\ldots,J_n$ *Indexmengen und*

$$v_{ij}, j \in J_i\,,$$

Vektoren in V_i. *Dann gelten folgende Aussagen.*

(1) *Wenn die Familien jeweils ein Erzeugendensystem von* V_i *bilden, so ist die Familie*

$$v_{1j_1} \otimes \cdots \otimes v_{nj_n} \text{ mit } (j_1,\ldots,j_n) \in J_1 \times \cdots \times J_n$$

ein Erzeugendensystem von $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$.

(2) *Wenn die Familien jeweils linear unabhängig in* V_i *sind, so ist die Familie*

$$v_{1j_1} \otimes \cdots \otimes v_{nj_n} \text{ mit } (j_1,\ldots,j_n) \in J_1 \times \cdots \times J_n$$

linear unabhängig in $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$.

(3) *Wenn die Familien jeweils eine Basis von* V_i *bilden, so ist die Familie*

$$v_{1j_1} \otimes \cdots \otimes v_{nj_n} \text{ mit } (j_1,\ldots,j_n) \in J_1 \times \cdots \times J_n$$

eine Basis von $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$.

Beweis. (1). Nach Konstruktion bilden die zerlegbaren Tensoren $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$ ein Erzeugendensystem des Tensorproduktes. Somit muss man nur von diesen nachweisen, dass sie als Linearkombination der gegebenen Familie darstellbar sind. Dies ergibt sich aber aus Lemma 55.9 (3).

(2). Zum Beweis können wir uns auf endliche Familien beschränken. Wir wollen Lemma 14.7 anwenden. Sei $(r_1, \ldots, r_n)$ fixiert. Wegen der linearen Unabhängigkeit der Familien v_{ij} in V_i gibt es Linearformen

$$\varphi_i \colon V_i \longrightarrow K$$

mit $\varphi_i(v_{ir_i}) \neq 0$ und $\varphi_i(v_{ij}) = 0$ für $j \neq r_i$. Somit ist

$$V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow K,\ (w_1, \ldots, w_n) \longmapsto \varphi_1(w_1) \cdots \varphi_n(w_n),$$

nach Aufgabe 16.37 eine multilineare Abbildung. Die gemäß Korollar 55.6 zugehörige lineare Abbildung

$$V_1 \otimes \cdots \otimes V_n \longrightarrow K$$

schickt $v_{1r_1} \otimes \cdots \otimes v_{nr_n}$ auf

$$\varphi_1(v_{1r_1}) \cdots \varphi_n(v_{nr_n}) \neq 0$$

und alle anderen Elemente $v_{1j_1} \cdots v_{nj_n}$ der Familie auf 0.

(3) folgt aus (1) und (2). □

Korollar 55.13. *Es sei K ein Körper und seien $V_1, \ldots, V_n$ endlichdimensionale Vektorräume über K. Dann ist die Dimension des Tensorproduktes gleich*

$$\dim(V_1 \otimes \cdots \otimes V_n) = \dim(V_1) \cdots \dim(V_n).$$

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus Satz 55.12 (3). □

Bemerkung 55.14. Wir verbinden das motivierende Beispiel 55.1 mit der allgemeinen Konstruktion des Tensorproduktes. Die Abbildung (mit der direkten Bedeutung von $f \otimes g$ aus dem Beispiel)

$$\operatorname{Abb}(I, K) \times \operatorname{Abb}(J, K) \longrightarrow \operatorname{Abb}(I \times J, K),\ (f, g) \longmapsto f \otimes g,$$

ist nach Aufgabe 16.10 multilinear. Nach Lemma 55.4 (2) gibt es daher eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung

$$\operatorname{Abb}(I, K) \otimes_K \operatorname{Abb}(J, K) \longrightarrow \operatorname{Abb}(I \times J, K),$$

wobei sich die Tensorprodukte entsprechen. Die Surjektivität ergibt sich daraus, dass die Basiselemente $e_{(i,j)}$ im Bild liegen. Die Injektivität ergibt sich aus Korollar 55.13.