Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2019/2020**

Mathematik für Anwender I

Arbeitsblatt 24

Übungsaufgaben

Aufgabe 24.1.*

Bestimme die Übergangsmatrizen $M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{u}}$ und $M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{v}}$ für die Standardbasis $\mathfrak{u}$ und die durch die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegebene Basis $\mathfrak{v}$ im $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe 24.2. Bestimme die Übergangsmatrizen $M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{u}}$ und $M_{\mathfrak{u}}^{\mathfrak{v}}$ für die Standardbasis $\mathfrak{u}$ und die durch die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix} \text{ und } v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$$

gegebene Basis $\mathfrak{v}$ im $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 24.3.*

Es sei $\mathfrak{v} = v_1, v_2, v_3$ eine Basis eines dreidimensionalen K-Vektorraumes V.

a) Zeige, dass $\mathfrak{w} = v_1, v_1 + v_2, v_2 + v_3$ ebenfalls eine Basis von V ist.

b) Bestimme die Übergangsmatrix $M_{\mathfrak{v}}^{\mathfrak{w}}$.

c) Bestimme die Übergangsmatrix $M_{\mathfrak{w}}^{\mathfrak{v}}$.

d) Berechne die Koordinaten bezüglich der Basis $\mathfrak{v}$ für denjenigen Vektor, der bezüglich der Basis $\mathfrak{w}$ die Koordinaten $\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -9 \end{pmatrix}$ besitzt.

e) Berechne die Koordinaten bezüglich der Basis $\mathfrak{w}$ für denjenigen Vektor, der bezüglich der Basis $\mathfrak{v}$ die Koordinaten $\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}$ besitzt.

AUFGABE 24.4. Bestimme die Übergangsmatrizen $M^{\mathfrak{u}}_{\mathfrak{v}}$ und $M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{u}}$ für die Standardbasis $\mathfrak{u}$ und die durch die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3+5\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} \end{pmatrix} \text{ und } v_2 = \begin{pmatrix} 2+3\mathrm{i} \\ 4+\mathrm{i} \end{pmatrix},$$

gegebene Basis $\mathfrak{v}$ im $\mathbb{C}^2$.

AUFGABE 24.5. Wir betrachten die Vektorenfamilien

$$\mathfrak{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \mathfrak{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^2$.

a) Zeige, dass sowohl $\mathfrak{v}$ als auch $\mathfrak{u}$ eine Basis des $\mathbb{R}^2$ ist.

b) Es sei $P \in \mathbb{R}^2$ derjenige Punkt, der bezüglich der Basis $\mathfrak{v}$ die Koordinaten $(-2, 5)$ besitze. Welche Koordinaten besitzt der Punkt bezüglich der Basis $\mathfrak{u}$?

c) Bestimme die Übergangsmatrix, die den Basiswechsel von $\mathfrak{v}$ nach $\mathfrak{u}$ beschreibt.

AUFGABE 24.6. Wir betrachten die lineare Abbildung

$$\varphi\colon K^3 \longrightarrow K^2, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Es sei $U \subseteq K^3$ der durch die lineare Gleichung $2x + 3y + 4z = 0$ definierte Untervektorraum von K^3, und ψ sei die Einschränkung von φ auf U. Zu U gehören Vektoren der Form

$$u = (0, 1, a),\ v = (1, 0, b) \text{ und } w = (1, c, 0).$$

Berechne a, b, c und die Übergangsmatrizen zwischen den Basen

$$\mathfrak{b}_1 = v, w,\ \mathfrak{b}_2 = u, w \text{ und } \mathfrak{b}_3 = u, v$$

von U sowie die beschreibenden Matrizen für ψ bezüglich dieser drei Basen (und der Standardbasis auf K^2).

AUFGABE 24.7. Es sei K ein Körper, V und W seien K-Vektorräume und

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

sei eine K-lineare Abbildung. Zeige, dass für beliebige Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ und Koeffizienten $s_1, \ldots, s_n \in K$ die Beziehung

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^n s_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n s_i \varphi(v_i)$$

gilt.

AUFGABE 24.8. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Zeige, dass zu $a \in K$ die Abbildung

$$V \longrightarrow V,\ v \longmapsto av,$$

linear ist.[1]

AUFGABE 24.9. Interpretiere die folgenden physikalischen Gesetze als lineare Abbildungen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Was sind die messbaren Größen, was ist der Proportionalitätsfaktor und wodurch ist dieser festgelegt?

(1) Die zurückgelegte Strecke ist Geschwindigkeit mal Zeit.
(2) Masse ist Volumen mal Dichte.
(3) Energie ist Masse mal Brennwert.
(4) Kraft ist Masse mal Beschleunigung.
(5) Energie ist Kraft mal Weg.
(6) Energie ist Leistung mal Zeit.
(7) Spannung ist Widerstand mal Stromstärke.
(8) Ladung ist Stromstärke mal Zeit.

AUFGABE 24.10. Um die Erde wird entlang des Äquators ein Band gelegt. Das Band ist jedoch einen Meter zu lang, so dass es ringsherum gleichmäßig angehoben wird, um straff zu werden. Welche der folgenden Lebewesen können drunter durch laufen/schwimmen/fliegen/tanzen?

(1) Eine Amöbe.
(2) Eine Ameise.
(3) Eine Meise.
(4) Eine Flunder.
(5) Eine Boa constrictor.
(6) Ein Meerschweinchen.
(7) Eine Boa constrictor, die ein Meerschweinchen verschluckt hat.
(8) Ein sehr guter Limbotänzer.

AUFGABE 24.11. Eine lineare Funktion

$$\varphi\colon\ \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$$

hat an der Stelle $\frac{11}{13}$ den Wert $\frac{7}{17}$. Welchen Wert hat sie an der Stelle $\frac{3}{19}$?

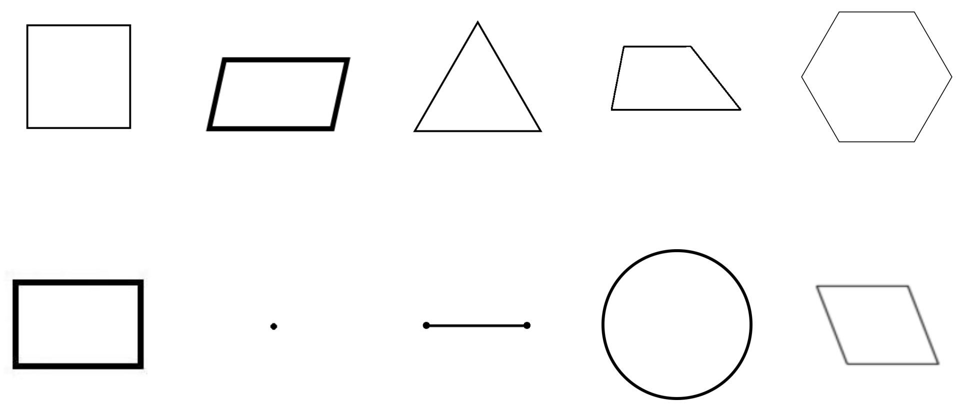
AUFGABE 24.12. Welche der folgenden Funktionen $f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind linear?

(1) Die reelle Exponentialfunktion.
(2) Die Nullfunktion.
(3) Die konstante Funktion mit dem Wert 7.
(4) Die Quadratfunktion $x \mapsto x^2$.

[1] Eine solche Abbildung heißt *Homothetie* oder *Streckung* mit dem Streckungsfaktor a.

(5) Die Funktion, die jede reelle Zahl halbiert.
(6) Die Funktion, die von jeder reellen Zahl 1 abzieht.

Aufgabe 24.13. Welche der folgenden Figuren können als Bild eines Quadrates unter einer linearen Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ auftreten?



Aufgabe 24.14. Es sei eine lineare Abbildung $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$\varphi \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 5 \text{ und } \varphi \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 4$$

gegeben. Berechne

$$\varphi \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 24.15. Lucy Sonnenschein arbeitet als Fahrradkurier und bekommt einen Stundenlohn von 12 €. Am Obststand kosten Himbeeren 3 €, Erdbeeren kosten 2 € und Äpfel 0,4 € (jeweils pro Hundert Gramm). Beschreibe die Abbildung, die einem Einkauf die Zeit zuordnet, die Lucy für den Einkauf arbeiten muss, als eine Hintereinanderschaltung von linearen Abbildungen.

Aufgabe 24.16.*

Es sei K ein Körper und seien U, V, W Vektorräume über K. Es seien

$$\varphi\colon U \to V \text{ und } \psi\colon V \to W$$

lineare Abbildungen. Zeige, dass dann auch die Verknüpfung

$$\psi \circ \varphi\colon U \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung ist.

Aufgabe 24.17. Es sei K ein Körper und es seien V und W zwei K-Vektorräume. Es sei

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

eine bijektive lineare Abbildung. Zeige, dass dann auch die Umkehrabbildung

$$\varphi^{-1}\colon W \longrightarrow V$$

linear ist.

Aufgabe 24.18. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Es sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Familie von Vektoren in V. Zeige, dass für die Abbildung

$$\varphi\colon K^n \longrightarrow V,\ (s_1, \ldots, s_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} s_i v_i,$$

die folgenden Beziehungen gelten.

(1) φ ist injektiv genau dann, wenn $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig sind.
(2) φ ist surjektiv genau dann, wenn $v_1, \ldots, v_n$ ein Erzeugendensystem von V ist.
(3) φ ist bijektiv genau dann, wenn $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis ist.

Aufgabe 24.19. Zeige, dass die Abbildungen

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R},\ z \longmapsto \operatorname{Re}(z),$$

und

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R},\ z \longmapsto \operatorname{Im}(z),$$

$\mathbb{R}$-lineare Abbildungen sind. Zeige ferner, dass die komplexe Konjugation $\mathbb{R}$-linear, aber nicht $\mathbb{C}$-linear ist. Ist der Betrag

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R},\ z \longmapsto |z|,$$

$\mathbb{R}$-linear?

Aufgabe 24.20. Betrachte die Abbildung

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

die eine rationale Zahl $q \in \mathbb{Q}$ auf q schickt und die alle irrationalen Zahlen auf 0 schickt. Ist dies eine $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung? Ist sie mit Skalierung verträglich?

Aufgabe 24.21. Es sei K ein Körper, V und W seien K-Vektorräume und

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

sei eine K-lineare Abbildung. Zeige, dass die folgenden Aussagen gelten.

(1) Für einen Untervektorraum $S \subseteq V$ ist auch das Bild $\varphi(S)$ ein Untervektorraum von W.

(2) Insbesondere ist das Bild $\operatorname{bild}\varphi = \varphi(V)$ der Abbildung ein Untervektorraum von W.
(3) Für einen Unterraum $T \subseteq W$ ist das Urbild $\varphi^{-1}(T)$ ein Untervektorraum von V.
(4) Insbesondere ist $\varphi^{-1}(0)$ ein Untervektorraum von V.

Aufgabe 24.22. Finde mittels elementargeometrischer Überlegungen eine Matrix, die eine Drehung um 45 Grad gegen den Uhrzeigersinn in der Ebene beschreibt.

Aufgabe 24.23.*

Beweise die Additionstheoreme für den Sinus und den Kosinus unter Verwendung von Drehmatrizen.

Aufgabe 24.24.*

Bestimme den Kern der linearen Abbildung

$$\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & -2 & 7 & -1 \\ 2 & -1 & -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 24.25.*

Bestimme den Kern der durch die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

gegebenen linearen Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2.$$

Aufgabe 24.26. Wie sieht der Graph einer linearen Abbildung

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$
$$g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$
$$h\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

aus? Wie sieht man in einer Skizze des Graphen den Kern der Abbildung?

Aufgabe 24.27. Es sei M eine $m \times n$-Matrix über dem Körper K, $\varphi\colon K^n \to K^m$ die zugehörige lineare Abbildung und $Mx = c$ das (vom Störvektor $c \in K^m$ abhängige) zugehörige lineare Gleichungssystem. Zeige, dass die Lösungsmenge des Systems gleich dem Urbild von c unter der linearen Abbildung φ ist.

Aufgabe 24.28. Es seien V und W Vektorräume über einem Körper K und seien $\varphi, \psi\colon V \to W$ lineare Abbildungen. Zeige, dass auch die durch

$$(\varphi + \psi)(v) := \varphi(v) + \psi(v)$$

definierte Abbildung linear ist.

Aufgabe 24.29. Man gebe ein Beispiel für eine lineare Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

die nicht injektiv ist, deren Einschränkung

$$\mathbb{Q}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

aber injektiv ist.

Aufgabe 24.30. Wir betrachten die Abbildung

$$\Psi\colon \mathbb{R}^4_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R}^4_{\geq 0},$$

die einem Vierertupel (a, b, c, d) das Vierertupel

$$(|b-a|, |c-b|, |d-c|, |a-d|)$$

zuordnet. Beschreibe diese Abbildung unter der Bedingung, dass

$$a \leq b \leq c \leq d$$

gilt, mit einer Matrix.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 24.31. (6 (3+1+2) Punkte)

Wir betrachten die Vektorenfamilien

$$\mathfrak{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ und } \mathfrak{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

im $\mathbb{R}^3$.

a) Zeige, dass sowohl $\mathfrak{v}$ als auch $\mathfrak{u}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Es sei $P \in \mathbb{R}^3$ derjenige Punkt, der bezüglich der Basis $\mathfrak{v}$ die Koordinaten $(2, 5, 4)$ besitze. Welche Koordinaten besitzt der Punkt bezüglich der Basis $\mathfrak{u}$?

c) Bestimme die Übergangsmatrix, die den Basiswechsel von $\mathfrak{v}$ nach $\mathfrak{u}$ beschreibt.

Aufgabe 24.32. (3 Punkte)

Es sei eine lineare Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

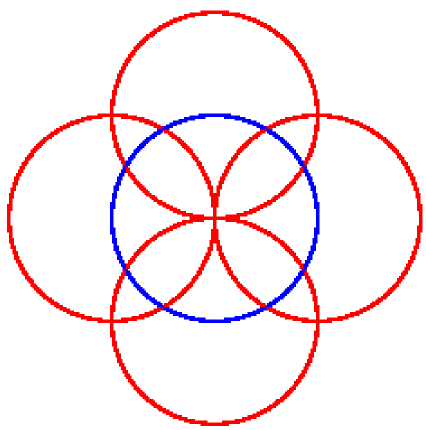
mit

$$\varphi \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \varphi \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \varphi \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Berechne

$$\varphi \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 24.33. (3 Punkte)



Skizziere das Bild der dargestellten Kreise unter der durch die Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ gegebenen linearen Abbildung vom $\mathbb{R}^2$ in sich.

Aufgabe 24.34. (3 Punkte)

Finde mittels elementargeometrischer Überlegungen eine Matrix, die eine Drehung um 30 Grad gegen den Uhrzeigersinn in der Ebene beschreibt.

Aufgabe 24.35. (3 Punkte)

Bestimme das Bild und den Kern der linearen Abbildung

$$f\colon \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 7 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 24.36. (3 Punkte)

Es sei $E \subset \mathbb{R}^3$ die durch die lineare Gleichung $5x + 7y - 4z = 0$ gegebene Ebene. Bestimme eine lineare Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

derart, dass das Bild von φ gleich E ist.

Aufgabe 24.37. (3 Punkte)

Auf dem reellen Vektorraum $G = \mathbb{R}^4$ der Glühweine betrachten wir die beiden linearen Abbildungen

$$\pi\colon G \longrightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} z \\ n \\ r \\ s \end{pmatrix} \longmapsto 8z + 9n + 5r + s,$$

und

$$\kappa\colon G \longrightarrow \mathbb{R}, \begin{pmatrix} z \\ n \\ r \\ s \end{pmatrix} \longmapsto 2z + n + 4r + 8s.$$

Wir stellen uns π als Preisfunktion und κ als Kalorienfunktion vor. Man bestimme Basen für $\operatorname{kern} \pi$, für $\operatorname{kern} \kappa$ und für $\operatorname{kern}(\pi \times \kappa)$.[2]

[2] Man störe sich nicht daran, dass hier negative Zahlen vorkommen können. In einem trinkbaren Glühwein kommen natürlich die Zutaten nicht mit einem negativen Koeffizienten vor. Wenn man sich aber beispielsweise überlegen möchte, auf wie viele Arten man eine bestimmte Rezeptur ändern kann, ohne dass sich der Gesamtpreis oder die Energiemenge ändert, so ergeben auch negative Einträge einen Sinn.

Abbildungsverzeichnis