大學用書

# 相對論

田渠 編著



正中書局印行

大學用書

# 相對論

田渠編著
（國立湖南大學教授）

正中書局印行

# 序　　言

物理學之萌芽，雖遠紹於古希臘時代，然物理學之規模，實由 Newton 之動力學定律及其萬有引力定律，始行樹立．蓋以力學爲物理之基礎，而力學中之一切現象，幾完全包羅於此數定律之內，是爲古典之 Newton 力學．由十七世紀直至十九世紀之末，Newton 力學之權威，日趨發展．而物理學之一切進步，亦均可謂爲 Newton 之功也．

1905年，Einstein 發表其特殊相對論，可視爲物理學中驚人之革命．蓋以水星近日點之移動，以及太陽光譜向紅內線之移動等現象，非 Newton 力學所能解釋，而必須應用此種新的 Einstein 力學矣．雖在日常生活中，Newton 力學仍有其相當之權威，但遇精微之處，即須應用 Einstein 力學．近代原子物理學日趨發展，在此種單微現象中，Einstein 之相對論，已普徧採用．蓋 Newton 力學，僅可視爲 Einstein 力學之一種特例而已．然則相對論在物理學中之地位可知矣．

本篇係由著者就其所授課堂之講義，加以整理，而將相對論概念，作一普通之介紹，以爲研究此課者之津梁而已．

再本書原稿，曾由湖大助教羅守琳君及同學彭朝村君分任抄寫，僅附數語以誌謝忱！

田　渠敬識於國立湖南大學

三十六年二月

# 目　次

## 上篇　狹義相對論

## 下篇 廣義相對論

# 上篇

# 狹義相對論

**1. Newton 力學中之絕對時間及絕對空間** 運動爲相對的．一物體 $A$ 對於一物體 $B$ 之位置有變更時，則可謂 $A$ 對於 $B$ 有一運動．然則欲研究一物體之運動，須先確定此物體對於其他各種物體之相對位置．確定此種位置，通常應用三個正交之座標軸，而以此物體之三個座標表示之，是爲 Cartesian 座標[(1)]．此種座標系，通常固定於一物體或一羣物體之上，是爲 Galilean 系[(2)]

設有兩個 Galilean 系 $S'$ 及 $S$，其座標軸 $y'$ 及 $z'$ 與 $y$ 及 $z$ 互爲平行，其 $x'$ 軸則以一固定之速度 $v$，在 $x$ 軸上滑動；即是 $S'$ 系以一速度 $v$ 對於 $S$ 系作一個等速直線運動．假定在時間爲零時，兩系之原點 $O'$ 與 $O$ 相合；即是說，兩系之三個正交座標軸線，是時均兩兩互相疊合．在此種情形下，$S$ 系中一點 $M(x, y, z)$，在 $S'$ 系中之觀察者視之，將見其座標爲

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z.$$

在上式中，$t$ 表示觀察之時間．另外，對於 $S'$ 系中一點 $M'(x', y', z')$，

(1) 直線座標爲 Cartesian 座標，係因紀念解析幾何之發明人 Descartes，而以其名之縮寫，以名此座標．

(2) 係用以紀念意大利之大物理學家 Galileo．

在 $S$ 系中之觀察者視之，將見其座標爲

$$x=x'+vt,\quad y=y',\quad z=z'.$$

當觀察者所在之座標系轉換時，所見一事變座標之變更，可由上二組公式示之，是爲 Galilean 轉換式(Galilean transformation). 在此種轉換式中，兩系所用之時間 $t$ 爲公同的. 推廣之，此公同之時間，可應用於任何之 Galilean 系；卽是說，對於一切動系，時間爲均一之流過，各系中所計算之時間，均毫無差別. 然則在 Newton 力學中，時間爲絕對的.

在 $S$ 系中任取二點 $M_1$ 及 $M_2$，其座標爲 $(x_1, y_1, z_1)$ 及 $(x_2, y_2, z_2)$. 介

$$\Delta x=x_2-x_1,\quad \Delta y=y_2-y_1,\quad \Delta z=z_2-z_1.$$

則此二點間之距離，其平方爲

$$\Delta s^2=\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2.$$

因時間爲絕對的，在 $S'$ 系中之觀察者，將見此二點之座標爲

$$x_1'=x_1-vt,\quad y_1'=y_1,\quad z_1'=z_1,$$

$$x_2'=x_2-vt,\quad y_2'=y_2,\quad z_2'=z_2;$$

及

$$\Delta x'=x_2'-x_1'=x_2-x_1=\Delta x,$$

$$\Delta y'=\Delta y,\qquad \Delta z'=\Delta z.$$

然則所見此二點之距離，其平方爲

$$\Delta s'^2=\Delta x'^2+\Delta y'^2+\Delta z'^2,$$

或

$$\Delta s'=\Delta s.$$

由上式可見在三度空間中，任意二點間之距離，不隨觀察者所在之座標系之轉換而變更；卽是說，在 Newton 力學中，二點間之距離可視爲一個不變數(invarient). 然則此三度空間，應有其絕對性，

是爲絕對空間(absolute space). 在此絕對空間中靜止之物體，將爲絕對靜止的. 以絕對靜止之物體爲參考系(system of reference)，則在此參考系中運動之物體，將爲絕對運動(absolute motion)，其運動之速度，名曰絕對速度(absolute velocity).

**2. Newton 力學中之相對性** 設以作各種等速運動之Galilean系爲參考系，則各種物體運動時，其運動定律，不隨座標系之轉換而變更. 蓋以支配物體運動之力量，或物體運動時所產生之慣性力，不因座標系之轉換而變更也.是爲 Newton 力學中之相對性，玆證明之如下.

令物體之質量爲 $m$，在 Newton 力學中，係默認此質量爲不變的. 在 $S$ 系中，設此物體之座標爲 $x,\ y,\ z$，則其所受之作用力，有其三個分力爲

$$X=m\ddot{x},\qquad Y=m\ddot{y},\qquad Z=m\ddot{z}. \tag{1}$$

是爲在 Newton 力學中，該物體 $M(x,y,z)$在 $S$ 系中運動之公式. 在 $S'$ 系中視之，由 Galilean 轉換式，將見此物體之座標爲

$$x'=x-vt,\quad y'=y,\qquad z'=z;$$

其三個分速度爲

$$\dot{x}'=\dot{x}-v,\quad \dot{y}'=\dot{y},\qquad \dot{z}'=\dot{z};$$

其三個分加速度爲

$$\ddot{x}'=\ddot{x},\qquad \ddot{y}'=\ddot{y},\qquad \ddot{z}'=\ddot{z}; \tag{2}$$

及三個分力

$$X'=m\ddot{x}',\quad Y'=m\ddot{y}',\quad Z'=m\ddot{z}'. \tag{3}$$

由(1)，(2)，及(3)式，求得

$$X'=X, \quad Y'=Y, \quad Z'=Z.$$

由上式見當座標系轉換時，此物體所受之力量不變；即是說，不因座標系之轉換而產生新的力量．物體所受之力量既不變，物體運動之定律，亦將完全相同，以及其運動之路線，亦將爲種類相同之曲線．如以$F(x,y,z,t)=0$表示一物體在 $S$ 系中運動之公式，$F(x',y',z',t')=0$ 表示在 $S'$ 系中所見此物體運動之公式，則此二函數之形式，應爲完全相同．例如在地面所見物體自由墜落，爲一個等加速度垂直運動，任意投物，常爲一個拋物線運動；在一以等速前進之密閉車廂中，所見之物體自由墜落，仍爲一個等加速度垂直運動，任意投物，亦常爲一個拋物線運動．假設此觀察者完全密閉於此車廂中，則此觀察者將無法由車中之各種實驗，以發現此車廂在軌道上之等速運動．蓋以同一力量所作之各種運動，與地面所見之各種運動，均無差異，是爲 Newton 力學中之相對性．

在 Newton 力學中，雖有此種相對性之存在，即是在一完全密閉之動系中，無法發現其本身對於其他參考系之等速直線運動，或其絕對運動，然並不否認此種絕對性運動之存在．蓋空間既有絕對性，則對於絕對運動之存在，應爲默認的．

**3．相對論之產生** 相對論之產生，實導源於光學理論之爭論．光之性質究爲如何？自十七世紀 Newton 創微粒學說，Huggens 創波動學說(1679)以後，物理學者，聚訟紛紜，迄不能完全解決．蓋以微粒學說僅能解釋光之直進現象，對於折射、繞射及干涉各現象，解釋頗爲牽強．波動學說則不僅對於幾何光學中各種現象如干涉及繞射等，解釋頗爲自然，即對於幾何光學中一切現象，亦能圓滿解釋．

1850年，Foucault 求得光在水中之速度，僅爲光在空氣中速度之四分之三，更給微粒學說以致命之打擊. 惟一切波動，均須在一適當之媒質中進行. 光波能穿過眞空，然則其媒質果爲何物? 按眞空中毫無物質存在，爲維持光之波動學說，於是物理學家有以太(ether)之假設；即是認爲在眞空中及各種透明物質之中，均有一種假想之媒質存在. 此種物質名曰以太. 以太旣非物質，自無質量可言，不能應用天平等儀器，加以秤定. 更無色，無臭，無味，不具有物質之任何特性. 欲證實此種媒質之爲存在，惟有從其對於空間之運動狀態着手. 在天文學中，已發現對於一切方向上之恆星，均有光行差(aberration)現象. 由此推論，以太在宇宙間，應爲靜止的. Doppler 效應，亦可應用於任何方向上恆星或星雲之光譜；即是說，其光譜波長之改變，僅受光源與觀察者之相對運動之影響，而與空間之方向無關，亦可證明以太在空間爲靜止的. 此外尙有許多種實驗，其結果俱維持以太應爲靜止的假想. 直至1887年，Michelson-Morley 之實驗，其結果又恰與前者相反，惟有認爲以太係隨地球運動，始能加以解釋. 相對論之產生，即由此種矛盾而來，而求能作一圓滿之解釋. 關於 Michelson-Morley 之實驗，當於 §5 中詳述之. 下節先將空間與此種假想媒質之特性，作一比較之研究.

**4. 以太與空間** 毫無物質之空間，是爲眞空(vacuum)，例如舊日所謂之星際空間是也[1]. 在此種眞空中，雖無物質存在，亦常能顯示許多物理特性. 例如各種力場之存在，光波及電磁波之傳播等

(1) 近由恆星吸收光譜之研究，已知此星際空間，亦有極爲稀薄之吸收物質存在. 在銀河平面附近，其密度比較稍大，向銀極則其密度愈爲稀薄.

是;而有一固定之折射係數、介電常數及導磁係數等等.故十九世紀之物理學家,遂認爲此種毫無物質之空間,不能謂爲眞空,而充滿有一種理想之媒質,是爲以太.理想之眞空(empty space),僅應有各種幾何特性,而不能發生任何物理特性.至眞空中之各種物理特性,係發生於此種媒質之中.各種力場之存在,可視爲以太之一種變形,光波及電磁波之傳播,可視爲以太振動之進行.於是將舊日所謂之眞空,分爲空間與以太兩部分.前者爲理想之幾何空間,後者爲實驗之物理空間.

在理論方面,研究空間之各種幾何特性,應用 Cartesian 座標系,固無須依附於一種物質之上.惟此僅爲一種研究之方法,不能認爲卽可證明幾何空間之眞實存在.實則一切幾何量度之確定,必須藉助於各種具體之目標.故吾人研究幾何空間,仍不能離開物質.倘空間之物質完全消除,則此空間之各種幾何特性或幾何量度,亦將隨之消滅矣.

另外,空間之各種物理特性,如一切力場,均由各種物質(包括各種電荷)所發出.質量可視爲一切力場之中心點.物質如有一運動,則此力場亦隨之運動.卽當物質靜止時,如物質之質量(亦包括電荷等而言)有一變更,或其速度有一變更時,則其所發生之力場,亦將向各種方向輻射,而質量卽爲此種輻射之出發點.又由量子學說,吾人認爲一切量子,俱有其相當之質量 $\frac{h\nu}{c^2}$,是爲此量子之電磁質量.以及電磁場輻射時,亦有其相當之動量.然則一切力場與輻射,亦不能與物質分開.倘認爲此種力場之存在及輻射之進行,係由於以太

之變形，然則以太之各種狀態，亦將受物質之支配矣.

幾何空間與以太，均同受物質之影響. 然則幾何空間之眞空，與物理世界之以太，實際上亦將無法判別. 以太卽可視爲空間，空間卽可視爲以太. 各種力場之存在，與其視爲以太之變形，亦可視爲空間之一種彎曲. 各種輻射之傳播，與其視爲以太之一種振動，亦可視爲各種力場之振動. 然則此種理想媒質之假設，直可視爲無此種必要矣.

**5. Michelson-Morley 實驗**　由光源 $S$ 發出之光線 $SM$，以 $45^\circ$ 之角，射於一個半鍍銀之平面玻璃 $M$ 上，而分爲透射之 $MA$ 及反射之 $MB$ 二條，如圖 1 所示. $A$ 及 $B$ 二點各有一個平面鏡，鏡面與 $MA$ 及 $MB$ 二線互爲正交. 經此二平面鏡反射之後，光線 $AM$ 及 $BM$ 各循原路而達於 $M$. 再由此平面玻璃之反射與透射，而共取 $ME$ 之方向. 在此方向上用一小望遠鏡視之，可以看出此二組光線之干涉條紋.

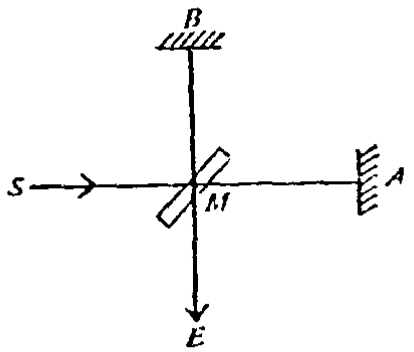

圖 1.

令 $MA$ 及 $MB$ 之距離均爲 $l$. 假設以太爲靜止的，則光線在此靜止之以太中，其速度應爲各向相同的. 令此速度爲 $c$，及地球對於以太之速度爲 $v$. 先令 $MA$ 與地球運動之方向相合，然則光線由 $M$ 至 $A$ 時，其速度爲 $(c-v)$，由 $A$ 返 $M$ 時，其速度爲 $(c+v)$. 於是求得光線由 $M$ 出發經 $A$ 鏡反射而再達 $M$ 時所經過之時間爲

$$t_1=\frac{l}{c-v}+\frac{l}{c+v}=\frac{2l}{c}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1}. \qquad (1)$$

$MB$ 垂直於地球運動之方向．當 $M$ 在 $M_1$ 之位置如圖 2 所示時，光線由 $M$ 鏡出發，當其經 $B$ 鏡反射而復落於 $M$ 上時，此平面玻璃 $M$ 將隨地球運行而達至 $M_2$ 之位置矣．令光線由 $M$ 對出發，經 $B$ 鏡反射而復落於 $M$ 上所經過之時間爲 $t_2$，則有

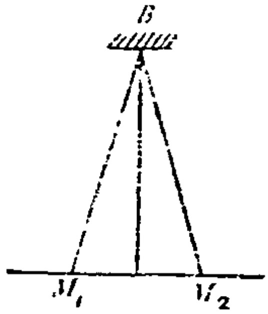

圖 2.

$$t_2=\frac{2}{c}\sqrt{l^2+\left(\frac{M_1M_2}{2}\right)^2}.$$

按 $M_1M_2=vt_2$，然則有

$$t_2=\frac{2}{c}\sqrt{l^2+\frac{v^2t_2^2}{4}},$$

或
$$t_2^2=\frac{4l^2}{c^2}+\frac{v^2}{c^2}t_2^2.$$

由上式移項，得

$$t_2=\frac{2l}{c}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}. \tag{2}$$

再由(1)及(2)式，求得

$$t_1-t_2=\frac{2l}{c}\left[\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1}-\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right].$$

然則在此實驗中，$MAM$ 及 $MBM$ 二光線間，有一光程差

$$\delta=c(t_1-t_2)=2l\left[\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1}-\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]$$

$$=2l\left[\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}-\frac{5}{8}\frac{v^4}{c^4}+\cdots\cdots\right].$$

如忽略上式括弧中$\left(\frac{v}{c}\right)$之高次方,則此光程差之近似値爲$\frac{lv^2}{c^2}$.

Michelson-Morley 將此實驗之儀器,全部置於一個可以自由轉動之平臺上.當全部儀器轉動 90°,卽是 $MB$ 與地球運動之方向相合時,$MAM$ 及 $MBM$ 二光線間之光程差之變更,將爲 $2lv^2/c^2$.然則望遠鏡中所見之干涉條紋,將發生一移動.設所用之單色光,其波長爲 $\lambda$,則干涉條紋移動之間隔(interval),應爲

$$\alpha=2\frac{lv^2}{\lambda c^2}.$$

按地球之軌道運動,其速度 $v$ 爲 $3\times10^6$ 厘米/秒. Michelson-Morley 實驗中所用之距離 $l$ 爲 11 米,其所用之波長 $\lambda$ 約爲$6\times10^{-5}$厘米,然則有

$$\alpha=\frac{2\times1.1\times10^3}{6\times10^{-5}}\times(10^{-4})^2=0.4.$$

在干涉條紋中,移動至 4/10 之間隔,通常應可量出. Michelson-Morley 實驗之結果,見其干涉條紋,並不隨儀器之轉動而移動[1].然則,僅有承認以太係隨地球運動,始能加以解釋.此點又與 §3 中所述以太應爲靜止之說相衝突.於是以太之性質,無法確定.而以太之是否眞實存在,從此發生問題矣.

6. Fitzgerald **收縮** 爲解釋 Michelson-Morley 實驗之結果,Fitzgerald 曾假設空間及一切物體,在運動之方向上,將發生一收

---

(1) Miller 曾於 1924 年,求得一相反之結果.惟 Michelson 之實驗,曾經許多物理學家之證明,實較 Miller 之結果,更爲精確.

縮.此收縮之係數,卽可由 Michelson-Morley 實驗之結果求出.

假設 $MA$ 及 $MB$ 二距離,原爲相同,或當 $MA$ 及 $MB$ 均爲靜止時,其長度均爲 $l$.實驗時,$MB$ 垂直於運動之方向,其長度不變.$MA$ 與地球運動之方向相合,其長度將縮小爲 $l'$,而有

$$t_1-t_2=\frac{2}{c}\left[\frac{l'}{1-\frac{v^2}{c^2}}-\frac{l}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right].$$

Michelson-Morley 實驗之結果,干涉條紋並無移動,然則應有其 $t_2$ 與 $t_1$ 相等,卽是應有

$$\frac{l'}{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{l}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

由上式,可以求得此收縮係數爲

$$\alpha=\frac{l'}{l}=\sqrt{1-v^2/c^2},$$

或其倒數爲 $$\beta=\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

卽是說,在運動之方向上,空間及物體之長度,將縮爲其原有長度之 $1/\beta$.

此種收縮,亦可由 Lorentz 之轉換式導出,故通常又稱爲 Fitzgerald-Lorentz 收縮.

絕對靜止之以太,既無法證實其爲存在.空間之距離,在其運動之方向上,又將隨其速度之大小,而發生一相對應之收縮.然則空間之絕對性,實已消失,而絕對運動,實爲一個無意義之名詞矣.實際

方面,在宇宙中,亦難覓一絕對靜止之點,以爲絕對運動之標準.吾人所居住之地球,有其軌道運動及自轉.各行星亦然.整個太陽系,在銀河中,又向武仙星座移動.一切恆星均有自行(proper motion).整個銀河系有其轉動.以及各銀河系間又有其相互之運動.然則整個宇宙,實可視爲一個動的宇宙矣.

**7. 時間之相對性** 在 Newton 力學中,係認時間爲絕對的.按時間之發生,係由運動而來,假設在此大宇宙中,一切物體均爲靜止的,則時間問題,將無法確定.按絕對運動,旣無意義,然則絕對時間一名詞,亦將發生問題矣.實際方面,Newton 力學中時間之定義,有欠完善之處.例如兩個事變同時在 $A,B$ 二點發生,其意義究爲如何,假設我們承認時間爲絕對的,在一切動系中,皆爲均一之流過,則此種同時性之存在,當無問題.當我們採取實驗的論證來研究此種同時性時,將有困難問題發生矣.我們必須有兩個完全相同之同步鐘(synchronized clocks),分置於 $A,B$ 二點,以表示此絕對時間.由此二同步鐘所示事變發生之時間,倘爲相同,則此二事變始有其同時性.玆舉出一實地觀測之方法如下,以研究此同時性.

在 $AB$ 之中點 $C$ 用兩個互爲正交之平面鏡,其鏡面均與 $AB$ 線作 $45°$ 之角,如圖 3 所示,以同時觀測 $A,B$ 二點所發生之事變,及二同步鐘所示之時間.在 $C$ 點所見 $A,B$ 二鐘所示之時間相同,則此二鐘可稱爲同步鐘.

圖 3.

但是由絕對之意念,假設 $A,B,C$ 三點均在地球之上,則此同步鐘,實際上將無法實現.蓋以地球在以太中,有其軌道運動,以及

隨太陽系及隨銀河系所作之種種運動．設 $AB$ 與地球運動之方向相同，$v$ 爲地球運動之速度，$2l$ 爲 $A,B$ 二點間之距離，則由 $A,B$ 二鐘同時發出之火花，達到 $C$ 點所需之時間，其一將爲 $l/(c+v)$，其另一將爲 $l/(c-v)$．Michelson-Morley 實驗之結果，曾表示光速在任何方向上，均爲相同，不受地球運動之影響；即是說，在 $C$ 點所見 $A,B$ 二同步鐘所示之時刻，應仍爲相同．倘認時間爲絕對的，則 Michelson-Morley 實驗之結果，無法解釋．惟有認爲時間隨運動之速度而發生變更；即是說，在各 Galilean 系中，所計算之時間 $t$ 與 $t'$，並不相同，始能解釋 Michelson-Morley 之實驗．於是產生時間亦有其相對性之概念．

**8．Lorentz 轉換式** 在各種動系 $G'$ 及 $G$ 中，如認時間及空間均爲絕對的，則其座標之轉換，曾由 Galilean 轉換式表示之．如承認時間及空間均爲相對的，則此 Galilean 轉換式，不能再行應用矣．在研究一新的轉換式之前，吾人應先述一基理（postulate），是爲相對速度基理，或簡稱基理 $V$：

設有 $S'$ 及 $S$ 二系，彼此作一相對運動，其相對速度之絕對值，對於兩系中之觀察者，可用同一數值表示之．

蓋由此基理，始能使二系中之各種量度發生關係．根據此基理，可以認爲在 $S$ 系中之觀察者，以其自系[1]中所用之各種單位，量得 $S'$ 系之運動，其速度爲 $v$．$S'$ 系中之觀察者，亦以其自系中所用之各種單位，量得 $S$ 系運動之速度，其大小亦爲 $v$，惟二者之方向，恰爲相反．

---

(1) 對於此系爲靜止之觀察者，常認此系爲自系(proper system)．

設 $S'$ 系之 $y'$ 及 $z'$ 軸，與 $S$ 系之 $y$ 及 $z$ 軸互為平行，其 $x'$ 軸則與 $S$ 系之 $x$ 軸線相疊合；及當二系之時間為零時，兩系之三個正交座標完全互相疊合，其原點 $O'$ 亦與 $S$ 系之原點 $O$ 相合．假設 $S'$ 系對於 $S$ 系運動之速度為 $v$，與 $x$ 軸之方向相合，則在二系中所量得之各座標(包含時間在內)轉換時，將與此速度 $v$ 有關係．應用 Galilean 轉換式，則有

$$t'=t, \qquad y'=y, \qquad z'=z,$$

及

$$x'=x-vt, \qquad x=x'+vt'.$$

如認時間為相對的，則此種轉換式，除 $y'=y$，及 $z'=z$ 之外，其餘各式不復能用．惟新舊座標間，仍應有一個簡單之關係，茲假設其關係如下式：

$$x'=k(x-vt), \qquad x=k'(x'+vt').$$

$k$ 及 $k'$ 二係數，應為速度 $v$ 之函數．由上二式中消去 $x'$，求得

$$t'=k\left[t-\frac{x}{v}\left(1-\frac{1}{kk'}\right)\right].$$

光在靜止而均勻之以太中，其速度 $c$ 當然為各向相同的．Michelson-Morley 實驗之結果，又證明光在運動之地球表面，其速度 $c$ 仍為各向相同．設以以太為參考系 $S$，以地球為動系 $S'$，然則有

$$x^2+y^2+z^2-c^2t^2\equiv x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2\equiv 0,$$

或

$$x^2+y^2+z^2-c^2t^2-(x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2)\equiv 0.$$

按 $y'=y$, $z'=z$，再以 $x'$ 及 $t'$ 之值代入上式，求得

$$x^2-c^2t^2-k^2(x^2-2vxt+v^2t^2)$$
$$+c^2k^2\left[t^2-\frac{2xt}{v}\left(1-\frac{1}{kk'}\right)+\frac{x^2}{v^2}\left(1-\frac{1}{kk'}\right)^2\right]\equiv 0,$$

或
$$\left(1-k^2+\frac{c^2}{v^2}k^2-2\frac{c^2}{v^2}\frac{k}{k'}+\frac{c^2}{v^2}\frac{1}{k'^2}\right)x^2$$
$$+\left[(v^2-c^2)kk'+c^2\right]xt$$
$$-(c^2+k^2v^2-k^2c^2)t^2\equiv 0. \qquad (1)$$

欲滿足上式爲恆等式，必須其各變數之係數之值均爲零．由 $t^2$ 之係數爲零，求得

$$k=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

再由 $xt$ 之係數爲零，求得

$$k'=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}=k.$$

以 $k$ 及 $k'$ 之值代入(1)式中，可以求得 $x^2$ 之係數亦恆爲零．然則令

$k=k'=\dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$，(1)式可以滿足．

令
$$\beta=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},$$

則有 $x'=\beta(x-vt),\quad y'=y,\quad z'=z,\quad t'=\beta\left(t-\frac{v}{c^2}x\right);$

及 $x=\beta(x'+vt'),\quad y=y',\quad z=z',\quad t=\beta\left(t'+\frac{v}{c^2}x'\right).$

是爲 Lorentz 轉換式(1904).

**9．狹義相對論** 由 Michelson-Morley 實驗之結果，及 Lorentz 轉換式之啓示，Albert Einstein 於 1905 年，毅然發表其相對論，卽

現所稱之狹義相對論(special theory of relativity). 從此 Newton 力學，掀起一革命之波瀾，而物理學之歷史，應劃爲一個新的階段. 玆將相對論中，對於絕對運動及光速之兩個基理，概述於下:

基理 $M$　在自由空間(free space)作等速運動之動系中之觀察者，無法發現其自系或其本身對於自由空間之運動；即是說，在作各種等速運動之動系中，無法發現其本身在自由空間之絕對運動.

基理 $R$　光之速度，在自由空間中，爲各向相同的，不受光源及觀察者對於空間所作各種等速運動之影響；即是說，在任何等速動系中之觀察者，將見光在自由空間之速度，對於任何方向，均等於 $c$.

Michelson-Morley 實驗之結果，完全與上基理 $R$ 相合. 此基理可以解釋此實驗，而此實驗又可視爲此基理或相對論之支柱也.

構成上二基理，必須保持在任何參考座標系中，各種量度，均有其固有之單位. 應用 Fitzgerald 收縮及時間之相對性，Einstein 亦能找到 Lorentz 之轉換式. 玆簡述之於下:

設有 $S'$ 系對於 $S$ 系作一等速相對運動，其速度 $v$ 之方向與 $x$ 軸線相合. 當時間爲零時，此二系之原點及其相對應之軸線完全相合. 在 $S$ 系中，設有一點 $M$，其座標爲 $(x, y, z)$. 由此點至 $S'$ 系原點之距離，在 $S$ 系中之觀察者視之，其三個分量爲

$$x-vt, \quad y, \quad z.$$

在 $S'$ 系中之觀察者測量此三個分量時，除在 $y'$ 軸及 $z'$ 軸線上兩個分量，其長度不變外，當其將尺置於與運動方向相同之 $x'$ 軸上時，其所用之尺將發生一收縮，而僅爲其原長之 $1/\beta$. 然則在 $S'$ 系中所量得 $x'$ 軸線上，此距離之分量，將增大 $\beta$ 倍；即是有

$$x'=\beta(x-vt),\quad y'=y,\quad z'=z.$$

另外，由基理 $R$，吾人應有

$$x^2+y^2+z^2-c^2t^2=x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2,$$

或 $$x^2-c^2t^2-\beta^2(x^2-2vxt+v^2t^2)+c^2t'^2=0.$$

移項，得 $$c^2t'^2=(c^2+\beta^2v^2)t^2-2\beta^2vxt-(1-\beta^2)x^2$$

$$=\beta^2\left[\left(\frac{c^2}{\beta^2}+v^2\right)t^2-2vxt-\left(\frac{1}{\beta^2}-1\right)x^2\right]$$

$$=\beta^2\left[(c^2-v^2+v^2)t^2-2vxt+\frac{v^2}{c^2}x^2\right].$$

上式兩邊同除以 $c^2$，得

$$t'^2=\beta^2\left[t^2-\frac{2v}{c^2}xt+\frac{v^2}{c^4}x^2\right]=\beta^2\left(t-\frac{v}{c^2}x\right)^2,$$

或 $$t'=\beta\left(t-\frac{v}{c^2}x\right).$$

然則在參考系 $S$ 中之一點 $M\ (x,y,z,t)$，在動系 $S'$ 中之觀察者，將求得此點在該系中之座標爲

$$x'=\beta(x-vt),\ y'=y,\ z'=z,\ t'=\beta\left(t-\frac{v}{c^2}x\right).$$

與 Lorentz 求得之結果相合.

在動系 $S'$ 中，設有一點 $M'$，其座標爲 $(x',y',z',t')$. 按 $S$ 系係以一等速 $v$，沿 $x'$ 之負向倒退，則此點至 $S$ 系原點之距離 $OM'$，在 $S'$ 系視之，其三個分量爲

$$x'+vt',\quad y',\quad z'.$$

在 $S$ 系中之觀察者，測定此三個分量時，以所用之尺沿 $x$ 軸線方向

放置時，亦收縮爲其原長之 $1/\beta$. 則所量得之三個分量爲

$$x=\beta(x'+vt'),\quad y=y',\quad z=z'.$$

同理，可求得

$$t=\beta\left(t'+\frac{v}{c^2}x'\right).$$

然則 $S'$ 系中之一點 $M'(x',y',z',t')$，在 $S$ 系中之觀察者所量得之座標爲

$$x=\beta(x'+vt'),\ y=y',\ z=z',\ t=\beta\left(t'+\frac{v}{c^2}x'\right).$$

**10. 時間之膨脹**　由 Lorentz 轉換式之結果，設 $S$ 系中連續發生兩個事變，其經過之時間爲 $\Delta t=t_2-t_1$；在 $S'$ 系中之觀察者視之，將見此二事變經過之時間爲

$$\Delta t'=t_2'-t_1'=\beta\left[t_2-t_1+\frac{v}{c^2}(x_2-x_1)\right].$$

如二事變發生於 $S$ 系中一固定之點，卽是有 $x_2=x_1$，則有

$$\Delta t'=\beta\Delta t.$$

按 $\beta>1$，有

$$\Delta t'>\Delta t.$$

卽是在另一系中所量得此二事變所經過之時間，將大於此事變在其自系中所經過之時間. 對於一固定事變，在自系中視爲頗暫，在其他之系中將視爲頗長也. 是爲 Einstein 之時間膨脹(dilatation of time)理論.

**11. 空間之收縮**　在 $S$ 系中之觀察者，視 $S'$ 爲動系. 動系在運動方向上之二點 $M_2'$ 及 $M_1'$，在 $S$ 系中視之，其所占空間之長度爲

$\Delta x=x_2-x_1$. 在動系中視之，則此二點所占之空間，其長度為

$$\Delta x'=x_2'-x_1'=\beta(x_2-x_1)=\beta\Delta x.$$

由上式，可見在動系 $S'$ 中之一長度 $\Delta x'$，在參考系 $S$ 中視之，僅為 $\Delta x=\Delta x'/\beta$.

按運動為相對的．在 $S'$ 系中之觀察者，視 $S$ 為動系．將見 $S$ 系中在運動方向上之二點 $M_2$ 及 $M_1$，所占空間之長度 $\Delta x'=x_2'-x_1'$，在動系 $S$ 中視之，則此二點所占之空間，其長度為

$$\Delta x=x_2-x_1=\beta(x_2'-x_1')=\beta\Delta x'.$$

由上式，可見視 $S$ 為動系時，則在該系中之一長度 $\Delta x$，在參考系 $S'$ 中視之，亦僅為 $\Delta x'=\Delta x/\beta$.

根據上述之結果，可以求得一個有趣味之推論．

設有兩個球體 $A$ 及 $B$，彼此作一相對運動，其速度 $v$ 與二球球心之聯線相合，則由此種收縮，在 $A$ 球上之觀察者，自視其球為球體，而視 $B$ 則為一橢球矣．在 $B$ 球上之觀察者，亦自視其球為球體，而視 $A$ 亦為一橢球矣．惟通常各種物體間之相對速度，常較光速遠為微小，故其相視而呈之橢球體，其扁平程度不大，不易看出．如其速度達於光速，或 $v=c$，則此二球上之觀察者，將見其另一球變為扁平圓面矣．

**12. Einstein 速度綜合定理** 設一質點 $M'$，以速度 $v'$，在動系 $S'$ 中，沿 $x'$ 軸而運動．在參考系中之觀察者，將見此質點之速度為

$$u=\frac{x}{t}=\frac{x'+vt'}{t'+\frac{v}{c^2}x'}=\frac{x'}{t'}\frac{\left(1+\frac{v}{v'}\right)}{\left(1+\frac{vv'}{c^2}\right)}=\frac{v'+v}{1+\frac{vv'}{c^2}}.$$

是爲 Einstein 之綜合速度公式. $v$ 表示 $S'$ 系對於 $S$ 系相對運動之速度. 如此質點爲一光量子, 卽是說, $v'=c$, 則有

$$u=\frac{c+v}{1+\frac{v}{c}}=c.$$

由上式, 可見不論觀察者所在之座標系, 爲其自系或爲其他之動系, 其所見光之速度均爲 $c$, 然則此光速爲一個不變量(invariant).

當相對運動之速度 $v$ 亦增大至等於 $c$ 時, 在參考系中所見之光速仍爲 $c$, 而不能大於 $c$, 蓋以

$$u=\frac{c+c}{1+\frac{c^2}{c^2}}=c.$$

然則光之速度, 可視爲一切物質運動之極限値矣.

另外, 當一質點在參考系 $S$ 中, 以速度 $v''$ 運動時. 在動系 $S'$ 系中之觀察者, 將見其速度爲

$$u'=\frac{x'}{t'}=\frac{x-vt}{t-\frac{v}{c^2}x}=\frac{x}{t}\frac{\left(1-\frac{v}{v''}\right)}{\left(1-\frac{vv''}{c^2}\right)}=\frac{v''-v}{1-\frac{vv''}{c^2}}.$$

由上式, 可見當此質點爲光量子或 $v''=c$ 時, 在動系 $S'$ 中之觀察者, 所見此光量子之速度或光之速度, 仍爲 $c$.

**13. 光在動的媒質中之速度** (a) 令媒質對於參考系運動之速度爲 $v$, 及光在媒質中運動之速度爲 $v'=\frac{c}{n}$($n$ 表示媒質之折射係數. 則由 Einstein 之速度綜合法, 求得在參考系中所見光在動的媒質中

之速度爲

$$u=\frac{v'+v}{1+\frac{vv'}{c^2}}=\frac{\frac{c}{n}+v}{1+\frac{v}{nc}}. \qquad (1)$$

將上式展開而忽略 $\frac{v}{nc}$ 之高次方，則得

$$u=\left(v+\frac{c}{n}\right)\left(1-\frac{v}{nc}\right)=v+\frac{c}{n}-\frac{v^2}{nc}-\frac{v}{n^2}.$$

再忽略 $\frac{v^2}{nc}$ 之值，則上式可變爲

$$u=\frac{c}{n}+v\left(1-\frac{1}{n^2}\right).$$

上式與 Fizeau 對於光在流動的水中傳播之實驗（1851）結果相合．此實驗當時無法解釋．蓋認爲以太爲絕對靜止的，則光之速度，不應受水流之影響，而仍爲 $\frac{c}{n}$．如認以太爲隨水運動，則光之速度，應爲 $\frac{c}{n}+v$，均與實驗之結果不合．當時曾有承認以太僅爲部分隨水運動者，其速度爲 $\alpha v$，而有 $\alpha=\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$，而名此 $\alpha$ 曰牽引係數(dragging coefficient)．此種解釋，頗爲牽強．自相對論成立，此實驗之結果，可以應用綜合速度法則以解釋之．

(b)應用綜合速度法，亦可求得在動的媒質中之觀察者，所見光之速度，仍爲 $c/n$．

由實驗結果，求得在參考系中，所見光之速度為$\dfrac{\dfrac{c}{n}+v}{1+\dfrac{v}{nc}}$. 在動的媒質中之觀察者，將見參考系之速度為$-v$. 然則在動的媒質中之觀察者，所見光之速度為

$$u'=\frac{\dfrac{\dfrac{c}{n}+v}{1+\dfrac{v}{nc}}-v}{1-\dfrac{v}{c^2}\left(\dfrac{\dfrac{c}{n}+v}{1+\dfrac{v}{nc}}\right)}=\frac{c}{n}.$$

由上結果，可見不問媒質是否為靜止的或運動的，在其自系中之觀察者，將見光之速度恆為$c/n$. 則由 Lorentz 轉換式，亦可求得(1)式之結果.

設媒質對於參考系$S$運動之速度$v$，與$x$軸線之方向相合. 則隨媒質運動之觀察者，在媒質$S'$系中所量得之坐標為

$$x'=\beta(x-vt),\qquad t'=\beta\left(t-\frac{v}{c^2}x\right).$$

此觀察者求得光在媒質中之速度為

$$u'=\frac{\dot{x}'}{\dot{t}'}=\frac{\dot{x}-v\dot{t}}{\dot{t}-\dfrac{v}{c^2}\dot{x}}.$$

承認此速度 $u'=\dfrac{c}{n},$

卽是應有

$$\frac{c}{n}=\frac{x-vt}{t-\frac{v}{c^2}x}=\frac{\frac{x}{t}-v}{1-\frac{v}{c^2}\frac{x}{t}}.$$

然則在參考系中之觀察者，將見光在媒質中之速度爲

$$u=\frac{x}{t}=\frac{\frac{c}{n}+v}{1+\frac{v}{nc}}.$$

上式與本節(a)中應用 Einstein 綜合速度方法求得之結果相合.

**14. 事變之次序**　(a)設在$S$系中之$x_1$及$x_2$二點，有二事變同時發生($t_2=t_1=t$)，此二事變當然無因果關係. 在$S'$系中之觀察者，將見此二事變發生之時間爲

$$t_1'=\beta\left(t-\frac{v}{c^2}x_1\right),\quad t_2'=\beta\left(t-\frac{v}{c^2}x_2\right).$$

其同時性消失，而其次序爲

$$t_2'-t_1'=-\frac{\beta v}{c^2}(x_2-x_1).$$

由上式，可見$t_2'-t_1'$爲正數抑爲負數，卽是說，其孰先孰後，須視運動之方向與$x_2$及$x_1$二點之相對位置，或其座標之差數($x_2-x_1$)而定.

(b)在$S$系中之一點，連續發生二事變，其時間爲$t_2$及$t_1$. 在$S'$系中視之，將有

$$t_2'-t_1'=\beta(t_2-t_1).$$

由上式，可見時間雖有膨脹，而其次序不能顚倒. 蓋二事變倘有

因果關係，決不能倒因爲果也.

(c) 設有一事變 $a$，發生於 $S$ 系中之一固定點 $x_1$，其時間爲 $t_1$. 演變而成爲一事變 $b$，發生於 $S$ 系中之一固定點 $x_2$，其時間爲 $t_2$. 此二事變有一因果關係，其時間爲 $\Delta t=t_2-t_1$，而事變平均之傳播速度爲 $u=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}$. 在一動系 $S'$ 中之觀察者，將見此二事變經過之時間爲

$$t_2'-t_1'=\beta\left[(t_2-t_1)-\frac{v}{c^2}(x_2-x_1)\right]$$

$$=\beta(t_2-t_1)\left\{1-\frac{vu}{c^2}\right\}.$$

按一切物體運動之速度，均小於光之速度，然則 $\left|\frac{vu}{c^2}\right|$ 之絕對值應小於1，即是說，

$$\left(1-\frac{vu}{c^2}\right)>0.$$

倘有 $\Delta t=t_2-t_1>0,$

然則亦應有 $\Delta t'=t_2'-t_1'>0.$

由上式，可見在 $S'$ 系中，其因果關係仍不變. 即是 $a$ 事變仍爲因，$b$ 事變仍爲果. 雖時間隨各系之相互運動而有膨脹現象，而事變之次序不能變更，即是時間有一固定之順序. 然則時流之方向，在一切動系中，均爲相同，係由過去向將來流去. Eddington 稱此時流爲時間之箭.

**15. 速度之轉換** 作 Lorentz 轉換式之微分，得

$$dx'=\beta(dx-vdt),$$

$$dy' = dy,$$

$$dz' = dz,$$

$$dt' = \beta\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right).$$

以最後一式除前三式，求得

$$\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - vdt}{dt - \frac{v}{c^2}dx} = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}},$$

$$\frac{dy'}{dt'} = \frac{dy}{\beta\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right)} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\beta\left(1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}\right)},$$

$$\frac{dz'}{dt'} = \frac{dz}{\beta\left(dt - \frac{v}{c^2}dx\right)} = \frac{\frac{dz}{dt}}{\beta\left(1 - \frac{v}{c^2}\frac{dx}{dt}\right)}.$$

令 $u_x = \frac{dx}{dt}, \quad u_y = \frac{dy}{dt}, \quad u_z = \frac{dz}{dt};$

及 $u'_x = \frac{dx'}{dt'}, \quad u'_y = \frac{dy'}{dt'}, \quad u'_z = \frac{dz'}{dt'}.$

則有 $u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{vu_x}{c^2}}, \quad u'_y = \frac{u_y}{\beta\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)}, \quad u'_z = \frac{u_z}{\beta\left(1 - \frac{vu_x}{c^2}\right)}.$

是爲 Lorentz 速度轉換公式.

**16. 狹義相對論其他基理** 除前述之基理 $V$, 基理 $M$ 及基理 $R$ 外，茲由能量不滅定律及動量不滅定律，再做成二基理如下：

基理 $C_1$ 在一隔離系(isolated system)中，無論發生任何變化，系內一切物體能量之總和不變.

基理 $C_2$ 在一隔離系中，無論發生任何變化，系內一切物體動量之總和不變.

另外對於電荷方面，亦有一個基理如下：

基理 $C_3$ 在一隔離系中，其電荷之總量不變.

玆再述最小作用量原理(principle of least action)如下：

一保守系由一組態(configuration) $a$，至另一組態 $b$ 之自由運動路線，如將其作一頗小之改移時，其總能量之變更，保持爲一常數；或在此種自由運動中，當其路線稍改時，其作用量(action)之值不變.

按作用量 $$A=\Sigma\int_a^b mvds=\Sigma\int_a^b mv^2dt,$$

然則此最小作用量原理，可書爲

$$\delta A=\Sigma\int_a^b \delta mv^2dt=0.$$

**17. 質量之相對性** 時間與空間有相對性，質量亦有相對性；卽是一切物體之質量，將隨其運動之速度而變更，而構成相對性動力學(relativistic dynamics)之基礎.玆闡述之如下：

設有兩個完全相同之小球 $A$ 及 $B$，靜止時其質量均爲 $m$. 小球 $A$ 在 $S$ 系中，沿 $y$ 軸之正向運動，其速度爲 $u$. 小球 $B$ 在 $S'$ 系中，亦以大小相同之速度，沿 $y'$ 軸之負向運動，卽是向其原點 $O'$ 運動($y'$ 軸平行於 $y$ 軸). 設 $S'$ 系對於 $S$ 系運動之

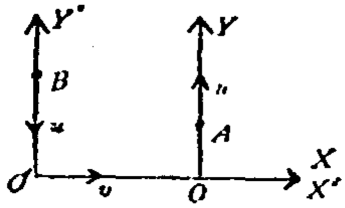


圖 4.

速度爲 $v$，其方向與 $x$ 軸相合，如圖 4. 假定 $y'$ 軸與 $y$ 軸相重合時，此二球恰相碰撞，則撞前之速度，在 $S$ 系中視之，爲

$$w_{ax}=0,$$
$$w_{ay}=u;$$
$$w_{bx}=v,$$
$$w_{by}=-\frac{u}{\beta}.$$

在 $S'$ 系中視之，爲

$$w'_{ax'}=-v,$$
$$w'_{ay'}=\frac{u}{\beta};$$
$$w'_{bx'}=0,$$
$$w'_{by'}=-u.$$

$w_{by}$ 及 $w_{ay'}$ 不爲簡單之 $-u$ 及 $u$，而加有一係數 $\frac{1}{\beta}$，蓋因 $y$ 軸及 $y'$ 軸雖垂直於運動之方向，而時間有一膨脹，此由 §15 中之公式，可以見之.

假設此二小球爲兩個光滑之球，即是二球在 $x$ 軸上之分速度，不受碰撞之影響. 設質量爲其速度之函數，令此函數爲 $f(v)$，則應用動量不滅定律，可以求得此函數. 玆述之於下:

設對於碰後之速度，均於其字母上加一短橫線以表示之. 在 $S$ 系中之觀察者，將見其在 $x$ 軸上之分動量，有下式之關係:

$$f(\overline{u})\times 0+f\left(\sqrt{v^2+\frac{\overline{u}^2}{\beta^2}}\right)\times v$$
$$=f(u)\times 0+f\left(\sqrt{v^2+\frac{u^2}{\beta^2}}\right)\times v.$$

由上式,求得

$$\bar{u}=\pm u.$$

在上式中,吾人應採取 $\bar{u}=-u$ 之值,以求合於 Newton 力學之結果.再由在 $y$ 軸上之分動量,求得

$$f(\bar{u})\times\bar{u}-f\left(\sqrt{v^2+\frac{\bar{u}^2}{\beta^2}}\right)\times\frac{\bar{u}}{\beta}$$

$$=f(u)\times u-f\left(\sqrt{v^2+\frac{u^2}{\beta^2}}\right)\times\frac{u}{\beta}.$$

按質量爲無向量,卽是應有

$$f(-u)=f(u).$$

再以 $\bar{u}=-u$ 之值代入上式,求得

$$f\left(\sqrt{v^2+\frac{u^2}{\beta^2}}\right)=\beta f(u).$$

當 $u$ 之值逐漸減小至爲零時,求得

$$f(v)=\beta f(0).$$

設以 $m=f(v)$ 表示其速度爲 $v$ 時之質量,$m_0=f(0)$ 表示其靜止時之質量,則有

$$m=\beta m_0=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

以上結果,並可滿足質量不滅定律之特例.蓋有碰前二球質量之和,卽等於二球碰後質量之和,如下式:

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{\bar{u}^2}{c^2}}}+\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2+\bar{u}^2/\beta^2}{c^2}}}=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}+\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2+u^2/\beta^2}{c^2}}}.$$

通常各種物體運動時，其速度均遠小於光速，即是說，$\beta$ 之值頗近於一。故其質量隨速度之變更，不易看出。對於 $\beta$ 線或加速之電子，其速度可達光速十分之一上下，其質量爲速度之函數，已由實驗證明矣。

**18. Minkowski 世界** 在三度空間中，任何二點之距離，爲一個不變量。即是說，其距離不隨所用座標軸系之轉換而變更。由 Galilean 轉換式，設二點之座標，在 $S$ 系中爲 $(x_2, y_2, z_2)$ 及 $(x_1, y_1, z_1)$，在 $S'$ 系中爲 $(x_2', y_2', z_2')$ 及 $(x_1', y_1', z_1')$，則有

$$\begin{aligned}&(x_2'-x_1')^2+(y_2'-y_1')^2+(z_2'-z_1')^2\\&\quad=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2=\text{常數}.\end{aligned}$$

應用 Lorentz 轉換式，則此二點之距離，將隨觀察者所在之座標系而變更矣。此點將由下列之不等式表明之：

$$\begin{aligned}&(x_2'-x_1')^2+(y_2'-y_1')^2+(z_2'-z_1')^2\\&\quad\neq(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2.\end{aligned}$$

即是說，二點間之距離，非爲一個不變量，而空間有其相對性矣。在狹義相對論中，前已承認時間及空間俱有其相對性，而求得下式：

$$x'^2+y'^2+z'^2-c^2t'^2=x^2+y^2+z^2-c^2t^2.$$

實則，一切事變，不僅在空間限有一固定之位置，且須有一固定之時間。然則對於標識時間與標識位置有相等之重要，而時間與空間，對於指示一個事變，實有相等之性質。於是時間亦可視爲一個座標，而得一四度之空間，是爲 Minkowski 世界。此世界可用四個互爲正交之座標軸 $(x, y, z, \tau)$ 以表示之，系中假定座標 $\tau=ict$ (1)。然則任何

(1) $i=\sqrt{-1}$.

事變，在此四度空間中，均可用一相當之點以表示之，此點名曰世界點(world point)，而有

$$x'^2+y'^2+z'^2+\tau'^2=x^2+y^2+z^2+\tau^2$$

設有兩個事變，則在 Minkowski 世界中，可用(1)及(2)兩點表示之，而於其各座標之右下角分別註以 1 及 2，則有

$$x_1'^2+y_1'^2+z_1'^2+\tau_1'^2=x_1^2+y_1^2+z_1^2+\tau_1^2,$$

及
$$x_2'^2+y_2'^2+z_2'^2+\tau_2'^2=x_2^2+y_2^2+z_2^2+\tau_2^2.$$

上二式所表示之量，卽爲(1)及(2)兩點對於原點距離之平方. 由上二式，已見此兩個距離，不隨 Minkowski 座標軸系之轉換而變更. 然則此二點間之距離，亦不應隨 Minkowski 座標系之轉換而改變，如下式:

$$(x_2'-x_1')^2+(y_2'-y_1')^2+(z_2'-z_1')^2+(\tau_2'-\tau_1')^2,$$
$$=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2+(\tau_2-\tau_1)^2.$$

當此二世界點之距離頗小時，可假設

$$x_2'-x_1'=\Delta x',\quad y_2'-y_1'=\Delta y',\quad z_2'-z_1'=\Delta z',\quad \tau_2'-\tau_1'=\Delta\tau',$$
$$x_2-x_1=\Delta x,\quad y_2-y_1=\Delta y,\quad z_2-z_1=\Delta z,\quad \tau_2-\tau_1=\Delta\tau.$$

及此二點間之距離之平方爲

$$\Delta s^2=\Delta x'^2+\Delta y'^2+\Delta z'^2+\Delta\tau'^2,$$
$$=\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2+\Delta\tau^2.$$

$\Delta s$ 名曰此二事變之間隔，由上式可見 $\Delta s$ 爲一個不變量. 當此二點間之距離更行縮小至極限時，則其間隔之平方，可用微分公式表示之如下:

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2+d\tau^2.$$

根據相對論，在 Minkowski 世界中，其四條軸線 $x,y,z,\tau$，應爲各向同性的 (isotropic). 任何軸線，均不能有一個主要方向；即是說，在 Minkowski 世界中，沒有一個絕對的時間軸線方面，亦如在三度空間中，沒有一個絕對的垂直方向.

**19. 世界座標系之轉換** 當 $S'$ 系對於 $S$ 系有一個相對運動，其速度 $v$ 與 $x$ 軸相合時，其世界座標軸系之轉換，應有其 $y'$ 及 $z'$ 二軸，仍與 $y$ 及 $z$ 軸相合，而可視爲 $x'$ 軸及 $\tau'$ 軸在 $(x,\tau)$ 平面內，各轉動一相當之角度，及此角度應爲速度 $v$ 之函數. 欲求此轉動角度之大小，

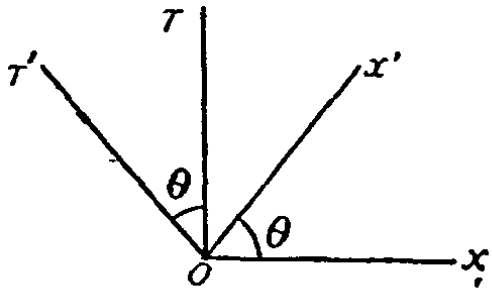


圖 5.

可先列出其轉換式，此轉換式應爲一個線形轉換式如下：

$$x'=x\cos(x',x)+y\cos(x',y)+z\cos(x',z)+\tau\cos(x',\tau),$$

$$y'=y,$$

$$z'=z,$$

$$\tau'=x\cos(\tau',x)+y\cos(\tau',y)+z\cos(\tau',z)+\tau\cos(\tau',\tau).$$

按 $(x',y)=(x',z)=(\tau',y)=(\tau',z)=90°$，然則有

$$x'=x\cos(x',x)+\tau\cos(x',\tau), \tag{1}$$

$$\tau'=x\cos(\tau',x)+\tau\cos(\tau',\tau). \tag{1'}$$

與 Lorentz 轉換式比較，可得

$$x'=\beta(x-vt)=\beta\left(x+i\frac{v}{c}\tau\right), \tag{2}$$

及 $$ict'=\beta\left(ict-i\frac{v}{c}x\right),$$

$$\tau'=\beta\left(\tau-i\frac{v}{c}x\right). \tag{2'}$$

由式(1)及(1′)與式(2)及(2′)之比較，求得

$$\cos(x',x)=\cos(\tau',\tau)=\beta,$$

及 $$\cos(x',\tau)=\frac{iv\beta}{c},\quad \cos(\tau',x)=-\frac{iv\beta}{c}.$$

再由 $$\beta^2+\left(\frac{iv\beta}{c}\right)^2=\beta^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)=1,$$

及命 $$\cos(x',\tau)=\cos(\tau,x')=\sin\theta,$$

求得 $$(\tau,x')=90^\circ-\theta. \tag{3}$$

及 $$\cos(\tau',x)=-\sin\theta=\cos(90^\circ+\theta),$$

求得 $$(\tau',x)=90^\circ+\theta. \tag{4}$$

由式(3)及(4)求得$(x',\tau')$二軸亦爲正交，而在$(x,\tau)$平面旋轉一角度$\theta$，或$(x',x)=(\tau',\tau)=\theta$，如圖5所示. 此角度之餘弦及正弦爲

$$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\quad \sin\theta=\frac{iv}{c\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

按$\sin\theta$爲一虛數，而$\cos\theta$之值不大於1，然則$\theta$應爲一虛角(imaginary angle)；卽是時間軸線$\tau$爲一虛軸線，而Minkowski世界爲一虛的世界(imaginary world).

**20. 世界向量及世界線** 在四度空間中，聯結任何二世界點所做成之直線，可得一個世界向量(world vector). 此向量可以表示二

世界點之間隔. 此間隔在四度空間中，為一個不變量，亦如通常之向量，在三度空間中，為一個不變量之意義相同.

一世界點在此四度空間中所劃之曲線，名曰世界線(world line). 例如由一質點所劃出之世界線，可以表示此質點演變時，一組合(set)時空座標之關係，或一事變演進時，各組時空座標之關係. 不論觀察者所在之座標系如何，對於時間之順序不能顛倒，即是說，世界線為不能折回的. 然則一切世界線，均為開放的，不能自行相交.

且任何世界線，均可視為由許多連續之小元間隔 (elementary interval)所構成. 每一小元間隔，或連續二鄰近世界點之間隔 $ds$，均為一個世界向量. 此小元間隔 $ds$，將到處與其世界線相切. 小元間隔為一不變量，然則世界線之形狀，不隨世界座標軸系之轉換而有所改變.

令 $dx, dy, dz$ 及 $d\tau$，為一世界向量 $ds$ 在一四個正交座標軸線上之分向量，則此世界向量與各座標軸之方向餘弦為

$$\alpha_1=\frac{dx}{ds},\quad \alpha_2=\frac{dy}{ds},\quad \alpha_3=\frac{dz}{ds},\quad \alpha_4=\frac{d\tau}{ds}.$$

由 $$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2=v^2-c^2,$$

求得 $$\left(\frac{dt}{ds}\right)^2=\frac{-1}{c^2-v^2},$$

及 $$\frac{dt}{ds}=\pm\frac{i}{\sqrt{c^2-v^2}}.$$

上式右邊，倘採用負號，可以求得:

$$\alpha_1=\frac{dx}{ds}=\frac{dx}{dt}\frac{dt}{ds}=-\frac{iv_x}{c}\beta,$$

$$\alpha_2=\frac{dy}{ds}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{ds}=-\frac{iv_y}{c}\beta,$$

$$\alpha_3=\frac{dz}{ds}=\frac{dz}{dt}\frac{dt}{ds}=-\frac{iv_z}{c}\beta,$$

$$\alpha_4=\frac{d\tau}{ds}=\frac{d\tau}{dt}\frac{dt}{ds}=\beta.$$

由上式，求得世界向量之四個方向餘弦，爲其速度之函數．當速度 $v=0$，即是說，觀察者在質點之自系中[1]，其世界向量將與時間軸線 $\tau$ 相切．是時事變之演進，其位置不變；或此事變之位置，在系中爲靜止的．

**21．世界點之同地及同時性** 設有一質點，其速度爲 $v$，則由此質點所演成之事變，其間隔之平方爲

$$(\Delta s)^2=(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2-c^2(\Delta t)^2=(v^2-c^2)(\Delta t)^2.$$

按一切質點之眞實速度，均小於光速．然則一切眞實運動，其間隔或其所做成之世界向量，均應爲一虛數，蓋有 $(\Delta s)^2<0$ 也．

當 $v=0$，即是此質點對於觀察者之自系爲靜止時，此世界向量 $\Delta s=ic\Delta t$，與時間軸線之方向相同，是稱爲時間世界向量（temporal world vector）．

如 $\Delta s^2>0$，或 $\Delta s$ 爲一實數，則不能夠表示一種眞實之運動；即是說，此二世界點所表示之事變，彼此不能發生關係．當 $\Delta s$ 與時間座標軸或 $\tau$ 軸爲正交時，則得一空間世界向量（spatial world vector）．

(1) 觀察者在質點之自系中，即是說觀察與質點無相對運動，或觀察者隨質點運動．

是時，此二世界點所表示之事變，有同時性.

如 $(\Delta s)^2=0$，或 $\Delta s=0$，則此世界線所表示之運動，當爲光量子或能量子之運動；卽是說，對於光量子之世界線，其間隔恆爲零.

此種區分，更可用圖線表示之. 在圖線中，對於虛軸線 $\tau$，將換用一個實的軸線 $\mu=ct$ 以表示之，而可得四個實的座標. 設 $S'$ 系對於 $S$ 系運動之速度 $v$，其方向與 $x$ 軸之方向相同，則由其相對應之四度空間座標系 $\Sigma$，變更爲 $\Sigma'$ 系時，只須將 $x$ 軸及 $\mu$ 軸，轉一相當之角度卽可.

設 $\mu$ 軸與 $x$ 軸爲正交，則有

$$x'=x\cos(x',x)+\mu\cos(x',\mu),$$

及
$$\mu'=x\cos(\mu',x)+\mu\cos(\mu',\mu).$$

由
$$x'=\beta\left(x-\frac{v}{c}\mu\right),$$

$$\mu'=\beta\left(\mu-\frac{v}{c}x\right),$$

求得
$$\cos(x',x)=\cos(\mu',\mu)=\cos(\mu,\mu')=\beta,$$

$$\cos(x',\mu)=\cos(\mu,x')=\cos(\mu',x)=-\frac{v}{c}\beta,$$

或
$$\sin[90^\circ-(\mu,x')]=\sin[90^\circ-(\mu',x)]=-\frac{v}{c}\beta.$$

令
$$\cos\psi=\beta,$$

則有
$$(x',x)=(\mu,\mu')=\psi. \tag{1}$$

另由
$$\beta^2+\left(-\frac{v}{c}\beta\right)^2=1,$$

或 $$(\mu, x') = (\mu', x) = 90^\circ - \psi. \tag{2}$$

由上(1),(2)兩式,可以做成$(x,\mu)$及$(x';\mu')$四軸線如圖 6.在圖 6 中可劃出兩組雙曲線,其公式如下:

$$x^2 - \mu^2 = \pm 1.$$

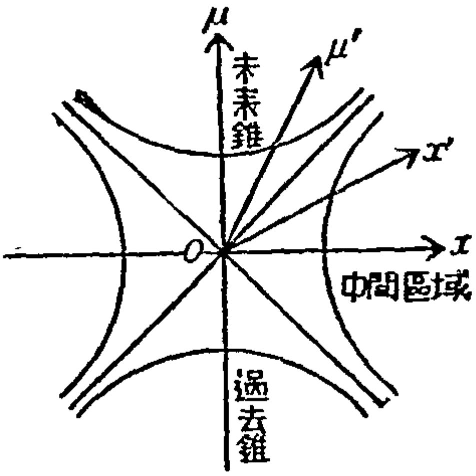

圖 6.

由此兩組雙曲線與 $x$ 軸及 $\mu$ 軸之交點,可以確定在原系中長度 $x$ 及時間 $t=\mu/c$ 之單位;及其與$x'$及$\mu'$軸之交點,可以表示在此新座標系中長度$x'$及時間 $t'=\mu'/c$ 之單位. 此兩組雙曲線之漸近線(asymptotes)

$$x-\mu=0 \text{ 及 } x+\mu=0,$$

可以表示光波傳播之世界線或光線. 蓋在此二世界線上,有

$$x = \pm\mu = \pm ct.$$

假如加入一軸線 $y$, 垂直於此平面,則此兩條漸近線,將變爲兩個錐面或光錐. 如再加一條與 $x$, $y$, $\mu$ 均爲正交之軸線 $z$, 則此兩個錐面將變爲兩個超錐面(conical supersurface)或超光錐. 此種光錐可分 Minkowski 世界爲三部分,而以其原點 $O$ 爲此時此地.

(a) 在 $\mu<0$ 部分之錐體,爲過去之世界錐. 在此錐內,任何一世界點所表示之事變, 均屬於過去的. 且由任一點引至原點之世界向量,均有$(\Delta s)^2<0$.然則任一點引至原點之世界線,可以表示一眞實之運動.

(b) 在 $\mu>0$ 部分之錐體,爲未來之世界錐. 在此錐中,任何一世界點所表示之事變, 均屬於未來的. 由原點引至錐內任一點之世

界向量，亦有$(\Delta s)^2<0$，即是此種運動均爲可能發生的.

(c) 包含 $x$ 軸線而在上二錐體以外之部分，爲中間區域(intermediate zone). 在此區域內，任一世界點所表示之事變，均不能與此時此地發生關係. 蓋由原點引至此區域內之任何世界向量，均有其$(\Delta s)^2>0$. 然則由原點引至此區域內之一切世界線，均不能表示一眞實之運動，或一事變演進之路線. 故名此區域爲中間區域. 在此區域中，一切世界點所表示之事變，均不能與此時此地之事變發生因果之關係.

與在 $x$ 軸線上之各點相當之事變，將表示其在 $\Sigma$ 系中有同時性，而在 $\Sigma'$ 系中，則此種同時性消失矣. 另外，與在 $\mu$ 軸上各點相當之事變，在 $\Sigma$ 系中爲同地，當轉換爲 $\Sigma'$ 系時，則此種事變非爲同地矣. 然則由此圖線，可以明示時空之相對性.

至原點 $O$ 則爲兩系公同之此時此地點，即爲此系中觀察者與彼系中觀察者相遇之點，或此二事變相疊合之點.

**22. Minkowski 速度** 世界點在世界線上演變之速度，名曰 Minkowski 速度. 當觀察者靜止於演變物體之上，或在以此物體爲基準之自系中，則其速度 $v=0$. 然則觀察者所見此物體所演之事變，其間隔爲

$$(ds)^2=-c^2(dt)^2,$$

或

$$\frac{ds}{dt}=ic.$$

上式相當於一世界點演進時之速度，是爲 Minkowski 速度. 由上式，可見在自系中所見物體之三個空間分速度均爲零，而此速度爲求得 $90^\circ-(\mu,x')=90^\circ-(\mu',x)=\psi,$

一個時間世界向量. 當另一觀察者不復靜止於此物體上, 卽是所用之座標系, 非爲該物體之自系時, 將見此物體之空間速度 $v$ 不復爲零; 卽是說, 此物體之 Minkowski 速度, 將隨世界座標軸系之轉換, 而有四個分速度:

$$
\begin{aligned}
q_x &= ic\alpha_1 = \beta v_x,\\
q_y &= ic\alpha_2 = \beta v_y,\\
q_z &= ic\alpha_3 = \beta v_z,\\
q_\tau &= ic\alpha_4 = ic\beta.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

其平方爲 $$q^2 = \beta^2(v^2 - c^2) = -c^2,$$

及 $$q = ic. \tag{2}$$

由上(2)式, 可見此速度爲一個不變量. 再由(1)式中之四式, 知在自系中一質點之 Minkowski 速度, 或一時間向量, 當其世界座標轉換時, 則有其三個空間分速度, 其數值與此質點之空間速度 $v$ 之各分速度成比例, 其比例係數均爲 $\beta$. 倘將此關係推廣而認爲此三個空間之向量 $v$, 在四度空間中, 亦有一時間分速度, 卽是認爲此空間速度 $v$, 亦爲一個世界向量時, 則應有下列之關係:

$$q = \beta v.$$

由上式, 可以求得 $v$ 之時間分速度

$$v_\tau = ic.$$

由上式, 可見此時間分速度卽爲此質點在自系中之 Minkowski 速度.

另外, 由

$$q_x = ic\alpha_1 = \frac{ds}{dt}\,\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt},$$

$$q_y = ic\alpha_2 = \frac{ds}{dt}\frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt},$$

$$q_z = ic\alpha_3 = \frac{ds}{dt}\frac{dz}{ds} = \frac{dz}{dt},$$

$$q_\tau = ic\alpha_4 = \frac{ds}{dt}\frac{d\tau}{ds} = \frac{d\tau}{dt},$$

可以證明此 Minkowski 速度，卽爲世界點在其世界線上之速度.

**23. Minkowski 力** 質量與 Minkowski 速度變更率之乘積，名曰 Minkowski 力，通常以 $P$ 表示之，則有

$$P = m\frac{dq}{dt}.$$

此公式與 Newton 動力學第二定律相當，卽是有

$$F = m\frac{dv}{dt} = ma. \tag{1}$$

按牛頓第二定律之另一種表示法爲

$$F = \frac{d(mv)}{dt}. \tag{2}$$

在 Newton 力學中，上二式有相等之價值；卽是假設質量爲一個不變量，則(2)式可由(1)式推出. 在相對論中，質量既爲速度之函數，則上二式不能同爲合理矣，吾人必須選用後者爲精確的. 蓋以後者可以維持動量不滅定律，且可以推廣應用於第三定律；卽是一切作用與反作用，其大小相等，方向相反也. 至於前者則可視爲一種特例；卽是當速度爲零時，質量可視爲一個定數 $m_0$，是時有

$$F = m_0\frac{dv}{dt} = m_0 a.$$

然則力量等於質量與加速度之乘積，實爲 Newton 第二定律之一種特例，是時力與加速度之方向相同. 倘採用(2)式，則力與加速度之方向，不必一定相同，當於 §24 中研究之.

由 $$m=m_0\beta,$$

及 $$q=\beta v,$$

可得 $$P=m\frac{d(\beta v)}{dt}=\beta\frac{d(mv)}{dt}.$$

再由(2)式與上式，求得

$$P=\beta F. \tag{3}$$

按 Minkowski 速度爲一個世界向量，然則 Minkowski力，亦爲一個世界向量. 在世界座標軸系中，其各分力爲:

$$P_x=\frac{\beta m_0 d(\beta v_x)}{dt},$$

$$P_y=\frac{\beta m_0 d(\beta v_y)}{dt},$$

$$P_z=\frac{\beta m_0 d(\beta v_z)}{dt},$$

$$P_\tau=ic\beta m_0\frac{d\beta}{dt}.$$

如將 $F$ 力亦推廣於世界座標軸系，則其四個分力爲:

$$F_x=\frac{m_0 d(\beta v_x)}{dt},$$

$$F_y=\frac{m_0 d(\beta v_y)}{dt},$$

$$F_z = \frac{m_0 d(\beta v_z)}{dt},$$

$$F_\tau = icm_0\frac{d\beta}{dt}.$$

按 $\beta$ 爲簡單之係數，然則由(3)式，可見 $P$ 與 $F$ 二力方向相同，且此二力均與世界線爲正交．玆證明於下：

如世界線爲一直線，則世界點所受之 Minkowski 力應爲零．蓋 $P \neq 0$，則 $F$ 亦不能爲零；即是說，質點之空間速度 $v$，將隨時間而變更．一世界點之 Minkowski 速度之三個空間分向量，又爲空間速度 $v$ 之函數．空間速度 $v$ 變更，則 Minkowski 速度之方向，亦將隨時變更，然則世界線不能爲一條直線矣．

Minkowski 速度雖爲一個虛數，但爲一個虛的常數，而非變數．當 Minkowski 力 $P$ 在世界線之切線上有一分力，則在此切線上，Minkowski 速度將發生變更，而不能爲常數，與上面定義發生衝突．然則 $P$ 及 $F$ 二力，均應隨時與世界線爲正交．

當經過之時間爲 $dt$，此世界線之切線，相對應偏轉之角度爲 $d\theta$．及令世界線之曲率半徑爲 $r = \frac{ds}{d\theta}$，則此世界點速度之增加率或 Minkowski 速度之變更率爲

$$a = \frac{dq}{dt} = ic\frac{d\theta}{dt} = ic\frac{d\theta}{ds}\,\frac{ds}{dt} = \frac{ic}{r} \times \frac{ic}{\beta} = -\frac{c^2}{\beta r}. \qquad (4)$$

然則由(4)式，可以推得 Minkowski 力

$$P = -\frac{mc^2}{\beta r} = -\frac{m_0 c^2}{r}.$$

由上式，可見 Minkowski 力與質量運動之速度，無直接關係，亦可證明此力量爲一個世界向量，其大小及方向，不因觀察者所在之世界座標系而改變.

在自系中，有其 $v=0$，然則有 $\beta=1$. 在此種特例下，世界點之加速度爲

$$f=-\frac{c^2}{r}.$$

在此種自系中，其質量($m_0$)與此加速度之乘積，亦等於Minkowski 力，即是有

$$P=-\frac{m_0c^2}{r}.$$

另外，由

$$F=\frac{P}{\beta}=-\frac{m_0c^2}{\beta r},$$

可見 $F$ 爲 $v$ 之函數，即是此力量隨質點之速度而變更. 然則此力量僅爲一個三度空間之力量，與 Newton 力學所得之結果相同.

**24. 縱力與橫力** 已知質量 $m=\beta m_0$，則 Newton 第二定律可寫爲

$$F=\frac{d(mv)}{dt}=\beta m_0\frac{dv}{dt}+m_0v\frac{d\beta}{dt}. \tag{1}$$

按
$$\frac{d\beta}{dt}=\frac{\frac{v}{c^2}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\frac{dv}{dt}=\beta^3\frac{v}{c^2}\frac{dv}{dt},$$

然則有
$$F=\beta m_0\left(1+\beta^2\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{dv}{dt}.$$

命 $a_1$ 爲加速度在速度方向上之分量，則在此方向上之分力爲

$$F_1=\beta m_0\left(1+\beta^2\frac{v^2}{c^2}\right)a_1$$

$$=\beta m_0\left(1+\frac{\frac{v^2}{c^2}}{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)a_1,$$

即

$$F_1=\beta^3 m_0 a_1. \tag{2}$$

此分力名曰縱力(longitudinal component of force).

命 $a_2$ 爲加速度在垂直於速度方向上之分量，則在此方向上之分力爲

$$F_2=\beta m_0 a_2. \tag{3}$$

此分力名曰橫力(transveral component of force)，蓋以 $\frac{d\beta}{dt}$ 爲一個無向量，(1)式第二項應與速度 $v$ 之方向相同也．由(2)及(3)式，可見此二分力與其相對應之分加速度，比例係數不同．然則力與加速度之方向，亦不能相同也．

另由(2)式，可見抵抗縱力之慣性，或在運動方向上之慣性質量爲

$$m_1=\frac{F_1}{a_1}=m_0\beta^3.$$

及由(3)式，可見抵抗橫力之質量，或在垂直於運動方向上之慣性質量爲

$$m_2=\frac{F_2}{a_2}=m_0\beta.$$

由上二式，可見一質點作一加速運動時，其所表現之慣性質量，對於各方向上，常常不能相等，而有 $m_2<m_1$.

25. **能量與質量之轉變**　按 $P$ 力及 $F$ 力均與 $ds$ 爲正交，有

$$Fds=F_xdx+F_ydy+F_zdz+F_\tau d\tau=0.$$

與一質點運動時，$F$ 力所做之功爲

$$dW=F_xdx+F_ydy+F_zdz.$$

又按
$$F_\tau d\tau=icdt\times icm_0\frac{d\beta}{dt}=-c^2dm.$$

然則有
$$dW=c^2dm, \tag{1}$$

或
$$dm=\frac{dW}{c^2}.$$

上二式可以表示，當一質量收入一工作或能量時，則其質量應有一相當之增加. 如收入之能量爲 $\Delta W$，則其質量之增加爲 $\Delta W/c^2$. 推廣之，能量之交換，可以使質量發生變更. 質量之增減，亦隨有能量之交換. 卽是說，能量與質量可以互相轉變，而質量不滅及能量不滅二定律，從此可合併爲一個定律，卽是質能總和不滅定律.

再由(1)式之積分，得

$$W=mc^2+C.$$

在上式中，當速度 $v=0$，卽是質點無移動時，其所做之工作 $W_0=0$，而有 $C=-m_0c^2$，然則有

$$W=(m-m_0)c^2=mc^2-m_0c^2. \tag{2}$$

上式右邊二項之因次，均應與能量之因次相同. $m_0$ 及 $m$ 又分別表示其靜止及運動時之質量. 然則可以 $E_0=m_0c^2$ 表示質點靜止時之

總能量, $E=mc^2$ 表示質點運動時之總能量,得其動能或工作爲

$$W=E-E_0.$$

根據上式,可以認爲凡有一質量 $m$, 則相當於一能量

$$E=mc^2.$$

或有一能量或一量子 $h\nu$, 則有一相當之質量 $h\nu/c^2$. 此點現在已有實驗之證明矣.

將(2)式展開,可得

$$W=m_0(\beta-1)c^2=m_0\left[\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}-1\right]c^2$$

$$=m_0c^2\left(\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}-\frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4}+\cdots\cdots\right).$$

通常物體之速度 $v$, 較光之速度頗爲小, 卽是 $\frac{v^4}{c^4}$ 以下各項可以忽略,則有 $W=\frac{m_0}{2}v^2$. 然則 Newton 力學中之動能,實爲當物體速度頗小時之一種特例.

當一物體,例如各種恆星,因輻射而損失一質量 $\Delta m$, 而仍欲維持其在空間之等速運動,則由動量不滅定律,此物體將受一力量 $F$ 之壓迫,而有

$$F=\frac{d(mv)}{dt}=v\frac{dm}{dt}=\frac{v}{c^2}\frac{dW}{dt}.$$

由上式,可見此力量與其輻射率 $\frac{dW}{dt}$ 成比例.

**26. 張量**　張量(tensor)在相對論中,頗爲重要. 此爲一種帶有幾何性質(quasi-geometrical)的集合量. 隨其級次(rank)及空間之

自由度(dimensions)而有許多之張分量(tensor components)。零級張量(tensor of rank zero)爲一個無向量。此級張量不論空間之自由度如何，僅有一個數值。且不論所用座標軸系之如何轉換，其數值不變，是爲一個不變量，卽是有

$$s' = s.$$

一級張量(tensor of rank one)卽爲一個向量[1]，在 $n$ 度空間內，有 $n$ 個分量。其各分量之值，是隨所用之座標軸系而轉換，而此向量之大小及其在空間之位置，均不能發生變化，卽是一切向量均爲不變量也。

最常用之張量爲二級張量，此張量之張分量，可視爲由兩個向量各分量兩兩相互之乘積所構成。在 $n$ 度空間內，共有 $n^2$ 個張分量，在四度空間內，名曰世界張量(world tensor)。二級世界張量，共有十六個張分量。在三度空間內，則二級張量共有九個張分量。推廣言之，$r$ 級張量，在 $n$ 度空間內，將有 $n^r$ 個張分量。

在三度空間內，一個二級張量 $k$ 之各張分量，可以用下列圖式(scheme)列出之：

$$\begin{array}{ccc} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} \end{array}$$

倘此張量係由 $C, D$ 二向量所構成，則有

$$k_{ii} = C_i D_i, \quad k_{ij} = C_i D_j.$$

---

(1) 此處所引之向量，與平常所稱之向量，性質有不同之處，當於廣義相對論中討論之。

其註指數(suffix) $i$ 及 $j$ 表示各整數(1,2,3). 前者其註指數相同,名曰第一類張分量(tensor components of the first kind),後者其註指數不同,名曰第二類張分量(tensor components of the second kind).

第二類張分量中,對於兩個註指數之字母相同,而次序爲顚倒者,此種張分量倘全相等,如 $k_{xy}=k_{yx}$,……,則此張量名曰對稱張量(symmetrical tensor).其絕對數值相等,而方向相反,如 $k_{xy}=-k_{yx}$,……,則名曰斜對稱張量(skew symmetrical tensor).在斜對稱張量中,其第一類張分量均應爲零.在三度空間中,對稱張量之九個張分量,僅用六量卽可表示之.斜對稱張量,則僅用三個分量卽可表示之.關於張量之性質,可由下舉三定理以範圍之.

**定理 a.** 一張量 $k$ 之三個第一類張分量之和,爲一個無向量(scalar),卽是等於兩個向量之無向量乘積(scalar product)如下式:

$$k_{xx}+k_{yy}+k_{zz}=C_xD_x+C_yD_y+C_zD_z=CD.$$

然則當座標軸轉變時,張量之轉變,其三個第一類張分量之總和不變,卽是有

$$k_{x'x'}+k_{y'y'}+k_{z'z'}=k_{xx}+k_{yy}+k_{zz}.$$

**定理 b.** 一張量 $k$ 之六個第二類張分量,其註指數相同而次序顚倒者,其兩兩之差等於 $C,D$ 二向量之向量乘積(vector product)之三個分量如下:

$$k_{yz}-k_{zy}=C_yD_z-C_zD_y=[CD]_x,$$
$$k_{zx}-k_{xz}=C_zD_x-C_xD_z=[CD]_y,$$
$$k_{xy}-k_{yx}=C_xD_y-C_yD_x=[CD]_z.$$

然則由此六個第二類張分量,可以導出一個向量 $E$,而有

$$E_x=[CD]_x=k_{yz}-k_{zy},$$

$$E_y=[CD]_y=k_{zx}-k_{xz},$$

$$E_z=[CD]_z=k_{xy}-k_{yx}.$$

**定理 c.** 一張量之向量散度(vector divergence)，其三個分量，可以構成一個向量如下:

$$V_x=\frac{\partial k_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial k_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial k_{xz}}{\partial z},$$

$$V_y=\frac{\partial k_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial k_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial k_{yz}}{\partial z},$$

$$V_z=\frac{\partial k_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial k_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial k_{zz}}{\partial z}.$$

一張量之各張分量，不一定由兩個向量各分量兩兩之乘積構成之. 凡能滿上述三定理者，均可稱爲一個張量. 例如一個向量之旋度(curl)，其三個旋度分量，亦可以構成一個斜對稱張量. 其三個張分量如下式:

$$R_{yz}=(\mathrm{curl}\,P)_x=\frac{\partial P_z}{\partial y}-\frac{\partial P_y}{\partial z},$$

$$R_{zx}=(\mathrm{curl}\,P)_y=\frac{\partial P_x}{\partial z}-\frac{\partial P_z}{\partial x},$$

$$R_{xy}=(\mathrm{curl}\,P)_z=\frac{\partial P_y}{\partial x}-\frac{\partial P_x}{\partial y}.$$

**27. 電磁場張量** 電磁場可以構成一個世界張量，蓋以電場與磁場，均爲空間與時間之函數，且有互相對應之關係. 此世界張量，應爲一四維斜對稱張量，蓋以電磁場之關係，非爲完全對稱的，此可由

Maxwell-Lorentz 之公式見之. 茲將其公式列舉如下:

$$\operatorname{div} H=0,\quad \operatorname{curl} H=\frac{1}{c}\left(\rho V+\frac{\partial E}{\partial t}\right),$$

$$\operatorname{div} E=\rho,\quad \operatorname{curl} E=-\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t}.$$

由上式中電場 $E$, 磁場 $H$, 及電荷密度 $\rho$, 均以 Heaviside 單位計算之[1], $V$ 及 $c$ 則表示電荷及光之速度.

(a) 在斜對稱張量, 磁場可視為由一個世界向量 $P$ 之旋度分量所構成, 如下式:

$$H_x=\frac{\partial P_z}{\partial y}-\frac{\partial P_y}{\partial z},\quad H_y=\frac{\partial P_x}{\partial z}-\frac{\partial P_z}{\partial x},\quad H_z=\frac{\partial P_y}{\partial x}-\frac{\partial P_x}{\partial y}.$$

電場之三個分量, 則由 $P$ 之時間分向量, 與每一個空間分向量所做成之旋度之各分量如下式:

$$E_x=\frac{\partial P_\tau}{\partial x}-\frac{\partial P_x}{\partial \tau},\quad E_y=\frac{\partial P_\tau}{\partial y}-\frac{\partial P_y}{\partial \tau},\quad E_z=\frac{\partial P_\tau}{\partial z}-\frac{\partial P_z}{\partial \tau}.$$

於是可得一個斜對稱張量, 其各張分量為

$$k_{yz}=H_x,\qquad k_{zx}=H_y,\qquad k_{xy}=H_z;$$

---

(1) Heaviside 電磁單位, 可參考 H. A. Wilson 著之 Modern Physics, p.2. 此單位係以下二式為基礎:

$$F=\frac{ee'}{4\pi r^2};\qquad F=\frac{mm'}{4\pi r^2}.$$

於是求得電荷單位為電荷靜電單位之 $\sqrt{4\pi}$ 倍, 電場單位為電場靜電單位之 $\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$ 倍, 磁場單位為 $\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$ 奥斯特.

$$k_{tx}=E_x,\qquad k_{ty}=E_y\qquad k_{tz}=E_z.$$

令　$$k_{xt}=ik_{tx},\qquad k_{yt}=ik_{ty},\qquad k_{zt}=ik_{tz},$$

則此張量之圖式如下:

$$\begin{array}{cccc}
0 & k_{xy} & k_{xz} & ik_{xt} \\
k_{yx} & 0 & k_{yz} & ik_{yt} \\
k_{zx} & k_{zy} & 0 & ik_{zt} \\
ik_{tx} & ik_{ty} & ik_{tz} & 0
\end{array}$$

做後列各偏微分 $\frac{\partial k_{yz}}{\partial x}$, $\frac{\partial k_{zx}}{\partial y}$, $\frac{\partial k_{xy}}{\partial z}$ 而加之,則其和爲零,如下式:

$$\frac{\partial k_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial k_{zx}}{\partial y}+\frac{\partial k_{xy}}{\partial z}=0.$$

同樣,可求得

$$\frac{\partial k_{zt}}{\partial y}+\frac{\partial k_{ty}}{\partial z}+\frac{\partial k_{yz}}{\partial t}=0,$$

$$\frac{\partial k_{tx}}{\partial z}+\frac{\partial k_{xz}}{\partial t}+\frac{\partial k_{zt}}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial k_{xy}}{\partial t}+\frac{\partial k_{yt}}{\partial x}+\frac{\partial k_{tx}}{\partial y}=0.$$

然則有

$$\frac{\partial H_x}{\partial x}+\frac{\partial H_y}{\partial y}+\frac{\partial H_z}{\partial z}=0,$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z}+\frac{1}{c}\frac{\partial H_y}{\partial t}-\frac{\partial E_z}{\partial x}=0,$$

$$-\frac{\partial E_z}{\partial y}+\frac{\partial E_y}{\partial z}-\frac{1}{c}\frac{\partial H_x}{\partial t}=0,$$

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial H_z}{\partial t}-\frac{\partial E_y}{\partial x}+\frac{\partial E_x}{\partial y}=0.$$

或　　　　$$\operatorname{div} H=0 \quad 及 \quad \operatorname{curl} E=-\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t}.$$

此世界向量 $P$，名曰 Minkowski 有向勢(vector potential)，而為電場及磁場所公有．然則電場及磁場，有一公共之來源矣．

(b) 設有一個世界張量

$$\begin{array}{llll}
t_{xx} & t_{xy} & t_{xz} & t_{x\tau}=it_{xt} \\
t_{yx} & t_{yy} & t_{yz} & t_{y\tau}=it_{yt} \\
t_{zx} & t_{zy} & t_{zz} & t_{z\tau}=it_{zt} \\
t_{\tau x}=it_{tx}, & t_{\tau y}=it_{ty}, & t_{\tau z}=it_{tz}, & t_{\tau\tau}=-t_{tt}.
\end{array}$$

令 $d\tau=icdt$，則有 $\frac{\partial t_{x\tau}}{\partial\tau}=\frac{\partial t_{xt}}{c\partial t}$．其向量散度 $V$ 之四個分量為

$$V_x=\frac{\partial t_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial t_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial t_{xz}}{\partial z}+\frac{\partial t_{xt}}{c\partial t},$$

$$V_y=\frac{\partial t_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial t_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial t_{yz}}{\partial z}+\frac{\partial t_{yt}}{c\partial t},$$

$$V_z=\frac{\partial t_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial t_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial t_{zz}}{\partial z}+\frac{\partial t_{zt}}{c\partial t},$$

$$V_t{}^{(1)}=\frac{\partial t_{tx}}{\partial x}+\frac{\partial t_{ty}}{\partial y}+\frac{\partial t_{tz}}{\partial z}+i\frac{\partial t_{tt}}{c\partial t}.$$

設此世界張量表示一電磁場張量，即是為一斜對稱世界張量，而有

$$t_{xx}=t_{yy}=t_{zz}=t_{tt}=0.$$

令　　　　$$H_x=t_{yz},\quad H_y=t_{zx},\quad H_z=t_{xy},$$

及　　　　$$E_x=t_{tx},\quad E_y=t_{ty},\quad E_z=t_{tz}.$$

---

(1) $V_\tau=iV_t$.

則有
$$V_x=\frac{\partial H_z}{\partial y}-\frac{\partial H_y}{\partial z}-\frac{1}{c}\frac{\partial E_x}{\partial t}, \tag{1}$$

$$V_y=\frac{\partial H_x}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial x}-\frac{1}{c}\frac{\partial E_y}{\partial t}, \tag{2}$$

$$V_z=\frac{\partial H_y}{\partial x}-\frac{\partial H_x}{\partial y}-\frac{1}{c}\frac{\partial E_z}{\partial t}, \tag{3}$$

$$V_t=\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}. \tag{4}$$

令 $V_1$ 表示此向量散度之空間分向量,或與 $\tau$ 軸為正交之方向上之分向量, $V_t$ 表示此向量散度之時間分向量,則有

$$V^2=V_1^2+V_t^2,$$

及
$$V_1^2=V_x^2+V_y^2+V_z^2.$$

綜合(1),(2),(3)及(4)式,得

$$\operatorname{curl} H=V_1+\frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t},$$

$$\operatorname{div} E=V_t.$$

以上式結果與 Maxwell 公式相比較,將見此電磁場張量,其向量散度之時間分向量 $V_t$,即等於電荷密度 $\rho$,其空間分向量 $V_1$,將等於 $\rho\frac{V}{c}$.

由電荷不滅基理,可以說電荷亦為一個不變量.設有一電荷 $e$,其所占之體積在其自系中為 $A_0$,則在其自系中其電荷密度為 $\rho_0=e/A_0$,亦應為一個不變量,是為 Minkowski 電荷密度.蓋以一物體在其自系之體積,應為一固定之數量也.

設此電荷 $e$ 對於觀察者之速度為 $v$,則其體積將收縮為 $A=\frac{A_0}{\beta}$.

然則觀察者所見之電荷密度爲

$$\rho=e/A=\beta\rho_0,$$

或 $$\frac{\rho}{\beta}=\rho_0=\text{不變量}.$$

Minkowski電流密度,卽爲Minkowski電荷密度與其Minkowski速度之乘積,得此電流密度爲 $ic\rho_0$. 其四個分向量爲

$$ic\rho_0\alpha_1=\rho_0\beta v_x=\rho v_x,$$

$$ic\rho_0\alpha_2=\rho_0\beta v_y=\rho v_y,$$

$$ic\rho_0\alpha_3=\rho_0\beta v_z=\rho v_z,$$

$$ic\rho_0\alpha_4=\rho_0\beta ic=\rho ic.$$

如將上述四個分量,視爲一個空間分向量,及一個時間分向量,則其空間分向量爲 $I_1=\rho v$. 再由 $t_{xr}=it_{xt}$, 可求得時間分向量爲 $\rho c$. 按電磁場張量中之向量散度 $V$, 有 $V_1=\frac{\rho V}{c}$ 及 $V_t=\rho$, 然則此向量散度 $V$ 卽等於 Minkowski 電流密度與光速 $c$ 之商; 卽是有

$$V=\frac{i\rho}{\beta}=i\rho_0.$$

由此可見此電磁場張量, 可分析爲電場張分量及磁場張分量. 此張分量可隨觀察者所在之座標軸系而變更; 卽是電場磁場各量, 均爲相對的, 而其 Minkowski電流密度 $\rho_0 ic$, 或此張量之向量散度 $V$ 爲一不變數. 然則電磁現象各種定律, 可以一個張量表示之, 是爲電磁場張量. 其各張分量之圖式如下:

$$\begin{array}{cccc} 0 & H_z & -H_y & -iE_x \\ -H_z & 0 & H_x & -iE_y \end{array}$$

$$H_y \quad -H_x \quad 0 \quad -iE_z$$

$$iE_x \quad iE_y \quad iE_z \quad 0$$

**28. 質量張量** 不論在任何參考座標系中，一物體靜止時之原質量 $m_0$ 及其原體積 $A_0$，均爲不變量、當此物體運動時，由 Fitzgerald-Lorentz 收縮，其體積將變爲 $A=A_0/\beta$. 或 $A\beta=A_0$ 爲一個不變量. 按物體之動的質量 (momental mass) 爲 $m=m_0/\beta$. 設以 $\rho$ 表示物體之密度，則有

$$\rho_0=\frac{m_0}{A_0}=\frac{m}{\beta^2 A}=\frac{\rho}{\beta^2}=\text{不變量}. \tag{1}$$

我們如將此質點運動時，其世界線小元 (world-line element) 之方向餘弦 (directional cosines)，雙雙與 (1) 式中之不變量之乘積，作成一個張量，則可得一個頗爲重要之對稱世界張量，是爲質量張量 (matter tensor). 其各張分量爲

$$\begin{cases} T_{11}=-\dfrac{\rho v_x^2}{c^2}, \quad T_{22}=-\dfrac{\rho v_y^2}{c^2}, \quad T_{33}=-\dfrac{\rho v_z^2}{c^2}, \quad T_{44}=\rho, \\ T_{12}=T_{21}=-\dfrac{\rho v_x v_y}{c^2}, \quad \cdots\cdots, \quad T_{14}=T_{41}=-i\dfrac{\rho v_x}{c}. \end{cases}$$

由上表，可見其時間張分量僅表示此質量之密度. 其各時空張分量 $T_{14}, T_{24}, T_{34}, T_{41}, \cdots\cdots$，則除一個公同之因子外，表示各動量之密度. 及有其第一類張分量之和爲

$$T_{11}+T_{22}+T_{33}+T_{44}=\rho\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)=\frac{\rho}{\beta^2}=\text{不變量}.$$

當 $v$ 之値頗小時，則其三個空間張分量之値，可以忽略，而此第一類張分量之和，將頗近於其密度 $\rho$.

# 下　篇

# 廣義相對論

**29. 等價原理**　在狹義相對論中，吾人業已闡明絕對速度無法確定；卽是密閉於一慣性系[1] (inertial system) 中之觀察者，無法發現其本系在自由空間之等速直線運動．如所在之座標系並非慣性系，例如對於自由空間，有一轉動或一加速運動時，則系中各物體將發生慣性力[2](inertial force)，如離心力及 Coriolis 力等．此種慣性力可由 Foucault 擺及重力擺等量出；卽是密閉於此系中之觀察者，仍可以發現其本系在自由空間之轉動及加速運動．然則絕對加速度，似將為存在的．在自由空間，如有絕對加速度存在，則絕對空間亦為存在，而相對論之基礎發生動搖矣．為排除此種障礙，Einstein 更創等價原理(principle of equivalence)以解釋之．

在一重力場中，任何物體均賦有一種重力加速度．此種加速度，與運動時之加速度，實為同一量度，而有其相同之因次．然則由加速度而產生之慣性力，與發生重力加速度之重力，應有相同之性質．當一升降機在空間自由墜落時，升降機及其中所載一切物體，對於地

(1) 以全部恆星之平均位置為參考座標系，凡對於此系僅有等速相對運動之系及此系，統稱日慣性系．在此系中之一切物體，僅受其慣性之影響時，只能做一等速運動．

(2) 慣性力 $F=-ma$．式中之負號，表示此力與加速度 $a$ 之方向相反．

面，均有一垂直向下之加速度，其數值與重力加速度相等．升降機中之一切物體，如不受外力之作用，則在機中之觀察者，將見其所作之各種運動，均爲直線等速運動．蓋以是時物體之慣性力與其重力恰互相抵消，可以證明慣性力與重力有其相同之性質．密閉於此升降機中之觀察者，將感覺其重力場爲零，卽是將感覺其本身之重力消失矣．故力亦有一相對之性質，而非爲絕對的矣．

Einstein 更假設一廣大之空盒，處於一頗爲遙遠之自由空間；卽是說，此盒離一切物體均極遙遠．在此盒中當無重力場存在矣．假設此盒被一長繩牽引，使之發生一加速度爲 $r$ 之運動，則密閉於此盒中之觀察者，將見一切物體，與在一重力場中所生之效果相同．其重力加速度，亦可由重力擺量出之，其數值將恰與長繩之加速度 $r$ 相等而方向相反．然則在此盒中之觀察者，不知此盒在自由空間之運動，將認爲盒中有一重力場存在矣．於是 Einstein 發表其等價原理如下：

在一均勻重力場中所發生之一切效應，與整系物體作一均勻之加速運動，所見之現象相同．

此原理亦可應用於轉動方面．一物體轉動時發生之離心力在此物體外之觀察者，將見此力爲一虛力 (fictitious force)．當觀察者在此動系中，則感覺此離心力爲一實力 (real force)；卽是說，物體轉動之觀察者，將感覺有一力場存在．玆證明之如下：

設有一參考系 $S$，其三個正交座標軸爲 $Oxyz$，及另一參考系 $S'$，其三個正交座標軸爲 $O'x'y'z'$，而有 $z'$ 軸與 $z$ 軸相合，$O'x'y'$ 平面與 $Oxy$ 平面相合，及 $x'$ 軸與 $y'$ 軸以一角速度 $\omega$ 繞 $z'$ 軸旋轉．設 $S'$ 系中有一點 $M'$．在 $S$ 系中之觀察者，僅見 $M'$ 點繞 $z$ 軸旋轉，有一角速

度 $\omega$，而有一向心之加速度 $r\omega^2$. 至於在 $S'$ 系中之觀察者，則感覺此 $M'$ 點似有一向外之重力，其重力加速度，可由 Foucault 擺量得之，其值亦將爲 $r\omega^2$（$r$ 爲此點至旋轉軸 $z'$ 之距離）. 倘 $S'$ 系中之觀察者，不知其本系之旋轉，則見其系中之一切物體，皆受一力場之支配，此性質與重力場相同，其方向係與 $z'$ 軸爲正交而向各方向發出，其大小則與至其軸線之距離成比例. 然則由觀察者所在之座標系之轉換，可以表現出一個幾何力場 (geometrical field of force)，與在加速度之直線座標系中，其所發生之幾何力場爲相似的.

由等價原理，吾人將無法判別一重力場與一加速座標系. 蓋以各加速系之表現，相等於一重力場也. 然則所謂絕對加速度，將從此推翻矣. 假如地球終年均爲密雲遮蓋，人類又無交通，吾人將無法證明自由墜落等效應爲一種重力效應，抑爲地面作加速度 $g$ 之上升運動[1].

**30. 慣性質量與重力質量**　反抗速度變更之質量，是爲慣性質量. 如物體有一加速度，則發生一慣性力，其方向與加速度之方向相反. 慣性質量即等於慣性力與加速度比率之絕對值. 至於產生力場之重力質量，或在一力場中感受重力之質量，則等於此物體所感受之重力與其重力加速度之比值. 二者之定義判然不同. 按等價原理，由座標軸系之轉換，重力與慣性力有相等之價值: 然則對於任何物體，必須其慣性質量與重力質量二者之值相同，此原理始能應用.

實驗方面，Eotvös(1890)曾用精細之儀器以研究地面各點之重

(1) 重力場與加速系，在密閉之座標系內，仍可由實驗判別之. 蓋以除重力場外，尚有電力場及磁力場等，惟後述二種力場，僅電磁物質始有此效應耳.

力及重力加速度．蓋以地面此種重力，實包含地心引力及慣性力或離心力二者，其加速度亦包含其相對應之兩個加速度．經 Eotvös 詳細之分析，求得其相對應之兩種質量，即是重力質量與慣性質量，實完全相同．

理論方面，當一物體運動時，如此物體之質量頗小，則此物體在 Minkowski 世界中之世界線，其形狀及曲率，完全視其他質量在此世界中之時空分配而定；即是說，視重力場之分配而定，與該質量之量[1]及其各種化學性質無關係．此質點之加速度及其慣性力，又視其世界線之形狀及曲率而定；即是慣性力與重力，及加速系與重力場，實不能強爲分開，而重力定律，即可視爲慣性定律之推廣矣．然則重力質量與慣性質量之値，當然應爲相等．

**31．最短曲線**　在一平面內，設有 $A, B$ 二點，其 Cartesian 座標爲$(x_1, y_1)$及$(x_2, y_2)$，將此二點以一曲線聯結之，則此聯線之長度，或此二點間之曲線距離，可用一個積分公式表示之如下：

$$s=\int_A^B ds,$$

而
$$ds^2=dx^2+dy^2.$$

$dx$ 及 $dy$ 爲此曲線中各小元(elements)兩端二點對於橫直二座標之微分，而 $ds$ 即表示此小元曲線之長度．蓋此種微分之小元，可視爲與其切線段相合也．根據最大及最小原理，令此二點間最近之距離爲 $s$，則應有

(1) 此量當然應小至於可以忽略之程度，即是說，由此質量本身所發出之重力場，可以忽略．此種極小之質量，通常稱爲試驗質量(test mass).

$$\delta s=\delta\int_A^B ds=0. \tag{1}$$

式中之 $\delta$ 係表示一頗小之移動或變更. 是爲最短距離公式. 在一平面內, 任何二點間之最短距離, 爲其直線距離, 此點頗爲明顯, 亦頗易證明.

當 $A, B$ 二點係在一曲面內時, 其聯線無論如何, 均爲一曲線. 其最短之曲線或最短曲線(geodetic line or ge:desic)亦可用上式表示之. 玆證明之如下:

一曲面可視爲由一平面畸變而成. 設於一平面內作兩組等距而交互平行於 $Ox$ 及 $Oy$ 二正交軸之平行線 $x=0, 1, 2, 3, \cdots\cdots$ 及 $y=0, 1, 2, 3, \cdots\cdots$, 則此二組平行線畸變之後, 在曲面內將成爲二組互爲正交之曲線; 卽是 $x$ 組中任一線, 到處均與 $y$ 組各線成正交, $y$ 組中任一線, 到處亦均與 $x$ 組中各線爲正交, 而每一組中任何二線均不能互相交割. 倘此種畸變爲均勻的, 則此二組曲線間距離之比值, 將仍保持其 $x=0, 1, 2, 3, \cdots\cdots$ 及 $y=0, 1, 2, 3, \cdots\cdots$, 如圖 7. 然則每一組曲線, 仍可以確定一個座標, 而成爲一組曲線座標系. 此種曲線座標系, 名曰 Gaussian 座標系.

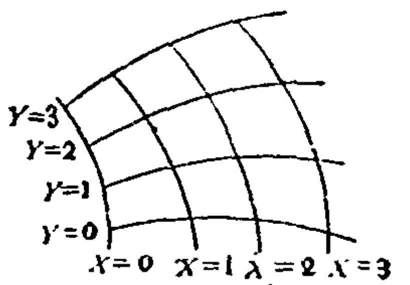

圖 7.

設 $A, B$ 二點原在一平面內, 其 Cartesian 座標爲 $(x, y)$ 及 $(x+dx, y+dy)$, 當此平面均勻畸變而成爲上述之曲面時, 其 Gaussian 座標軸, 卽爲其 Cartesian 座標軸畸變而成. 則其 Gaussian 座標將

仍爲$(x, y)$及$(x+dx, y+dy)$，其小元曲線之長度$ds$，即等於其原來在平面內時之直線距離. 然則在平面內任何二點$C$，$D$間之直線，畸變爲一曲面內之曲線時，其曲線距離仍爲$\int_C^D ds$. 其最短曲線，仍可用(1)式表示之. 即是有

$$\delta\int_C^D ds=0.$$

在一曲面內，其最短曲線之意義，不如平面內最短曲線之容易看出，例如地面同緯度二點間之最短曲線，不與緯線相合，而與經過此二點所做大圓之圓弧相合.

**32. 空間之彎曲** 一直線可在一平面或二度之空間內，畸變而成爲一曲線. 一平面可在三度空間內畸變而成爲一曲面. 推廣此義，然則一立體或平直空間(flat space)，亦可在 Minkowski 世界內畸變而成一彎曲之空間(curved space). 此彎曲之空間，又名曰 Riemann 空間. 實際方面，此種畸變之發生，可以視爲受一力場之作用. 例如在重力場中之拋射物體，其軌跡通常不爲直線，而爲一拋物線. 在重力場中，靜止之水平面不爲一理想之平面，而爲一球面（實則，因離心力之加入，海洋之眞實表面爲一橢圓球面）. 然則在一物體附近之空間，受重力之影響，在 Minkowski 世界中，當然爲一彎曲之空間. 此點可由在任何力場中，其世界線均爲曲線以證明之.

按等價原理，雖可以消除加速度及重力加速度之差別，然尙不能完全取消絕對之意義，蓋以重力加速度，仍有加速度之因次也. 由空間之彎曲與力場之關係，於是此絕對加速度，將完全喪失其意義.

何則，蓋加速度可視爲等於一力場之作用，力場可用一種彎曲之空間以替代之．此彎曲之空間，又可視爲由平直之空間畸變而成，然則祇須將座標系轉變，即可得一加速度矣．按重力場由質量發出，而空間之彎曲，則可視爲空間之度數增高．然則質量與時間相同，亦可以將四度之時空再增一度．故由廣義相對論，可以創出更爲高度之空間．

**33. Cartesian 座標系及 Gaussian 座標系** 在一平面內，設有頗爲隣近之 $A, B$ 二點，其 Cartesian 座標爲$(\xi,\eta)$及$(\xi+d\xi,\eta+d\eta)$，則此二點間之距離爲

$$dl^2=d\xi^2+d\eta^2.$$

倘換用另一組 Cartesian 座標系 $S'$，則此 $A, B$ 兩點之座標，將換爲$(\xi',\eta')$及$(\xi'+d\xi',\eta'+d\eta')$．吾人應有兩個線形關係如下：

$$\xi'=\phi_1(\xi,\eta),\qquad \eta=\phi_2(\xi,\eta),$$

及
$$d\xi=\frac{\partial\phi_1}{\partial\xi}d\xi+\frac{\partial\phi_1}{\partial\eta}d\eta,\qquad d\eta'=\frac{\partial\phi_2}{\partial\xi}d\xi+\frac{\partial\phi_2}{\partial\eta}d\eta.$$

在 $S'$ 系中，令此二點間之距離爲 $dl'$，則有

$$dl'^2=d\xi'^2+d\eta'^2=g_{11}d\xi^2+g_{22}d\eta^2+g_{12}d\xi d\eta+g_{21}d\eta d\xi.$$

而有
$$g_{11}=\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi_2}{\partial\xi}\right)^2,\quad g_{22}=\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial\eta}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi_2}{\partial\eta}\right)^2,$$

$$g_{12}=g_{21}=\frac{\partial\phi_1}{\partial\xi}\frac{\partial\phi_1}{\partial\eta}+\frac{\partial\phi_2}{\partial\xi}\frac{\partial\phi_2}{\partial\eta}.$$

按
$$dl'=dl,$$

然則應有
$$g_{11}=g_{22}=1,\quad 及\quad g_{12}=g_{21}=0.$$

設 $A, B$ 二點在一曲面內，其 Gaussian 座標爲$(\xi,\eta)$ 及 $(\xi+d\xi,$

$\eta+d\eta$). 如此部分曲面頗小，則可視爲與其切面相合. 令此二點在切面上之 Cartesian 座標爲$(x, y)$及$(x+dx, y+dy)$，則有

$$\xi=f_1(x, y), \qquad \eta=f_2(x, y),$$

及
$$d\xi=\frac{\partial f_1}{\partial x}dx+\frac{\partial f_1}{\partial y}dy, \qquad d\eta=\frac{\partial f_2}{\partial x}dx+\frac{\partial f_2}{\partial y}dy.$$

二點間距離之平方爲

$$ds^2=d\xi^2+d\eta^2=g_{11}dx^2+g_{22}dy^2+g_{12}dx\,dy+g_{21}dy\,dx.$$

而有
$$g_{11}=\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2, \quad g_{22}=\left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)^2,$$

$$g_{12}=g_{21}=\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial f_1}{\partial y}+\frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{\partial f_2}{\partial y}.$$

在上列三式中之各量 $g$ 應爲 $x$ 及 $y$ 之函數，不能常等於零. 蓋以此二點在曲面上之距離，其平方不復恆等於 $dx^2$ 與 $dy^2$ 之和也.

設有 $n$ 個變數 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n$，即是說，有 $n$ 個座標，而組成一個 $n$ 度之空間，即所謂 Riemann 空間是也. 在此空間內，當其座標轉爲 $x_1', x_2', \cdots\cdots, x_n'$ 時，則有

$$x_1'=\phi_1(x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots, x_n),$$
$$x_2'=\phi_2(x_1, x_2, x_3, \cdots\cdots, x_n),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

其微分爲

$$dx_1'=\frac{\partial \phi_1}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial \phi_1}{\partial x_2}dx_2+\cdots\cdots+\frac{\partial \phi_1}{\partial x_n}dx_n,$$

$$dx_2'=\frac{\partial \phi_2}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial \phi_2}{\partial x_2}dx_2+\cdots\cdots+\frac{\partial \phi_2}{\partial x_n}dx_n,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

及 $$ds^2=\left[\left(\frac{\partial\phi_1}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi_2}{\partial x_1}\right)^2+\cdots\cdots+\left(\frac{\partial\phi_n}{\partial x_1}\right)^2\right]dx_1^2$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\left[\frac{\partial\phi_1}{\partial x_1}\frac{\partial\phi_1}{\partial x_2}+\frac{\partial\phi_2}{\partial x_1}\frac{\partial\phi_2}{\partial x_2}+\frac{\partial\phi_3}{\partial x_1}\frac{\partial\phi_3}{\partial x_2}+\cdots\cdots\right]dx_1dx_2$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\left[\frac{\partial\phi_1}{\partial x_2}\frac{\partial\phi_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\phi_2}{\partial x_2}\frac{\partial\phi_2}{\partial x_1}+\cdots\cdots+\frac{\partial\phi_n}{\partial x_2}\frac{\partial\phi_n}{\partial x_1}\right]dx_2dx_1$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$=g_{11}dx_1^2+g_{22}dx_2^2+\cdots\cdots+g_{12}dx_1dx_2+g_{21}dx_2dx_1+\cdots\cdots,$$

而有 $$g_{hk}=\sum_i\frac{\partial x_i}{\partial x_h}\frac{\partial x_i}{\partial x_k}.$$

按 $\frac{\partial x_i}{\partial x_h}\frac{\partial x_i}{\partial x_k}$ 乘積之值，與其二因數之次序無關，卽是有相對應之關係，然則有

$$g_{hk}=g_{kh}.$$

在兩度空間，此種量 $g_{hk}$ 共有四個，而有兩個爲相同的，卽是僅有三個. 在三度空間，共有九個，而有六個兩兩相同，卽是只剩有六個. 四度空間，將有十六個，而有十二個兩兩相同，卽是僅有十個. 此十六個 $g_{hk}$ 之值，可以構成一個對稱張量，其圖式如下:

$$\begin{matrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14}\\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24}\\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34}\\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44}\end{matrix}$$

而有　　　　$g_{12}=g_{21},\quad g_{13}=g_{31},\quad \cdots\cdots.$

在平直空間中,吾人已知

$$ds^2=dx_1^2+dx_2^2+dx_3^2+\cdots\cdots+dx_n^2.$$

然則應有

$$g_{hk}=\begin{cases}1 \text{ 當 } h=k;\\ 0 \text{ 當 } h\neq k.\end{cases}$$

結果在二度之平直空間或一平面內,僅有兩個張分量,其圖式如下:

$$\begin{matrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{matrix}$$

在平直之 Minkowski 世界中,則僅有四個張分量如下圖式:

$$\begin{matrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{matrix}$$

**34. 張量之推廣概念**　由一 Gaussian 座標系 $G$,轉換為另一 Gaussian 座標系 $G'$ 時,其座標微分之轉換為

$$\left.\begin{aligned}dx'&=\frac{\partial x'}{\partial x}dx+\frac{\partial x}{\partial y}dy+\frac{\partial x'}{\partial z}dz\\ dy'&=\frac{\partial y'}{\partial x}dx+\frac{\partial y'}{\partial y}dy+\frac{\partial y'}{\partial z}dz\\ dz'&=\frac{\partial z'}{\partial x}dx+\frac{\partial z'}{\partial y}dy+\frac{\partial z'}{\partial z}dz\end{aligned}\right\}, \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} dx&=\frac{\partial x}{\partial x'}dx'+\frac{\partial x}{\partial y'}dy'+\frac{\partial x}{\partial z'}dz' \\ dy&=\frac{\partial y}{\partial x'}dx'+\frac{\partial y}{\partial y'}dy'+\frac{\partial y}{\partial z'}dz' \\ dz&=\frac{\partial z}{\partial x}dx'+\frac{\partial z}{\partial y'}dy'+\frac{\partial z}{\partial z'}dz' \end{aligned}\right\}. \tag{2}$$

$dx$, $dy$, $dz$ 表示一線段或一位移 $ds$ 在 $G$ 系中之三個分量，$dx'$，$dy'$，$dz'$ 則表示此線段在 $G'$ 系中之三個分量．設有一力量，在 $G$ 系中，其分力爲 $X,Y,Z$，在 $G'$ 系中爲 $X',Y',Z'$，則當此力量循 $ds$ 移動時，在 $G$ 系中之工作爲

$$dW=Xdx+Ydy+Zdz. \tag{3}$$

因工作爲一個不變量，然則在 $G'$ 系中，其工作爲

$$dW=X'dx'+Y'dy'+Z'dz'. \tag{4}$$

以(2)式中 $dx,dy$ 及 $dz$ 之値代入(3)式中，求得

$$\begin{aligned} Xdx+Ydy+Zdz=&X\left(\frac{\partial x}{\partial x'}dx'+\frac{\partial x}{\partial y'}dy'+\frac{\partial x}{\partial z'}dz'\right) \\ &+Y\left(\frac{\partial y}{\partial x'}dx'+\frac{\partial y}{\partial y'}dy'+\frac{\partial y}{\partial z'}dz'\right) \\ &+Z\left(\frac{\partial z}{\partial x'}dx'+\frac{\partial z}{\partial y'}dy'+\frac{\partial z}{\partial z'}dz'\right) \\ =&\left(X\frac{\partial x}{\partial x'}+Y\frac{\partial y}{\partial x'}+Z\frac{\partial z}{\partial x'}\right)dx' \\ &+\left(X\frac{\partial x}{\partial y'}+Y\frac{\partial y}{\partial y'}+Z\frac{\partial z}{\partial y'}\right)dy' \\ &+\left(X\frac{\partial x}{\partial z'}+Y\frac{\partial y}{\partial z'}+Z\frac{\partial z}{\partial z'}\right)dz'. \end{aligned} \tag{5}$$

然則有
$$X'=X\frac{\partial x}{\partial x'}+Y\frac{\partial y}{\partial x'}+Z\frac{\partial z}{\partial x'},$$
$$Y'=X\frac{\partial x}{\partial y'}+Y\frac{\partial y}{\partial y'}+Z\frac{\partial z}{\partial y'}, \tag{6}$$
$$Z'=X\frac{\partial x}{\partial z'}+Y\frac{\partial y}{\partial z'}+Z\frac{\partial z}{\partial z'}.$$

對於各座標 $x\ y\ z$ 如改用廣義座標 $x_1, x_2, x_3$, 並推廣至 $x_4, x_5, \cdots \cdots, x_n$, 則(1)及(6)二式之結果, 可縮寫爲

$$dx'_h=\sum_k\frac{\partial x'_h}{\partial x_k}dx_k; \tag{7}$$

$$X'_h=\sum_k\frac{\partial x_k}{\partial x'_h}X_k. \tag{8}$$

由上二式, 可見其轉換方式不同. 按 $dx$ 及 $X$ 均爲向量, 爲分別此二種向量起見, 凡與(8)之轉換式相同者, 名曰協變向量(covariant vector). 其註指數常書於右下角, 例如

$$A'_h=\sum_k\frac{\partial x_k}{\partial x'_h}A_k.$$

凡與(7)之轉換式相同者, 名曰逆變向量(contravariant vector). 除對於位移 $dx_h$ 外, 其註指數常書於右上角, 例如

$$A'^h=\sum_k\frac{\partial x'_h}{\partial x_k}A^k.$$

在 Euclidean 幾何中, 此二種向量之性質, 並無分別. 在 Riemannian 幾何中, 由其轉換形式之不同, 可發生一重要之差別, 而產生下述之結果; 即是當一逆變向量之各分量與其對應之協變向量之各分

量作一內乘積(inner product)或無向量乘積(scalar product)時，其總和爲一個不變量如下式:

$$\sum_h A'_h B'^h = \sum_k A_k B^k = \text{不變量}.$$

一向量之各分量與另一向量之各分量之廣泛乘積，是爲外乘積(outer product). 二向量之外乘積，可以作成一個張量. 如此二向量俱爲協變向量，則可作成一協變張量(covariant tensor)，其轉換式如下:

$$A'_{pr} = \sum_{hk} \frac{\partial x_h}{\partial x'_p} \frac{\partial x_k}{\partial x'_r} A_{hk}.$$

如此二向量俱爲逆變向量，則可作成一個逆變張量(contravariant tensor)；其轉換式如下:

$$A'^{pr} = \sum_{hk} \frac{\partial x'_p}{\partial x_h} \frac{\partial x'_r}{\partial x_k} A^{hk}.$$

如一爲協變向量，一爲逆變向量，則可得一個混合張量(mixed tensor)，其轉換式如下:

$$A'^r_p = \sum_{hk} \frac{\partial x_h}{\partial x'_p} \frac{\partial x'_r}{\partial x_k} A^k_h.$$

另外，由上三式，可見換用 $x_1', x_2', x_3', x_4'$ 座標系時，任何一張分量皆等於許多項之和. 當其座標轉換時，其中任何一項均與原來之座標系 $x_1, x_2, x_3, x_4$ 中各張分量之一成比例. 在任一座標系中，如有一張量其值爲零，卽是說，在此系中其各張分量之值均爲零，則此張量經轉換後，在任何座標系中，其值亦均爲零.

假若有一個自然律，對於任一集體物質之參攷系中，其各座標 $x_1, x_2, x_3, x_4$ 間之關係，可用一張量 $T=0$ 以表示之，則在其他一切座標系中，此定律均可用其相當之張量 $T'=0$ 以表示之.

Einstein 廣義相對論，認爲一切自然定律，均可用 $T=0$ 以表示之；卽是說，一切自然定律所表現之關係，不隨所用之座標軸系而變更.

**35. 張量之收縮**　在一混合張量中，其上下註指數如有相同者，則此相同之註指數，可以縮去，而將其級數降低二級. 例如一張量

$$A^{\rho}_{hk\rho}=\sum_{\rho} A^{\rho}_{hk\rho}=B_h C_k \sum_{\rho} D_{\rho} E^{\rho}.$$

按 $\sum_{\rho} D_{\rho} E^{\rho}$ 爲一個不變量，然則有

$$A^{\rho}_{hk\rho}=B_h C_k=A_{hk}.$$

此種手續，名曰收縮(contraction). 利用此種手續與外乘積，吾人可自任何一種張量，導出其他之各種張量. 玆舉例如下:

(a) 設以一協變向量，乘一逆變張量，則可得一個三級之混合張量:

$$g^{kp}A_h=A^{kp}_h.$$

令 $p=h$ 而收縮之，則可得一個逆變向量如下:

$$A^{kh}_h=A^k. \tag{1}$$

由上二式，可見由一協變向量 $A_h$，可以導出一個逆變向量 $A^k$.

(b) 由一個逆變向量 $B^k$，亦可以導出一個協變向量，只須以此逆變向量與一協變張量相乘，而後收縮卽得之，如下式:

$$B_p = g_{kp} B^k.$$

上式中之 $B^k$，如代以(1)式中之 $A^k$，則得

$$B_p = g_{kp} A^k = g_{kp}\, g^{hk} A_h = \delta_p^h\, A_h = A_p,$$

或
$$B_h = g_{kh} B^k = A_h.$$

由上列各式，可見 $A^h$ 與 $A_h$ 二種向量，彼此間有一相互之關係．與其說其爲一個獨立的逆變向量 $A^h$，及一個獨立的協變向量 $A_h$，我們可以簡單認爲係屬於同一個向量，其逆變分向量爲 $A^h$，及其協變分向量爲 $A_h$ 而已．

此種收縮，亦可用於張量．設有一個混合張量

$$A_h^p = g^{pk} A_{hk}.$$

此混合張量，可視爲由一協變張量 $A_{hk}$ 所導出．以一個逆變張量 $g^{si}$ 乘上式之混合張量，再令 $i=h$ 而收縮之，則可得一逆變張量如下式：

$$g^{pk} A_{hk} g^{si} = g^{pk} g^{sh} A_{hk} = A^{ps}.$$

混合張量 $A_h^p$ 既可視爲由協變張量 $A_{hk}$ 所導出，然則此逆變張量 $A^{ps}$，亦可視爲係由此協變張量 $A_{hk}$ 所導出．推廣言之，一協變張量及一混合張量，亦可視爲由一逆變張量所導出．然則此三種張量，實可視爲屬於同一個張量，而有其協變分量、逆變分量、及混合分量三個張分量而已．

**36．長度空間基本張量**　由公式

$$ds^2 = \sum_{hk} g_{hk}\, dx_h\, dx_k.$$

茲取消其符號 $\Sigma$，而簡書之爲

$$ds^2 = g_{hk}\, dx_h\, dx_k.$$

按 $dx_h$, $dx_k$ 可以構成一個二級逆變張量，而 $ds^2$ 爲一個不變量，然則 $g_{hk}$ 應爲一個二級協變張量之張分量．組成此張量之兩個協變向量，係由空間座標之轉換所導出．故此張量名曰長度空間基本張量(metric fundamental tensor)．在§32中，吾人求得

$$g_{hk}=g_{kh}.$$

然則此種長度空間基本張量，實爲一個對稱協變張量．其幾何配量(geometrical manifold)，在空間均爲連續之變更，而構成一空間場量(metric field)．

由此長度空間基本張量，與其他張量或向量之收縮，可以導出其他基本張量．

設以 $g$ 表示§32圖式中之行列式如下：

$$g=\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}.$$

在此行列式中，試取消其 $h$ 列及 $k$ 行所得之小式(minor)，而乘以 $(-1)^{h+k}$，則得其協因數(cofactor) $G_{hk}$．例如

$$G_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{14} \\ g_{31} & g_{32} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{44} \end{vmatrix}.$$

而有 $$G_{hk}=\sum_h\sum_k G_{hk}=\sum_h(G_{h1}+G_{h2}+G_{h3}+G_{h4}),$$

或 $$G_{hk}=\sum_k(G_{1k}+G_{2k}+G_{3k}+G_{4k}).$$

按 $$g=\sum_k g_{1k}G_{1k}=\sum_k g_{2k}G_{2k}$$

$$=\sum_k g_{3k}G_{3k}=\sum_k g_{4k}G_{4k},$$

結果有 $$\sum_{hk} g_{hk}G_{hk}=4g.$$

倘取消其和之符號 Σ，則可簡寫為

$$g=g_{1k}G_{1k},$$

或 $$g_{hk}\frac{G_{hk}}{g}=4.$$

4 為一個簡單之數值，即是為一個不變量. 然則可以假設有一個二級之逆變張量

$$g^{hk}=\frac{G_{hk}}{g}.$$

此張量名曰基本逆變張量(contravariant fundamental tensor). 而有

$$g_{hk}g^{hk}=4.$$

設以基本逆變張量之各張分量，乘一此長度空間基本張量之各張分量，則可得一四級之混合張量:

$$g_{hp}^{kr}=g_{hp}\cdot g^{kr}.$$

令 $r=p$ 而收縮之，則可以得一個基本混合張量(mixed fundamental tensor)如下式:

$$g_h^k = g_{hp} \cdot g^{kp} = \frac{g_{hp} G_{kp}}{g}.$$

令 $h=k$ 而收縮之，則此基本混合張量，將變成一簡單之數值，卽是說，變爲一個不變量，如下式:

$$g_h^k = \frac{g_{hp} G_{kp}}{g} = 1.$$

當 $h \neq k$，則上式中之 $g_{hp} G_{kp}$，卽等於在行列式 $g$ 中，以第 $h$ 列各小元(element)，與取消第 $k$ 列之各協因數相互之乘積之和．例如

$$g_{2p} G_{1p} = \begin{vmatrix} g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{vmatrix}.$$

在上式中，其第一及第二兩列各小元，完全相同．然則此行列式恆爲零，卽是當 $k \neq h$ 時，則應有

$$g_h^k = 0.$$

此結果，與§33一個協變張量 $g_{hk}$ 所得之結果，完全相同；卽是說，此長度空間，爲一個平直空間．

**37．最短曲線之應用公式** 在§31中，吾人找到在二個世界點 $A$ 及 $B$ 之間，其最短曲線之公式爲

$$\delta \int_A^B ds = 0.$$

在上式中，$ds$ 卽爲此最短曲線之小元，其符號 $\delta$ 表示由 $A$ 至 $B$ 之間，此曲線之一個極小變更．

上式僅爲最短曲線一種表示之方法. 爲計算方便起見, 吾人應覓一個更爲普徧之公式. 在 $n$ 度空間內, 設有一組自由度爲 $(n-1)$ 之超曲面(super-surface):

$$\lambda=\phi(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n).$$

$\lambda$ 爲一個任意之定數; 即是說, 對於一個固定之值 $\lambda$, 相對應於一個固定之超曲面. 倘此組曲面在 $A, B$ 二點之間, 則此組曲面之任一曲面均與 $A, B$ 二點間之最短曲線, 有一個交點. 然則最短曲線上任一點, 均可作成一個相對應之超曲面.

假設有兩個鄰近之超曲面 $\lambda$ 及 $\lambda+d\lambda$, 則在此二超曲面間, 其最短曲線之小元爲

$$ds=\omega d\lambda.$$

$\omega$ 爲一個簡單之比例係數.

由 $$ds^2=\sum_{hk} g_{hk}dx_h dx_k,$$

或簡寫爲 $$ds^2=g_{hk}dx_h dx_k,$$

求得 $$\omega^2=g_{hk}\frac{dx_h}{d\lambda}\frac{dx_k}{d\lambda}. \tag{1}$$

假若 $ds'$ 爲 $\lambda$ 及 $\lambda+d\lambda$ 之超曲面, 與 $A, B$ 二世界點間最短曲線頗爲鄰近, 或變更頗小之小元, 則有

$$ds'=\omega' d\lambda.$$

$\omega'$ 爲 $ds'$ 對於 $d\lambda'$ 之比例係數, 由定義有

$$ds'-ds=\delta(ds),$$

及 $$\omega'-\omega=\delta(\omega).$$

然則 $$\delta(ds)=\delta\omega d\lambda.$$

按 $d\lambda$ 爲一個常數，然則有

$$\delta\int_A^B ds=\int_A^B \delta\omega d\lambda=0.$$

欲求 $\delta\omega$，可先研究(1)式之變更情形，即是有

$$2\omega d\omega=\frac{dx_h}{d\lambda}\frac{dx_k}{d\lambda}\delta g_{hk}+g_{hk}\frac{dx_h}{d\lambda}\delta\left(\frac{dx_k}{d\lambda}\right)$$

$$+g_{hk}\frac{dx_k}{d\lambda}\delta\left(\frac{dx_h}{d\lambda}\right). \tag{2}$$

上式右邊最末二項之值相同，均可寫作下列之形式：

$$g_{hp}\frac{dx_h}{d\lambda}\delta\left(\frac{dx_p}{d\lambda}\right).$$

另外，長度空間基本張量爲各座標之函數，有

$$\delta g_{hk}=\frac{\partial g_{hk}}{\partial x_p}\delta x_p.$$

然則(2)式可寫爲

$$\delta\omega=\frac{1}{2\omega}\frac{dx_h}{d\lambda}\frac{dx_k}{d\lambda}\frac{\partial g_{hk}}{\partial x_p}\delta x_p+\frac{g_{hp}}{\omega}\frac{dx_h}{d\lambda}\delta\left(\frac{dx_p}{d\lambda}\right).$$

又由

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{g_{hp}}{\omega}\frac{dx_h}{d\lambda}\delta x_p\right)=\frac{g_{hp}}{\omega}\frac{dx_h}{d\lambda}\delta\left(\frac{dx_p}{d\lambda}\right)+\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{g_{hp}}{\omega}\frac{dx_h}{d\lambda}\right)\delta x_p,$$

及 $$\delta\left(\frac{dx_p}{d\lambda}\right)=\frac{d(\delta x_p)}{d\lambda},$$

求得

$$\frac{g_{hp}}{\omega}\frac{dx_h}{d\lambda}\delta\left(\frac{dx_p}{d\lambda}\right)=\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{g_{hp}}{\omega}\frac{dx_h}{d\lambda}\delta x_p\right)-\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{g_{hp}}{\omega}\frac{dx_h}{d\lambda}\right)\delta x_p.$$

上式兩邊均乘以 $d\lambda$,而後求其 $A,B$ 兩點間之積分;則右邊第一項之積分爲零. 蓋最短曲線及變更之線, 均有相同之起點及終點, 故其 $\delta x_p$ 之值均爲零也.

令 $$\Theta_p=\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{g_{hp}}{\omega}\frac{dx_h}{d\lambda}\right)-\frac{1}{2\omega}\frac{dx_h}{d\lambda}\frac{dx_k}{d\lambda}\frac{\partial g_{hk}}{\partial x_p}; \tag{3}$$

則有 $$-\int_A^B\delta\omega d\lambda=\int_A^B\Theta_p d\lambda\,\delta x_p=0.$$

按 $d\lambda$ 及 $\delta x_p$ 均爲任意的,然則欲滿足上式,必須

$$\Theta_p=0. \tag{4}$$

由最短曲線定義,可以假設所定之超曲面,均與此世界向量 $ds$ 爲正交,然則有 $\omega=1$, 及 $d\lambda=ds$. 於是(3)及(4)式可以寫爲

$$\frac{d}{ds}\left(g_{hp}\frac{dx_h}{ds}\right)-\frac{1}{2}\frac{dx_h}{ds}\frac{dx_k}{ds}\frac{\partial g_{hk}}{\partial x_p}$$

$$=g_{hp}\frac{d^2x_h}{ds^2}+\frac{dg_{hp}}{ds}\frac{dx_h}{ds}-\frac{1}{2}\frac{dx_h}{ds}\frac{dx_k}{ds}\frac{\partial g_{hk}}{\partial x_p}=0. \tag{5}$$

但是 $$\frac{dg_{hp}}{ds}=\frac{\partial g_{hp}}{\partial x_k}\frac{dx_k}{ds}.$$

又由 $$\frac{\partial g_{hp}}{\partial x_k}\frac{dx_k}{ds}\frac{dx_h}{ds}=\frac{\partial g_{kp}}{\partial x_h}\frac{dx_h}{ds}\frac{dx_k}{ds}.$$

蓋以在上式中,左邊之 $h$ 換以 $k$, 而 $k$ 換以 $h$, 則恰與右邊相同也. 於是(5)式可寫爲

$$g_{hp}\frac{d^2x_h}{ds^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{hp}}{\partial x_k}+\frac{\partial g_{kp}}{\partial x_h}-\frac{\partial g_{hk}}{\partial x_p}\right)\frac{dx_h}{ds}\frac{dx_k}{ds}=0.$$

上式左邊之第二項, Christoffel 曾用三個指數表示之:

$$\begin{bmatrix} hk \\ p \end{bmatrix}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{hp}}{\partial x_k}+\frac{\partial g_{kp}}{\partial x_h}-\frac{\partial g_{hk}}{\partial x_p}\right),$$

是爲 Christcffel 指數符號(Christoffel's three-indices symbol)，然則有

$$g_{hp}\frac{d^2x_h}{ds^2}+\begin{bmatrix} hk \\ p \end{bmatrix}\frac{dx_h}{ds}\frac{dx_k}{ds}=0. \tag{6}$$

按各基本張量均爲對稱張量，然則上式中之三個符號，亦爲對稱的；即是說，當其上面二指數之位置相互換移時，此指數符號之値不變.

爲計算簡便起見，我們還可用另一種亦爲對稱的符號如下：

$$\begin{Bmatrix} hk \\ r \end{Bmatrix}=g^{rp}\begin{bmatrix} hk \\ p \end{bmatrix}.$$

(6)式左邊第一項乘以 $g^{rp}$ 而收縮之，得

$$g_h^r\frac{d^2x_h}{ds^2}.$$

關於 $g_h^r$，除 $h=r$，其値爲 1 外，如 $h\neq r$，則其値均爲零. 然則有

$$\sum_r g_h^r\frac{d^2x_h}{ds^2}=\frac{d^2x_r}{ds^2}.$$

於是可以求得最短曲線之普徧而且簡單之應用公式：

$$\frac{d^2x_r}{ds^2}=-\begin{Bmatrix} hk \\ r \end{Bmatrix}\frac{dx_h}{ds}\frac{dx_k}{ds}.$$

沒有重力之空間，即爲平直空間 (flat space)，其長度空間基本張量之各張分量 $g$ 均爲常數；即是說，

$$\left\{\begin{matrix} hk \\ r \end{matrix}\right\}=0,$$

然則有
$$\frac{d^2x_r}{ds^2}=0.$$

蓋對於各種等速運動，在 Minkowski 世界中，其世界線爲一直線. 而其 Minkowski 速度之各分速度，均爲常數，如下式:

$$\frac{dx}{dt}=\beta v_x,\quad \frac{dy}{dt}=\beta v_y,\quad \cdots\cdots,\quad \frac{d\tau}{dt}=ic\beta.$$

然則亦可證明

$$\frac{d^2x}{ds^2}=\frac{d^2y}{ds^2}=\frac{d^2z}{ds^2}=\frac{d^2\tau}{ds^2}=0.$$

在彎曲空間(curved space)中，$\left\{\begin{matrix} hk \\ r \end{matrix}\right\}$不等於零，然則其世界線必須應用下式以計算之:

$$\frac{d^2x}{ds^2}=-\left\{\begin{matrix} hk \\ r \end{matrix}\right\}\frac{dx_h}{ds}\frac{dx_k}{ds}.$$

38. Riemann 張量　由收縮方法，可由高級之張量，導出各種低級張量，已如前述. 反之，由低級張量，亦可應用數學手續(mathematical operation)之微分，導出各種高級張量. 現在我們由一個無向量做起，即是由一個零級張量做起.

設有一個無向量 $\Phi$，此量 $\Phi$ 爲各座標之函數，然不隨座標軸系之變換而變更，即是爲一個不變量. 按兩點間之最短曲線，亦爲一個不變量，然則 $\frac{d\Phi}{ds}$ 亦與座標軸系無關，爲一個不變量如下:

$$\frac{d\Phi}{ds}=\frac{\partial\Phi}{\partial x_h}\frac{dx_h}{ds}. \tag{1}$$

$ds$ 爲一個不變之向量，即是爲一個不變量，$dx_h$ 爲一個逆變向量，然則

$$A_h=\frac{\partial\Phi}{\partial x_h}$$

應爲一個協變向量. 令 $\psi=\frac{d\Phi}{ds}$，而做 $\Phi$ 對於 $s$ 之二次微分，得

$$\frac{d^2\Phi}{ds^2}=\frac{d\psi}{ds}=\frac{\partial\psi}{\partial x_k}\frac{dx_k}{ds}.$$

但是，由(1)式得

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_k}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_h\partial x_k}\frac{dx_h}{ds}+\frac{\partial\Phi}{\partial x_h}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{dx_h}{ds}\right).$$

然則有 $$\frac{d^2\Phi}{ds^2}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_h\partial x_k}\frac{dx_h}{ds}\frac{dx_k}{ds}+\frac{\partial\Phi}{\partial x_h}\frac{d^2x_h}{ds^2}.$$

上式右邊兩項爲兩個獨立之和，可將第二項中之指數 $h$ 換爲 $r$，由

$$\frac{d^2x_r}{ds^2}=-\left\{\begin{matrix}hk\\r\end{matrix}\right\}\frac{dx_h}{ds}\frac{dx_k}{ds},$$

求得 $$\frac{d^2\Phi}{ds^2}=\left\{\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_h\partial x_k}-\begin{bmatrix}hk\\r\end{bmatrix}\frac{\partial\Phi}{\partial x_r}\right\}\frac{dx_h}{ds}\frac{dx_k}{ds}.$$

$\frac{d^2\Phi}{ds^2}$ 爲一個不變量或零級張量，$dx_h$ 及 $dx_k$ 爲兩個逆變向量，然則

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_h\partial x_k}-\left\{\begin{matrix}hk\\r\end{matrix}\right\}\frac{\partial\Phi}{\partial x_r}$$

應爲一個二級之協變張量. 令 $A_h=\frac{\partial\Phi}{\partial x_h}$，$A_r=\frac{\partial\Phi}{\partial x_r}$，則此協變張量之各張分量爲

$$A_{hk}=\frac{\partial A_h}{\partial x_k}-\left\{\begin{matrix}hk\\r\end{matrix}\right\}A_r. \qquad (1)$$

此協變張量 $A_{hk}$，亦可名爲一向量 $A_h$，對於 $x_k$ 之協變導微函數 (covariant derivative)，而寫爲 $A_{h,k}$. 按 $\left\{\begin{matrix} hk \\ r \end{matrix}\right\}$ 爲基本張量各張分量. 對於各座標之微分，對於平直空間，此等張分量均爲常數，則有

$$\left\{\begin{matrix} hk \\ r \end{matrix}\right\}=0.$$

而此導微函數與通常之導微函數相同如下:

$$A_{h,k}=\frac{\partial A_h}{\partial x_k}.$$

在彎曲空間或 Riemann 空間，$g$ 之各分量爲各座標之函數，然則此協變導微函數，應用(1)式表示之. 設以一協變向量 $B$ 之各分量，與此協變張量之各張分量，作一廣泛之外乘積，則可得一個三級張量. 令此張量之各張分量爲

$$C_{hkp}=A_{hp}B_k.$$

則由(1)式，求得

$$C_{hkp}=B_k\frac{\partial A_h}{\partial x_p}-\left\{\begin{matrix} hp \\ r \end{matrix}\right\}A_rB_k.$$

設有兩個協變向量 $A_\lambda$, $B_\mu$, 及由此二向量所做之導微函數 $A_{\lambda,\nu}$ 及 $B_{\mu,\nu}$, 則有

$$A_{\lambda,\nu}B_\mu+A_\lambda B_{\mu,\nu}=\frac{\partial(A_\lambda B_\mu)}{\partial x_\nu}-\left\{\begin{matrix} \lambda\nu \\ \epsilon \end{matrix}\right\}A_\epsilon B_\mu-\left\{\begin{matrix} \mu\nu \\ \epsilon \end{matrix}\right\}A_\lambda B_\epsilon.$$

令
$$E_{\lambda\mu,\nu}=A_{\lambda,\nu}B_\mu+A_\lambda B_{\mu,\nu},\quad E_{\epsilon\mu}=A_\epsilon B_\mu,$$
$$E_{\lambda\epsilon}=A_\lambda B_\epsilon,\quad 及\quad E_{\lambda\mu}=A_\lambda B_\mu.$$

則有
$$E_{\lambda\mu,\nu}=\frac{\partial E_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu}-\left\{\begin{matrix} \lambda\nu \\ \epsilon \end{matrix}\right\}E_{\epsilon\mu}-\left\{\begin{matrix} \mu\nu \\ \epsilon \end{matrix}\right\}E_{\lambda\epsilon}.$$

由上式，可見此三級張量 $E_{\lambda\mu,\nu}$ 爲 $E_{\lambda\mu}$ 對於 $x_\nu$ 之導微函數.

現在我們來求 $A_\mu$ 對於 $x_\nu$ 及 $x_\sigma$ 之二級導微函數:

$$A_{\mu,\nu\sigma}=\frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}-\left\{\begin{matrix}\mu\sigma\\ \epsilon\end{matrix}\right\}A_{\epsilon\nu}-\left\{\begin{matrix}\nu\sigma\\ \epsilon\end{matrix}\right\}A_{\mu\epsilon}$$

$$=\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left[\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}-\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \rho\end{matrix}\right\}A_\rho\right]-\left\{\begin{matrix}\mu\sigma\\ \epsilon\end{matrix}\right\}\left[\frac{\partial A_\epsilon}{\partial x_\nu}-\left\{\begin{matrix}\epsilon\nu\\ \rho\end{matrix}\right\}A_\rho\right]$$

$$-\left\{\begin{matrix}\nu\sigma\\ \epsilon\end{matrix}\right\}\left[\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\epsilon}-\left\{\begin{matrix}\mu\epsilon\\ \rho\end{matrix}\right\}A_\rho\right].$$

顚倒其導微函數之次序而求得

$$A_{\mu,\sigma\nu}=\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left[\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\sigma}-\left\{\begin{matrix}\mu\sigma\\ \rho\end{matrix}\right\}A_\rho\right]-\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \epsilon\end{matrix}\right\}\left[\frac{\partial A_\epsilon}{\partial x_\sigma}-\left\{\begin{matrix}\epsilon\sigma\\ \rho\end{matrix}\right\}A_\rho\right]$$

$$-\left\{\begin{matrix}\sigma\nu\\ \epsilon\end{matrix}\right\}\left[\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\epsilon}-\left\{\begin{matrix}\mu\epsilon\\ \rho\end{matrix}\right\}A_\rho\right].$$

按
$$\frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_\nu\partial x_\sigma}=\frac{\partial^2 A_\mu}{\partial x_\sigma\partial x_\nu},$$

及由 Christoffel 指數符號之對稱關係，而有

$$\left\{\begin{matrix}\sigma\nu\\ \epsilon\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix}\nu\sigma\\ \epsilon\end{matrix}\right\}.$$

因各註指數之輪流替代，然則 $\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \rho\end{matrix}\right\}\frac{\partial A_\rho}{\partial x_\sigma}$ 之總和與 $\left\{\begin{matrix}\mu\sigma\\ \rho\end{matrix}\right\}\frac{\partial A_\rho}{\partial x_\nu}$ 之總和應爲相等；以及 $\left\{\begin{matrix}\mu\sigma\\ \epsilon\end{matrix}\right\}\frac{\partial A_\epsilon}{\partial x_\nu}$ 之總和與 $\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \epsilon\end{matrix}\right\}\frac{\partial A_\epsilon}{\partial x_\sigma}$ 之總和亦爲相等.

然則有

$$A_{\mu,\nu\sigma}-A_{\mu,\sigma\nu}=A_\rho\left[\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left\{\begin{matrix}\mu\sigma\\ \rho\end{matrix}\right\}-\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \rho\end{matrix}\right\}\right.$$

$$\left.+\left\{\begin{matrix}\mu\sigma\\ \epsilon\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\epsilon\nu\\ \rho\end{matrix}\right\}-\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \epsilon\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\epsilon\sigma\\ \rho\end{matrix}\right\}\right].$$

$A_{\mu,\nu\sigma}-A_{\mu,\sigma\nu}$ 爲一個三級張量，$A_\rho$ 爲一個向量，然則上式右邊括弧中之各項，應爲一個四級之混合張量，此張量名曰 Riemann 張量，可用下式表示之：

$$R^\rho_{\mu\nu\sigma}=\left\{\begin{matrix}\mu\sigma\\ \epsilon\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\epsilon\nu\\ \rho\end{matrix}\right\}-\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \epsilon\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}\epsilon\sigma\\ \rho\end{matrix}\right\}$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_\nu}\left\{\begin{matrix}\mu\sigma\\ \rho\end{matrix}\right\}-\frac{\partial}{\partial x_\sigma}\left\{\begin{matrix}\mu\nu\\ \rho\end{matrix}\right\}. \qquad (2)$$

而有 $$R^\rho_{\mu\nu\sigma}A_\rho=A_{\mu,\nu\sigma}-A_{\mu,\sigma\nu}.$$

由(2)式，可見此四級混合張量，爲長度空間基本張量之各張分量，對於各座標之一級及二級導微函數之函數．假若吾人已知長度空間基本張量各張分量與其座標之函數關係，則此四級張量之張分量可以完全決定．如長度空間場量均爲常數，則不問在任何座標系，其各張分量對於各座標之導微函數均爲零．然則此四級張量在任何座標系中均爲零，即是說，在平直空間內，有

$$R^\rho_{\mu\nu\sigma}\equiv 0.$$

此四級之Riemann張量恆爲零，爲長度空間場量爲常數之必需條件．

**39．位能與重力場** 在 Newton 力學中，設以 $\phi$ 表示一力場中各點之位能，則在眞空中，應滿足如下之 Laplace 公式：

$$\Delta\phi=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0. \qquad (1)$$

當空間充滿物質，其密度爲 $\rho$，則有

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}-4\pi K\rho=\Delta\phi-4\pi K\rho=0. \qquad (2)$$

是爲 Poisson 公式. 其式中之 $K$ 爲 Newton 之引力常數.

在相對論中，當一單位質量在一平直空間運動時，其世界間隔之平方爲

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2-c^2dt^2. \qquad (3)$$

由上式，可見其長度空間基本張量之各張分量

$$g_{11}=g_{22}=g_{33}=1, \quad 及 \quad g_{44}=-c^2.$$

由(3)式，求得

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=v^2-c^2=v^2+g_{44}. \qquad (4)$$

另外，設以 $\phi$ 表示位能，對於一個單位質量，則有

$$\frac{v^2}{2}=A-\phi. \qquad (5)$$

$A$ 爲一個常數，以(5)式與(4)式相比較，將見 $g$ 有能量之因次、而又僅與空間之座標有關，然則 $g_{44}$ 應與位能 $\phi$ 之地位相當. 在平直空間，$g$ 皆爲常數，然則(1)式當然可以滿足. 在充滿有質量之空間，$\Delta\phi$ 不能爲零，然則 $g$ 應爲空間位置之函數矣.

按 Christoffel 指數符號，在平直空間中均等於零，然則有 Riemann 張量 $R^\lambda_{\mu\nu\sigma}=0$ 可與眞空中 $\Delta\phi=0$ 相當. 在彎曲之空間或充滿其質量之空間內，Christoffel 指數符號不一定爲零，然則 Riemann 張量不必一定爲零，即是不能再用此張量，以表示在此種空間內位能之分布矣.

Einstein 認爲一切自然定律，俱可用一個張量 $T=0$ 以表示之。蓋此種張量隨座標軸系轉換後，仍有其 $T'=0$，卽是一切自然定律，不受座標軸系轉換之影響。對於空間位能之分布及其重力場，當然亦不能例外。蓋重力場卽由此種位能導出。按 $R^{\lambda}_{\mu\nu\sigma}=0$，旣不能應用於彎曲之空間，於是 Einstein 試令 $\rho=\sigma$ 而收縮之，而得一個新的張量：

$$R_{\mu\nu}=\frac{\partial}{\partial x_\nu}\begin{Bmatrix}\mu\rho\\ \rho\end{Bmatrix}-\frac{\partial}{\partial x_\rho}\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \rho\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}\mu\rho\\ \epsilon\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\nu\epsilon\\ \rho\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \epsilon\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\epsilon\rho\\ \rho\end{Bmatrix}.$$

是爲 Riemann 收縮張量 (contracted Riemann tensor)。此張量亦由長度基本張量之第一次及第二次微分所構成，而能與 $R^{\lambda}_{\mu\nu\sigma}=0$ 並存。Einstein 指出此收縮後之張量 $R_{\mu\nu}=0$，不僅可以應用於平直空間，且可應用於彎曲空間。蓋以 $R_{\mu\nu}=0$ 則必有 $R^{\lambda}_{\mu\nu\sigma}=0$，而 $R^{\lambda}_{\mu\nu\sigma}=0$ 則不必有 $R_{\mu\nu}=0$；故 $R^{\rho}_{\mu\nu\sigma}=0$ 可視爲 $R_{\mu\nu}=0$ 之一種特例。按平直空間亦可視爲彎曲空間之一種特例，彎曲空間可包含平直空間。平直空間之重力定律，旣可用 $R^{\lambda}_{\mu\nu\sigma}=0$ 以表示之，然則彎曲空間之重力場，當用 $R_{\mu\nu}=0$ 以表示之。對於光之傳播，則不僅須有 $R^{\lambda}_{\mu\nu\sigma}=0$ 及 $R_{\mu\nu}=0$，且須有 $ds=0$，蓋以光之速度爲 $c$ 故也。

另外，按 $g_{hk}$ 在間隔之公式中，爲長度空間基本張量。而 $R^{\lambda}_{\mu\nu\sigma}=0$ 及 $R_{\mu\nu}=0$ 二者之關係，爲 $g$ 量二級導微函數之關係。故各種自然定律，僅與空間基本張量各張分量 $g$ 之一級導微函數有關者，可應用於平直空間，亦可應用於彎曲空間。至包含 $g$ 之二級導微函數者，則不一定能同時應用於平直及彎曲空間。是爲等價原理之另一種敍述方法。

**40. 由一質點發生之力場** 設將一無質量之點置於原點,而求其在自由空間中所發生之效應,或其對於此平直之 Minkowski 世界中之間隔.如應用極座標(polar coordinates) $r, \theta, \phi, t$, 則有

$$x_1=r, \quad x_2=\theta, \quad x_3=\phi, \quad x_4=ict,$$

及
$$ds^2=dr^2+r^2d\theta+r^2\sin^2\theta d\phi^2-c^2dt^2.$$

而有
$$g_{11}=1, \quad g_{22}=r^2, \quad g_{33}=r^2\sin^2\theta, \quad g_{44}=-c^2,$$

及
$$g_{\sigma\tau}=0 \text{ (如 } \sigma \neq \tau).$$

這些 $g$ 之數值,不僅能使 $R_{\mu\nu}=0$, 並能有 $R^{\rho}_{\mu\nu\sigma}=0$.

當此點爲一質點,則其附近之空間發生彎曲,已如前述.在此彎曲空間中,當座標軸系轉換後,設其間隔之平方爲

$$ds^2=-\epsilon^{\lambda}dr^2-r^2d\theta^2-r^2\sin^2\theta d\phi^2+\epsilon^{\nu}dt^2.$$

倘此質點爲靜止的,則上式中之指數 $\lambda$ 及 $\nu$ 僅爲 $r$ 之函數,而不隨時間變更.在上式中,吾人可見有 $g_{11}=-\epsilon^{\lambda}$, $g_{22}=-r^2$, $g_{33}=-r^2\sin^2\theta$, $g_{44}=\epsilon^{\nu}$ 及 $g_{\sigma\tau}=0$ (如 $\sigma \neq \tau$). 以及根據上節之結果,其各 $g$ 之值,應能滿足 $R_{\mu\nu}=0$.

按張量 $g$ 之行列式

$$\begin{vmatrix} -\epsilon^{\lambda} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2\sin^2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \epsilon^{\nu} \end{vmatrix} = -\epsilon^{\lambda+\nu}r^4\sin^2\theta,$$

及
$$g^{\sigma\sigma}=\frac{1}{g_{\sigma\sigma}}.$$

然則有
$$\begin{Bmatrix}\sigma\tau\\ \alpha\end{Bmatrix}=g^{\alpha\rho}\begin{bmatrix}hk\\ \rho\end{bmatrix}.$$

已知當 $\alpha \neq \rho$，則有 $g_{\alpha\rho}=0$，然則在上式中，必須有 $\rho=\alpha$，始有意義.

$$\begin{Bmatrix}\sigma\tau\\ \alpha\end{Bmatrix}=g^{\alpha\alpha}\begin{bmatrix}hk\\ \alpha\end{bmatrix}=\frac{1}{2g_{\alpha\alpha}}\left(\frac{\partial g_{h\alpha}}{\partial x_k}+\frac{\partial g_{k\alpha}}{\partial x_h}-\frac{\partial g_{hk}}{\partial x_\alpha}\right).$$

當各指數有一固定之數值時，上式亦有一固定之值．玆求得此各值如下：

$$\begin{Bmatrix}11\\ 1\end{Bmatrix}=\frac{1}{-2\epsilon^\lambda}\left\{\frac{\partial g_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial g_{11}}{\partial x_1}-\frac{\partial g_{11}}{\partial x_1}\right\}$$

$$=\frac{1}{-2\epsilon^\lambda}\times\left(-\frac{\epsilon^\lambda d\lambda}{dr}\right)=\frac{1}{2}\frac{d\lambda}{dr},$$

$$\begin{Bmatrix}12\\ 2\end{Bmatrix}=\frac{1}{r},$$

$$\begin{Bmatrix}13\\ 3\end{Bmatrix}=\frac{1}{r},$$

$$\begin{Bmatrix}14\\ 4\end{Bmatrix}=\frac{1}{2}\frac{d\nu}{dr},$$

$$\begin{Bmatrix}22\\ 1\end{Bmatrix}=-r\epsilon^{-\lambda},$$

$$\begin{Bmatrix}33\\ 1\end{Bmatrix}=-r^2\sin^2\theta\epsilon^{-\lambda},$$

$$\begin{Bmatrix}44\\ 1\end{Bmatrix}=\frac{1}{2}\epsilon^{\nu-\lambda}\frac{d\nu}{dr},$$

$$\begin{Bmatrix}23\\ 3\end{Bmatrix}=\cot\theta,$$

$$\begin{Bmatrix}33\\ 2\end{Bmatrix}=-\sin\theta\cos\theta.$$

至其餘之三指數符號，則均等於零．應用這些數值，我們可以計算 $R_{\mu\nu}$．如 $\mu\neq\nu$，則可求得 $R_{\mu\nu}=0$．茲僅舉一例如下：

$$R_{23}=\frac{\partial}{\partial x_3}\begin{Bmatrix}2\rho\\ \rho\end{Bmatrix}-\frac{\partial}{\partial x_\rho}\begin{Bmatrix}23\\ \rho\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}2\rho\\ \epsilon\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}3\epsilon\\ \rho\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}23\\ \epsilon\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\epsilon\rho\\ \rho\end{Bmatrix}.$$

而有
$$\frac{\partial}{\partial x_3}\begin{Bmatrix}2\rho\\ \rho\end{Bmatrix}=0,\quad \frac{\partial}{\partial x_\rho}\begin{Bmatrix}23\\ \rho\end{Bmatrix}=\frac{\partial}{\partial \phi}\begin{Bmatrix}23\\ 3\end{Bmatrix}=0,$$

及
$$\begin{Bmatrix}23\\ \epsilon\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\epsilon\rho\\ \rho\end{Bmatrix}=0,$$

及
$$\begin{aligned}\begin{Bmatrix}2\rho\\ \epsilon\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}3\epsilon\\ \rho\end{Bmatrix}&=\begin{Bmatrix}21\\ 1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}31\\ 1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}21\\ 2\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}32\\ 1\end{Bmatrix}\\ &+\begin{Bmatrix}22\\ 1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}31\\ 2\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}21\\ 3\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}33\\ 1\end{Bmatrix}\\ &+\begin{Bmatrix}23\\ 1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}31\\ 3\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}21\\ 4\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}34\\ 1\end{Bmatrix}+\cdots\cdots=0.\end{aligned}$$

上式之等於零，蓋因式中各項，至少均有一個指數符號爲零．然則有

$$R_{23}=0.$$

當 $\mu=\nu$，則有

$$\begin{aligned}R_{11}&=\sum_{\rho\epsilon}\frac{\partial}{\partial r}\begin{Bmatrix}1\rho\\ \rho\end{Bmatrix}-\frac{\partial}{\partial x_\rho}\begin{Bmatrix}11\\ \rho\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}1\rho\\ \epsilon\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}1\epsilon\\ \rho\end{Bmatrix}-\begin{Bmatrix}11\\ \epsilon\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\epsilon\rho\\ \rho\end{Bmatrix}\\ &=\frac{\partial}{\partial r}\left[\begin{Bmatrix}11\\ 1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}12\\ 2\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}13\\ 3\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}14\\ 4\end{Bmatrix}\right]-\frac{\partial}{\partial r}\begin{Bmatrix}11\\ 1\end{Bmatrix}\\ &+\left[\begin{Bmatrix}11\\ 1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}11\\ 1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}12\\ 2\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}12\\ 2\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}13\\ 3\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}13\\ 3\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}14\\ 4\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}14\\ 4\end{Bmatrix}\right]\\ &-\left[\begin{Bmatrix}11\\ 1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}11\\ 1\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}11\\ 1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}12\\ 2\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}11\\ 1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}13\\ 3\end{Bmatrix}+\begin{Bmatrix}11\\ 1\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}14\\ 4\end{Bmatrix}\right]\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{d^2\lambda}{dr^2}-\frac{1}{r^2}-\frac{1}{r^2}+\frac{1}{2}\frac{d^2\nu}{dr^2}-\frac{1}{2}\frac{d^2\lambda}{dr^2}$$

$$+\frac{1}{4}\left(\frac{d\lambda}{dr}\right)^2+\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r^2}+\frac{1}{4}\left(\frac{d\nu}{dr}\right)^2$$

$$-\frac{1}{4}\left(\frac{d\lambda}{dr}\right)^2-\frac{1}{2}\frac{d\lambda}{dr}\times\frac{1}{r}-\frac{1}{2}\frac{d\lambda}{dr}\times\frac{1}{r}-\frac{1}{4}\frac{d\lambda}{dr}\frac{d\nu}{dr}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{d^2\nu}{dr^2}+\frac{1}{4}\left(\frac{d\nu}{dr}\right)^2-\frac{1}{r}\frac{d\lambda}{dr}-\frac{1}{4}\frac{d\lambda}{dr}\frac{d\nu}{dr}.$$

同樣，求得

$$R_{22}=\epsilon^{-\lambda}\left\{1+\frac{1}{2}r\left(\frac{d\nu}{dr}-\frac{d\lambda}{dr}\right)\right\}-1,$$

$$R_{33}=\sin^2\theta\,\epsilon^{-\lambda}\left\{1+\frac{1}{2}r\left(\frac{d\nu}{dr}-\frac{d\lambda}{dr}\right)\right\}-\sin^2\theta,$$

$$R_{44}=\epsilon^{\nu-\lambda}\left\{-\frac{1}{2}\frac{d^2\nu}{dr^2}+\frac{1}{4}\frac{d\lambda}{dr}\frac{d\nu}{dr}-\frac{1}{4}\left(\frac{d\nu}{dr}\right)^2-\frac{1}{r}\frac{d\nu}{dr}\right\}.$$

令上四式均爲零，可以求得四個方程式. 由此四式中之最前者及最末者，可以求得

$$\frac{\partial\lambda}{\partial r}=-\frac{\partial\nu}{\partial r}.$$

另外，當 $r=\infty$，$\lambda$ 及 $\nu$ 必須均等於零，然則有 $\nu=-\lambda$. 又由中間之二式，求得

$$\epsilon^{\nu}\left(1+r\frac{\partial\nu}{\partial r}\right)=1,$$

或
$$\frac{dr}{r}=\frac{d\nu}{\epsilon^{-\nu}-1}.$$

其積分爲

$$\log r = C + \int \frac{d\nu}{\epsilon^{-\nu}-1} = C + \int \frac{\epsilon^{\nu} d\nu}{1-\epsilon^{\nu}}$$

$$= C - \int \frac{d(1-\epsilon^{\nu})}{1-\epsilon^{\nu}} = \log 2m - \log(1-\epsilon^{\nu}).$$

由上式，求得 $$1-\epsilon^{\nu} = 2m/r,$$

或 $$\epsilon^{\nu} = 1-2m/r.$$

$m$ 爲一常數，與積分之常數有關. 按 $\epsilon^{\nu}=g_{44}$，然則上式中之 $m/r$ 實居於位能之位置. 倘以 $m$ 表示質量，則所用之引力常數爲 1. 又由 $\nu=-\lambda$，可見在上式中，係以光之速度爲 1 而計算者，故 $m$ 與 $r$ 之單位必須注意(1). 如是所求得之各量 $g$，既可滿足 $R_{\mu\nu}=0$，且對於原點爲對稱的. 然則當一質點 $m$ 置於原點時，各世界點間間隔之平方爲

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\phi^2 + \left(1-\frac{2m}{r}\right) dt^2.$$

**41. 水星之軌道** 太陽之質量，遠大於各行星. 然則在太陽系中，可以視爲太陽之位置不變，而一切行星均繞太陽運動. 如以太陽爲原點，則各行星運動之軌道或其路線(trojectory)，可由最短曲線之公式求得之. 此公式爲

$$\frac{d^2 x_r}{ds^2} = -\left\{ \begin{matrix} hk \\ r \end{matrix} \right\} \frac{dx_h}{ds} \frac{dx_k}{ds}. \qquad (1)$$

當指數 $r=2$，其相應之座標爲 $x_2=\theta$，則有

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} = -\left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} \frac{dr}{ds} \frac{d\theta}{ds} - \left\{ \begin{matrix} 21 \\ 2 \end{matrix} \right\} \frac{d\theta}{ds} \frac{dr}{ds} - \left\{ \begin{matrix} 33 \\ 2 \end{matrix} \right\} \left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2$$

$$= -\frac{2}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d\theta}{ds} + \cos\theta \sin\theta \left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2.$$

---

(1) 質量 $m$ 所用之單位，當於 §42 中討論之.

如行星最初在 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 之平面內,其速度亦在此平面內,則有 $\cos\theta=0$ 及 $\frac{d\theta}{ds}=0$,即是有

$$\frac{d^2\theta}{ds^2}=0.$$

然則行星之軌道平面,不能發生變更矣.

在(1)式中,命 $\theta=\frac{\pi}{2}$, 再以 $x_3=\phi$, $x_4=t$ 之值代入, 則可得下二式:

$$\frac{d^2\phi}{ds^2}=-\frac{2}{r}\frac{dr}{ds}\frac{d\phi}{ds},$$

$$\frac{d^2t}{ds^2}=-\frac{d\nu}{dr}\frac{dr}{ds}\frac{dt}{ds}.$$

由上二式之積分,可以求得

$$r^2\frac{d\phi}{ds}=h,\quad 及\quad \frac{dt}{ds}=\frac{a}{\gamma}.$$

$h$ 及 $a$ 爲兩個常數,及 $\gamma=\epsilon^\nu=1-\frac{2m}{r}$.如以 $d\theta=0$, $\sin\theta=1$ 代入 $ds^2$ 之公式中,可得

$$ds^2=-\gamma^{-1}dr^2-r^2d\phi^2+\gamma dt^2.$$

以 $ds^2$ 除其各項,再以 $\frac{dt}{ds}=\frac{a}{\gamma}$ 之值代入,則得

$$1=-\gamma^{-1}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2-r^2\left(\frac{d\phi}{ds}\right)^2+a^2\gamma^{-1}.$$

由 $$\frac{dr}{ds}=\frac{dr}{d\phi}\frac{d\phi}{ds},\quad \frac{d\phi}{ds}=\frac{h}{r^2},\quad 及\quad \gamma=1-\frac{2m}{r},$$

求得 $$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2\frac{h^2}{r^4}=a^2-1+\frac{2m}{r}-\frac{h^2}{r^2}+\frac{2mh^2}{r^3}.$$

命 $\mu=r^{-1}$, 上式變爲

$$\left(\frac{d\mu}{d\phi}\right)^2+\mu^2=\frac{a^2-1}{h^2}+\frac{2m\mu}{h^2}+2m\mu^3. \tag{2}$$

是爲 Einstein 公式. 由 Newton 之重力定律, 則所求得之公式爲[1]

$$\left(\frac{d\mu}{d\phi}\right)^2+\mu^2=\frac{a^2-1}{h^2}+\frac{2m\mu}{h^2}. \tag{3}$$

在上式中, $m$ 爲太陽之質量, 而 $h=r^2\frac{d\phi}{ds}$. 比較上(2)及(3)式, 可見前者較之後者, 僅右邊多最後之一項, 此一項, 與二體距離之立方成反比, 對於各行星, 其影響均頗爲微小. 僅對於水星, 因其 $r$ 之值較小, 此項將不能完全忽略. 玆研究之於下:

作 Einstein 公式對於 $\phi$ 之微分, 再除以 $2\frac{d\mu}{d\phi}$, 則可得

$$\frac{d^2\mu}{d\phi^2}+\mu=\frac{m}{h^2}+3m\mu^2.$$

至相當之 Newton 公式, 則爲

$$\frac{d^2\mu}{d\phi^2}+\mu=\frac{m}{h^2},$$

上式之解爲 $$\mu=\frac{m}{h^2}(1+e\cos\phi).$$

(1) 可參考 Moulton 著之天體力學.

此值亦可視爲 Einstein 公式之解之近似值. 當 $e<1$, 則得一橢圓軌道公式, 而有其近日點 (perihelion) 永在 $\phi=0$ 之方向上, 卽是其長軸之方向不發生變動.

以 $\mu$ 之近似值代入 Einstein 公式中之右邊, 則得

$$\frac{d^2\mu}{d\phi^2}+\mu=\frac{m}{h^2}+\frac{3m^3}{h^4}\left(1+\frac{1}{2}e^2+2e\cos\phi+\frac{1}{2}e^2\cos 2\phi\right).$$

其解爲 $$\mu=\left\{\frac{m}{h^2}+\frac{3m^3}{h^4}\left(1+\frac{1}{2}e^2\right)\right\}(1+e\cos\phi)$$

$$+\frac{3m^3e}{h^4}\left(\phi\sin\phi-\frac{1}{6}e\cos 2\phi\right).$$

在其近日點, $\mu$ 之值爲最大, 是時應有

$$\frac{d\mu}{d\phi}=-\left\{\frac{m}{h^2}+\frac{3m^3}{h^4}\left(1+\frac{1}{2}e^2\right)\right\}e\sin\phi$$

$$+\frac{3m^3e}{h^4}\left(\sin\phi+\phi\cos\phi+\frac{1}{3}e\sin 2\phi\right)=0.$$

假使上式中無 $\phi\cos\phi$ 一項, 則其近日點亦將永在 $\phi=2\pi$ 之方向上, 蓋以其他各項, 均有 $2\pi$ 爲其週期也. 因此項之加入, 則其近日點不復在此方向上, 而將與此方向有一小的差異. 令近日點之眞實方向爲 $\phi=2\pi+\epsilon$, $\epsilon$ 將爲一頗小之值. 如忽略其高次方之值, 則由上式可以求得

$$-\frac{me}{h^2}\epsilon+\frac{3m^3e}{h^4}\times 2\pi=0,$$

因得 $$\epsilon=\frac{6\pi m^2}{h^2}.$$

對於水星，由上式可以求得其橢圓軌道之長軸，每百年將旋轉四十三秒.

在天文學中，曾由觀察發現水星軌道長軸每百年約有 43 秒之旋轉，在天體力學中迄無法解釋此現象. 蓋以舊的天體力學，係以 Newton 力學爲根據. 現由 Einstein 公式，則此水星軌道長軸之轉動可加以解釋矣. 是爲廣義相對論之一個頗大的成功.

**42. 太陽附近光線之彎曲** 當光線穿過一加速座標系，例如光線由一小窗穿入一自由降落之升降機內時，如光線之方向，不與此座標系加速度之方向相合，則此光線亦將發生彎曲，而不復爲一直線，此點甚易想到. 加速系旣與一力場相當，倘廣義相對論能推廣用於光及各種輻射時，則光線經過太陽之附近，將發生一偏折(deflection)現象. Einstein 曾預先宣布此項理論，並計算各恆星之光，經過太陽附近時應偏折之角度如下:

按 Einstein 之引力公式爲

$$\left(\frac{d\mu}{d\phi}\right)^2+\mu^2=\frac{a^2-1}{h^2}+\frac{2m\mu}{h^2}+2m\mu^3,$$

及
$$\frac{d^2\mu}{d\phi^2}+\mu=\frac{m}{h^2}+3m\mu^2.$$

在上式中，$h=r^2\dfrac{d\phi}{ds}$. 對於光之各種輻射，在四度空間中，其間隔 $ds=0$，然則有 $h=\infty$，而 Einstein 公式可以簡化爲

$$\frac{d^2\mu}{d\phi^2}+\mu=3m\mu^2. \tag{1}$$

當 $m=0$，則其第一近似值

$$\mu=\frac{1}{p}\cos\phi,$$

上式爲一直線之公式，此直線 $AB$ 與橫座標爲正交，$p$ 爲原點 $O$ 對於此直線之垂直距離，如圖 8.

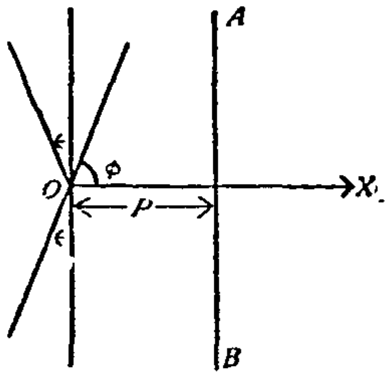


圖 8.

以此 $\mu$ 之第一近似值代入(1)式中之右邊，可得

$$\frac{d^2\mu}{d\phi^2}+\mu=\frac{3m}{p^2}\cdot\frac{1+\cos 2\phi}{2}.$$

其解爲
$$\mu=\frac{1}{p}\cos\phi+\frac{3m}{p^2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\cos 2\phi\right).$$

在上式中，當 $\mu$ 之值爲最大，即是說，$r$ 之值爲最小時，$\phi$ 之值爲零，是時 $Or$ 之方向，與座標所用之基線 $Ox$ 相同. 惟當 $\phi=\frac{\pi}{2}$ 時，$\mu$ 之值雖頗小而不爲零. 必須當 $\phi=\frac{\pi}{2}+\epsilon$, 或 $\phi=\frac{\pi}{2}-\epsilon$ ($\epsilon$ 爲一頗小之值)，始有 $\mu=0$ 而 $r=\infty$. 此爲與其近似值結果不同之點. 由上式，可以覓得 $\epsilon$ 之值如下:

$$0=\frac{1}{p}(-\epsilon)+\frac{3m}{p^2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right),$$

或
$$\epsilon=\frac{2m}{p}.$$

此 $\epsilon$ 之值，即爲光線至太陽附近時所偏折之角度．當其離開太陽附近時，光線亦將在相反之方向上偏折同一大小之角度 $\epsilon$．然則在地面之觀察者，對於太陽附近之恆星，將見其方向將發生一偏折，其角度爲

$$\Delta=\frac{4m}{p}.$$

上式之結果，係假定引力位能爲 $\frac{m}{r}$，及光之速度爲 1，所得之結果；即是在此單位中，其 $G=1$，及距離所用之單位爲 $3\times10^{10}$ 厘米．因質量所用單位頗大，而太陽質量在此單位中，當不能爲在 C.G.S. 系中之龐大數値也．至此新單位之質量，應爲一質量對於一距離爲光速距離時，使一微粒子每秒鐘所增加之加速度，即等於光之速度之質量．在 C.G.S. 系中，萬有引力公式爲

$$F=G\frac{mm'}{r^2}\text{ 達因},$$

而 $G=6.66\times10^{-8}$．由上式，可見一質量 $m'$ 由另一質量 $m$ 所吸引而發生之加速度爲

$$a=G\frac{m}{r^2}.$$

以新的單位之值代入，則得

$$3\times10^{10}=6.66\times10^{-8}\frac{m}{9\times10^{20}}.$$

求得此新的質量之單位爲

$$m=4\times10^{38}\text{ 克}.$$

按太陽之質量約爲 $2\times10^{33}$ 克，在此新單位中，將僅爲

$$m=\frac{2\times10^{33}}{4\times10^{38}}=5\times10^{-6}\text{單位}.$$

而太陽之半徑，在此新的單位系中，將爲 $\dfrac{1.39\times10^{11}}{2\times3\times10^{10}}=2.33$. 然則當星光掠太陽表面而過時，其偏折之角度爲

$$\Delta=\frac{4\times5\times10^{-6}}{2.33}=8.6\times10^{-6}\text{ 弧度},$$

或 $$\Delta=1''.77.$$

Einstein 此種預期之現象，曾經在日全蝕時，應用照相方法觀測太陽附近各恆星之方向，結果求得此方向對於恆星眞實之方向，果有一相當之偏折，其角度與預期之値頗爲相近．是爲廣義相對論之第二大成功．

**43．重力場中光譜之移動**　在四度空間中，間隔 $ds$ 爲一個不變量，不隨座標軸系之變更而改變．設空間有一重力場，此重力場亦不能改變 $ds$，蓋重力場僅相當於一座標軸系之改變也．

假設有兩個相同之原子，一在地面，一在太陽表面，及此二原子俱爲靜止的，即是有 $dx=dy=dz=0$. 設在太陽表面，時間以 $t'$ 計算．當其放射一光譜時，其間隔之平方爲

$$ds^2=\left(1-\frac{2m}{r}\right)dt'^2.$$

在地球表面，時間以 $t$ 表示，而 $m$ 之値可以忽略．然則放射光譜，其間隔與時間之關係爲

$$ds^2 = dt^2,$$

由是求得

$$\frac{dt}{dt'} = \sqrt{1-\frac{2m}{r}} = 1-\frac{m}{r}.$$

由上式，可見 $dt'$ 必較 $dt$ 稍大. 然則在太陽表面，同一元素之光譜，其頻率將較在地面所得者為小，而其波長將較地面所得者為稍長；卽是說，在太陽表面，各元素之光譜將向長波或紅光方面稍有移動. 由 $\frac{m}{r} = 2.1 \times 10^{-6}$，求得此移動之值，僅為千分之幾埃(Ångstrom). C. E. St. John 曾由精細之測量，求得此效應眞實存在. 於是 Einstein 之理論，又得一個證明. 是為廣義相對論之第三個大成功.

中華民國三十七年五月初版

# 相對論

全一冊　定價國幣四元三角
(精裝本定價另加伍元)
(外埠酌加運費匯費)

編著者　田　渠
發行人　蔣　志　澄
印刷所　正中書局
發行所　正中書局
(2273)

校對：向華

滬•本　2/2