算學小叢書

聯立一次方程式之幾何

羅 河 著

商務印書館發行

算學小叢書

聯立一次方程式之幾何

羅河 著

商務印書館發行

序

幾何與代數，每有兩兩相應之處；即幾何上問題能用分析方法計算，代數的方程式亦可以圖形解說．但純粹幾何作圖，限制極嚴，僅界尺與圓規爲許可之用具；故幾何問題雖可用代數法計算，而代數問題則不盡有幾何的解答．蓋作圖用具各代表一類運算手續；限定某某用具，則所能解決之問題，必以含一定之若干種運算爲限．用界尺可作實數之加，減，乘，除四種運算；用圓規可作實數之平方根．合此兩工具，凡代數上問題，苟其計算手續僅爲實數之加，減，乘，除及開平方之有限次運算，均能化爲幾何上問題而以作圖方法解之．惟有若干問題，其幾何解法，雖尚未求得，但非理論上不可能．其解法之存在則爲一定之事實；不過有待於吾人之探討耳．如代數中之聯立一次方程式卽其例也．

代數中之二次方程式，除含有虛根外，已有幾何的解法．聯立一次方程式之計算較二次方程式爲簡易，蓋已

免去開平方之手續. 其在幾何上爲若何之問題, 反至今無人論及, 不可謂非初等算學中之缺憾. 作者固未專治算學, 惟於此矛盾現像, 則於習完初等代數幾何時卽已見之. 因時思於平面幾何中求得與聯立一次方程式相當之問題. 數載之間, 先後共得五法, 均能將方程式之意義於圖中表之, 未知量之數值於圖中作出. 理論淺易, 方法正確; 在平面幾何學中固屬別開生面; 若以之演爲分析, 且可得新的代數解法.

以幾何解代數問題, 原無實際需要; 但其結果則形成純粹幾何之一部分. 故今所論者非代數也, 乃幾何中相當於聯立一次方程式之問題. 因名曰聯立一次方程式之幾何 (The geometry of simultaneous linear equations). 意卽以圓規, 界尺爲工具而依幾何原理論聯立一次方程式間之關係及其解法也. 此問題於初次發表時曾名曰聯立一次方程式之圖解. 惟幾何作圖固屬圖解, 但一般圖解則非盡用純粹幾何方法; 故易今名.

二十三年十二月於唐山

目　錄

聯立一次方程式之幾何

第一章　一次方程式之圖表

1. 欲以單純幾何方法，求聯立一次方程式之解答，其先決問題，必為如何於圖中表示方程式所表之意義．換言之，卽如何將代數式化爲幾何上問題．

解析幾何中圖表一次方程式之法，以僅含三未知量者爲限，故其法不能適用於普通情形．茲所論者，乃含任何數未知量方程式之圖表法．依作者所知，方程式中之常數可以距離表之；式中之未知量，可設爲斜度，或距離，或力量；未知量之係數可設爲距離，或斜度．若設未知量爲斜度，則其係數將爲距離；若設未知量爲距離，則其係數將爲斜度；若設未知量爲力量，則其係數卽爲距離，而式中常數則爲力率 (moment of force)，惟亦以距離表之．此三種圖表法將於以下各節分別述之．

(1)　　以斜度代表未知量法

2　在此法中將以相互垂直之 X 及 Y 軸爲標準; 所謂一綫之斜度者乃指此綫與 X 軸間所夾角度之正切 (tangent). 至於正切及距離之符號, 則與三角學或解析幾何中之規則相同.

設於 X 及 Y 軸之平面中有折綫 (broken line) $ABCDEF$ (見 Fig. 1); AB, BC, CD, DE, EF 等各綫之斜度爲 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5; 又各綫在 x 軸上之射影爲 d_1, d_2, d_3, d_4, d_5. 因 E 在 D 之左, DE 之射影應爲負 d_4. 依解析幾何中原理, 折綫 $ABCDEF$ 在任何綫上之射影等於 AF 之射影. 設 K 爲 AF 在 Y 軸上之射影, 則

$$K=d_1x_1+d_2x_2+d_3x_3-d_4x_4+d_5x_5 \tag{1}$$

今設 $ABCDEF$ 折綫中 B, C, D, E 點各自沿經過此四點之垂綫上下移動, 惟 A 與 F 兩點仍在原位, 此折綫在 Y 軸上之射影必不變, 而 AB, BC, CD, DE, EF 等五綫則因 B, C, D, E 四點之移動而時時改變其斜度. 因此 (1) 式中各 x 之值可爲任何實數而其兩邊仍相等; 則此式將爲含五未知量之方程式. 故依此解說, Fig. 1 中 A 及 F 兩點與經過其他四點之縱綫可表示一含五未知量

之方程式. 反之任何一次式均可以相似之法表之. 今以下例說明其法

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3-a_4x_4-a_5x_5=C_a \qquad (2)$$

(2) 式中各 a 均爲正實數, C_a 亦爲實數. 圖表此式之法, 必先定一比例尺; 然後定一點 N, 於 N 之右作一縱線 $^1/_a$ 使其離 N 之距爲 a_1, 於 $^1/_a$ 之右作一縱綫 $^2/_a$ 使其離 $^1/_a$ 之距爲 a_2, 於 $^2/_a$ 之右作一縱綫 $^3/_a$ 使其離 $^2/_a$ 之距爲 a_3, 於 $^3/_a$ 之左作一縱綫 $^4/_a$ 使其離 $^3/_a$ 之距爲 a_4, 於 $^4/_a$ 之左定一點 F 使其離 $^4/_a$ 之距爲 a_5, 且其高於 N 點之長爲 C_a, 則 N, $^1/_a$, $^2/_a$, $^3/_a$, $^4/_a$, F (圖從略) 卽可表此式. 此種圖表法, 除式中各係數及常數必須爲實數外, 並無其他條件, 故任何一次方程式均可以此法圖表之.

(2) 以距離代表未知量法

3. 設有互相垂直之縱橫二綫, 相交於 O 點 (見 Fig. 2), 縱綫上有一點 P 其離橫綫之距爲已與之長 K. 今有一人, 由 P 點出發欲達到橫綫上某一點, 惟其進行之方向非依一直綫而行; 經過若干時後卽將改變方向一次, 改變五次之後始達到橫綫上某一點 R. 今設每段直綫行程

在橫綫上之射影爲 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5，其斜度爲已與之數 S_1, S_2, S_3, S_4, S_5；設由 O 點向上之方向爲負，向下之方向爲正，向右之方向爲正，向左之方向爲負，則此人由 P 點行至 R 點之動作可以下式

$$S_1x_1+S_2x_2+S_3x_3+S_4x_4+S_5x_5=K \tag{3}$$

表之. (3) 式中各 S 之値旣爲一定，各 X 之値爲可大可小之變數，則此式爲一普通之一次方程式　反之任何一次方程式之意義，均可於圖中以此法解釋.

(3)　　以力量代表未知量法

4. 設 $EABCD$ 爲 X 及 Y 軸平面中一折綫 (見 Fig. 3); E 點在 Y 軸上; 由 Y 軸至 A, B, C, D 四點之距離爲 d_1, d_2, d_3, d_4. 經 A, B, C, D 作縱綫 $^1/_d, ^2/_d, ^3/_d, ^4/_d$, 則由 A 至 $^2/_d$ 之距爲 (d_2-d_1), 由 B 至 $^3/_d$ 之距爲 (d_3-d_2), 由 C 至 $^4/_d$ 之距爲 (d_4-d_3). 設 EA, AB, BC, CD 之斜度爲 S_1, S_2, S_3, S_4, 則折綫 $EABCD$ 在 Y 軸上之射影等於　$S_1d_1+S_2(d_2-d_1)+S_3(d_3-d_2)+S_4(d_4-d_3)$.

經 D 點作橫綫交 Y 軸於 F 點則

$$S_1d_1+S_2(d_2-d_1)+S_3(d_3-d_2)+S_4(d_4-d_3)=EF \tag{4}$$

於另一圖中 (見 Fig. 4) 取一點 O, 自 O 點向右作橫綫 OP, 使其長等於任意之長 K; 經 P 點作縱綫 V, 自 O 點作平行於 EA, AB, BC, CD 之四直綫交 V 於 P_a, P_b, P_c, P_d 四點. 設 PP_d, P_dP_c, P_cP_b, P_bP_a 之長度及方向以 x_4, x_3, x_2, x_1 表之, 則

$$PP_d = x_4, \qquad PP_c = x_4 + x_3$$

$$PP_b = x_4 + x_3 + x_2$$

$$PP_a = x_4 + x_3 + x_2 + x_1$$

$$S_1 = \frac{PP_a}{OP} = \frac{1}{K}(x_4 + x_3 + x_2 + x_1)$$

$$S_2 = \frac{PP_b}{OP} = \frac{1}{K}(x_4 + x_3 + x_2)$$

$$S_3 = \frac{PP_c}{OP} = \frac{1}{K}(x_4 + x_3)$$

$$S_4 = \frac{PP_d}{OP} = \frac{1}{K}(x_4)$$

以 S_1, S_2, S_3, S_4 之值代入 (4) 式則得

$$d_4x_4 + d_3x_3 + d_2x_2 + d_1x_1 = K \cdot EF \tag{5}$$

今設 E, D 兩點固定不動, 惟 A, B, C 各自沿 $^1/_d$, $^2/_d$, $^3/_d$ 三縱綫上下移動, 則 S_1, S_2, S_3, S_4 因而 x_1, x_2, x_3,

x_4 之值變化不定而可爲任何實數. 但無論 x_1, x_2, x_3, x_4 如何變動, (5) 式兩邊則恆相等也. 因 K 可爲任何常數, 故依此解說, 四未知量之方程式如 (5) 式者可以綫段 EF 及縱綫 $^1/_d$, $^2/_d$, $^3/_d$, $^4/_d$ 表之 (見 Fig. 5). 因 F 點爲 D 點之射影, $^4/_d$ 爲經過 D 點之縱綫, 故 F 及 $^4/_d$ 之位置均間接由 D 點決定. 故 (5) 式可以 E, $^1/_d$, $^2/_d$, $^3/_d$ 及 D 表之 (見 Fig. 6).

若設 x_1, x_2, x_3, x_4 之長度及方向代表經過 A, B, C, D 四點而平行於 Y 軸之力量, 則依靜力學中原理可證明此四力對於 Y 軸之總力率 (moment of force) 爲

$$d_4x_4+d_3x_3+d_2x_2+d_1x_1;$$

又可證明此總力率等於 EF 與 OP 之乘積. 故此圖表法亦可依靜力學原理解釋之; 因名曰力量代表未知量法.

在此法中 OP 之長名爲極距 (pole distance). 極距之符號由 O 點起算向右者爲正, 向左者爲負. 極距決定之後, EF 即依某種比例尺表示力率. 力率之符號由 E 點起算, 向上者爲正, 向下者爲負.

第二章　作圖之條件

5. 在完全圖解法中，問題中之關係固須於圖中表之，未知量之數值於圖中作出. 最要之點尤在所得之數值可依據幾何或其他圖形上原理證明爲合於該問題之數. 漸近圖解法者，其目的只在所得之值與問題之正確解答相差之數不出一定範圍，至於作圖方法是否有理論上之證明，則非所計. 本文所論者當屬於前種解法，故其一切作圖方法，必須合乎幾何上原理. 因此於作圖之先不可不研究聯立方程式在圖表上彼此之關係以爲作圖之根據.

(1)　斜度圖表法

6. 已與下列三式

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=K_a$$

$$b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3=K_b$$

$$c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3=K_c$$

設於 Fig. 7 中依斜度代表未知量法，以 N_a, $^1/_a$, $^2/_a$, P_a, N_b, $^1/_b$, $^2/_b$, P_b, N_c, $^1/_c$, $^2/_c$, P_c 表之. 設 S_1, S_2, S_3 爲由此

三式算得之 x_1, x_2, x_3 之值. 若以 S_1 爲斜度自 N_a, N_b, N_c 作三綫交 $^1/_a, {}^1/_b, {}^1/_c$ 於 A_1, B_1, C_1 三點; 自此三點以 S_2 爲斜度作三綫交 $^2/_a, {}^2/_b, {}^2/_c$ 於 A_2, B_2, C_2 三點; 再自此三點以 S_3 爲斜度作三綫則最後所作三綫必各各經過 P_a, P_b, P_c 三點.

故幾何中與解此三式相當之問題爲: 自 N_a, N_b, N_c 三點作三平行綫與 $^1/_a, {}^1/_b, {}^1/_c$ 相遇, 自其相交之點作三平行綫與 $^2/_a, {}^2/_b, {}^2/_c$ 相遇, 又自其相交之點作三平行綫而經過 P_a, P_b, P_c 三點. 若諸平行綫之作法均有幾何上證明, 則此解法卽能成立. 同樣任何一次聯立方程式之圖解, 其必須滿足之條件均與此三式相似.

(2) 距離圖表法

7. 設已與下列三式

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=K_a$$

$$b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3=K_b$$

$$c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3=K_c$$

中 x_1, x_2, x_3 之值已求得爲 d_1, d_2, d_3. 又設 Fig. 8 中縱綫 V_0 上 OP_a, OP_b, OP_c 三綫段表 K_a, K_b, K_c 三數, 由

V_0 至縱綫 V_3 之距為 d_3, 由 V_3 至縱綫 V_2 之距為 d_2, 由 V_2 至橫綫 H_0 上 R 點之距為 d_1. 設自 P_a, P_b, P_c 以 a_3, b_3, c_3 為斜度作三綫交 V_3 於 A_3, B_3, C_3; 自此三點以 a_2, b_2, c_2 為斜度作三綫交 V_2 於 A_2, B_2, C_2 三點; 再自此三點以 a_1, b_1, c_1 為斜度作三綫, 則此三綫必同交於 H_0 上 R 點.

故在幾何中相當於解此三式之問題為: 自 P_a, P_b, P_c 三點以斜度 a_3, b_3, c_3 作三綫過某一縱綫 V_3, 自其相遇之三點以斜度 a_2, b_2, c_2 作三綫遇另一縱綫 V_2, 再自其相遇之三點以斜度 a_1, b_1, c_1 作三綫使與橫綫 H_0 同交於一點 R. 同樣任何數未知量方程式之圖解, 其必須滿足之條件均與此三式相似.

(3) 力量圖表法

8. 設以適宜之極距 h 除下列三式.

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=K_a$$

$$b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3=K_b$$

$$c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3=K_c$$

中常數 K_a, K_b, K_c 而得 Q_a, Q_b, Q_c; 然後依力量代表未

知量法於 Fig. 9 中以 E_a, $^1/_a$, $^2/_a$, H_a, E_b $^1/_b$, $^2/_b$, H_b, E_c, $^1/_c$, $^2/_c$, H_c 表此三式. 設 F_1, F_2, F_3 爲由上三式算得之 x_1, x_2, x_3 之值. 作橫綫 OP (見 Fig. 10) 以表極距 h; 自 P 點作縱綫 PP_3 以表 F_3, 自 P_3 作 P_3P_2 以表 F_2, 再自 P_2 作 P_2P_1 以表 F_1; 並作 OP_1, OP_2, OP_3 三綫. 自 E_a, E_b, E_c 三點作平行於 OP_1 之直綫交 $^1/_a$, $^1/_b$, $^1/_c$ 於 A_1, B_1, C_1 三點; 自此三點作平行於 OP_2 之直綫交 $^2/_a$, $^2/_b$, $^2/_c$ 於 A_2, B_2, C_2 三點; 再自此三點作平行於 OP_3 之直綫, 則依前圖表法中原理可證明最後所作之三綫必各各經過 H_a, H_b, H_c.

Fig. 10 中 OP 既可設爲一定之長 h, PP_3, P_3P_2, P_2P_1 之長又爲已知, 故 OP_3, OP_2, OP_1 三綫之斜度完全一定. 反之若 PP_3, P_3P_2, P_2P_1 之長爲未知, 而 OP_3, OP_2, OP_1 之斜度則可由某種方法決定, 則 PP_3, P_3P_2, P_2P_1 因而 F_3, F_2, F_1 之值亦可立即求得. 但以 OP_1 爲斜度自 E_a, E_b, E_c 作三綫交 $^1/_a$, $^1/_b$, $^1/_c$ 於 A_1, B_1, C_1 三點; 又以 OP_2 爲斜度自 A_1, B_1, C_1 作三綫交 $^2/_a$, $^2/_b$, $^2/_c$ 於 A_2, B_2, C_2 三點; 再以 OP_3 爲斜度自 A_2, B_2, C_2 作三綫則此三綫必各各

經過 H_a, H_b, H_c.

故幾何中相當於解此三式之問題為：自 E_a, E_b, E_c 作三平行綫交 $^1/_a$, $^1/_b$, $^1/_c$ 於三點，自此三交點作三平行綫交 $^2/_a$, $^2/_b$, $^2/_c$ 於三點，再自此三點作三平行綫而各各經過 H_a, H_b, H_c. 同樣任何數未知量方程式之圖解，其必須滿足之條件均與此三式相似.

此圖表法之作圖條件與第一法完全相同，故其作圖方法亦必相似；惟其圖表法各異，其作圖之次序及可能之變化因亦不同，故並述之，以待隨後比較其優劣.

第三章　作圖法

9.　前兩章中已求得平面幾何內相當於聯立一次方程式之問題．茲所論者當爲如何作圖之法．斜度及力量兩圖表之作圖條件既完全相似，其作圖法亦完全相同，故將合並論之．此兩圖表共有兩種不同之解法，而距離圖表則有三種不同之解法，將各以第一，第二，第一，第二，第三解法區別之．

作圖之難易每因方程式之多寡而異．爲便於了解計，各種作圖法將依次以實例說明之，由含二未知量之方程式以至含四五未知量；以說明普遍作法，使讀者能用之於任何情形之下．以下用以說明各法之方程式，將恆以下列各種形式表之．

二未知量之方程式

$$a_1x_1+a_2x_2=K_a \tag{1}$$

$$b_1x_1+b_2x_2=K_b \tag{2}$$

三未知量之方程式

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=K_a \qquad (1)$$

$$b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3=K_b \qquad (2)$$

$$c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3=K_c \qquad (3)$$

四未知量之方程式

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4=K_a \qquad (1)$$

$$b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+b_4x_4=K_b \qquad (2)$$

$$c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3+c_4x_4=K_c \qquad (3)$$

$$d_1x_1+d_2x_2+d_3x_3+d_4x_4=K_d \qquad (4)$$

五未知量之方程式

$$a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4+a_5x_5=K_a \qquad (1)$$

$$b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+b_4x_4+b_5x_5=K_b \qquad (2)$$

$$c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3+c_4x_4+c_5x_5=K_c \qquad (3)$$

$$d_1x_1+d_2x_2+d_3x_3+d_4x_4+d_5x_5=K_d \qquad (4)$$

$$e_1x_1+e_2x_2+e_3x_3+e_4x_4+e_5x_5=K_e \qquad (5)$$

未知量數目加多時，各式之形式可由此類推．以後除特別需要外，各方程式將不全部寫出．凡言若干個未知量之方程式，即指上列某組方程式．

又在以後作圖中，兩點(如 A, B) 間之距離，概以 $\overline{AB}$

表之. 有方向之距離, 如由 A 至 B 則以 AB 表之. 由 A, B 兩點所決定之直綫亦名曰 AB; 如言某綫交 AB 於某點, 卽指交經過 A, B 兩點之直綫於某點. 故 AB 有時表由 A 至 B 之距離, 有時表經過 A, B 兩點之直綫; 但在全句中, 其意義爲何則不難判明.

(1) 應用之定理

10. 本文所論各種圖解法,其目的旣以純粹幾何方法,作聯立一次方程式之各根, 則其作圖所依據者亦必爲幾何上正確之定理. 但此種作圖之特殊性質爲前後連續,未知量可多可少而其所預滿足之條件又爲一般幾何作圖題所未見; 故所用定理雖極顯明易見, 亦爲普通幾何書籍所不載. 玆於作圖之始, 先將各解法中所必須應用之重要定理逐一證明, 以爲作圖之基礎.

11. 定理 I 設有任意七縱綫 $^1/_a$, $^1/_b$, $^1/_c$, $^1/_n$, $^2/_a$, $^2/_b$, $^2/_c$ (見 Fig. 11) 其相互之距離爲已與. 作任一綫 l 交 $^1/_a$, $^1/_b$, $^1/_c$, $^1/_n$ 於 A_1, B_1, C_1, N_1 四點; 自 A_1, B_1, C_1 任作相互平行之三直綫交 $^2/_a$, $^2/_b$, $^2/_c$ 於 A_2, B_2, C_2 三點. 設經過 A_2, B_2 兩點之直綫交經過 N_1 而平行於 A_1A_2 之直綫於 T 點,

交 N_1C_2 於 R 點, 交 C_1C_2 於 S 點; 則無論 l 及 A_1A_2 之斜度若何, T, R, S 三點必在位置一定之三縱綫上.

設由 $^1/_n$ 至 $^1/_a$, $^1/_b$, $^1/_c$, $^2/_a$, $^2/_b$, $^2/_c$ 之距離爲 a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, 至 T, R, S 三點之距離爲 D_t, D_r, D_s. 此處所謂距離乃有方向之距離, 卽向右者爲正, 向左者爲負. 故由 $^1/_a$ 至 $^1/_n$ 之距離則爲 $(-a_1)$; 由 $^1/_a$ 至 $^1/_b$ 之距離則等於由 $^1/_a$ 至 $^1/_n$ 再由 $^1/_n$ 至 $^1/_b$ 之距離, 故爲 $(-a_1+b_1)$. 因 A_1A_2, B_1B_2, N_1T 三綫互爲平行, 故

$$A_1B_1 : B_1N_1 = A_2B_2 : B_2T$$

但 $$A_1B_1 : B_1N_1 = (-a_1+b_1) : (-b_1)$$

$$A_2B_2 : B_2T = (-a_2+b_2) : (-b_2+D_t)$$

故 $$(-a_1+b_1) : (-b) = (-a_2+b_2) : (-b_2+D_t)$$

故 $$D_t = \frac{b_1(a_2-b_2)}{-a_1+b_1} + b_2 = \frac{b_1a_2-a_1b_2}{-a_1+b_1}$$

同樣 $$D_s = \frac{(-b_1+c_1)(-a_2+b_2)}{-a_1+b_1} + b_2$$

$$= \frac{b_1a_2-a_1b_2-c_1(a_2-b_2)}{-a_1+b_1}$$

故由 $^1/_n$ 至 T, S 兩點之距離均爲一定.

因三角形 RN_1T 及 RC_2S 彼此相似, 故

$$N_1T : C_2S = N_1R : C_2R$$

但 $$N_1T : C_2S = D_t : (-c_2+D_s)$$

$$N_1R : C_2R = D_r : (-c_2+D_r)$$

故 $$D_t : (-c_2+D_s) = D_r : (-c_2+D_r)$$

故 $$D_r = \frac{D_t \cdot c_2}{c_2 - D_s + D_t}$$

以 D_s, D_t 之值代入上式卽得

$$D_r = \frac{c_2(b_1a_2+b_2a_1)}{c_2(-a_1+b_1)-c_1(-a_2+b_2)}$$

故由 $1/n$ 至 R 點之距離亦爲一定.

由 $1/n$ 至 T, R, S 之距離旣各爲一定, 則此三點必各在位置一定之三縱綫上而不受 l 及 A_1A_2 斜度之影響.

系 1. $$\frac{B_2R}{A_2B_2} = \frac{-b_2+D_r}{-a_2+b_2} = \frac{b_2c_1-b_1c_2}{c_1(a_2-b_2)-c_2(a_1-b_1)}$$

系 2. $$\frac{C_2R}{N_1C_2} = \frac{-c_2+D_r}{c_2}$$

$$= \frac{a_1(c_2-b_2)+b_1(a_2-c_2)+c_1(b_2-a_2)}{c_1(a_2-b_2)-c_2(a_1-b_1)}$$

12 定理 II 設 O, A, B, C, D 爲一縱綫上五點而

OA, OB, OC, OD 之比等於已與之比 $n_1 : n_2 : n_3 : n_4$, 經過 A, B, C, D 四點以已與斜度 S_a, S_b, S_c, S_d 作 L_a, L_b, L_c, L_d 四綫 (見 Fig. 12). 設 L_a 交 L_c 於 R, L_b 交 L_d 於 T, 則 RT 之斜度爲一定, 而不受 OA, OB, OC, OD 長度之影響.

設 OA 之長爲 l, 因 $OA : OB : OC : OD$ 等於定比, 故可設 OB, OC, OD 之長爲 r_1l, r_2l, r_3l; 則此處所須證明者爲 RT 之斜度可以 S_a, S_b, S_c, S_d 及 r_1, r_2, r_3 之函數表之.

自 R 及 T 作 AD 之垂綫 RF 及 TE, 則

$$S_a = \frac{AF}{FR}, \qquad S_b = \frac{BE}{ET}$$

$$S_c = \frac{CF}{FR}, \qquad S_d = \frac{DE}{ET}$$

故 $$S_a - S_c = \frac{AF}{FR} - \frac{CF}{FR} = \frac{AF + FC}{FR} = \frac{AC}{FR}$$

由此 $$FR = \frac{AC}{S_a - S_c}$$

但 $$AC = AO + OC = -OA + OC = -l + r_2 l$$

故 $$FR=\frac{l(r_2-1)}{S_a-S_c}$$

同樣 $$ET=\frac{l(r_3-r_1)}{S_b-S_d}$$

又 $$AF=FR\cdot S_a=\frac{S_a l(r_2-1)}{S_a-S_c}$$

$$BE=ET\cdot S_b=\frac{S_b l(r_3-r_1)}{S_b-S_d}$$

$$FE=FA+AB+BE=-AF+AB+BE$$

$$=\frac{-S_a l(r_2-1)}{S_a-S_c}+l(r_1-1)+\frac{S_b l(r_3-1)}{S_b-S_d}$$

$$=\frac{l\{(S_a-S_c)(r_3S_b-r_1S_d)+(S_b-S_d)(S_c-r_2S_d)\}}{(S_a-S_c)(S_b-S_d)}$$

自 T 作 FR 之垂綫 TP, 則

$$RP=RF+ET=-FR+ET$$

$$=\frac{-l(r_2-1)}{S_a-S_c}+\frac{l(r_3-r_1)}{S_b-S_d}$$

$$=\frac{l\{-(r_2-1)(S_b-S_d)+(r_3-r_1)(S_a-S_c)\}}{(S_a-S_c)(S_b-S_d)}$$

設 S 爲 RT 之斜度, 則

$$S=\frac{FE}{RP}$$

$$=\frac{(S_a-S_c)(r_3S_b-r_1S_d)+(S_b-S_d)(S_c-r_2S_d)}{(r_3-r_1)(S_a-S_c)-(r_2-1)(S_b-S_d)}$$

故 RT 之斜度爲一定，而不受 OA, OB, OC, OD 長度之影響.

13. **定理 III** 設 A, B 爲縱綫上任意兩點；自 A 點以已與斜度 S_1, S_2 作 AC, AD 兩綫；自 B 點以已與斜度 S_3, S_4 作 BC, BD 兩綫；自 AC, BC 之交點 C 以已與斜度 S_5 作一綫交 AB 於 E. 設 D 爲 AD, BD 之交點，則 DE 之斜度可以 S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 之函數表之而不受 AB 長度之影響 (見 Fig. 13).

設 AB 之長爲 l, DE 之斜度爲 S_6. 自 C, D 兩點作 AB 之垂綫 CF, DG, 則

$$S_1=\frac{AF}{FC},\qquad S_2=\frac{AG}{GD},\qquad S_3=\frac{BF}{FC},$$

$$S_4=\frac{BG}{GD},\qquad S_5=\frac{EF}{FC}$$

故
$$S_1-S_3=\frac{AF-BF}{FC}=\frac{l}{FC}$$

$$S_2-S_4=\frac{AG-BG}{GD}=\frac{l}{GD}$$

由此 $FC=\dfrac{l}{S_1-S_3}$, $GD=\dfrac{l}{S_2-S_4}$

因 $EF=S_5\cdot FC$, $AF=S_1\cdot FC$,

$AG=S_2\cdot GD$

故 $EF=\dfrac{S_5 l}{S_1-S_3}$, $AF=\dfrac{S_1 l}{S_1-S_3}$,

$AG=\dfrac{S_2 l}{S_2-S_4}$

$$AE=AF-EF=\frac{l(S_1-S_5)}{S_1-S_3}$$

$$EG=-AE+AG=\frac{-l(S_1-S_5)}{S_1-S_3}+\frac{S_2 l}{S_2-S_4}$$

$$=\frac{l\{S_2(S_5-S_3)+S_4(S_1-S_5)\}}{(S_1-S_3)(S_2-S_4)}$$

故 $S_6=\dfrac{EG}{GD}$

$$=\frac{l\{S_2(S_5-S_3)+S_4(S_1-S_5)\}}{(S_1-S_3)(S_2-S_4)}\cdot\frac{(S_2-S_4)}{l}$$

$$=\frac{S_2(S_5-S_3)+S_4(S_1-S_5)}{(S_1-S_3)}$$

故以此法作 ED, AB 之長可任意擇定而所得之斜度則恆爲一定.

系　設由縱綫 AB 至 C, D 兩點之距離爲 d_1, d_2, 則此兩距離之比 $d_1:d_2$ 可以 S_1, S_2, S_3, S_4 之函數表之而不受 AB 長度之影響.

由上證明

$$\frac{d_1}{d_2}=\frac{FC}{GD}=\frac{l}{S_1-S_3}\cdot\frac{S_2-S_4}{l}$$

$$=\frac{S_2-S_4}{S_1-S_3}$$

14. 定理 IV　設 A, B 爲縱綫上任意兩點; 由此兩點以已與斜度 S_1, S_3 作直綫相交於 C 點; 又由此兩點以已與斜度 S_2, S_4 作直綫相交於 D 點; 則 CD 之斜度可以 S_1, S_2, S_3, S_4 之函數表之而不受 AB 長度之影響 (見 Fig. 14).

設 AB 之長爲 l; 由 C, D 作 AB 之垂綫 CF, DG, 則由定理 III 中證明

$$FC=\frac{l}{S_1-S_3},\qquad GD=\frac{l}{S_2-S_4}$$

$$BF=\frac{S_3l}{S_1-S_3},\qquad BG=\frac{S_4l}{S_2-S_4}$$

故 $$CF+GD=\frac{-l}{S_1-S_3}+\frac{l}{S_2-S_4}$$

$$=\frac{l(S_4-S_2+S_1-S_3)}{(S_1-S_3)(S_2-S_4)}$$

$$FB+BG=\frac{-S_3l}{S_1-S_3}+\frac{S_4l}{S_2-S_4}$$

$$=\frac{l(S_1\cdot S_4-S_2\cdot S_3)}{(S_1-S_3)(S_2-S_4)}$$

設 CD 之斜度為 S_5, 則

$$S_5=\frac{FB+BG}{CF+GD}=\frac{S_1\cdot S_4-S_2\cdot S_3}{S_4-S_2+S_1-S_3}$$

故 CD 之斜度不受 AB 長度之影響.

15. 定理 V　設 V, V_1, V_2 為一平面中任意三縱綫, 惟由 V 至 V_1, V_2 兩距離之比為定比 r; 自 V 上任一點 A 以已與斜度 S_1, S_2 作兩綫交 V_1, V_2 於 P_1, P_2 兩點, 則 P_1P_2 之斜度可以 S_1, S_2, 及 r 之函數表之 (見 Fig. 15).

設由 V 至 V_1, V_2 之距離為 d_1, d_2; 由 P_1, P_2 作 V 之垂綫 P_1F, P_2G, 則

$$AF=S_1\cdot FP_1=S_1d_1,$$

$$AG=S_2\cdot GP_2=S_2d_2,$$

$$FG=-AF+AG=-S_1d_1+S_2d_2$$

$$P_1F+GP_2=-d_1+d_2.$$

設 P_1P_2 之斜度為 S_3, 則

$$S_3=\frac{FG}{P_1F+GP_2}=\frac{S_2d_2-S_1d_1}{d_2-d_1}=\frac{S_2-rS_1}{1-r}$$

(2)　斜度及力量圖表之第一作圖法.

16.　二未知量之方程式(見 9)

為作圖便利計, 在此法中將以 N 為各式圖表中共同之點; 因此 Fig. 16 中 N, $^1/_a$, P_a, N, $^1/_b$, P_b. 表二未知量之方程式.

作圖.　經 N 點作縱綫 $^1/_n$ 平行於 $^1/_a$, $^1/_b$; 由 P_a, P_b 作兩平行綫交 $^1/_a$, $^1/_b$ 於 A_1, B_1 兩點; 設 A_1B_1 交 $^1/_n$ 於 N_1; 由 N_1 作一綫平行於 P_aA_1 而交 P_aP_b 於 R 點. 作 NR 綫; 由 P_a, P_b 作平行於 NR 之直綫而交 $^1/_a$, $^1/_b$ 於 A, B 兩點. 則 NA, AP_a 之斜度卽為合於該兩式之 x_1, x_2 之值.

證.　此處所須證明者僅為 N, A, B 三點是否同在一直

綫之上.

設 NA 交 $^1/_b$, P_bB 於 B', B'' 兩點, 則

$$\frac{NA}{AB'}=\frac{N_1A_1}{A_1B_1}=\frac{RP_a}{P_aP_b}=\frac{NA}{AB''}$$

故 $$AB'=AB''$$

卽 B, B', B'' 同在一點, 亦卽 N, A, B 同在一直綫之上.

17. 三未知量之方程式 (見 9)

Fig. 17 中 N, $^1/_a$, $^2/_a$, P_a, N, $^1/_b$, $^2/_b$, P_b, N, $^1/_c$, $^2/_c$, P_c 表三未知量之方程式. 今所需要者爲: 經 N 作一綫交 $^1/_a$, $^1/_b$, $^1/_c$ 於 A_1, B_1, C_1 三點; 又由此三點作三平行綫交 $^2/_a$, $^2/_b$, $^2/_c$ 於 A_2, B_2, C_2 三點; 再由所得三點作三平行綫使經過 P_a, P_b, P_c.

分析. 此題之作圖方法已較爲曲折, 爲便於瞭解計, 先假設所需要之各平行綫均已作成 (見 Fig. 17) 以視其關係如何.

設經過 B_2, C_2 兩點之直綫交 A_1A_2 於 D 點, 交 NA_2 於 E 點; 經過 N 而平行於 A_1A_2 之直綫交 B_2C_2 於 H 點; 經過 E 點而平行於 A_2P_a 之直綫交 P_bP_c 於 F 點; 經過 N

而平行於 A_2P_a 之直綫交 P_aF 於 G 點. 則由定理 I 可知 D, E, H 各在位置一定之三縱綫上; 此三縱綫之位置不受 NA_1 及 A_1A_2 斜度之影響. 因

$$C_2E : C_2B_2 = P_cF : P_cP_b$$

故 P_bP_c 綫上 F 點之位置亦為一定. 因

$$A_2E : A_2N = P_aF : P_aG$$

故 P_aF 綫上 G 點之位置亦為一定.

NG 之斜度等於 A_2P_a 之斜度; 故欲決定 A_2P_a 之斜度可先求 G 點; 欲作 G 點必先決定 P_aF 綫; 欲作 P_aF 綫必先決定 F 點; 欲決定 F 點必先決定經過 E 點之縱綫, 而此縱綫可依定理 I 作出. 故得下作圖法.

作圖. 設 Fig. 18 中 N, $^1/_a$, $^2/_a$, P_a, N, $^1/_b$, $^2/_b$, P_b, N, $^1/_c$, $^2/_c$, P_c 表三未知量之方程式. 經過 N 點作縱綫 $^1/_n$; 作一斜綫交 $^1/_a$, $^1/_b$, $^1/_c$, $^1/_n$ 於 a_1, b_1, c_1, N_1 諸點 (此斜綫之方向可任意選定, 以便於隨後作圖為標準); 由 a_1, b_1, c_1 作三平行綫交 $^2/_a$, $^2/_b$, $^2/_c$ 於 a_2, b_2, c_2 三點. 設 b_2c_2 交 a_1a_2, N_1a_2 於 D_1, E_1 兩點; 經此兩點作縱綫 $^1/_d$, $^1/_e$. 由 P_b, P_c 作兩平行綫交 $^2/_b$, $^2/_c$ 於 B_3, C_3 兩點. 設 B_3C_3 交 $^1/_e$

於 E_2; 由 E_2 作平行於 B_3P_b 之直綫交 P_bP_c 於 F 點. 由 P_a 作平行於 B_3P_b 之直綫交 $^2/_a$ 於 A_3. 設A_3E_2 交 $^1/_n$ 於 N_2; 由 N_2 作平行於 B_3P_b 之直綫交 P_aF 於 G 點. 由 P_a, P_b, P_c 作三綫各平行於 NG 而與 $^2/_a$, $^2/_b$, $^2/_c$ 相交於 A_2, B_2, C_2 三點; 設 B_2C_2 交 $^1/_d$ 於 D 點, A_2D 交 $^1/_a$ 於 A_1 點, 則 NA_1, A_1A_2, A_2P_a 三綫之斜度卽爲滿足該三式之 x_1, x_2, x_3 之値.

設上三式之圖表係以力量代表未知量並設其極距爲 l, 則欲得其三未知量之値必須另作一圖.其法如下: 作横綫 OA 表極距 l (見 Fig. 19), 自 O 點作三綫平行於 Fig. 18 中之 NA_1, A_1A_2, A_2P_a 而交經過 A 點之縱綫於 A_1, A_2, A_3 三點, 則 AA_3, A_3A_2, A_2A_1 卽爲 x_3, x_2, x_1 之値.

證. 由 B_2, C_2 作兩綫均平行於 A_1A_2 而交 $^1/_b$, $^1/_c$ 於 B_1, C_1 兩點, 則無論圖表時係以斜度或以力量表未知量, 此處所須證明者僅爲 N, A_1, B_1, C_1 四點是否同在一直綫之上.

由 N_1 作平行於 a_1a_2 之直綫交 b_2c_2 於 H_1; 經 H_1 作縱綫 $^1/_h$ 交 B_3C_3 於 H_2; 由 H_2 作平行於 B_3P_b 之直綫交

P_bP_c 於 L; 由 L 作平行於 NG 之直綫交 $^1/_h$ 於 H_3; 作 NH_3 綫; 又設 NA_2 交 $^1/_e$ 於 E_3. 因

$$\frac{A_2E_3}{E_3N}=\frac{A_3E_2}{E_2N_2}=\frac{P_aF}{FG}$$

故 FE_3 必平行於 P_bB_2. 因 FE_2, P_bB_3, LH_2, P_cC_3 四綫互爲平行, 故

$$C_3H_2 : H_2B_3 : B_3E_2=P_cL : LP_b : P_bF$$

且 FE_3, P_bB_2, LH_3, P_cC_2 四綫互爲平行, 故 H_3E_3 可證明在 B_2C_2 綫上. 因

$$\frac{A_2E_3}{E_3N}=\frac{a_2E_1}{E_1N_1}=\frac{D_1E_1}{E_1H_1}=\frac{DE_3}{E_3H_3}$$

故 NH_3 必平行於 A_1A_2. 因 A_1A_2, B_1B_2, NH_3, C_1C_2 互爲平行, 且

$$DB_2 : B_2H_3 : H_3C_2=a_1b_1 : b_1N_1 : N_1c_1$$

故 A_1, B_1, N, C_1 四點可證明同在一直綫之上.

18. 四未知量之方程式 (見 9)

設 Fig. 20 中 N, $^1/_a$, $^2/_a$, $^3/_a$, P_a, N, $^1/_b$, $^2/_b$, $^3/_b$, P_b, N, $^1/_c$, $^2/_c$, $^3/_c$, P_c, N, $^1/_d$, $^2/_d$, $^3/_d$, P_d 代表四未知量之方程式.

作圖. 經N作縱綫 $^1/_n$; 任作一直綫交 $^1/_a$, $^1/_b$, $^1/_c$, $^1/_d$, $^1/_n$

於 a_1, b_1, c_1, d_1, n_1; 由 a_1, b_1, c_1, d_1 作四橫綫(或任意四平行綫)交 $^2/_a$, $^2/_b$, $^2/_c$, $^2/_d$, $^3/_a$, $^3/_b$, $^3/_c$, $^3/_d$ 於 a_2, b_2, c_2, d_2, a_3, b_3, c_3, d_3 諸點. 設 n_1c_2, n_1d_2 交 a_2b_2 於 S_1,T_1 兩點; 由 S_1, T_1 作兩橫綫交 a_3b_3 於 S_2, T_2 兩點; 由 n_1 作一橫綫交 a_2b_2, S_2c_3, T_2d_3 於 R, E, F 三點; 經過 E, F, S_2, T_2 作縱綫 $^1/_e$, $^1/_f$, $^2/_s$, $^2/_t$. 由 P_a, P_b, P_c, P_d 作四橫綫交 $^3/_a$, $^3/_b$, $^3/_c$, $^3/_d$ 於 a_4, b_4, c_4, d_4. 設 a_4b_4 交 $^2/_s$, $^2/_t$ 於 S_3, T_3; 設 c_4S_3, d_4T_3 交 $^1/_e$, $^1/_f$ 於 E_1, F_1. 由 S_3, T_3 作兩橫綫交 P_aP_b 於 S_4, T_4; 由 E_1, F_1 作兩橫綫交 P_cS_4, P_dT_4 於 S_5, T_5. 設 E_1F_1 交 $^1/_n$ 於 n_2, 由 n_2 作一橫綫交 S_5T_5 於 K 點. 由 S_5 作平行於 NK 之直綫交 $^1/_e$ 於 E_2. 由 P_a, P_b, P_c, P_d 作四綫各平行於 NK 交 $^3/_a$, $^3/_b$, $^3/_c$, $^3/_d$ 於 A_3, B_3, C_3, D_3; 由此四點作四綫各平行於 NE_2, 交 $^2/_a$, $^2/_b$, $^2/_c$, $^2/_d$, 於 A_2, B_2, C_2, D_2. 經 R 作縱綫 $^1/_r$ 交 A_2B_2 於 R_1; 經 A_2, B_2, C_2, D_2 作四綫各平行於 NR_1, 於 $^1/_a$, $^1/_b$, $^1/_c$, $^1/_d$ 於 A_1, B_1, C_1, D_1. 則 NA_1, A_1A_2, A_2A_3, A_3P_a 四綫之斜度即爲滿足該四式之 x_1, x_2, x_3, x_4 之值.

證. 此處所須證明者爲 N, A_1, B_1, C_1, D_1 五點是否

同在一直綫之上.

設經過 c_1 之橫綫交 a_2b_2 於 H_1; 經 H_1, S_1 作縱綫 $^1/_h$, $^1/_s$; 由 S_4 作平行於 P_cC_3 之直綫交 $^2/_s$ 於 M; 由 M 作平行於 NE_2 之直綫交 $^1/_s$ 於 L. 則可證明 A_3, B_3, M 三點同在一直綫之上; C_3, E_2, M 三點同在一直綫之上; C_2, L, N 三點同在一直綫之上; L, A_2, B_2 三點同在一直綫之上.

設 A_2B_2 交 $^1/_h$ 於 H_2, 則

$$\frac{H_2L}{H_2R_1}=\frac{H_1S_1}{H_1R}=\frac{c_2S_1}{c_2n_1}=\frac{C_2L}{C_2N}$$

故平行於 NR_1 之 C_1C_2 亦經過 H_2. 因

$$\frac{a_1b_1}{a_1n_1}=\frac{a_2b_2}{a_2R}=\frac{A_2B_2}{A_2R_1}$$

故 N, A_1, B_1 三點可證明同在一直綫之上. 因

$$\frac{a_1b_1}{b_1c_1}=\frac{a_2b_2}{b_2H_1}=\frac{A_2B_2}{B_2H_2}$$

故 A_1, B_1, C_1 三點可證明同在一直綫之上. 同樣 A_1, B_1, D_1 三點亦可證明同在一直綫之上.

19.　五未知量之方程式 (見 9)

設該五式均依前法於 Fig. 21 中表之. 惟此處將不述其完全作圖方法; 僅用以說明普通作圖之步驟, 如何由五未知量之方程式化而爲三未知量者. 爲便於瞭解計, 問題中所需要之各綫 $NA_1A_2A_3A_4P_a$, $NB_1B_2B_3B_4P_b$ 等均假設亦已作成. 作 B_2D_2, B_3D_3, B_4D_4, P_bP_d 四綫; 作 NA_2, NC_2, NE_2 三直綫交 B_2D_2 於 F, G, H 三點. 則依定理 I, F, G, H 各在位置一定之三縱綫上; 又依該定理

$$\frac{NA_2}{A_2F},\ \frac{NC_2}{C_2G},\ \frac{NE_2}{E_2H}$$

三比率亦均爲一定.

由 F, G, H 作平行於 A_2A_3 之三直綫交 B_3D_3 於 F_1, G_1, H_1; 由此三點作平行於 A_3A_4 之三直綫交 B_4D_4 於 F_2, G_2, H_2; 再由所得三點作平行於 A_4P_a 之三直綫交 P_bP_d 於 F_3, G_3, H_3. 則

$$\frac{B_2D_2}{D_2F}=\frac{B_3D_3}{D_3F_1}=\frac{B_4D_4}{D_4F_2}=\frac{P_bP_d}{P_dF_3}$$

故 F_1, F_2 各在位置一定之縱綫上; 同樣 G_1, G_2, H_1, H_2 亦各在位置一定之縱綫上; 而 F_3, G_3, H_3 三點之位置則完全一定.

由 N 點作平行於 A_2A_3 之直綫交 A_3F_1, C_3G_1, E_3H_1 於 K_1, L_1, M_1 三點; 由此三點作平行於 A_3A_4 之直綫交 A_4F_2, C_4G_2, E_4H_2 於 K_2, L_2, M_2 三點; 再由所得三點作平行於 A_4P_a 之直綫, 交 P_aF_3, P_cG_3, P_eH_3 於 P_a', P_c', P_e' 三點. 則

$$\frac{NA_2}{A_2F}=\frac{K_1A_3}{A_3F_1}=\frac{K_2A_4}{A_4F_2}=\frac{P_a'P_a}{P_aF_3}.$$

故 K_1, K_2 各在位置一定之縱綫上而 P_a' 之位置則完全一定. 同樣 L_1, L_2, M_1, M_2 各在位置一定之縱綫上; P_c', P_e' 之位置亦完全一定.

由以上之分析, 可見經過 K_1, K_2 兩點之縱綫及 P_a' 點均以已有之綫, 點及

$$B_2D_2 : D_2F, \qquad NA_2 : A_2F$$

兩比率決定. 但此兩比率可依定理 I 作出, 其法如下:

經 N 點作縱綫 $^1/_n$; 作任一斜綫交 $^1/_a$, $^1/_b$, $^1/_d$, $^1/_n$ 於 a_1, b_1, d_1, n_1 諸點; 自 a_1, b_1, d_2 作三平行綫交 $^2/_a$, $^2/_b$, $^2/_d$ 於 a_2, b_2, d_2, 三點; 作 n_1a_2 綫交 b_2d_2 於 f 點. 則依定理 I

$$\frac{b_2d_2}{d_2f}=\frac{B_2D_2}{D_2F}, \quad \frac{n_1a_2}{a_2f}=\frac{NA_2}{A_2F}$$

故經過 K_1, K_2, 之兩縱綫及 P_a' 不難立卽作出; 同樣經過 L_1, L_2, M_1, M_2 之四縱綫及 P_c', P_e' 亦可作出.

設經過 K_1, K_2, L_1, L_2, M_1, M_2 之縱綫爲 $^1/_k$, $^2/_k$, $^1/_l$, $^2/_l$, $^1/_m$, $^2/_m$. 在上分析中, NK_1 平行於 A_2A_3; K_1K_2, L_1L_2, M_1M_2 均平行於 A_3A_4; K_2P_a', L_2P_c', M_2P_e' 均平行於 A_4P_a. 故 x_3, x_4, x_5 三未知量之值可由 N, P_a', P_c', P_e' 四點及 $^1/_k$, $^2/_k$, $^1/_l$, $^2/_l$, $^1/_m$, $^2/_m$ 等縱綫決定.

20. 查前論四未知量方程式之作圖時(18), C_2C_3, C_3P_c 兩綫之斜度首先決定, 而決定之法則由 N, S_5, T_5, $^1/_e$, $^1/_f$ 作 NE_2, E_2S_5 兩綫. 故此作圖法可分爲兩步: 第一步決定 $^1/_e$, $^1/_f$, S_5, T_5; 第二步決定 NE_2, E_2S_5.

由前節之分析, x_3, x_4, x_5 三未知量之值可由 N, $^1/_k$, $^2/_k$, $^1/_l$, $^2/_l$, $^1/_m$, $^2/_m$, P_a', P_c', P_e' 決定. 故實際作圖時亦必首先決定 $^1/_k$, $^2/_k$, $^1/_l$, $^2/_l$, $^1/_m$, $^2/_m$ 諸縱綫及 P_a', P_c', P_e' 三點.

若由代數立場論之, 此兩例共通之點則爲消去 x_1, x_2 兩未知量. 此兩未知量在 18 節中已由作圖法消去, 而由 19 節之分析可知在五未知量之方程式亦可用同樣作圖

法消去．又由此兩例可見每次消去兩未知量之法甚爲普遍，可適用於任何數未知量之方程式．故繼續運用此法，凡係數及常數中不含平方根以上之無理數及虛數之聯立一次方程式，苟可以代數法解者，均可以此作圖法解之．

(3)　斜度及力量圖表之第二作圖法．

21.　此法中二未知量方程式之作圖與前法相同，故首論三未知量者．

設 Fig. 22 中 N, $^1/_a$, $^2/_a$, P_a, N, $^1/_b$, $^2/_b$, P_b, N, $^1/_c$, $^2/_c$, P_c 表三未知量之方程式 (見 9)．經 N 作縱綫 $^1/_n$．作斜綫交 $^1/_a$, $^1/_b$, $^1/_c$, $^1/_n$ 於 a_1, b_1, c_1, n_1 四點；經此四點作四橫綫 H_a, H_b, H_c, H_n．設 H_a 交 $^2/_a$ 於 a_2；H_b 交 $^2/_b$ 於 b_2；H_c 交 $^2/_c$ 於 c_2．作 a_2b_2, a_2c_2 兩直綫交 H_n 於 d_1, e_1 兩點．經 d_1, e_1 作縱綫 $^1/_d$, $^1/_e$．自 P_a, P_b, P_c 作三橫綫交 $^2/_a$, $^2/_b$, $^2/_c$ 於 A, B, C 三點．作 AB, AC 兩綫交 $^1/_d$, $^1/_e$ 於 D, E 兩點．作 P_aP_b, P_aP_c 兩直綫；自 D 點作橫綫交 P_aP_b 於 P_d，自 E 點作橫綫交 P_aP_c 於 P_e．設 DE 交 $^1/_n$ 於 N_1；自 N_1 作橫綫交 P_dP_e 於 K 點．作直綫 NK．自 P_d 作平行於 NK 之直綫交 $^1/_d$ 於 D_1；作直綫 ND_1．自 P_a

作平行於 NK 之直綫交 $^2/_a$ 於 A_2, 自 A_2 作平行於 ND_1 之直綫交 $^1/_a$ 於 A_1. 則由 NA_1, A_1A_2, A_2P_a 三綫之斜度即可得滿足該三式之 x_1, x_2, x_3 之値.

證. 自 P_b, P_c 作平行於 A_2P_a 之直綫交 $^2/_b$, $^2/_c$ 於 B_2, C_2; 自此兩點作平行於 A_1A_2 之直綫交 $^1/_b$, $^1/_c$ 於 B_1, C_1 兩點, 則此處所須證明者爲 A_1, B_1, C_1, N 四點是否同在一直綫之上.

作直綫 A_2B_2, 則可證明此綫必經過 D_1. 設直綫 A_1N 交 $^1/_b$, B_2B_1 於 X, Y 兩點, 則

$$\frac{A_1N}{NX}=\frac{a_1n_1}{n_1b_1}=\frac{a_2d_1}{d_1b_2}=\frac{A_2D_1}{D_1B_2}=\frac{A_1N}{NY}$$

故 X 與 Y 同在一點, 卽 B_1 在 A_1N 直綫之上. 同樣可證明 C_1 亦在 A_1N 之上.

22. 四未知量之方程式

設 Fig. 23 中 N, $^1/_a$, $^2/_a$, $^3/_a$, $^1/_b$, $^2/_b$, $^3/_b$, $^1/_c$, $^2/_c$, $^3/_c$, $^1/_d$, $^2/_d$, $^3/_d$, P_a, P_b, P_c, P_d 表四未知量之方程式 (見 9); 並設所需要之折綫 $NA_1A_2A_3P_a$, $NB_1B_2B_3P_b$ 等已作成如圖中所示. 茲以此爲例說明普通消減未知量之法. 自 B_2 作

三直綫經過 A_2, C_2, D_2 三點; 自 N 作平行於 A_1A_2 之直綫交此三綫於 F_1, G_1, H_1. 自 F_1 作平行於 A_2A_3 之直綫, 交 B_3A_3 於 F_2; 自 F_2 作平行於 A_3P_a 之直綫交 P_bP_a 於 P'_a. 同樣作 G_2, P'_c, H_2, P'_d 等點. 因

$$\frac{B_2A_2}{B_2F_1}=\frac{B_3A_3}{B_3F_2}=\frac{P_bP_a}{P_bP_a'}=\frac{B_1A_1}{B_1N}$$

故依定理 I, F_1, F_2 各在位置一定之縱綫上, 而 P'_a 之位置亦爲一定. 同樣 G_1, G_2, H_1, H_2 各在位置一定之四縱綫上; P'_c P'_d 之位置均爲一定. 設經過 F_1, F_2, G_1, G_2, H_1, H_2 之縱綫爲 $^1/_f$, $^2/_f$, $^1/_g$, $^2/_g$, $^1/_h$, $^2/_h$. 則由圖形上關係, NF_1, F_1F_2, $F_2P'_a$ 之斜度可由此六縱綫及 N, P'_a, P'_c, P'_d 等四點決定. 但 NF_1, F_1F_2, $F_2P'_a$ 各各平行於 A_1A_2, A_2A_3, A_3P_a. 故 x_2, x_3, x_4, 之值可由 N, P'_a, P'_c, P'_d, $^1/_f$, $^2/_f$, $^1/_g$, $^2/_g$, $^1/_h$, $^2/_h$ 決定.

由以上之分析可見四未知量之方程式可消去其一未知量而化爲三未知量者. 至消減之法則以定理 I 爲根據. 故運用此定理任何數未知量之方程式均可逐漸消減至含二三未知量者, 而依前節將其各根作出.

23. 此兩法中各未知量之值既直接或間接以直綫之斜度表之，則未知量之能否求得，當視各斜度能否決定；斜度之能否決定，當視此斜度之直綫能否作出．在此兩法中各直綫均以兩點定之．設決定一直綫之兩點同在一點，則此直綫之斜度為零除零．零除零可為任何數；故遇此種情形，式中之未知量可為任何數而不能決定．設決定一直綫之兩點同在一縱綫之上，則其斜度為無窮大；因此其他各未知量之值亦得為無窮大或任何數．

如 Fig. 20 中 N 與 K (或 Fig. 22 中 N 與 K) 同在一點，則 x_4 之值可為任何數；因此其他各未知量之值亦可為任何數．此乃由於該四式中至少必有一式係由其他數式合並而成．故實際獨立方程式之數少於未知量之數；即條件不足，故不能決定．

若 N 與 K 同在一縱綫之上，則 x_4 之值為無窮大；因此其他各未知量之值亦得為無窮大．此乃由於該四式中至少必有兩未知量間之相對關係始終未變；即此兩未知量可以一未知量代之．因此實際未知量之數少於方程式之數；即決定未知量之條件太多．條件太多則難同時滿

足；故不得不以兩可辦法應付．在算學中無窮大爲大無止境之不定數．無窮大減無窮大可爲任何數．故凡不能同時滿足之聯立方程式，惟有以無窮大爲各未知量之值始能適合．

(4)　距離圖表之第一作圖法．

24．在此解法中將恆有一橫綫 H_0，縱綫 V_0，其相交之點爲 O；由 O 向上之方向爲負，向下之方向爲正．各式中之常數均以由 O 點起 V_0 上距離表之；各未知量之值則以 H_0 上距離表之．此法中通用之記號爲：由 V_0 至縱綫 V_n 之距爲 x_n 之值，由 V_n 至 V_{n-1} 之距爲 x_{n-1} 之值，由 V_{n-1} 至 V_{n-2} 之距爲 x_{n-2} 之值；由 V_2 至 H_0 上 R 點之距爲 x_1 之值．又在此法中各未知量之係數既以直綫之斜度表之，則每一直綫必須標明屬於某未知量，某方程式及方程式之組數．此綫及其號數將以字母 L 及其右所記之數字記之；如第三組方程式內，第五方程式中 x_4 之係數卽爲 $L4 \cdot 5 \cdot 3$ 之斜度．惟各組中之方程式設由第一組中某式求得，則其方程式之號數將恆爲某數．

各未知量之值既由縱綫 V_n, V_{n-1}, ……, V_2 及 R 點決

定，故作圖之目的即在決定 V_n, V_{n-1}, ……, V_2 及R 之位置.

25. 二未知量之方程式 (見 9)

設 Fig. 24 中 OP_1, OP_2 表 K_a, K_b; 又設 V_2 亦已作成交 $\underline{|2}\cdot1\cdot1$, $\underline{|2}\cdot2\cdot1$ 於 A_2, B_2 兩點. 因由 V_0 至 V_2 之距為滿足上兩式之 x_2 之值，故由 A_2. B_2 所作之 $\underline{|1}\cdot1\cdot1$, $\underline{|1}\cdot2\cdot1$ 必同交 H_0 於 R_1. 設 $\underline{|2}\cdot2\cdot1$ 交 H_0 於 R_2, 則由定理 III, A_2R_2 之斜度為一定. 故作圖之始即須決定此綫 (即 $\underline{|2}\cdot1\cdot2$) 之斜度. 其作法如下: 作 V_0, H_0 兩綫 (見 Fig. 25); 由 H_0 上任一點 R_1' 作兩綫平行於 $\underline{|1}\cdot1\cdot1$, $\underline{|1}\cdot2\cdot1$, 交 V_0 於 P_a, P_b 兩點. 由 P_b 作平行於 $\underline{|2}\cdot2\cdot1$ 之直綫交 H_0 於 R_2', 則 P_aR_2' 即平行於前圖中之 $\underline{|2}\cdot1\cdot2$.

既得 $\underline{|2}\cdot1\cdot2$, 則於另一圖中 (見 Fig. 26) 作橫綫 H_0, 縱綫 V_0. 於 V_0 上取 P_1, P_2 使 OP_1, OP_2 表 K_a, K_b. 自 P_1, P_2, 以 a_2, b_2 為斜度作 $\underline{|2}\cdot1\cdot1$, $\underline{|2}\cdot2\cdot1$. 設 $\underline{|2}\cdot2\cdot1$ 交 H_0 於 R_2, 自 R_2 作一綫平行於 Fig. 25 中 $P_aR'_2$ 而交 $\underline{|2}\cdot1\cdot1$ 於 A_2. 經 A_2 作縱綫 V_2, 並由 A_2 以 a_1 為斜度作 $\underline{|1}\cdot1\cdot1$ 交 H_0 於 R_1. 則由 V_0 至 V_2, 由 V_2 至 R_1 之距離即

爲滿足該兩式之 x_2, x_1 之値(證法從略).

26. 三未知量之方程式(見 9)

作圖. 作橫綫 H_o. 縱綫 V_o (見 Fig. 27) 自 H_o 上任一點 R'_1 以 a_1, b_1, c_1 爲斜度作 $\underline{|1}\cdot1\cdot1$, $\underline{|1}\cdot2\cdot1$, $\underline{|1}\cdot3\cdot1$ 三綫交 V_o 於 P_a, P_b, P_c 三點; 自 P_a 以 a_2, a_3 爲斜度作 $\underline{|2}\cdot1\cdot1$, $\underline{|3}\cdot1\cdot1$, 兩綫; 同樣自 P_b 作 $\underline{|2}\cdot2\cdot1$, $\underline{|3}\cdot2\cdot1$, 自 P_c 作 $\underline{|2}\cdot3\cdot1$, $\underline{|3}\cdot3\cdot1$. 設 $\underline{|2}\cdot2\cdot1$ 交 $\underline{|2}\cdot3\cdot1$ 於 d_2, $\underline{|3}\cdot2\cdot1$ 交 $\underline{|3}\cdot3\cdot1$ 於 d_3, $\underline{|2}\cdot1\cdot1$ 交 H_o 於 R'_2, $\underline{|3}\cdot1\cdot1$ 交 H_o 於 R'_3. 設經過 R'_2 及 d_2 之直綫交 V_o 於 P_d. 作 R'_2P_b, R'_2P_c, R'_3P_d, d_3P_d 四直綫.

於另一圖中(見 Fig. 28) 作橫綫 H_o, 縱綫 V_o, 相交於 O 點. 於 V_o 上取 P_1, P_2, P_3 三點使 OP_1, OP_2, OP_3 表 K_a, K_b, K_c. 經此三點作 $\underline{|3}\cdot1\cdot1$, $\underline{|3}\cdot2\cdot1$, $\underline{|3}\cdot3\cdot1$. 設 $\underline{|3}\cdot2\cdot1$ 交 $\underline{|3}\cdot3\cdot1$ 於 D'_3, $\underline{|3}\cdot1\cdot1$ 交 H_o 於 R_3. 經 D'_3 作一綫平行於 Fig. 27 中之 d_3P_d; 經 R_3 作一線平行於 Fig. 27 中之 $R_3'P_d$. 設此兩綫相交於 D_3; 經 D_3 作縱綫 V_3, 交 $\underline{|3}\cdot1\cdot1$, $\underline{|3}\cdot2\cdot1$, $\underline{|3}\cdot3\cdot1$ 於 A_3, B_3, C_3 三點. 自 C_3 作 $\underline{|2}\cdot3\cdot1$; 自 A_3 作 $\underline{|2}\cdot1\cdot1$, 交 H_o 於 R_2. 自 R_2 作一綫

平行於 Fig. 27 中之 R'_2P_c 而交 $\underline{|2}\cdot 3\cdot 1$ 於 C_2. 經 C_2 作縱綫 V_2; 自 C_2 作 $\underline{|1}\cdot 3\cdot 1$ 交 H_o 於 R_1. 則由 V_o 至 V_3, 由 V_3 至 V_2, 由 V_2 至 R_1 等三距離卽爲滿足該三式之 x_3, x_2, x_1 之值.

證. 自 B_3 作 $\underline{|2}\cdot 2\cdot 1$. 設 V_2 交 $\underline{|2}\cdot 1\cdot 1$, $\underline{|2}\cdot 2\cdot 1$ 於 A_2, B_2 兩點. 自 A_2 作 $\underline{|1}\cdot 1\cdot 1$, 自 B_2 作 $\underline{|1}\cdot 2\cdot 1$; 則此處所須證明者爲 $\underline{|1}\cdot 2\cdot 1$, $\underline{|1}\cdot 1\cdot 1$ 兩綫是否經過 R_1.

作直綫連接 R_2 與 D_3, R_2 與 B_2; 則依定理 III, R_2D_3 必平行於 Fig. 27 中之 $R_2'd_2$. 設 R_2D_3 交 $\underline{|2}\cdot 2\cdot 1$, $\underline{|2}\cdot 3\cdot 1$ 於 D', D'' 兩點, 則

$$\frac{D_3D'}{d_2P_d}=\frac{D_3B_3}{P_dP_b}, \qquad \frac{D_3D''}{d_2P_d}=\frac{D_3C_3}{P_dP_c}$$

但 $$D_3B_3 : P_dP_b = D_3C_3 : P_dP_c$$

故 $$D_3D' = D_3D''$$

卽 R_2D_3, $\underline{|2}\cdot 2\cdot 1$, $\underline{|2}\cdot 3\cdot 1$ 同交於一點 D'_2. 因 Fig. 28 中 $R_2C_2D'_2$, $D'_2C_2B_2$ 兩三角形與 Fig. 27 中 $R'_2P_cd_2$ 及 $P_cd_2P_b$ 兩三角形相似, 故可證明 Fig. 28 中三角形 $R_2D'_2B_2$ 與 Fig. 27 中三角形 $R'_2d_2P_b$ 相似. 故 R_2B_2 平

行於 R'_2P_b. 因三角 $R_2B_2C_2$, $R'_2P_bP_c$ 彼此相似，故可證明 Fig. 28 中 H_o, $\lfloor\underline{1}\cdot 3\cdot 1$, $\lfloor\underline{1}\cdot 2\cdot 1$ 必共交於一點 R_1. 同樣可證明 $\lfloor\underline{1}\cdot 1\cdot 1$ 亦經過 R_1.

27.　四未知量之方程式 (見 9)

此例之完全作圖方法，將不詳論；惟述其如何由四未知量之方程式減而爲三未知量者；推而至於任何數未知量方程式之消減未知量之法.

設滿足該四式之 x_1, x_2, x_3, x_4 之值已求得爲 K_1, K_2, K_3, K_4. 作橫綫 H_o, 縱綫 V_o (見 Fig. 29), 相交於 O 點. 作縱綫 V_4, V_3, V_2 並於 H_o 上取一點 R_1 使由 V_o 至 V_4, 由 V_4 至 V_3, 由 V_3 至 V_2, 由 V_2 至 R_1 之距離爲 K_4, K_3, K_2, K_1. 於 V_o 上取 P_1, P_2, P_3, P_4 四點使 OP_1, OP_2, OP_3, OP_4 表 K_a, K_b, K_c, K_d. 自 P_1 以 a_4 爲斜度作 $\lfloor\underline{4}\cdot 1\cdot 1$ 交 V_4 於 A_4, 自 A_4 以 a_3 爲斜度作 $\lfloor\underline{3}\cdot 1\cdot 1$ 交 V_3 於 A_3, 自 A_3 以 a_2 爲斜度作 $\lfloor\underline{2}\cdot 1\cdot 1$ 交 V_2 於 A_2; 自 A_2 以 a_1 爲斜度作 $\lfloor\underline{1}\cdot 1\cdot 1$, 則 $\lfloor\underline{1}\cdot 1\cdot 1$ 必經過 R_1. 同樣作 $\lfloor\underline{4}\cdot 2\cdot 1$, $\lfloor\underline{4}\cdot 3\cdot 1$, $\lfloor\underline{4}\cdot 4\cdot 1$, ……, $\lfloor\underline{1}\cdot 2\cdot 1$, $\lfloor\underline{1}\cdot 3\cdot 1$, $\lfloor\underline{1}\cdot 4\cdot 1$ 等十二綫，則 $\lfloor\underline{1}\cdot 2\cdot 1$, $\lfloor\underline{1}\cdot 3\cdot 1$, $\lfloor\underline{1}\cdot 4\cdot 1$ 亦必各經過 R_1.

設 $\underline{|2}\cdot2\cdot1$ 交 H_o 於 R_2; $\underline{|2}\cdot3\cdot1$ 交 $\underline{|2}\cdot1\cdot1$, $\underline{|2}\cdot4\cdot1$ 於 E_2', F_2' 兩點, 則依定理 II, (設定理 II 中 $r_1=O$, $S_b=O$ 即與此情形相同), $R_2E'_2$, $R_2F'_2$ 兩綫之斜度均爲一定. 設此兩綫交 V_3 於 E_3, F_3 兩點; $\underline{|3}\cdot3\cdot1$ 交 $\underline{|3}\cdot1\cdot1$, $\underline{|3}\cdot4\cdot1$ 於 E'_3, F'_3 兩點. 則依定理 III, $E_3E'_3$, $F_3F'_3$ 兩綫之斜度均爲一定. 設此兩綫交 V_4 於 E_4, F_4 兩點; $\underline{|4}\cdot3\cdot1$ 交 $\underline{|4}\cdot1\cdot1$, $\underline{|4}\cdot4\cdot1$ 於 E'_4, F'_4 兩點. 則依定理 III $E_4E'_4$, $F_4F'_4$ 兩綫之斜度均爲一定. 設此兩綫交 V_o 於 P_5, P_6, 則此兩點之位置亦爲一定.

設由 V_3 至 R_2 之距離爲 Y_1, $E_4E'_4$, $E_3E'_3$, $R_2E'_2$, $F_4F'_4$, $F_3F'_3$, $R_2F'_2$ 之斜度爲 e_4, e_3, e_2, f_4, f_3, f_2; OP_5, OP_6 之値爲 K_e, K_f, 則由圖形上關係

$$b_4x_4+b_3x_3+b_2y_1=K_b$$

$$e_4x_4+e_3x_3+e_2y_1=K_e$$

$$f_4x_4+f_3x_3+f_2y_1=K_f$$

此三式中, y_1 爲新生之未知量, 今且不論; 至 x_3, x_4 兩未知量則與原有式中相同. 故 x_3, x_4 之値, 除由原有四式外, 可由此三式求得. 此三式中, 第一式內係數及常數

均爲已知; 僅其他兩式中係數與常數猶待決定. 但 K_e 爲 OP_5 之值, P_5 乃 E_4E_4' 與 V_o 之交點; E_4' 之位置既爲一定, 苟 E_4E_4' 之斜度能決定, 則 P_5, 因而 K_e 亦可隨之決定. 故此時之問題僅爲如何決定 $E_4E'_4$, $E_3E'_3$, $R_2E'_2$, $F_4F'_4$, $F_3F'_3$, $R_2F'_2$, 之斜度. 其作法如下:

作橫綫 H_o, 縱綫 V_o (見 Fig. 30), 相交於 O 點. 於 V_o 上取 P_a, P_b, P_c, P_d 四點, 使

$$OP_a:OP_b:OP_c:OP_d=a_1:b_1:c_1:d_1$$

經 P_a 作 $\underline{\lvert 2}\cdot 1\cdot 1$, $\underline{\lvert 3}\cdot 1\cdot 1$, $\underline{\lvert 4}\cdot 1\cdot 1$ 三綫; 同樣經 P_b, P_c, P_d 各作相似之三綫. 設 $\underline{\lvert 2}\cdot 2\cdot 1$ 交 H_o 於 R'_2, $\underline{\lvert 2}\cdot 3\cdot 1$ 交 $\underline{\lvert 2}\cdot 1\cdot 1$, $\underline{\lvert 2}\cdot 4\cdot 1$ 於 e_2, f_2; $\underline{\lvert 3}\cdot 3\cdot 1$ 交 $\underline{\lvert 3}\cdot 1\cdot 1$, $\underline{\lvert 3}\cdot 4\cdot 1$ 於 e_3, f_3; $\underline{\lvert 4}\cdot 3\cdot 1$ 交 $\underline{\lvert 4}\cdot 1\cdot 1$, $\underline{\lvert 4}\cdot 4\cdot 1$ 於 e_4, f_4. 設 R'_2e_2, R'_2f_2 交 V_o 於 P_e, P_f 兩點, 則依定理 II 與 III, R'_2e_2, R'_2f_2, e_3P_e, e_4P_e, f_3P_f, f_4P_f 各平行於前圖中之 $R_2E'_2$, $R_2F'_2$, $E_3E'_3$, $E_4E'_4$, $F_3F'_3$, $F_4F'_4$.

$R_2E'_2$, $R_2F'_2$, $E_3E'_3$, $E_4E'_4$, $F_3F'_3$, $F_4F'_4$ 等綫之斜度既能決定, 則 x_3, x_4 兩未知量之值, 如以代數方法, 可由前三式算出; 如用圖解法則可依 26 節作出. 換言之

即此兩未知量可以作圖手續由四未知量方程式之根化為三未知量方程式之根.

此為由四未知量減為三未知量之法. 苟欲再消去某一未知量, 必須以 b_4, b_3, b_2, e_4, e_3, e_2, f_4, f_3, f_2 為斜度作一圖如 Fig. 27 者. 但實際並不須此; 蓋 Fig. 30 中 R'_2P_e, R'_2P_f, e_3P_e, e_4P_e, f_3P_f, f_4P_f, $\underline{|2}\cdot2\cdot1$, $\underline{|3}\cdot2\cdot1$, $\underline{|4}\cdot2\cdot1$ 之位置已具有消滅未知量時必要之條件: 即以 b_2, e_2, f_2 為斜度自 R_2' 所作之三直綫經過 P_b, P_e, P_f. 故苟欲再消去某一未知量可逕依前法於 Fig. 30 作出. 由此可見依此解法各組方程式之係數可於同一圖中繼續作出而不須中途另作新圖或其他幫助綫.

(5)　距離圖表之第二作圖法

28.　二未知量之方程式 (見 9)

作圖.　作橫綫 H_o, 縱綫 V_o (見 Fig. 31). 自 H_o 上任一點 R'_1 作 $\underline{|1}\cdot1\cdot1$, $\underline{|1}\cdot2\cdot1$ 交 V_o 於 P_a, P_b 兩點. 經 P_a 作 $\underline{|2}\cdot1\cdot1$, 經 P_b 作 $\underline{|2}\cdot2\cdot1$; 設此兩綫相交於 T 點. 於另一圖 (見 Fig. 32) 中作橫綫 H_o, 縱綫 V_o 相交於 O 點. 於 V_o 上取 P_1, P_2 兩點使 OP_1, OP_2 表 K_a, K_b. 經 P_1 作

$\lfloor\underline{2}\cdot1\cdot1$; 經 P_2 作 $\lfloor\underline{2}\cdot2\cdot1$ 交 $\lfloor\underline{2}\cdot1\cdot1$ 於 F 點. 自 F 作一綫平行於前圖中之 TR'_1 而交 H_o 於 R_1. 自 R_1 作 $\lfloor\underline{1}\cdot1\cdot1$ 交 $\lfloor\underline{2}\cdot1\cdot1$ 於 A_2, 經 A_2 作縱綫 V_2. 則由 V_o 至 V_2, 由 V_2 至 G 點之距離卽爲滿足該兩式之 x_2, x_1 之值.

證. 設 V_2 交 $\lfloor\underline{2}\cdot2\cdot1$ 於 B_2; 自 B_2 作 $\lfloor\underline{1}\cdot2\cdot1$, 則此處所需證明者僅爲 $\lfloor\underline{1}\cdot2\cdot1$ 是否經過 R_1.

設 $\lfloor\underline{1}\cdot2\cdot1$ 交 FR_1 於 X 點, 則前圖中 TP_bP_a, $TP_aR'_1$, $TP_bR'_1$ 三三角形各各與 FB_2A_2, FA_2R_1, FB_2X 相似. 故

$$\frac{TP_a}{FA_2}=\frac{TR'_1}{FR_1}=\frac{TP_b}{FB_2}=\frac{TR'_1}{FX}$$

故　　$FX=FR_1$

卽 X 與 R_1 同在一點; 卽 $\lfloor\underline{1}\cdot2\cdot1$ 亦經過 R_1.

29. 三未知量之方程式(見 9)

作圖. 作橫綫 H_o, 縱綫 V_o (見 Fig. 33). 自 H_o 上任一點 R'_1 作 $\lfloor\underline{1}\cdot1\cdot1$, $\lfloor\underline{1}\cdot2\cdot1$, $\lfloor\underline{1}\cdot3\cdot1$ 交 V_o 於 P_a, P_b, P_c 三點. 經 P_a 作 $\lfloor\underline{2}\cdot1\cdot1$, $\lfloor\underline{3}\cdot1\cdot1$; 同樣經 P_b 作 $\lfloor\underline{2}\cdot2\cdot1$, $\lfloor\underline{3}\cdot2\cdot1$, 經 P_c 作 $\lfloor\underline{2}\cdot3\cdot1$, $\lfloor\underline{3}\cdot3\cdot1$. 設 $\lfloor\underline{2}\cdot3\cdot1$ 交 $\lfloor\underline{2}\cdot2\cdot1$ 於 d_2; $\lfloor\underline{3}\cdot3\cdot1$ 交 $\lfloor\underline{3}\cdot2\cdot1$ 於 d_3. 經此兩點作縱綫 V_2, V_3. 設 V_2

交 $\underline{|2}\cdot1\cdot1$ 於 e_2, V_3 交 $\underline{|3}\cdot1\cdot1$ 於 e_3. 作直綫 e_2e_3, d_2d_3, $R_1'd_2$. 設 d_2d_3 交 e_2e_3 於 T 點. 作直綫 TR_1'.

於另一圖中 (見 Fig. 34) 作橫綫 H_o, 縱綫 V_o 相交於 O 點. 於 V_o 上取 P_1, P_2, P_3 三點使 OP_1, OP_2, OP_3 表 K_a, K_b, K_c. 自 P_1 作 $\underline{|3}\cdot1\cdot1$, 自 P_2 作 $\underline{|3}\cdot2\cdot1$, 自 P_3 作 $\underline{|3}\cdot3\cdot1$. 設 $\underline{|3}\cdot2\cdot1$ 交 $\underline{|3}\cdot3\cdot1$ 於 D_3, 經 D_3 作縱綫 $V_{3\cdot2}$ 交 $\underline{|3}\cdot1\cdot1$ 於 E_3. 自 D_3 作一綫平行於前圖中之 Td_3; 自 E_3 作一綫平行於前圖中之 Te_3. 設此兩綫相交於 F 點. 自 F 點作一綫平行於前圖中之 TR'_1 而交 H_o 於 R_1. 自 R_1 作一綫平行於前圖中之 R'_1d_2 而交 D_3F 於 D_2; 自 D_2 作 $\underline{|2}\cdot3\cdot1$ 交 $\underline{|3}\cdot3\cdot1$ 於 C_3. 自 R_1 作 $\underline{|1}\cdot3\cdot1$, 交 $\underline{|2}\cdot3\cdot1$ 於 C_2. 經 C_3, C_2 作縱綫 V_3, V_2; 則由 V_o 至 V_3, 由 V_3 至 V_2, 由 V_2 至 R_1 之距離卽爲滿足該三式之 x_3, x_2, x_1 之值.

證. 設 V_3 交 $\underline{|3}\cdot2\cdot1$, $\underline{|3}\cdot1\cdot1$ 於 B_3, A_3, 自此兩點作 $\underline{|2}\cdot2\cdot1$, $\underline{|2}\cdot1\cdot1$ 而交 V_2 於 B_2, A_2; 又由此兩點作 $\underline{|1}\cdot2\cdot1$, $\underline{|1}\cdot1\cdot1$, 則此處所需證明者爲 $\underline{|1}\cdot1\cdot1$, $\underline{|1}\cdot2\cdot1$ 兩綫亦經過 R_1.

設 $\underline{|2}\cdot 2\cdot 1$ 交 D_3F 於 B 點則三角形 D_3B_3B, $D_3C_3D_2$, $B_3D_3C_3$ 與 Fig. 33 中三角形 $d_3P_bd_2$, $d_3P_cd_2$, $P_bd_3P_c$ 相似. 故

$$\frac{D_3B}{d_3d_2}=\frac{D_3B_3}{P_bd_3}=\frac{D_3C_3}{d_3P_c}=\frac{D_3D_2}{d_3d_2}$$

故 $$D_3B=D_3D_2$$

即 B 與 D_2 同在一點.

經 D_2 作縱綫 $V_{2\cdot 2}$ 交 E_3F, $\underline{|2}\cdot 1\cdot 1$ 於 E', E'' 兩點, 則依定理 V, 三角形 $E''A_3E_3$ 與 Fig. 33 中 $e_2P_ae_3$ 相似, 故 E_3E'' 平行於 e_2T, 因而平行於 E_3F. 故 E', E'' 同在一點. 即 $V_{2\cdot 2}$, E_3F, $\underline{|2}\cdot 1\cdot 1$ 同交於一點 E_2.

設 $\underline{|1}\cdot 2\cdot 1$ 交 D_2R_1 於 K 點, 則三角形 D_2B_2K, $D_2C_2R_1$, $C_2D_2B_2$ 與 Fig. 33 中三角形 $d_2P_bR'_1$, $d_2P_cR'_1$, $P_cd_2P_b$ 相似. 故

$$\frac{D_2K}{d_2R'_1}=\frac{D_2B_2}{d_2P_b}=\frac{D_2C_2}{d_2P_c}=\frac{D_2R_1}{d_2R'_1}$$

故 $$D_2K=D_2R_1$$

即 $\underline{|1}\cdot 2\cdot 1$ 經過 R_1. 設自 R_1 作一綫平行於 Fig. 33 中 $e_2R'_1$, 則可證明此綫經過 $V_{2\cdot 2}$ 上 E_2; 由此可證明 $\underline{|1}\cdot 1\cdot 1$

亦經過 R_1.

30. 四未知量之方程式 (見 9)

今以此例說明此法中消滅未知量之法. 設該四式中各未知量之值已求出為 K_1, K_2, K_3, K_4. 作橫綫 H_o, 縱綫 V_o (見 Fig. 35) 相交於 O 點. 作縱綫 V_4, V_3, V_2 並於 H_o 上取一點 R_1 使由 V_o 至 V_4, V_4 至 V_3, V_3 至 V_2, V_2 至 R_1 之距離等於 K_4, K_3, K_2, K_1. 於 V_o 上取 P_1, P_2, P_3, P_4 使 OP_1, OP_2, OP_3, OP_4 表 K_a, K_b, K_c, K_d. 自此四點作 $\lfloor\underline{4}\cdot1\cdot1$, $\lfloor\underline{4}\cdot2\cdot1$, $\lfloor\underline{4}\cdot3\cdot1$, $\lfloor\underline{4}\cdot4\cdot1$ 交 V_4 於 A_4, B_4, C_4, D_4 四點; 由此四點作 $\lfloor\underline{3}\cdot1\cdot1$, $\lfloor\underline{3}\cdot2\cdot1$, $\lfloor\underline{3}\cdot3\cdot1$, $\lfloor\underline{3}\cdot4\cdot1$ 交 V_3 於 A_3, B_3, C_3, D_3 四點; 由此四點作 $\lfloor\underline{2}\cdot1\cdot1$, $\lfloor\underline{2}\cdot2\cdot1$, $\lfloor\underline{2}\cdot3\cdot1$, $\lfloor\underline{2}\cdot4\cdot1$ 交 V_2 於 A_2, B_2, C_2, D_2 四點; 再自此四點作 $\lfloor\underline{1}\cdot1\cdot1$, $\lfloor\underline{1}\cdot2\cdot1$, $\lfloor\underline{1}\cdot3\cdot1$, $\lfloor\underline{1}\cdot4\cdot1$, 則此四綫必共交於 R_1. 設 $\lfloor\underline{4}\cdot1\cdot1$ 交 $\lfloor\underline{4}\cdot2\cdot1$ 於 P_5, $\lfloor\underline{3}\cdot1\cdot1$ 交 $\lfloor\underline{3}\cdot2\cdot1$ 於 E_3, $\lfloor\underline{2}\cdot1\cdot1$ 交 $\lfloor\underline{2}\cdot2\cdot1$ 於 E_2; 則依定理 IV, P_5E_3, E_3E_2, E_2R_1 三綫之斜度均為一定. 經 P_5 作縱綫 $V_{4\cdot2}$ 交 $\lfloor\underline{4}\cdot3\cdot1$, $\lfloor\underline{4}\cdot4\cdot1$, H_o 於 P_6, P_7, O_4; 經 E_3 作縱綫 $V_{3\cdot2}$ 交 $\lfloor\underline{3}\cdot3\cdot1$, $\lfloor\underline{3}\cdot4\cdot1$ 於 F_3, G_3; 經 E_2 作縱綫 $V_{2\cdot2}$ 交 $\lfloor\underline{2}\cdot3\cdot1$, $\lfloor\underline{2}\cdot4\cdot1$

於 F_2, G_2; 則依定理 III 與 V, P_6F_3, F_3F_2, F_2R_1, P_7G_3 G_3G_2, G_2R_1 等綫之斜度均爲一定. 設由 $V_{4\cdot2}$ 至 $V_{3\cdot2}$, $V_{3\cdot2}$ 至 $V_{2\cdot2}$, $V_{2\cdot2}$ 至 R_1 之距離爲 Y_3, Y_2, Y_1; O_4P_5, O_4P_6, O_4P_7 之値爲 K_e, K_f, K_g; P_5E_3, E_3E_2, E_2R_1, P_6F_3, F_3F_2, F_2R_1, P_7G_3, G_3G_2, G_2R_1 之斜度爲 e_3, e_2, e_1, f_3, f_2, f_1, g_3, g_2, g_1; 則依圖形上關係

$$e_1Y_1+e_2Y_2+e_3Y_3=K_e$$

$$f_1Y_1+f_2Y_2+f_3Y_3=K_f$$

$$g_1Y_1+g_2Y_2+g_3Y_3=K_g$$

故 Y_1, Y_2, Y_3 之値可由此三式求得. 若此三未知量之値能求得則 $V_{4\cdot2}$, $V_{3\cdot2}$, $V_{2\cdot2}$ 及 R_1 均可作出, 而 V_4, V_3, V_2 亦可隨之作出. 故此四式中 x_4, x_3, x_2, x_1 之値能否求得當視此三式中各係數及常數能否求得. K_e, K_f, K_g 爲 O_4P_5, O_4P_6, O_4P_7 之長度. 但 P_5 之位置爲一定, 故 K_e 不難決定. $V_{4\cdot2}$, 垡$\cdot3\cdot1$, 垡$\cdot4\cdot1$ 之位置均爲一定, 故 K_f, K_g 均不難決定. 故此時之問題僅爲如何決定此三式中各係數. 其作法如下:

作縱綫 V_0 (見 Fig. 36) 並於其上取任意四點 P_a, P_b

P_c, P_d. 經 P_a 作 $\underline{|4}\cdot1\cdot1$, $\underline{|3}\cdot1\cdot1$, $\underline{|2}\cdot1\cdot1$, $\underline{|1}\cdot1\cdot1$ 四綫; 經 P_b, P_c, P_d 各作所屬四綫. 設 $\underline{|1}\cdot1\cdot1$ 交 $\underline{|1}\cdot2\cdot1$ 於 e_1, $\underline{|2}\cdot1\cdot1$ 交 $\underline{|2}\cdot2\cdot1$ 於 e_2, $\underline{|3}\cdot1\cdot1$ 交 $\underline{|3}\cdot2\cdot1$ 於 e_3, $\underline{|4}\cdot1\cdot1$ 交 $\underline{|4}\cdot2\cdot1$ 於 e_4. 經 e_1, e_2, e_3, e_4 作縱綫 V_1, V_2, V_3, V_4. 設 V_1 交 $\underline{|1}\cdot3\cdot1$, $\underline{|1}\cdot4\cdot1$ 於 f_1, g_1; V_2 交 $\underline{|2}\cdot3\cdot1$, $\underline{|2}\cdot4\cdot1$ 於 f_2, g_2; V_3 交 $\underline{|3}\cdot3\cdot1$, $\underline{|3}\cdot4\cdot1$ 於 f_3, g_3; V_4 交 $\underline{|4}\cdot3\cdot1$, $\underline{|4}\cdot4\cdot1$ 於 f_4, g_4. 則依定理 IV, e_4e_3, e_3e_2, e_2e_1 各各平行於 Fig. 35 中 P_5E_3, E_3E_2, E_2R_1. 又依定理 III 與 V, f_4f_3, f_3f_2, f_2f_1, g_4g_3, g_3g_2, g_2g_1 各各平行於 P_6F_3, F_3F_2, F_2R_1, P_7G_3, G_3G_2, G_2R_1.

Y_3, Y_2, Y_1 之係數旣可作出, 則其值不難依 29 節由上三式作出; 因而前四式中之 x_1, x_2, x_3, x_4 亦可隨之作出. 此爲由四未知量減爲三未知量之法. 若欲再消去某一未知量, 則可於 Fig. 36 中繼續作出.

(6) 距離圖表之第三作圖法.

31. 此法中二未知量方程式之作圖與第二法相同, 故首論三未知量者之解法 (見 9).

作圖. 作橫綫 H_0, 縱綫 V_0 (見 Fig. 37). 自 H_0 上任

一點 R'_1 以 a_1, b_1, c_1 爲斜度作三綫交 V_0 於 P_a, P_b, P_c 三點. 經 P_a 以 a_2, a_3 爲斜度作 $\lfloor\underline{2}\cdot1\cdot1$, $\lfloor\underline{3}\cdot1\cdot1$; 同樣經 P_b 作 $\lfloor\underline{2}\cdot2\cdot1$, $\lfloor\underline{3}\cdot2\cdot1$, 經 P_c 作 $\lfloor\underline{2}\cdot3\cdot1$, $\lfloor\underline{3}\cdot3\cdot1$. 設 $\lfloor\underline{2}\cdot1\cdot1$ 交 $\lfloor\underline{2}\cdot2\cdot1$, $\lfloor\underline{2}\cdot3\cdot1$ 於 d_2, e_2 兩點; $\lfloor\underline{3}\cdot1\cdot1$ 交 $\lfloor\underline{3}\cdot2\cdot1$, $\lfloor\underline{3}\cdot3\cdot1$ 於 d_3, e_3 兩點. 作直綫 R'_1d_2, R'_1e_2 交 V_0 於 P_d, P_e 兩點. 作直綫 d_3P_d, e_3P_e 相交於 f 點. 作直綫 R'_1f.

於另一圖中 (見 Fig. 38) 作橫綫 H_0, 縱綫 V_0 相交於 O 點. 於 V_0 上取 P_1, P_2, P_3 三點使 OP_1, OP_2, OP_3 表 K_a, K_b, K_c. 經 P_1 作 $\lfloor\underline{3}\cdot1\cdot1$, 經 P_2 作 $\lfloor\underline{3}\cdot2\cdot1$, 經 P_3 作 $\lfloor\underline{3}\cdot3\cdot1$. 設 $\lfloor\underline{3}\cdot1\cdot1$ 交 $\lfloor\underline{3}\cdot2\cdot1$, $\lfloor\underline{3}\cdot3\cdot1$ 於 D_3', E_3' 兩點. 經 D_3' 作直綫平行於 d_3P_d, 經 E'_3 作直綫平行於 e_3P_e. 自此兩綫之交點 F 作平行於 fR'_1 之直綫而交 H_0 於 R_1. 自 R_1 作平行於 R'_1P_e 之直綫而交 FE'_3 於 E_3. 經 E_3 作縱綫 V_3 交 $\lfloor\underline{3}\cdot3\cdot1$ 於 C_3. 自 C_3 作 $\lfloor\underline{2}\cdot3\cdot1$ 並自 R_1 作 $\lfloor\underline{1}\cdot3\cdot1$. 經此兩綫之交點 C_2 作縱綫 V_2. 則由 V_0 至 V_3, V_3 至 V_2, V_2 至 R_1 之距離卽爲滿足該三式之 x_3, x_2, x_1 之值.

證. 設 V_3 交 $\lfloor\underline{3}\cdot1\cdot1$, $\lfloor\underline{3}\cdot2\cdot1$ 於 A_3, B_3 兩點; 自 A_3

作 $\underline{\lfloor 2}\cdot 1\cdot 1$, 自 B_3 作 $\underline{\lfloor 2}\cdot 2\cdot 1$ 交 V_2 於 A_2, B_2 兩點; 再自 A_2 作 $\underline{\lfloor 1}\cdot 1\cdot 1$, 自 B_2 作 $\underline{\lfloor 1}\cdot 2\cdot 1$; 則此處所須證明者爲 $\underline{\lfloor 1}\cdot 1\cdot 1$, $\underline{\lfloor 1}\cdot 2\cdot 1$ 是否共交於 R_1.

設 V_3 交 FD'_3, 於 D_3, 自 D_3 作平行於 R'_1P_d 之直綫而交 R_1E_3 於 Z 點; 則 Fig. 37 中四邊形 $fP_eR'_1P_d$ 與 Fig. 38 中四邊形 FE_3ZD_3 彼此相似. 故平行於 fR'_1 之 FR_1 必經過 Z 點. 卽 Z 與 R_1 同在一點.

因 E'_3E_3, E'_3C_3, $E_3'A_3$ 平行於 e_3P_e, e_3P_c, e_3P_a, 故

$$P_cP_e : P_eP_a = C_3E_3 : E_3A_3$$

又因 C_2C_3, R_1E_3, A_2A_3 平行於 e_2P_c, e_2P_e, e_2P_a, 故前三綫必共交於一點 E_2'. 設 R_1E_3 交 V_2 於 E_2, 則

$$P_cP_e : P_eP_a = C_2E_2 : E_2A_2$$

又因 $\underline{\lfloor 1}\cdot 3\cdot 1$, R_1E_2, $\underline{\lfloor 1}\cdot 1\cdot 1$ 平行於 R'_1P_c, R'_1P_e, R'_1P_a, 故前三綫必共交於一點; 卽經過 A_2 之 $\underline{\lfloor 1}\cdot 1\cdot 1$ 亦經過 R_1. 同樣可證明經過 B_2 之 $\underline{\lfloor 1}\cdot 2\cdot 1$ 亦經過 R_1.

32. 四未知量之方程式 (見 9)

茲以此例說明本法中消滅未知量之法. 設滿足該四式之 x_1, x_2, x_3, x_4 之值已求得爲 l_1, l_2, l_3, l_4. 作橫綫 H_0,

縱綫 V_0, 相交於 O 點 (見 Fig. 39). 作縱綫 V_4, V_3, V_2, 並於 H_0 上取 R_1 點使由 V_0 至 V_4, V_4 至 V_3, V_3 至 V_2, V_2 至 R_1 之距離等於 l_4, l_3, l_2, l_1. 於 V_0 上取 P_1, P_2, P_3, P_4 四點, 使 OP_1, OP_2, OP_3, OP_4 表 K_a, K_b, K_c, K_d. 自 P_1 以 a_4 爲斜度作 $\underline{|4}\cdot 1\cdot 1$ 交 V_4 於 A_4, 自 A_4 作 $\underline{|3}\cdot 1\cdot 1$ 交 V_3 於 A_3, 自 A_3 作 $\underline{|2}\cdot 1\cdot 1$ 交 V_2 於 A_2, 自 A_2 作 $\underline{|1}\cdot 1\cdot 1$; 則 $\underline{|1}\cdot 1\cdot 1$ 必經過 R_1. 同樣作 $\underline{|4}\cdot 2\cdot 1$, $\underline{|4}\cdot 3\cdot 1$, $\underline{|4}\cdot 4\cdot 1$, ……, $\underline{|1}\cdot 2\cdot 1$, $\underline{|1}\cdot 3\cdot 1$, $\underline{|1}\cdot 4\cdot 1$ 等十二綫, 則最後三綫均經過 R_1.

設 $\underline{|2}\cdot 2\cdot 1$ 交 $\underline{|2}\cdot 1\cdot 1$, $\underline{|2}\cdot 3\cdot 1$, $\underline{|2}\cdot 4\cdot 1$ 於 E'_2, F'_2, G'_2, $\underline{|3}\cdot 2\cdot 1$ 交 $\underline{|3}\cdot 1\cdot 1$, $\underline{|3}\cdot 3\cdot 1$, $\underline{|3}\cdot 4\cdot 1$ 於 E'_3, F'_3, G'_3; $\underline{|4}\cdot 2\cdot 1$ 交 $\underline{|4}\cdot 1\cdot 1$, $\underline{|4}\cdot 3\cdot 1$, $\underline{|4}\cdot 4\cdot 1$ 於 E'_4, F'_4, G'_4. 作直綫 $R_1E'_2$, $R_1F'_2$, R_1G_2' 交 V_3 於 E_3, F_3, G_3; 作直綫 $E_3E'_3$, $F_3F'_3$, $G_3G'_3$ 交 V_4 於 E_4, F_4, G_4; 作直綫 $E_4E'_4$, $F_4F'_4$, $G_4G'_4$ 交 V_0 於 P_5, P_6, P_7 三點. 則依定理 IV, $R_1E'_2$, R_1F_2', $R_1G'_2$ 之斜度爲一定; 依定理 III, $E_3E'_3$, $F_3F'_3$, $G_3G'_3$, $E_4E'_4$, $F_4F'_4$, G_4G_4 等綫之斜度亦爲一定. 因 E'_4, F'_4, G'_4 三點之位置爲一定, 故 P_5, P_6, P_7 三點之位置亦爲

一定.

設 R_1E_3, E_3E_4, E_4P_5 之斜度爲 e_2, e_3, e_4, OP_5 之値爲 K_e; x'_2 等於 (x_1+x_2), 則依圖形上關係

$$e_2x_2'+e_3x_3+e_4x_4=K_e$$

同樣得

$$f_2x'_2+f_3x_3+f_4x_4=K_f$$

$$g_2x'_2+g_3x_3+g_4x_4=K_g$$

此三式中, x'_2 係由 x_1, x_2 兩未知量合并而成, 暫且不論. 至 x_3, x_4 兩未知量則與原有式中相同. 苟上三式中係數及常數均能求得, 則 x_3, x_4 之値, 除由原有四式外, 可由此三式求得. K_e, K_f, K_g 之値決於 P_5, P_6, P_7 三點之位置, 而此三點之位置則由 $E_4E'_4$, $F_4F'_4$, $G_4G'_4$ 三直綫決定. 故此時之問題僅爲如何決定 R_1E_3, E_3E_4, E_4P_5, R_1F_3, F_3F_4, F_4P_6, R_1G_3, G_3G_4, G_4P_7 等綫之斜度. 其法如下.

於另一圖中 (見 Fig. 40) 作橫綫 H_0, 縱綫 V_0. 自 H_0 上任一點 R'_1 作 $\lfloor\underline{1}\cdot1\cdot1$, $\lfloor\underline{1}\cdot2\cdot1$, $\lfloor\underline{1}\cdot3\cdot1$, $\lfloor\underline{1}\cdot4\cdot1$ 交 V_0 於 P_a, P_b, P_c, P_d. 經 P_a 作 $\lfloor\underline{2}\cdot1\cdot1$, $\lfloor\underline{3}\cdot1\cdot1$, $\lfloor\underline{4}\cdot1\cdot1$; 經 P_b

作 $\underline{|2}\cdot2\cdot1$, $\underline{|3}\cdot2\cdot1$, $\underline{|4}\cdot2\cdot1$; 經 P_c 作 $\underline{|2}\cdot3\cdot1$, $\underline{|3}\cdot3\cdot1$, $\underline{|4}\cdot31\cdot$, 經 P_d 作 $\underline{|2}\cdot4\cdot1$, $\underline{|3}\cdot4\cdot1$, $\underline{|4}\cdot4\cdot1$. 設 $\underline{|2}\cdot2\cdot1$ 交 $\underline{|2}\cdot1\cdot1$, $\underline{|2}\cdot3\cdot1$, $\underline{|2}\cdot4\cdot1$ 於 e_2, f_2, g_2 三點. $\underline{|3}\cdot2\cdot1$ 交 $\underline{|3}\cdot1\cdot1$, $\underline{|3}\cdot3\cdot1$, $\underline{|3}\cdot4\cdot1$ 於 e_3, f_3, g_3 三點; $\underline{|4}\cdot2\cdot1$, 交 $\underline{|4}\cdot1\cdot1$, $\underline{|4}\cdot3\cdot1$, $\underline{|4}\cdot4\cdot1$ 於 e_4, f_4, g_4 三點. 作直綫 R'_1e_2, R'_1f_2, R'_1g_2 交 V_0 於 P_e, P_f, P_g; 則依定理 IV 與 III, R'_1e_2, R'_1f_2, R_1g_2, e_3P_e, f_3P_f, g_3P_g, e_4P_e, f_4P_f, g_4P_g 各各平行於 R_1E_3, R_1F_3, R_1G_3, E_3E_4, F_3F_4, G_3G_4, E_4P_5, F_4P_6, G_4P_7.

此爲由四未知量減爲三未知量之法; 苟欲再消去某一未知量, 則可於 Fig. 40 中繼續作出而不須另作新圖.

33. 由上數節可見距離圖表, 雖有三種不同之解法, 但各法原理仍爲逐漸消滅式中之未知量. 惟消滅之法. 則各有不同. 第一法中每次消去兩未知量, 而同時亦產生一新未知量如 27 節中之 Y_1; 故實際乃以一新未知量代替兩未知量.

在第二解法中新方程式中之未知量與原有式中之未知量各不相同, 惟其數目則逐漸減少一個. 故此法作圖原

理乃以少數之新未知量代替各原有之未知量; 層層相代, 其最後所得之值與原有之未知量已無直接關係. 因此式中之未知量不能單獨先求出某一個; 而必須至作圖終了時始各個同時作出.

第三法中消減未知量之法乃以兩未知量合幷爲一未知量. 逐漸合幷, 新方程式中之未知量遂逐漸減少, 至各未知量合幷成一未知量爲止. 故在此法中最初所得之數值乃各未知量之總和而非單獨某一個也.

此三法中各未知量之值既以縱綫間之距離表之, 而縱綫之位置又由兩綫之交點決定; 故未知量之能否作出當視此兩相交直綫之位置如何. 設此兩綫互爲平行, 則其交點當在無窮遠之外, 故未知量之值必爲無窮大. 設此兩綫既相平行, 又同經一點; 則兩綫完全合幷, 其相交之點沿綫皆是. 故未知量之值可爲任何數. 此兩情形中前者由於未知量之數少於方程式之數, 即條件太多; 而後者則因未知量多於方程式之數, 即條件不足以決定也.

第四章　作圖之簡略法

34.　以上所論作圖方法，均就理論方面而言，若以之解實際數目問題，則作圖之次序，圖中點綫之如何略去，及記號之選擇均與方法之應用有直接關係．凡此諸點將於本章中擇要論之，並以數目例題說明作圖簡略之法．

(1)　圖解可能之變化．

35.　在聯立方程式之代數解法中，式中之未知量可任意先消去某一個，各方程式又可任意先消去某一個，式中未知量可用多種不同方法逐漸消去．此多數不同方法雖無理論上差別，但在實際應用時，每因式中數值之特殊關係而有便利與不便利之分．如一組方程式中，苟先以某式消去某一未知量則可使計算手續簡單並可得較精確之結果．故在代數解法中，此種次序之選擇亦非無關係也．

在幾何解法中，次序之選擇較代數法尤爲重要．蓋用圖解法時，各點各綫之位置，爲作圖上便利計，往往須在

一定範圍內. 又一點, 一綫之決定, 法有多種, 但以結果精確者爲上. 故消減未知量時必須考慮用何式消去何未知量方可使圖中點綫之位置不出一定範圍, 且差誤微小. 若在一法中, 其消減未知量之次序必須於圖表各式時決定, 而不可中途改變, 設遇作圖上困難則將無法避免, 故圖解法之是否合於應用當視此法中各方程式及未知量可否依任意次序消去.

圖解法之作圖, 完全以表示各係數之直綫間幾何上關係爲基礎. 此種幾何的關係每因圖表時未知量排列次序之不同而各異. 凡此種關係不因未知量之次序而變更, 則作圖時, 其未知量卽可依任意次序消去. 反之若各綫間之關係隨未知量之次序而改變, 則一種圖表僅能表示未知量依某次序排列之方程式. 故作圖時, 其消減未知量之次序必須與圖表時相同, 而不能中途因作圖上便利而改變.

在上述五種解法中, 方程式之消去, 均可任意選擇. 惟未知量則不盡然. 斜度圖表法僅能表示未知量依一定次序排列之方程式; 而在力量圖表法中, 無論式中未知量

之次序如何，其圖表則恆相同．故由力量圖表法作圖，各未知量可依任意次序消去；而由斜度圖表法，則消滅未知量之次序必須於圖表時決定．

距離圖表法之作圖共有三種．在第一法中當消去某兩未知量時，及在第三法中當合并某兩未知量時，僅該兩未知量之係數與其他各個未知量之係數發生關係；且此種關係不受未知量次序之影響．故在此兩法中各個未知量可依任意次序消去．在第二法中，當消滅式中未知量時，必先將各未知量依某一次序排列，然後由每兩相鄰未知量之係數以決定新未知量之係數．故此法中消滅未知量時，必須於作圖之始，將各未知量依一定次第排列而不能中途變更．

於此可見，此數法中僅力量圖表之兩解法及距離圖表之第一，第三兩解法可適用於數目問題之計算．故以下所論作圖簡略之法以此四法爲限．

36. 前所論力量圖表及斜度圖表之解法中，式中之常數，均以一點表之．但常數亦可設爲一種未知量之係數而以縱綫表之，則新方程式中之常數可與各未知量之係

數以同一方法,同時決定.茲以三未知量之方程式說明之.設 Fig. 41 中 $^1/_n$, $^1/_a$, $^2/_a$, $^3/_a$, $^1/_b$, $^2/_b$, $^3/_b$, $^1/_c$, $^2/_c$, $^3/_c$ 表三方程式之各係數. 另作縱綫 $^4/_a$ 使由 $^1/_n$ 至 $^4/_a$ 之距表 K_a; 同樣作 $^4/_b$, $^4/_c$ 表 K_b, K_c. 作任一斜綫交 $^1/_n$, $^1/_a$, $^1/_b$, $^1/_c$ 於 N_1, a_1, b_1, c_1. 經此四點作橫綫 H_n, H_a, H_b, H_c. 設 H_a 交 $^2/_a$, $^3/_a$, $^4/_a$ 於 a_2, a_3, a_4; H_b 交 $^2/_b$, $^3/_b$, $^4/_b$ 於 b_2, b_3, b_4; H_c 交 $^2/_c$, $^3/_c$, $^4/_c$ 於 c_2, c_3, c_4. 設 a_2b_2 交 N_1C_2 於 K_2; 經 K_2 作橫綫 H_d 交 a_3b_3, a_4b_4 於 K_3, K_4. 設 c_3K_3 交 H_n 於 d_3; c_4K_4 交 H_n 於 d_4. 經 d_3 作縱綫 $^3/_d$. 作橫綫 H_0 交 $^1/_n$, $^3/_a$, $^3/_b$, $^3/_c$, $^3/_d$ 於 N_2, A, B, C, D 等點. 於 $^3/_a$, $^3/_b$, $^3/_d$ 上取 P_a, P_b, P_d 三點使 DP_d, AP_a, BP_b 等於 N_1d_4, K_a, K_b. 自 P_a, P_b 作兩綫各平行於 N_2P_d, 交 $^2/_a$, $^2/_b$ 於 A_2, B_2. 經 H_n 與 a_2b_2 之交點 S 作縱綫 $^1/_s$ 交 A_2B_2 於 S_1. 自 B_2 作平行於 N_2S_1 之直綫而交 $^1/_b$ 於 B_1. 則由 N_2B_1, B_1B_2, B_2P_b 之斜度卽可得 x_1, x_2, x_3 之值.

此法與前法不同之點, 僅爲 P_d 位置之決定. 設依前法, 則作 P_d 之法如下: 於 $^3/_c$ 上取一點 P_c 使 CP_c 等於 K_c. 自 P_a, P_b, P_c 作橫綫交 $^2/_a$, $^2/_b$, $^2/_c$ 於 A'_2, B'_2, C'_2.

設 $A'_2B'_2$ 交經過 K_2 之縱綫於 K'_2, 自 K'_2 作橫綫交直綫 P_aP_b 於 T 點. 設 $C'_2K'_2$ 交 $^1/_n$ 於 N_3, 自 N_3 作橫綫交 P_cT 於 P'_d. 則 P'_d 與 P_d 同在一點, 可證之如下:

設 $^1/_n$ 交 H_a, H_b, H_3, H_d 於 E_1, E_2, E_3, E_4; 設 H_0 交經過 T 點之縱綫於 T_1. 因

$$P_aT : P_bT = a_4K_4 : b_4K_4$$

又 AP_a, BP_b 各等於 E_1a_4, E_2b_4, 故 T_1T 等於 E_4K_4. 因

$$\frac{P_bP_a}{P_aT} = \frac{B'_2A'_2}{A'_2K'_2} = \frac{b_2a_2}{a_2K_2} = \frac{b_3a_3}{a_3K_3}$$

故經過 T 點之縱綫亦經過 K_3. 因

$$\frac{P_cT}{TP'_d} = \frac{C'_2K'_2}{K'_2N_3} = \frac{c_2K_2}{K_2N_1} = \frac{c_3K_3}{K_3d_3}$$

故 P'_d 在縱綫 $^3/_d$ 上. 因 CP_c, T_1T 等於 E_3c_4, E_4K_4, 又

$$P_cT : TP'_d = c_4K_4 : K_4d_4$$

故 DP'_d 等於 N_1d_4, 卽 P'_d 與 P_d 同在一點.

37. 在距離圖表之三解法中, 式中之常數亦可設爲未知量之係數而以斜度表之. 玆亦以三未知量之方程式說明之 (本例係說明第一解法, 他兩法可類推).

作橫綫 H_0, 縱綫 V_0 相交於 O 點 (見 Fig. 42). 於 V_0

上取 P_a, P_b, P_c 三點使 $OP_a : OP_b : OP_c$ 等於 $a_1 : b_1 : c_1$. 自 P_a 作 $\underline{|2}\cdot 1\cdot 1$, $\underline{|3}\cdot 1\cdot 1$, $\underline{|4}\cdot 1\cdot 1$ 使其斜度爲 a_2, a_3, K_a; 同樣經 P_b 作 $\underline{|2}\cdot 2\cdot 1$, $\underline{|3}\cdot 2\cdot 1$, $\underline{|4}\cdot 2\cdot 1$, 經 P_c 作 $\underline{|2}\cdot 3\cdot 1$, $\underline{|3}\cdot 3\cdot 1$, $\underline{|4}\cdot 3\cdot 1$. 設 $\underline{|2}\cdot 3\cdot 1$ 交 H_0 於 R'_2, $\underline{|2}\cdot 1\cdot 1$ 交 $\underline{|2}\cdot 2\cdot 1$ 於 d_2, $\underline{|3}\cdot 1\cdot 1$ 交 $\underline{|3}\cdot 2\cdot 1$ 於 d_3, $\underline{|4}\cdot 1\cdot 1$ 交 $\underline{|4}\cdot 2\cdot 1$ 於 d_4. 設 R'_2d_2 交 V_0 於 P_d, d_3P_d 交 H_0 於 R'_3. 作 d_4P_d, R'_3P_c, R'_2P_a.

於另一圖中 (見 Fig. 43) 作橫綫 H_0, 縱綫 V_0 相交於 O 點. 於 V_0 上取 P_1 使 OP_1 等於 K_a. 自 P_1 作 $\underline{|4}\cdot 1\cdot 1$ 交 H_0 於 S. 自 S 作一綫平行於前圖中之 d_4P_d 而交 V_0 於 P_4, 並自 S 作 $\underline{|4}\cdot 3\cdot 1$ 交 V_0 於 P_3. 自 P_4 作一綫平行於前圖中之 d_3P_d 而交 H_0 於 R_3. 自 R_3 作一綫平行於前圖中之 R'_3P_c 而交經過 P_3 之 $\underline{|3}\cdot 3\cdot 1$ 於 T_3, 則由 V_0 至 T_3 之距離卽爲 x_3 之值. 其他 x_2, x_1 之值可依前法繼續作出.

如依前解法, 則作圖之法如下: 於 V_0 上取 E_1, E_2, E_3 三點使 OE_1, OE_2, OE_3 表 K_a, K_b, K_c. 經 E_1 作 $\underline{|3}\cdot 1\cdot 1$, 經 E_2 作 $\underline{|3}\cdot 2\cdot 1$; 自此兩綫之交點 D_3 作一綫平行於前圖

中之 d_3P_d 而交 H_0 於 R''_3. 自 E_3 作 $\underline{|3}\cdot 3\cdot 1$; 自 R''_3 作一綫平行於前圖中之 $P_cR'_3$ 而交 $\underline{|3}\cdot 3\cdot 1$ 於 T'_3. 則由 V_0 至 T'_3 之距離卽爲 x_3 之值. 今須證明者爲 T_3, T'_3 同在一點.

因 OP_1, OE_1 依同一比例尺表 K_a, 故 P_1, E_1 同在一點. 因 $\underline{|4}\cdot 1\cdot 1$, $\underline{|4}\cdot 3\cdot 1$ 兩綫斜度之比等於 $K_a:K_c$, 故 OP_3 表 K_c 卽 E_3 與 P_3 同在一點. 因 $OP_1:OE_2$ 等於 $K_a:K_b$, 又 $\underline{|4}\cdot 1\cdot 1$, $\underline{|4}\cdot 2\cdot 1$ 兩綫斜度之比等於 $K_a:K_b$, 故經過 E_2 之 $\underline{|4}\cdot 2\cdot 1$ 亦經過 S 點. 設 $D_3R''_3$ 交 V_0 於 P'_4, 則

$$E_2P_1:P_1P'_4=P_bP_a:P_aP_d=E_2P_1:P_1P_4$$

故 P'_4 與 P_4 同在一點; 因此 R''_3 與 R_3 亦同在一點, 則 T'_3 與 T_3 亦必同在一點.

此兩節中將式中常數當爲未知量之係數, 於作圖工作未見減少. 但常數之決定原爲一部性質不同之作圖, 玆將其與各係數以同一方法作出, 則手續簡易而合於解多數方程式之用.

(2) 作圖之記號及例題.

38. 在以上所論各法中，無論以何者代表式中各係數，作圖時基本要素均為直綫及其交點．圖解法中綫之為用有時表示斜度，有時表示距離，有時為決定與他直綫之交點．但無論其效用如何重要，在面積有限之圖中，作多數之直綫均為作圖中繁難之工作．其繁難之點，不在位置之決定，而由其數目衆多，聚於一處，縱橫交叉，難於辨別．蓋圖解法首要之點厥為簡便清楚．若圖中點綫太多，頭緒紛繁，作圖時固易錯誤，閱者尤難領會．故圖中直綫凡可簡省者均宜略去．簡略之法有二：(1) 凡一直綫之用僅為決定與他直綫之交點，則其交點之位置可用直邊作出而將此直綫省去；(2) 凡一直綫之用僅為表示斜度或與他直綫之距離，則此綫可以兩點表之．

但直綫之略去，僅為作圖上便利計；非謂略去之直綫絕對無用．實際圖中各部均有連帶關係；作圖之進行莫不次第根據前部已作成之圖．故圖中直綫雖可省去，同時必須以適當記號標明該直綫之意義，以便隨後參考．按圖解聯立方程式之步驟亦與代數法相似，即逐漸消減方程式及式中未知量之數．故一組方程式之完全圖解必經

過若干次相似之手續，由第一組式化爲第二組式，更依次化爲一未知量之方程式以求得其中一未知量之值．而圖中所作之點與綫，除一部分幫助者外，均表示各新方程式中之係數與常數．此種直綫若欲省去，其標記必有三部；即所用記號必須表明該直綫所屬未知量之號數，方程式之號數與組數，標明此三者方可確定所省去直綫之性質．

因前所論各法中僅力量圖表之兩解法及距離圖表之第一，第三解法可適用於數目問題之計算（見 35），故以下所論作圖之記號及數目例題之說明僅以此四法爲限．

39. 力量圖表之第一作圖法．

力量圖表之解法以將式中常數設爲未知量之係數較爲便利．玆以下兩例說明此法應用記號時作圖之手續．以後將設 C 代表未知量之係數，K 代表式中之常數．未知量之號數，方程式之號數與組數則於 C 後以所屬各數記之．K 後應記之數僅爲方程式之號數與組數．

例 1. $$3x_1+4x_2-2x_3-x_4=-4.5 \qquad (1)$$

$$7x_1+x_2+3x_3+2x_4=3 \qquad (2)$$

$$2x_1-5x_2-x_3+4x_4=1 \tag{3}$$

$$x_1-2x_2+7x_3+3x_4=4{\cdot}5 \tag{4}$$

圖表. 作橫綫 $H_{0\cdot1}$, 縱綫 V_0 相交於 O 點(見 Fig. 44). 然後視察此四式以先消去何未知量爲合宜. 本例係先消去 x_2. 作四橫綫 $H_{1\cdot1}$, $H_{2\cdot1}$, $H_{3\cdot1}$, $H_{4\cdot1}$ 使由 $H_{0\cdot1}$ 至此四綫距離之比等於此四式中 x_2 之係數 4, 1, -5, -2 之比, 次擇定比例尺如圖中所示. 依此比例尺於 $H_{1\cdot1}$ 上取 1, 2, 3, 4 四點, 使由 V_0 至此四點之距離等於(1)式中 x_1, x_2, x_3, x_4 之係數. 同樣於 $H_{2\cdot1}$, $H_{3\cdot1}$, $H_{4\cdot1}$ 上各取 1, 2, 3, 4 四點以表各該式中未知量之係數. 以原比例尺之半數爲比例尺於 $H_{1\cdot1}$, $H_{2\cdot1}$, $H_{3\cdot1}$, $H_{4\cdot1}$ 上各取一點 5 使由 V_0 至各 5 點之距離表此四式中之常數 -4.5, 3, 1, 4.5. 故圖中 $H_{1\cdot1}$, $H_{2\cdot1}$, $H_{3\cdot1}$, $H_{4\cdot1}$ 四橫綫上諸點表此四式中係數及常數.

作圖. 各式既經圖表之後, 作圖初步即爲決定消去何式及何未知量. 因方程式及未知量均可依任意次序消去, 故選擇範圍甚廣. 選擇方針以作圖上便利爲標準, 即圖中各綫及其交點既不突出相當範圍, 又不密集一處. 本

例以先消去第二第四兩式為宜.

作直綫 $\underline{|1}\cdot 1$ 經過 $H_{2\cdot 1}$, $H_{4\cdot 1}$ 上 1 點; 同樣作 $\underline{|3}\cdot 1$, $\underline{|4}\cdot 1$, $\underline{|5}\cdot 1$ 經過此兩綫上之 3, 4, 5 點. 本法中未知量必須兩個同時消去; 圖表時已決定先消去 x_2, 其他消去何未知量猶待決定. 現定以 x_1 與 x_2 同時消去.

以直邊決定經過 O 點及 $H_{1\cdot 1}$, $H_{3\cdot 1}$ 上 1 點之直綫與 $\underline{|1}\cdot 1$ 之交點; 此兩點以 $T_{1\cdot 1}$, $T_{1\cdot 3}$ 記之. 以直邊決定經過 $\underline{|1}\cdot 1$ 上 $T_{1\cdot 1}$, $T_{1\cdot 3}$ 兩點之橫綫與 $\underline{|3}\cdot 1$, $\underline{|4}\cdot 1$, $\underline{|5}\cdot 1$ 之交點; 此六點分別以 $T_{3\cdot 1}$, $T_{3\cdot 3}$, $T_{4\cdot 1}$, $T_{4\cdot 3}$, $T_{5\cdot 1}$, $T_{5\cdot 3}$ 記之. 以直邊決定經過 $H_{1\cdot 1}$ 上 3 點及 $\underline{|3}\cdot 1$ 上 $T_{3\cdot 1}$ 之直綫與 $H_{0\cdot 1}$ 之交點; 此點以 $\frac{3}{1}$ 記之. 由 V_0 至此點之距離即為新方程式中 x_3 之係數, 亦即 $C_{3\cdot 1\cdot 2}$ 也. 同樣決定 $H_{0\cdot 1}$ 上 $\frac{4}{1}$, $\frac{5}{1}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{3}$ 等點. 此六點表第二組內第一, 第三兩式中係數及常數 (第二組內僅有兩方程式, 其號數與第一組內之關係方程式相同).

以下作圖, 即須決定繼續消去之未知量. 現決消去 x_4. 作橫綫 $H_{0\cdot 2}$, $H_{1\cdot 2}$, $H_{3\cdot 2}$ 使由 $H_{0\cdot 2}$ 至後兩綫距離之比等

於由 V_0 至 $H_{0\cdot1}$ 上 $\frac{4}{1}$, $\frac{4}{3}$ 兩點距離之比. 於 $H_{1\cdot2}$ 上取 3, 5 兩點使由 V_0 至此兩點之距離等於由 V_0 至 $H_{0\cdot1}$ 上 $\frac{3}{1}$, $\frac{5}{1}$ 之距離. 同樣於 $H_{3\cdot2}$ 上取 3, 5 兩點.

以直邊決定經過 $H_{1\cdot2}$, $H_{3\cdot2}$ 上 3 點之直綫與 $H_{0\cdot2}$ 之交點, 此點以 $\frac{3}{0}$ 記之; 同樣作 $H_{0\cdot2}$ 上 $\frac{5}{0}$ 點. 則由 V_0 至此兩點之距離表最後一式中係數及常數.

本題之作圖至此已暫告一段落. 此部作圖之目的完全爲消去各方程式及其中之未知量, 至新方程式中僅含一未知量爲止. 至各未知量之值, 則於另一部圖作出, 其法如下:

作橫綫 H_0 交 V_0 於 O 點. 作 $P_{0\cdot3}$ 使由 H_0 至此點之距爲 $K_{0\cdot3}$ (卽由 V_0 至 $H_{0\cdot2}$ 上 $\frac{5}{0}$ 點之距離), 由 V_0 至此點之距爲 $C_{3\cdot0\cdot3}$ (卽由 V_0 至 $H_{0\cdot2}$ 上 $\frac{3}{0}$ 之距離). 作 $P_{1\cdot2}$ 使由 H_0 至此點之距爲 $K_{1\cdot2}$, 由 V_0 至此點之距爲 $C_{3\cdot1\cdot2}$. 作縱綫 $V_{4\cdot1\cdot2}$ 表 $C_{4\cdot1\cdot2}$; 作直綫 $OP_{0\cdot3}$ 並以直邊

決定經過 $P_{1\cdot2}$ 而平行於 $OP_{0\cdot3}$ 之直線與 $V_{4\cdot1\cdot2}$ 之交點；此點以 $T_{4\cdot1\cdot2}$ 記之，並作直線 $OT_{4\cdot1\cdot2}$.

作 $P_{2\cdot1}$, $P_{4\cdot1}$. 使由 H_0 至此兩點之距表 $K_{2\cdot1}$, $K_{4\cdot1}$, 由 V_0 至此兩點之距表 $C_{3\cdot2\cdot1}$, $C_{3\cdot4\cdot1}$. 作縱綫 $V_{1\cdot2\cdot1}$, $V_{2\cdot2\cdot1}$, $V_{4\cdot2\cdot1}$, $V_{1\cdot4\cdot1}$, $V_{4\cdot4\cdot1}$ 表 $C_{1\cdot2\cdot1}$, $C_{2\cdot2\cdot1}$, $C_{4\cdot2\cdot1}$, $C_{1\cdot4\cdot1}$, $C_{4\cdot4\cdot1}$. 作縱綫 $V_{1\cdot0\cdot1}$ 使由 V_0 至此之距離等於由 V_0 至 $\boxed{1}\cdot1$ 與 $H_{0\cdot1}$ 之交點之距離 (此部所作各縱綫均經過上部圖中某一點，故可用射影法作出. 若欲精確決定則可作一橫綫而於其上量定各點表各縱綫至 V_0 之距離；然後以直邊經過橫綫上某一點及上部圖中相當之點卽可作該縱綫). 以直邊決定經過 $P_{2\cdot1}$, $P_{4\cdot1}$ 而平行於 $OP_{0\cdot3}$ 之兩直綫與 $V_{4\cdot2\cdot1}$, $V_{4\cdot4\cdot1}$ 之交點 $T_{4\cdot2\cdot1}$, $T_{4\cdot4\cdot1}$; 以直邊決定經過此兩點而平行於 $OT_{4\cdot1\cdot2}$ 之兩直綫與 $V_{1\cdot2\cdot1}$, $V_{1\cdot4\cdot1}$ 之交點 $T_{1\cdot2\cdot1}$, $T_{1\cdot4\cdot1}$, 以直邊決定經過此兩點之直綫與 $V_{1\cdot0\cdot1}$ 之交點 $T_{1\cdot0\cdot1}$. 作直綫 $OT_{1\cdot0\cdot1}$. 以直邊決定經過 $T_{1\cdot2\cdot1}$ 而平行於 $OT_{1\cdot0\cdot1}$ 之直綫與 $V_{2\cdot2\cdot1}$ 之交點 $T_{2\cdot2\cdot1}$. 作直綫 $OT_{2\cdot2\cdot1}$. 作縱綫 V_x 使由 V_0 至此綫之距爲 -2. 設 V_x 交 $OP_{0\cdot3}$, $OT_{4\cdot1\cdot2}$, $OT_{1\cdot0\cdot1}$, $OT_{2\cdot2\cdot1}$, H_0 於 E_3, E_4, E_1,

E_2, E_0 諸點，則由 E_0 至 E_3, E_3 至 E_4, E_4 至 E_1, E_1 至 E_2 之距離卽爲滿足上四式之 x_3, x_4, x_1, x_2 之値；其値爲 1, -2.5, 1, -2.

在此圖解中，圖表式中係數及常數之比例尺，兩不相同；後者爲前者之半數．意卽常數以二除之而後用同一比例尺圖表．以二除常數而後圖表之乃示極距之長爲二也．故由 V_0 至 V_x 之距離必需爲二．未知量之符號與極距之符號有直接關係．極距爲正者，則未知量向上者爲正，向下者爲負；反之則向下者爲正，向上者爲負，卽如本例也．

聯立方程式中之未知量及方程式旣可依任意次序消去而作圖之手續又必以此次序爲根據，故消去之未知量及方程式均宜隨時註明以便參考．本例中第一組內 (2), (4) 兩式首先消去，故於 $H_{2\cdot1}$, $H_{4\cdot1}$ 之一端各作短綫以誌之．至各次所消去之未知量，則隨時依次記於比例尺之下．

例二　Fig. 45a, Fig. 45b 爲下列

$$9x_1-7x_2+5x_3-3x_4+2x_5=-9.5 \qquad (1)$$

$$7x_1+9x_2+2x_3+5x_4+3x_5=-9 \qquad (2)$$

$$-9x_1-2x_2-3x_3+7x_4+5x_5=2.5 \tag{3}$$

$$-5x_1+3x_2-7x_3+2x_4+7x_5=5.5 \tag{4}$$

$$2x_1-5x_2-9x_3-9x_4+9x_5=4.5 \tag{5}$$

五式之完全圖解. 其中所用各種記號均與前例相同. 惟普通用以決定未知量者均爲作圖時所消去之方程式, 如此例中本應以第二組內 (3), (4) 兩式決定 x_1 之值, 但爲作圖上便利計, 則用第二第四兩式. 故 Fig. 45*b* 中縱綫 $V_{1\cdot0\cdot2}$ 之位置乃由 Fig. 45*a* 中經過 $H_{2\cdot2}$, $H_{4\cdot2}$ 上1點之直綫與 $H_{0\cdot2}$ 之交點而決定. 爲避免某種困難或欲得比較精確之結果, 苟不背幾何原理, 作圖手續可任意變通, 此其一例也.

40. 力量圖表之第二作圖法.

此法與前法相似, 所用記號亦相同, 故僅以下一例說明之.

$$3x_1+4x_2-2x_3-x_4=-4.5 \tag{1}$$

$$7x_1+x_2+3x_3+2x_4=3 \tag{2}$$

$$2x_1-5x_2-x_3+4x_4=1 \tag{3}$$

$$x_1-2x_2+7x_3+3x_4=4.5 \tag{4}$$

圖表. 作橫綫 $H_{0\cdot 1}$, 縱綫 V_0 (見 Fig. 46), 相交於 O_1. 視察此四式後決定先消去 x_2. 作橫綫 $H_{1\cdot 1}$, $H_{2\cdot 1}$, $H_{3\cdot 1}$, $H_{4\cdot 1}$ 使由 O_1 至此四綫距離之比等於此四式中 x_2 之係數 4, 1, -5, -2 之比. 次擇定比例尺如圖中所示. 於 $H_{1\cdot 1}$ 上取 1, 2, 3, 4, 5 五點使由 V_0 至此五點之距離表第一式中係數及常數. 同樣於 $H_{2\cdot 1}$, $H_{3\cdot 1}$, $H_{4\cdot 1}$ 上各取 1, 2, 3, 4, 5 五點以表各式中係數及常數.

作圖. 作圖之初, 必須決定先消去何式. 此例將先消去第一式. 以直邊決定經過 $H_{1\cdot 1}$ 及 $H_{2\cdot 1}$ 上 1 點之直綫與 $H_{0\cdot 1}$ 之交點; 由 O_1 至此點之距離卽爲新方程式中 x_1 之係數. 此點將以未知量之號數及方程式之號數記之, 卽於其上記 1, 其下記 2. 同樣以直邊決定經過 $H_{1\cdot 1}$ 及 $H_{2\cdot 1}$ 上 3, 4, 5 等點之三直綫與 $H_{0\cdot 1}$ 之交點; 此三點各於其上以 3, 4, 5 記之, 而其下則均以 2 記之. 由 O_1 至此三點之距離卽爲第二組內第二式中 x_3, x_4 之係數及常數. 同樣決定 $H_{0\cdot 1}$ 上 $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{5}{4}$ 等點.

第二步決定消去 x_3. 作橫綫 $H_{0\cdot 2}$ 交 V_0 於 O_2, 並作橫綫 $H_{2\cdot 2}$, $H_{3\cdot 2}$, $H_{4\cdot 2}$ 使由 O_2 至此三綫距離之比等於第二組式內三式中 x_3 係數之比. 於 $H_{2\cdot 2}$ 上取 1, 4, 5 三點使由 V_0 至此三點之距離等於由 V_0 至 $H_{0\cdot 1}$ 上 $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{2}$, $\frac{5}{2}$ 三點之距. 同樣於 $H_{3\cdot 2}$, $H_{4\cdot 2}$ 上各取 1, 4, 5 三點. 現決定消去第三式. 以直邊決定經過 $H_{3\cdot 2}$ 及 $H_{2\cdot 2}$ 上 1 點之直綫與 $H_{0\cdot 2}$ 之交點; 此點以 $\frac{1}{2}$ 記之. 同樣作 $H_{0\cdot 2}$ 上 $\frac{4}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{5}{4}$ 等點.

第三步決定消去 x_1. 作橫綫 $H_{0\cdot 3}$ 交 V_0 於 O_3, 另作橫綫 $H_{2\cdot 3}$, $H_{4\cdot 3}$ 使由 O_3 至此二綫距離之比等於由 V_0 至 $H_{0\cdot 2}$ 上 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ 兩點距離之比. 於 $H_{2\cdot 3}$ 上取 4, 5 兩點使由 V_0 至此兩點之距離等於由 V_0 至 $H_{0\cdot 2}$ 上 $\frac{4}{2}$, $\frac{5}{2}$ 兩點之距. 同樣於 $H_{4\cdot 3}$ 上取 4, 5 兩點. 以直邊決定經過 $H_{2\cdot 3}$, $H_{4\cdot 3}$ 上 4 點之直綫與 $H_{0\cdot 3}$ 之交點, 此點以 $\frac{4}{0}$ 記

之. 同樣作 $\frac{5}{0}$.

作橫綫 H 交 V_0 於 O 點. 取 $P_{0\cdot4}$, $P_{4\cdot3}$, $P_{4\cdot2}$, $P_{2\cdot1}$ 四點使由 V_0 至此四點之距離表 $C_{4\cdot0\cdot4}$, $C_{4\cdot4\cdot3}$, $C_{4\cdot4\cdot2}$, $C_{4\cdot2\cdot1}$, 由 H 至此四點之距離表 $K_{0\cdot4}$, $K_{4\cdot3}$, $K_{4\cdot2}$, $K_{2\cdot1}$. 作縱綫 $V_{1\cdot4\cdot3}$, $V_{1\cdot4\cdot2}$, $V_{3\cdot4\cdot2}$, $V_{1\cdot2\cdot1}$, $V_{3\cdot2\cdot1}$, $V_{2\cdot2\cdot1}$ 表 $C_{1\cdot4\cdot3}$, $C_{1\cdot4\cdot2}$, $C_{3\cdot4\cdot2}$, $C_{1\cdot2\cdot1}$, $C_{3\cdot2\cdot1}$, $C_{2\cdot2\cdot1}$. 作縱綫 V_x 使由 V_0 至此之距離爲 -1. 作直綫 $OP_{0\cdot4}$ 交 V_x 於 E_4. 以直邊決定經過 $P_{4\cdot3}$ 而平行於 OE_4 之直綫與 $V_{1\cdot4\cdot3}$ 之交點 $T_{1\cdot4\cdot3}$, 作直綫 $OT_{1\cdot4\cdot3}$ 交 V_x 於 E_1. 以直邊決定經過 $P_{4\cdot2}$ 而平行於 OE_4 之直綫與 $V_{1\cdot4\cdot2}$ 之交點 $T_{1\cdot4\cdot2}$, 並決定經過 $T_{1\cdot4\cdot2}$ 而平行於 OE_1 之直綫與 $V_{3\cdot4\cdot2}$ 之交點 $T_{3\cdot4\cdot2}$, 作直綫 $OT_{3\cdot4\cdot2}$ 交 V_x 於 E_3. 以直邊決定經過 $P_{2\cdot1}$ 而平行於 OE_4 之直綫與 $V_{1\cdot2\cdot1}$ 之交點 $T_{1\cdot2\cdot1}$, 同樣決定 $V_{3\cdot2\cdot1}$ 上 $T_{3\cdot2\cdot1}$, $V_{2\cdot2\cdot1}$ 上 $T_{2\cdot2\cdot1}$ 並作直綫 $OT_{2\cdot2\cdot1}$ 交 V_x 於 E_2. 設 V_x 交 H 於 E_0 點, 則 E_0E_4, E_4E_1, E_1E_3, E_3E_2 之方向及長度表 x_4, x_1, x_3, x_2 之值. 因極距爲負數, 故向上之方向爲負而向下者爲正.

41. 距離圖表之第一作圖法.

距離圖表之作圖，亦如力量圖表之解法，可分爲前後兩部. 第一部作圖完全爲決定新式中之係數及常數. 因式中係數及常數均以斜度表之，故此部可名爲斜度圖解. 第二部乃決定各未知量之值，可名爲未知量之圖解.

在斜度圖解中，若各綫之斜度甚小，其交點每突出圖紙範圍之外；若斜度太大，其交點又不免密集於一處，則由此所決定直綫之方向必難準確. 此二者均宜避免. 避免之法凡遇式中係數均大於或小於一時，式之兩邊可以適當數值乘之使其係數及常數均在一之左右. 今仍以前法中所用之例題說明此法作圖之手續.

例 1. $$3x_1+4x_2-2x_3-x_4=-4.5 \tag{1}$$

$$7x_1+x_2+3x_3+2x_4=3 \tag{2}$$

$$2x_1-5x_2-x_3-4x_4=1 \tag{3}$$

$$x_1-2x_2+7x_3+3x_4=4.5 \tag{4}$$

斜度之作法. 在此解法中式中之常數亦設爲未知量之係數. 惟此四式中之係數及常數均大於一，故各式兩邊

均以四除之. 圖中所記分數 $\frac{1}{4}$ 卽表此意. 作橫綫 H_0, 縱綫 V_0 (見 Fig. 47a). 並擇定比例尺如圖中所示. 於 V_0 左右距離四單位 (此單位長度不必與比例尺中單位長度相同; 此處所用者爲比例尺之半數) 處作縱綫 V_l, V_r (因以四除各式, 故由 V_0 至此兩縱綫之距離用四單位以便作圖). 然後視察此四式以先消去何未知量爲便利. 此例中將先消去 x_4. 於 H_0 上取一點 R_4 並於 V_0 上取四點 $P_{1\cdot1}$, $P_{2\cdot1}$, $P_{3\cdot1}$, $P_{4\cdot1}$ 使由 R_4 至此四點直綫之斜度爲 $\frac{-1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{3}{4}$.

於 V_l 上暫定一點使由 H_0 至此點之距離等於至 $P_{1\cdot1}$ 之距離; 於 V_l 上另取四點使由該臨時點至此四點之距離 (此距離以原比例尺之半數爲比例尺) 等於 (1) 式中 x_1, x_2, x_3 之係數及常數. 此四點之記號分爲兩部; 第一須表示其屬於第一式, 第二須表示其所屬未知量之號數 (式中常數則設爲 x_5 之係數). 標記之法, 將 V_l 向 V_0 之一面均以方程式之號數 1 記之, 其反面則以 x 之號數 1, 2, 3, 5 記之. 至各點之位置則以垂直於 V_l 之短綫定

之(以下直綫上點之位置均以垂直於該綫之短綫定之).由 $P_{1\cdot 1}$ 至此四點直綫之斜度卽表經四除後之(1)式中係數與常數.此四綫之記號將爲 $\underline{|1}\cdot 1\cdot 1$, $\underline{|2}\cdot 1\cdot 1$, $\underline{|3}\cdot 1\cdot 1$, $\underline{|5}\cdot 1\cdot 1$. 其他 $\underline{|1}\cdot 2\cdot 1$, $\underline{|2}\cdot 2\cdot 1$, $\underline{|3}\cdot 2\cdot 1$, $\underline{|5}\cdot 2\cdot 1$, ……, $\underline{|5}\cdot 4\cdot 1$ 等綫均以 V_0 上 $P_{2\cdot 1}$, $P_{3\cdot 1}$, $P_{4\cdot 1}$ 與 V_l, V_r 上相當之點定之.V_l, V_r 上其他各點之記號均與記 $\underline{|1}\cdot 1\cdot 1$, $\underline{|2}\cdot 1\cdot 1$, $\underline{|3}\cdot 1\cdot 1$, $\underline{|5}\cdot 1\cdot 1$ 之四點相似.

作圖之始卽已決定消去 x_4; 現待決定者爲消去何式及何未知量.此種選擇均以作圖上便利爲標準.現將以(2),(3)兩式消去(1)式.並同時消去 x_3.

作 $\underline{|1}\cdot 1\cdot 1$, $\underline{|2}\cdot 1\cdot 1$, $\underline{|3}\cdot 1\cdot 1$, $\underline{|5}\cdot 1\cdot 1$ 四綫.以直邊決定 $\underline{|1}\cdot 4\cdot 1$ 與 $\underline{|1}\cdot 1\cdot 1$, $\underline{|2}\cdot 4\cdot 1$ 與 $\underline{|2}\cdot 1\cdot 1$, $\underline{|3}\cdot 4\cdot 1$ 與 $\underline{|3}\cdot 1\cdot 1$, $\underline{|5}\cdot 4\cdot 1$ 與 $\underline{|5}\cdot 1\cdot 1$ 之交點.此四點均以方程式之號數 4 記之; 至未知量之號數則與各所在直綫之號數相同.同樣 H_0 與 $\underline{|1}\cdot 1\cdot 1$, $\underline{|2}\cdot 1\cdot 1$, $\underline{|3}\cdot 1\cdot 1$, $\underline{|5}\cdot 1\cdot 1$ 之交點均以 O 記之.在此法中, H_0 可視爲代表

$$O\cdot x_1+O\cdot x_2+O\cdot x_3+O\cdot x_4=O$$

之直綫,故作圖時 H_0 之意義與 $\underline{|1}\cdot 1\cdot 1$, $\underline{|2}\cdot 4\cdot 1$ 等綫相

同.

作 $\lfloor\underline{3}\cdot 3\cdot 1$, 並以直邊決定 $\lfloor\underline{3}\cdot 2\cdot 1$ 與此綫之交點; 此點以 $R_{3\cdot 2\cdot 1}$ 記之. 作直綫 $P_{1\cdot 1}R_{3\cdot 2\cdot 1}$. 以直邊決定經過 $R_{3\cdot 2\cdot 1}$ 及 $\lfloor\underline{3}\cdot 1\cdot 1$ 上 4, 0 兩點之直綫與 V_0 之交點; 此兩點以 $P_{4\cdot 2}$, $P_{0\cdot 2}$ 記之. 則由 $P_{4\cdot 2}$ 至 $\lfloor\underline{1}\cdot 1\cdot 1$ 上 4 點之直綫卽為 $\lfloor\underline{1}\cdot 4\cdot 2$, 至 $\lfloor\underline{2}\cdot 1\cdot 1$ 上四點之直綫卽為 $\lfloor\underline{2}\cdot 4\cdot 2$, 至 $\lfloor\underline{5}\cdot 1\cdot 1$ 上四點之直綫卽為 $\lfloor\underline{5}\cdot 4\cdot 2$. 同樣由 $P_{0\cdot 2}$ 至 $\lfloor\underline{1}\cdot 1\cdot 1$, $\lfloor\underline{2}\cdot 1\cdot 1$, $\lfloor\underline{5}\cdot 1\cdot 1$ 上三 0 點之直綫為 $\lfloor\underline{1}\cdot 0\cdot 2$, $\lfloor\underline{2}\cdot 0\cdot 2$, $\lfloor\underline{5}\cdot 0\cdot 2$.

在此法中 R 點為一切作圖之樞紐. 消滅未知量所用之兩式, 消去之方程式, 及消去之未知量均於 R 點以各種方法標記之. 如 $R_{3\cdot 2\cdot 1}$ 之位置係由 (2), (3) 兩式決定, 第三式因 $\lfloor\underline{3}\cdot 3\cdot 1$ 已作出, 無須另行標明; 第二式則由 $R_{3\cdot 2\cdot 1}$ 旁第二數字 2 記之. 至消去之未知量則由 $R_{3\cdot 2\cdot 1}$ 旁第一數字 3 記之. 以直綫連接 $R_{3\cdot 2\cdot 1}$ 與 $P_{1\cdot 1}$ 表示第一式由此消去. 而消去方程式之組數則由 $R_{3\cdot 2\cdot 1}$ 旁第三數字 1 記之. 故 R 旁所記三數字與 $\lfloor\underline{2}\cdot 4\cdot 2$ 內三數字性質相似, 卽第一表未知量之號數, 第二表方程式之號數, 第三則表其組數. 因此 R 點應有之記號必須隨時註明. 閱圖者

苟尋出各 R 點，則全部作圖之步驟卽可了然.

用以消滅未知量之方程式其本身並不消去. 故在新方程式中此兩式仍然存在; 其中係數及常數不變更. 如本例中第一組內 (2), (3) 兩式同爲第二組內 (2), (3) 兩式. 因 $P_{2\cdot1}$, $P_{3\cdot1}$ 亦爲 $P_{2\cdot2}$, $P_{3\cdot2}$ 故以 $P_{2\cdot1-2}$, $P_{3\cdot1-2}$ 記之.

第二步以 (0), (3) 兩式消去 (4) 式及 x_1. 作 $\underline{\lvert 1}\cdot4\cdot2$, $\underline{\lvert 2}\cdot4\cdot2$, $\underline{\lvert 5}\cdot4\cdot2$; 並以直邊決定此三綫與 $\underline{\lvert 1}\cdot2\cdot2$, $\underline{\lvert 2}\cdot2\cdot2$, $\underline{\lvert 5}\cdot2\cdot2$ 相當之交點. 此三點均以 2 記之. 作 $\underline{\lvert 1}\cdot3\cdot2$, 並以直邊決定 $\underline{\lvert 1}\cdot0\cdot2$ 與此綫之交點. 此點以 $R_{1\cdot0\cdot2}$ 記之. 作直綫 $P_{4\cdot2}R_{1\cdot0\cdot2}$. 以直邊決定經過 $R_{1\cdot0\cdot2}$ 及 $\underline{\lvert 1}\cdot4\cdot2$ 上 2 點之直綫與 V_0 之交點; 此點以 $P_{2\cdot3}$ 記之. 則由 $P_{2\cdot3}$ 至 $\underline{\lvert 2}\cdot4\cdot2$, $\underline{\lvert 5}\cdot4\cdot2$ 上 2 點之兩直綫卽爲 $\underline{\lvert 2}\cdot2\cdot3$, $\underline{\lvert 5}\cdot2\cdot3$.

作 $\underline{\lvert 2}\cdot3\cdot3$, 並以直邊決定 $\underline{\lvert 2}\cdot2\cdot3$ 與此綫之交點 $R_{2\cdot2\cdot3}$. 作直綫 $P_{0\cdot3}R_{2\cdot2\cdot3}$.

未知量之作法. 作橫綫 H_0, 縱綫 V_0 (見 Fig. 47*b*) 相交於 O 點. 於 H_0 上取一點 S, 使由 O 至 S 之距離爲一. 以直邊決定經過 S 之 $\underline{\lvert 5}\cdot3\cdot1$ 與 V_0 之交點 $P_{3\cdot1}$. 前圖中 $P_{3\cdot1}$, $P_{3\cdot2}$, $P_{3\cdot3}$ 同在一點，故此圖中 $P_{3\cdot1}$ 亦爲 $P_{3\cdot1-2-3}$.

同樣決定經過 S 之 $\underline{\lfloor 5}\cdot 2\cdot 3$ 與 V_0 之交點 $P_{2\cdot 3}$. 其他 $P_{1\cdot 1}$, $P_{2\cdot 1}$, $P_{4\cdot 2}$, $P_{0\cdot 3}$ 均以相似之法決定.

自 $P_{3\cdot 3}$ 作 $\underline{\lfloor 2}\cdot 3\cdot 3$, 並以直邊決定經過 $P_{2\cdot 3}$ 之 $\underline{\lfloor 2}\cdot 2\cdot 3$ 與 $\underline{\lfloor 2}\cdot 3\cdot 3$ 之交點 $R_{2\cdot 2\cdot 3}$. 自此點作平行於前圖中 $P_{0\cdot 3}R_{2\cdot 2\cdot 3}$ 之直綫; 並以直邊決定經過 $P_{0\cdot 3}$ 之 $\underline{\lfloor 2}\cdot 0\cdot 3$ 與此綫之交點 $T_{2\cdot 0\cdot 3}$. 經 $T_{2\cdot 0\cdot 3}$ 作縱綫 V_2.

以直邊決定經過 $P_{4\cdot 2}$ 之 $\underline{\lfloor 2}\cdot 4\cdot 2$ 與 V_2 之交點 $T_{2\cdot 4\cdot 2}$. 設 $\underline{\lfloor 2}\cdot 3\cdot 2$ (卽 $\underline{\lfloor 2}\cdot 3\cdot 3$) 交 V_2 於 $T_{2\cdot 3\cdot 2}$, 自此點作 $\underline{\lfloor 1}\cdot 3\cdot 2$, 並以直邊決定經過 $T_{2\cdot 0\cdot 3}$ 之 $\underline{\lfloor 1}\cdot 0\cdot 2$ 與此綫之交點 $R_{1\cdot 0\cdot 2}$. 自 $R_{1\cdot 0\cdot 2}$ 作平行於前圖中 $P_{4\cdot 2}R_{1\cdot 0\cdot 2}$ 之直綫, 並以直邊決定經過 $T_{2\cdot 4\cdot 2}$ 之 $\underline{\lfloor 1}\cdot 4\cdot 2$ 與此綫之交點 $T_{1\cdot 4\cdot 2}$. 經 $T_{1\cdot 4\cdot 2}$ 作縱綫 V_1.

以直邊決定經過 $P_{1\cdot 1}$ 之 $\underline{\lfloor 2}\cdot 1\cdot 1$ 與 V_2 之交點 $T_{2\cdot 1\cdot 1}$, 再決定經過 $T_{2\cdot 1\cdot 1}$ 之 $\underline{\lfloor 1}\cdot 1\cdot 1$ 與 V_1 之交點 $T_{1\cdot 1\cdot 1}$. 同樣決定 V_1 上 $T_{1\cdot 2\cdot 1}$. 設 V_1 交 $\underline{\lfloor 1}\cdot 3\cdot 1$ (卽 $\underline{\lfloor 1}\cdot 3\cdot 2$) 於 $T_{1\cdot 3\cdot 1}$, 自 $T_{1\cdot 3\cdot 1}$ 作 $\underline{\lfloor 3}\cdot 3\cdot 1$. 以直邊決定經過 $T_{1\cdot 2\cdot 1}$ 之 $\underline{\lfloor 3}\cdot 2\cdot 1$ 與 $\underline{\lfloor 3}\cdot 3\cdot 1$ 之交點 $R_{3\cdot 2\cdot 1}$. 自此點作平行於前圖中 $P_{1\cdot 1}R_{3\cdot 2\cdot 1}$ 之直綫, 並以直邊決定經過 $T_{1\cdot 1\cdot 1}$ 之 $\underline{\lfloor 3}\cdot 1\cdot 1$ 與此綫之交

點 $T_{3\cdot1\cdot1}$. 經 $T_{3\cdot1\cdot1}$ 作縱綫 V_3.

以直邊決定經過 $T_{3\cdot1\cdot1}$ 之 $\underline{|4}\cdot1\cdot1$ 與 H_0 之交點 $T_{4\cdot1\cdot1}$. 經 $T_{4\cdot1\cdot1}$ 作縱綫 V_4. 則由 V_0 至 V_2, V_2 至 V_1, V_1 至 V_3, V_3 至 V_4 之距離卽爲滿足此四式之 x_2, x_1, x_3, x_4 之值; 其值爲 -2, 1, 1, -2.5.

42. 將常數設爲未知量之係數, 由前節可見斜度圖解中直綫較多而未知量圖解則極爲簡單. 苟斜度圖解中直綫太多, 可仍依第三章中解法將作圖之一部歸入未知量圖解中以減輕斜度圖解之繁雜. 又作斜度圖解時, 苟無特殊困難而能每次均用 H_0 及其他一式以消滅式中之未知量, 則圖中必要之直綫亦可因此減少. 關於此二點將以下例說明之.

例 2.
$$9x_1-7x_2+5x_3-3x_4+2x_5=-9.5 \tag{1}$$
$$7x_1+9x_2+2x_3+5x_4+3x_5=-9 \tag{2}$$
$$-9x_1-2x_2-3x_3+7x_4+5x_5=2.5 \tag{3}$$
$$-5x_1+3x_2-7x_3+2x_4+7x_5=5.5 \tag{4}$$
$$2x_1-5x_2-9x_3-9x_4+9x_5=4.5 \tag{5}$$

Fig. 48*a*, Fig. 48*b* 爲上五式之完全圖解. 在此例中, 作

斜度圖解時消減未知量之各 R 點均在 H_0 上; 至作圖原理及所用記號則均與前例相同. 但各式中之常數因未於斜度圖解中作出, 故未知量圖解中各 P 點須另行作出, 其法如下.

於 Fig. 48b 中 V_0 上取 $P_{1\cdot1}$, $P_{2\cdot1}$, $P_{3\cdot1}$, $P_{4\cdot1}$, $P_{5\cdot1}$ 五點使表上五式中常數 $\frac{-9.5}{8}$, $\frac{-9}{8}$, $\frac{2.5}{8}$, $\frac{5.5}{8}$, $\frac{4.5}{8}$ (因圖解時曾以八除各式兩邊也). 因第一次以 (0), (1) 兩式消去 (3) 式, 又因 x_1 爲最後消去之未知量, 故 $P_{1\cdot2}$ 與 $P_{1\cdot1}$ 同在一點而其他 $P_{2\cdot2}$, $P_{4\cdot2}$, $P_{5\cdot2}$ 則均在 $\lfloor\underline{1}\cdot3\cdot1$ 之上. 故經 $P_{3\cdot1}$ 作 $\lfloor\underline{1}\cdot3\cdot1$, 並以直邊決定經過 $P_{2\cdot1}$ 之 $\lfloor\underline{1}\cdot2\cdot1$ 與 $\lfloor\underline{1}\cdot3\cdot1$ 之交點; 此點卽爲 $P_{2\cdot2}$. 同樣決定 $P_{4\cdot2}$, $P_{5\cdot2}$.

因第二次以 (0), (5) 兩式消去 (1) 式, 故 $P_{5\cdot3}$ 與 $P_{5\cdot2}$ 同在一點而 $P_{2\cdot3}$, $P_{4\cdot3}$ 則均在 $\lfloor\underline{1}\cdot1\cdot2$ 之上. 經 $P_{1\cdot1-2}$ 作 $\lfloor\underline{1}\cdot1\cdot2$, 並以直邊決定經過 $P_{2\cdot2}$ 之 $\lfloor\underline{1}\cdot2\cdot2$ 與 $\lfloor\underline{1}\cdot1\cdot2$ 之交點; 此點卽爲 $P_{2\cdot3}$. 同樣決定 $P_{4\cdot3}$.

因第三次以 (0), (4) 兩式消去 (5) 式, 故 $P_{4\cdot4}$ 與 $P_{4\cdot3}$ 同在一點; 而 $P_{2\cdot4}$ 則在 $\lfloor\underline{1}\cdot5\cdot3$ 之上. 經 $P_{5\cdot3}$ 作 $\lfloor\underline{1}\cdot5\cdot3$,

並以直邊決定經過 $P_{2\cdot 3}$ 之 $\underline{|1}\cdot 2\cdot 3$ 與 $\underline{|1}\cdot 5\cdot 3$ 之交點；此點即為 $P_{2\cdot 4}$.

各 P 點既經決定，則其餘作圖即與前例相似，故不再述.

43. 距離圖表之第三作圖法.

此法與第一解法相似，故亦僅以一例說明其作法.

$$3x_1+4x_2-2x_3-x_4=-4.5 \tag{1}$$

$$7x_1+x_2+3x_3+2x_4=3 \tag{2}$$

$$2x_1-5x_2-x_3+4x_4=1 \tag{3}$$

$$x_1-2x_2+7x_3+3x_4=4.5 \tag{4}$$

斜度之作法. 此數式中係數及常數均大於一，故以四除之. 作橫綫 H_0，縱綫 V_0 (見 Fig. 49a)，並擇定比例尺如圖中所示. 於 V_0 左右距離四單位(此單位長度非原比例尺上之單位) 處作縱綫 V_l, V_r. 然後擇定首先消去之未知量如本例中之 x_4. 於 H_0 上取一點 R_4，並於 V_0 上取四點 $P_{1\cdot 1}$, $P_{2\cdot 1}$, $P_{3\cdot 1}$, $P_{4\cdot 1}$ 使由 R_4 至此四點直綫之斜度為 $\frac{-1}{4}$ $\frac{2}{4}$, $\frac{4}{4}$, $\frac{3}{4}$ 其他 x_1, x_2, x_3 之係數及式中

常數均以 V_l, V_r 上諸點表之. 諸點之記號及其位置之決定均與前兩例相同.

現決定消去第四式. 作 $\underline{|1}\cdot4\cdot1$, $\underline{|2}\cdot4\cdot1$, $\underline{|3}\cdot4\cdot1$, $\underline{|5}\cdot4\cdot1$. 以直邊決定 $\underline{|1}\cdot1\cdot1$, $\underline{|1}\cdot2\cdot1$, $\underline{|1}\cdot3\cdot1$ 與 $\underline{|1}\cdot4\cdot1$ 之交點; 此三點各以所屬方程式之號數記之. 同樣決定 $\underline{|2}\cdot4\cdot1$, $\underline{|3}\cdot4\cdot1$, $\underline{|5}\cdot4\cdot1$ 上 1, 2, 3 點.

次決定消去 x_3. 以直邊決定經過 R_4 及 $\underline{|3}\cdot4\cdot1$ 上 1, 2, 3 三點之直綫與 V_0 之交點, 此三點分別以 $P_{1\cdot2}$, $P_{2\cdot2}$, $P_{3\cdot2}$ 記之. 由 $P_{1\cdot2}$ 至 $\underline{|1}\cdot4\cdot1$, 2.4.1, $\underline{|5}\cdot4\cdot1$ 上各 1 點之直綫將爲 $\underline{|1}\cdot1\cdot2$, $\underline{|2}\cdot1\cdot2$, $\underline{|5}\cdot1\cdot2$. 同樣由 $P_{2\cdot2}$ 至 $\underline{|1}\cdot4\cdot1$, $\underline{|2}\cdot4\cdot1$, $\underline{|5}\cdot4\cdot1$ 上各 2 點之直綫將爲 $\underline{|1}\cdot2\cdot2$, $\underline{|2}\cdot2\cdot2$, $\underline{|5}\cdot2\cdot2$; 由 $P_{3\cdot2}$ 至各 3 點之直綫將爲 $\underline{|1}\cdot3\cdot2$, $\underline{|2}\cdot3\cdot2$, $\underline{|5}\cdot3\cdot2$.

次決定消去第二組內第一式. 作 $\underline{|1}\cdot1\cdot2$, $\underline{|2}\cdot1\cdot2$, $\underline{|5}\cdot1\cdot2$. 以直邊決定 $\underline{|1}\cdot2\cdot2$, $\underline{|1}.3.2$ 與 $\underline{|1}\cdot1\cdot2$ 之交點; 此兩點以 2, 3 兩數記之. 同樣決定 $\underline{|2}\cdot1\cdot2$, $\underline{|5}\cdot1\cdot2$ 上 2, 3 兩點.

次決定消去 x_1. 以直邊決定經過 R_4 及 $\underline{|1}\cdot1\cdot2$ 上 2,

3 兩點之直綫與 V_0 之交點，此兩點以 $P_{2\cdot3}$, $P_{3\cdot3}$ 記之. 由 $P_{2\cdot3}$ 至 $\underline{|2}\cdot1\cdot2$ 上 2 點之直綫將為 $\underline{|2}\cdot2\cdot3$, 至 $\underline{|5}\cdot1\cdot2$ 上 2 點之直綫將為 $\underline{|5}\cdot2\cdot3$. 同樣由 $P_{3\cdot3}$ 至 $\underline{|2}\cdot1\cdot2$, $\underline{|5}\cdot1\cdot2$ 上 3 點之兩直綫將為 $\underline{|2}\cdot3\cdot3$, $\underline{|5}\cdot3\cdot3$.

作 $\underline{|2}\cdot2\cdot3$, $\underline{|5}\cdot2\cdot3$. 以直邊決定 $\underline{|2}\cdot3\cdot3$ 與 $\underline{|2}\cdot2\cdot3$ 之交點，$\underline{|5}\cdot3\cdot3$ 與 $\underline{|5}\cdot2\cdot3$ 之交點；此兩點均以 3 記之. 以直邊決定經過 R_4 及 $\underline{|2}\cdot2\cdot3$ 上 3 點之直綫與 V_0 之交點；此點以 $P_{3\cdot4}$ 記之. 由 $P_{3\cdot4}$ 至 $\underline{|5}\cdot2\cdot3$ 上 3 點之直綫將為 $\underline{|5}\cdot3\cdot4$.

未知量之作法. 另作橫綫 H_0, 縱綫 V_0 相交於 O 點 (見 Fig. 49b). 於 H_0 上取一點 S 使 OS 等於一. 以直邊決定經過 S 之 $\underline{|5}\cdot3\cdot1$, $\underline{|5}\cdot3\cdot2$, $\underline{|5}\cdot2\cdot3$, $\underline{|5}\cdot3\cdot4$ 與 V_0 之交點 $P_{3\cdot1}$, $P_{3\cdot2}$, $P_{2\cdot3}$, $P_{3\cdot4}$. 自 $P_{3\cdot4}$ 作一綫平行於前圖中之 $R_4P_{3\cdot4}$ 而交 H_0 於 R_4. 自 R_4 作 $\underline{|4}\cdot2\cdot3$ 平行於前圖中之 $R_4P_{2\cdot3}$, 並以直邊決定經過 $P_{2\cdot3}$ 之 $\underline{|2}\cdot2\cdot3$ 與 $\underline{|4}\cdot2\cdot3$ 之交點 $T_{2\cdot2\cdot3}$. 經 $T_{2\cdot2\cdot3}$ 作縱綫 V_2.

以直邊決定經過 $P_{3\cdot2}$ 之 $\underline{|2}\cdot3\cdot2$ 與 V_2 之交點 $T_{2\cdot3\cdot2}$. 自 R_4 作 $\underline{|4}\cdot3\cdot2$ 平行於前圖中之 $R_4P_{3\cdot2}$, 並以直邊決定

經過 $T_{2\cdot3\cdot2}$ 之 $\underline{\lvert 1}\cdot 3\cdot 2$ 與 $\underline{\lvert 4}\cdot 3\cdot 2$ 之交點 $T_{1\cdot3\cdot2}$. 經 $T_{1\cdot3\cdot2}$ 作縱綫 V_1.

以直邊決定經過 $P_{3\cdot1}$ 之 $\underline{\lvert 2}\cdot 3\cdot 1$ 與 V_2 之交點 $T_{2\cdot3\cdot1}$, 決定經過 $T_{2\cdot3\cdot1}$ 之 $\underline{\lvert 1}\cdot 3\cdot 1$ 與 V_1 之交點 $T_{1\cdot3\cdot1}$. 自 R_4 作 $\underline{\lvert 4}\cdot 3\cdot 1$ 並以直邊決定經過 $T_{1\cdot3\cdot1}$ 之 $\underline{\lvert 3}\cdot 3\cdot 1$ 與 $\underline{\lvert 4}\cdot 3\cdot 1$ 之交點 $T_{3\cdot3\cdot1}$. 經 $T_{3\cdot3\cdot1}$ 作縱綫 V_3; 經 R_4 作縱綫 V_4. 則由 V_0 至 V_2, V_2 至 V_1, V_1 至 V_3, V_3 至 V_4 之距離即為滿足上四式之 x_2, x_1, x_3, x_4 之值.

44. 上述數種作圖法, 孰優孰劣應以圖解之繁簡, 所占面積之大小及其準確程度為斷.

所謂圖解之繁簡乃就圖中需要直綫之多寡而言. 解同一問題時, 上述數法中必要直綫之數約略相同. 故以此點而論, 各法實無重大分別.

圖解所佔面積之大小, 視圖解之各部能否均在預定之範圍內. 此點與作圖本身初無若何關係. 惟因作圖紙之面積每有限度, 若圖解之一部不能免於突出圖紙範圍之外則困難隨之而起. 以此點而言, 當以力量圖表之兩解法, 較易控制.

圖解之能否準確，視其中各綫之方向，各點之位置是否準確．各點之位置概由兩綫相交而得．設此兩綫間之角度甚小，則其交點之位置必難準確．直綫之方向多由兩點決定．設此兩點之距離太近，則此直綫之方向必難準確．故作圖解時有必須避免者二事：(1) 以近於平行兩直綫之交點決定一點之位置，(2) 以距離甚近之兩點決定一直綫之方向．在距離圖表之兩解法中，此兩困難較易發生，亦較難避免．故其解答不若力量圖解法之較易準確．若以距離圖表之第一第三解法相比較，則以後者便於應用．在力量圖表之兩解法中，似以第二法便於應用．

(3) 幾何法與代數法之比較．

45. 幾何法或圖解法往往因所用比例尺太小，所得結果不易準確；又以作圖紙及繪圖器齊備後始能作圖；更以慣於作圖者不多，故圖解法能推之實用者甚少．而一般意見遂以爲圖解法不能與代數法相提並論．實則未盡然也．

圖解法之理論，進行之手續，雖與代數法根本不同；但

其原則仍爲逐漸消滅式中之未知量. 此則與代數法不期然而吻合. 惟代數法中, 除用行列式計算外, 式中之未知量, 僅可每次消去一個, 而圖解法則可每兩個同時消去(力量圖表之第一解法); 在代數法中, 無論用何法消去式中之未知量, 新方程式中所含者, 雖數目減少, 仍爲原有之未知量, 而在幾何法中, 消滅未知量之法則有以兩未知量合并爲一未知量 (距離圖表之第三解法), 有以一新未知量代替兩未知量 (距離圖表之第一解法), 有以若干少數新未知量代替各原有之未知量 (距離圖表之第二解法). 方法不同, 手續則各異; 此則又與代數法稍有出入. 苟將幾何法演爲分析, 則可得數種不同之代數解法; 故代數法可因幾何法而益形充實.

若用普通作圖紙及繪圖器並以較大之比例尺, 以本書所論作圖法解數目問題, 其結果中差誤不難小於百分之二三 而在代數法中, 除用對數計算外, 如用計算尺計算, 其準確程度亦不過如是. 故以此點論之, 圖解法未必遜於代數法也.

用代數法者每以圖解法不若代數法之便利. 此亦似是

實非而非持平之論. 蓋現今吾人之習慣, 一切事物之關係均以代數法表之. 旣經代數式表示之後, 其計算卽可開始; 而普通圖解法, 則必先將代數式中關係於圖中表之, 然後方可開始作圖. 將代數式翻譯爲圖形上關係, 其工作往往占全部圖解十分之三四. 但在代數法中則無與此相當之工作, 故其法似較爲便利. 反之, 設已與之圖形代表若干聯立方程式, 用代數法者必先根據圖形上關係以求得其方程式, 然後方可計算; 而用圖解法者可立卽開始作圖. 則圖解法將遠勝於代數法. 已與圖表而令用代數法者由圖表求得方程式而後解之, 其不公允正如已與代數式先圖表之而後作圖也. 故若除開圖表之部分; 圖解法之簡便固不下於代數法也. 著者之爲此論, 非謂幾何法在應用方面能與代數法爭其地位; 乃就方法本身作理論上之比較耳.

本章中六例爲用幾何法解聯立方程式之普通方法 因爲例題, 故詳述作圖手續以便明瞭. 初學者或以爲繁複曲折, 十倍於代數法. 殊不知各種計算手續如加也, 減也, 乘也, 除也, 均須一一於圖中以作圖方法代之, 雖欲

簡而烏可得乎. 所幸各法均以一定幾何原理爲根據, 苟熟習其原理, 更用適宜之記號, 則作圖時必能因圖形上需要, 隨機應變, 而不致如入重圍, 苦不得脫. 至閱覽他人已作成之圖形, 則必須先注意其消滅未知量及方程式之次序. 此二者乃全部圖解之綱領; 綱領既得則不難一目了然.

附　　圖

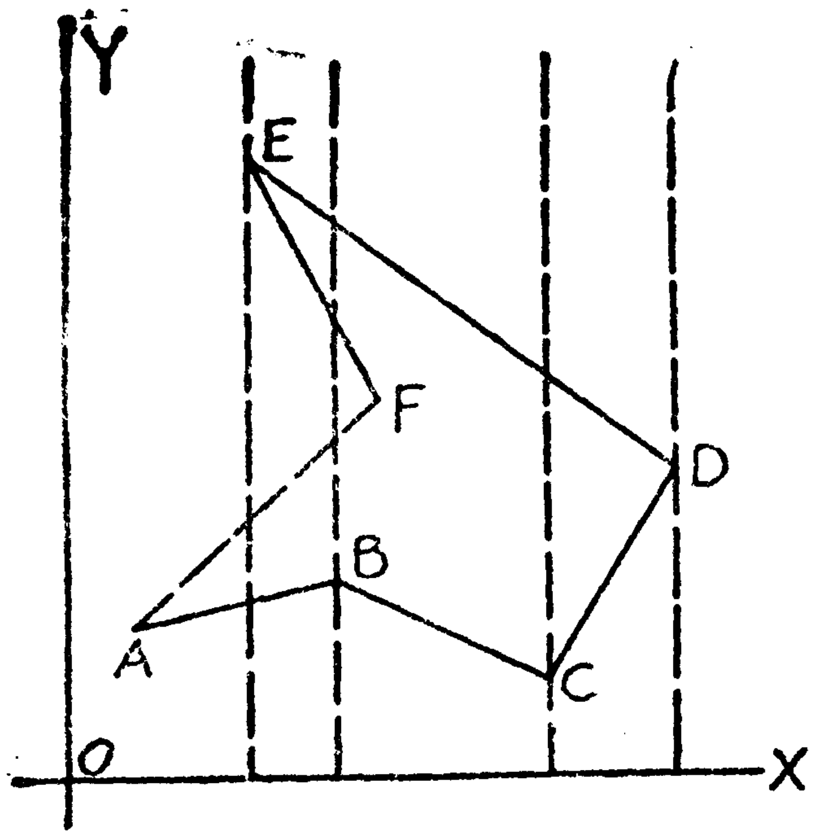


Fig. 1

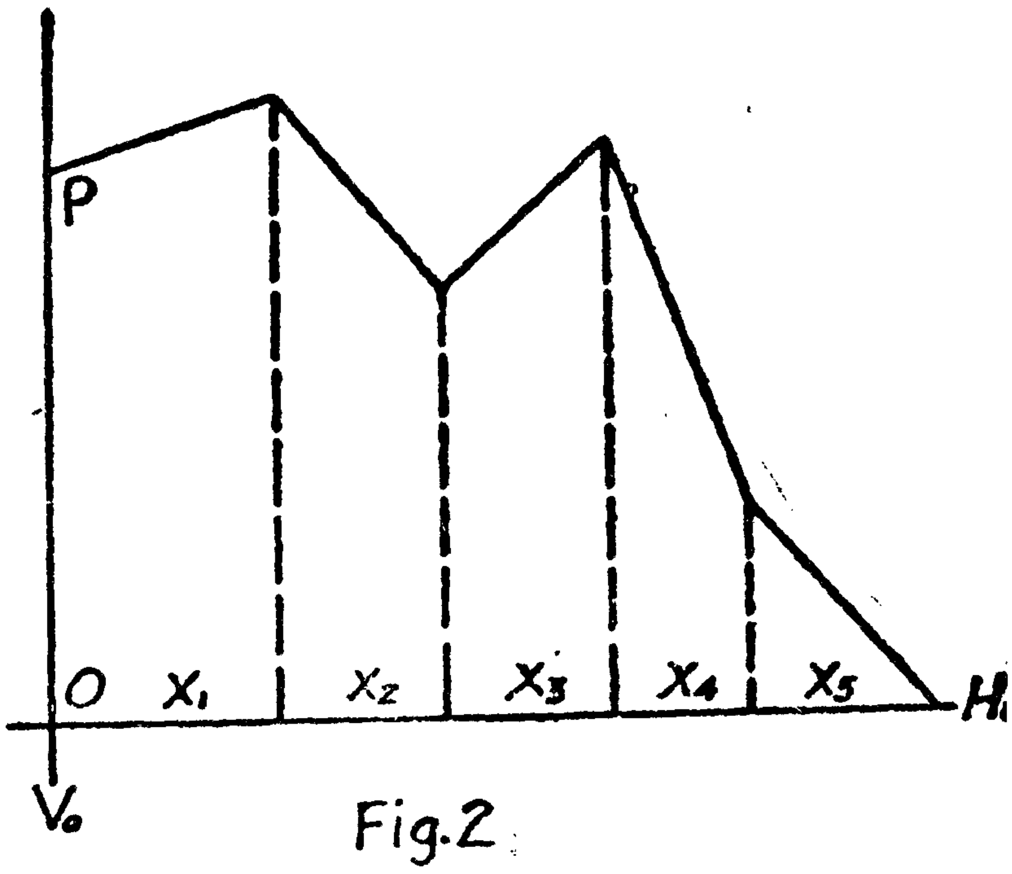


Fig. 2

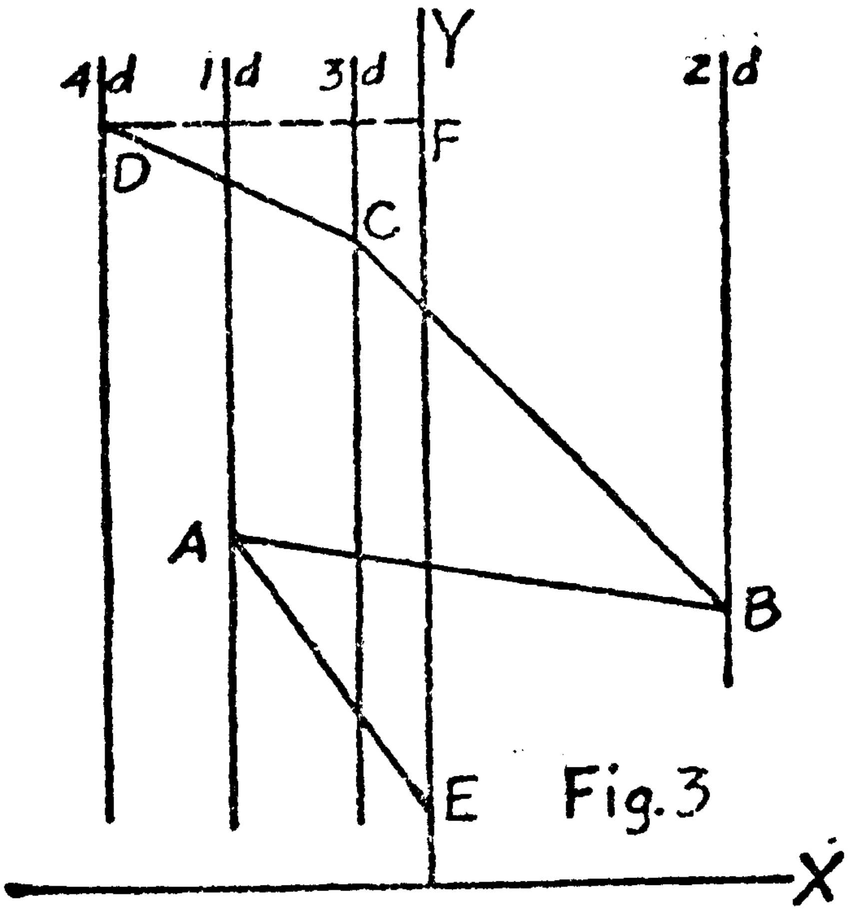


Fig. 3

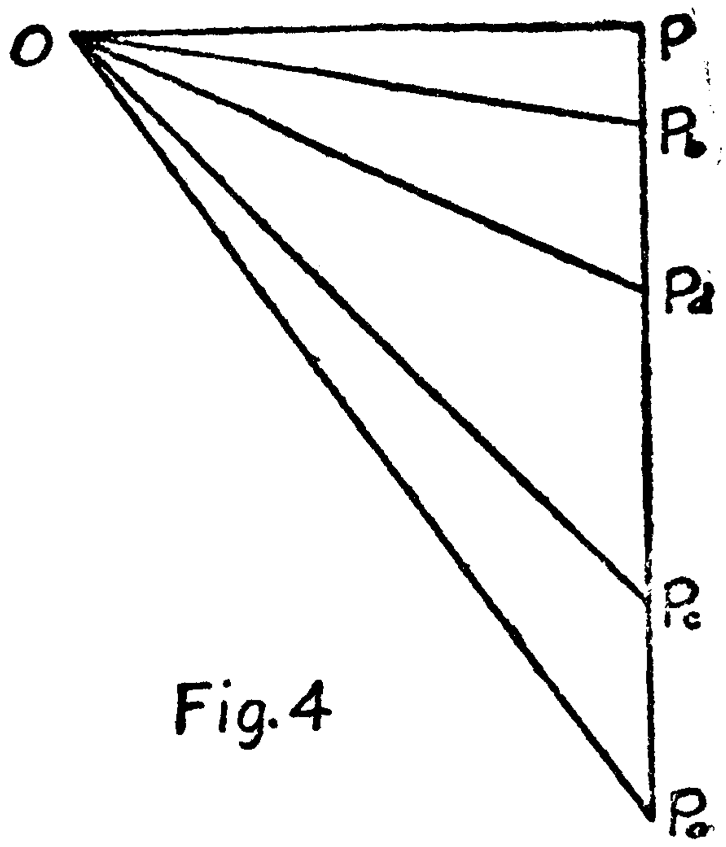


Fig. 4

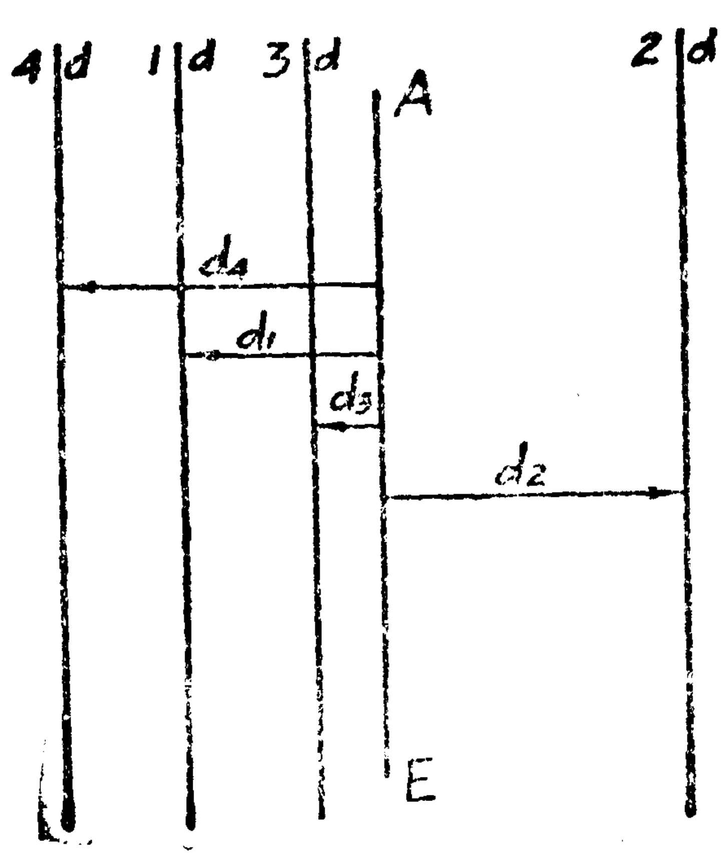


Fig. 5

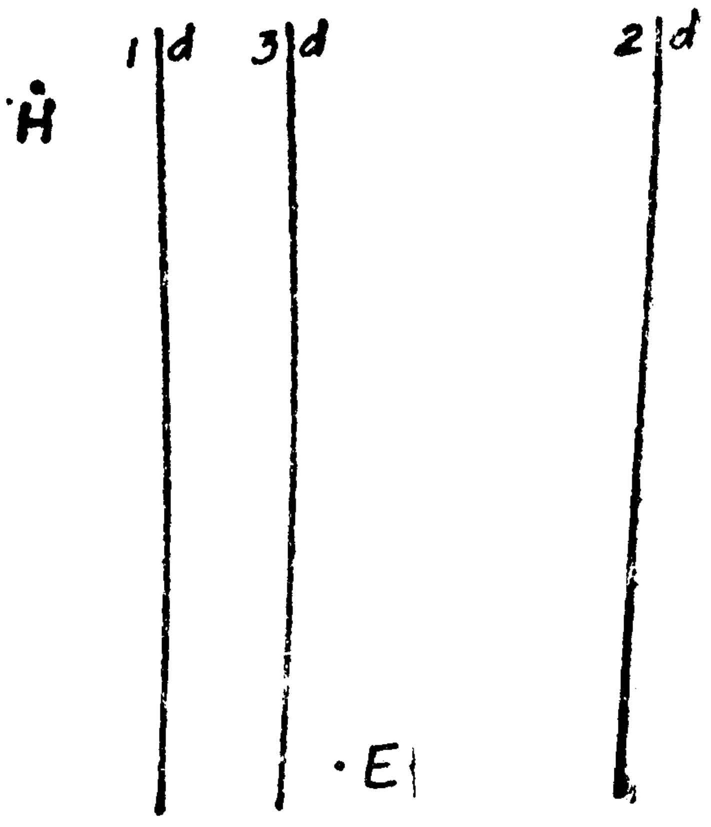


Fig. 6

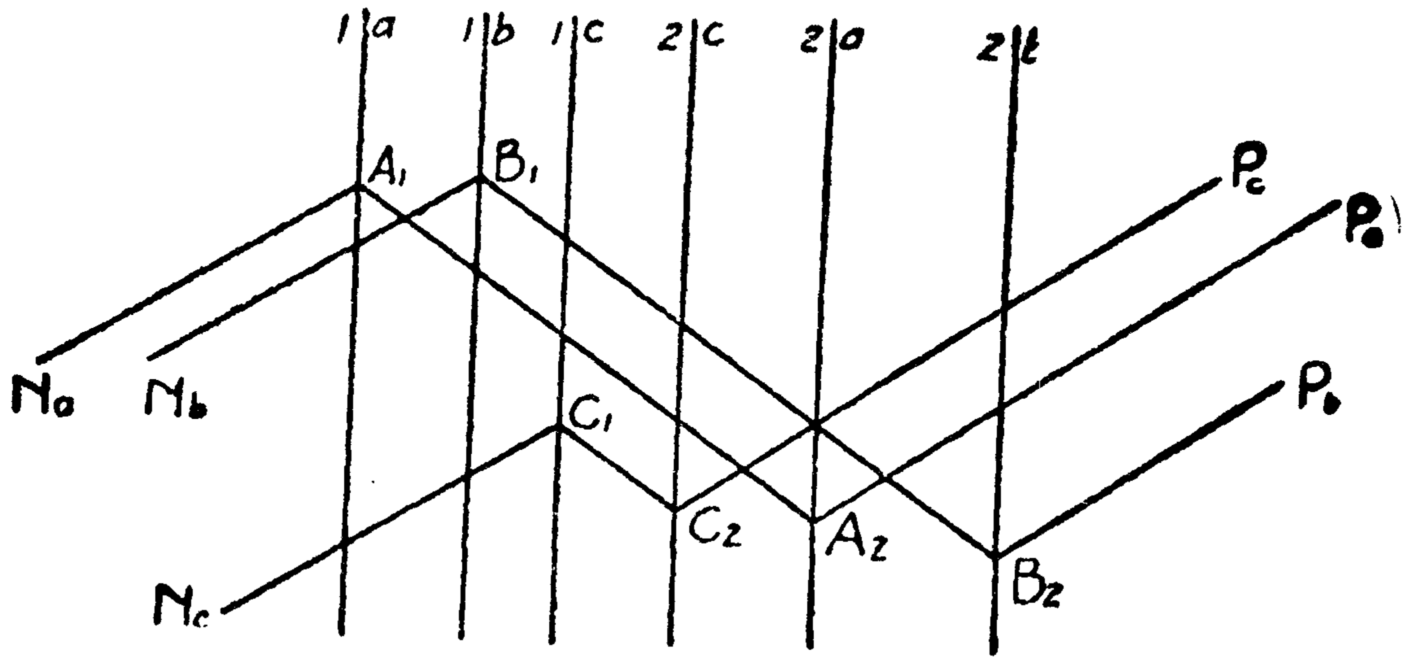


Fig. 7

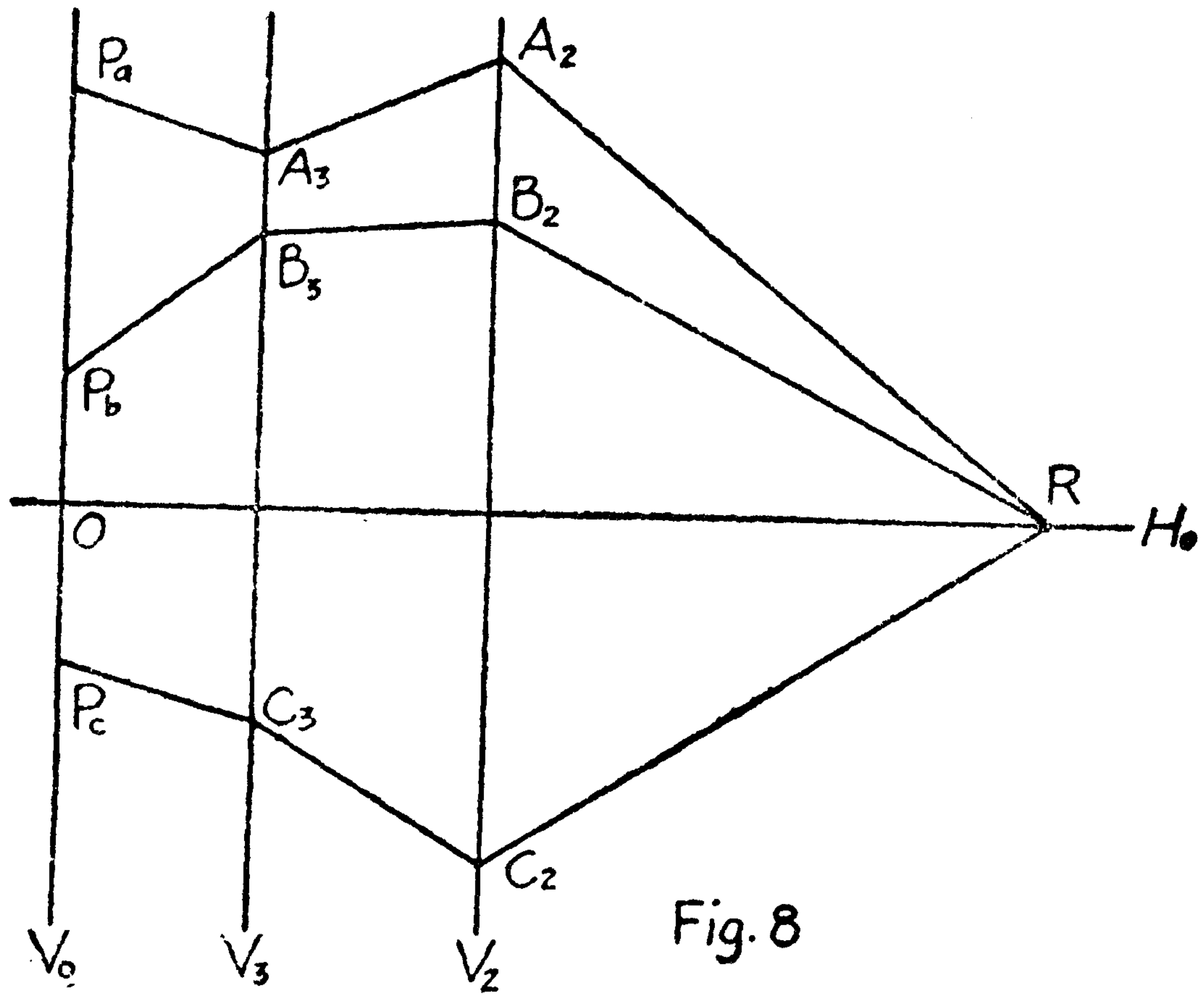


Fig. 8

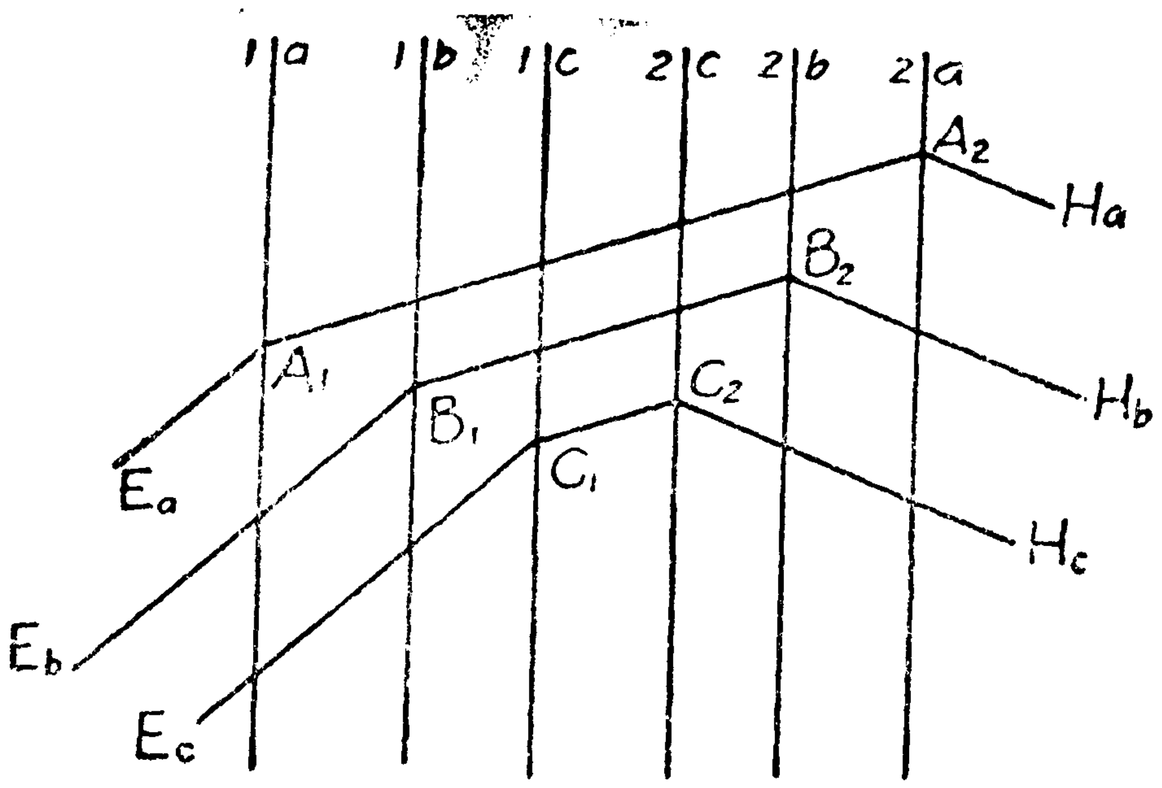


Fig. 9

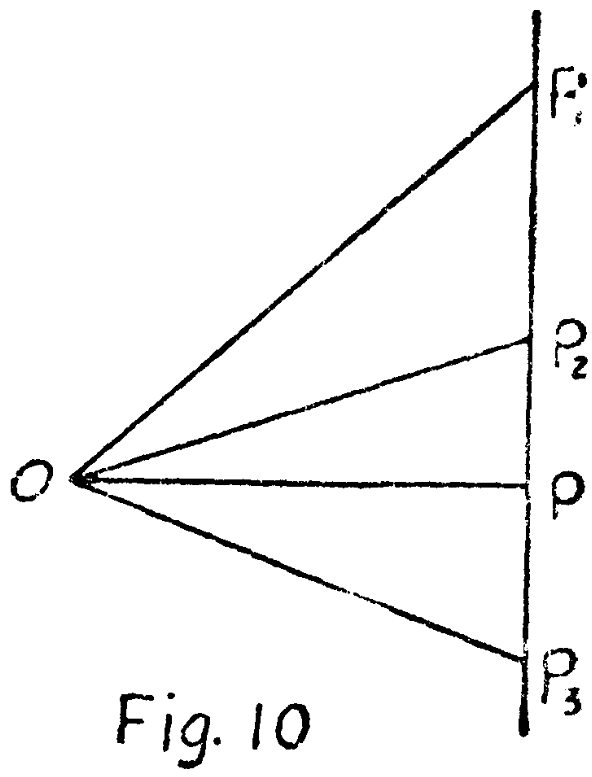


Fig. 10

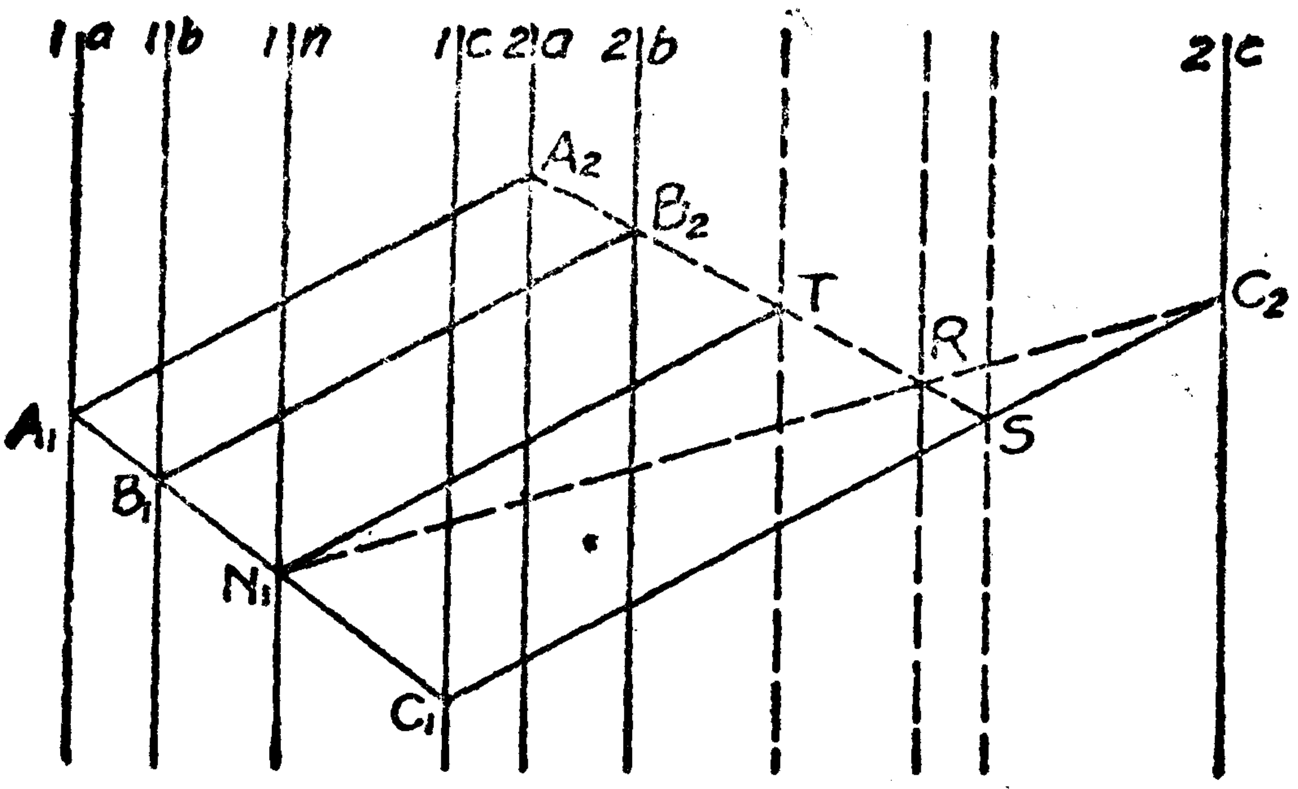


Fig. 11

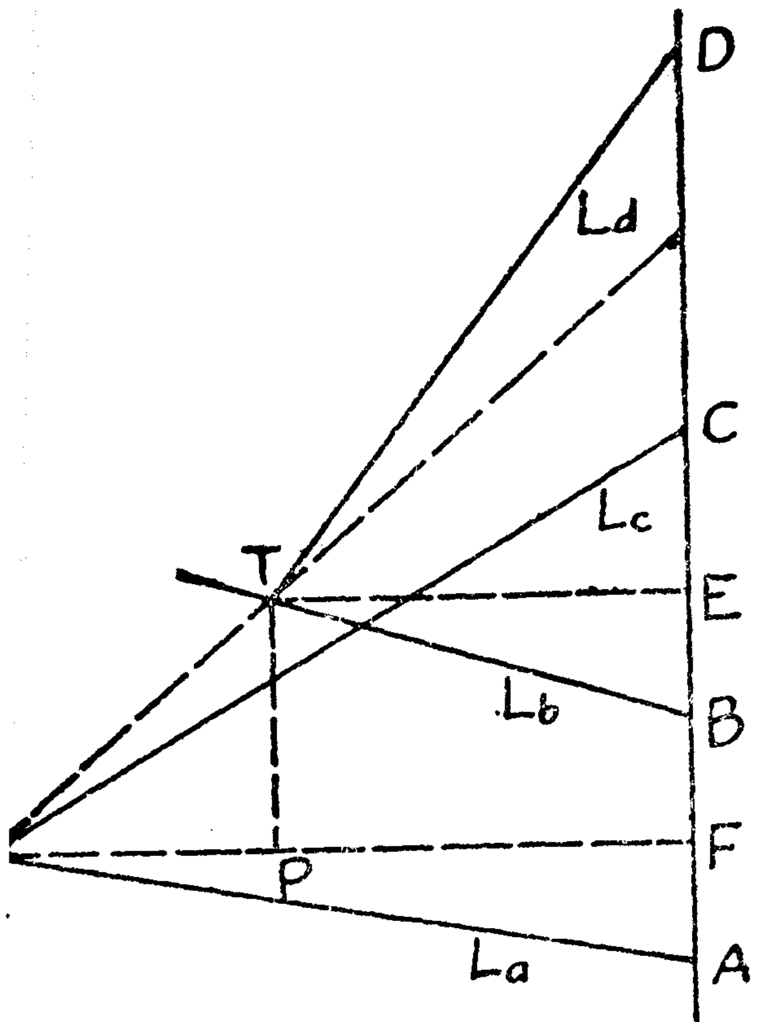


Fig. 12

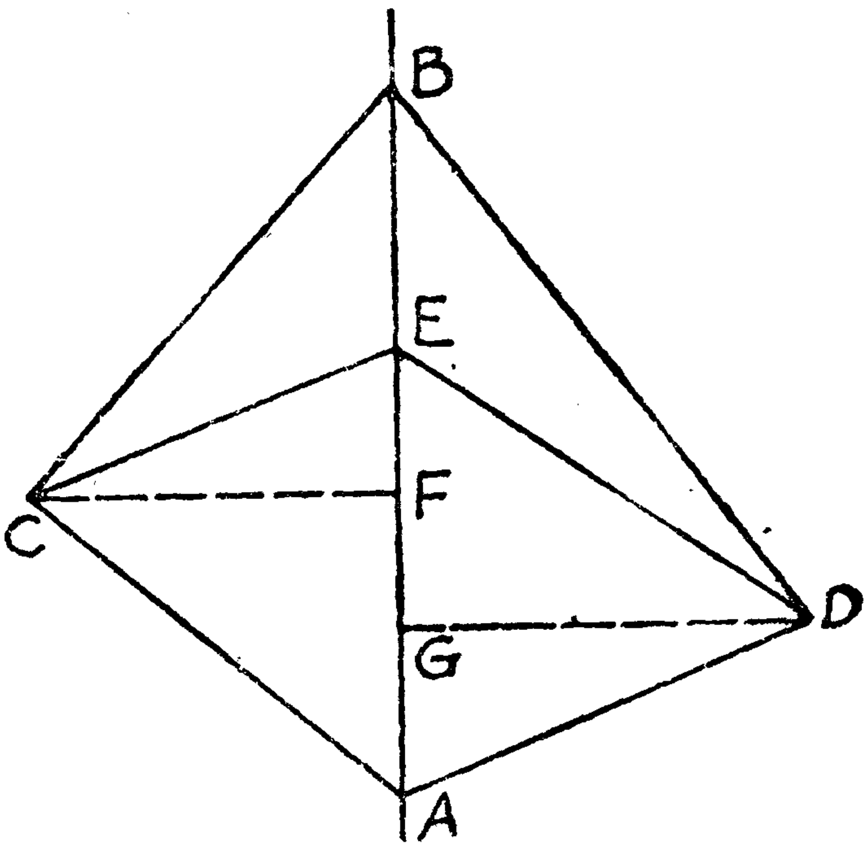


Fig. 13

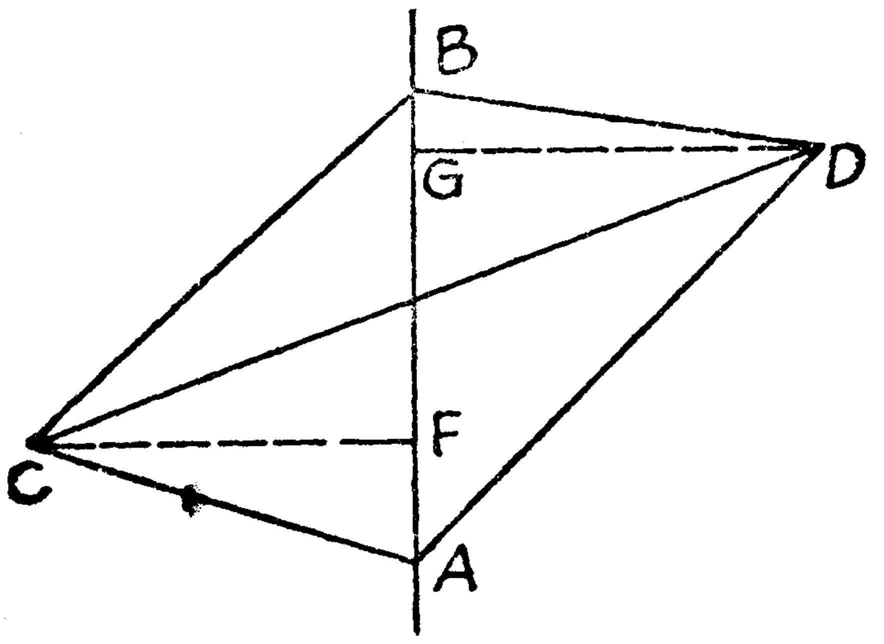


Fig. 14

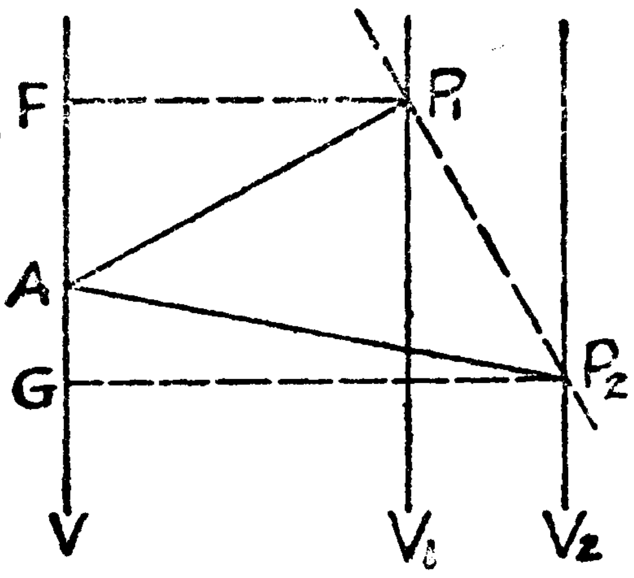


Fig. 15

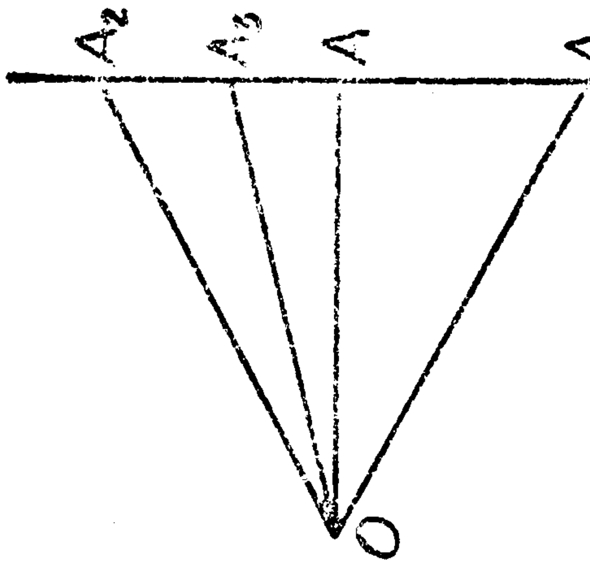


Fig.19

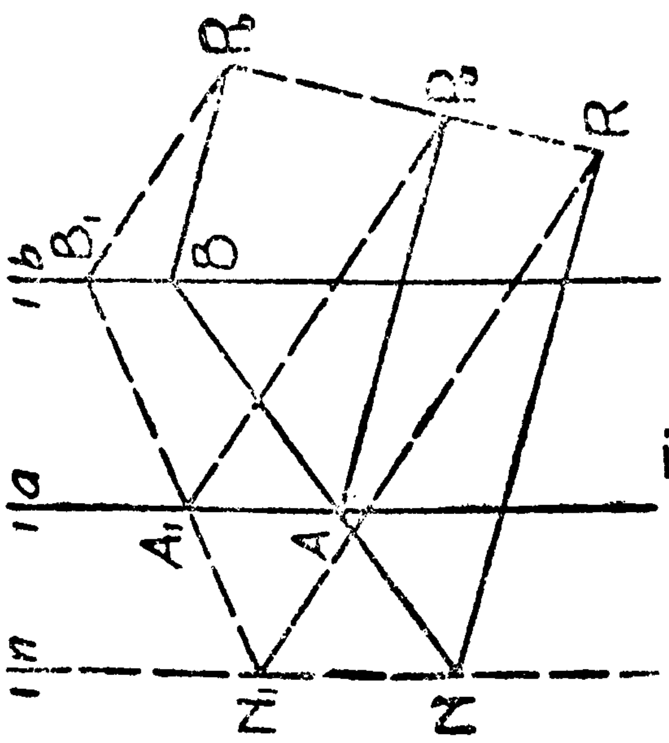


Fig.16

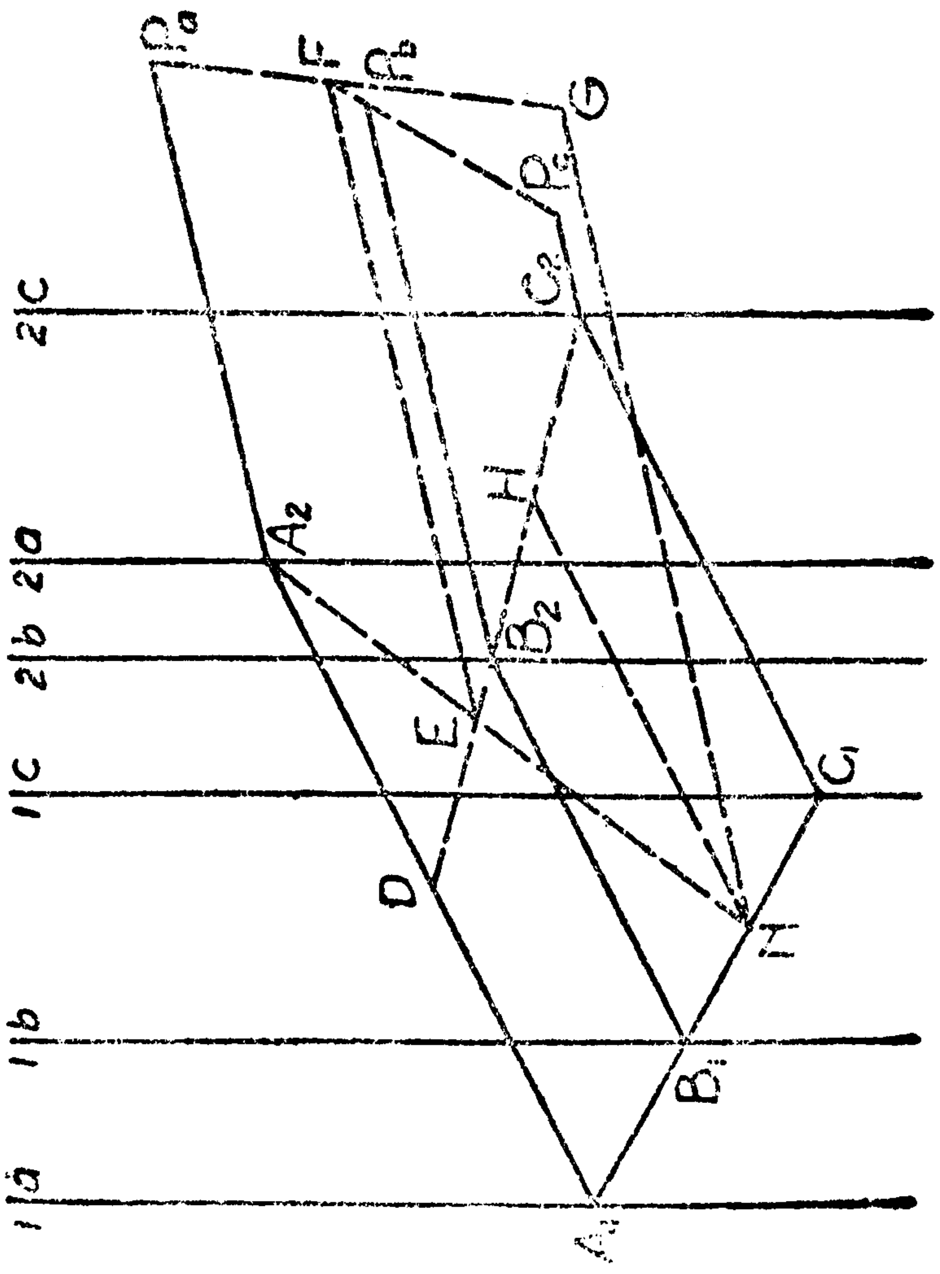


Fig.17

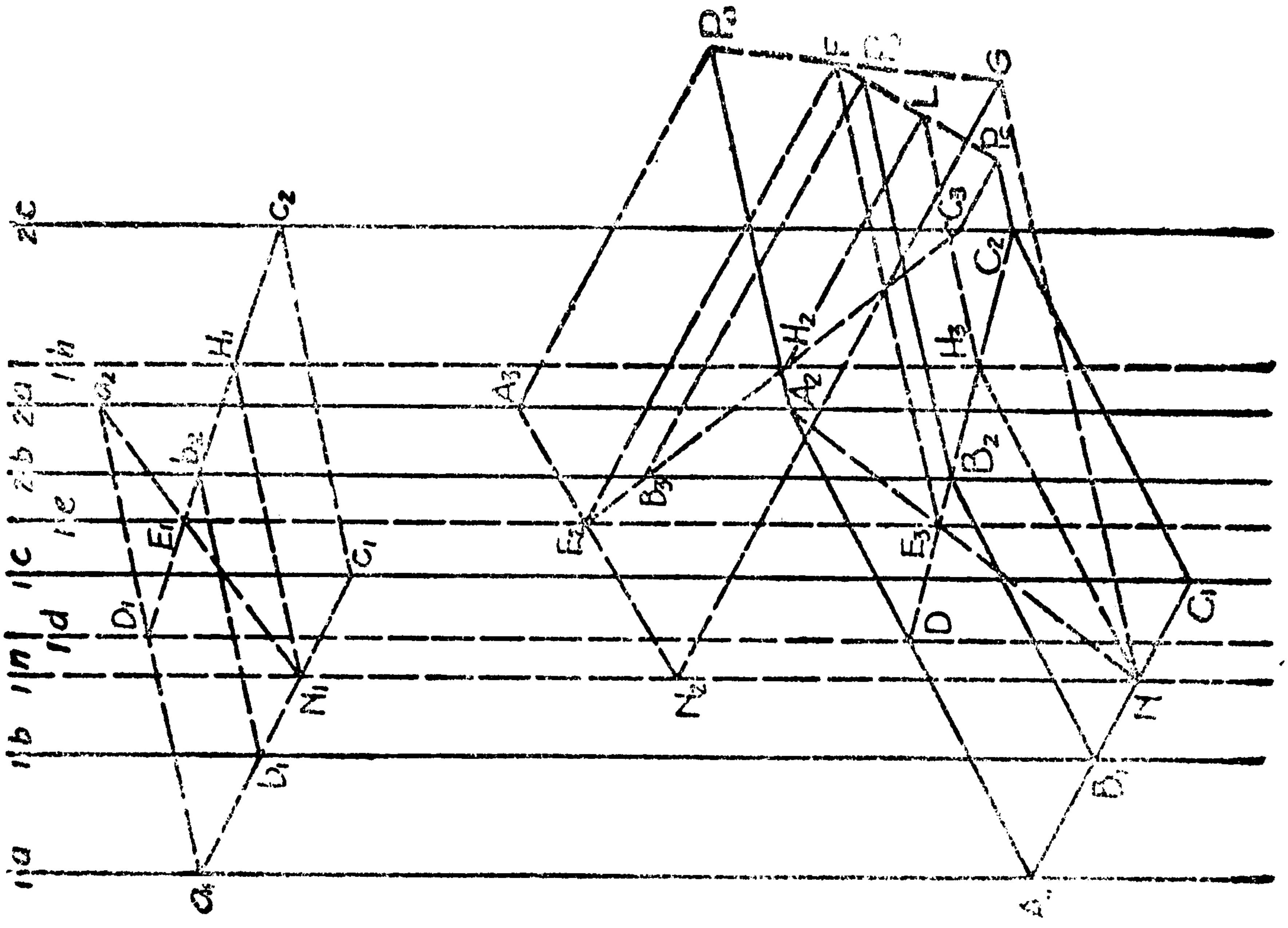
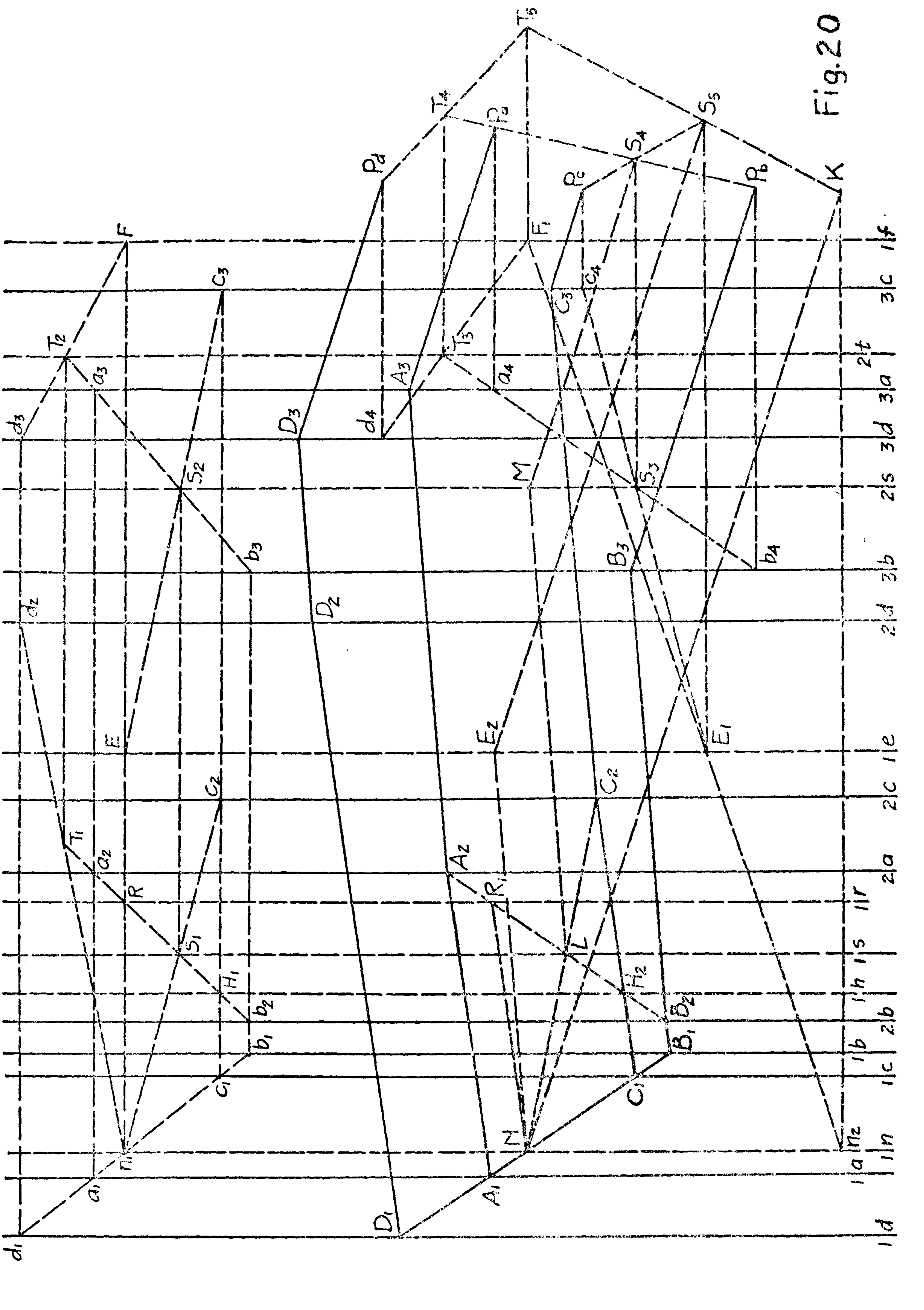


Fig.18



F
C3
T2
a3
d3
S2
b3
d2
E
C2
T1
a2
R
S1
H1
b2
b1
c1
n1
a1
d1
D3
D2
D1
Pd
Pa
T4
T5
S5
S4
Pc
Pb
K
F1
C3
C4
T3
A3
a4
d4
M
S3
B3
b4
E2
E1
C2
A2
R1
L
H2
D2
B1
C1
N
A1
n2
1f
3c
2t
3a
3d
2s
3b
2d
1e
2c
2a
1r
1s
1h
2b
1b
1c
1n
1a
1d

Fig.20

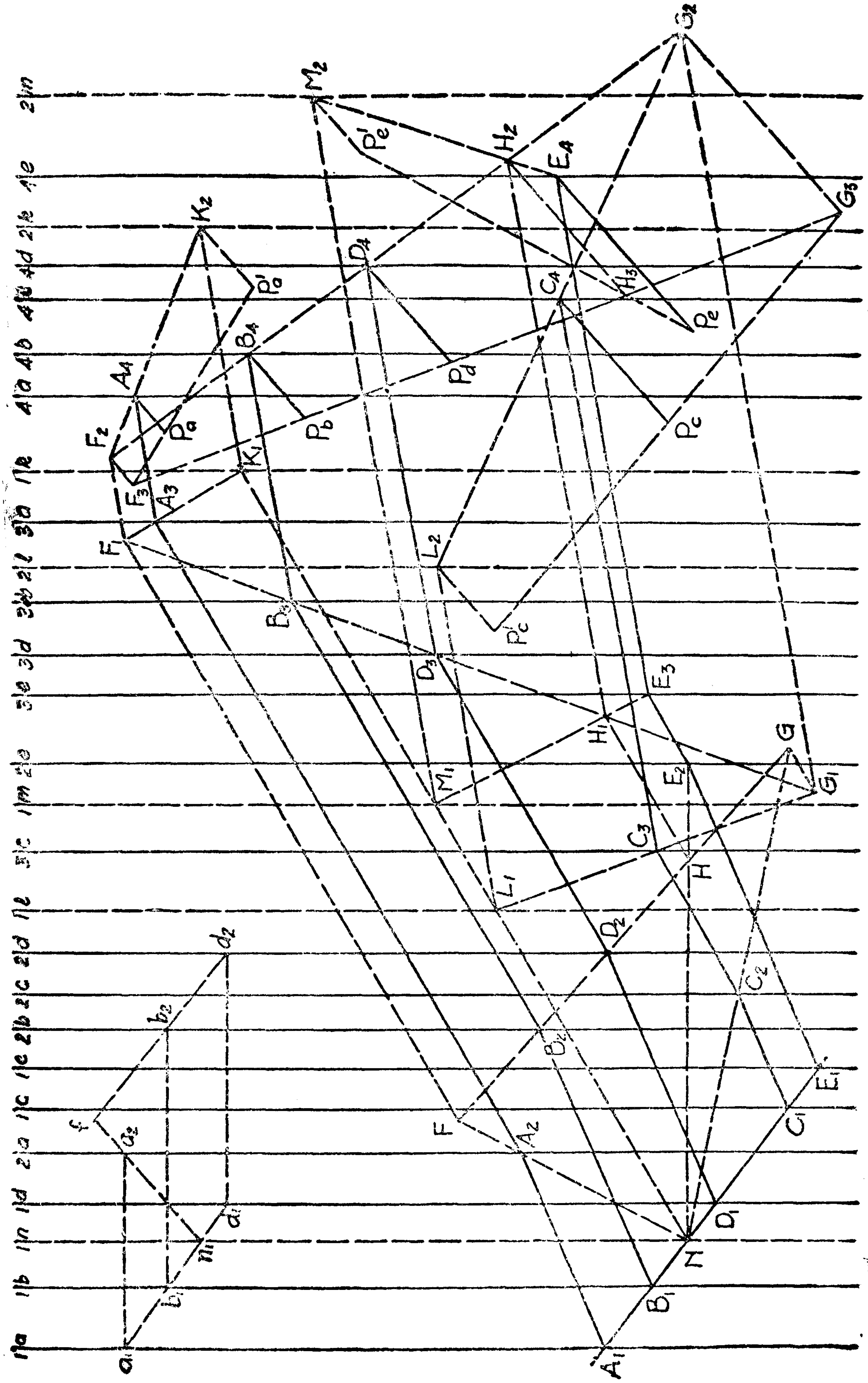


Fig. 21

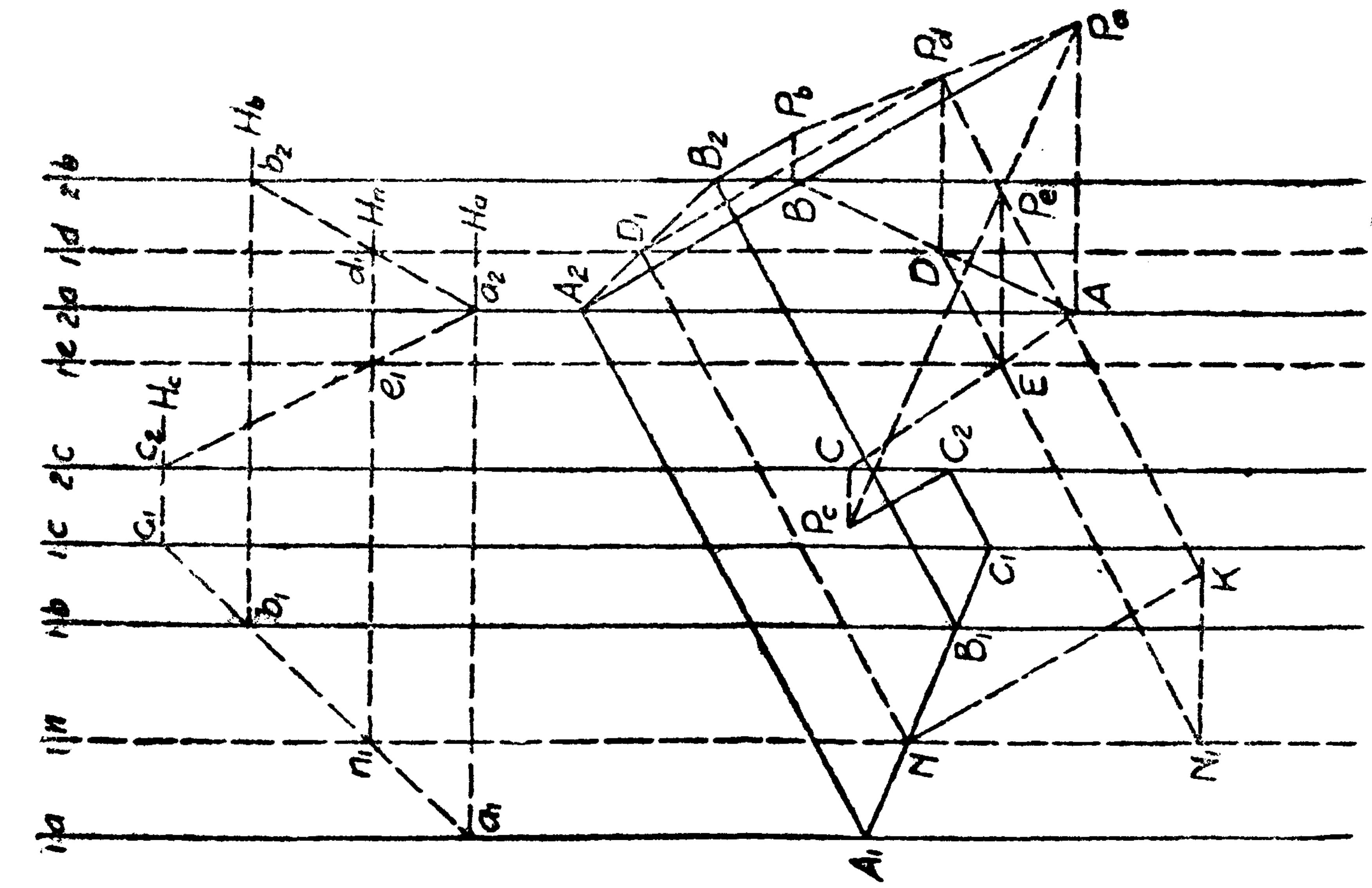


Fig 22

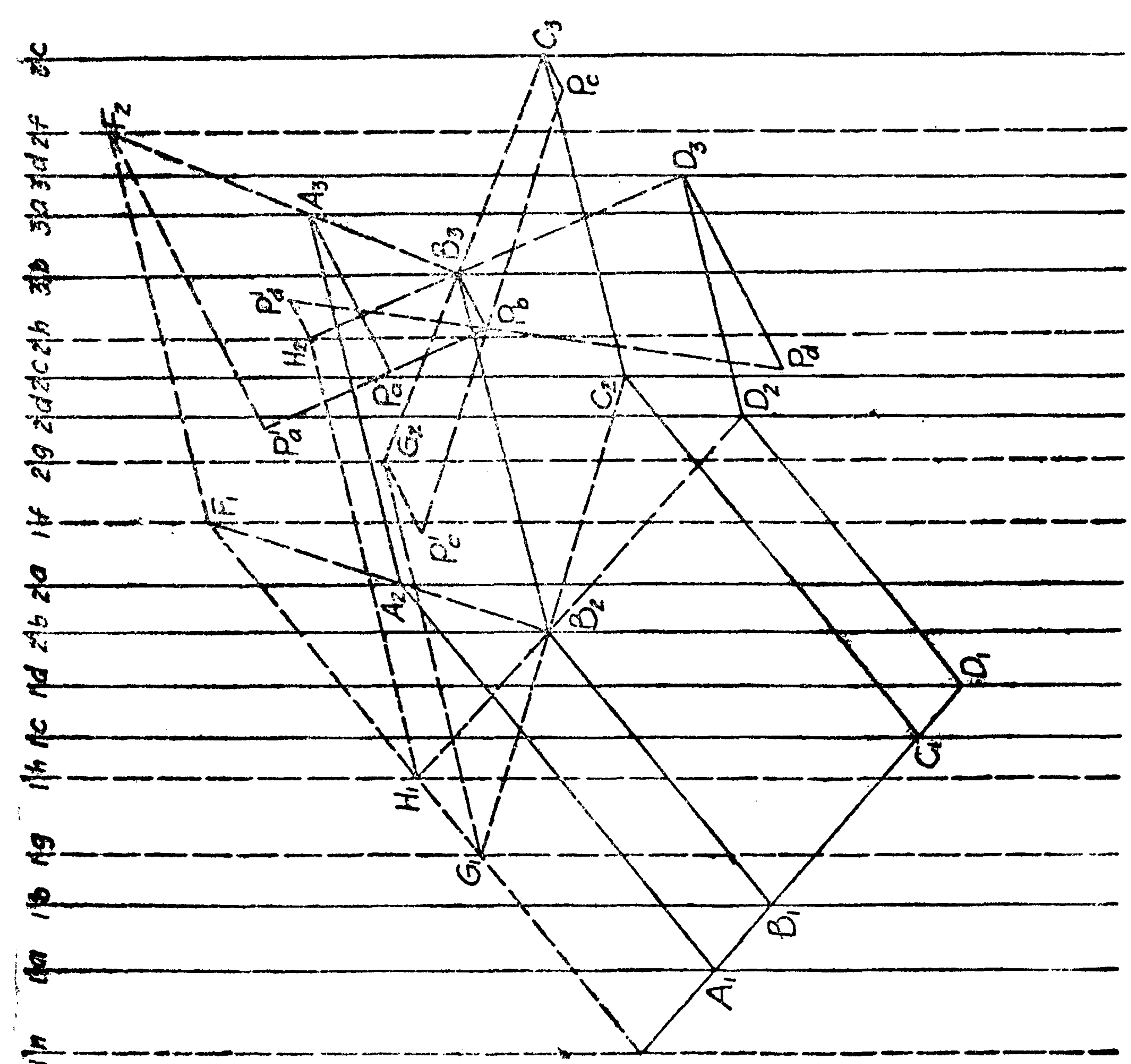


Fig 23

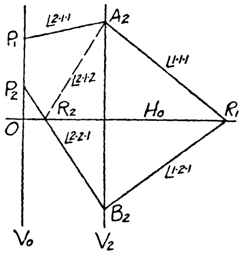


Fig. 24

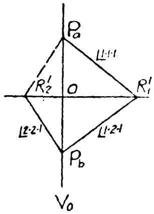


Fig. 25

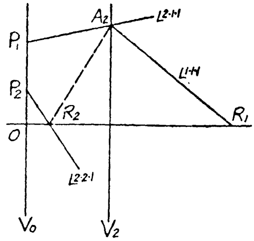


Fig. 26

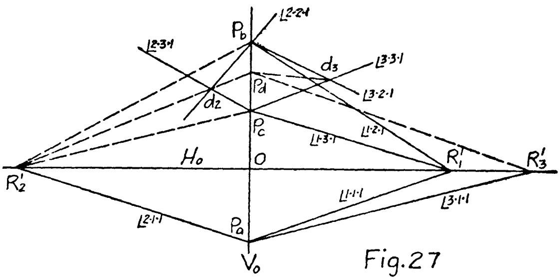


Fig. 27

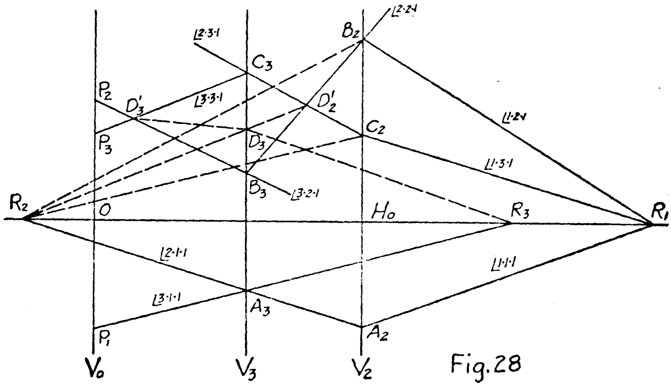


Fig. 28

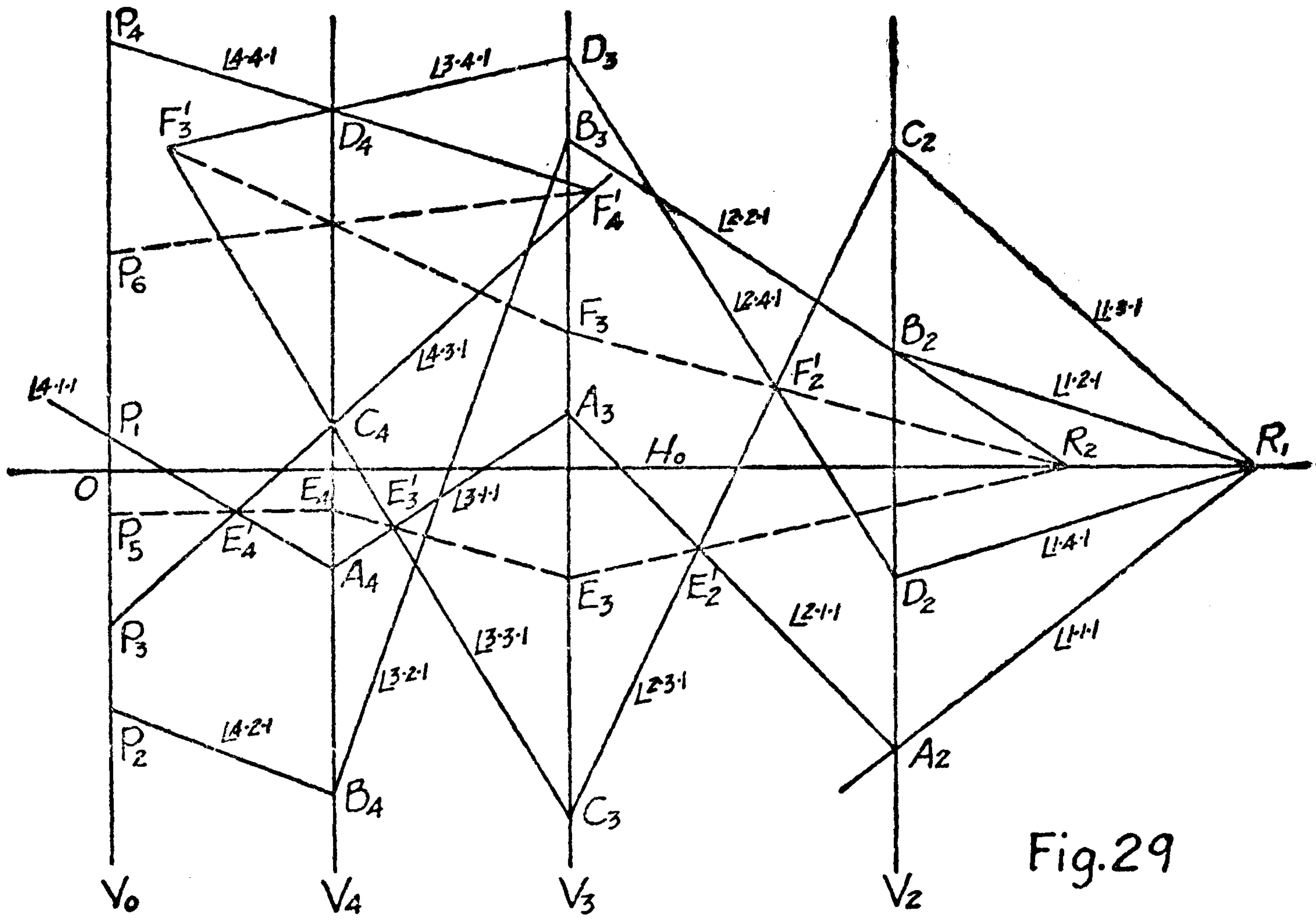

P4
L4·4·1
L3·4·1
D3
F3'
D4
B3
C2
F4'
L2·2·1
P6
F3
L2·4·1
L1·3·1
B2
L4·3·1
F2'
L1·2·1
L4·1·1
P1
C4
A3
R2
R1
H0
O
E1
E3'
L3·1·1
P5
E4'
A4
E3
E2'
L1·4·1
D2
L2·1·1
P3
L3·3·1
L1·1·1
L3·2·1
L2·3·1
L4·2·1
P2
A2
B4
C3
V0
V4
V3
V2

Fig.29

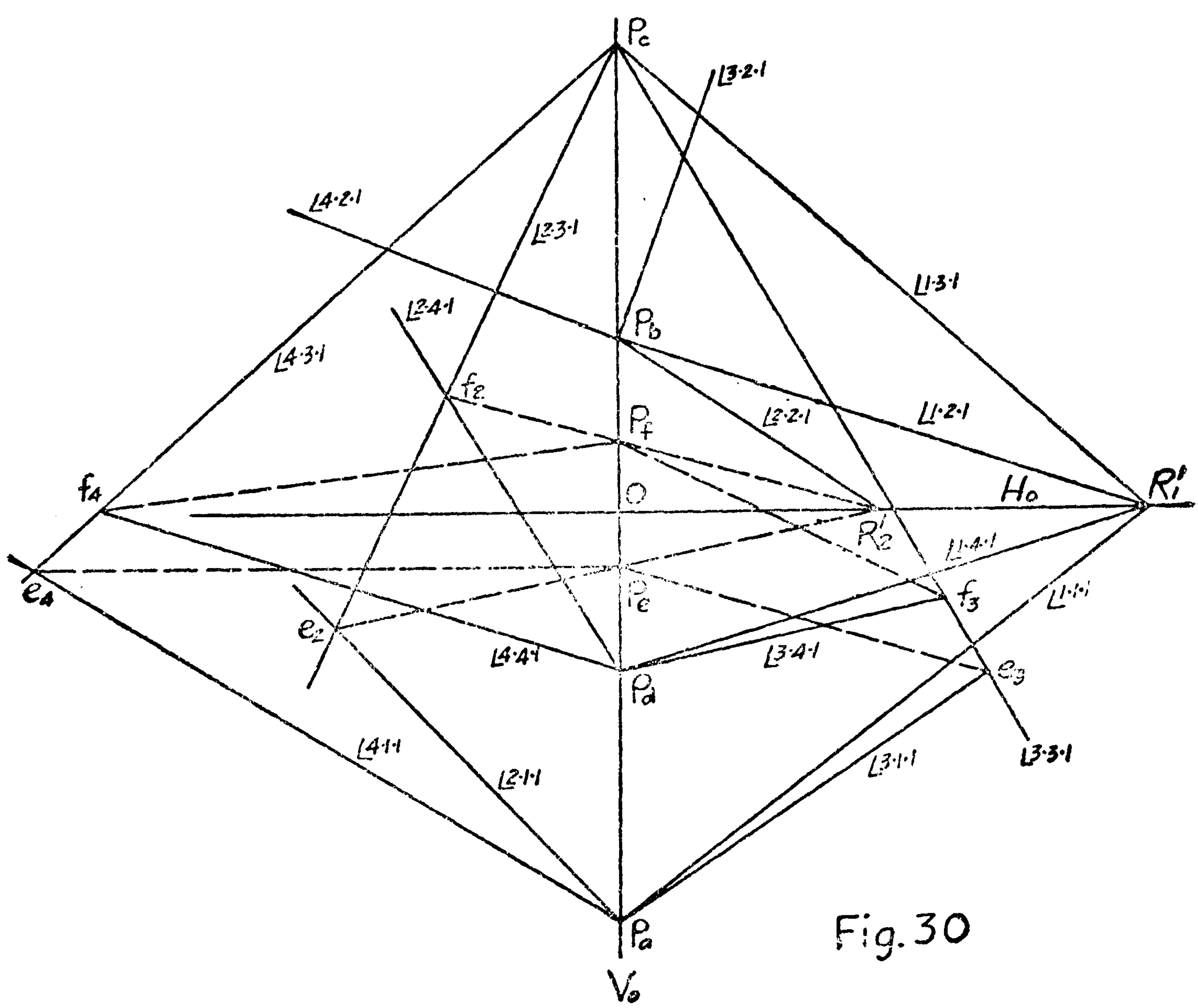

Pc
L3·2·1
L4·2·1
L2·3·1
L1·3·1
L2·4·1
Pb
L4·3·1
f2
L2·2·1
L1·2·1
Pf
f4
O
H0
R1'
R2'
L1·4·1
e4
Pe
f3
L1·1·1
e2
L4·4·1
L3·4·1
e3
Pd
L3·3·1
L4·1·1
L2·1·1
L3·1·1
Pa
V0

Fig.30

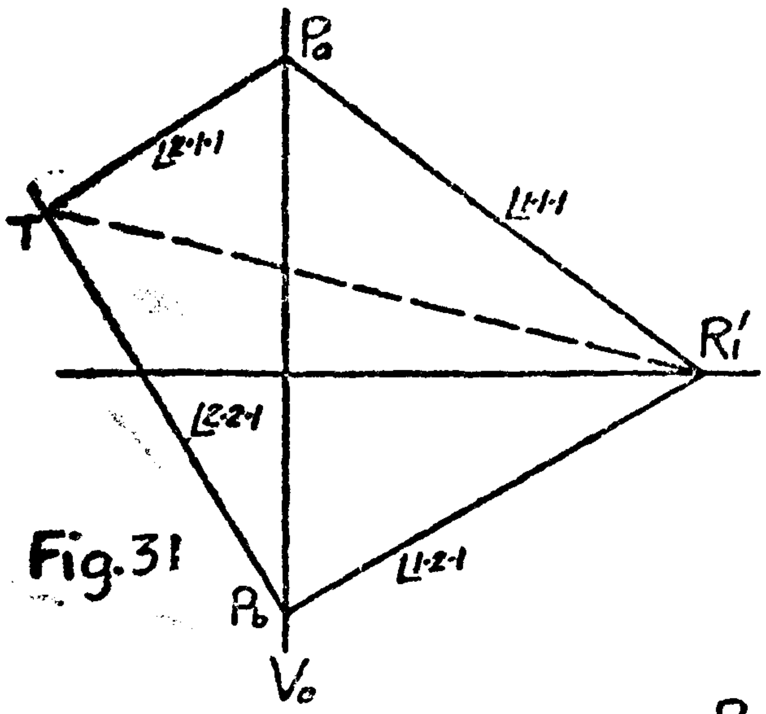


Fig.31

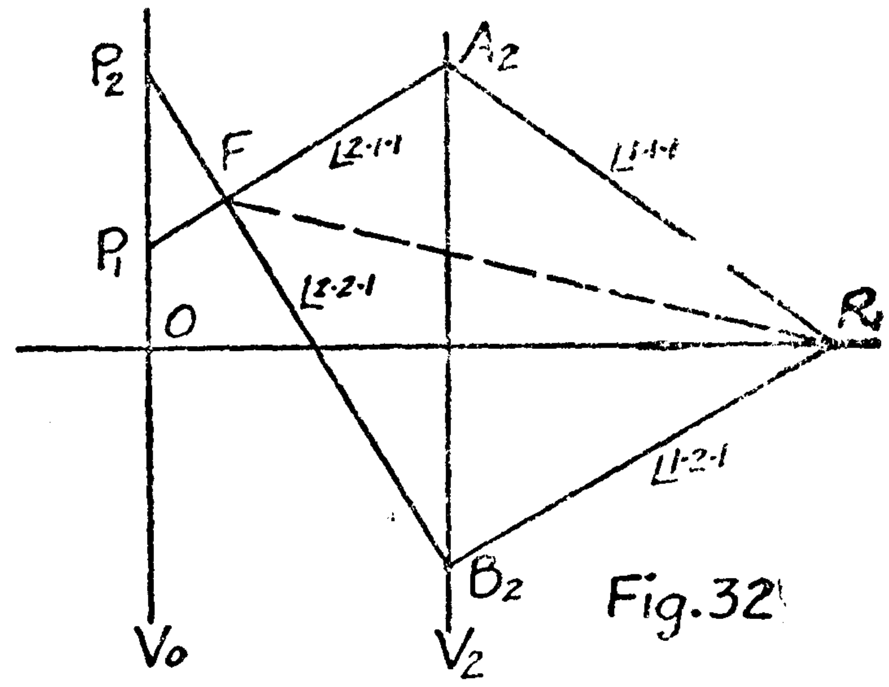


Fig.32

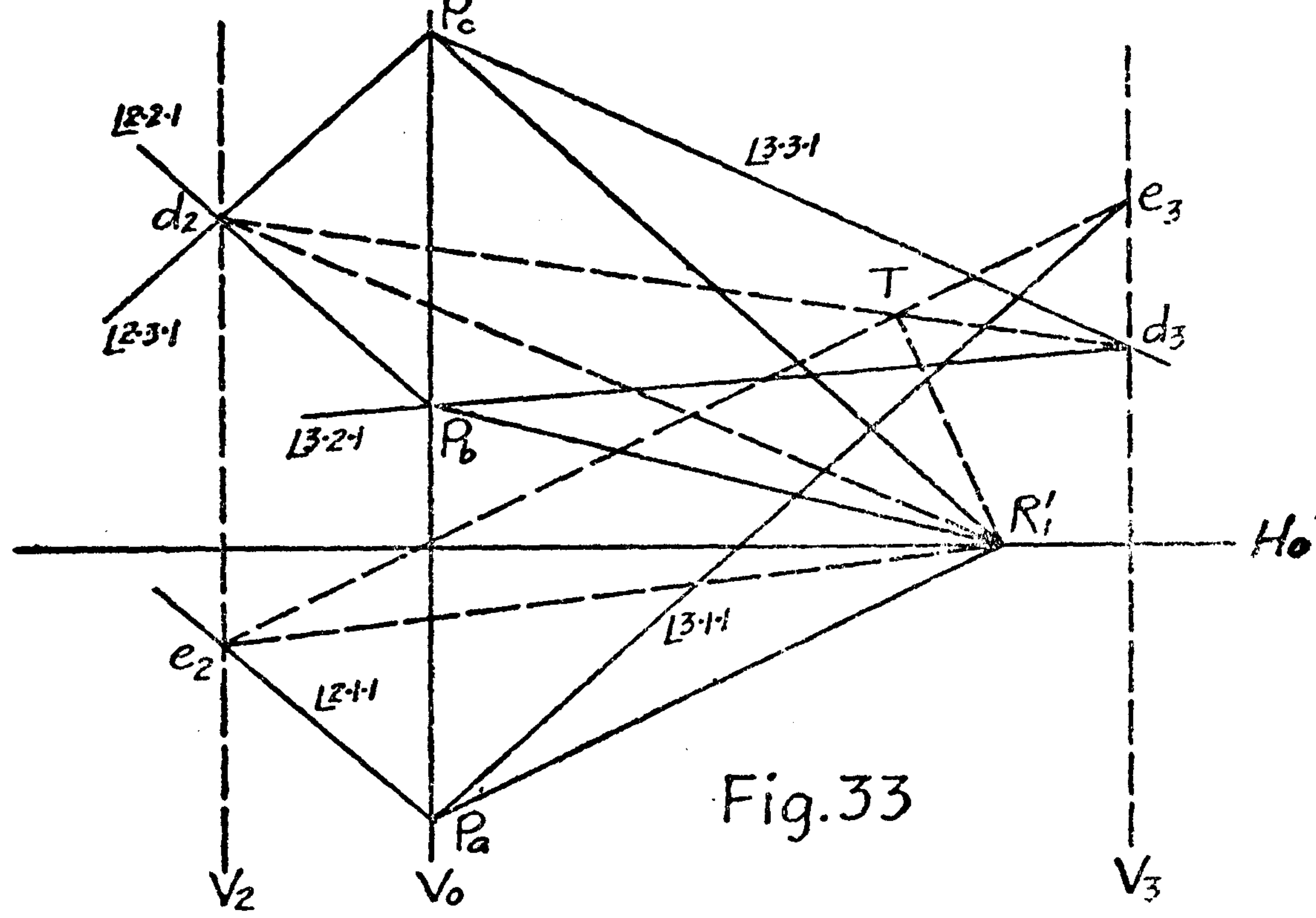


Fig.33

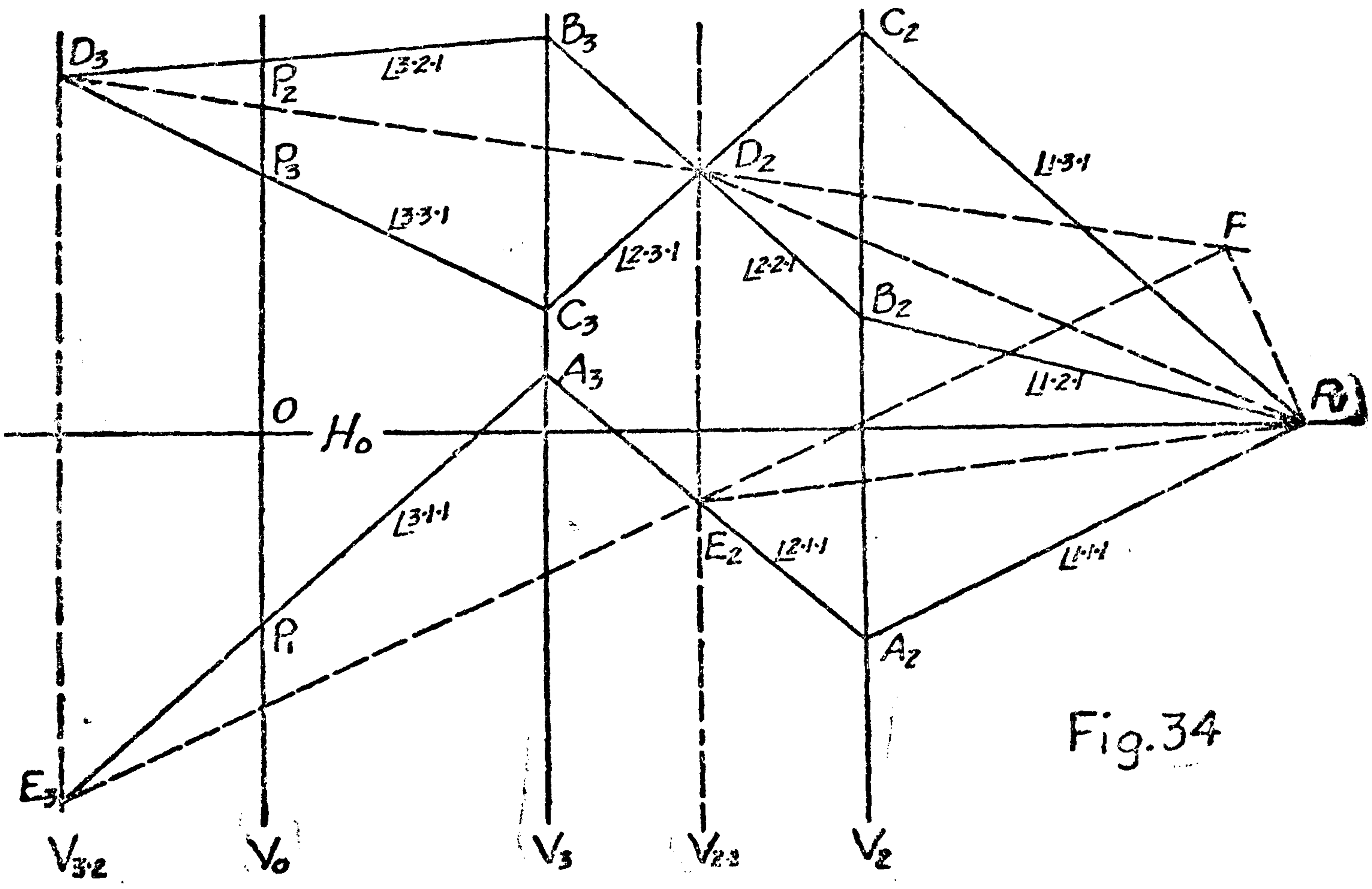


Fig.34

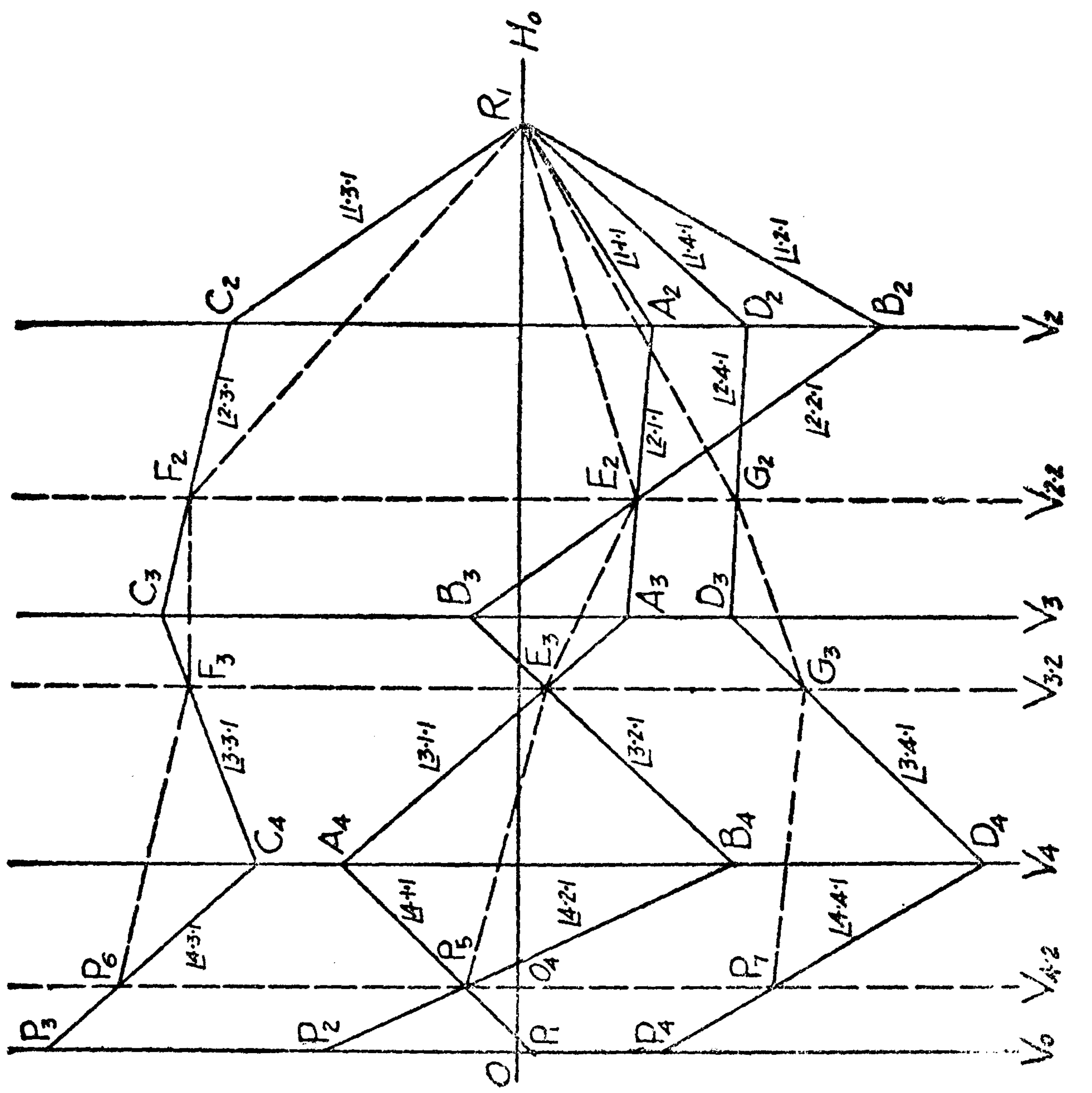


Fig 35

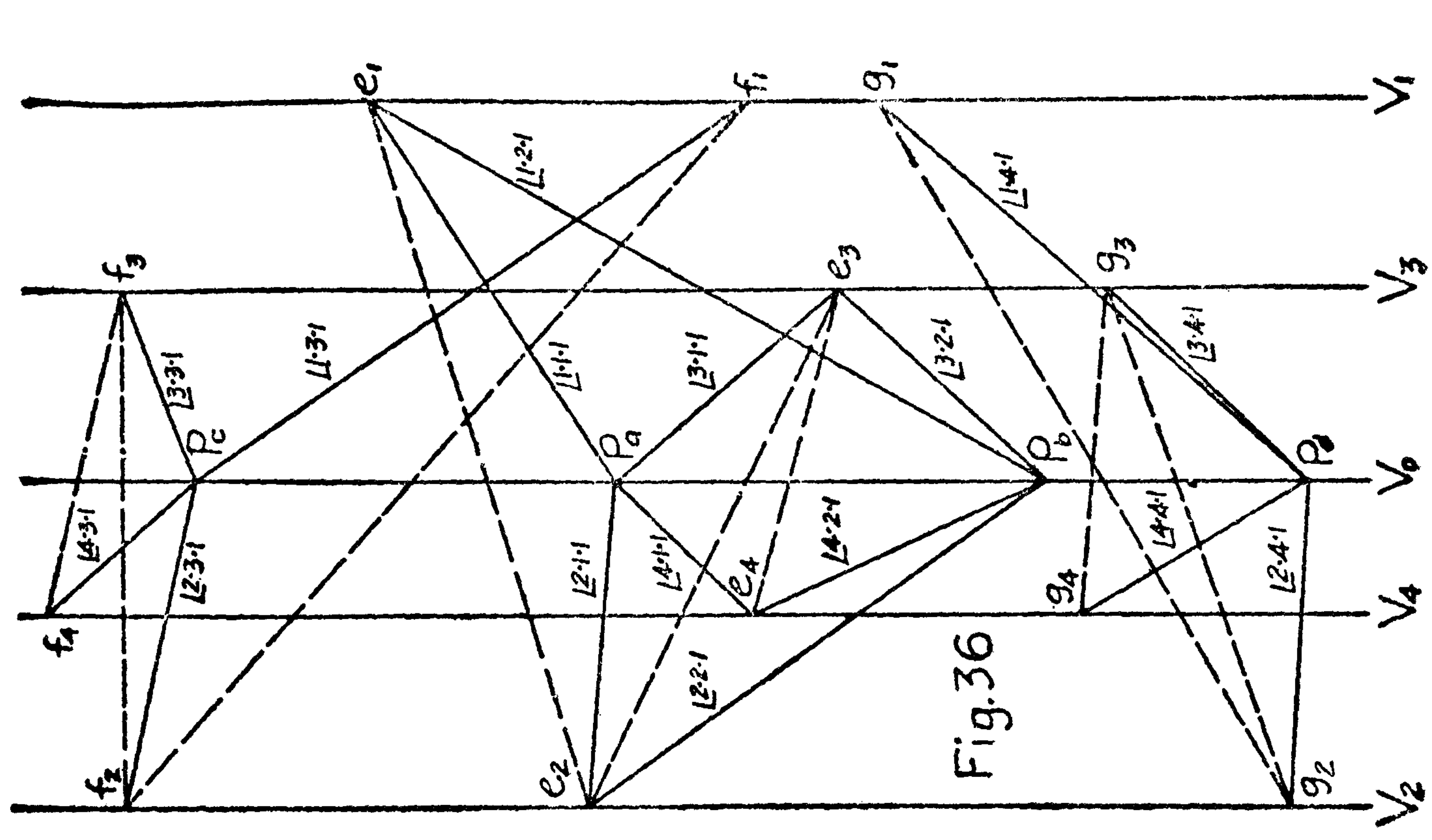


Fig.36

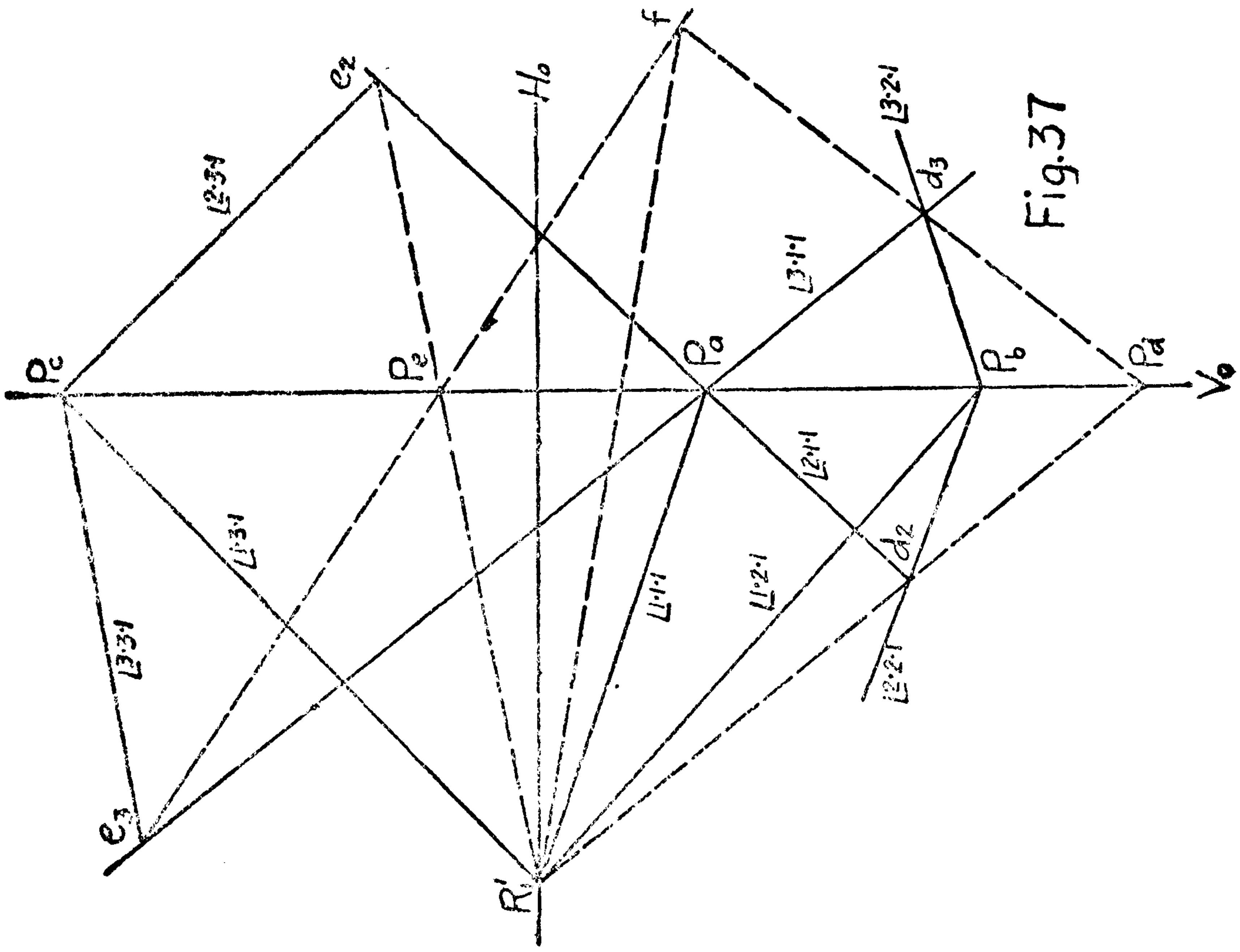


Fig.37

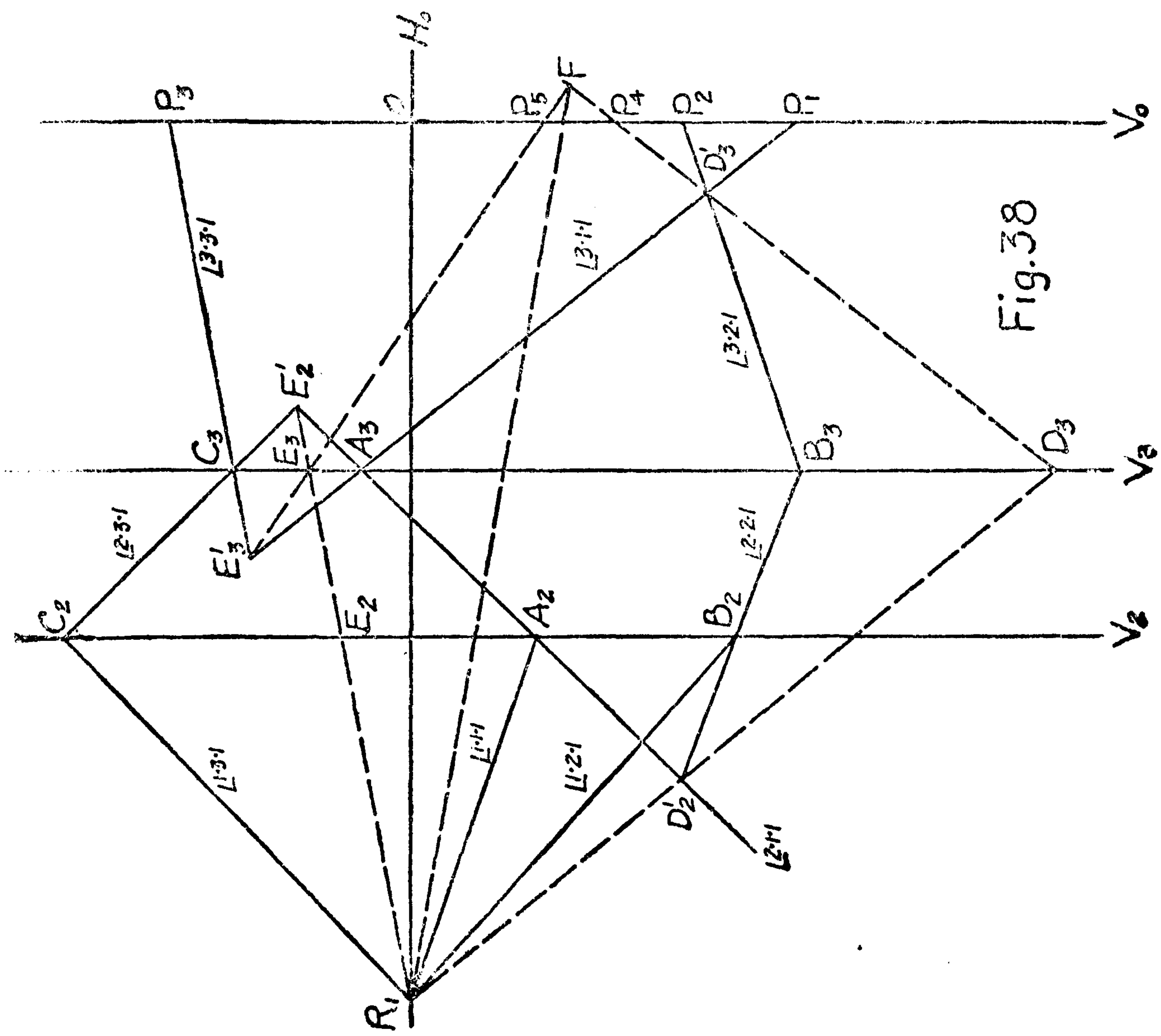


Fig.38

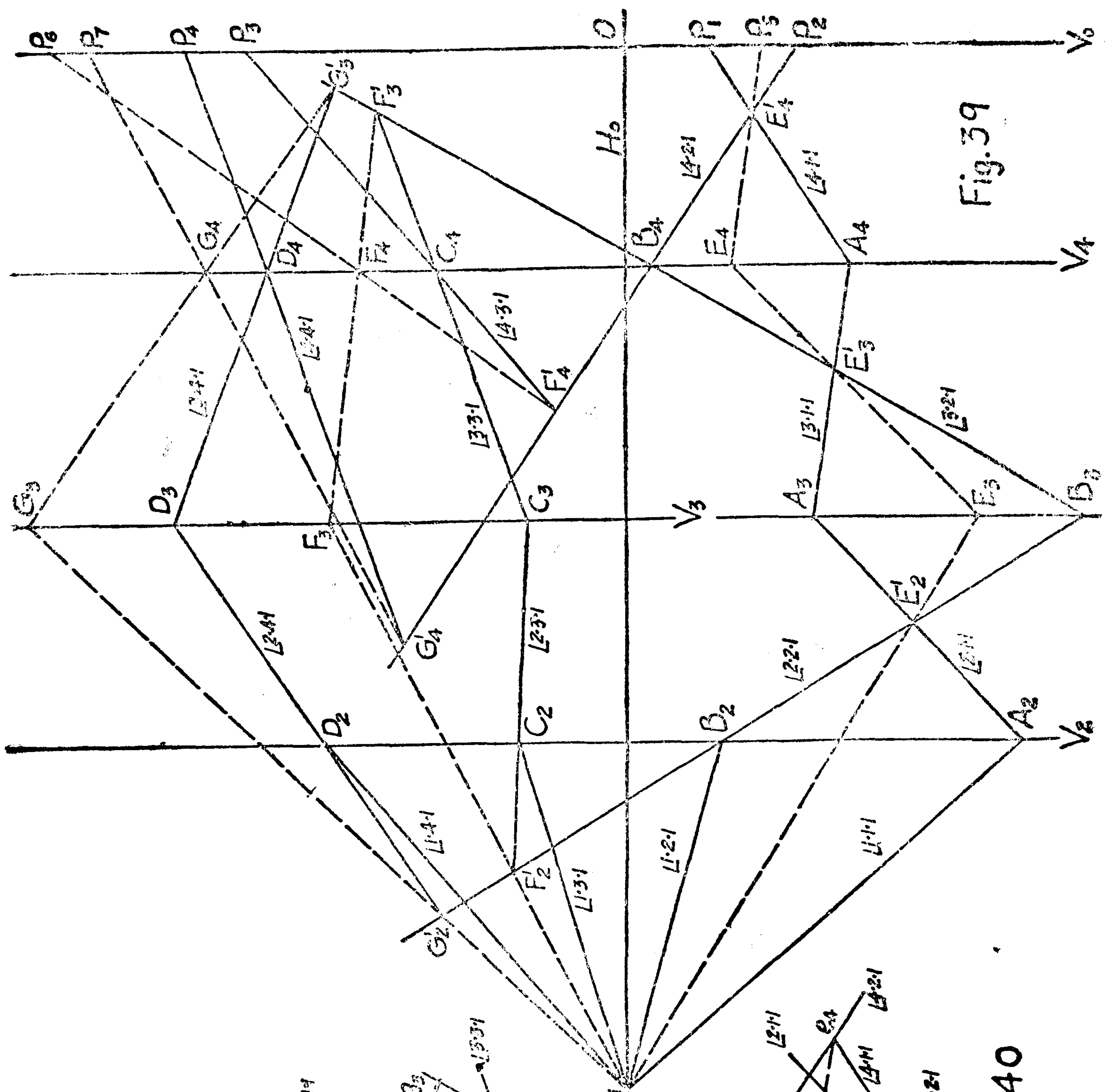


Fig. 39

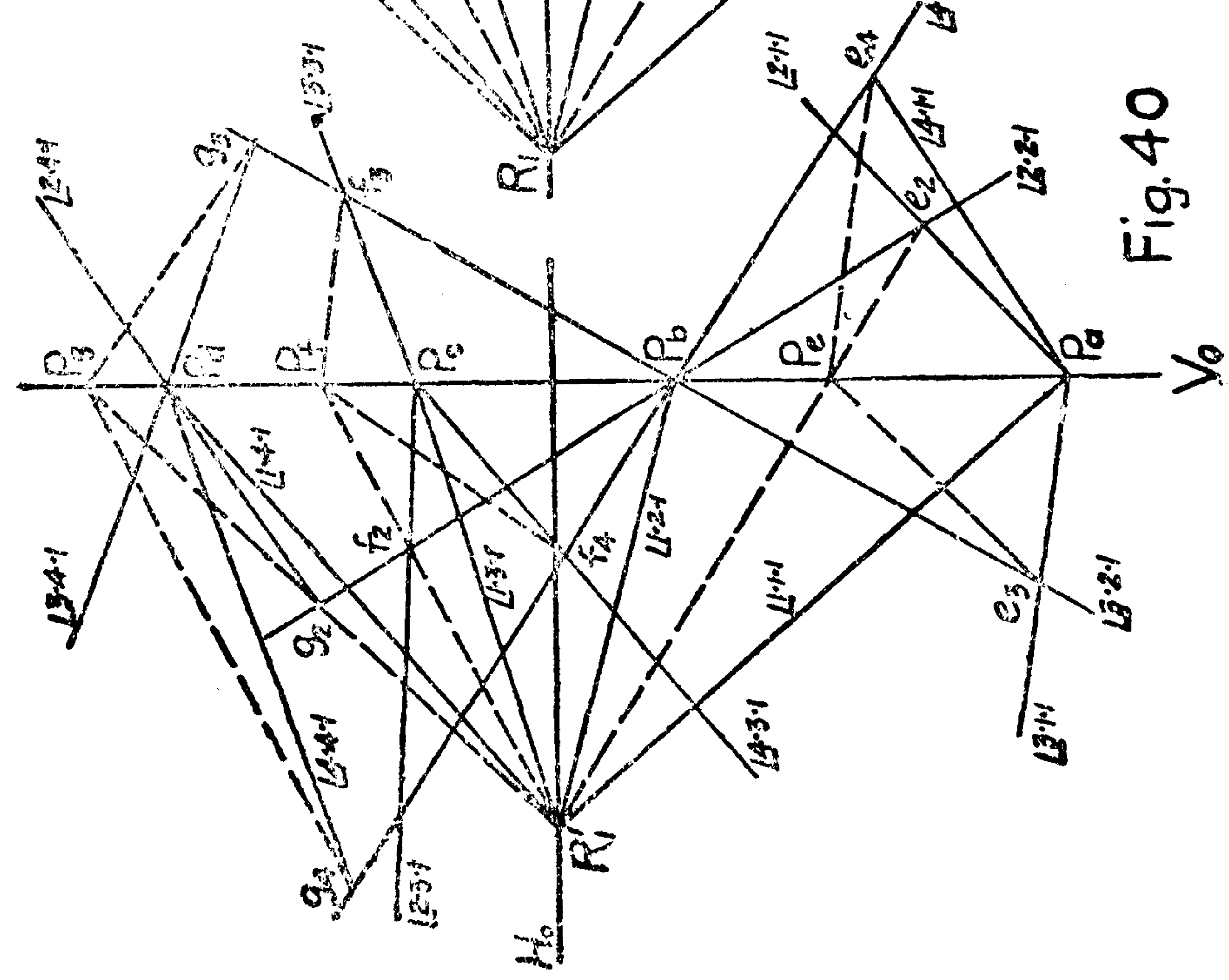


Fig. 40

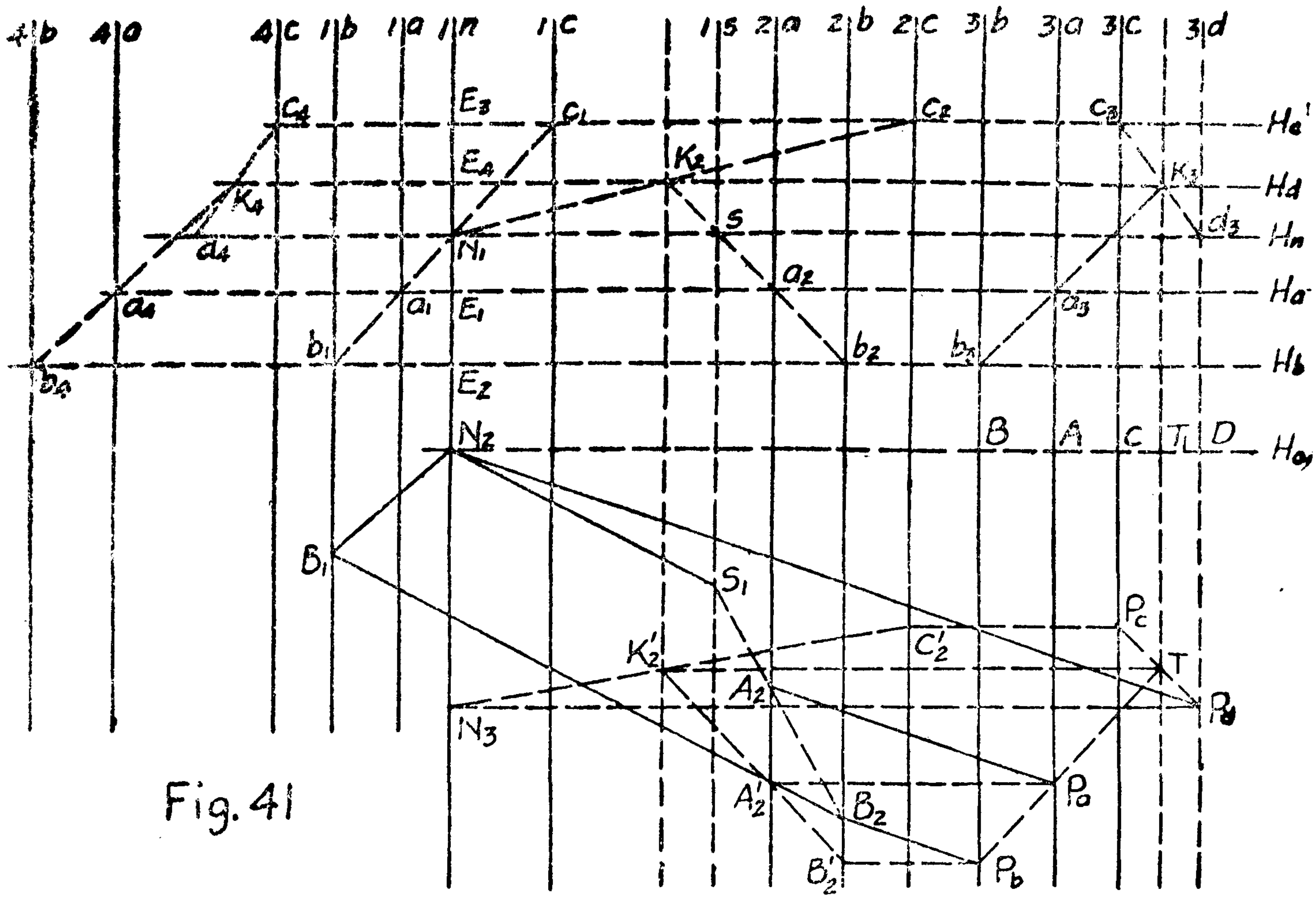


Fig. 41

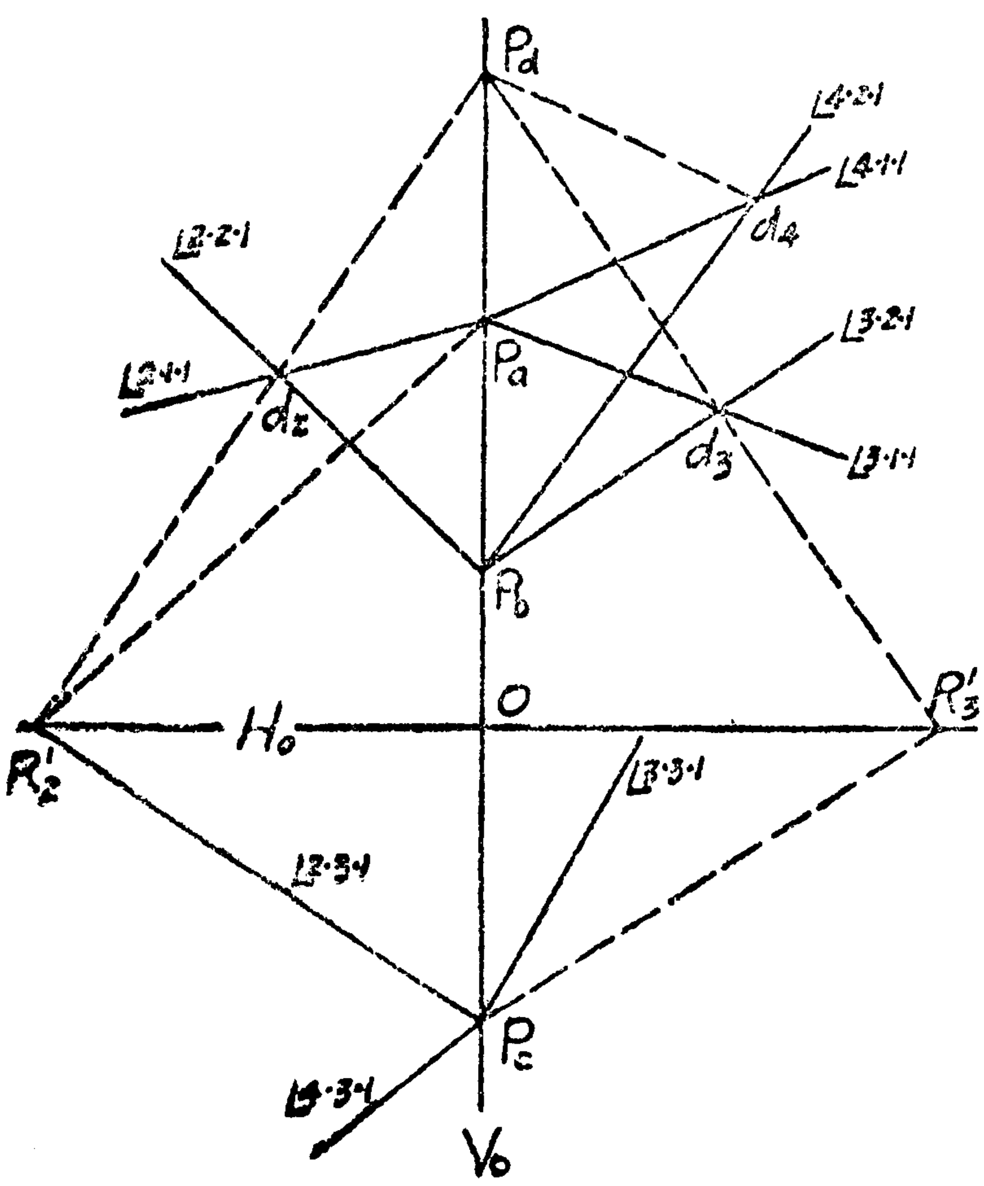


Fig. 42

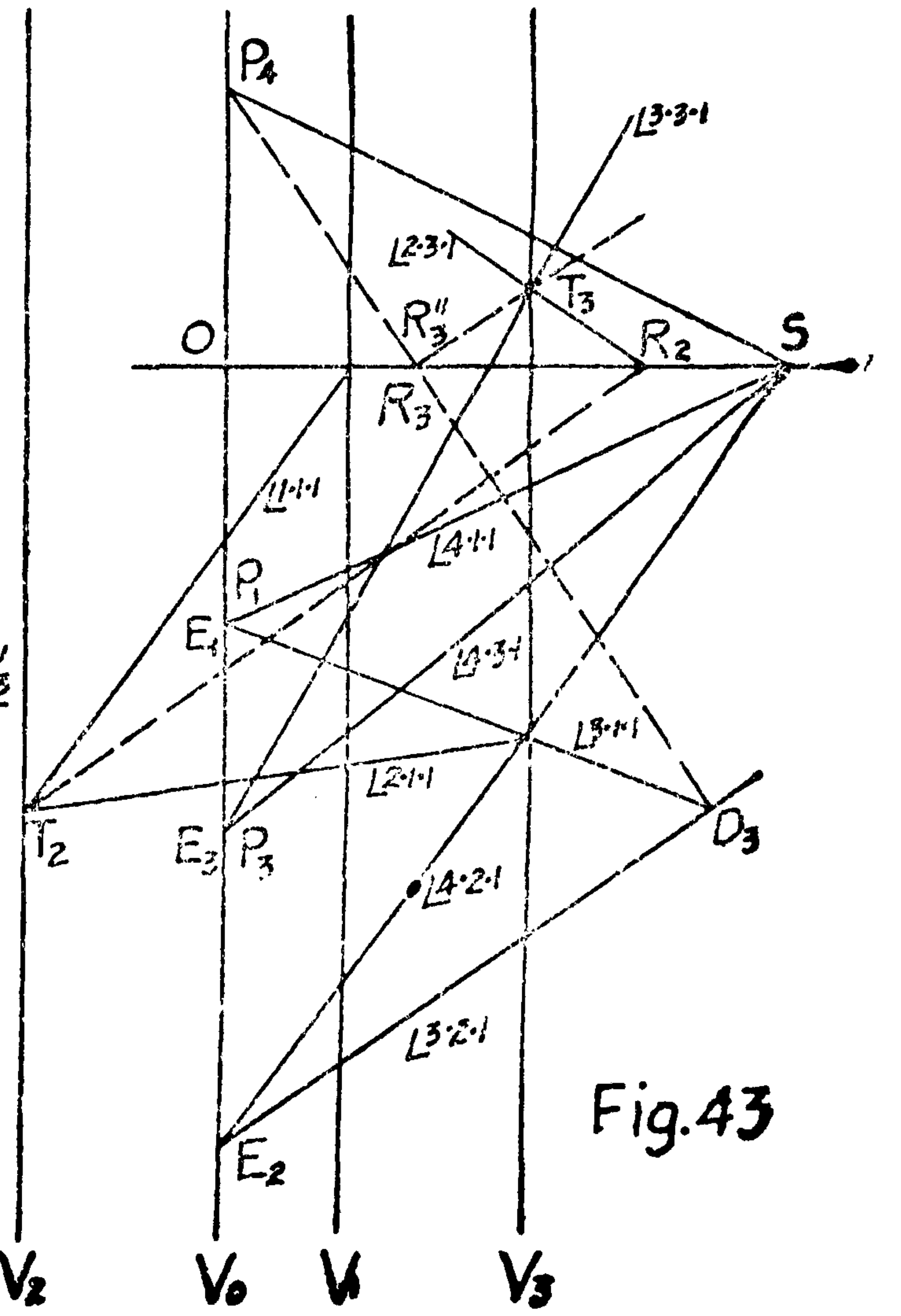


Fig. 43

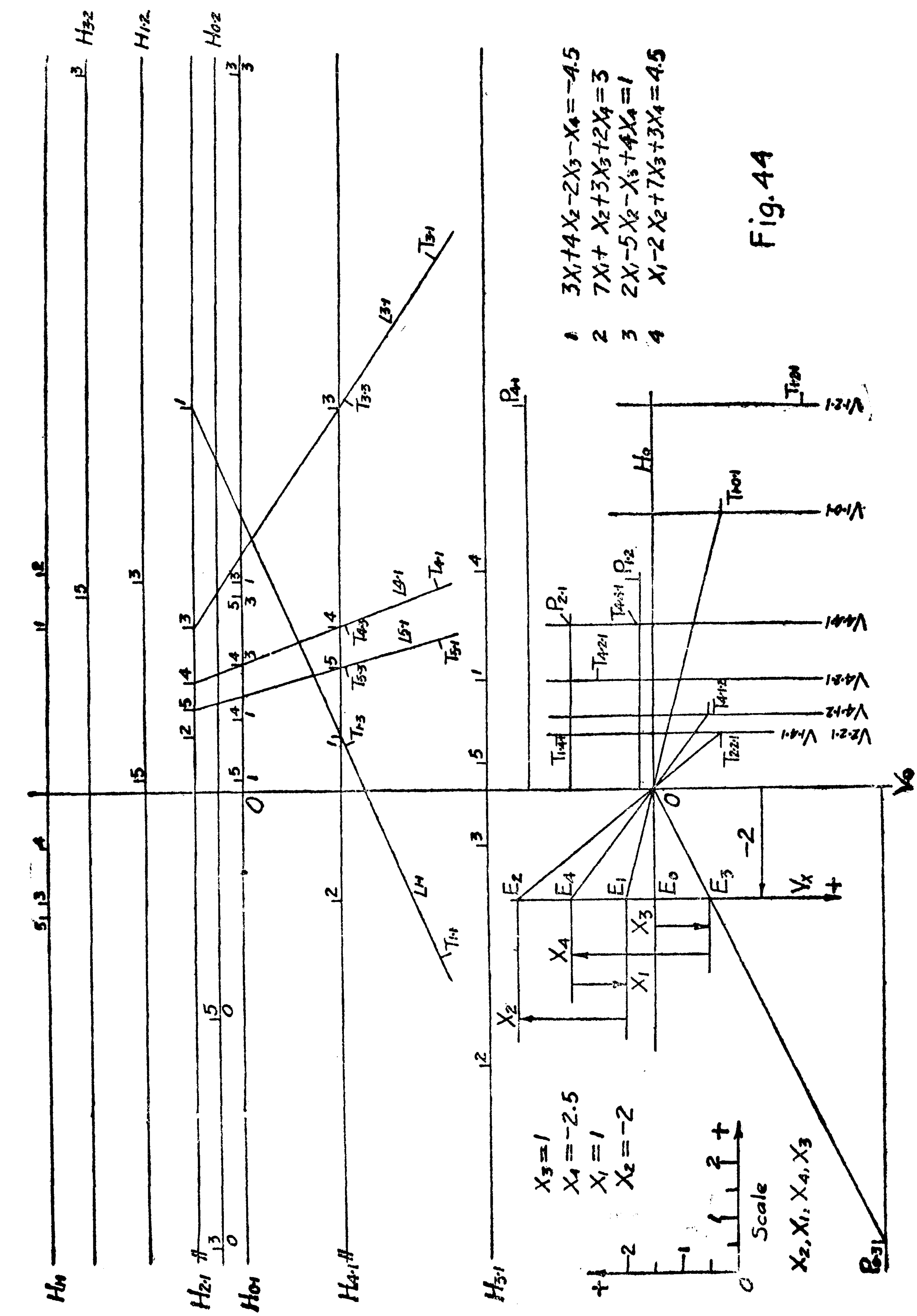

1 3X1+4X2-2X3-X4=-4.5
2 7X1+X2+3X3+2X4=3
3 2X1-5X2-X3+4X4=1
4 X1-2X2+7X3+3X4=4.5
X3=1
X4=-2.5
X1=1
X2=-2
Scale
X2, X1, X4, X3

Fig. 44

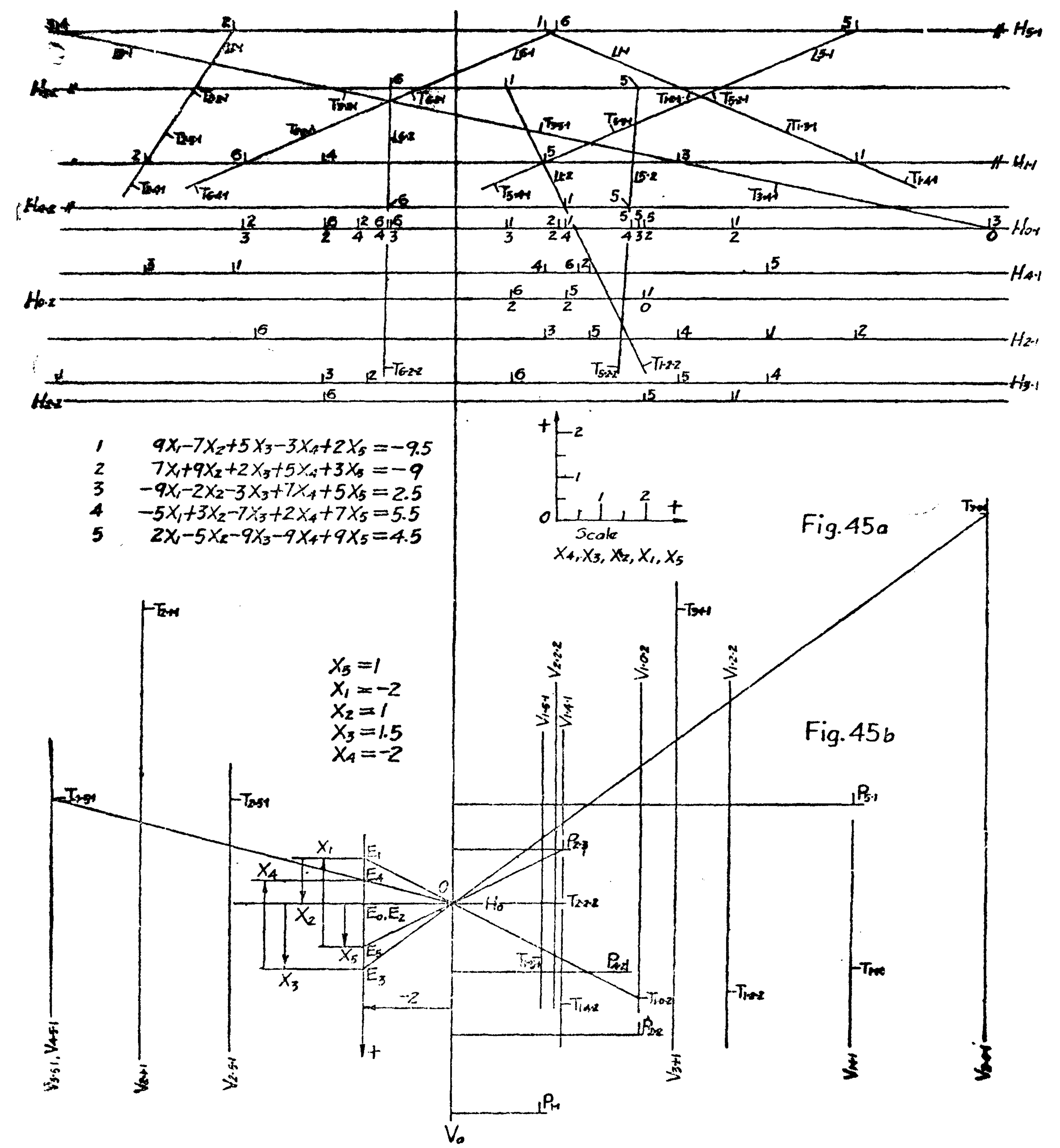


Fig. 45a

Fig. 45b

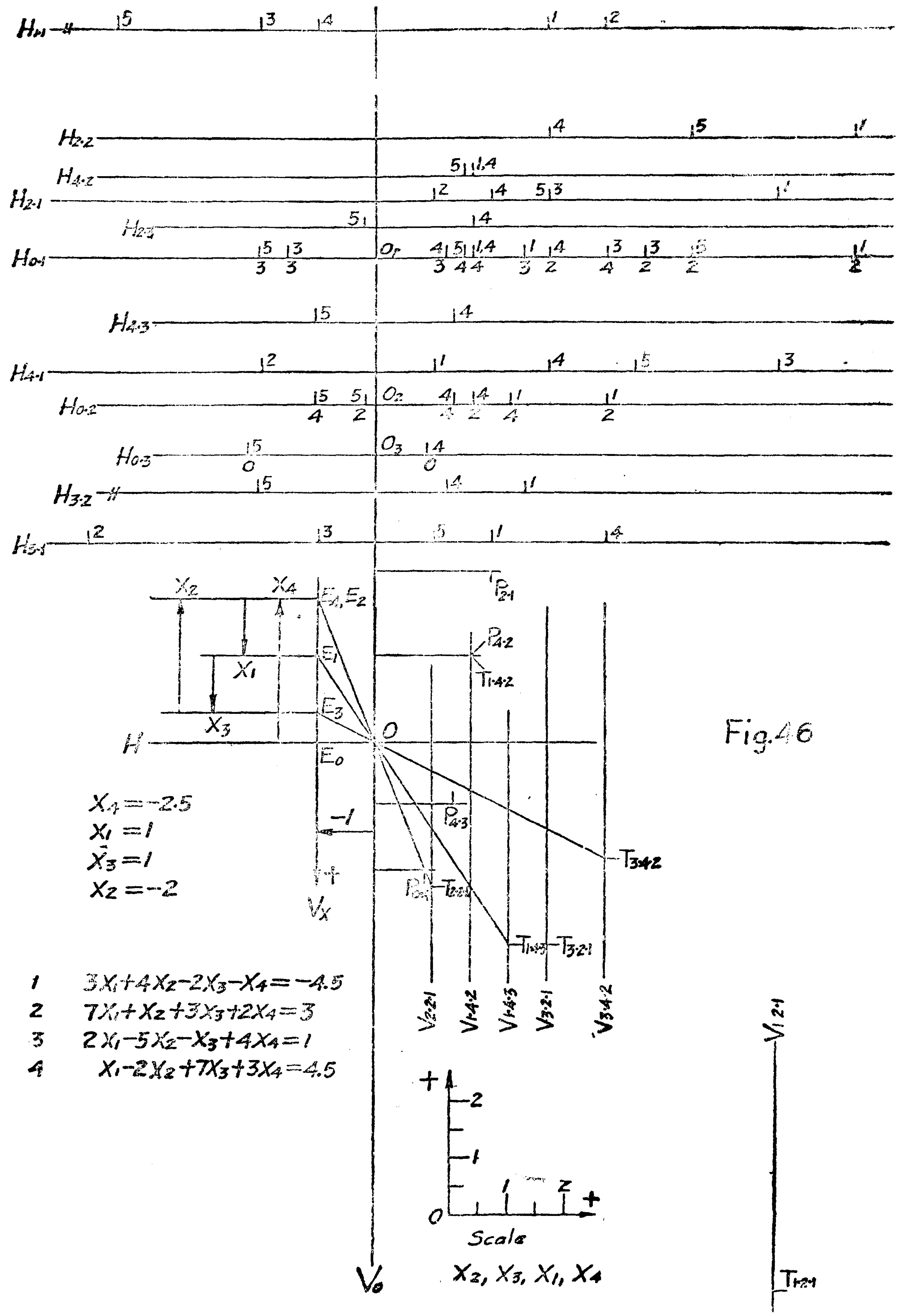

$X_4 = -2.5$
$X_1 = 1$
$X_3 = 1$
$X_2 = -2$
1　$3X_1+4X_2-2X_3-X_4=-4.5$
2　$7X_1+X_2+3X_3+2X_4=3$
3　$2X_1-5X_2-X_3+4X_4=1$
4　$X_1-2X_2+7X_3+3X_4=4.5$
Scale
X_2, X_3, X_1, X_4

Fig.46

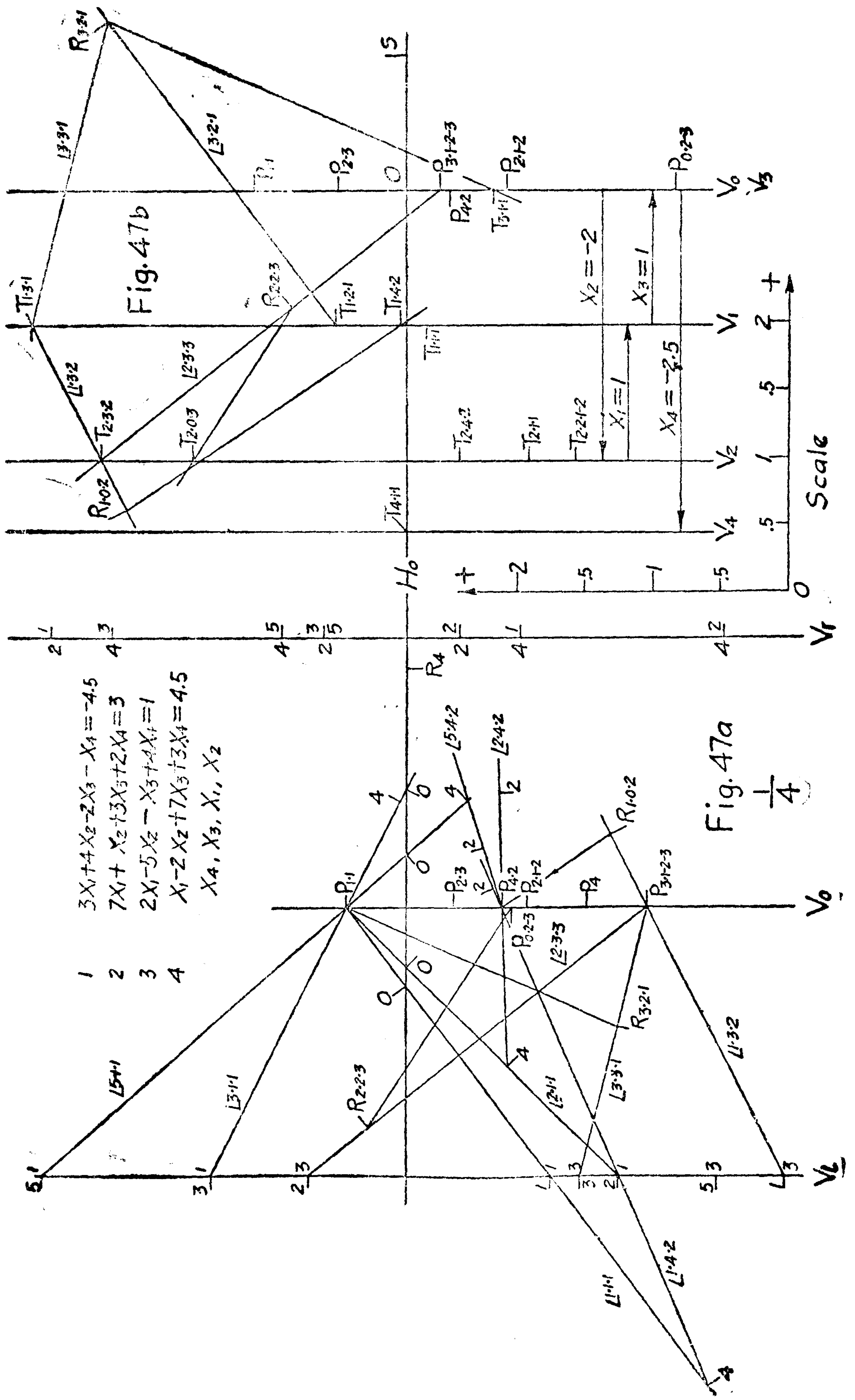


Fig. 47a
Fig. 47b
1 $3X_1+4X_2-2X_3-X_4=-4.5$
2 $7X_1+X_2+3X_3+2X_4=3$
3 $2X_1-5X_2-X_3+4X_4=1$
4 $X_1-2X_2+7X_3+3X_4=4.5$
X_4, X_3, X_1, X_2
$X_1=1$
$X_2=-2$
$X_3=1$
$X_4=-2.5$
Scale

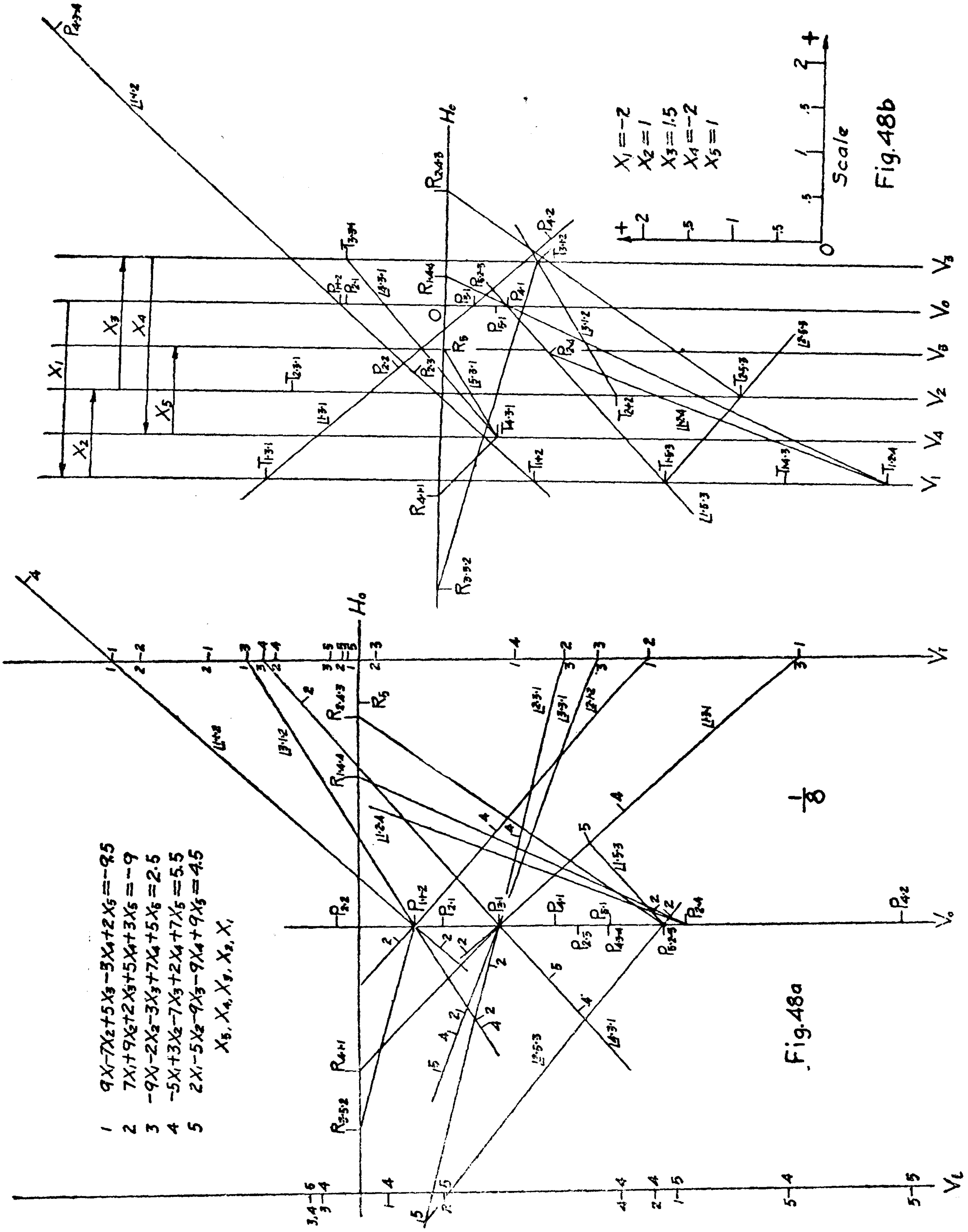


Fig. 48a

Fig. 48b

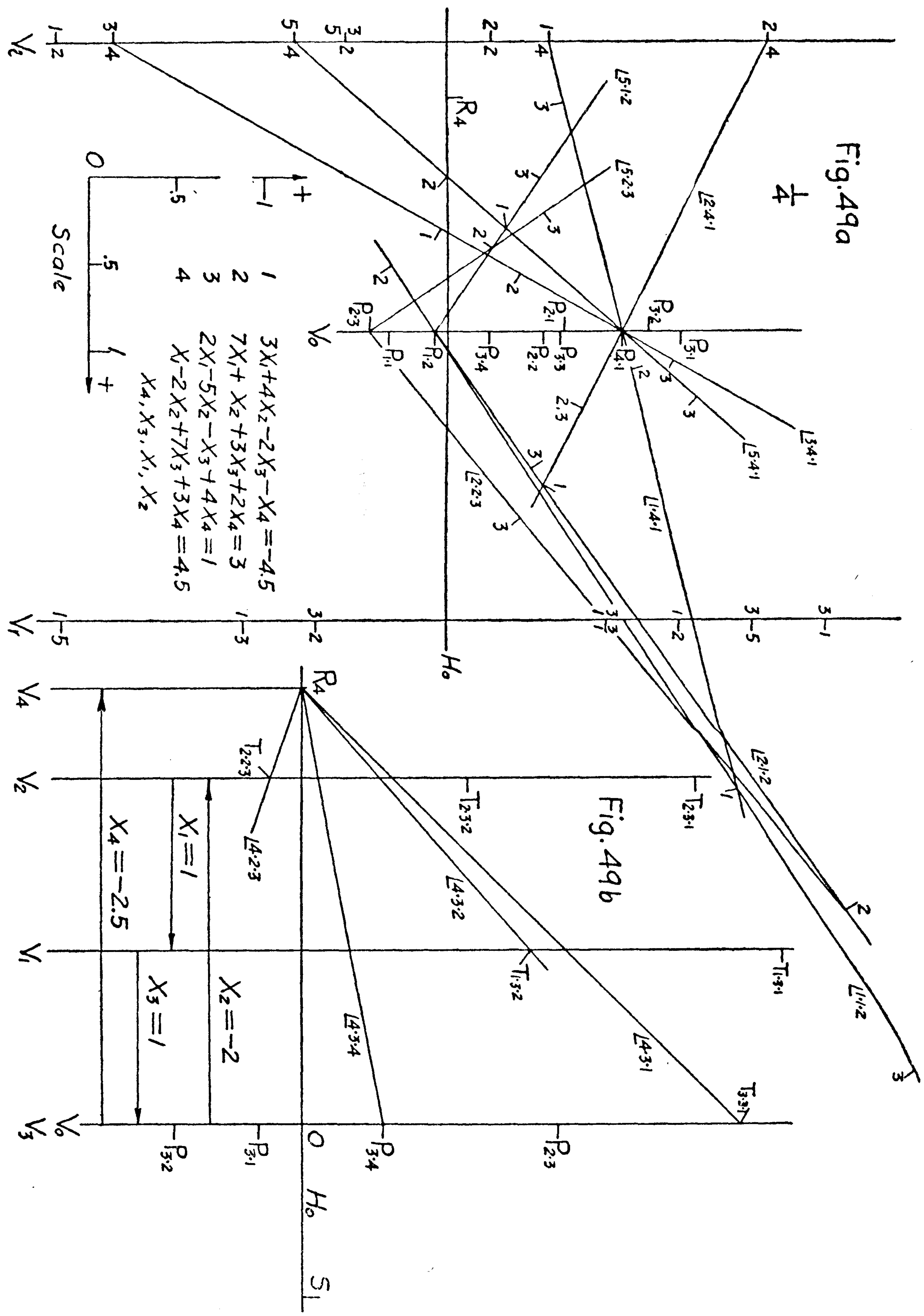


Fig. 49a
1/4
1　$3X_1+4X_2-2X_3-X_4=-4.5$
2　$7X_1+X_2+3X_3+2X_4=3$
3　$2X_1-5X_2-X_3+4X_4=1$
4　$X_1-2X_2+7X_3+3X_4=4.5$
X_4, X_3, X_1, X_2
Scale
Fig. 49b
$X_4=-2.5$
$X_1=1$
$X_2=-2$
$X_3=1$

中華民國二十五年三月初版

算學小叢書 聯立一次方程式之幾何一冊

(51013)

每冊定價國幣肆角
外埠酌加運費匯費

著作者　羅河

發行人　王雲五　上海河南路

印刷所　商務印書館　上海河南路

發行所　商務印書館　上海及各埠

(本書校對者陳忠杰)

商