顧克彬譯

教育測量統計法

大東書局印行

教育測量統計法

Otis 原著

顧克彬譯

大東書局印行

1947

原　序

本書在討論簡單的統計方法，以解釋測驗的結果。是爲教師，行政人員，學生和作研究學問的人而作的。

本書的目的，在使毫不知統計的人，能夠了解統計的學科。讀者對於此科須具深切的眼光，以便理解各種統計的步驟，及明了統計結果的意義和重要。

凡學校教師，行政人員，或作研究學問的人所需要的東西，書中皆已説到，就這幾項，讀者要想用以解釋不常應用的特殊方法，還要參考許多更專門的書籍。本書解釋相關度的意義和重要，特別注意，並對於分析相關與複相關的簡單而有益的應用，加以説明。

熟悉統計方法和統計名詞的讀者，爲求詳密起見，可參考書中的註解。至普通的讀者，却不必研究註解，免尋麻煩，因爲註解對於作統計的方法上不十分重要。

有幾種新的圖表，便於實際的應用的，特介紹在本書中，如相關圖和百分比曲線圖。這幾種圖表，其重要的程序和計算方法很容易，對於統計方法有專門研究的人一望卽知。過去的幾年，對於這種應用的圖表有很確定的趨向，由此可預測將來，一定能推廣應用，基此原因，故留相當的地位，專作圖表的解釋。

的確，在全書中，對於實際方法的應用上常在心目中注意，至學理的討論，僅於方法應用上和研究智力上視爲需要時始及之，而不認爲一定的程式。例如以很簡單的說明，去其繁複之處示讀者以相關的意義，而對於整個公式的應用則以"逐段分析"化爲連續簡單的數學程序而免去公式的記憶。計算上的正確，以有各種表格減少手續至最低的限度，在正確方面，亦可集中注意。

著者深信任何對於教育上的科學方法有興趣的人，無論學科對於他是怎樣的新穎，從這本書中，可得到良好的有用知識，並了解統計的方法。

俄提斯

譯　後

近幾年來，國人對於統計一科，有深切的認識，研究統計的人，亦日見增加，可見統計的需要和價值，已引起國人的注意了。

可是，統計與數學，有密切的關係，要研究統計，非於數學有相當的基礎不可，要研究高深統計，更非對於高深數學，有相當的了解不行。

統計的重要功能，在解釋事實，不重在學理的探討；所以教授統計或編輯統計書籍的人，大半注重統計的應用，而於統計上所引用的數學原理，不加討論。這就是使研究統計和應用統計的人，只要能知其然而不必求其所以然，換言之，只要能應用嫻熟，而不必多作高深的研求。

但是，我們打開統計的書籍看一看，無論爲何種，其編輯方法，大都是先介紹一個統計的公式，然後再舉例以明之，前後缺少聯絡，於是使研究統計的人，就和讀數學似的，一樣的枯燥無味，以致對於統計的技術，旣不能臻於嫻熟，而於統計原理，又似是而非的一知半解，因此，對於統計，遂感乏味之苦了。

本書編製，對於上述缺陷，能予以相當的補救。書中全體，皆是以統計的方法來解釋測驗的材料，用幾種學生測驗的成績，依次以統計的方法來整理而解釋其意義，所以書中內容前後一貫，讀之令人生興。

著者俄提斯博士，對於統計與測驗，富有研究，故能以淺顯的文字，說明

高深的學理，確是從事教育的人一本極好的參考書，特迻譯之以供參考。

本書譯成後，得同學朱君秉衡，把譯稿全體校閱一遍，書中的圖表，請吳鼎培饒祁兩君代繪，並經艾險舟劉覺凡兩先生指示，謹此誌謝。

目　次

教育測量統計法

第一章　緒　論

統計學是有興趣的嗎?——本書的目的——心理測驗是一種科學嗎?——統計方法所解釋的是什麼事實

一　統計學是有興趣的嗎?　大多數的人或者說「否」。這就是說,統計對於他們是沒有什麼興趣。此是自然的現象。但是一個做母親的要是每星期紀錄她的嬰兒的發育狀況,或是做教師的要推測他的學生,不如其他教師所教授的學生來的聰明,而要以心理測驗來測驗一下,看所推測的是否正確,那末這許多材料對於做母親和做教師的就發生興趣了。

二　本書的目的　這本書的目的,老實說,不是和其他統計書一樣地來專門討論統計的。牠是討論解釋統計方法的——個人有興味的材料辛苦搜集以希望達到重要目的的。一個教師,要是計算一個標準測驗,把分數製爲圖表,從一小時做到十小時,他總是希望從這些材料中得到牠的意義和啓導。本書之作,是抱一個特殊目的,就是使毫不知統計的教師們,在計算分數時,有一個最便利的方法,俾事實與材料,聯貫一氣,使材料表示

顯明配置合法。

總之，這許多的事實，是我們所認爲最有興趣的。著者很相信，做教師的或是做校長的，能於不相聯貫的各種分數或各種測量，使能產生教育進步上重要結果，對於這種方法，知道愈多，則對於測驗方法的研究愈能發生興趣。

三　心理測量是一種科學嗎?　講到科學，我們就想到科學是有系統組織的正確知識，如數學，物理，和化學等皆是的。心理測量，似乎是不正確的，我們或者以爲不能稱爲科學罷。然而用統計的方法，確定心理測量材料如何不正確，其可靠的程度，能到什麼地步，這可以說是最正確的科學了。例如我們尋常對於兒童綴法能力的測量，是不完全的，但是要搜集大多數的測量材料應用統計方法，就能夠決定最正確的測量，知道所得結果的可靠性了。

四　統計方法所解釋的是什麼事實?　本書所論的統計方法，是應用於智力測量，教育和訓練的結果，個人品性——及其他一切關於人體的測量，而注重之點，乃在心理測量和教育測量方法上的應用。假設一個校長應用心理測驗和教育測驗，測量四年級到九年級的學生（九年級等於中國的初中三年級）其所得的分數表示什麼意義呢?

（1）校長在已知的確度範圍以內，可以決定每一個受測驗學生心理發展的程度，和他在學校中工作上所得的知識。

（2）在已知的確度範圍內，他可以決定各級學生心理發展的平均標準，和其他年級學生的比較，並決定每級學生的平均發展是否齊一。他亦可以看出各級學生的知識程度，是否有均齊的進度。

（3）他可以決定每一學級學生能力差異的數量，並可互相比較。換一句

話說，校長可決定各級學生智力和知識(成績)的相對的齊一。

(4)他可以决定各級學生智力和成績重叠(Overlapping)的程度。例如他可找出四年級學生有百分之二十五超過五年級平均的成績，有百分之五超過六年級平均的成績。

(5)在同一城市之中，如果有其他的學校應用同一的測驗，他可以把自己學校學生平均心理的發展和平均的成績與其他學校比較一下。

(6)藉年級常模，他可把自己學校學生平均的心理發展和平均的成績，與其他城市的學校作一比較。(例如五年級的常模是全國五年級學生的平均分數)

(7)他可用各種方法，比較同一班級每個學生的智力。譬如說，喬治的智力達到五年級上四分之三的地位，或者可以說，喬治在智力方面超過五年級學生百分之八十五。决定百分比，有一個簡單的方法，叫做百分比圖，見下面第五章。一個學生成績的地位可以用百分比圖表示出來。

(8)學生的能力亦可用年齡表示，表示學生能力是常態，或是平均的狀況。例如校長能看出喬治智力是十二歲八個月正合常態。(如果是對的，喬治的智力年齡就是十二歲八個月)

(9)學生成績亦可用年級狀態來表示。這就是說，如果一個學生成績測驗的分數，適當於五年級三個月，我們可以說這個學生的年級狀態是5·3

(10)校長可把每一學生成績和他的智力相比較，而决定那些學生所做的功課是和他的智力相等。成績和智力比率，可用數學的方法表示爲成績率，此點在第十四章內詳細說明。

(11)校長可用相關的方法，求出成績和智力相關的程度。這可以應用相關圖，在第十六章裏有說明。這個圖是爲完全不熟習求相關方法的人製的。

用這種方法，校長可以看出測驗方法得出的成績和憑教師評斷的成績二者相關的程度，或任何兩種能力的相關，如一爲測量的，一爲估定的。

(12)如果在開學之始用一種測驗，而在學年之終另易一種，則校長可以看出每一個學生和各級學生成績的進步。用測驗成績進步的方法，很容易比較各種教法和各項計劃的結果，這種科學的方法，是立以後教育方法發展的基礎。

要把列舉的各項事實，能使一個學校校長從心理測驗和教育測驗的結果上看出來，我們還須說明這些測驗的應用，這些測驗的應用，主要的當然就是把兒童分爲同類的班次，俾教學能適應學生的能力和需要。這種發見，當然不是說只有校長可以做出的。無論那一個教員或是指導員對於學生都可做同一的研究。

要想決定上面所說關於學生的各種事實，無論那一項，皆是要了解統計方法的，至少也須明白最小的程度。所以本書的目的，就是在最初步方面，解釋統計上的原則與程序，使教員，指導員，校長，教育局長，或其他研究人員，都可知道關於前面所說的各種學生的事項，即從未學過統計方法的人，亦能使其知道。

書內每章皆可當作全部閱讀，往下看時，不需對於該一章十分研究精熟，這是很便利的。例如第三章是討論百分等級的幾個方法，其第一法是按照普通的觀念，其次是精密一些，而不是實際的方法，最後乃是適當的方法，簡單而實用。爲使熟悉第三種方法起見，因設爲練習，以求各種百分等級。苟非對於前兩種方法感特殊興趣時，則不必費許多時間去研究。普通這許多沒有練習的討論，皆是引導到有練習的較實際的方法的。

第二章　分配的集中趨勢

分組的比較——均數——均數公式——均數的意義——求均數的簡法——中數用分隔法求中數——求分配法——分配全體距離——重疊——從分配上求中數——特殊情形——從分配上求均分數——衆數——總結

分組的比較　紐約某校的學生最近舉行算術理解測驗，下表是五年級甲組和乙組的學生分數。我們能否從這個表的觀察上說出這一班的”平均分數”有較高於其他一班的趨勢？試從此表上猜一猜那一班“平均上”的分數好一些。再猜一下，這一級分數比那一級的好多少？

表一　五年級甲組與乙組學生算術理解的分數

年級	學生數	分							數
五甲	36	11	8	7	8	7	7	5	4
		8	10	11	9	10	12	9	6
		15	7	8	5	12	14	11	5
		5	9	10	12	4	8	7	10
		8	8	10	9				
五乙	47	7	12	8	10	11	6	11	11
		11	10	8	5	11	8	8	6
		13	7	9	13	11	9	12	9
		6	8	8	8	6	12	6	14
		10	16	12	13	10	11	12	10
		14	10	10	9	8	13	11	

均數 (Mean) 普通測驗一班的成績，是用"平均"的分數。其法為將一班所有的分數相加而以學生的總數除之。如五年級甲組學生的總分數是308，以學生的總數36除之，即得$8\frac{20}{36}$。我們如果只要得一個最近似總數可稱為9，除到兩位小數為止，其"平均數"是8·56。五年級乙組的"平均"分數是9.85，或者可以說是10。這就是表示五年級乙組的算術理解力較優於甲組(在此校，乙組是五年級的高級)。

"平均"分數，在統計學上普通稱為分數的均數(Mean of the Score)，或稱為均分數 (Mean Score)。均數這一個名詞，在不確定性質的時候通常都認為平均數(Average)，這就是說，一組分數的平均數是所有分數的總數被各分數的人數所除[1]。

均數公式 茲用另一方法說明均數的定義如下：

$$\text{各分數的均數}=\frac{\text{分數的總數}}{\text{分數的人數}}$$

我們再分析一下，

以M代均數

以拉丁字母Σ[2]代"總數"那末Σs就代"分數的總數"以N代次數於是各分數的均數之公式如下：

$$M=\frac{\Sigma s}{N} \qquad \text{(公式一，求均數)}$$

平均的意義 我們通常都認為均數(平均數)就是分數的總數以各分數的人數除之。但是均數怎樣能代表全體的分數？

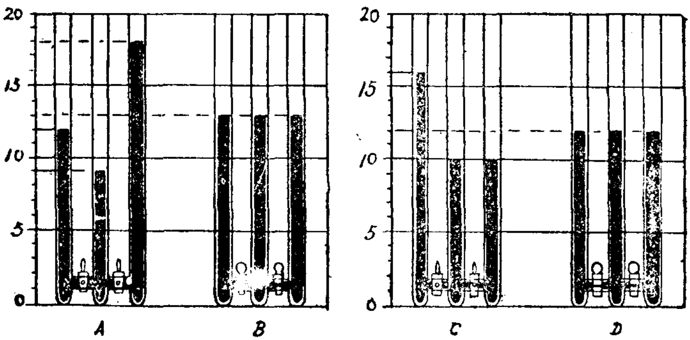
要得滿意的解答，可用比例的方法。

[1] 關於均數，還有其他特殊名詞，如像幾何均數之類，這屬於計算定量的方法，與上述不同，讀者此時可不必注意。

[2] 看附錄一

譬如有三個玻璃管在此地，每一管皆貯有色的液體。一高12吋，一高9吋，一高18吋，如第一圖A。

圖一　表示均數（平均數）



如果各管相連使液體互相流通，則三管的液體必同在一高度。這個高度是什麼？

要囘答這個問題，我們可先將三個管子的液體高度找出。(12,9,18）把液體的高度總數12,9,18相加卽得39，以3除之得13，是卽每管液體同一高度的數目。

上面所說的是求出12,9,18的平均或平均數，得13。有了這一個比例，於是對於均數或平均數就發生了一個新意義。卽各項數目的均數或平均數可說是一個"平原"(Dead Level)就是這些數目，可以假設是相等的。

基此意義，我們就可用簡法以求均數或平均數。我們可以用任何方法，使各項數目立於同等地位而得一"平原"例如16,10,10這三個數目的均數是什麼？我們可以在第一圖C上，想像這幾個數目所代表三個管子液體內的高度。我們一看就可知道第一個管子液體高於10吋(16吋—10吋＝6吋)很可以分配於三個管子，每管得2吋，如D圖所表示者。那末液體的"平原"就是

12吋。所以16,10,10這三個數目的均數或平均數就是12。我們可以說12是三個量數的集中趨勢。

現在再囘到第一個例子（圖一A）看在9吋以上的液體有多少可以平均分配於三個管子之內。第一管的液體高於9吋的3吋，第二管高於9吋的是0,第三管高於9吋的是9吋。把這些超過的數目3,0,9 相加卽得12吋，平均分配於三管之中，每9吋的管子均加4吋，於是平均各爲13吋。

我們可以把用超過的方法，求得12,9,18均數方法的情形述之於下：

$$12=9+3$$
$$9=9+0$$
$$\underline{18=9+9}$$
$$12$$
$$12\div3=4$$
$$9+4=13\text{（均數）}$$

第一行3是12超過9的數目，0是9與9相比的數目，9是18超過9的數目。超過數目的總數是12，其超過9的平均數是4。9+4=13。所以13是原來數目的均數或平均數。

上述的方法我們定一個規則如下：求各種價值(Values)的均數或平均數(1)找出最小的價值；(2)求每一價值對於最小價值超過的數目；(3)求超過數的平均數，計算零分的超過數；(4)加平均的超過數於最小的價值。這個結果就是原來各項價值的均數或平均數。

問題： 應用上面規則求62,65,67,72,與76的均數。

解答：超過最小數目62的各數是0,3,7,10,和14。這五個超過數的平均數是$6\frac{4}{5}$。而原來五個數目的均數就是$62+6\frac{4}{5}$，或$68\frac{4}{5}$。

要求超過的數目。並不一定要找出最小的價值。譬如在前面第一個例

子，我們可以求出三個管子的液體，超過8吋的是多少。每一個超過的數目是4，1，10。其總數是15依三個管子分配，每個8吋加5吋，則每管同一高度，皆爲13吋，這就是"平原"或稱三個價值的均數。

求62，65，69，72，與76的均數，亦可用同一樣的方法。我們可用6來做比較超過數目的標準，用60相減比62容易些。這五個價值超過60的數目就是2，5，9，12和16，其均數是$8\frac{4}{5}$。以此數加60即是$68\frac{4}{5}$和上面一樣。

這個較普遍的方法我們可用下面的規則來說明：

求均數的簡法　求各項價值的均數或平均數，(1)選擇一個較小於平均價值的數目做出發點；(2)求各項價值超過於所選擇數目的平均數；(3)加此平均數於所選擇的數目。其結果就是各項價值的均數或平均數。

進一步求均數的方法見第四章。

練習1　用上面規則求84，89，96，81，95均數。

練習2　另用一數目做出發點求練習1的均數看結果是否相同。

練習3　用上面五個數目相加的總數而以5除之，以比較練習1與練習2的結果。

練習4　用上面的規則把以下每組數目的均數求出來。用兩種數目做出發點，以比較其結果是否相同。* 依普通的方法，求平均數與上面每項結果作一比較(如練習3)

(a)10，5，12，12，11，16，13，16，14，10.

(b)29，26，25，25，28，22，26，24，23，28.

(c) ● 50，55，48，58，64，61，70，62，58，52.

● 如以50做出發點亦可以，則第三個數目48的超過數爲—2。所以並不一定要以最低的數目做出發點。小於出發點的數目不過得一個負數或負超過數而已。在加超過數目時以負超過數目相減。

中數(Median) 測量集中趨勢較均數常用的叫做中數。中數就是"中點"的意思。中數的分數(Median Score)是全部中點的分數;例如五年級乙組的分數如照次序排列起來其中數的分數就是中點分數。中數的分數,有時稱爲中分數。㊀(Mid-Score)茲假設13個學生分數如下:

3,7,9,8,5,4,5,7,6,7,4,6,5。

如按照次序排列,則如下:

3,4,4,5,5,5,6,6,7,7,7,8,9。

M

中數的分數是6有M表明;這就是說,13個分數的中數是6。

假設有14個學生,其第14分數是8。若照次序排列,則分數如下:

3,4,4,5,5,5,6,6,7,7,7,8,8,9。

M

這許多分數的中點,是在第7與第8兩個分數之間,但是兩個皆是6,我們就叫中數的分數是6。

如果第14分數是5而不是8,則次序的排列如下:

3,4,4,5,5,5,5,6,6,7,7,7,8,9。

M

在這種情形之下,中點是在5分與6分之間;所以我們可以說中數的分數,或是5或是6,或避免推讓起見可稱爲$5\frac{1}{2}$。這後者是較普通的方法。

求中分數的公式 假如一組有13個分數,那末中間的一個,就是第七個分數。設有29個分數,那一個(按照大小次序)是中間的一個呢? 倘使一組

㊀ 有許多人喜稱中分數——以中數名詞作爲次數分配的中點。

的分數是奇數，我們用什麼言語來表示中間的一個數目。以下各節就是回答這些問題。

分數如爲奇數時，則以1加於分數的數目而以2除之。設有29個分數，則中間的一個分數就是第15個。$(29+1)\div 2=15$。

中分數$=\left(\frac{N+1}{2}\right)$分數按大小次序。(公式2，求中數)

問題： 用這個公式將前面五年級乙組47個分數，求出中數。

解答： $N=47$，中分數是$\left(\frac{47+1}{2}\right)$分數；就是24分。

注意： 不能說中數是24；無論分數是怎樣，這不過是表明在分數序列中的第24個分數而已。

如N是14，則中數的價值是分數序列中第7與第8之間。倘應用上面公式，則得

中分數$=\left(\frac{14+1}{2}\right)$分數$=$第$7\frac{1}{2}$分數

在這樣的情形中，如果我們僅解釋$7\frac{1}{2}$就是7和第8分數之間一半的價值，就是中數，那末上面公式2就認爲是求那一個分數的正確方法，不問N是奇數或是偶數。(註)

問題： 應用前面公式2，將五年級甲組36個學生分數，求出其中數。

解答： $N=36$，中分數是在第18與第19個分數之間。

用分類法求中數 從一組分數中做一種研究工作，先要找出最低的分數，再尋其次的分數，如是依次類推，不但費時且易錯誤。求中數最佳的方法，就是按照分數次序分類書於紙上。如用此法，將分數書於紙的邊上，最

(註)有許多書沒有上面的公式，而認爲中數是兩邊的一點其兩邊各爲$\frac{N}{2}$。不要把這個意思和上面公式相混，如解釋得適當，兩種結果是一樣的。$\frac{N}{2}$公式的規則，主要的是應用於團體分配方面，在下面第四章討論。

好在左上角，則極為便利。許多紙張可立時放好，各紙張儘可重疊只須把分數露出，每一接續的紙張放在正確的位置，以便後面一張插入，則各紙的分數自然按序排列。而中分數也就容易計算了。

求中數的第二個方法方法是求分數的分配，這在下面說明。

求分配法 普通解釋一組的分數，即用下面第二表的形式表列出來，很為合宜。要把五年級甲組分數表列出來，須將數目依次排列從最低的分數到最高的分數。㊀ 將每一分數在表內相關的數目之下，做一記號。在五年級甲組的分數中，我們一看就知道最低的是5最高的是15。所以就要把數字從3排到16如表二所示。

表二 表示做分配的方法

年級	分數 3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16			次數	中數分
五甲		｜｜	｜｜｜｜	｜	卌	卌｜	｜｜｜｜	卌	｜｜｜	｜｜｜｜	｜		｜				36	
五乙			｜	卌	｜｜	卌｜	｜｜｜｜	卌｜	卌｜	卌	｜｜｜｜	｜｜		｜			47	
六甲																		
六乙																		
七甲																		
七乙																		

把表一的各項分數列入表二的第一行做出記號，於是就得到一行相同的記號而與五甲的分數相對，這步工作就叫做分數的分配，或稱分配。因此表二有兩個分配，一個是五年級甲組，一個是五年級乙組。在4分之下有兩畫記號就是表明五年級甲組得4分的次數是2。得5分的次數是4；餘類推。

分數全距離 表2所做的分數分配有許多便利。第一，分數全距離的分配一望即知。這就是說，我們立時可看出五年級甲組的分數全距離；是從4到15，而五年級乙組是從5到16。每級分數的全距離皆是11。

(㊀)分數多時，一時很難觀察最低與最高的分數，最穩妥的辦法是在量表的兩端放開一些。

重疊(Overlapping)　分數上有很大的重疊我們一望而知。如五年級甲組(例中甲組平均程度比乙組低)有些學生的分數較五年級乙組學生的分數高些。再同級學生的差異有時也較各級間彼此的差異為大，這也可以看得出。

從分配上求中數　分配最大的效用，就是容易從這裏面求中數。例如五年級甲組分數的中數在36個次數中，我們就分數序列上已經找出第18與第19的一半是中分數。我們只須從任何一頭向中數計算而找出第18與第19間的分數。這二者所得的兩個分數是一樣的。在這個例子裏（五甲)兩個分數皆是8。所以中數就是8。把這個分數插入表2。

問題：求五年級乙組中分數。

解答：次數是47，中數是第$\left(\frac{47+1}{2}\right)$或是第24個次數。從上面或下面數起，第24個分數是10。

表三　六年級甲組到七年級乙組算術理解力測驗分數

年級	分數
六甲	14，14，12，8，15，8，9，13，12，11，6，12，14，4，12，7，14，10，14，4，9，13，13，18，7，7，13，10，12，11，9，15，10，5，12，3，12，10，6，14，12，14，10，8。
六乙	12，9，15，10，4，13，10，8，8，10，12，3，13，11，8，10，9，15，5，16，6，11，11，10，12，11，10，12，8，13，11，11，11，11，8，10，8，12，14，3，18，13，14，12。
七甲	15，13，11，8，13，11，10，10，8，9，12，15，8，11，11，10，14，12，7，9，14，13，14，9，5，8，12，11，11，15，5，11，10，13，15，11，13，6，13，5，6。
七乙	9，10，11，14，6，9，13，15，12，13，14，10，12，10，13，10，10，10，14，7，14，13，13，8，11，10，12，16，3，10，14，13，14，9，15，8。

所以五年級乙組分數是10。把這個分數插入表2。

練習5: 照表2繼續下去，或另作一個相似的表，把前面表3六年級甲組到七年級乙組算術理解力測驗的分數分配表示出來。求每年級的中分數。

特殊情形 分數3,4,5,7,8,9的中數是6，因爲是第3與第4分數的一半；就是5分與7分的一半。同樣，分數2,3,4,7,8,9的中數是$5\frac{1}{2}$，因爲是4與7的一半。此外任何組距，亦用同一方法。

其他求中數較精密的方法在以後各章內討論。

表四 表明在分數分配上求均數的方法。

分數	次數	乘積
15	1	15
14	0	0
13	1	13
12	3	36
11	3	33
10	5	50
9	4	36
8	7	56
7	5	35
6	1	6
5	4	20
4	2	8

36)308(8.6
288
200

從分配上求均分數 假設我們比較五年級甲組與五年級乙組算術能力，用兩級算術測驗的均分數(平均分數)來比較。若把五年級甲組所有的分數抄寫下來，再將各分數相加，五年級乙組的分數亦用同樣方法，則殊覺無聊。簡單的方法，就是做每年級的分數分配如表2所示者，然後再從分配上求出均數。

因此，要得五年級甲組分數的總數，就不必把15加一次13加一次，12加三次11加三次，以及其他等。我們把每一個分數的數目和次數相乘，然後把所得的乘積加起來如表4所示者，這是很容易的。所以3個12分就是36，3個11就是33，餘類推。乘積的總是308。以36除之，即得8.6，是即五年級甲組的均分數。

前面所說的求均數的簡法，雖然在此地沒有多大價值，但是也可以用一

就是每一個分數皆與4相減然後再與次數相乘如表5

表五　表明用簡法在分數分配上求均數的方法。

分數	次數	與4的差數	乘積（次數×差數）
15	1	11	11
14	0	10	0
13	1	9	9
12	3	8	24
11	3	7	21
10	5	6	30
9	4	5	20
8	7	4	28
7	5	3	15
6	1	2	2
5	4	1	4
4	2	0	0

36)164(4.6
144
200

$4+4.6=8.6=$均數。

用此法求得的均數是8.6，和用前法（表4）求得的一樣。在求相關係數時，此法最爲常用。

衆數　我們已經討論過兩種集中趨勢：均數與中數。還有第三種表明集中趨勢的量數，這就是衆數。次數發現最多的分數爲衆數。如五年級甲組（看表2）8分發見的次數最多。所以五年級甲組分數的衆數或

範數就是8。在五年級乙組有兩個分數發見次數最多。8分與11分皆發見八次。像這樣分數有兩個衆數在分配上就叫做複範數 (註)

總　結　測量集中趨勢的有三個，一是均數，一是中數，一是衆數。均數是以分數的數目除分數的總數。

中數是中分數或稱中點。

衆數是次數發見最多的分數。(是一個形式而已)

問　題

1. 三種測量集中趨勢的數量，你以爲那一個是測量全體數量最好的代表？何故？

2. 那一個是最壞？何故？

3. 中數或均數是否能完全代表分配？如果不能，那末中數或均數所未能表示的是分配上那一部分？你能否用方法使兩種分配普通區別出來，並且得同樣的均數或中數？

(註) 複範數名詞，通常用於分配上指量尺上兩個不同部分之最高的次數，在兩最高分數之間，次數有一個下降的現象，這種兩個範數是偶然的情形，而在第二次測驗時，也許只有一個範數。因爲這個原故，在少數的情形中，衆數不是表示集中趨勢的最好數量。

第三章　全體的分配

個人和團體的比較——等級次序——各種團體學生的比較——百分等級——求百分等級的精確法——精確決定百分等級的公式——求百分等級的近似法——解釋規則——直條圖——直方圖——等級圖——從等級圖求中數——四分差分數——對角曲線

個人和團體的比較　團體與團體，不但可以比較，如五年級甲組和五年級乙組相比較，並且個人可以和所屬的團體相比較，例如我們可以求出得6分的人在五年級甲組中的情形。

我們既已求出五年級甲組的中分數是8；所以我們可以立刻說，6分是在中數之下。但是比中數究竟低多少？ 6 分是在全分數中的第幾個四分之一——第三個四分之一還是第四個四分之一？（最高的四分之一稱第一個四分之一）。在表2上五年級甲組分數的分配中，6分是在第三個四分之一還是第四個四分之一，驟然看起來不甚顯明。●

要看6分是在第三個四分之一還是第四個四分之一，能一望而知，其最簡單的方法，就是把分數直寫，有多少分數就寫多少次數，如第六表所表示

● 普通計算皆自左而右，但統計家立有規則以最高的四分之一稱爲第一個四分之一若是[illegible]易數混亂。

者。 因爲總共有36個分數，我們可以把9個分數畫作一份，共作四份，那末6分就在最低或是第四個四分之一裏，這一望而知。

等級次序

我們說明6分對於全體分數的關係更加確定些，就是找出6分在這一類分數中的等級。所以既按序排列，在表6的第一行我們可以從1依法數到36，從最低分數算起如表中所示者。㊟ 6分數在全體分數中占第七個地位；所以我們可以說一個學生得6分在全級36人分數中，占第七級。

表六 表明五年級甲組學生算術理解力測驗分數的等級次序

分數	等級
15	36
13	35
12	34
12	33
12	32
11	31
11	30
11	29
10	28
10	27
10	26
10	25
10	24
9	23
9	22
9	21
9	20
8	19
8	18
8	17
8	16
8	15
8	14
8	13
7	12
7	11
7	10
7	9
7	8
6	7
5	6
5	5
5	4
5	3
4	2
4	1

分數	相關等級	指定的中數等級
15 13	36 35	36 35
12	34 33 32	33
11	31 30 29	30
10	28 27 26 25 24	26
9	23 22 21 20	21½
8	19 18 17 16 15 14 13	16
7	12 11 10 9 8	10
6	7	7
5	6 5 4 3	4½
4	2 1	1½

㊟ 本來一個人如其是在團體中第一個等級，這個意思就表示他的等級最高。然而在百等級說起來，高的等級是由大的數目表示出來，此處計算，最好從底下算起。因在實際講起來，此種計算等級的方法，與其他方法是一樣的正確。

得15分的學生，他的等級是36(在36中的36級所以是最高級)。得12分的有三個學生。占34，33和32三級，但要是任意就三個等級之中某一個分數是高於其他兩個，則未免不公允，因這三個等級的中數指定是33，如表6右邊一欄所示者。

同樣，得9分的有四個學生，爲使他們立於同等地位起見，就把20，21，22，23每個中數等級定爲$21\frac{1}{2}$。

得同樣分數的學生數爲奇數時，則等級必含小數($\frac{1}{2}$)而人數爲單數時，則等級爲整數(全體數目)。

問題：　求表一五年級乙組每一項分數的等級。

解答：　五年級乙組47個分數不是按照次序排列的，我們用表2的分配圖來求，從此表中我們可以看出有一個5分是最低的分數；所以5分的等級是1。得6分的有五個，所以6分的等級是2，3，4，5，6 五個等級的中數，即是4，其餘類推，詳情觀表7。

練習6　求五年級甲組算術理解力測驗每一項分數的等級，用表6的方法，其分數分配見第二章內練習5。

表七　表明從分數分配上求一個團體中每項分數的等級的方法

分數	個人等級	指定的中數等級
16	47	47
15		
14	45|46	$45\frac{1}{2}$
13	41 42|43 44	$42\frac{1}{2}$
12	36 37 3|8 39 40	38
11	28 29 30 31|32 33 34 35	$31\frac{1}{2}$
10	21 22 23 2|4 25 26 27	24
9	17 18|19 20	$18\frac{1}{2}$
8	9 10 11 12|13 14 15 16	$12\frac{1}{2}$
7	7| 8	$7\frac{1}{2}$
6	2 3 4 5 6	4
5	1	1

練習7　求六年級乙組算術理解力測驗每項分數的等級，用表7的方法

練習8　10分在六年級甲組與六年級乙組怎樣比較等級？

各種團體學生的比較　要把任何一個人的分數和他所在的團體的分數作一個比較，當然以求個人在團體中的等級爲最適當。但是我們要把這一個團體的學生和另一個團體的學生比較其相關的等級，則等級的次序，就不能運用自如了。例如五年級甲組一個學生得11分與五年級乙組一個學生得12分的怎樣比較其相關的等級呢？

按表6，五年級甲組得11分的，等級是30。照表7，五年級乙組得12分的，等級是38。這是否說五年級乙組得12分的等級，高於五年級甲組得11分的等級呢？不然，因爲在五年級甲組得11分的，是在36中占第30等級，而在五年級乙組得12分的是在47中占第38等級。

百分等級　要把這兩種等級，使能夠直接比較，我們要把牠化爲同一個名詞——同一根據。因此計算等級就要以100爲根據。這就叫做百分等級。

個人在團體中的百分等級，粗言之卽爲超過團體中分數的百分比。如百分等級爲75，照此意解釋，卽爲個人超過團體中各個人分數的百分之75。這是普通應用優良簡單的意義，如需有完美之區分，則須稍下精密之定義。

在25的一組中，中間的一個學生乃是超過12分，按照上述的定義，這個學生的百分等級是100的$\frac{12}{25}$或48。最低的學生，一個人沒有超過，其百分等級爲0，最高的超過24，其百分等級爲100的$\frac{24}{25}$或96。爲解釋便利起見，我們須釋百分等級卽中間的學生常爲百分等級之50而百分等級之最高與最低者，與中點50之距離相等。

我們現在對於個人百分等級，下一個定義，卽是個人在很大的各個人

團體中 ❸ 所超過分數的百分比。

在25個人的團體中之最低的學生或說是在最大團體中（假設在一百萬人的大團體中）他的最近是的地位，就是下25的中點。換言之，最大的可能是超過團體的$\frac{1}{50}$，或百分之2。他在25人團體中的百分等級，照我們新的定義可說是2。同樣，在25個人的團體中之最高的學生，或說是在一百萬人的團體中，其最近是的地位，也許是在上25的中點；那就是說，他最大的可能是超過團體的$\frac{49}{50}$。所以他的百分等級可說是98。在25人團體中的中點學生，大半可說在一百萬學生中間25的中點，換一句話說，他最多可以超過一百萬學生的百分之五十，所以百分等級是50。

照我們對於百分等級最精密的解釋，任何團體的中數，其百分等級常爲50，而最高與最低的學生其百分等級去中點50之距離相等。同樣，各學生等級在中數上下距離同等，則其百分等級亦同在50以上或50以下。

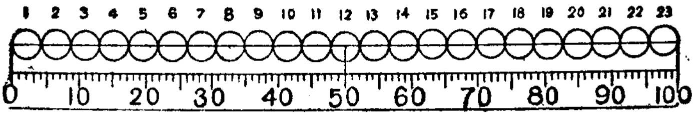
上述百分等級精密的解釋使我們心中得到百分等級的意義，但爲達到計算目的起見，則以用更具體的解釋爲比較的簡單。其做法可假設有許多個人組合爲一團體，依次排列成行而占一空間，這個空間設爲100單位由0逐漸至100。任何一個人在此量尺地位上凸出點，就是他的百分等級。

假如一個團體裏有23個人，我們排爲23個小圈如圖2所示，並分佔空間從0到100。於是最低一人的百分等級，照我們新解釋是在第一圈小圓圈中心對量尺的一點上這當然是100的$\frac{1}{23}$的$\frac{1}{2}$或是2.17。所以我們可以說，在23人團體中，最低的一個人，其百分等級爲2.17粗言之爲2。第二個人的百分等級等於$1\frac{1}{2}$乘100的$\frac{1}{23}$，卽等於6.52，粗言之，卽7，餘類推。中數或是第十二的一個人，在這方法上其百分等級恰爲50，其最高一個人的百分等級，低於

❸ 理論上的無窮數。

100，猶之最低的等級高於0。

圖二 表明求個人在團體中百分等級簡便解釋的方法



求百分等級的精確法 照上面所說的精確方法，第三個人的百分等級是$2\frac{1}{2}\times\frac{1}{23}\times 100$；餘類推。總之，在這23個人的團體中求任何一個人的百分等級，我們應以小於等級的$\frac{1}{2}$乘100的$\frac{1}{23}$。

精確決定百分等級的公式 爲便利應用較繁複的規則起見，我們把規則變爲公式。作公式的第一步，就是把規則寫爲算術的形式，

$$\text{如百分等級}=(\text{等級}-\tfrac{1}{2})\times\frac{1}{\text{次數的數目}}\times 100。$$

我們現在可以用符號把這個公式再固定些，即以P. R.代替百分等級，以N代替次數的數目，而以R代替在N次數中的現有的各個人數。公式可以表示如下：

$$P.R.=(R-\tfrac{1}{2})\times\frac{1}{N}\times 100。$$

如果熟悉代數的技術，這個公式即和下面公式一樣

$$P.R.=\left(\frac{2R-1}{2}\right)\times\frac{1}{N}\times 100,$$

$$\text{或}P.R.=\left(\frac{2R-1}{2N}\right)\times 100 \qquad (\text{公式}3)$$

這是一個很好的簡單公式。例如，我們再回來比較30在36和38在47裏的相關等級，這是在前面已經討論過的。

求第一個學生的百分等級（第一個學生的等級是在36個人團體中的30）我們以30代公式中R以36代N，即：

$$P.R.=\frac{2\times 30-1}{2\times 36}\times 100=\frac{59}{72}\times 100=82。$$

所以第一個學生的百分等級是82。 求第二個學生的百分等級，我們要以38代同樣公式中的R而以47代N。在這樣情形，P. R.$=\frac{2\times 8-1}{2\times 47}\times 100=80$。第二個學生的百分等級是80，並且我們可以直接和得82百分等級的學生比較可以看出38在47中的等級，是低於30在36的等級。

在實際情形，沒有一個人的眞正百分等級爲100或0的，這是可以看出的。次數的數目愈大，則各個人最高和最低的百分等級愈近於100和0，如表8所示者。

表　八

次數的數目	10	25	50	100	500	5000	無限數
最高百分等級	95	98	99	99.5	99.9	99.99	100
最低百分等級	5	2	1	0.5	0.1	0.01	0

求百分等級的近似法　爲達到普通目的起見，上述求百分等級的精確方法，無採用之必要。 其簡單的規則適合於實際應用者，即考量一個學生在一團體中的地位，並非計算他個人——換一句話說，即求學生在團體中的百分比，非計算他個人超過團體的分數。 譬如一個團體有23個學生，其在中點的學生從22個人中超過11個人。 這是百分之50；所以他的百分等級按照這個規則就是50，其餘如果皆用剛才所說的方法，其結果是一樣的。 在23人中得等級4的學生，其超過其餘22人的是3；所以他的百分等級在這個方法上爲$\frac{3}{22}\times 100$，或13.6　用這個近似的方法我們可以看出，無論一個團體中的學生是多少，凡等級最高者，其百分等級爲100，等級最低者，其百分等級爲0。 且用此法其中點分數的百分等級，常確爲50，因中間分數常超過其餘分數恰爲百分之50。

所以求一個學生在一團體中百分等級的簡法，即求團體的百分比，而非計算他自己所超過的分數。

這兩種求百分等級最大的區別是在兩極。譬如在我們所引用近似法的例證中，以0為百分等級的最低級，而在精確規則中則為100的$\frac{1}{23}$的$\frac{1}{2}$。為達實際目的起見，這種差異並不嚴重。換言之，精確規則雖較正確，然近似法在實際目的亦頗可應用。

解釋規則 用上面任何一種方法計算百分等級在幾個學生得同一樣的分數時，則解釋規則應加注意。五年級甲組得10分的學生有五個。在這五個學生當中的一個學生的等級是26。每個學生皆可認為是中間的一個。於是每一個皆可認為超過其餘四人中的兩人，且可認為皆被其他兩個人所超過。所以計算其他學生(與所討論的學生得同樣分數的學生)的一半人數時，應當知道這些學生亦被那學生所超過。(看表6)

如有六個學生，其分數為10，於是求這個六學生中任何一個人的百分等級，我們應當假設他是超過其餘五個人的一半；這就是說，我們在計算上應假設他是超過得10的與低於10分的$2\frac{1}{2}$。

問題： 用簡法求五年級甲組得10分的學生百分等級。(參看表6)

解答： 我們假設所討論的學生是五個得10分的中間一個。所以他可認為是超過25個學生的分數。除他自己不計外，共有35個學生。25約在35個人中的百分之72。所以我們應說他的百分等級是在一級中的72。

問題： 用簡法求五年級甲組得9分的學生百分等級。

解答： 所討論的學生假設超過其餘三個得9分學生的$1\frac{1}{2}$。所以他可認為超過$20\frac{1}{2}$個學生分數。$20\frac{1}{2}$約為35人中的百分之60他的百分等級是60。

問題： 用簡法求五年級甲組學生中假設一個學生得14分的百分等級。

解答： 在五年級甲組分數的分配中，沒有得14分的，但是如增加一個14分，則在36個其他分數中超過35。35約為36的百分之98。所以我們可以說一個學生得14分，在五年級甲組學生中其百分等級是98。百分等級與其他分數的關係見表9。

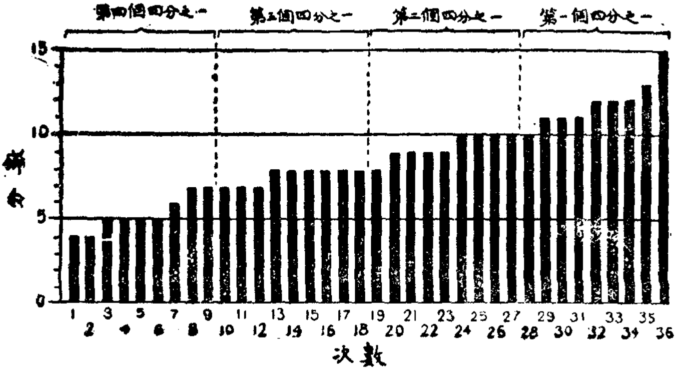
表　九

分數		4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
百分等級	五甲	4	12	19	28	44	60	72	83	92	97	98	100	
	五乙													

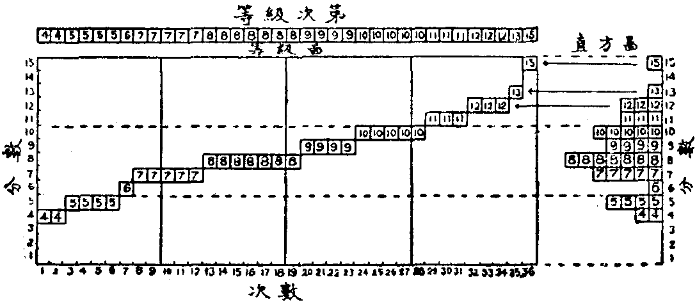
練習9 用簡法及表9的紀錄把五年級乙組從5到16，求其百分等級與分數的關係。

直條圖　我們可以表明分數的分配，用圖形表示如第三圖所示者，比第六表較為顯明。這個圖叫做直條圖。五年級甲組每一項分數用一條表示，條的高度與分數的數量相同。例如圖內左邊的頭兩條代表兩個4分，因為照左邊分數量尺上，這兩條每一個皆有4個單位高；其次四條代四個5分；再次一條代表6分，很清楚的看出來在第四個四分之一以內；餘類推。

圖三　直條圖表示五年級甲組36個學生算術理解力測驗分數的分配。

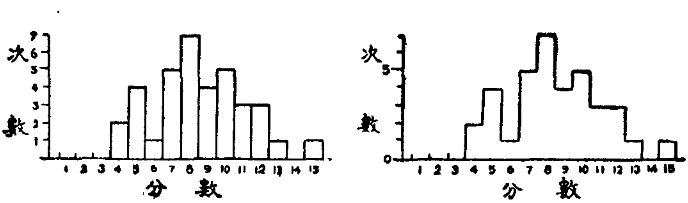


圖四 等級圖與直方圖表示五年級甲組36個學生算術理解力測驗分數。



直方圖 應用分數量尺如像第三圖形狀，我們可用各種圖形的方法表示分數的分配。 如第四圖 A，以兩個方格對量尺的4上表示兩個4分，以四個方格對量尺的5上表示四個5分，餘類推。 這個面積爲三十六個方格所佔，這就叫做直方圖。 直方圖常組合起來畫成矩形，立於橫線之上如第五圖A。 同一直方圖如B所示者則僅爲輪廓。 在此圖內每一方格不能顯出如第五圖的情形，通常於次數量尺上，度量矩形的高度。

圖五 直方圖表示五年級甲組算術理解力測驗分數的分配，只表明矩形與輪廓的應用。



等級圖 在圖4的B形，其性質爲直方圖的A，等級次序爲C，與第三圖的直條形的聯合。 此與直方圖和直條圖相似。第一：每項分數由一方格表明，方格高度在底線以上是和分數的數量相等。 第二，每項分數的

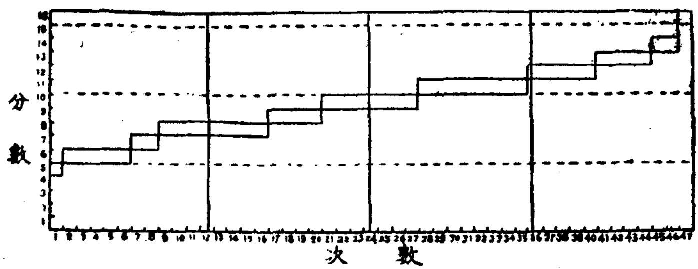
次數容易看出。 等級圖和等級次序及直條圖相似的地方，就是分數繼續排列，任何分數的相關地位很容易決定，例如分數6；而且把橫線距離分成四部，那些分數在那一個四分之一以內一望而知。 至在直方圖則不輕易分為四個四分之一。

直方圖和等級圖的密切關係由箭形表示出來。我們可以想像A形的立方體沿線的方向移到B形的地位，所以在這些小方塊中，當然無需寫出分數的數量，其在等級圖每一小方形內，亦無需完全標明。

問題： 繪一等級圖與第4圖所示者相同，表示五年級乙組分數的分配。用方格紙使每吋成五行(參看圖8)分數量尺從左邊起，次數量尺從底邊起，依次繪矩形， 使每一矩形所含之方塊之數與分數相關的次數相等。 以直線分底邊距離為四個相等部分，僅簡單的表示矩形的輪廓而省去矩形分數的數目。

解決： 由第6圖表明等級圖的結果 [1]

圖六 等級圖表示五年級乙組算術理解力測驗分數的分配（此圖化為簡單不表明矩形內分開的方塊和分數的數量）



[1] 做一個等級圖如第6圖這樣的簡單並不一定是實用的，不過為看出分數分配在那一個四分之一而已。把等級圖化為簡單而有十分實用價值者，將於下章解釋之。然第6圖所表示者，是為起初易於了解並為幫助明瞭從此圖所發生更實用的圖表。

從等級圖求中數　五年級乙組的次數因為有47個，所以用線分底邊距離為四個相等部分，不能把分數的整個數量標出，這是可以看出來的。在每一個四分之一內，我們可以說有$11\frac{3}{4}$的分數。中間一條線經過矩形是代表10分，因此我們可以說中分數是10。這當然與第一章的中數是一樣的分數。

四分差分數　畫分上四分之一分數的一根線經過矩形上的分數12，我們叫這個分數為分數分配的上四分差。上四分差分數叫做Q_3。畫分下四分之一分數的一根線經過矩形上的分數 8，因此我們稱這個 8分是下四分差分數。下四分差分數叫做Q_1。這三個分數12，10，8，就是Q_3，M與Q_1（我們可以把中數當作Q_2）。

在五年級甲組的例子中，$Q_3=10$，$M=8$，$Q_1=7$，在第4圖上如果上一根的畫分綫經過矩形所代表的10分和11分（向左邊一個單位）之間我們則當稱$Q_3=10\frac{1}{2}$。倘分數的全距離很大，半分點十分清爽，則通常取任一點或最近於整數的（假設是偶數）為Q_1或Q_3。

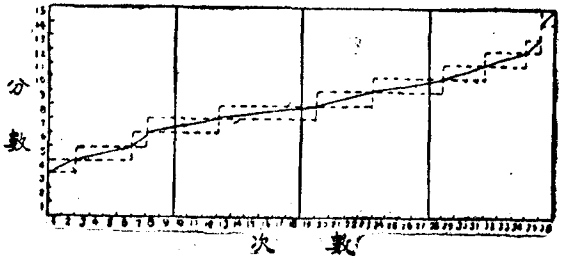
Q_1與Q_3的應用在第八章內討論。

對角曲線　我們可再進一步把等級圖化為簡單，卽省去所有矩形而僅畫對角線。矩形的位置，可以矩形的對角線完全決定，這是一定的。第七圖卽表明第四圖的等級圖，其矩形由對角線重新表出。在第七圖所繪之線，我們可稱為對角曲線（Line of diagonals）或曲線圖形（Line graph）對角曲線並且表明得4分的有兩個，得5分的四個，6分的一個，餘類推，得14分沒有人。

問題：給一對角曲線圖和第七圖所示的一樣，表示五年級乙組算術分數的分配。省去所有的矩形（參看第六圖）

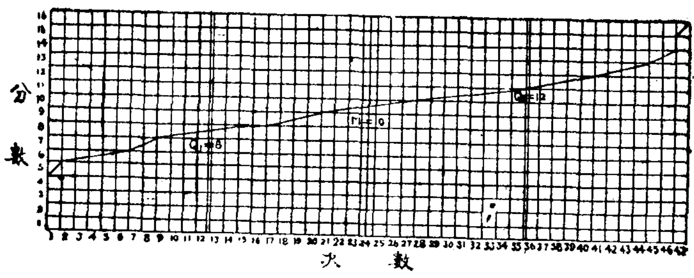
解答：結果在第八圖內表示。

圖七　第四圖的等級圖，其矩形以對角線表明



繪這一類的對角線，只須確定對角線的起點與終點。所以標明第一個對角線底下的一點必須在圖形的左緣，其在綫上則標明在這一塊空格內，較低的限度是代表5分，如左邊量尺上所示者。第二點在上一層並且經過一格，因只一個5分。再下一點又上一層而經過五格，再下一點又上一層經過兩格；餘類推。每一點用鉛筆移上一格（矩形的寬度）向右移動空格的數目和分數中所有表示的次數是一樣。至在15分的情形，則因沒有人得15分，所以我們卽上一格爲止並無超過。故直行對角線，是表示沒有分數，對角線愈長而愈近水平綫，則分數的次數愈多。

圖八　對角曲線表示五年級乙組算術理解力測驗分數的分配



練習10　用一方格紙（最好規定每吋五行）製一第八圖的放圖。

練習11　繪一對角曲線和第八圖一樣，表明六年級甲組分數分配。(參看練習5，第13頁或表3)求下二十五分點，中數，上二十五分點。

練習12　繪一直方圖和第五圖B形一樣，表明六年級甲組分數的分配。

練習13　繪一直方圖及對角曲線表明六年級乙組分數的分配(參看練習5)

在下章內我們可看出對角曲線在特殊圖形所謂百分比圖內是怎樣畫的，於百分比圖中任何分數的百分等級可一望即知。

第四章　已歸類的分配

處理分數新方法的需要——求已歸類分配的中數——求均數較便利的方法——直方圖——已歸類的分配圖——求已歸類的分配之中數——用估計法求中數——參酌原表求中數法——求已歸類分配的中數之圖示法——用圖示法求四分差分數——計算大數量的中數——更精密的中數解釋——理論關係點——幾種理論的研究

處理分數新方法的需要　在我們以前的討論，我們所討論分數的分配，只限於狹小範圍，——例如從4到15，——使每一分數的次數可以觀察。但是分配範圍一廣——例如從15到69——用另一方法處理則較爲便利——其法卽將分數表列歸類是已。

第十表乃四年級乙組，五年級甲組，五年級乙組，與六年級甲組智力的測驗。

表　　十

年級	分數
四甲	13，18，19，38，41，9，31，30，26，20，45，54，20，7，30，18，10，19，9，44，16，26，22，25，28，16，10，20，23，14，17，38，28，36，17，31，47，22

五甲	23, 35, 37, 45, 27, 16, 31, 42, 28, 35, 54, 34, 47, 22, 48, 39, 27, 45, 26, 29, 13, 29, 41, 37, 27, 18, 48, 32, 40, 16, 42, 30, 19, 30, 15, 26,
五乙	38, 33, 20, 22, 47, 66, 59, 19, 37, 34, 47, 45, 32, 18, 48, 28, 27, 45, 57, 43, 41, 47, 44, 50, 31, 44, 33, 28, 30, 52, 61, 23, 41, 24, 26, 23, 57, 48, 62, 39, 17, 36, 17, 41, 46, 19, 31,
六甲	58, 69, 30, 26, 60, 47, 53, 46, 57, 52, 40, 56, 49, 34, 66, 50, 53, 49, 66, 23, 34, 47, 45, 54, 49, 23, 59, 38, 38, 34, 41, 46, 61, 47, 26, 53, 30, 24, 66, 39, 59, 45, 50, 41, 35,

照我們前面所用統計算術測驗的方法，先將智力能力的測驗做一分數分配。假使做一表和第二表相同，並將每一分數分別記出，則表格甚長。如將分數分類，使分類的數目不超過二十，而每類不大於十。假設我們將分數以五分類，使分數歸入於0到4，5到9等，其餘類推。這種分數的距離通常叫做組距(Class intervals)四年級乙組，五年級甲組，與五年級乙組分數分配情形見第十一表。

練習14 完成第十一表六年級甲組分數的分配(查第十表分數)

表十一 表明四年級乙組，五年級甲組與五年級乙組智力測驗分數的分配

分數 組距	0 | 4	5 | 9	10 | 14	15 | 19	20 | 24	25 | 29	30 | 34	35 | 39	40 | 44	45 | 49	50 | 54	55 | 59	60 | 64	65 | 69	70 | 74	75	次數
四乙		|||	||||	卌	卌|	卌	||||	|||	||	||	|						38
五甲			|	卌	||	卌	卌	卌	||||	卌	|						36
五乙				卌	卌	||||	卌	|||	卌|	卌	||	|||	||	|			47
六甲																	

求已歸類分配的中數　要達到表示分配集中趨勢的普通目

的，用中數便可以了。例如通常應用的，是求常模(Norms)所以第五年級常模(或常態分數Normal Score)在任何測驗上普通皆視爲是大團體內未曾選擇之五年級學生的中分數。此層在以後討論。然而有時又以求分配的均分數爲較爲妥當。這就需要以尋常方法求相關係數了。

我們把一組學生分數分配如第十一表，因此失去了實際分數，不能以尋常方法求出均數——即是將所有分數相加而以分數之數目除之。只有一法可以應用的，就是假設各組的所有分數(如35—39)都等于那一組的中值；因此求這些中值的均數便好了。

問題： 求五年級甲組智力測驗的均分數(參看第十一表)

解答： 在50—54—組的分數我們假設是 52 分。其次五個分數假設47，餘類推。其均數計算如次：

1	個	52	分＝	52
5	個	47	分＝	235
4	個	42	分＝	168
5	個	37	分＝	185
5	個	32	分＝	160
8	個	27	分＝	216
2	個	22	分＝	44
5	個	17	分＝	85
1	個	12	分＝	12
36個	分數總數＝1157			

1157÷36＝32.14(均數)

用精確的方法計算，均數爲32.140不然，我們也可簡稱均數爲32。

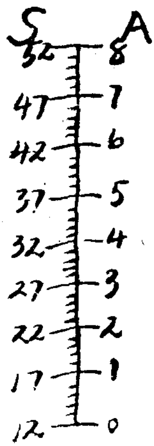
如果我們回到原來分數而用尋常方法求均數則得32.03。此即表示我們依據第十一表分類分配所作的統計，其正確約爲每百分比的三分之一。

求均數較便利的方法　(用代替法解答)三尺，六尺，九尺，

十二尺，十五尺，的平均數是多少？ 答案：是九尺。 假設我們把這些數量改為碼。 那就變為一碼，二碼，三碼，四碼，五碼。如果我們再回過來改為尺，那就是九尺。 與我們頭一次得的答案是一樣的。 讀下面各段時，把這個觀念放在腦筋中。

我們再研究一個實例假設有一簡單的寒暑表於此，上有華氏與攝氏兩種度數。 華氏寒暑表溫度的均數，當然在寒暑表某一空點上表示出來，如果在攝氏表上找出同樣溫度的均數，則均數在寒暑表上亦會表明同一之點。 我們可以應用這個原則去計算均數而使其簡單。

在第九圖表明一綫上有兩個量尺，S與A。S量尺代表實際分數價值；A量尺是一輔尺。 這兩個量尺是相應的，如華氏表與攝氏表相應一樣。 在S量尺上各項價值的均數可由量尺上某一點表出。 A量尺上各項價值的均數與S價值相應者，可在量尺上同一點表出；和參照寒暑表解釋一樣。要求S一組價值（分數價值）的均數，然後再轉為S價值。讓我們舉一很簡單事情做一個例子。



圖九　表明以較大單位與較小數目的輔尺，代替量尺的分數求均數的方法

問題：　求12，17，22，27又27的均數。

普通解答法：　這些數目的總和是105。以5除之得21即為均數。

替代法解答：　現在以第九圖上相關的A價值（輔的）代替這些數目。 得0，1，2，3，與3。 其總數為9。 9÷5＝1.8。A量尺上的1等於17分。 .8在A量尺的單位上代表幾呢？ 因為A量尺上一個單位是代分數的五個單位，所以.8

在A量尺上代表五個.8即4個單位。以此數加入17得21即爲這五個分數的均數。此與用普通解答法所得者是一樣的。

問題: 用兩種方法求五年級甲組分數的均數。

解答: 這兩個解答在下面的表內表明出來。左邊是普通的解答，右邊是替代法解答。52分是以輔尺上8代替，47分是以輔尺上7代替，餘額推。

普通解答法		替代解答法	
1×52=	52	1×8=	8
5×47=	235	5×7=	35
4×42=	168	4×6=	24
5×37=	185	5×5=	25
5×32=	160	5×4=	20
8×27=	216	8×3=	24
2×22=	44	2×2=	4
5×17=	85	5×1=	5
1×12=	12	1×0=	0
36	1157	36	145

1157÷36=32.14(均分數)

145÷36=4.028(輔值的均數)

.028×5=.14

32+.14=32.14(相關的均分數)

把這兩種計算方法比較一下，就可看出在第二種方法，我們先求出輔值的均數與第一種所計算的分數價值相應。第二種方法所得均數是4.028。S價值（分數價值）和A價值相應的是什麼呢? A量尺上的4點和分數32相應。.028 點在A量尺上分數價值是什麼呢? 試一驗第九圖就看出在A量尺上每一單位和 S 量尺的五個單位相應。所以 .028 在A量尺上與S量尺上5×.028或.14是相應的。以此數加於32即得 32.14和A量尺上4.028相應。這所得正確價值與第一法所得者毫無二致。

我們可用輔值1,2,3,等，到9，以代替0,1,2,等，到8。或是用4,5,6,等，

到12，或2，4，6，等，到18。無論用什麽量尺，其平均價值終久歸到量尺上同一點，雖然有各種價值之不同，而相應的分數價值則當爲32.14。

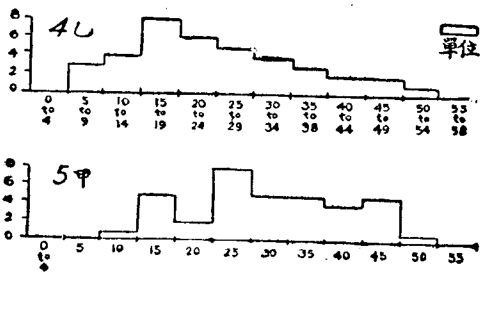
這種求均數的替代方法，似乎麻煩而不切實用，但在許多情形中，有很大的便利。

練習15　製一粗淺圖如第九圖，將7，12，17，等數目一直到52寫在左邊，其代表輔值的分數價值則爲1，2，3，等數目一直到10。求與四年級乙組（表11）分數相應的輔值之均數，用中值代替實際分數。將平均輔值轉爲分數如上面所計算的。先求與全體數目相應的分數，切記A量尺的一個單位等於S量尺的五個單位。

直方圖　分類分配可由直方圖表示出來，和未分類的分配所用的方法是一樣的，所不同者卽每一矩形所代表的分數次數，是在一定的組距以內，而非分數次數只表示一個價值。

直方圖表示四年級乙組和五年級甲組的分數分配，在第十圖內表明在這樣情形中，可以看出圖內面積的單位，不是正方而是矩形，長高爲一與四之比，如角上小矩形標明單位這一個形狀。每組分數除第一組外只表明起頭的一個數目就夠了。

圖十　四年級乙組與五年級甲組智力測驗分數分類的分配之直方圖

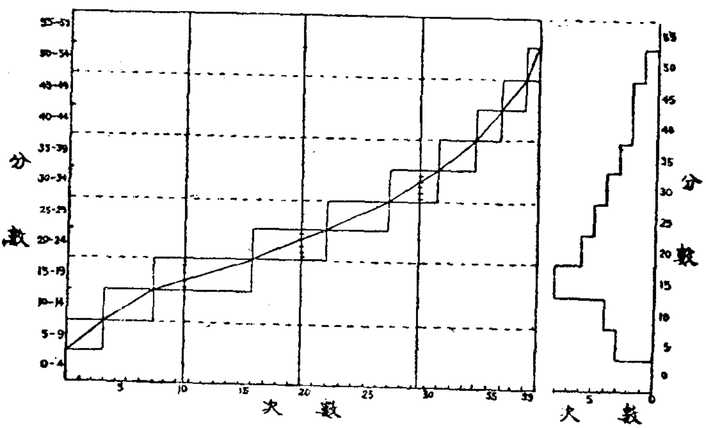


練習16　用方格紙將第十圖放大並加入直方圖，表示第十一表上五年級乙組與六年級甲組分數的分配。使相應分數的組距以直線畫分，俾直方圖的相對地位，一望而知。

已歸類的分配圖　我們現在要以表示分配方法的等級圖與直線圖(對角線)應用到分類的分配上去了。直線圖當然是兩種當中的較簡單較實用的，但是等級圖的原理易於明瞭，且可幫助對於直線圖爲較清晰的鑑別。

直方圖，等級圖，直線圖三者在未分類的分配上之關係是一樣的。所以第十一圖表明四年級乙組(智力測驗的分數次數見第十一表)的等級圖與直方圖和第四圖是處於同一樣的地位，其對角線亦如此。

圖十一　等級圖，對角線，直方圖表明四年級乙組智力測驗分數的分類分配；說明看直綫圖的方法。



求已歸類的分配之中數　我們現在研究求五年級甲組智力測驗分數的中數的方法。因爲前面所列的次數總共是36，中數分數按照排

列次序是在第十八與十九分數之間。如果我們將第十一表五年級甲組的分數從左數起，則第十八與十九的分數是在30—34一組分數內五個次數中的第二個與第三個。

我們現在既可估計中數分數是多少，亦可在那五個人眞實分數中觀察一下，按大小次序求出第二與第三的眞實分數。

用估計法求中數　估計中數的方法，即是假設這一組的分數其分配差不多是等距離，而且這裏面是包含求中數的。例如這一組五個分數其中含有中數，我們可假設這五個分數是30,31,32,33和34。於是記好中數是在第二與第三分數之間的，向上計算，中數是假設在31分與32分之間。我們應當說五年級甲組的中數分數是$31\frac{1}{2}$；或者免去分數 ● 我們可僅說是32。(如分數全距離像這樣的大，則小數(.5)不值得注意了。)

參酌原表求中數法　我們現在回到原來分數，看實在中數與用估計法所得者，其大小相差如何。如果我們觀察五年級甲組在30—34一組中的五個分數，則知這幾個分數是30,30,31,32,與33。中數就是在30與31之間，即是$30\frac{1}{2}$；或者不算小數，我們應當說中數是30。這較以估計法所得的中數少一分。

問題：求五年級乙組智力測驗分數的中數(1)用估計法(2)用參照原表法(第十表分數)。

解答：(1)因有47個分數，中數分數是第24個分數，可從任何一邊數起。從底下數起，第24個分數是在35—39一組四個分數中的第三個。我們假設這四個分數是35,36,38與39 —— 這與我們分配的幾完全相近 ⊖

● 要免去分數，通常取最近似的整數。

⊖ 選擇這四個分數的根據在下面說明。

——在這樣情形之下，我們應當說中數是38。(2)再觀察五年級乙組四個實在分數在35—39一組者，是36，37，38與39。第三個分數是38與我們所揣測者完全相同。

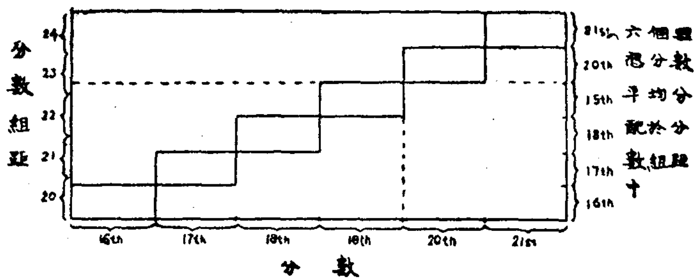
求已歸類分配的中數之圖示法　我們從直線圖很容易估計分類分配的中數。譬如假設從第十一圖的直綫圖估計四年級乙組的中數，其做法如下：

從圖內眞正的中點畫一直線，如在未分類的分配一樣做法。因爲有38個分數所以直線須經過橫尺上第十九與第二十的單位空間。

這一根線在第十一圖上所畫的經過20—24一組，代表六個分數的矩形。我們現在要估計中數是20，21，22，23，或24。

我們現在把含中數分數的矩形作放大的觀察。此於第十二圖表明之。在放大的矩形中畫有小矩形代表六個分布於20—24組矩中的分數，假設平等分配於組矩中，這些分數和在未分類分配的等級圖內是一樣的。(這個假設常用以討論分類的分配。)

圖十二　把第十一圖含有中數分數的矩形放大觀察；證明求中數的方法。

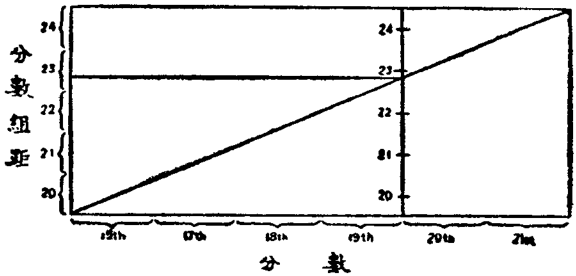


當然，六個實際不同的分數不能平等分布於五個分數的一個組矩中；但是我們可以把代表20—24分數組矩的量尺距離分爲六等分，如在第十二圖右邊所示者，而繪六個小矩形以適合於六個部分。

在量表上，介乎第十九與第二十分數之間， 按照我們六個部分看，其高點在左邊量表單位上，分數適表示23。 所以我們對於實在中數的價值最好的估計爲23。或者我們可以說中數分數在圖上求得的是23。

在第十二圖中，當然不需要畫小的矩形圖。 第十三圖卽表明不須矩形圖得到同樣的結果。 所需要者乃在表明中數線切斷對角線之一點並將此點之高與直行量表作一比較。 在第十三圖，這五個量表單位中點 ⑬ 之高由中數線上之橫線表示出來；並且看出對角線橫過這一點的高度與橫線之高最相近，代表分數23。

圖十三 表明不用小矩形如第十二圖求中數的方法，並證明量表單位中點的應用。



在四年級乙組學生數，如爲奇數，其中數分數在第十九而非在第十九與第二十之間，那末在所畫第十二圖與第十三圖的直線，必經過橫線標明第十九的中點，然估計中數法則仍是一樣。我們應當求直線截斷對角線的一點，並將此點之高度與直行量表作一比較。

現在再歸到第十一圖，可以看出中數垂直綫(經過圖的中點) 與那橫線相交，橫線是代表量表上20—24組距中五個單位的中點的，第十三圖亦是如此，而對角線經過橫線所代表分數23最近的地方。 在第十二圖與第十三

⑬ 參看下面應用中點的理由。

圖亦同一情形。 用這個方法，由直線圖所表示分配上的中數分數爲23。我們現在不再估計實在中數，而要研究以圖示法求中數了。 換一句話說，在分類的分配情形中，我們要用理論的中數而非用實在的中數。

用圖示法求四分差分數　四年級乙組分數，其上四分差與下四分差分數的分配，用對角線方法求之，與中數的求法一樣。是以求四分差分數，我們多畫兩條垂直線連中線在內，將圖形寬度分爲四等分。 在近對角線之處，將這些直綫等分，則下四分差的線將對角線截斷於代表分數16的一點。 所以我們應當說下四分差分數是16。上四分差的線截斷對角線近代表分數33的一點。 所以我們說上四分差分數是33。

計算大數量的中數　如將第十二圖與第十三圖細密觀察，在這樣情形之下，求圖形的中數實際上可求從$19\frac{1}{2}$到$24\frac{1}{2}$一段中$\frac{4}{6}$的一點。($6=$組距次數的數目，$4=$在中數點下次數的數目）㊀ 我們假設在這一組有50個次數，中數向上數爲第37，或在第37與第38分數的一半。 在這兩個情形中，爲達到普通目的，求$19\frac{1}{2}$與$24\frac{1}{2}$間$\frac{37}{50}$的一點，卽十分正確，換言之，卽求$19\frac{1}{2}+5$之$\frac{37}{50}$。(5=分數組距）㊁ 在這樣情形中，中數爲$19\frac{1}{2}+3.7$或23。

大數量分數分配的"中數點"可應公式計算如下:

$$(\text{中數點})=(\text{組距最低的點})+\left(\frac{\text{中數次數的數目}}{\text{組距次數的數目}}\times\text{組距}\right)$$在這個公式中，"組距最低的點"意卽在組距最低分數下$\frac{1}{2}$單位的一點；㊂ "中數次數的數目"，意卽在組距中的次數的數目而包含中分數（如其爲奇數）或組距中次數的數目在中數點以下(如其爲偶數)，"組距"之意，卽分數單位的數目。

㊀ 如第十九的次數是中數，則圖形的答案，所得的數量，爲這一組中的 $\frac{3\frac{1}{2}}{6}$。

㊁ 要極端正確，在第一個實例，應只取5的$36\frac{1}{2}/50$加$19\frac{1}{2}$。

㊂ 取最低分數下$\frac{1}{2}$單位的一點之理由，見下節"理論關係的一點"。

中數分數是取全數量中最近於中點之數。

問題： 假設遇到一個很大的數目，譬如是在758次數中而含有中數，設向上計算中數為第236而含有中數的一組為160---169。此中數分數是什麼呢？

解答. 中數點 ● $=159.5+\frac{236}{758}\times 10=159.5+31.=162.6$

所以中數分數是163，最近於整數的數目。

更精密的中數解釋 當兩種分配上的中分數，(或其他百分比)在直行量表上差異僅數點或不到一個單位，則解釋中數須更精密，不僅以全數量解釋之。例如在第十一圖(亦可看第十三圖)因對角綫截斷直行從22到23一段中約在.9點的距離，我們可更精密的說分配上的中數是22.9同樣，在第十一圖的上四分差與下四分差的分數可視為一是32.7，而一是16.0。

理論關係點 理論關係的一點由繪直線圖形和看直綫圖形而起：例如在第十一圖中求中數，何以把代表分數20的一點，認為直行量表單位代表分數20的中點，(再參看第十三圖)而不視為這個量表單位較低的限度呢？

所已做者不過是將直行量表畫分等級其中數點在代表分數20組距的單位中，這與代表分數20的等級最為相近，其他單位亦是一樣。總而言之，分數20是認為從$19\frac{1}{2}$延長到$20\frac{1}{2}$。

幾種理論的研究 大多數統計方法的書籍關於中數的研究視為很重要，著者相信討論幾種理論之點亦有價值，這理論之點似不甚容易了解。讀者對此無興味者可省略之。

● 要嚴格的正確，我們應取 $235\frac{1}{2}/758$，但是可以看出，差異是完全忽略了。

求分類分配的分數 ㊟ 例如組距 20到 24，應視爲非從如我們假設的19.5延長到24.5，而是從20.000到24.999＋(實即從20到25)假設分數20，意卽解决了20個問題其餘一個問題或者解决一半——譬如說無論從何處起只做到.999爲止，其餘21，22，與24亦是如此，這是一個爭論的問題。

一個學生得20分，大半能解决到第二十一個問題，而做到完成一半時，或者時間已到，我們可以如此說，這是很明顯的；所以在實際計算的數量或測驗智力活動，20分實在就代表$20\frac{1}{2}$的問題單位。當然，如果我們願意，我們可將每一分數加$\frac{1}{2}$，俾所有分數能表出智力活動的問題單位，而不以所解决的問題表出，但是這完全不實用，不需要，這亦是很明顯的。如果我們願意，我們能解釋分數20的意義，卽是智力活動的$20\frac{1}{2}$問題單位。

主張我們應將組距20—24從20.000延長到24.999的，並且說，如果五個分數在這組裏中數分數是五個分數中間的一個，則中數價値是量尺上距離20.000到24.999，或22.5的中點。此乃我們所稱的心理活動的問題單元，而非已解决的問題，這是很明顯的。

我們假設一個校長做一報告，說某級的中數是$22\frac{1}{2}$(如上面所見的)並假設某生在班中得22分。是否他的分數等於中數？照數字上看起來，當然不是的；但實際上是對的，確實的。這個中數是心理活動的問題單元，而某生的分數是解决的問題。如果化爲心理活動的問題單元，則亦爲$22\frac{1}{2}$。

以心理活動的問題單位解釋中數和以已解决的問題解釋分數，這兩種錯誤爲什麼會發生的呢？我們所需要的是計算中數的方法，使中數得同一樣的解釋，如分數和中數比較所得的解釋一樣。例如何以要把分數20，當作組距是從19.5到20.5而不當作20到20.999，就是這個道理。如果五個分

㊟ 因此有假設的或估計的中數。

數在20——24組距中，中數是中間的一個，用這個方法可求出來是22。這並且確實是20，21，22，23，與24五個分數的中間一個分數。問題不完全的小數部分無論如何是不可免的，這也不必說明。

問題 1，你如果做測驗，學生分數是從86到243，要把這些分數歸類，以求次數分配，你用多少做組距？

2，你能以心算求出162，165，161，167的平均數麼？

3，分類範圍增加後，你以為由圖示法求得的中數較近於實在中數，抑不近於實在中數？

4，假如某項分配的中數已經計算，設含中數的組距從50延長到59.999而中數認為是56.3.如果某生測驗分數是56。他的分數是否低於中數？

第五章　百分比曲線圖

百分比圖——百分比曲線圖的普通利用——怎樣在百分比曲線圖上繪對角線——分數分配——在圖內定點的步驟——累積差誤——求累計數——化累計數爲百分數——在百分量尺上做分點——百分數表——用量尺圖繪分點——繪對角曲線——全體百分比曲線圖——量尺圖B,C,D,E,F與G——在一圖內繪兩個或兩個以上的曲線——歸類的功效——歸類的修勻功效——曲線的普通形式——從圖表上求百分比

在等級圖和第十一圖的對角綫中，還缺少一種便利，就是要求中數和四分差分數㊀或其他各種百分比分數時，則須將圖的寬度分爲四分，十分或百分。

百分比圖　要免除這種不便利，我們可以畫矩形圖或對角綫圖，使矩形或對角綫所佔之橫距離分爲100單位。這個圖叫做百分比圖或百分比曲綫圖。㊁百分比圖特別用於俄提斯心理能力的自治測驗(Otis Self-administering Tests of Mental Ability)者，其每類測驗，皆包含百分比圖。第十四圖㊂就是表明百分比圖的形狀。以第十一圖的等級圖

㊀參看第三章四分差分數的意義。

㊁這個圖如沒有別的東西畫在裏面，則稱爲"百分比圖"較爲洽當，至稱百分比曲線圖時，則含有對角線或其他分配的表示，然而"百分比曲線圖"名詞，亦可用於空白圖中。

和對角綫圖繪爲第十四圖。繪這些圖的方法在下面解釋。以十四圖和十一圖比較，我們一望卽知百分比曲線圖的便利較大。

百分比圖的幾種優點第一，圖內橫線的距離早巳分成等分，便于求中數上二十五分點和下二十五分點。其次，這個距離在上下分爲百分之一的單位，以及10個百分比，20個百分比等；畫了許多直線以便於求與百分比相關之分數。

百分比50那根直線是表明代表各分數之直行量尺單位之中點。在這上面，其中數分數一望卽知爲23。虛線表明Q_3與Q_1一爲23，而一爲16，和以前一樣。百分比曲線圖之又一優點，卽用此圖以後，則所有對角線均同一寬度。這樣能夠使代表兩個或兩個以上的分配的對角綫繪於同一個圖中，至其他的優點以下再講。

百分比曲線圖的普通利用 如果你對於此書偶然細讀一下，就知道所討論者，是嘗包含畫在百分比曲線圖的直線和曲線之應用與解釋。實在百分比曲線圖，是最有用而最便利簡明的圖，可用以解釋分數及智力測驗和教育測驗等各方面。如果你對於解釋百分比曲線圖的前幾章，未能精悉，則不能徹底了解其價值。在其他一方面，如能徹底了解百分比曲線圖，則能於解釋分數之工具，自能指揮自如，並可作統計的比較，俾能較現在所用之方法簡單，迅速而容易。這個圖確是比較上的新穎。㊃ 然其應

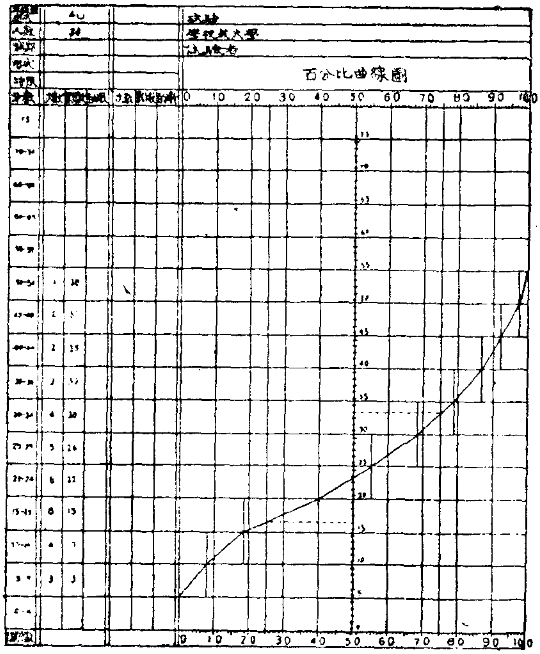
㊂ 講到準備特別的一圖以備繪直線圖，著者很感謝明里梭達大學的米勒教授(Professor W. S. Miller. University of Minnesota)米勒心理能力測驗的著者。在此書中所說明的百分比曲線圖起原於米勒於測驗中所示的百分比曲線圖。

㊃ 繪百分比曲線，這個意思並非新穎。尤爾稱爲弧形線(Ogives)對百分比曲線已有說明和引證 (G. Udny Yule, An Introduction to the theory of Statistics Pages151-153 J. B. Lippincott Company)百分比曲線應用的發展，然尙須有待於特殊準備的圖表，使繪百分比曲線時變爲易。

用已逐漸被人重視。 所以對此圖形，當多費時間，以求熟悉。

百分比曲線圖

中級與高級試驗用



圖十四　以第十一圖的等級與對角線繪爲百分比曲線圖。

怎樣在百分比曲線圖上繪對角線　俄提斯心理能力的自治測驗的百分比曲線圖，其計畫是使分數能直接分配於圖上。爲達此目的，故分數組距0—4,5—9 等列於左邊直行。 在百分比曲線圖繪對角線的方法，茲以五年級乙組的分數分配說明之。

分數分配　在一張百分比曲線圖的紙上，準備製各個人兩類分數的分配。 從這些分配中可繪兩個對角線。 這並不是說只有兩條線可以畫於一個圖上。 此外各組分數可分配於其他百分比曲線圖紙上或任何紙

上，即許多曲線畫於一個圖上亦便於分別。

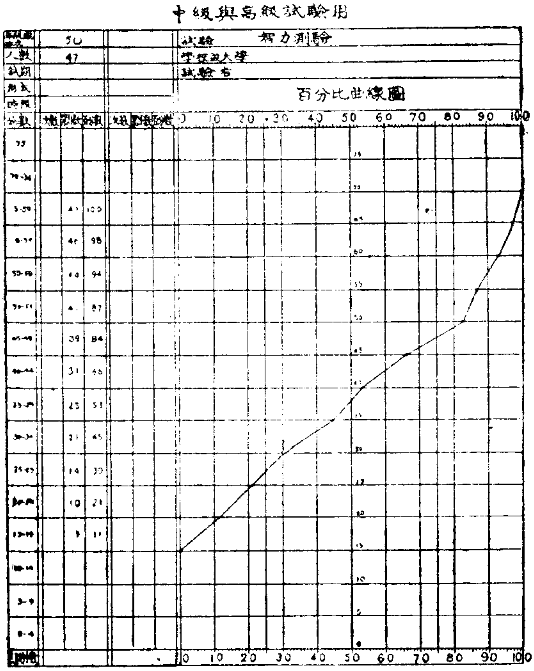
在圖內直行中有一行標明計數("Tallying")字樣者，將分數歸類，對準分數組距作一短記號，使每一個人的分數，歸入組距之內。第十五圖的百分比曲線圖，五年級乙組，有五個人分數是在15與19之間，五個人分數在20與24之間，四個人分數在25與29之間，餘類推。如果分配已做成一表如第十一表，則在各組距內代表分數的次數，當然能直接歸入計數(Talling)一行之下。

在圖內定點的步驟　在圖內定點表明對角線的終點，我們當另用與以前不同的方法，因代表次數的橫距離單位，其全數須恰佔圖的寬度。換言之如果像四年級乙組的次數是38，則圖的寬度須分爲38等分。每一個$\frac{1}{38}$的圖的寬度，代表一個次數。第十四圖的矩形是根據於圖的寬度一個單位的$\frac{1}{38}$。

在五年級乙組，次數是47；所以我們須將圖的寬度分爲47等分，一個單位代表47個中的一個次數(看第十五圖)這樣做法有兩個方法。一個是將7個次數變爲百分數而應用量尺從0到100，一個是應用量尺將圖的寬度變爲47等分。兩個方法皆有說明。

我們這樣分法，第一點，頭一個對角線的起點當然須在圖的左線，其在橫線方面，則在含分數最低組距的底下界限作一記號。在此例中(第十五圖)是組距15—19。第二點是作頭一個對角線終點記號，須定於第二根線的上面而在圖的寬度47個次數中右邊距離的五個次數。第三點須定於再次一根線的上面而在47個次數中第二點右邊五個次數距離。定第四點我們再到次一根線的上面而在47個次數中超過四個距離，其次再上一線按照次數超過47個次數的七個距離，餘類推。

圖十五　表明在百分比曲線圖內畫對角線的方法



累積差誤　如果我們以測量方法定各種分點每一次數從最後一點起，則點的位置，將生累積錯誤。這就是說，如有一點定錯，則所有以下各點將受錯誤之影響，而且錯誤如在兩個或兩個以上，則全體各點將累積錯誤。基此理由，所以定點最好從圖的左緣直接計算，不必從剛定之一點計算。例如定第三點最好在向右計算至四十七分之十，向左計算四十七分之十七，餘類推。如是就要求次數的累計數10，14，21等。

求累計數　求累計數我們只須從次數這一行的底下起並將次數的總數放在每一個次數右邊的方塊內。如此計算上去，將上一組的次數包括在內。在第十五圖最低的次數是5。第一和第二的總數（累計數）是10，

第一，第二和第三的總數是14，餘類推，一直到最後的次數，其總數達到頂點時(47)當然與這一班的學生數相等。

化累計數爲百分數 化累計數爲百分數如上面所說的，其中有一個方法就是在直綫圖內作小點標明對角線的終點，例如有47個次數，則將47個次數變爲100分而以百分量尺繪出。 如在第十五圖有百分數一行表明，47個次數中的五個次數是百分之11，47個次數中的十個次數是百分之21，47個次數中的十四個次數是百分之30，餘類推，至47個次數中之四十七當然是百分之100。

在百分量尺上做分點 在第十五圖上第二點，是將單位11放在圖內左首邊緣的右面，第三點是將單位21放在邊緣右面，第四點是將單位30放在邊緣右面，餘類推；最後單位100放在左首邊緣的右面，當然到右首邊緣爲止。

百分數表 爲應用這個方法求百分數便利起見，在次數的數目不過60時，可做一百分數表(附錄II表I)用此表則任何累計數可對準行數化爲百分數。例如查47次數的一行則可以看出在47個次數中的五個次數之百分數是11，47個次數的十個次數之百分數是21，餘類推。

這個表當然可用作他種目的而不僅用於百分比圖上。 無論何時在60以內，要以此數除彼數則此表可以應用。 譬如以56除37則猶如求56分之37的百分數是什麽，換句話說，即化$\frac{37}{56}$爲百分數。所以我們在56行下對左邊37的數目求這個數目。 這個數目就是66；所以56除37=.66。

用量尺圖繪分點 前面曾經說過在百分比曲線圖上繪分點的第二個方法，是在直線圖內標明對角綫的終點——其法卽利用量尺將曲線圖按照次數多寡，分爲同等部分。

為達此目的所以把第十六圖A的量尺圖與每一百分比曲線圖，聯合起來。例如繪五年級乙組各分點，如在第十五圖上，不過以一紙條沿量尺上47（在第十六圖上×處表明）在紙上從起點標明距離，按照累計數等於量尺47的5個單位，10個單位，14個單位，21個單位等。其次再將紙條置於百分比曲線圖上並在紙的交叉綫上繪出距離。

如果手邊有分開的量尺圖，則可摺為適當的量尺，並直接應用於百分比曲線圖以測驗距離。

在量尺圖A上可以看出有許多量尺，包括40單位，41單位，等一直到100單位。例如在四年乙組的情形，只有38個次數，則這些量尺無一可直接應用者。然而如果我們應用量尺76，則可以兩個單位算一個，而將圖的寬度分為38個等分。同樣，如果我們有100個次數以上，例如138，則可用量尺69，以每一單位代表兩個次數，換句話說，就是兩個138的寬度的曲線圖。如果我們有550個次數，我們可用量尺55，而以每一單位代表十個次數，餘類推。如此則量尺圖可應用於任何數目的次數。

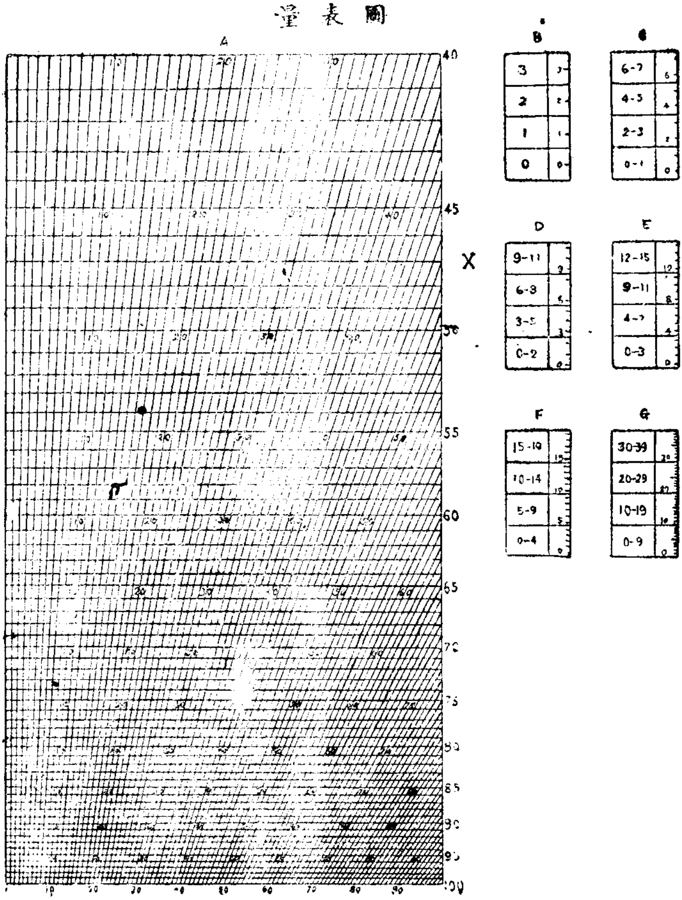
繪對角曲線　用上面任何一種方法將分點繪成後，所餘者不過為將各點聯為直綫，以完成代表分配的對角綫如第十五圖所表明者。有此對角綫則中數，四分差，以及任何分配的百分比分數均可用百分比綫與量尺求出之。

全體百分比曲線圖　為備一單簡百分比曲線圖適合於所有測驗起見——能適用於任何分數組距的圖——因計畫一全體百分比曲線圖。● 這個與俄提斯的心理能力的自治測驗所用的百分比曲線圖不同

● 圖在紐約宜榮克勇胡得遜之世界書店公司出版。(World Book Company, Yonkers-on-Hudson New York.) 全套二十五幅，每圖有量尺圖與說明以備應用。

圖十六 具備普通百分比曲綫圖的量尺圖

(實際大小， 長闊8與10吋)



之處，僅有幾點很小的細目。 第一，在次數分配上，有二十一個分數組距而不僅爲十五個。(看第十七圖)其次爲分配上能表示各項分數組距計，使分數組距一欄空出，以便隨手填寫 ⑪ 所以有幾種情形， 用組距0—2,3—5,6—

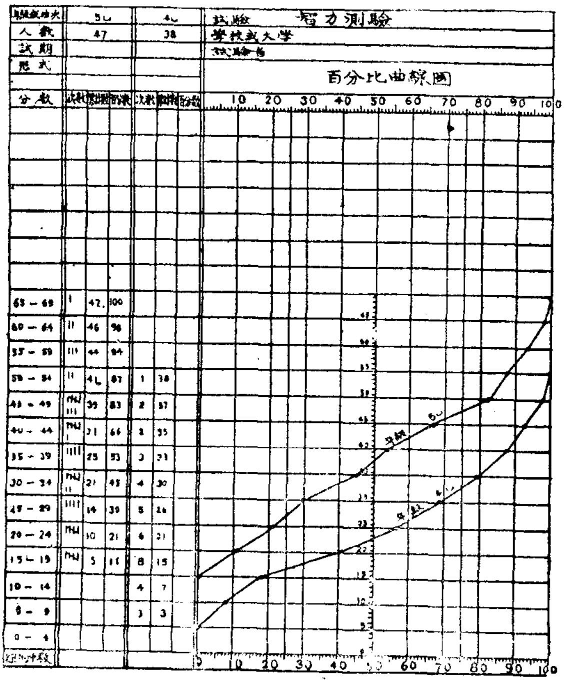
⑪ 第十七圖分數組距用打字機填出

8，等便利些，而有時以用0—9，10—19，20—29，等較為妥善些。

量尺圖B,C,D,E,F, 與 G.　因同一理由，百分比50直線還未畫分等級。為使此線可分為任何適當的單位起見，因有第十六圖的量尺副圖，以備普通百分比曲綫圖之用。取任一圖在右手邊緣摺疊而應用於百分比50直線或其他百分比直線，則此線所分等級，可表明每組一個單位的空間之中點，由此單位以組成組距。如要以一個單位為一組距則用量尺圖B，兩個單位為組距則用量尺圖C，餘類推。

在一圖內繪兩個或兩個以上的曲線　第十七圖表示代表四年級乙組與五年級甲組分數分配的對角線。若不使兩種分數處於同一寬度，則不能繪在同一圖上，百分比曲線圖特殊的價值，即在於此。有時兩條線抵觸，但此不常發生且不生嚴重障礙。

而自另一方面觀之，在同一圖上，繪代表兩個或兩個以上的分配，却有特殊的利益。這在以下再討論。



圖十七　全體百分比曲線圖(實際大小，長寬8與$9\frac{1}{2}$吋)

練習17　仿製全體百分比曲線圖並繪對角線代表五年級甲組與六

年級甲組心理能力測驗的分數分配。 直接從第十表做五年級甲組的分數分配，但從第十一表僅書出六年級甲組的次數。 五年級甲組用百分比表，(表1)六年級甲組用量尺圖(A)

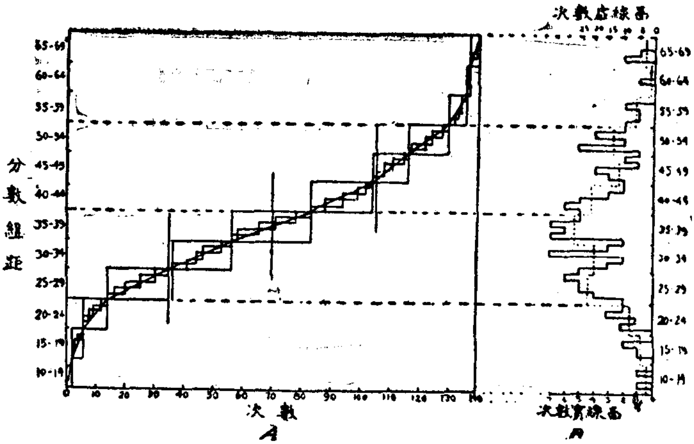
練習18 用練習17所求得五年級甲組與六年級甲組的分數分配求中數分數，上二十五分點與下二十五分點分數（卽百分之75與百分之25分數）10與90百分比分數。

用百分比曲線圖繪對角線要依實際性質加以修飾。 修飾的方法在第七章說明。 我們事先所須研究者，乃在分類對於分配的功效，對角線與直方圖的普通形狀，常態分配律，以及樣本的性質。

歸類的功效 我們從直線圖上，已經研究出實在中數與假設中數的關係。 茲進一步研究分類對於分配上的功效。

在第十八圖，五年級(五甲與五乙)140個學生心理能力測驗分數的分配其在A圖，表示(1)在等級圖，每一分數的次數由一小矩形表示(2)用等級圖將分數以五爲組距分類，其次數以大距形表示。 同樣，在B圖，同一分配由以下兩種表示(1)以實線直方圖表明每一分數的次數(2)以虛線直方圖只表明以五爲組距單位的分數次數。

組成實綫直方圖的矩形，其繪製量尺標準爲組成虛線直



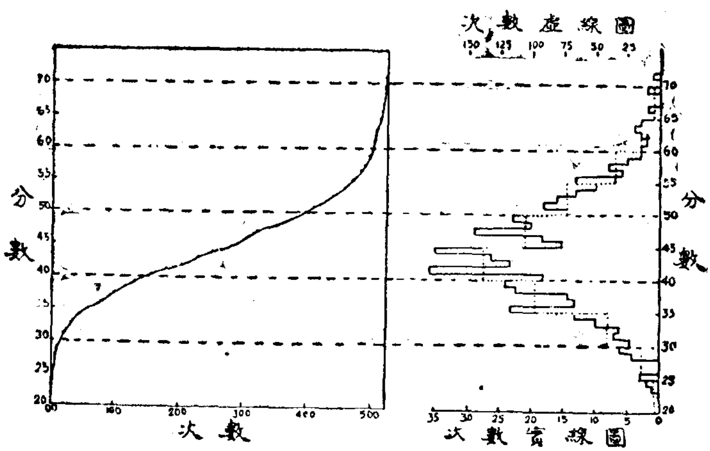
方圖矩形的五倍（看頂與底的量尺）

圖十八　五年級140個學生心理能力測驗分數直方圖及歸類分配與未歸類分配的等級圖，並附分類分配等級圖的對角線，表明歸類之修勻的功效。

在A圖大矩形的對角線上並可很明顯的看出這個對角線經過每一小矩形是如何密切。例如中數直線在對角線上切斷的一點，是在小矩形之內，而上二十五分點與下二十五分點直線在對角線上切斷的一點，亦在小矩形之內。換句話說，關於求實在上二十五分點(Q_3)中數(M)與下二十五分點(Q_1)的價值，在分類法的情形之下是沒有遺漏的。

歸類的修勻功效　B圖的虛線直方圖，表明修勻在這個分類上對於分配的功效。例如，實際上分數30，31，32，33與34每個次數是5，3，2，7，與3，虛線直方圖實際假設這五個分數的每一個次數是4——五個次數的平均數。換句話說，實卽將已歸類每一分數組矩平均其分數次數。

我們再研究較大分配的對角線與直方圖。圖19表明對角線與直方圖（矩形放大）代表大學一年級 ❸ 523個分數分配。此地我們看出對角線類



似修勻曲線有一顯著的趨勢。在虛線直方圖內，亦表明分類之修勻的功效。

圖十九 表明大分配對角線接近修勻曲線的趨勢，及歸類修勻對於直方圖的功效。

曲線圖的普通形式 等級曲線或對角線趨於特著的形式，這是很可注意的。這種線在中間幾趨於水平而上下兩端近於直線。

自另一方面觀之，直方圖則在中間一部分，趨於最高地位（或最密地位而兩端削減。下面一章討論直方圖與對角綫特殊形式，而根據於分配曲線圖，注重理論與實際方面之研究。

從圖表上求百分比 試觀量尺圖A亦可用以求百分比，換句話說，用彼數以除此數。例如，我們96之百分72是什麽，換言之，卽以96除72。如果我們將量尺圖A在96量尺上摺叠而合於百分比曲線圖頂上或底下的量尺，我們應求量尺96上72點直接對百分比曲線圖上之75。這表明72是96的百分之75，換句話說，72爲96所除＝75。

同樣，譬如說求75的百分之68，我們就要應用百分比曲線圖量尺，在量尺圖A上的75而在百分比曲線圖量尺上對68的地方，求出這一點。這卽是51。所以75的百分之68是51。

問題 1，繪一曲線圖化累計數爲百分比或應用量尺圖A，那種便利些？

2，上面這許多方法，是否某一種較其他一種正確些？

3，何以分數普通的分配的曲線圖，趨於水平而近於中點？

● 饑提斯心理能力自治測驗之高等試驗分數，時間限二十分鐘。

分數從哥拉芮多大學胡克教授得來附此誌謝(Professor Grover Hooker of the University of Colorado)

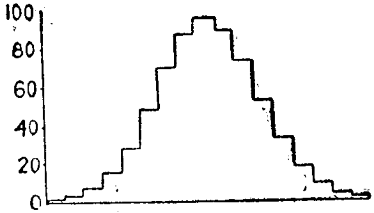
第六章　常態分配律

投擲銅元的機率定律——分數的機遇元素——分配的常態面——分配的常態曲綫——偏斜分配

我們常聽到常態曲線律這個名詞，並常看到鐘形曲線，常態分配曲線，常態次數曲線，分配之常態面，次數之常態面，常態機率曲線等。本章目的，即在說明常態曲線及"常態曲線律"之意義。

第二十圖的直方圖，代表軍隊團體智力測驗甲種628個兵士分數的分類分配。⓫ 這可以看出此直方圖較第十九圖修勻的直方圖爲有規則，並且對稱。實際我們可看出一個顯明的趨勢，即每個次數從中間起這一邊和其他一邊幾乎是平衡的。

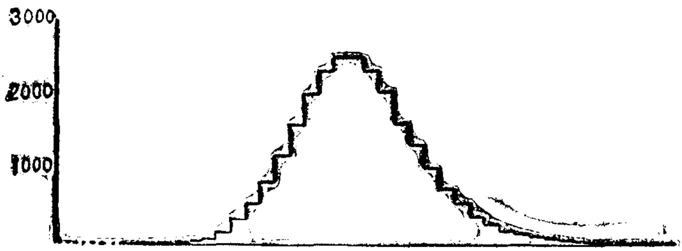
圖二十　直方圖代表軍隊團體智力測驗甲種的628個兵士的分數分配（注意對稱狀態）。



⓫ 取材於錫蒙氏 Percival M. Symonds 的文章，載 1928，二月的教育心理雜誌 Journal of Educational Psychology第72頁。

在第二十一圖的直方圖，是代表軍隊團體智力測驗甲種25,200 兵士的分數。第二十圖與二十一圖兩個直方圖，在形狀上很相似，這是可以看出的——我們幾乎可以說這兩個圖在形狀上是相等的；因為兩個圖很對稱，次數近於相等，兩個圖形自中點的兩邊觀之，皆是平衡。在每一直方圖內，兩個毗連次數的數量，其差異最大者，是在每邊適中的地方，並且在每一個情形之下，在每邊的底線或接近直方圖的中點，其毗連的次數差異，逐漸減少。

圖二一　直方圖代表軍隊團體智力測驗甲種25,200兵士分數的分配。



這兩個直方圖的相似並非偶然之事。如果我們用其他智力測驗，去測驗第二十一圖直方圖所代表同一的人數，例如國家智力測驗或黑爾音的修正皮奈——西門測驗，(Herring Revision of the Binet-Simon tests) 或推孟團體智力測驗，(Terman Group Tests of Mental Ability) 或任何教育測驗如斯丹福教育測驗 (或譯成業測驗 Stanford Achievement Test) 我們可以看出代表這些個人分數的直方圖，和第二十一圖的直方圖一定很相似。雖分數的組距，未必數目相同，然所指出的同一趨勢，必很顯明。

投擲銅元的機率定律　常態分配律乃支配次數分配的定律，而為純粹機遇的結果。倘我們假設以兩個銅元投擲而計算"正面"發見的次數，這個正面次數當然是二，一，或零。其正面發見的次數可如下表：

	第一個銅元	第二個銅元	正面發見的次數
第一次可能	正　面	正　面	2
第二次可能	正　面	反　面	1
第三次可能	反　面	正　面	1
第四次可能	反　面	反　面	0

在這些可能的結果中，發見兩個正面的一次，發見一個正面的有兩次，未發見正面的有一次。因為沒有理由可以解釋何以這個次數比其他次數發見的多，所以次數的發見，是趨於相等的。這就是說，在一百次中，第一次的可能發見25次，第二次25次，第三第四亦是如此。其意卽兩個正面發見25次，一個正面發見50次，沒有正面的發見25次

兩個銅元無論投擲若干次，其擲2正面，1正面，0正面的比率是趨於1:2:1。

如果以3個銅元投擲，則可能性是：

	第一個銅元	第二個銅元	第三個銅元	正面發見的次數
第一次可能	正　面	正　面	正　面	3
第二次可能	正　面	正　面	反　面	2
第三次可能	正　面	反　面	正　面	2
第四次可能	正　面	反　面	反　面	1
第五次可能	反　面	正　面	正　面	2
第六次可能	反　面	正　面	反　面	1
第七次可能	反　面	反　面	正　面	1
第八次可能	反　面	反　面	反　面	0

投擲正面發見3，2，1，與0的比率，在這個例子，趨於1:3:3:1的情形。

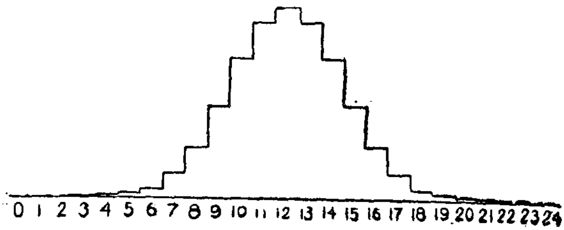
同樣，如果投擲四個銅元，其正面發見4,3,2,1，與0的比率必為1:4:6:4:1。如果我們如此推到十個銅元，則擲正面10，9，8，7，6，5，4，3，2，1，與0，其

比率的可能爲：

1:10:45:120:210:252:210:120:45:10:1 ⑬

第二二圖表明一直方圖以銅元24枚投擲按照機率的定律代表正面數目發見的次數。注意這個直方圖的形狀如何與第二十圖實際分數的直方圖相似

圖二二　銅元24枚按照機率定律代表發見正面數目之分配的直方圖



第二十圖的直方圖不再向外伸張成爲一個理論的圖形；此半因量尺上的分數未再伸張，半因在第二十圖的直方圖限度以外的理論直方圖面積，小於全部面積$\frac{1}{1000}$，且因只有628個次數，$\frac{1}{1000}$的數目尚不到一分。

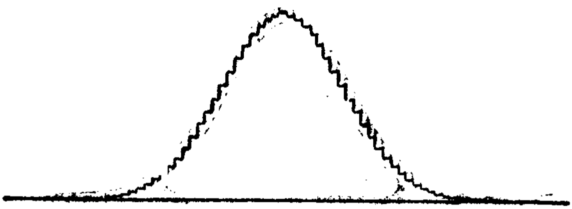
分數的機遇元素　現在如果我們設想一個學生，其所做測驗題的機遇，與擲銅元的正反機遇相似，則學生得分數的機遇，與以銅元10枚投擲所得的正面機遇相同，那末同一組學生分數的分配和投擲銅元正面發見的次數相似的理由，我們可以明白了。

在實際上，我們知道有很多的原因或影響，能夠決定一個兒童的分數，甚至在極簡單的測驗中，亦是如此。一個兒童的分數，受每天教育的影響，受決定先天學習能力的各種元素的影響，受他對於科目興趣的影響，這種科目

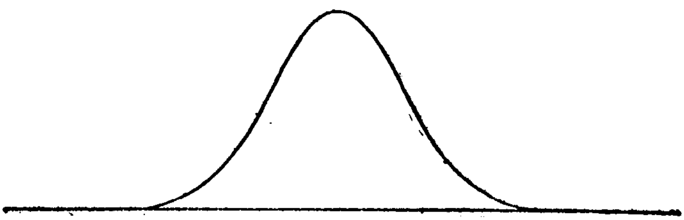
⑬ 這些價值和二項式$(a+b)^{10}$展開式各項係數一樣。無論多少數目的銅元皆是如此。二項式的指數即所投擲銅元的數目。

受各方面的限制，或呈現於兒童之前，或不呈現於兒童之前，受決定兒童所應受教育的性質的影響，最後，——至少到幾種限度，——在測驗時，受決定兒童身體的情形和心境的影響。這些因素，元子，和影響皆是自然的，任何一項發生於某組的一個兒童而不發生於其他兒童，大部分皆是機遇的問題。所以在一種測驗裏控馭一組學生分數分配，與控馭反覆投擲一組銅元正面發見數目的分配，其控馭原因的性質有顯著的類似。有這一個了解，再加以同組學生分數分配的直方圖，和投擲銅元正面數目分配的理論的直方圖，在形狀上有密切相關的一種事實之例證，如第二十圖和第二十二圖所示者，使我們承認這種分數分配傾向於機率的定律或常態分配的定律。

圖二三　直方圖，表示以很多數目的銅元投擲許多次時，正面數目分配傾向於機率的定律。



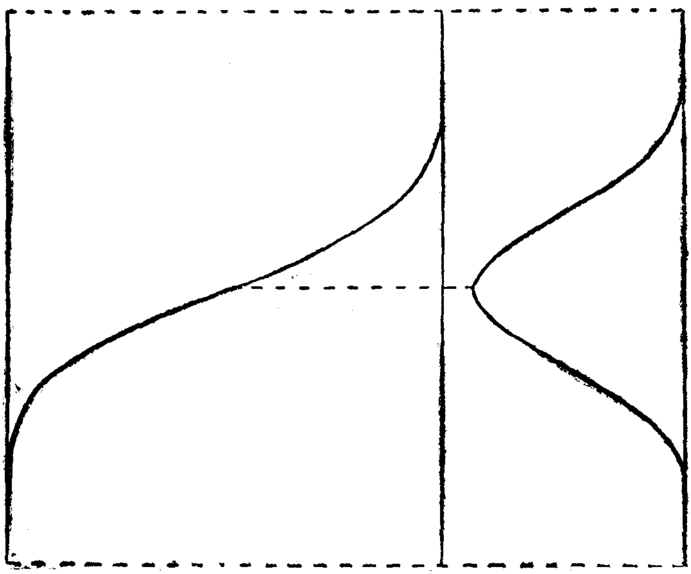
圖二四　一個理想次數的常態面，當次數的數目增加而單位甚小時，代表一個常態分配，表明其和直方圖接近的限度。



分配的常態面 如果我們以許多銅元投擲多次，則代表發見正面數目的直方圖趨於如第二十三圖所示的形式。換句話說，這個直方圖近於修勻的，對稱的曲線，如第二十四圖所示者。

第二十四圖的曲線，連其底綫所作成的平面，稱爲分配的常態面或次數的常態面，且可認爲是直方圖代表無限數的分數分配，其分配恰與常態分配律適合，而於分開時甚爲完整不作彎曲形狀。或者亦可視爲修勻的曲線、經時經過直方圖橫線的中點如第二十二和第二十三圖，以代表分數的無限數目。

圖二五 表明分配的常態面(修勻的直方圖)與分配的常態曲線（修勻的對角線)的相互關係。



A B

分配的常態曲線 第二十五圖B是表明分配的常態面，和第二

十四圖所表示者相同，A圖乃表明理想的常態對角線與分配的常態面之關係。這個對角線修勻的形狀還代表分數的無限數目，分開時，其每一對角線的長度，不易看見。注意其普通的形狀，此爲曲線圖的特徵，我們在以前已說過了。

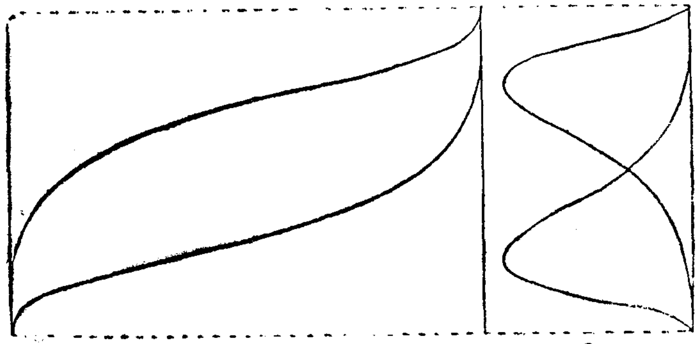
第二十四圖曲線的形狀與數學的定律相符合，並可繪至任何精確的程度。這個公式的開展和機率的理論相一致，因此這個面就視爲機率面。讀者如對於這種公式與曲線之數學的屬性有興趣，可研究較專門的書籍，如凱雷㊀的統計法(Statistical Method, by Truman L. Kelley)。

代表分數分配的直方圖，在任何一種測驗傾向於常態時，只有在分數不受外來影響的束縛的時候，以及分數同等的增加在量尺上有近於同等價值的時候，才有這種現象。

偏斜分配　有許多情形自由應用常態分配律時，常爲環境所擾。例如在一種測驗裏，如一級的中數爲65，則分數可從0到75，其最高的分數只能高於中數10點，而最低的分數可在中數下65點。在這種情形之下，此種直方圖似第二十六圖B的曲線圖，而其相關的對角線，似第二十六圖A的上面曲線。這種分配稱爲向下偏斜，如根據底線觀察，則稱爲向左偏斜。㊀偏斜分配當然不是一個常態分配，因爲常態分配是對稱的。

自另一方面觀之，如果在同一測驗另一組的中數分數，和底下的分數(零分)相近，則直方圖和B圖的下面曲線相似，而對角綫和A圖的下面曲線相似，第28圖的四年級乙組分數分配，就是這種情形。像這樣的分配，則稱爲向上偏斜或向右偏斜。

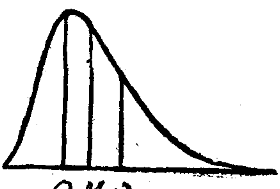
圖二六　表明分配面(B圖)與分配曲線(A圖)兩個偏斜分配的關係。



● 麥克美倫公司出版(Macmillan Company)

⊜ 偏斜的測驗 上部平面偏斜向下，下部平面偏斜向上，二者形狀相反，而按照字典的意義，偏斜謂上部平面向上偏斜。(如根據底線觀察則向右偏斜)

偏斜的各種測驗，皮爾生(Karl Pearson)和其他諸人所下定義，謂測驗上部平面偏斜為負時，則釋為向下偏斜。同樣，測驗下部平面偏斜為正時，則釋為向上偏斜。



測驗偏斜的方法很多，但尋常通用者，即求上二十五分點與下二十五分點的平均數減去中數而以Q除之，

即偏斜數量$=\dfrac{\left(\dfrac{Q_3+Q_1}{2}\right)-Mdn}{Q}$，

分子分母均以2乘之，因2Q=上下二十五分差間之距離(看第八章)$=Q_3-Q_1$偏斜數量

$$=\frac{Q_3+Q_1-2Mdn}{Q_3-Q_1}$$

第七章　百分比曲線

取樣的性質——修勻對角曲綫的功效——百分比曲綫——修勻直方圖的困難——百分比曲綫的利益——怎樣繪百分比曲綫

取樣的性質　我們來研究第十九圖所代表的大學一年級523學生分數。假設我們任意選擇100個，當然我們希望這取樣的中數分數和全體數量的中數大致一樣。如果這樣子純粹是隨意的取樣，我們沒有理由確定中數是大於或小於全體的中數，其以機遇得來者則爲例外。如果樣子從第一個100名以下取出，則或者在第二個100名之上。其上二十五分點與下二十五分點以及任何其他百分比亦是如此。

換句話說，我們當希望某種人口數樣本的分配，其普通地位與形式，大致應與全體人口數量的分配一樣。

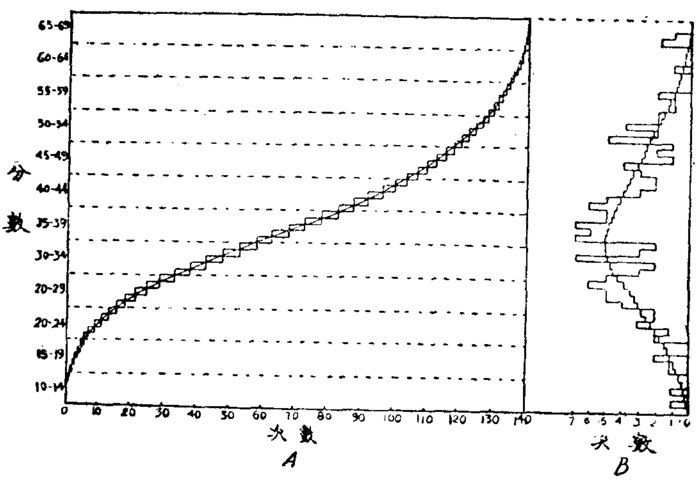
我們應希望在十歲兒童中任意取的樣子表示分數分配的情形，其對角線應佔同一的普通地位，而成同一普通的形式，如對角線代表所有十歲兒童分數的分配一樣。我們知道如不用分類，則後者的曲線也許爲修勻的曲線。所以如果我們要得到所有十歲兒童對角線最近是的地位與形狀，我們應繪一修勻曲綫能愈近於十歲兒童取樣的分數分配之對角線地位愈佳。

現在假設有某組學生反覆受一種測驗而以前並不知測驗內容。這些學生的分數分配在這個測驗中或者很能確切的代表這一組能力。我們知道代表這個分配的對角綫，或者很近於修勻的曲綫。至少標明對角線終點的各點因分數的數量多的緣故成爲修勻的曲線。所以我們的問題就是我們所有的材料繪最近於修勻曲線的地位，這種材料或者僅從每一兒童得一個分數。

修勻對角曲線的功效 在討論繪這種修勻曲線的方法以前，讓我們稍一研究修勻對角線對於相關直方圖的功效，在第二十七圖裏就是表明第十八圖修勻對角線的功效。第一先繪出標明對角線終點的各點，其次再經過各點畫修勻曲線。

修勻曲線的意義，就是沒有捲曲或突起的曲線。照這個意思說起來，當然不能畫一修勻曲線經過所有作圖的各點，因爲曲線要是如此畫法，則成波浪起伏之形。經過作圖的各點繪修勻曲綫的方法，在第二十七圖內說明。

圖二七 表明繪修勻曲線代替不規則對角線對於直方圖的功效。



在第二十七圖內，每一距形代表一個分數的等級圖從修勻曲綫上組成，並且看出從底下起，每一小距形逐漸較下面一個矩形稍長，一直到中間以後，則矩形開始縮小繼續至於上部末端。

把這許多逐漸上升與下降的距形聯成有規則的直方圖，則第二十七圖右面的圖形就是表示這個形狀。直方圖內的矩形較等級圖放大五倍以便表明相關的距離。原來的直方圖亦表明出來，如以此圖與第十八圖比較，則可看出修勻曲線其所修勻的直方圖較修勻對角線，格外適當。第二十七圖修勻直方圖其任何矩形的高度在理論上代表那個分數最近是的次數，如果在完全相同的情形之下再測驗同組的學生，這種分數也許要重行發見的。

在等級圖與修勻直方圖中的矩形當然不再代表分數的全體數量，而須視爲代表個別的分數。所以矩形代表分數25，26，27，28與29近於2.8，3.0，3.3，3.6與3.9各單位。這個意思，就是說如果在分配上有十倍分數（十倍人數或十倍分數）倘分配仍保持同一普通的形式，我們則可期望矩形爲28，30，33，26，與39單位。

無論何時，凡分數分配視爲代表一個較大的分配時(如像未選擇 ⊕ 的十歲學生視爲代表所有十歲的學生，或一個簡單的一組學生分數代表他們在這個測驗反覆學過多次的分數）則當修勻對角線或經過對角綫上畫出的各點，繪一修勻曲線。中數，四分差，以及其他百分比，可從這個曲綫上求出，與從對角線上所求者完全一樣。例如在求常模時應用這種修勻方法，此在以後再爲解釋。

百分比曲線　修勻曲線如第二十七圖所繪，經過百分比曲線圖

⊕ "未選擇"這一個名詞意卽從各組中任意取樣，不受選擇聰明的，愚笨的，升級的，留級的學生等手續的限制；如十歲學生全取諸五年級就是有限制的情形。

上各點畫出，這叫做百分比曲線。為合於最實用目的起見，則所繪修勻曲線亦不僅以一直線聯合各點卽為了事，並應從對角線中免去參差起伏的現象。

對角線的參差起伏，差不多是純粹機遇的結果；在同一組學生中，如做同一測驗，其第二次分數的參差起伏情形一定和第一次的不同。換句話說，這許多不規則的形狀完全是不相關的與偶然的，可以把牠修的很勻。

修勻直方圖的困難 讀者可追問我們能否在第二十七圖上直接修勻一個直方圖？這就是說能否不在對角線的地方繪修勻曲線？這是不可能的，除掉粗率的圖形是例外，所以不能繪的理由，就是我們不能度量修勻曲線的繪畫，經過直方圖其所包含的面積，恰與很不規則的直方圖相等。

如果不能夠與直方圖恰相等，則必代表不同數量的次數，當然也就不能繪這樣直方圖的曲線了。縱然有時改變分數的次數，我們仍須使次數的數量不變。

百分比曲線的利益 在對角線的地方繪修勻曲線一致的形狀，卽須代表同一數量的次數，因為是在同一水平線的限度內畫曲線的緣故。直方圖有些微的改變，卽是改變次數的數量，但曲線地位的變動，無論如何不能影響所代表之次數的數量。

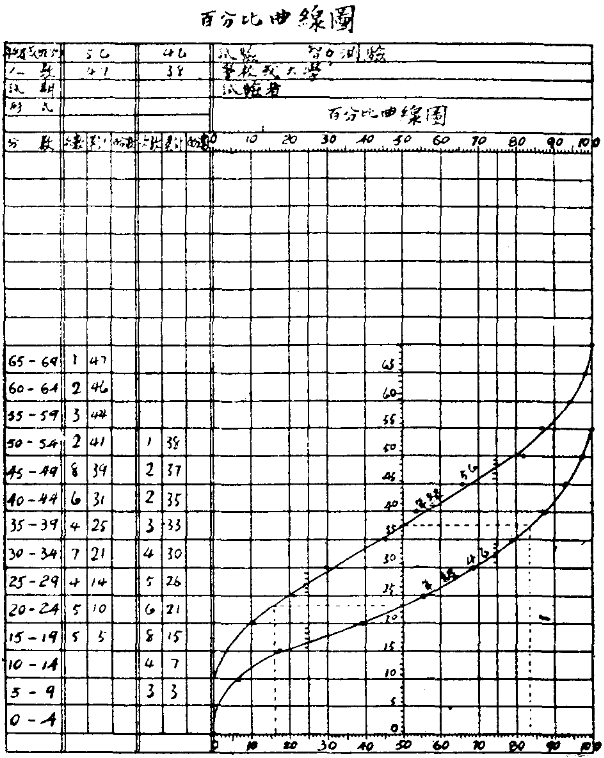
我們不再應用對角線與等級圖了。這個意思能達到一個實用的目的，卽使我們更了解百分比曲線的意義和重要。百分比曲線具有等級圖，對角線，直條圖，直方圖，以及年級次序等等的功用，並且較等級圖各種為佳。● 所以我們要單獨研究百分比曲線了。讀者要覺得難了解百分比曲

● 這樣解釋或者有一個例外。對角的意義是固定的，任何兩個人用同一材料應得同樣的對角綫，但兩個有經驗的人，用同一的材料，可繪出稍微不同的修勻曲綫。這可以說，修勻曲綫，無論何人均可按照說明繪出其所代表的分配可較優於對角線。雖些微失去一點固定性，而在圖的價值上有一種獲得。

線或繪百分比曲線，仍可繼續應用對角線。這樣並無妨礙。

怎樣繪百分比曲線　我們用五年級乙組智力測驗分數的分配，如第十一表與第十七圖所示者以證明百分比曲線的繪法。第二十八圖表明所畫的各點與第十七圖一樣，不過各點不是連接為一直線而是經過各點繪一修勻曲線。所謂"經過"者當然是穿過或介於二者之間的意思。在這樣情形之下，我們所繪的曲線，不能接觸多於一或二個以上的各點。

圖二八　說明繪百分比曲線的方法。



繪修勻曲線時在線上的每一點和在線下同一距離相接近的一點平衡，換句話說，在線上分佈各點距離的總數和在線下各點距離的總數量是一樣

的，且這些距離 ● 愈小愈佳，使與所繪的修勻曲線相一致。

在第二十八圖內，五年級乙組百分比曲線，起點是在低於最下的一點，地方，俾使此曲線顯出向下的性質。 此處有五個分數是在最低的次數的這多少屬於偶然的。 我們知道如果同一組再測驗一次（當然不問實際的效果）這五個分數中，或者有一兩個在組距以下。

雖然在各點的本身上，有很多不規則的情形，但仍如此安置者乃以示曲線經過一半時有近於直線的趨勢；所以要這樣畫法。

第一點是假設被第二點平衡，第三點由第四點平衡，第五點由第六點平衡，第八點由第九點平衡。

在第四年級乙組這一方面情形看起來，其各點的地位表明曲線在中間的地方，須向下稍微彎曲一點。 第一點被第二點平衡，第三點被第四點平衡，第九點被第十點平衡。各點多數的位置，是為使修勻曲線能直接通過，以便畫修勻曲線。

讀者可看出第五年級乙組的中數分數的一點，被曲線截斷百分比50直線的地方是37，在對角線的圖上亦得同樣的價值(圖十七)． 25—與75—百分比直線被曲線截斷的地方大約和被對角線所截斷的地方亦在同樣的地位。

然而80—百分比直線被曲線截斷的一點其分數為50，而為對角線所截斷的一點，其分數為49。 這兩個價值代表80——百分比分數的那一個最好?

這種差異顯然起於對角線的參差起伏，且因純屬偶然，我們乃認為修勻曲線的80——百分比的分數；是較有意義的一個分數。這一點不過表明從一

● 嚴格說起來，或者這許多距離應視為直線的距離；但如我們認為距離僅為對於曲線是垂直的，則各點近於曲線末端的離中差較各點近於中間的離中差關係稍小，這種重要的差異自然要顧及的。

個角以上修勻的價值。由修勻曲線得來的中數，和實在中數分別。我們可以說，前者是修勻中數，其他百分比亦如此。但是通常我們從未得到實在中數或其他百分比的實在價值。所以平常我們說分配的中數，其意即謂修勻中數，其他百分比亦是一樣。

練習19 在一個簡單的百分比曲線圖上繪百分比曲線表示五年級甲組與六年級甲組分數。

問題1. 在什麼情形之下，你以爲直線圖如第十七圖所示者在表示分數分配時，優於百分比曲線如第二十八圖所示者，又在什麼情形之下，你以爲可用百分比曲線？

2. 在原來測驗紙上求出之分配的實在中數分數與由細心繪畫之百分比曲線上所求出的中數，二者所代表的分數分配，你以爲那一個正確些？

第八章　差異分數

測驗差異的需要——全距離——中五十分距離——組的重疊——測驗差異的又一方法——中數差——機誤——平均差——標準差——常態分配的差異——問題

測驗差異的需要　教授一班學生，其智力程度大致整齊，較教授程度不齊者容易得多。縱然年齡大約相同，亦感困難，因爲後者需要解釋，較前者爲多。

我們假設一個校長，對他學校的學生，舉行智力測驗，並根據分數重行分級。（在第二十一章說明應用的方法）校長從各級分數的分配上，可以知道那幾個教師教授程度整齊的學級㊀，那幾位教師教授程度龐雜的學級㊁。

僅從分配上觀察而謂此級學生程度是十分整齊或不整齊等等，這是得不到完滿結果的。因此，有用簡單的數目表明每級學生的差異（學生能力比較的差異）之需要了。我們可以說這一級的差異是20點，一級是18點，一級是12點，餘類推。

㊀智力相同的學生

㊁智力差異的學生

用簡單的數目解釋分配的差異，有幾個方法。幾個普通測驗差異的方法是中五十分距離 (Interquartile range)，中數差(Median deviation)，平均差 (Average deviation)，及標準差 (Standard deviation)。這些方法皆在本章內說明。

全距離　分數的距離——即最低分數與最高分數間的距離——是表明分數差異的一種方法；但這種差異的測驗，不是一個完善的方法。第一，當分配分數時，失去每組分數眞實價值的軌跡，並不能說明分數是從何處起到何處止。例如，五年級乙組分數的距離，是從15到69，還是從19到65。更進一步說，假設五年級乙組的分數，倘若全是一樣，只有在15——19組距內三個分數中有一個是例外，而這一個分數譬如說在5——9的組距內，則全距離必加大10點·——所有的差異皆從這一個分數的改變而發生。

中五十分距離　前面曾說過，百分比曲線截斷25——與75百分比直線的地方，叫做分配上的下二十五分點與上二十五分點。在這兩點中間的距離，就叫做中五十分距離 (I. Q. R.)。例如，在第二十八圖，五年級乙組的百分比曲線所截斷百分25——直線的地方，其數爲27，而截斷百分75——直線的地方，其分數是48。這兩個分數間的距離，是21點(48—27)，卽爲這個分配的中五十分距離。

問題：　求四年級乙組中五十分距離。

解答：　四年級乙組25——與75——百分比分數其截斷25——與75——百分比直線，所表明之高度，一爲16，一爲32。兩個分數相差16點。所以四年級乙組分數分配的中五十分距離，是16點。

中五十分距離是測驗差異的一種，這是可以看出的。這就是說，如果在一級內25——與75——百分比分數間有一組距含21點，而在另一級用同一

測驗，其25——與75百分比分數間的組距只16點，則就全體觀之，第一級的分數較第二級的分數變異度略大。

自另一方面觀之，25——與75——百分比分數的價值，大體均視曲線的位置以決定，而不受制於一個簡單分數的變動。基此理由，以中五十分距離測驗分配上分數的差異，較測驗分數的全距離，好的多多。

一個平均優良的差異測驗，其全距離爲從百分比分數10到百分比分數90●。

練習20 從練習19所繪的百分比曲線內求五年級甲組與六年級甲組分數的中五十分距離。並求10—90百分比距離。

組的重疊(Overlapping) 在第二十八圖的百分比曲線上，可一望而知五年級乙組的分數，就大體觀之，較四年級乙組分數爲高，但這兩級分數的分配，很顯明有重疊的現象。說明重疊簡便的方法，即表明四年級乙組分數的百分數超過五年級乙組的中數分數 (Median Score)，或表明五年級乙組分數的百分數，低於四年級乙組的中數分數。所以在四年級乙組的曲線求出一點其高度代表分數37（五年級乙組的中數分數），我們看出四年級乙組分數上有百分之17如曲線所表出者，乃高於五年級乙組的中數分數。其虛線即表明此結果。

問題： 求五年級乙組分數低於四年級乙組的中數之百分數

解答： 四年級乙組的中數分數是23。我們在五年級乙組曲線上求出一點有23分數的高度。這一點在16——百分比線上，此即表明五年級乙組學

●寇萊博士 (Dr. Truman L. Kelley) 謂這種測驗較任何普通差異測驗爲可靠，至各種普通差異測驗在本章內說明。

生的分數有百分之16低於四年級乙組的中數㊀。

練習21　用上面所說的兩種方法（看練習19）求五年級甲組與六年級甲組分數重叠數量。

測驗差異的又一方法（Q）　我們已經討論中五十分距離，是測驗分配的差異方法。此外還有其他常用的測驗差異方法，有一個是二十五分點（四分位數）（Semi-interquartile range）即中五十分距離的一半。這有時只稱爲Q。此外再有三個測驗差異的方法是中數差，平均差，與標準差。三種之中，僅標準差重要些。如願省略，讀者可不討論前兩種，蓋中數差與平均差乃幫助了解標準差而已。

中數差　中數差就是求各分數與中數相比的各差數之中數價值。例如我們假設一小部分學生的分數爲：

4，5，6，7，8，9，10，11，12。這幾個分數的中數當然是8。分數4和中數8相比得4。分數5和中數8相比得3，餘類推。九個分數和中數相比，每一個差數如下：

4，3，2，1，0，1，2，3，4。

現在求這許多差數的中數，其求法和求其他分數的中數是一樣的。就是先將各數按序排列如下：

0，1，1，2，2，3，3，4，4。

如此順序排列，則中數的價值當然是2。所以我們可以說這些分數和中

㊀這並不是說，五年級乙組實在分數的百分之17，確低於四年級乙組的實在中數，但按照曲線，分數23代表五年級乙組百分之17分數，且分數23代表四年級乙組的中數。所以我們判定說明這兩級的重叠，是五年級乙組分數百分之17低於四年級的中數。嚴格說起來，我們應當說，如果這兩級的分數分配是有規則的，而非不規則的，則五年級乙組分數的百分之17低於四年級乙組的中數分數，這句話也許是正確的。

數相比的中數差是2。

問題： 另取一組價值：

1,3,4,5,7,8,10,12,13。求這些價值的中數差。

解答： 這九個分數的中數是7，每個分數和中數的差數是：

6,4,3,2,0,1,3,5,6。這些差數，按序排列如下：

0,1,2,3,3,4,5,6,6。

中數差在第一個分配內是2，在第二個分配內是3。我們可以說，第二個分數的分配，較第一個差異大些——卽較差異一倍又二分之一。

練習 22。 從第二章表2內，求五年級甲組與五年級乙組算術理解測驗分數分配的中數差。

機誤 機誤 (Probable error P. E.) 這個名詞，有時常用作中數差解。就某種嚴格意義言之，這個解釋是對的，而在他種情形之內，這是不對的而且錯誤的。

如果在一個簡單的範圍內有一百個量數，例如，是一個人手工的一百個等級，我們就要認爲這些等級的中數，是一個人手工能力的眞實量數；而在另一情形中，我們卽視其他的量數的各種數目，有一種錯誤，或爲正或爲負，這些錯誤的中數價值，——卽中數的錯誤（和量數分配的中數差一樣）——可稱爲機誤。其意卽各項機遇是單數（一對一）任何量數的錯誤不能超過這個數量。

所以在一個簡單範圍內，一組量數的分配的中數差，（有很多量數，其中數量數可視爲眞正量數）稱爲量數的機誤（P. E.）。但在其他情形中，則不能稱中數差爲機誤了。

平均差 Average Deviation (或Mean Deviation) ㊟ 平均差的

意思，就是各分數與平均數之差數的平均數。(注意，中數差是從中數分數相比之差數的中數，而平均差是從平均分數相比之差數的平均數)

例如，我們再取同樣的分配：

4,5,6,7,8,9,10,11,12。這些分數的總數是72，其平均數是8，和中數一樣。各項價值和平均數8的差數是；

4,3,2,1,0,1,2,3,4。我們現在可以求這些差數的平均數。總數是20，以次數的數目9除之，則平均差爲$2\frac{2}{9}$，或近於2.22。(注意，差數爲0時，其計算法和計算其他差數一樣。)於此可知與我們從中數差所求得者，非爲完全同一之價值，但中數差的全體數目，與這個價值最相近。

問題： 用前面同樣的例子求平均差：

1,3,4,5,7,8,10,12,13。

解答： 總數是63。用次數的數目9除之，則得平均分數7，(這又和中數一樣)。九個分數每個和平均數的差數是：

6,4,3,2,0,1,3,5,6，各差數的總數是30。以9除之，則得$3\frac{3}{9}$或近於3.33，即爲平均差。這個平均數目又較前面的中數稍高。於此有一趨勢，即分數分配的平均差，較高於中數差。然而兩種分配平均差的比率有趨於一致的傾向。例如，兩種假設分配中數差的比率，我們求出是2:3，而差數的比率亦是一樣，此可注意者也。

●平均數 (Average) 一詞，有的學者視爲各種集中趨勢量數的總稱，而均數 Mean 乃普通所認爲的平均數。然在這個情形之下，則以用平均差 Average Deviation 名詞爲便利，因平均差 Avg. Dev. 的縮寫(有時寫爲 A. D.) 不能和中數差 Med Dev 相混(有時寫作 M. D.) 因 M. D. 可解爲均數差 mean deviation，故以寫中數差 Med. Dev. 爲妥。

練習23. 求五年級甲組與五年級乙組算術理解測驗分數分配的平均差(看表2)與練習22所求的中數差作一比較。

標準差 Standard Deviation 標準差較以前兩個差異量數稍爲複雜一點，但統計學家認爲較固定些。在需要極端的正確時，則應用標準差。再標準差較其他任何差異量數便於決定，這有一種理由，或其其他理由存乎其間。爲達到教員或校長的尋常目的起見，由百分比曲線所求的中五十分距離已很正確了。此地所舉的求標準差方法，乃供參考而已。

標準差是各分數和平均數的差數之平方之平均數的平方根。雖然這句話會使人混亂，但舉一例以說明計算的方法，則可安全明瞭、

計算標準差分數，在下面第十二表兩個假設的分配內可以看出

表一二

第一個假設的分配			第二個假設的分配		
分數	與均數的差數	差數的平方	分數	與均數的差數	差數的平方
4	4	16	1	6	36
5	3	9	3	4	16
6	2	4	4	3	9
7	1	1	5	2	4
8	0	0	7	0	0
9	1	1	8	1	1
10	2	4	10	3	9
11	3	9	12	5	25
12	4	16	13	6	36
		60			136
$60 \div 9 = 6.67$			$136 \div 9 = 15.11$		
$\sqrt{6.67} = 2.58$			$\sqrt{15.11} = 3.89$		
2.58＝標準差			3.89＝標準差		

在左邊一行的"分數"下，乃第一個假設的分配分數。第二行乃各分數與平均數(8)的差數。再次一行爲各差數的平方。自頂上起，4^2等於16，3^2等

於9，餘類推。按照上面所說的標準差定義，我們一定要求出差數之平方的平均數。差數之平方的總數是60。表明各差數平方總數的符號是Σd²("d平方的總數")(Σ=大寫S字母，讀作"總數")。以9除此總數，得各差數之平方的平均數6.67。這個平均數平方根爲2.58。這2.58的價值，即爲這個分數分配的標準差。代表標準差的符號爲σ(小寫s字母，叫做錫克碼 Sigma)

常態分配的差異 在理想的常態分配，有一種固定的關係介乎中五十分距離，中數差，平均差，與標準差之間，其關係如下：

中五十分距離=2中數差(I. Q. R.=2Med. Dev.)

中數差=.67σ(Med. Dev.=67σ)

中數差=.85平均差(Med. Dev.=.85Avg. Dev.)

平均差=.80σ(Avg. Dev.=.80σ)

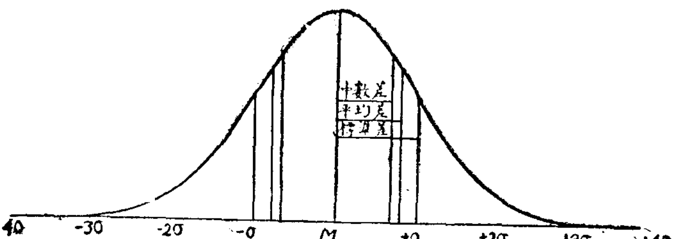
平均差=1.18中數差(Avg. Dev.=1.18Med. Dev.)

σ=1.25平均差 (σ=1.25Avg. Dev)

σ=1.48中數差⊕(σ=1.48Med. Dev.)

第二十九圖以圖形表明這許多關係。

圖二九 表明常態分配的中數差，(有時稱爲機誤)，平均差，標準差之相關的價值。



⊕較精密的是σ=1.25331平均差，或1.48256中數差。

這許多方程式常用以變換此差異數量爲彼差異數量。例如，我們假設求得分數分配的標準差而要曉得中數差是什麼。如果分配是近於常態的，則適當的假設，就是以中數差爲極近於標準差的.67倍。假如在分配上，$\sigma=25$，那末中數差最近似的價值$=.67\times25=17$。

同一方法，當然可以從中數差或平均差求分配上標準差最近似的價值，餘類推。

統計學家要得到很正確的數目，多用中數差$=.6745\sigma$的公式。的確，有時覺得中數差用這個公式求到的，是測驗中數差一個較好的方法，比實在中數差好些，猶之修勻的中數，比實在中數爲較佳之中數也。

練習24. 求第二個假設的分配分數之標準差(σ)已見諸第十二表。除"分數"一行外，把所有的數字遮蓋起來，而求其標準差，與所示的價值相比較。求這兩個標準差的比率，並與中數差和平均差的比率相比較求之。

練習25. 如果標準差是43，則最近似值的平均差，中數差，與中五十分距離是什麼？用表中最近似的價值求之。

練習26. 如果中五十分距離是24，則最近似值的中數差，平均差，與標準差是什麼？

問題

你以爲 Q 的價值在顯明的偏斜分配上是大於或小於中數差的價值嗎？在常態分配上，你知道Q和中數差是一樣的。)

第九章　常態分配中的百分等級

百分等級的單位與分數單位的比較——分數與百分等級的關係——以差異解釋百分等級——測驗分配的常態性——百分等級的正確表

現在我們要研究各種分數和百分等級的重要關係了。在說明差異分數一章以後，來討論這個問題，這自然較為便利。

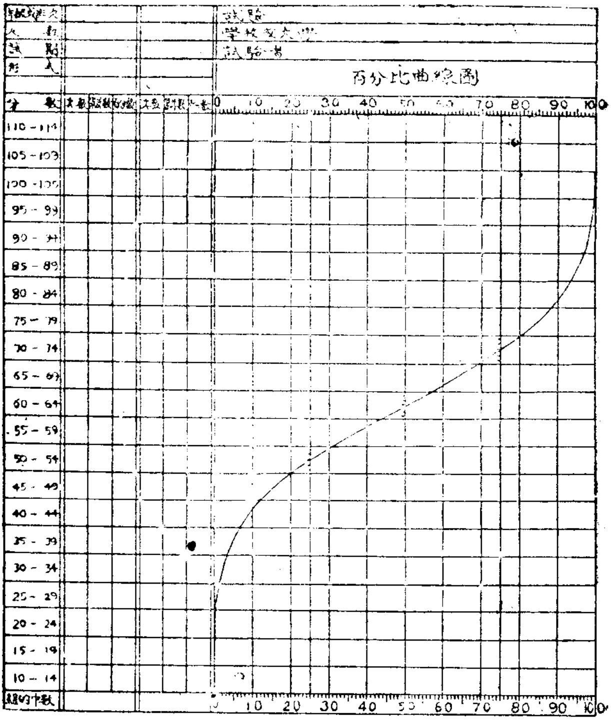
在下面的第三十圖，是表明模範的百分比曲線。你們已知道在分數分配上求任何分數的百分等級，而繪一百分比曲線以表示分配的狀況。

百分等級的單位與分數單位的比較　在第三十圖內，代表分配的百分等級單位是否與相關的分數單位同一比例？即百分等級每一距離，譬如說10個單位，是否和分數單位同一數目？

試觀百分比曲線，則可看出百分等級距離從50到60包括分數距離為自62到66(4個單位)。百分等級距離，從60到70，包括分數約從66到70（4個單位)。其次10個單位的百分等級，包括分數約從70到$74\frac{1}{2}$($4\frac{1}{2}$單位)；再次10個包括分數從$74\frac{1}{2}$到81($6\frac{1}{2}$單位)；最後10單位的百分等級包括所有分數從81一直到最後的分數。

從上面所說的看起來，百分等級的單位與分數單位比較下來，並不合於同一比例的意義。蓋同一數目的百分等級單位，和分配上其他部分的分數之不同的數目相合。

圖三十　常態百分比曲線



分數與百分等級的關係　我們現在反轉來從試驗分數求與百分等級的關係，——即分數取同等的增加，看百分等級的增加是否相等。五個單位分數的組距，從中數62到67包括百分等級從50到63(13個單位)。其次五個單位分數(67—72)包括百分等級距離從63到75(12個單位)。再次五個單位分數包括百分等級從75到84½(9½個單位)；再次從84½到91(6½個單位)；再次從91到95½(4½個單位)；餘類推，百分等級的距離逐漸減少。

第三十圖所代表的分配，分數以5為組距，其分數與百分等級的關係，在

第十三表內表明，從分數97到分數27。所須明瞭者，即這些分數乃一假設試驗的分數，其中數任意定爲62以取便利，而Q的價值任意做爲10點。

表十三　表明分數與百分等級的關係，用第三十圖百分比曲線所表示的假設之代表的分數分配。分數97相關於百分等級99，餘類推。

分　數	百分等級	分　數	百分等級	分　數	百分等級
97	99	72	75	47	$15\frac{1}{2}$
92	98	67	63	42	9
87	$95\frac{1}{2}$	62	50	37	$4\frac{1}{2}$
82	91	57	37	32	2
77	$84\frac{1}{2}$	52	25	27	1

從這個方法裏比較分數與百分等級，我們又可看出兩端百分等級的單位，其包括分數的數量較大於分配上的中間部分。單位愈趨於兩端，則相關於百分等級每一單位的分數數量愈大。

在各種分配中的情形，亦有同一的趨勢，不論分數量尺的部分是在分配上那一個地位。基此理由，所以單位價值的差異是在百分等級內，而不在分數內。當然有許多差異是在分數單位的價值中從量尺的這一部分到那一部分，但在接近分配上的兩端時，則於百分等級單位的增加價值無關。

以差異解釋百分等級　在第三十圖的百分比曲線上與第十三表可以看出，分配上的中五十分距離是20點（52到72），且因分配是對稱的，中數爲62，恰爲上二十五點與下二十五點分數的一半，其中數差是10點。如果我們以中數替代分數62（中數＋中數差），替代分數72等，則第十三表變爲十四表

表一四

分數	百分等級	分數	百分等級	分數	百分等級
(中數＋$3\frac{1}{2}$中數差)	99	(中數＋中數差)	75	(中數－$1\frac{1}{2}$中數差)	$15\frac{1}{2}$
(中數＋3 中數差)	98	(中數＋$\frac{1}{2}$中數差)	63	(中數－2 中數差)	9
(中數＋$2\frac{1}{2}$中數差)	$95\frac{1}{2}$	中數	50	(中數－$2\frac{1}{2}$中數差)	$4\frac{1}{2}$
(中數＋2 中數差)	91	(中數－$\frac{1}{2}$中數差)	37	(中數－3 中數差)	2
(中數＋$1\frac{1}{2}$中數差)	$84\frac{1}{2}$	(中數－中數差)	25	(中數－$3\frac{1}{2}$中數差)	1

第十四表以中數差表明常態分配分數的近似百分等級。這個表所解釋的意義，就是在任何正確的常態分配內，不論中數分數是什麼，或中數差是什麼，一個人所得的分數恰爲中數差的一半而在中數之上，則百分等級爲63；一個人所得的分數在中數以上而爲中數差的兩倍，則百分等級爲91；分數爲中數差的三倍而在中數之上，其百分等表爲98；餘如此類推。

測驗分配的常態性 我們可用第十四表測驗一個分配以觀其是否與常態分配相近。推孟博士 (Dr. Terman) 乃將每人達到各項智力商數●，定爲各個人的百分等級，如第十五表●所示者。

表十五

智力商數	百分等級	智力商數	百分等級
130	99	95	$33\frac{1}{3}$
128	98	92	25
125	97	90	20
122	95	88	15
116	90	85	10
113	85	78	5
110	80	76	3
108	75	73	2
106	$66\frac{2}{3}$	70	1
100	50		

●要知智力商數的意義，看第十三章"聰明測驗"。

●推孟著：智力測驗第七十八頁，霍夫吞米弗令公司出版。(L. M. Terman, The measurement of Intelligence, Houghton Mifflin Company.)

問題： 智力商數的分配是否爲常態分配？

解答： 中數正差(從百分等級50到75的距離)是8點(100到108)，中數負差(從百分等級50到25的距離)亦是8點(100到92)。所以我們可認爲8點在智力商數內是智力商數分配的中數差。按照第十四表，我們應希望一個人的智力商數是(中數－2中數差)時，卽智力商數爲84，百分等級爲9。因百分等級和智力商數85相關的是10，則假設百分等級與智力商數84相關的是9，頗爲合理。同樣，我們應希望一個人的智力商數(中數－3中數差)，卽智力商數爲76時，百分等級爲2。推孟博士的材料，表明一個人智力商數爲76時，其百分等級爲3，而非2。這種細微的差異，或者起於實在的中數差，在8點以上的關係，(此處假設的8點事實上已最近於全體數量了。)同樣的智力商數和在中數以上的百分等級的比較，也表明很密切的相關，此可於常態分配的情形中得之。

但自另一方面觀之，如果我們測驗四年級乙組智力測驗分數的分配，如在第二十八圖所表示者，以求其常態性，則顯示歧異；第一，因爲正的中數差爲9點 (32—23) 而負的中數差僅爲7點(23—16)。如果以8點爲分配的中數差，則應希望學生所得分數爲(中數＋2中數差)時，(23＋16＝39) 應得百分等級91。按照百分比曲線言之，分數39與百分等級相關者只爲86。這些差異以及其他種種，乃表明在這種情形下的分數分配，不是一個常態分配。

百分等級的正確表　在附錄II爲一較完全的表，和第十四表一樣，是表明在常態分配中個人分數爲(中數＋.1中數差)，(中數＋.2中數差)等時其正確百分等級的數量的。

第十章　各種測驗的相互關係

研究的問題——求兩種測驗分數相互關係的方法——均等分數精密的方法——關係直線的讀法——相關表製法——用百分比曲線圖求相關——關係線——繪相關表——二者選一法

研究的問題　我們假設對同樣學生使受國家智力測驗，與伊提斯的自治測驗，中級試驗，而比較各學生在這兩種測驗的分數，以決定國家智力測驗，與中級試驗，究竟那種成績優良。

當然，在國家智力測驗得50分的和在中級試驗裏得50分的不一定代表同一樣的能力，這是很明顯的。第一，因爲國家智力測驗節目較多，能使學生多得分數。其次，中級試驗的節目大體較難，學生在同一時間內不能做完。再時間限制亦不一律。此外還有其他練習的原因。如果先做國家智力測驗，則學生所做中級試驗成績之佳必較先做中級試驗爲優。而且如果在測驗中有時間的錯誤，卽插入兒童智力發展的元素。

譬如我們說某一學生在國家智力測驗得分數 95 而在中級試驗得分數30。所以要想决定這個學生是在國家測驗做的好些(對於一班的比較) 抑在中級試驗做的好些，我們就要知道國家智力測驗相關於中級試驗30分的分數是什麼，或中級試驗相關於國家智力測驗95分的分數是什麼。其他測驗的分數亦是如此。換句話說，我們應當用中級試驗分數以了解各項國家智力測

驗分數的價值，或藉國家智力測驗分數以明瞭各項中級試驗分數的價值。或者，如我們常說的，我們當將此種測驗的分數變爲彼種測驗的分數。

兩種分數的關係，能到某種程度是決定於測驗的情形的，——那一種測驗先做，兩種測驗需若干時間，甚至學生對於標準測驗熟悉的程度如何——在每一種特殊情形中均須求出其關係，以便藉他種測驗解釋此種測驗的分數而得一合理的確度，這一點必須切記勿忘的。

比較兩種測驗分數，藉智力年齡以解釋分數，這是常習之事。除練習影響和兩種測驗間的時間而外，這是一個完善的方法，實際上沒有兩個測驗是根據於同樣的分數定爲標準，而且定標準的方法，並未十分確定，所以我們能確信其結果。

求兩種測驗分數相互關係的方法 如果所比較的兩種測驗次數數目是很小的，譬如說小於50，則所求的相互關係，不能正確，而其他簡便方法，可用以得一近似值。有一個方法就是用排列同一等級以比較分數。試取第八年級甲班學生國家智力測驗與中級試驗分數以爲例，如第十六所示者表。

表 十六

學 生	國家智力測驗分數	中級試驗分數	學 生	國家智力測驗分數	中級試驗分數	學 生	國家智力測驗分數	中級試驗分數
1	119	52	12	142	53	23	111	55
2	128	59	13	135	36	24	125	58
3	133	43	14	144	54	25	153	65
4	158	59	15	136	48	26	124	54
5	155	64	16	142	42	27	127	52
6	139	61	17	103	50	28	136	44
7	145	55	18	156	58	29	150	55
8	120	60	19	143	61	30	148	71
9	142	63	20	135	66	31	117	52
10	136	56	21	144	64	32	142	59
11	130	45	22	131	63	33	123	59

如將這33個學生每種測驗分數依次排列，則如第十七表

表 十七

國家智力測驗分數	中級試驗分數	國家智力測驗分數	中級試驗分數	國家智力測驗分數	中級試驗分數
158	71	142	59	130	53
156	66	142	59	128	52
155	65	142	59	127	52
153	64	139	58	125	50
150	64	136	58	124	48
148	64	136	56	123	45
145	63	136	55	120	44
144	63	135	55	119	43
144	61	135	55	117	42
143	60	133	54	111	42
142	59	131	54	103	36

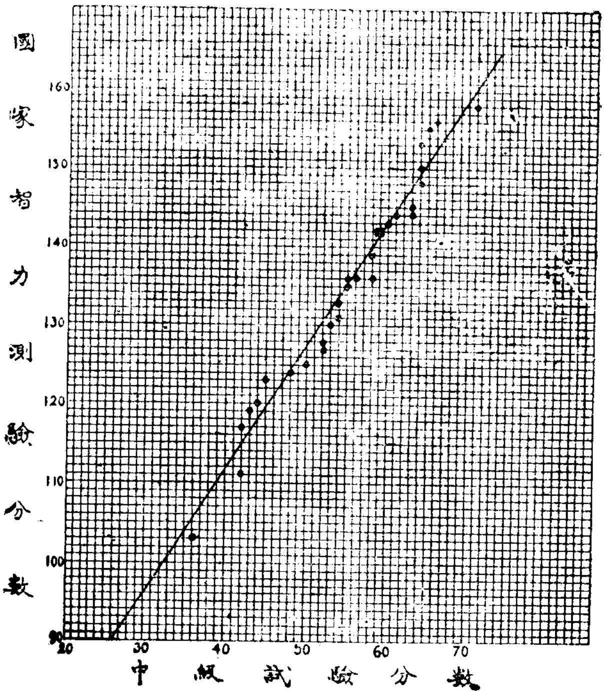
我們假設在國家智力測驗的最高分數等於中級試驗最高分數，(雖然不是同一的學生）於是國家智力測驗分數158等於中級試驗分數71。如假設國家智力測驗次高的分數等於中級試驗次高的分數，則國家智力測驗分數156等於中級試驗分數66。同一方法我們可假設所有同級的分數相等，並可說國家智力測驗分數155等於中級試驗分數65，餘均如此類推。

當然，這種粗淺方法會生出困難，如國家智力測驗分數144對中級試驗分數63與61，但在這種情形，我們可"均分"一下，即說144相關於62。

均等分數精密的方法 前面所引證的兩種分數不一致，適以表示這個均等分數的方法是很粗淺的。第三十一圖就看出這種方法的不正確。在第三十一圖，直行量尺代表國家智力測驗分數，橫行量尺乃代表中級試驗分數。右手上角的小圈，代表每數對最高分數（158與71）如第十七表所示者。即在直行量尺上爲158，在橫行量尺上爲71。第二個小圈代表第二對分數(156與66)，餘類推。

從這個圖上很清楚的看出上面所說的均等方法以求兩種的相互關係實在是很粗淺的。但是每對分數這樣繪法使立於同等地位，亦可以一望而知相

圖三一　表明繪直線相關的方法



關的普通趨向是什麼，且可看出在這樣的地位繪一直線是代表普通趨向最好的方法，如圖中所示者。這個直線叫做兩種測驗分數的關係直線 (line of relation)。這個直線的地位，在這種情形下，只要用眼觀察一下就可決定。同樣，百分比曲線的地位，亦可如此決定。

關係直線的讀法　以兩種測驗分數，繪一關係直線，則按照直

線，很容易立刻決定中級試驗的什麼分數和國家智力測驗那一項分數相關以及國家智力測驗什麼分數和中級試驗那一項分數相關。

例如，在第三十一圖，截斷横行直線代表國家智力測驗100分的直綫，其截斷的一點，約在中級試驗分數的量尺上33，我們應當說在國家智力測驗的100分，與在中級試驗的33分相關，反是亦如此。

求中級試驗分數與國家智力測驗分數119(表16第一個學生的分數）相關，要注意關係直線截斷横行直線對國家智力測驗量尺上119的一點，而觀察在中級試驗量尺上恰在交點下的一點。這一點是45，表明中級試驗分數45與國家智力測驗分數119相關。

同樣，要求國家智力測驗分數與中級試驗分數59(表16第二個學生的分數）相關，則倒轉其程序卽可求得。卽關係直線截斷直行直綫59的一點，對直行量尺上的141。所以 141是國家智力測驗分數與中級試驗分數59相關。這個第二個學生在國家智力測驗上只做到128分，所以在中級試驗上做的好些。

假如在中級試驗分數43這樣情形之下，(表16第三個學生）我們求關係直線(43)的一點，是介乎兩横行直線之間(在這個例子是115與116)，則可取最近的一線，或恰近於兩線間的交點，取代表奇數的一個數目。

練習27　在第十六表第一行中求出那些學生做國家智力測驗比做中級試驗好些。紀錄你得的結果，先將國家智力測驗分數變爲中級試驗分數，再將中級試驗分數變爲國家智力測驗分數。

相關表製法　當然，用關係直線決定相關不是和用表一樣的容易；如果要想有一求相關的簡易方法，則相關表可從曲線圖求之。表的轉變普通只有一個方法，卽是將一個測驗相連的分數，和其他測驗分數配成相

關，其中可有省略或重疊。

我們假設製一表將中級試驗分數轉變爲國家智力測驗分數。我們開始應將中級試驗分數依次寫在表內，如第十八表所表示的，而將國家智力測驗與之相關的分數按照關係直線決定的相對排列。

表　十八

中級試驗分數	國家智力測驗分數
33	100
34	102
35	103
36	105
37	106
38	108
39	110
40	111
41	113
42	114
43	116
44	118
45	119

練習28　將第十八表續成。並製一表以備將國家智力測驗分數100到120變爲中級試驗分數表的開始如下：

國家智力測驗分數	中級試驗分數
100	33
101	34
102	34
103	35
104	35
105	36
106	37

用百分比曲綫圖求相關　在以前數頁，我們研究求兩種測驗分數相關的方法，惟這種測驗只限於少數學生。在這樣情形中，其結果不甚可靠，而在可能範圍內，當應用較大的數目。應有幾百個實例以達到很正確的程度，卽在固定的研究情形中，亦應如此。有時這許多實例尙不能認爲很充分的可以成立兩種測驗的普通相關。爲達此目的，所以要有千數以上的實例——其數目當與需要做成年齡與年級常模的數目相近。

假設我們要想求國家智力測驗分數和中級試驗分數的相關，利用四年級乙組到八年級甲組學生所做的284個測驗分數。若將這些學生所做的兩個測驗284個分數排爲正確的等級次序，則不勝其麻煩。基此理由，上面所說的方法在這個情形中是不適用了。以下乃說明較好的方法。

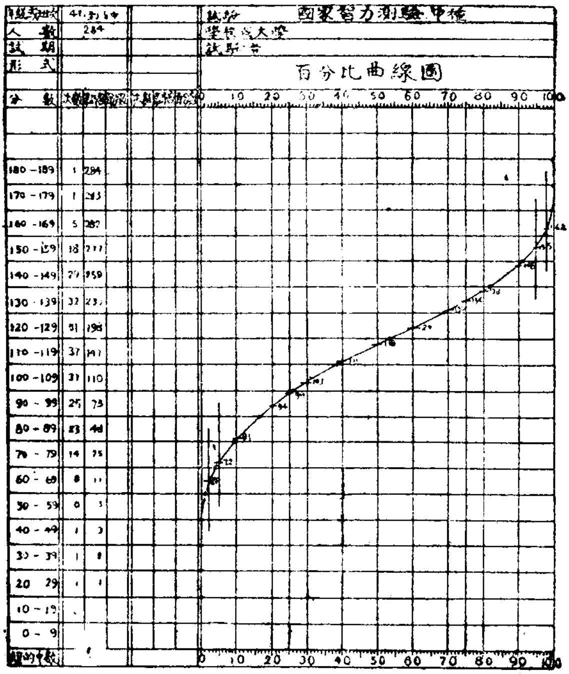
如果這許多學生的分數尙未分配妥當，則可分配如第十九表

表　十九

國家智力測驗		中級試驗	
分數組距	次數	分數組距	次數
0—9		0—4	
10—19		5—9	2
20—29	1	10—14	7
30—39	1	15—19	13
40—49	1	20—24	15
50—59	0	25—29	25
60—69	8	34—34	21
70—79	14	35—39	26
80—89	23	40—44	29
90—99	25	45—49	34
100—109	37	50—54	37
110—119	37	55—59	40
120—129	51	60—64	21
130—139	32	65—69	13
140—149	29	70—74	1
150—159	18		
160—169	5		
170—179	1		
180—189	1		

從這個表觀察一下，就可得相關的粗淺觀念。在每一測驗中我們能看出分數的距離而得一定集中趨勢的普通概念。當然，我們一見之下，就可看出國家智力測驗分數較中級試驗分數有較高的趨向。如果兩端分數含有意義，我們可以說，中級試驗的70分似與國家智力測驗的180分相關，中級試驗的5分似與國家智力測驗的20分相關。但是從這兩端的分數決定相關是很不可靠的，而且無論如何在中間的分數不能看出相關。

圖三二　百分比曲線圖表明四年級乙組到八年級甲組284個學生國家智力測驗量表A的分數分配。

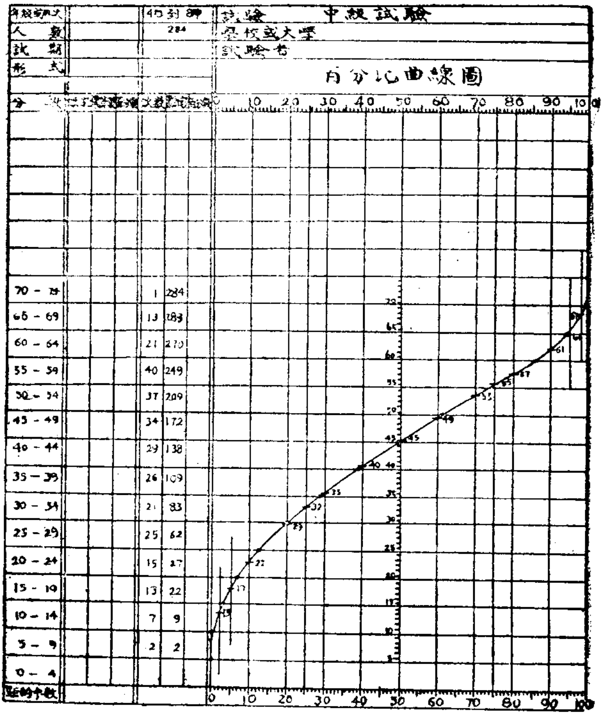


我們可以肯定的說，國家智力測驗分數的中數和中級試驗分數的中數

相關，同樣，這一個分配的上二十五分點(百分之75)分數，和那一個分配的上二十五分點分數相關，其下二十五分點分數亦是如此。

求分配上的中數，上二十五分點，與下二十五分點分數最好的方法，當然是給一百分比曲線。在第三十二與三十三兩圖，皆是表明分數分配的百分比曲綫。

圖三三 百分比曲線圖表明四年級乙組到八年級甲組 284個學生中級試驗分數的分配。



我們現在能夠很容易的求每個分配的中數，上二十五分點，與下二十五分點分數。這幾項分數由幾點表明，即百分之50的直線與百分之25及75直線

截斷兩根曲線的地方。國家智力測驗分數的中數是118，而中級試驗分數的中數是45。所以我們可假定國家智力測驗分數118和中級試驗分數45相關。

這兩個測驗的上二十五分點分數一為134，一為55：所以我們可以說國家智力測驗分數的134和中級試驗分數55相關。兩個測驗的下二十五分點分數，一為99，一為32；所以我們可以說國家智力測驗分數的99，和中級試驗分數的32相關。

照此方法，我們可以循此以進，以求其他各組相關的分數，如兩個百分之40的分數與兩個百分之60的分數；的確，我們能取每一個百分比——第一，第二，第三，等——而製一表，用所求出的每組分數以表明兩種測驗分數的相關。

關係線　我們已學了比製表的較好的方法，卽是用關係直線。在這樣情形中，當然，我們不須繪同一等級的實在分數，但須求等級的數量，卽繪各組相關的百分比分數。

當然不須將代表每一個百分數的各組分數繪出。在第10與90之間，尋常僅取每十個百分數卽已足。0—與 00—百分數實際無多大價值，因為不固定的緣故。然第5與95以及第2與98百分數必須加入，因不如此，則相關不能達到上下甚遠之處。卽此第2與98百分數亦須視為可疑價值，因這許多價值亦很不固定。

我們繪關係直線的第二步，就是製一表包含兩個分配各組相關的百分比分數。第二十表就是照以上所述的繪製之表。

表二十　表明中級試驗與國家智力測驗相關的百分比分數，選此以繪兩種測驗分數的關係直線。

百分比	中級試驗	國家智力測驗	百分比	中級試驗	國家智力測驗
98	67	162	40	40	111
95	64	155	30	35	103
90	61	148	20	29	94
80	57	138	10	22	81
70	53	130	5	17	72
60	49	124	2	13	65
50	45	118			

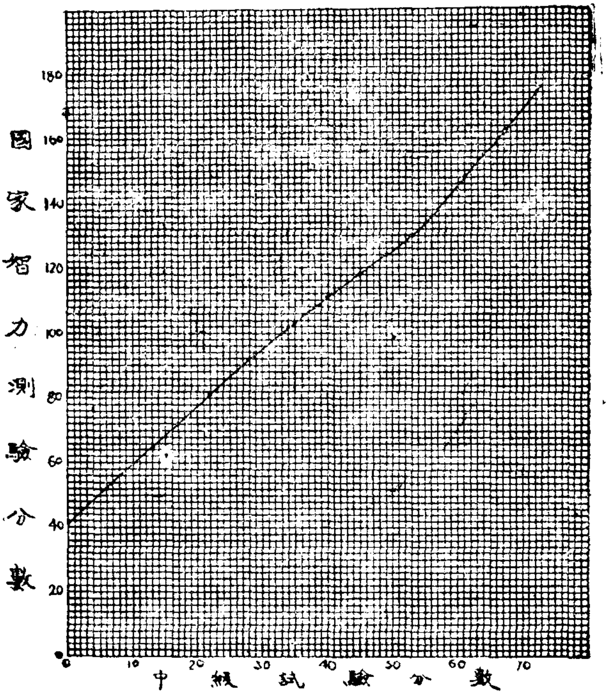
我們現在準備繪代表各組相關百分比分數的各點。第一步，當然是在方格紙上作成量尺，表示兩種測驗的分數，如在第三十四圖的底邊與左邊所示的。第二步是作小點表明表內的每組分數。於是在第三十四圖內，最上的一點乃代表百分之98的一組分數，即76與162；第二點代表百分之95的一組分數，64與155，餘類推，最低的一點代表百分之2的一組分數。

從此可看出像這樣繪法則繪修勻曲線實際上每點都可經過。這根線多少有點彎曲，但其地位似很固定，至少在所繪的各點距離以內是固定的。

我們可注意關係直線成爲直線時的普通趨勢，雖然在各種實例中，有許多和這個規則是差異的。

第三十四圖的關係直線，表明在兩個測驗分數分配向底下的部分，其關係爲中級試驗一個組距的10點和國家智力測驗一個組距的18點相關。近分配的中間其相關爲中級試驗組距的10點，等於國家智力測驗組距的14或15點而在中級試驗的上部分，一組距的10點與國家智力測驗組距的25或26點相關。

圖三四 表明求兩種測驗分數關係直線的方法，用百分比曲線圖繪每組百分比分數。



前面曾經說過，兩端分數表明相關是很不可靠的。的確，研究在百分98分數以上或低於百分之2分數的百分比分數，是沒有什麼價值的。如果我們要求這種分數，可延長直線，出於百分之2—與98—兩點的限度以外；但是在這兩點限度以外的分數相關，是很不確定的，而且一種測驗轉變為他種測驗出了限度以外，當視為很可懷疑的價值。

因此，按照關係直線可以看出，中級試驗的0分約與國家智力測驗的42分相關。一個學生在中級試驗中遺漏了"西方的對面是什麼？"這一類的問題而能在國家智力測驗裏回答42個問題，這是很難預料的。所以眞正關係直

線或者要向低的一端彎曲。關係直線向下彎曲的低的部分，是表示在國家智力測驗裏有許多問題較中級試驗容易，其在中級試驗下面的距離差異的10點差不多等於在國家智力測驗差異的18點以上。

前面曾經說過，求關係直線的分數愈少，則線的地位愈不正確，在這個情形中，我們有284個分數，很足以定直線的地位，而從這個特殊的調查得很正確的程度。這許多分數是從這個調查得來的。

繪相關表　繪了國家智力測驗與中級試驗的關係直線以後，我們能根據284個的兩種測驗畫一相關表。我們假定要將中級試驗分數轉變爲國家智力測驗分數，我們應當從第三十四圖的關係直線求國家智力測驗分數與中級試驗每個分數的相關。這個表在第二十一表內表明。

表二一　表明國家智力測驗分數與中級試驗分數的相關，每組相關的分數是從第三十二圖內關係直線得來。

中級試驗	國家智力測驗	中級試驗	國家智力測驗	中級試驗	國家智力測驗	中級試驗	國家智力測驗	中級試驗	國家智力測驗
1	42	16	68						
2	43	17	⋮						
3	45	18	⋮						
4	47	19	⋮						
5	49	20	⋮						
6	50	⋮							
7	52	⋮							
8	54	⋮							
9	56								
10	58								
11	60								
12	61								
13	63								
14	65								
15	67								

練習29　完成第二十一表，表明相關，到中級試驗分數73爲止。

練習30　在國家智力測驗分數裏，那些分數是和中級試驗分數8，16，24，32，與40相關？

練習31　說明怎樣創製一表，使轉變國家智力測驗爲相關的中級試驗分數，能便利應用。

二者選一法　求兩種測驗的關係直綫有許多方法不十分正確，因對於兩種測驗分數分配的形式所生的任何差異不加注意，但是要得到這些方法是很簡單的。

這種方法，其中有一個，不過是在兩種測驗中的各組分數中求百分等級的75與百分等級的25——換句話說，即只求兩種測驗的上二十五分點分數與下二十五分點分數——而經過這幾點繪一直線。這當然假定關係直線是直的，然而我們所見的並不是如此情形，這個方法是發生阻礙的。

另一個方法就是假定分配的平均數和其他分配平均數相關，其關係線是直的，兩個變異數量㊀的單位的關係是這一個分配的平均差單位的數目，和其他分配的平均差單位數目相關。其關係直線如第三十五圖左邊所繪的圖形。

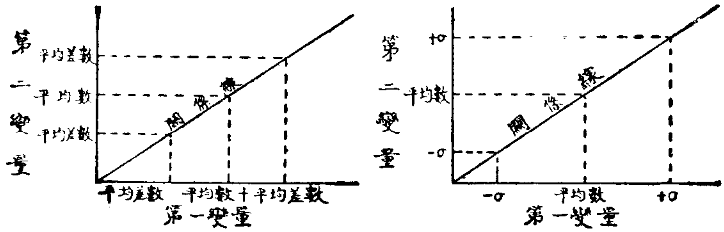
此外還有一方法可用的就是和上面所說的是一樣的，其不同者乃以標準差代替平均差而已。在這樣情形中，其關係直線如第三十五圖右邊所繪的圖形。

問　題

比較兩種測驗分數僅將兩種測驗中大的一組分數全距離均平一下，這

㊀分數，等級，或其他任何量數。

圖三五　表明求兩種變異數量關係直線的兩個方法，假定線是直的。已



經有一個著作家提出過。試用本章所提示的方法比較一下，看這個方法的效度（Validity）是怎樣？

第十一章　學生的平均測驗

怎樣平均兩種測驗分數——平均百分等級的不便——轉變分數的方法——普遍標準量尺的需要——T分數——T分數方法的不便利——怎樣平均分數與平均教師的分數

怎樣平均兩種測驗分數　平均一個學生兩種或兩種以上的測驗分數，以求其能力的簡單測驗，這是很適當的。所以我們要把學生在國家智力測驗與中級試驗所做的分數聯合起來，俾能得到智力上的簡單測驗。

如果我們只求每一學生在兩種測驗的平均分數，則其平均數勢不能與任一種分數比較，並不能與任一測驗的常模比較。例如在第三十四圖所見的中級試驗46分，和國家智力測驗120分相關，如果一個兒童恰做到這樣分數，則其分數的平均數為73，旣不能與46分比較，又不能與120比較。

以兩種原有測驗分數平均起來，猶如平均英呎和生的米突一樣。英呎和米突須變爲同一性質，然後才可求其平均數。

有了轉變兩種測驗分數爲智力年齡的表，則變分數爲同一性質的方法，就是將每種分數變爲智力年齡。❶用這種方法，則兒童在兩種測驗的平均智力年齡就可以求得，並可直接和任一單獨智力年齡比較。然此法有其限制，

---

❶看第十二章智力年齡這個名詞的意義。

最佳亦不過是間接的，其理詳後。

平均百分等級的不便 這個方法就是平均一個學生在兩種測驗的百分等級，如果百分等級是介乎25與75，這個方法是可用的。至於普通的應用，在統計上有所不能，因百分等級單位的價值在量尺的各部分是不相等。這個理由用一簡單證明可以格外清楚些。

如果觀察第三十圖，則可看出在假設的模範分配上，其百分之75分數是72點，而百分之99分數是97點。72分和97分的平均數是$84\frac{1}{2}$，平均分數84的百分等級約爲93，但百分等級75與99的平均數僅爲87(低6點)。

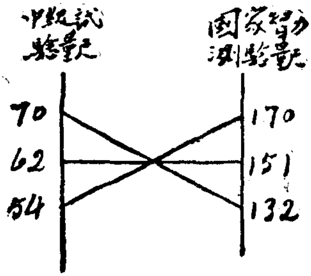
這種差異僅見諸兩端，在兩端中，對於百分比曲線有許多彎曲。在中間半部，曲線近於直線，則這個方法固定些，如果所要平均的百分等級不相距太遠，則不致有甚大的錯誤。雖然，此外還有普遍應用而固定的方法，以下再爲說明。

轉變分數的方法 轉變分數使爲同一性質，其最好方法，卽是將一個學生在這個測驗的分數，變爲那一種測驗分數。例如我們說一個學生在中級試驗得42分，在國家智力測驗得120分。我們能將中級試驗的42分，變爲國家智力測驗分數，(與國家智力測驗相等的分數是114) 而與120加起來平均，卽得這個學生變爲國家智力測驗分數117，或者我們可將國家智力測驗分數120變爲中級試驗分數 (相等的分數是46)而與這個學生中級試驗42加起來平均，在最後一例的情形，這個學生變爲中級試驗平均分數是44，這個你可在你完成的第二十一表上，看出是等於國家智力測驗分數117。在這兩種情形中，其平均分數可與任何常模相比較，這個常模可製爲這兩種測驗的任何一個。的確，在這兩種轉變的方法中，能看出平均分數可以國家智力測驗求之，亦可以中級試驗求之，如此，則可與兩種測驗的常模作一比較。

此外還有一個理由，就是當一種測驗分數的差異，較大於他種測驗分數的差異時，縱然我們對於以分數和常模的比較沒有什麼興趣，也不能直接求一個學生兩種測驗分數的平均數的。其理由就是在這樣情形下求平均數時，結果是要太側重差異較大的分數。這種事實有下例以證明之：

我們假設一個學生在中級試驗得分數54，而在國家智力測驗得分數170又一學生在中級試驗得分數70，而在國家智力測驗得分數132。（看第36圖）

圖　三六



按照第三十四圖關係線看起來，中級試驗分數54與國家智力測驗分數132相關，而中級試驗分數70與國家智力測驗分數170相關。這可以看出每一學生皆同等的得中級試驗分數54與70，及國家智力測驗分數132與170，而兩個學生的平均分數應當一樣，不問是在這一個測驗裏求得的或在那一個測驗裏求得的。這就是說，如果兩個學生的平均分數是將國家智力測驗分數變為中級試驗分數求得的，則其平均數皆為62，如果平均數是將中級試驗分數變為國家智力測驗分數求得的，則兩個學生的平均分數為151，這當然和中級試驗分數62相關。

然而，我們要是直接把分數平均，——就是不要轉變，——則得第一個學生平均分數112，第二個學生平均分數101，相差11點。上面已經說過，這兩

種平均數的差異是因爲平均數太側重國家智力測驗分數了。這並非因爲牠的分數較大，乃因其變異較大，換句話說，即因其132和170間的差異較54與70間的差異爲大。

當然，一個學生在兩種測驗所得的分數，其差異之大，如在中級試驗的54與70，或如在國家智力測驗132與170，這是很少發見的。但這種極端的事例足以證明包括於各種情形中的原則；即此種測驗分數的差異大於彼種測驗分數的差異時，將兩種分數直接平均，則使測驗分數差異變大。

無論那種分數，若非自身直接可比較，則求其平均數時，先將第一種測驗分數變爲第二種測驗分數然後再求平均數，用此普通原則，那末就大致穩妥。兩種測驗分數有時也能直接比較的，例如同一測驗用兩種形式去測量，對於練習的影響和測驗能力的進展等，都不甚重視時，則其分數便可直接平均。用百分比曲線圖，也可以決定每一測驗分數的差異度，並可決定這一個測驗分數是否有超過那一個分數的趨勢。如果這一個測驗分數，或變異較大，或平均數較高，則先須轉變，然後平均。

普遍標準量尺的需要　因鑒于沒有兩種測驗分數可直接比較，且除非用麻煩手續求其相關如上面所解釋者，則尋常不能比較兩種不同測驗的分數，於是感覺有一共同需要，使各種測驗分數，皆可解釋。

現在還沒有一個滿意的標準量尺，但有一量尺——T分數量尺——可用以說明這種趨向。

T分數　麥柯博士（Dr. Mc Call）創一種單位量尺稱T分數。[1]在

[1]看麥柯著：教育測量法 William A. McCall, How to Measure in Education)
麥克美倫公司出版 (The Macmillan Company)

T分數量尺內，任何測驗分數可以轉變，俾便和其他測驗的分數比較，其他分數亦同樣轉變。

T分數是根據一標準組的各個人能力之假設的分配。這個標準組包含所有12到13歲的兒童。為達實際目的起見，任何一大組未選擇的學生，其年齡最後生日為12歲者，皆視為標準組。

我們可設想T分數，是一個理想測驗的分數，其構成是以標準組12歲兒童分數的分配為常態分配，平均分數為50，而標準差以10為單位點。所以將任何分數變為T分數，不過是變為這個理想的測驗而已。

在常態分配中，一個人得的分數為平均數$+1\sigma$，其百分等級是84，得分數為平均數$+2\sigma$者，其百分等級是97.7，餘如此類推，如第二十二表所示者。

表二二　用標準差表明常態分配上各項分數的百分等級

分數	百分等級	T分數	分數	百分等級	T分數	分數	百分等級	T分數
平均數$+3\frac{1}{2}\sigma$	99.98	85	平均數$+\sigma$	84	60	平均數$-1\frac{1}{2}\sigma$	7	35
平均數$+3\sigma$	99.87	80	平均數$+\frac{1}{2}\sigma$	69	55	平均數-2σ	2.3	30
平均數$+2\frac{1}{2}\sigma$	99.4	75	平均數	50	50	平均數$-2\frac{1}{2}\sigma$	0.6	25
平均數$+2\sigma$	97.7	70	平均數$-\frac{1}{2}\sigma$	31	45	平均數-3σ	0.13	20
平均數$+1\frac{1}{2}\sigma$	93	65	平均數$-\sigma$	16	40	平均數$-3\frac{1}{2}\sigma$	0.02	15

現在要使T分數與任何測驗分數相關，標準組的平均分數指定T分數價值為50，分數的百分等級為84者（在常態分配中平均數$+\sigma$）則T分數值為60，分數的百分等級為97.7者（在常態分配中，平均數$+2\sigma$）則T分數值為70，餘類推，如第二十二表所示者。所以T分數值根據百分等級以確定，其測驗分數的分配為常態時，則每一T分數單位，代表分配上的標準差$\frac{1}{10}$。故等於任何測驗分數的T分數表製成以後，則將分數變為等於T分數的數，當然不過照表轉變而已。

T分數方法的不便利　以T量表作爲普遍的量表，有許多的不便利，麥柯博士亦完全看出來。

T量表主要的缺點，在只限於作幾種測驗適用於測驗12歲的兒童。例如幼稚園測驗的分數，實際上12歲兒童很容易得到完全的分數，不能變爲T分數；同樣，中等學校學生測驗分數對於12歲兒童，又太感困難，亦不能變爲T分數。

縱然這個測驗適用於12歲兒童，其T分數價值，得自分配上兩端者，亦很不可靠，因爲在百分等級上的分數，99.89與99.98些微的差異，在T分數上卽相差5點——，和百分等級50與69相差的一樣多。

任何普遍量表像T量表之類如果希望成爲實用的，應根據於一種年齡以上的分配。例如我們可用12歲年齡的一組，作T分數量表只用於40與60之間，用8歲年齡的一組T分數量表在40以下的，以16歲年齡的一組作T分數量表在60以上的。這個量表的三部分，當然作適當的組織，以8歲12歲16歲三種年齡的兒童能力作標準的重疊之擴大的研究。

怎樣平均分數與平均教師的分數　根據學生之教育測驗的平均分數，和在一學年或一學期所作學校工作之教師的評定學業分數，以爲升級的根據，這是很適當的。所以升級的適當根據，就是以學生教育測驗的分數，卽組成俄提斯分班測驗的第一部，●和教師於一學期內測量學生學業的分數之平均數做標準。

●世界圖書公司出版，紐約榮克雍胡德森（Published by World Book Company. Yonkers-on-Hudson. New York）

表二三　表明43個六年級學生教育測驗的分數及教師評定學校功課的分數。

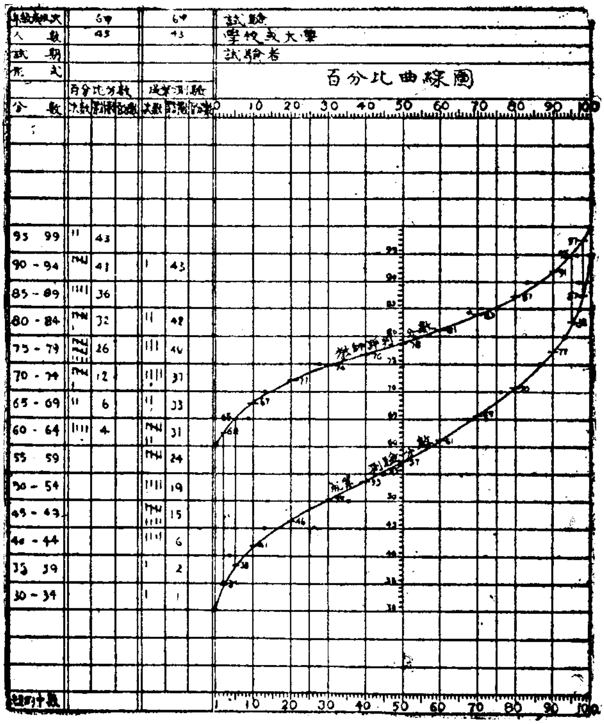
學生	教師分數	測驗分數	學生	教師分數	測驗分數	學生	教師分數	測驗分數
1	78	75	16	91	54	31	64	42
2	91	83	17	75	66	32	68	50
3	83	49	18	88	67	33	87	72
4	63	45	19	77	71	34	96	57
5	76	61	20	61	48	35	68	41
6	79	56	21	73	41	36	79	58
7	79	73	22	65	46	37	78	54
8	84	53	23	82	64	38	80	36
9	71	63	24	88	76	39	77	64
10	62	47	25	77	45	40	71	59
11	80	45	26	78	33	41	78	81
12	77	63	27	76	63	42	80	47
13	95	73	28	74	49	43	91	77
14	93	58	29	73	49			
15	93	91	30	70	41			

從第23表顯出43個六年級甲組學生教育測驗分數，和教師對於學校功課的分數。我們假設求每一學生測驗分數和教師分數的平均數。

如前面已經說過的，像這樣情形最好是以百分比曲線，表示測驗分數和教師分數的分配，以便決定那一個分配的變異較大，以及教師的分數是否高於或低於測驗分數而成什麼趨勢。

在第三十七圖，是表明百分比曲線代表六年級甲組學生測驗分數與教師分數的分配。從這個曲線裏，很明顯的看出教師分數比測驗分數有較高的趨向。再有一望而知者，即教師的分數較測驗的分數差異少。這個事實就是顯明代表教師分數分配的曲線，不如代表測驗分數曲線之峻直。

圖三七 百分比曲線，代表43個六年級甲組學生教育測驗分數與教師分數的分配，表明求出與各種選擇的教師分數相關分數的方法。



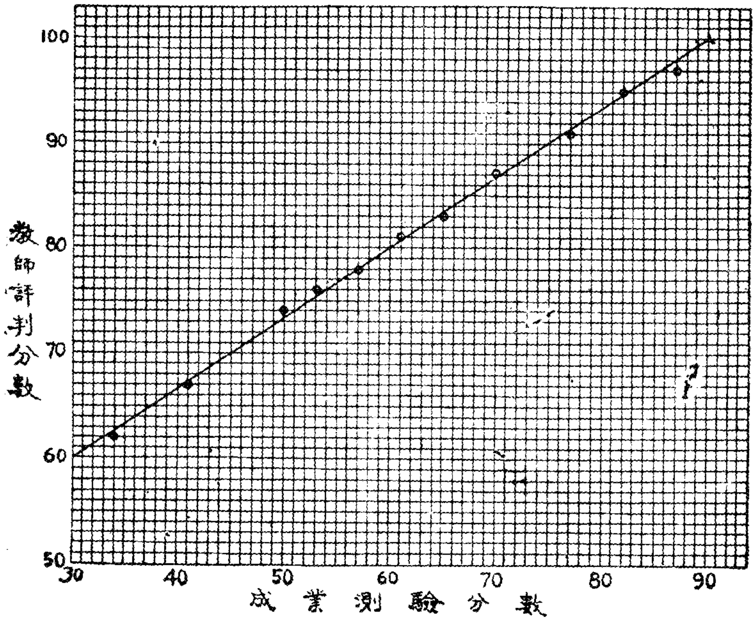
表四二 表明教育測驗分數與教師分數和六年級甲組各項選擇的百分數的相關，材料從第三十七圖百分比曲線得來，用以繪兩種差異數量的關係直線。

百分數	測驗分數	教師分數
98	87	97
95	82	95
90	77	91
80	70	87
70	65	83
60	61	81
50	57	78
40	53	76
30	50	74
20	46	71
10	41	67
5	38	65
2	34	62

因爲有這許多理由，測驗分數與教師分數非可直接比較，這是很明顯的；並且要爲達到一個固定而可解釋的平均數，則須將測驗分數變爲教師分數，或將教師分數變爲測驗分數。要這樣做法，我們要像以前那樣，製一個表，表明測驗分數與教師分數的相關。這所求出來的相關和我們求中級試驗分數與國家智力測驗分數的相關是一樣的方法。我們可在方格紙上，繪一點代表測驗分數的百分數2和教師分數的百分數2；再一點代表測驗分數和教師分數的百分數5；再一點代表測驗分數和教師分數的百分數10，餘類推，均和以前一樣。如果我們像從前一樣將每對價值排成一表，以備繪出各點，則此表和上頁所示的表一樣。

既已將相關的測驗分數與教師分數繪成一表，我們就預備將分數繪在圖上並繪出測驗分數與教師分數的關係直線。這就是第三十八圖。

圖三八　表明六年級甲組教育測驗分數與教師分數的關係直線，線的位置是由第三十七圖代表每對百分比價值各點繪成。



注意繪關係直線有兩個目的。第一是修勻圖內不規則的地方，使測驗分數與教師分數均齊而得一百分等級，第二，就是使我們能夠補插（interpolate）——即在中間的價值與從百分比曲線得來的價值之間補插。

繪第三十八圖的相關直線，假設各點和直線很相近，從實用目的看，認爲測驗分數與教師分數的關係，是完全由一直線表示出來。

表二五 表明 43 個六年級學生教育測驗分數與教師評定的學業成分數的相關。

教師分數	測驗分數	教師分數	測驗分數	教師分數	測驗分數	教師分數	測驗分數
60	30	70	45	80	60	90	75
61	31	71	46	81	61	91	76
62	33	72	48	82	63	92	78
63	34	73	49	83	64	93	79
64	36	74	51	84	66	94	81
65	37	75	52	85	67	95	82
66	39	76	54	86	69	96	84
67	40	77	55	87	70	97	85
68	42	78	57	88	72	98	87
69	43	79	58	89	73	99	88

現在我們準備從這個關係直線製教師分數與教師測驗分數的相關表。如果我們計畫將教師分數變爲教育測驗分數，我們應當在表上將各項教師分數順序排列從最低的分數起，並按照關係直線將與教師分數相對的分數逐一寫出。於是，依照關係直線，就可以看出，與教師分數60相關的分數是30，與教師分數61相關的分數是31，餘類推，如第二十五表所示者。

我們現在來求任何學生測驗分數與教師分數的平均數。我們以第二十三表第一個學生爲例，其測驗分數爲75，而教師分數爲78。在第二十五表上，可以看出教師分數78，等於測驗分數57。從比較上講，就是表明這個學生分數實在比他的測驗分數低的很。他的實在分數75與57的平均數相等於教師分數是66。第三個學生，其教師分數83照第二十五表看起來，相等於測驗分數64，這是表明這個學生分數是比較的高過於他的測驗分數，其測驗分數爲49。其平均數是64與49的平均數，即$56\frac{1}{2}$。

有了各級學生的測驗分數和教師分數的平均數，我們就可按序排列，並用以爲升級的根據。升級根據於這樣求得的平均數較僅根據於教師分數或教育測驗分數公平些。

練習32 求每個學生平均分數，並用教育測驗分數求教師分數，自第一個學生至第十個學生，依其平均數次序將數目寫下，從最高的起。

當然，將任何測驗以及任何教師分數用這種同樣的方法平均其分數，這一定承認是可能的；這就是說，將所有測驗分數和教師分數變為單純分數而求每個學生轉變價值的平均數。是以升級可根據於教師分數和教育測驗與智力測驗的平均數。

如果要將這三種量數每種同等均衡一下，而求其平均數，則三種量數應歸為同一性質。例如，將智力測驗分數和教師分數變為教育測驗分數而求這三種量數的每一個學生的平均數。

又如要將教師分數的次數和兩種測驗分數一樣重視，則其法如下：將三種量數變為同一性質如上面所說的，然後平均其價值，而將教師分數加兩次，全體以4除之，不以3除。例如，設一個學生教育測驗分數是50，其已經轉變的智力分數是54，教師分數是60，其均衡平均數所求得者為50，54，60，與60的平均數，即56。

任何測驗分數與教師分數的連合，皆可平均，對於任何能力的量數皆可加以相當的均衡。對於任何量數的均衡量，是和求平均數時之次數成比例的。

兩個數目（假設60與69）平均，如將第二個數目均衡兩次，其均衡平均數（66）恰為第一數到第二數間的$\frac{2}{3}$，這是很有興趣而值得注意的。如果第二個數目比第一個數多均衡三次，則均衡平均數為第一數到第二數間的$\frac{3}{4}$，餘類推。

練習33 在第二十三表求第一個學生至第十個學生測驗分數與教師分數的均衡分數，變為測驗分數計算，將教師分數均衡兩次。（分數加兩次以3除之。）依均衡平均數排列學生次序，自最高的起。

第十二章　智力的發展

發展圖——怎樣繪發展圖——發展圖的解釋——發展曲線的比較——智力的發展——智力的定義——智力測驗分數的特徵——智力測驗的單位——智力發展曲線——繪發展曲線——有規則發展之起伏測驗——解釋發展曲綫——個性差異——聰明，常態，與愚笨的兒童——什麼是一個常態的兒童呢——智力年齡——常模——眞正智力年齡的限制——皮奈的智力年齡——設想智力年齡——問題

發展圖　你們現在已經學習在方格紙上繪出各點以表示每對的價値了。你們可以曉得這個方法是有很多的用處。例如這個方法可應用於很有用的地方，就是表明一個男孩或女孩在任何測驗或特性上每年發展的狀況，如身長，體重，或智力等。

我們先研究一個假設兒童，傅蘭克（Frank）身長發展的較具體的情形。假定我們自傅蘭克生下之日起每年在他的生日測量他的身長，一直到20歲而求其各年的高度，則如第二十六表(註)

(註)這些數目表明各年齡常態與中數的高度，見巴爾文渥得年齡身長體重表（Baedwin-Wood-Age Height-Weight Table.）

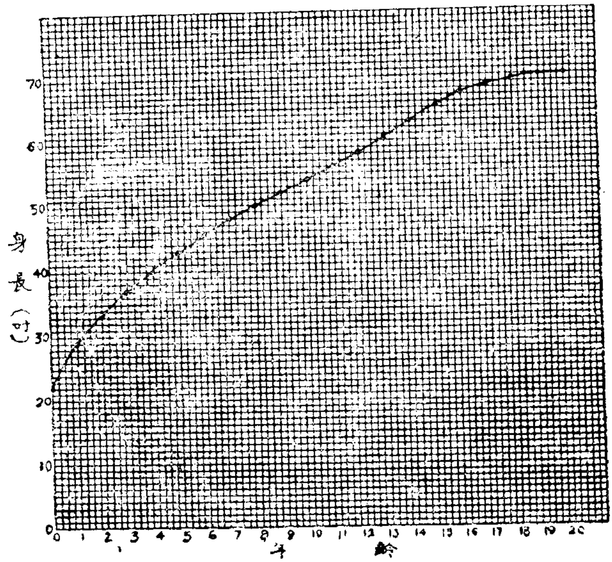
表二六　表明傅蘭克兒童假定的每年身長，自生後至20歲

年　歲	身長英吋	年　歲	身長英吋	年　歲	身長英吋
0	22	7	$47\frac{3}{4}$	14	63
1	29	8	50	15	$65\frac{1}{4}$
2	$33\frac{1}{2}$	9	52	16	$67\frac{1}{4}$
3	$37\frac{1}{4}$	10	54	17	$68\frac{1}{2}$
4	$40\frac{1}{4}$	11	56	18	$69\frac{1}{2}$
5	43	12	58	19	70
6	$45\frac{1}{2}$	13	$60\frac{1}{2}$	20	70

怎樣繪發展圖　如果我們用一張方格紙在下部表明年齡量尺，如第三十九圖所示者，而在左邊以英吋表明身長，於是我們可表示傅蘭克的初生的身長，（22吋）一點在年齡量尺上，一點是在零點以上，在身長量尺上，一點是在底線上的22單位上。　身長至一歲時（29吋）其身長一點在年齡量尺1的上面，在身長量尺一點上是在底線上的29單位上，餘如此類推。

如果我們在圖上繪出每點代表傅蘭克的身長自生後至20歲，則所有各點即如第39圖。 在這個圖內，經過各點畫一修勻曲線，並且假設我們好像繪其他各點似的——例如，好像有代表傅蘭克一歲半的身長，二歲半的身長，等各點— 這許多可成同樣的曲線。 的確，用其他每一點，亦可繪一曲線，差不多是一樣的正確。 這是因爲測驗做的正確且因這個兒童發展的很有規則而成穩健狀況的緣故。

圖三九　表明假設的兒童傅蘭克身長的發展，自生後至20歲。



發展圖的解釋　利用曲線，則對於傅蘭克在任何年齡時，例如10歲3個月，可爲適當正確的說明。(每一橫距離小單位代表3月)按照第三十九圖，傅蘭克在10歲3個月時，身長是$54\frac{1}{2}$吋。

這個曲線表明傅蘭克發展的各項情形，此爲在第二十六表內所未顯明者。所以我們可看出比較發展快的時候是在第一年，以後發展逐漸稍緩，一直到七歲，在七歲時發展的速率，比較的固定到十二歲時爲止，以後又有二三年的迅速發展。於是速率逐漸降到零點。十七歲以後發展很少。曲線愈峻直，則發展愈速。當曲線成水平時，發展遂停止。

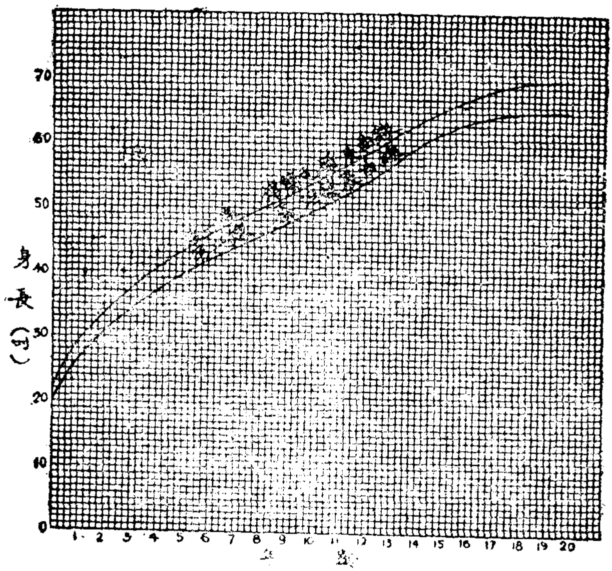
發展曲線的比較　同年齡的兒童，其身長不同，這是很普通的現象，且到成人時身長亦不同，其在各種不同年齡時，亦是如此。

當然，在同一圖內畫兩個或兩個以上的發展曲線，這是可能的。所以第四十圖所表示的發展曲線，和第三十九圖相同，且附第二根曲線代表另

一兒童喬治（Geovge）的發展。

喬治在生時㊀有幾多長？兩歲時有多少長？五歲時有多少長？ 每一直行的單位代表幾多時的身長㊁？在十歲時，喬治是和傅蘭克一樣高嗎？ 在十歲時，他們的身長有什麼不同㊂？喬治在幾歲時纔達到傅蘭克六歲三個月的身長㊃、大約在幾歲喬治發展的最快㊄？在十三歲時，那一個兒童發展的

圖 四十 表明兩個兒童發展的關係，其發展速率不同，達成人狀態時年齡不同，身長不同。



第一線 傅蘭克發展曲線

第二線 喬治發展曲線

㊀20吋

㊁1吋

㊂4自吋

㊃8歲3個月

㊄13歲

較快？ 十六歲時那一個快？ 在幾歲時喬治達到成人的狀態？ 傅蘭克的成人高度超過喬治幾多吋。

智力的發展　表明身長發展的同一曲線來表明兒童智力的發展，這是可能的。 當然，我們不能測驗智力和我們測驗身長一樣的正確。我們怎樣測驗智力呢？ 的確，什麼是智力？

智力的定義　當然，我們不能在此地離開本題範圍而討論心理學上所研究的智力定義。 但是我們可以下一個確定的說明。 我們可以說智力是心理的原質，使一個人能解決他所有的新問題。這種原質具有各種官能，當一個兒童逐漸長大時卽表示其能力應用他的知識解決逐漸"困難"的問題。(一個困難問題或困難境遇在一定的年齡時比較容易的問題的人能夠解決或得圓滿解決的很少)。所以如果我們設一組的問答和問題（我們可稱爲節目）從易排到難，我們看出一個兒童逐漸長大時，能夠問答或解決這許多節目，漸次加多。 這個事實給我們一個測驗智力的方法。 我們可給一班學生做中級試驗，計算每一學生做對的節目而做爲他的分數。 所以就學生有同一機會獲得知識而論（因爲一個學生獲得一定的知識，到某種年齡，大半須視其智力發展的能力爲依歸）一個學生的智力測驗分數是一種智力的測驗。

智力測驗分數的特效　如果兩個學生因疾病，教育不良，或其他同類的原因，致沒有同樣的機會和動機，以獲得知識，則這兩個學生的分數不能表明他們智力上眞正比較的程度，這是無須說明的。 因此理由，我們要記牢，智力測驗不能直接測驗智力。 然而有許多情形，同一學校同一年齡兒童，差不多有同樣機會以獲得知識，那末智力測驗，卽能達測驗他們智力上比較的等級了。

我們用同類的例證來研究這一點。以船載水，測量水之重量，此為間接測量船之容量。如果船水不滿，則水的重量不能表示其比較的容量；但如船水均滿，則水的重量，乃為船的比較容量之完全有效的測量。如果船水有$\frac{3}{4}$或$\frac{7}{8}$，在這樣情形中，水的重量亦能表出船之真正的比較的容量，這是可以相信的。

同樣，用"智力測驗"以測驗兒童智力，在測驗時須使具"充分"知識以達到他們的能力，或者至少要能"補足"到同等比較的程度。這個意思，如我們前面已經說過的，兩個學生須有教育機會（教授與動機）使他們獲得知識達到同樣的比例，俾能以他們的分數，作智力上適當的比較。

然在一組兒童在教育上機會沒有充分的知識時，我們只能不用他們分數作測驗他們智力的比較等級。

智力測驗的單位 測驗單位是否和时的意義相等？我們通常以為10點的分數，即等10點的分數，不問其是為20分與30分的區別，或是65分與75的區別。然而實際上我們知道，這個測驗在量尺上的10點，不一定等於另一量尺上的10點。我們不能僅用一個測驗表證明，但一觀第三十四圖，就看出在中級試驗分數的10點介於40與50之間者，等於在國家智力測驗分數的14點（111到125）。就是在中級試驗分數60與70間的10點，等於國家智力測驗分數（146到169）間的23點。所以兩種中每種量尺上測驗單位價值或其他量尺的單位價值，在量尺上這一部分一定和那一部分不同；這在兩個量尺上皆是如此。

智力發展曲線 雖然，我們知道一種測驗分數，在量尺上單位的真正價值，或者有些變化，但一個學生智力測驗的分數，是他智力上一個完滿的測驗。我們可用中級試驗分數繪傅蘭克智力發達曲線。我們假設

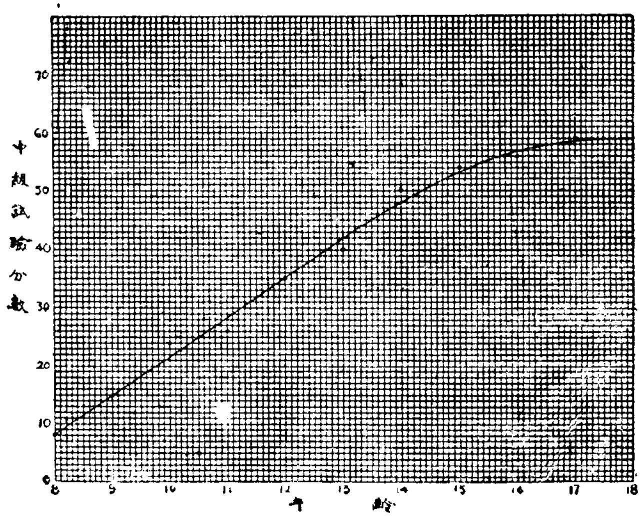
傅蘭克所受測驗，是在他每年的生日，自八歲起到十八歲止，其分數如第二十七表

表二七　表明傅蘭克中級試驗分數自八歲到十八歲。

年齡	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
分數	8	15	24	26	34	40	50	54	56	59	59

繪發展曲線　第二步手續，當然是在方格紙上繪出各點所代表每對的價值。這步手續在第四十一圖做出，並"通過"各點繪一修勻曲線。為什麼要作修勻曲線？為什麼不連合各點而作一直線？兒童眞正的智力其發展情形是否能連合各點以成一直線？何故？

圖四一　一個假設智力發展的曲線，假設以中級試驗測驗者。



有規則發展之起伏測驗 如果我們假設傅蘭克智力增進爲有規則的情狀，而發展最近似的眞正曲線如第十一圖所繪者，我們如何計算在直線上下各點的起伏呢？

當然，有許多理由，說明何以一個學生分數，在任何一特殊的日期，其眞正能力，不能和他自己其他的分數比較，以及和班中其他學生的分數比較。從以前的討論，還可記憶就是教育機會的起伏，(教授與刺激會)影響分數的。還有心理與生理的情形(就是矜持或疲乏)亦會影響分數，及其他等等原因。所以我們假設傅蘭克分數，在十歲時過高而在十一歲時分數過低，且直綫使兩種分數成爲一種平均數，不也是合理的嗎？

的確，我們可假設第四十一圖的曲線是含有所有分數平均的性質。在直線上每一分數被線下的一個分數均衡，每一量數在平均數以上者被在平均數以下者均衡。在第一圖中B與D的"平原"乃根據A與C液體的高度，這根線上分數的增加，亦是依據同樣的關係。

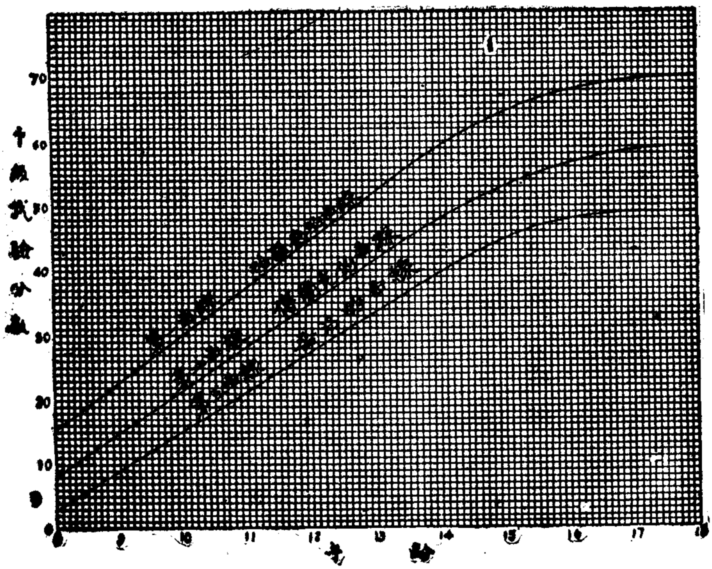
你一定要問，一個學生分數怎樣會太高的。一個學生能否做到他最好的地步？我們不應當看他最好的分數作爲他眞正的分數嗎？這或者可以的。照這個意思說起來，線上不應有點數了。然而我們如命傅蘭克每天繼續做十種的中級試驗，則平均數和中數分數較爲固定而代表每天能力的測量較他最高分數要多些。所以在線上的分數，不過代表所做的情狀比普通測驗的情狀較好而已。

解釋發展曲線 假定曲線是代表傅蘭克智力最好的發展，這個發展有什麼顯著的特徵呢？在八歲到十四歲時，有一平均速率，十四歲以後，速率開始降緩，繼續到十八歲，在這一點時發展就顯出停止了。到這個年齡他是達到智力的成熟時期。

個性差異　兒童智力發展的差異較身長發展的差異多些。第四十二圖表明三個兒童智力的發展，如何差異。

你可以看出哈羅得（Harold）在八歲時表示比傅蘭克智力大，經過他全部發展，繼續保持他的優越地位，在量尺上達到智力成熟的最高點；同樣，喬治在八歲時其智力不如傅蘭克，經過全部發展仍爲次等地位，在量尺上，其智力成熟居最低點。

圖四二　三個假設兒童智力發展曲線表明個性差異。



第一曲線　哈羅德的曲線

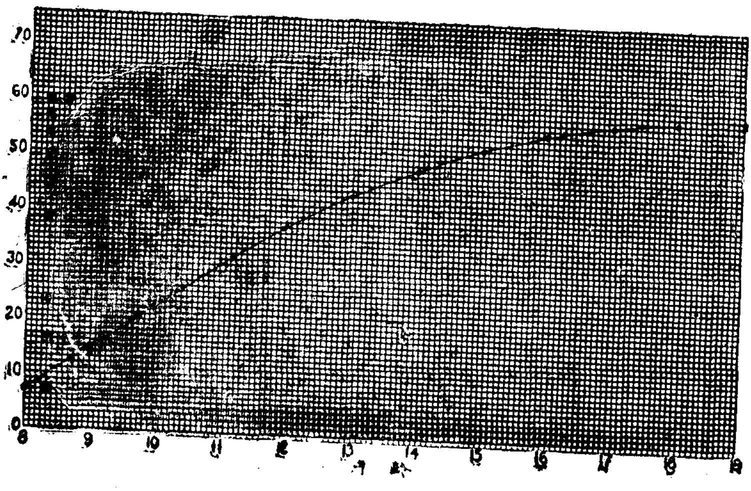
第二曲線　傅蘭克的曲線

第三曲線　喬治的曲線

聰明，常態，與愚笨的兒童 明瞭同一年齡兒童分數有很大的差異，則自然發生一問題，卽差異是什麼原因。除了某種程度的變異是因測驗的錯誤而外，我們不能知道智力差異的原因，就如我們不知道身體何以有高矮不同一樣。我們僅能說有些兒童是聰明的，有的是愚笨的，而有的是尋常的。

什麼是一個常態的兒童呢 十歲的兒童，如果他的分數是10歲兒童㊀分數的中數，就叫做正確的常態。

圖四三 智力發展的常態曲線，用中級試驗測驗者。



㊀我們當然不能測驗所有10歲的兒童；所以我們就能力所及測驗大多數10歲兒童做爲樣本。10歲兒童的意思，就是理想的兒童其年齡恰爲10歲。實際上我們求兒童的中數分數；從9歲到10$\frac{1}{2}$歲。

10歲兒童的中數分數，在中級試驗上是23點。一個10歲兒童在中級試驗裏得23分，恰為常態兒童。

智力年齡　任何年齡的兒童得23分，其智力恰為10歲的常態。實際上他的智力只為10歲。為便利起見，我們就說這個學生的智力是10歲。說"智力年齡是10歲"有兩層用處。第一，可為通用的測驗，即其他測驗的分數易於轉變，以作比較（不過只求10歲兒童的中數分數）第二，是一個"自己的解釋"，如我們所已經說明的。這樣我們能夠很容易的明了而便于記憶，一個兒童智力年齡為10歲是什麽意義了。

常模　11歲兒童在中級試驗的中數分數是31，所以任何年齡的學生得31分，其智力年齡即說是11歲。分數31即說是11歲年齡的常模。

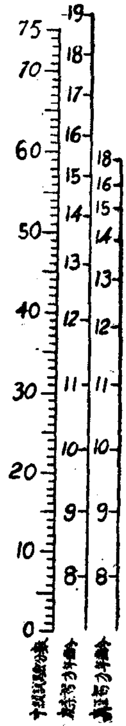
第四十三圖表明智力發展的常態曲線，是以中級試驗測驗者。注意這個曲線在年齡量尺經過11點時，在分數量尺上即為31。同樣，其他各點為曲線所經過者，如分數38是12歲年齡的常模，13歲年齡的常模是44，餘類推。

練習34　14歲年齡的常模是什麽？分數53是什麽年齡的常模？$9\frac{1}{2}$歲年齡的常模是什麽？10歲3個月的是什麽？11歲5個月的是什麽？16歲的是什麽？17歲的是什麽？18歲的是什麽？19歲的是什麽？20歲的是什麽？（很明顯的，18歲以上各年齡的常模和18歲的常模是一樣的，即是59。）分數21是什麽年齡的常模？分數37是什麽年齡的常模？分數46是什麽年齡的常模？一個學生得分數46，其智力年齡是什麽？一個學生得分數47，51，57，58，59，60其智力年齡是什麽？

眞正智力年齡的限制　一個學生得分數58其智力為17歲。這在第四十三圖的曲線和左邊的量尺皆表明如此，量尺是從曲線生出來的。

一個學生得分數59，其智力年齡是18。 一個學生得分數60，其智力爲在任何年齡的常態之上。 所以如果智力年齡的意義卽是實在常態的個人所得分數的年齡，則在中級試驗裏，分數在59以上者，不能用智力年齡來解釋，因爲實在常態的個人沒有能得59分以上，蓋在量尺上已達到智力成熟一點了。

圖四四 以中級試驗分數表示皮奈智力年齡與眞正智力年齡的關係。



皮奈的智力年齡 "智力年齡"這個名詞，首先採用者爲皮奈——西門測驗，這是各種團體測驗之先河。 這個測驗●的分數非以答對問題的數目計算，而以年月計算，稱爲智力年齡。

皮奈——西門測驗開始所計劃者，非測驗成人的智力常態，經斯丹福大學（Standford University）推孟博士（Dr. Lewis M. Terman）修正增廣，大家皆知道爲斯丹福修正皮奈——西門測驗●，可以測驗智力常態以上的成人。 現在爲保持以前的專門名辭而謀一致起見，這些智力等級在成人常態以上者，仍以年月表明而稱爲智力年齡——在成人常模以上的智力等級和成人常模以下智力等級，沒有區別。

斯丹福修正的皮奈——西門測驗，其智力

●皮奈——西門測驗是一個簡單的測驗，和我們尋常所揣想的測驗一樣；就是將簡單問題，列爲次序。所以我們說皮奈——西門測驗是一種試驗

●荷夫登米夫林公司（Houghton Mifflin）出版

年齡延長從3歲到19歲6個月。中級試驗各種分數，和皮奈智力年齡的關係頗爲近似，如第44圖所示者。

細心觀察這個圖。注意達到皮奈智力年齡11歲時，其皮奈智力年齡❶與在中級試驗相關分數的年齡，適爲常態。皮奈智力齡❷照此圖看起來，其12歲年齡的常態約11歲11月。13歲年齡的常態，約爲12歲，在皮奈智力年齡8個月餘類推，18歲年齡的常態，在皮奈智力年齡上約爲15歲5個月。以皮奈智力歲齡的16歲零月，作爲成人的常模（個人達到智力成熟時刻）此已成爲習慣。但在軍隊材料方面，心理學家相信成人常模是在皮奈智力年齡16歲以下。在任何情形之下，一個皮奈智力年齡的17歲，代表智力的等級較高於17歲年齡的常模，或任何年齡的常模。皮奈智力年齡的18歲，當然代表，智力等級高於18歲的常態智力，並且有此傾向，這從第四十四圖看的很清楚。皮奈19歲的智力年齡所代表之智力等級甚高，恐只有百分之三的成人能夠達到。

設想的智力年齡　皮奈智力年齡在上部的距離對於相關的實足年齡，並非常態，這一層須完全了解。皮奈智力年齡不過是以年月所表示的高分數而已。要將這些智力年齡和我們前面所討論的眞正智力年齡區別，我們可稱爲設想的智力年齡。

如果智力年齡代表智力等級，此智力等級爲相關的實足年齡的常態，我

---

❶斯丹福修正皮奈——西門測驗現在常稱爲皮奈量尺，我們可用較簡名詞稱皮奈智力年齡爲斯丹福皮奈智力年齡。

❷我們以皮奈智力年齡，例如智力年齡11歲，11個月，作爲一時的分數，而非視爲我們以前各頁內所討論的智力年齡。

們可稱爲眞正智力年齡。皮奈智力年齡在下部的距離乃眞正智力齡。如果智力年齡代表智力的等級非相關實足年齡的常態，我們應稱爲設想的智力年齡。皮奈智力年齡的上部距離，如我們已經說過的，乃設想的智力年齡。眞正的與設想的智力年齡分界綫，在皮奈智力年齡量尺上不能確知，但或者介乎11與14歲之間。

設想性質的皮奈智力年齡，在上部的距離，著者所作的各種皮奈——西門修正測驗有完全的解釋，但大多數人不能完全欣賞，他們以爲很熟悉智力年齡，常模，等等。的確，這種錯誤觀念爲對於應用智力年齡以解釋分數，求智力商數等所生較其他更紛擾與更誤解的根源。然對於皮奈智力年齡的特殊性質了解以後，並明瞭18歲的直正智力年齡是一個意義，而18歲的皮奈智力年齡又是一義，則自無紛擾。但皮奈智力年齡與眞正智力年齡在12或14以上，仍須區別之，最好的方法，就是常將智力年齡從皮奈——西門測驗得來者，或以皮奈——西門測驗解釋者，作爲皮奈智力年齡。這又不能過於注意。

問題

1. 各種團體智力測驗的指南（Mannals of Directions）上有年齡常模。假設17歲年齡常模爲129點。假定一個中學生得測驗分數129。我們可否說他的智力年齡是17歲?

2. 假設一個學生是16歲。我們可否以"實足年齡"除智力年齡而求其智力商數●。

●看第十三章商數的意義。

3. 如果我們這樣做，其智力商數——這樣求得者是否可與用皮奈—西門測驗者相比較?

4. 要以從分數和實足年齡得來的智力商數與用皮奈——西門測驗求得的智力商數相似較，須做什麼?

第十三章　聰明的測驗

智力商數——舊智力商數的不準確——補救辦法——普通錯誤觀念——聰明係數——從團體測驗求智力商數——聰明指數——求智力商數的新方法——百分等級——詮釋圖——藉圖求智力商數

我們已經知道一個學生智力的等級，可以他的智力分數說明，亦可以智力年齡"表明。然而這還不能使我們完全明了一個兒童的智力原質，所以一個學生恰爲5歲時，其智力年齡正爲5歲（5歲常態兒童的智力狀態）；另一學生的智力年齡達5歲時，而年齡僅爲4歲；再另一學生到6歲時，其智力年齡始爲5歲。

智力商數　雖然這三個學生達到同一智力狀態，但有一根本的差異，這是很顯明的，這個差異我們叫做聰明的差異。

同樣，例如三個兒童——哈羅得，傅蘭克，喬治——在10歲時，其智力年齡一爲11歲，一爲10歲，一爲9歲。

現在爲說明這三個兒童每人聰明的程度起見，我們以其實足年齡除智力年齡㊀，而以商數表明他的聰明的程度。例如哈羅得智力年齡是11歲，其實足年齡是10歲；所以他的聰明測驗是$\frac{11}{10}$或1.10。通常省去小數點而說哈羅

㊀這個名詞以普通的意義說明年齡和智力年齡的區別。

得的智力商數[1](IQ)為110，同樣，傅蘭克的智力商數為$\frac{10}{10}$或100，喬治的智力商數為$\frac{9}{10}$或90，我們可認為這90價值，為常態智力年齡的百分之90。

用斯丹福修正皮奈——西門測驗求得的智力商數，其每種年齡分配，近於常態分配律，在這樣情形中，智力商數的變異，和各種年齡的智力商數相近。換句話說，約有百分之25兒童年齡，其智力商數為108或多一點，約有百分之75兒童年齡得智力商數92或多一點，如在第九章所見者。各種智力商數的重要，已由推孟博士在智力測驗[2]書中79頁內說明，見第二十八表

表　二　八

智力商數	分類
140所上	近於天才，或天才
120——140	極聰明者
110——120	聰明者
90——110	常態；或平均的人
80——90	愚笨者，很少的是白痴
70——80	痴笨者，有時歸入愚笨一類
70以下	白痴

這種解釋，很多的地方，認作標準，其智力商數，認為是聰明的標準測驗，凡應用智力測驗的人皆已熟悉。聰明亦可以百分等級測驗，並有其他各種聰明的測驗，均已在計畫中以為各種測驗的應用，而達各種測驗的目的。還有各種名稱，如智力係數，聰明係數，聰明指數等等。此在以下討論之。

舊智力商數的不準確　"舊智力商數"名詞，其意即謂智力商數，是從智力年齡得來，或以皮奈——西門測驗或用團體測驗，其求法為以實足年齡除智力年齡(以16歲為最大限度)而與我們所稱為新智力商數者有

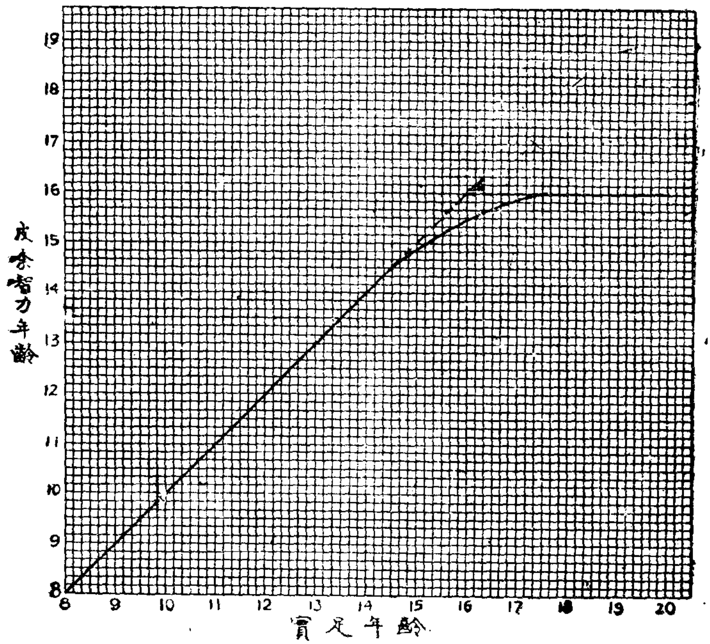
[1] 求智力商數，普通常以1 歲以上者作為1 歲看，由理由以後解釋。

[2] 衕夫吞米父林公司出版

別，現在欲以新者代替舊者。如在本章前一段所說者，智力商數，現在常發見其不一致，其理由如下。

第一，我們研究從皮奈——西門測驗所得的智力商數情形。皮奈——西門測驗的智力年齡量尺，如我們所見者，其所代表的分數，是以年月說明的。這些分數，在量尺下部相關的年齡上是常態，但在上部便爲設想的分數。我們假設量尺上的單位全數均等——即智力在智力年齡10與11歲的差異和智力年齡11與12歲的差異是一樣，其餘類推，一直到19歲6個月，到量尺的頂端如第四十五圖所示者。

圖五四 智力發展的假設常態曲線用皮奈——西門測驗的智力年齡



我們再假設智力發展的常態曲線，用皮奈——西門測驗所表示的智力年齡爲眞正的智力年齡，一直到14歲，而常態智力成熟期由皮奈智力年齡所代表者爲16歲。這是在計算智力商數時假設在現在實際應用上以16歲爲最高限度的實足年齡。

不繪一直線到皮奈智力年齡的16歲(A點)的水平線並在水平線的地方作一切斷，如斷綫所表明的，則我們不能假設智力年齡爲眞正智力年齡。所有的證明皆與這樣的假設相反。

圖內表明很淸楚，卽16歲年齡的常態分數，（皮奈智力年齡）必低於16歲。照我們假設曲線約爲15歲，5個月。一個16歲的學生達皮奈智力年齡15歲5個月，則恰爲常態，而智力商數爲100。然用現在圖上的方法，則他的智力商數是$\frac{15歲5個月}{16歲}$=97。於此可見，在這樣情形之下，其智力商數不爲100。

我們自另一方面可以假設，這根曲線實在爲直線，一直達到16歲(A點)在這樣情形，當然16歲常態學生智力商數適爲100。然在這種情形之下，曲線必伸長過於16歲的皮奈智力年齡，因爲我們知道不能在這一點作一角度。這個意思就是說，成人的常態皮奈"分數"，是大於16歲的智力年齡——譬如說是16歲，6個月。在這樣情形中，通常狀態內所求的常態成人的智力商數，爲$\frac{16歲,6個月}{16歲}$=103。於此又可見，在這樣情形之下，其智力商數亦不爲100。

我們從這些事實，看出常態個人的智力商數，如現在通常計算的，或在量尺中幾點低於100，或高於100，或兩者兼而有之。

補救辦法　就皮奈——西門測驗而論，補救這個困難是很簡單的。卽數目爲智力商數時，以分數爲除數，此非爲個人的實足年齡而爲皮奈的智力年齡，乃他的年齡常模。所以16歲學生常模的智力商數，就應當是$\frac{15歲,6個月}{15歲,6個月}$=100，其餘每一年齡亦是如此。眞正常模的人智力商數，設常模是

正確的，則常常恰為100。

然而很不幸的，在皮奈——西門測驗裏，現在沒有年齡常模。智力發展不能決定常態曲線，我們不知道皮奈智力年齡16歲的常態是什麼，不過揣測在皮奈智力年齡14齡與16歲之間而已，但仍須為統計的決定。

普通錯誤觀念　尋常有一種錯誤卽以為達到智力成熟的年齡，就是皮奈智力年齡所代表常態智力成熟的年齡，這二者的混淆，能夠注意，亦是很好的。按照我們假設的發展曲線，常態智力的成熟，在皮奈智力年齡所代表者為16歲，但在尋常個人年齡不至18歲時，則不能達到。由此可知常態智力的成熟可以皮奈智力年齡14歲代表(有許多人如此主張)而尋常個人不至19歲時不能達到，這是很明顯的。

然此不可生一錯誤，以為當一個人說他相信"平均成人的智力水平纔是皮奈智力年齡的15歲"卽謂個人達到智力成熟時期是在15歲的年齡。

此外還有較重大的錯誤，卽假設如果一個人達到成熟年齡是在18歲，則其成人常態智力年齡由皮奈智力年齡所代表者亦為18歲。這些錯誤是在雜誌上所投關於智力測驗普通論文者所作之錯誤。

聰明係數　為求聰明測驗使不因智力商數而發生不正確如現在通常所求者，且使能與智力商數比較起見，著者乃計畫一聰明測驗，作俄提斯團體智力量尺，高等試驗的應用，稱為聰明係數 (Coefficient of Brightness, CB)。從這個測驗裏初次所得的常模，其分數加55點卽等於與皮奈智力年齡相關的各月的數目。這並非以一個學生的實足年齡除他的皮奈智力年齡，以求智力商數，乃以皮奈智力年齡除之，這個年齡是學生年齡的常模。此可於年齡常模分數上加55點求得之。其結果為聰明測驗和智力商數普通的比較，而非入於上述的錯誤，如普通所得之智力商數。

這個方法在伊里諾哀試驗（Illinois Examination）應用過，在俄提斯團體智力量尺內，變換用以測驗聰明，稱爲聰明指數IB,（Index of Brigtners）其不與智力商數直接比較則較固定，所以於應用團體測驗較其他智力商數或聰明係數確實，如在以下各頁所示者。

從團體測驗求智力商數 我們已研究從皮奈——西門測驗所求得智力商數的效度。要得任何受團體智力測驗的個人智力商數，以求其皮奈智力年齡等於在團體測驗的分數而以其實足年齡除之，像尋常的做法，或以常態的實足年齡除等於他的分數之皮奈智力年齡，這當然是可能的，——此法乃用以求"新智力商數"者。然而因此發見智力商數用任一種方法從團體測驗得來者，其施諸於年輕兒童之差異，較施諸於年長兒童者爲大。這是因爲年輕兒童的分數，對於年齡差異的比例，較年長兒童的分數 對於年齡差異的比例大。

因這許多事實，以智力商數測驗聰明當用諸團體測驗時，則失去重要的意義，例如智力商數爲120，在年長兒童方面較年輕兒童，則表明很高程度的聰明，然爲使聰明測驗有效度起見，則一種年齡的智力商數應與智力商數在其他的年齡上能代表同樣的程度。

不但年輕學生在團體測驗的分數對於年齡比例的差異，大於年長學生的分數，並且實際上和年長學生的分數，差異到同樣範圍。的確，國家智力測驗㊂分數的分配，以及其他智力測驗，對於年長與年輕學生差不多差異相等。

事實上所需要說明聰明程度的方法，與用實足年齡除智力年齡以求學生智力商數的方法不同。新方法應當如此，即一個學生在年齡8歲時得百分

㊂看袖珍指南增補8。

等級75，與一個學生在年齡16歲時得百分等級75者，二者聰明測驗應相同。

現在已經知道一個學生其智力在他同年齡的學生中得百分等級 75者，在俄提斯團體智力量尺，高等試驗(Otis group Intelligence Scale, Advanced Examination)所得分數不問在何種年齡。能高於常模20點，同樣一個學生得百分等級25者，則所得分數，亦不問在何種年齡，約低於常模20點。這些事實表示非以除的方法求聰明測驗，而以減法求之較爲妥善而簡便。就是一個學生超過或低於他的年齡常模的各點數目，比在尋常情形所得的智力商數，爲固定的聰明測驗。

聰明指數 以負數表明聰明，當然是不便利的，但是我們很容易免去這種缺陷，就是以100代表常態性如智力商數情形一樣，而從100上加減各點的數目，以表示一個學生的分數，超過或低於他的年齡常模。

在俄提斯團體智力量尺的情形內，有用這些方法說明聰明的程度，這種測驗稱爲聰明指數。

求智力商數的新方法 在俄提斯智力的自治測驗的高級與中級試驗情形中，看出從年齡到年齡間很固定的分數之差異。這種說明聰明的方法，和聰明指數一樣。

兩種測驗分數的差異，在每種年齡上發見其分配上的中數差，同近於8點，這是很料想不到的，——恰爲皮奈——西門測驗智力商數中數差的價值。這個意思就是說，高級試驗的聰明指數，或中級試驗的聰明指數，是直接和皮奈——西門測驗智力商數相比較。即是聰明指數108表明百分等級75恰和皮奈的智力商數108所得的一樣，並和其他價值相同。

這種新的測驗聰明的方法，似乎最好只稱"智力商數"(雖然不是商數)，因爲智力商數的名詞，應用甚廣且因這種聰明測驗與皮奈智力商數的相關，

比實在商數之以實足年齡除等於團體測驗分數的皮奈智力年齡所得者，其關係較為密切。

百分等級　在我們討論測驗聰明的效度時，我們常論到一個學生智力在他同年齡中百分等級做爲聰明的最好標準。且確是好標準，其不便利之處，卽是百分等級單位在全量尺中，非爲同等的價值，我們並且贊成以100做爲常態性的測驗，而不以50做爲常態性的測驗，這或者是最容易了解且在各種測驗中最易解釋者，將來應用必較已往爲廣，這是無疑的。

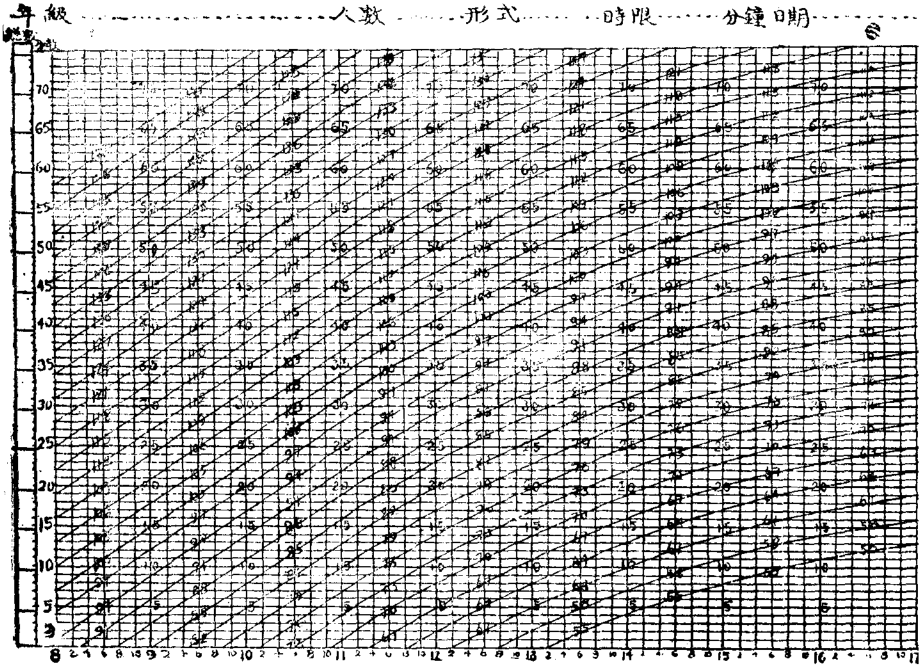
詮釋圖　爲便利計算中級與高級試驗學生分數的智力商數起見，因對於每種測驗製一解釋圖，第四十六圖爲表明中級試驗的解釋圖。注意圖下的年齡量尺和右邊的分數量尺以及經過圖的中間粗的曲線。這根粗線是發展曲線恰爲常態兒童的智力，其表明8歲兒童的常模是7點，9歲兒童的常模是15點，一直到17歲，其常模爲58點。

藉圖求智力商數　我們假設一個學生是12歲10個月。粗的曲線截斷直線約在年齡量尺的12:10的地方，其在橫線上表明分數43。這個意思就是表明12歲10個月年齡的常模是43。這樣求智力商數，則無須計算。我們假設學生分數在中級試驗不是43而爲49。我們就應在直行求代表12歲10個月的一點，和在橫行代表分數49的一點。這一點可以看出是在曲線上的一點。如果我們沿曲線到圖的右邊，就得106的數目。這就是說，這個學生的智力商數是106。

有一種算法在圖上決定學生年齡的常模，求學生分數超過他年齡各點數目，而加此數於100。此無須求智力年齡，或將以年月表示之年齡變爲月數或應用其他的除法。

圖四六 中級試驗解釋圖(實際大小爲長寬7與10吋)

俄 提 斯 智 力 自 理 測 驗
詮 釋 圖 中 級 試 驗 用



在此圖上,代表每一學生的分數與年齡的各點均有小點表示,其智力商數的分配只須將介於每對毗連曲線的各小點加起來即得。

問 題

本章內所說的各種測驗聰明的方法,你贊成那一種?

第十四章 常　模

代表的取樣之需要——年齡常模——年級常模——怎樣從年齡常模求年級常模——年級地位——從年齡常模求年級地位——從年級常模求年齡常模——補插法——學科年齡——設想的學科年齡——教育商數——成業率——總結

我們以前所討論的常模，只限於年齡常模——測驗分數表示每種年齡的常模。此外還有年級常模——測驗分數代表每年級學生的中等能力。如果我們希望要有智力年齡的常模，我們亦可得到一種測驗分數爲10歲智力年齡常模時，亦可爲所有10歲智力年齡學生的中數分數。所以智力年齡常模，乃成績測驗的分數而爲各種智力年齡的常模。

代表的取樣之需要　各組學生能力差異甚大，要使常模能根據於學生之眞實的代表的取樣，則分數至少須有各種年齡一千個學生，且須包括範圍甚廣，並包含城市與鄉村學校。

年齡常模　求年齡常模最大的困難，在得每種年齡眞正未選擇的團體，如果我們要求8歲兒童測驗的中數分數，我們應包括一年級和二年級的8歲兒童，以及三年級兒童並三年級以上者。當然，還須包括未入學校的8歲兒童。這是尋常所做不到的，所以我們僅能估計這些學生有多少，以及他們的分數是什麼。

同樣，如果我們求17歲學生測驗的中數分數，我們不但應包括在校的1
歲學生，並且要有校外的和已畢業的17歲學生。這也是通常不可能的，所
以我們僅可揣測這種學生有多少，他們的分數是什麼㉝

年級常模　有許多原因使這一級與那一級或學校或城市學生之
中數分數，和國內其他地方的同樣中數不同，以致年級常模無論如何細心的
求得，皆沒有很大的價值。在各種情形之中，使各年級與各學校中數分數發
生差異者，有以下數種原因。

（甲）一級或一校學生第一次測驗以後，有幾個學生會不能了解所要
做的是什麼——如怎樣在字下畫線，等等。如果學生十分熟悉測驗的情形
並知如何做法，則發生許多紛擾，使他們不能如他們所能做的那樣好。熟
悉標準測驗的程度，因此能影響一班的中數分數。

（乙）試者使用測驗方法，有很大的差異。學生對校長或教員敬畏
能刺激學生使對於測驗努力去做，而其他試者，也許做許多記號致使學生過
於緊張。

（丙）計分的確度，各校相差甚遠。著者有一次校對一束測驗卷，由
各教員計分，在七十五個問題中，有一半卷子的計分發見由一到二十五的錯
誤。這種不細心，差不多常由忽視學生錯誤而起。在這種情形中，一班的
中數分數實際上超過應有的現象。

（丁）再某年級學生的平均年齡，各城市間差異甚為顯著，甚至在一城
市中各學校間亦差異很大。一級中數年齡全年的差異，在一個學校的系統

㉝估計低年齡與高年齡的方法，在俄提斯團體智力量表說明常模的來源，有很好的證明：
從袖珍指南第54頁起1921修正本

中是不常見的。一個五年級的常模根據於十一歲的中數年齡;不能應用於五年級的十歲平均年齡,這是很顯明的。

(戊)一個學校各年級的中數分數,或一個學校制度的智力測驗,受社會環境很大的影響。例如這一城市所有五年級的中數分數,能夠和另一城市的六年級的中數一樣高。

(己)成績的中數分數,不但受社會環境各種差異的影響,並且受教授性質的影響,而且教授的性質差異極大,校與校不同,制度與制度不同,這是大家所共知的。

研究了各種學生中數分數差異的許多原因以後,最後可以看出常模不能應用於這樣各種的團體,如果學生分數在某種測驗不能恰相符合,亦不必煩惱。

我們假設一個教員首先要明瞭他的學生是否和別的年級學生一樣聰明或和其他城市中學校的學生是否一樣聰明。如其是的,他們是否在學級中學習很多。我們假設,一個教員,其次要知道他的學生在智力和成績方面,是否有顯著的差異;誰是級中聰明的,誰是級中愚笨的,那些學生對於學校功課應當完成的而未能完成,其原因何在。

我們假設校長所要知道的,就是他的學校學生,是否和其他學校學生是一樣的聰明。如其是的,他們的成績是否很好,是否學生分級適當,俾能收教授的最大效果,如果不是的,那些學生是否分級不適宜,等等。

所有以上的事實,可不用年級常模來決定。年齡常模,告訴我們誰是聰明,誰是愚笨。各級的中數分數,表明各學生怎樣以團體比較,百分比曲線表明分數的差異,及每級的重叠,智力分數的比較和年齡常模的成績,表明一個兒童所應當成就的程度。對於某一兒童失敗的理由,可於診斷測驗

尋出之。

本書有一種目的，在輔助教員與校長不僅是測驗學生，並進一步比較中數分數與年級常模，決定年級或學校在"標準"以上或"標準"以下，並如何排列試卷。

當然，以年級中數和現有學級所有學生的中數分數所組成之年級常模相比較，這是沒有什麽妨礙的。但此種比較，僅可視爲偶然的，並視與同一學校或同一城市其他班級之中數分數的比較，較爲次要。

怎樣從年齡常模求年級常模 假使要用一種測驗，比較年級中數和年級常模，此種測驗沒有年級常模或雖有常模而似不能應用，則半年的年級常模可從根據於各種年齡學生的中數年級之年齡常模得之，此種各項年齡是得諸一百萬兒童的年級和年齡的研究者。

第二十九表，表明一百萬兒童年齡的百分率之分配，其年級自1到12，根據於80個城市。此表在1918年，由華盛頓教育局波納（H.R.Bonner）編成。

第二十九表每年級學生的中數年齡，在第三十表中決定之。

表二九 一百萬兒童年齡每級的百分率分配，根據80個城市，1917－－18。

年級	最後生日的年齡——年歲 5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	總數
1	10.30	54.91	24.59	6.84	2.07	.73	.28	.13	.08	.04	.02	.01						100
2	.15	9.25	44.87	28.35	10.65	4.16	1.45	.67	.28	.11	.05	.01						100
3		.27	9.71	38.78	28.36	13.13	5.45	2.52	1.14	.47	.14	.02	.01					100
4			.38	9.29	35.12	27.49	14.58	7.55	3.63	1.46	.42	.06	.01	.01				100
5			.01	.56	10.26	32.27	26.58	15.98	9.34	3.67	1.14	.17	.02					100
6				.04	1.00	11.01	31.87	27.55	17.55	7.98	2.60	.34	.05	.01				100
7					.03	1.24	12.03	33.58	30.83	15.69	5.32	1.08	.16	.03	.01			100
8						.07	1.53	14.14	37.20	30.09	13.12	3.21	.51	.09	.02	.01	.01	100
9							.01	2.61	17.45	37.00	26.88	11.31	3.48	.82	.21	.07	.07	100
10							.01	.19	3.15	18.61	26.34	26.43	10.99	3.18	.71	.22	.17	100
11								.02	.38	3.29	18.83	34.89	28.00	10.59	3.07	.66	.27	100
12									.20	.28	3.56	18.38	36.70	27.16	10.11	2.89	.90	100
平均數	1.68	10.04	10.70	10.49	10.37	10.32	9.82	9.58	9.28	7.19	4.67	2.76	1.73	.81	.26	.07	.03	100

表三十 表明根據於80個城市一百萬兒童每年級學生的中數年齡。

年級	中數年齡	年級	中數年齡
12	17:9	6	12:2
11	16:9	5	11:2
10	15:10	4	10:1
9	14:11	3	9:0
8	14:0	2	7:10
7	13:1	1	6:8

六年級中數年齡是12歲2個月。如果我們假設任何年級學生的中數年齡，恰爲常態，則在任何測驗中，其12歲2個月的常模，卽爲六年級在一年中間時期的常模。

這個理由，在最低與最高年級不盡如此。因爲有一種情形，愚笨學生還未進學校，而在他種情形，愚笨學生已排諸校外了。在第三年級與第十年級，這種理由或者差不多正確。

在這些情形中，我們可從年齡求年級常模如下：在半年的時候求六年級常模卽看12歲2個月的常模。求其他年級的常模亦是如此，照第三十表求之。

在理論上講起來，每種年級的"中數年級"應作求年齡與年級關係的根據，這是一個爭論之點。然這種方法應用以後，則年齡與年級幾乎一樣，如第三十表所示者。基此理由，我們無須討論這些理論的研究。

年級地位 通常以年級常模說明學生分數，較以全年階段爲佳。例如我們可以 6.1 表明六年級學生在一學年第一月終了時的普通成績，以 6.2 表明第二月終了時的普通成績，等等。根據一學年以十個月計算，並以

之做為標準㊀，則6.5可表明六年級學生在一年級中間時的普通成績。所以我們可以說測驗分數為12歲2個月常態時，卽代表6.5的年級地位（Grade Status, G. S.），其分數為13歲一個月的常態時，按照第三十表卽代表年級地位7.5。

"年級分數"（G score）這個名詞，常用以表明我們所謂的年級地位。而"聰明分數"（"B score"）名詞亦如此用法，但B名詞最初為麥柯爾教授（Professor McCall）用為聰明測驗，如再用為年級地位必引入混淆之一途。B之一字，應作為測驗聰明之用，而G之一字，用做測驗年級地位，較為適宜。

還有一種方法，說明年級地位，卽以3.1代表第三年級第一月中間時候的常態成績，而不以代表第一月的終了時期。如以九個月為一年做標準，俾年級地位和一年的中間時期等于3.5，4.5，等，這個方法亦甚相宜。然而因為3歲1個月的智力年齡，其意義為一個常態兒童在生後第一個月終了時的智力年齡，所以為一致起見，以3.1代表第三年級第一月終了時年級地位，似為合宜；於是3.0則代表三年級第一月起始時的年級地位，或第二年級第十月末了時的年級地位。

因此年級地位的量表可從年齡常模製成如第三十一表，其中間的價值有補插法㊁補充。

㊀以此做根據不致發生重大關係，卽在期限不到十月的情形中，亦無關係。

㊁看下面補插法的意義。

表三一　從年齡常模求一個學生的年級地位。年級地位3.0代表8歲6個月年齡的常模，餘類推。

年級地位	常模年齡	年級地位	常模年齡	年級地位	常模年齡	年級地位	常模年齡	年級地位	常模年齡	年級地位	常模年齡
3.0	8:6	4.5	10:1	6.0	11:8	7.5	13:1	9.0	14:5	10.5	15:10
3.1	8:7	4.6	10:2	6.1	11:9	7.6	13:2	9.1	14:6	10.6	15:11
3.2	8:8	4.7	10:3	6.2	11:10	7.7	13:3	9.2	14:7	10.7	16:0
3.3	8:10	4.8	10:5	6.3	11:11	7.8	13:4	9.3	14:8	10.8	16:2
3.4	8:11	4.9	10:6	6.4	12:1	7.9	13:5	9.4	14:10	10.9	16:3
3.5	9:0	5.0	10:7	6.5	12:2	8.0	13:6	9.5	14:11		
3.6	9:2	5.1	10:8	6.6	12:3	8.1	13:7	9.6	15:0		
3.7	9:3	5.2	10:10	6.7	12:4	8.2	13:8	9.7	15:1		
3.8	9:4	5.3	10:11	6.8	12:6	8.3	13:9	9.8	15:2		
3.9	9:6	5.4	11:0	6.9	12:7	8.4	13:11	9.9	15:3		
4.0	9:7	5.5	11:2	7.0	12:8	8.5	14:0	10.0	15:4		
4.1	9:8	5.6	11:3	7.1	12:9	8.6	14:1	10.1	15:5		
4.2	9:9	5.7	11:4	7.2	12:10	3.7	14:2	10.2	15:6		
4.3	9:10	5.8	11:5	7.3	12:11	8.8	14:3	10.3	15:7		
4.4	10:0	5.9	11:6	7.4	13:0	8.9	14:3	10.4	15:9		

從年齡常模求年級地位　應用年齡常模求年級地位，我們假設製一年級地位表，與斯丹福成績測驗，高等試驗相關。用第三十一表輔助，則做起來很容易。例如求一分數代表年級地位3.0，我們只須看8歲6個月的常模。這個分數是13。代表年級地位3.1的分數，其常模爲8歲7個月餘照三十一表類推。這個分數是14。依此方法可以製一完全的年級地位表❶。

從年級常模求年齡常模　一種測驗有時只有年級常模而無年齡常模，因年齡常模，除爲求成績比率外，在教材測驗的情形，無甚價值。(看

❶著者在此測驗中所備的年級——地位價值，僅根據於產生常模的材料，和用此方法所得的價值差異甚微。

下面成績比率的解釋。）在這樣的情形中，年齡常模可從年級常模求得，用我們從年齡常模求年級地位同一表(表31)。在胡德森英文綴法量表㊀(Hudelson English Comkasition Scale)的小册中，說明綴法年級從4年級到12年級。其中並無年齡常模，直到最近對於成績測驗常模有興趣以後才表明一個學生的能力，怎樣和其他同年級的學生相比較。

我們假設以年齡常模表明學生綴法分數。須知此非爲普通應用上妥善的步驟，因爲如果我們研究地理，當然可以看出學生在年級中研究所得到地理知識比在上面的年級或低下的年級得到的多，而此處所說的方法，乃假設從一個年級到一個年級的整齊劃一的進步。此在綴法能力方面多少是對的，所以我們可多應用這個方法。

胡德森英文綴法量表正月的年級常模如下：

年級	4	5	6	7	8	9	10	11	12
常模(等第分數)	3.0	3.6	4.2	4.7	5.3	5.5	5.9	6.3	6.7

從第三十一表，我們能求出各種年齡，其年級常模（等第分數）皆是常態。假設正月是第五個月，我們在表中求對4.5，5.5等各年齡。求這些常模分數的年齡如下(看第三十表上部各年齡)

等級分數…	3.0	3.6	4.2	4.7	5.3	5.5	5.9	6.3	6.7
常態年齡	10:1	11:2	12:2	13:1	14:0	14:11	15:10	16:9	17:9

現在我們怎樣求常模年齡10:2，10:3，等的等級分數呢？這可以補插法求之。

補插法 這個名詞，用以求量表的中間價值。茲以胡德森英文綴法量表9:0，10:1，11:2等年齡間的常態等級分數爲例。

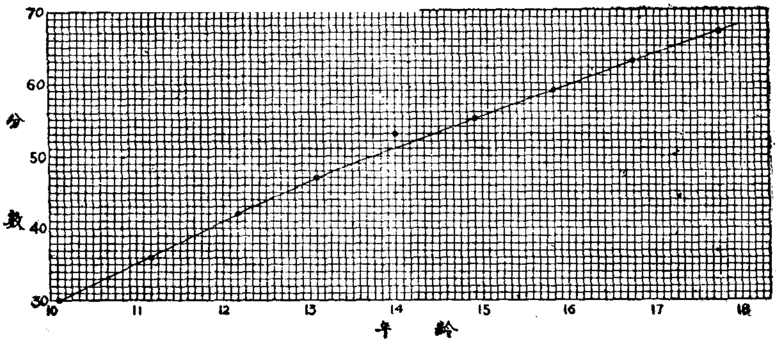
㊀世界書局出版，榮克胡德森，紐約。

這個方法是在圖上繪製各點，並繪一直線表示年齡和分數的關係。在第四十七圖，橫的量尺代表年齡，直的量尺代表等級分數。最低點（小圈的地位，表示等級分數3.0為10歲1個月年齡的常模。第二點表示分數3.6為11歲2個月年齡的常模，餘推類。

經過各點繪一修勻曲線，只有一點是例外，從此點的地位看來，8年級的常模如上面所示者，並不甚高。

為用補插法起見，我們假設常態學生逐漸長大時，其綴法的等級分數依照直線趨向增加。這個直線，換句話說，就是常態兒童在綴法中的"發展曲線"。

圖四七 表明在胡德森英文量表中用補插法從年級常模產生年齡常模方法。



我們現在只須閱直線上中間價值的分數——等於10:2，10:3，等年齡的分數。其分數如下：

年齡……………	10:2	10:3	10:4	10:5	10:6	10:7	10:8等
常模（等級分數）	3.0	3.1	3.1	3.2	3.2	3.3	3.3等

用這種方法我們能製一年齡常模表。

學科年齡 用年齡常模表明一個學生成績測驗的分數，已成慣例。所以一種年齡其等級分數為3.1，即為10歲3個月的常模；是以我們可說一個學生得分數3.1，其綴法年齡為10歲3個月。 一個學生的算術分數為10歲3個月，我們可以說他的算術年齡是10歲，3個月，餘類推。 這許多年齡叫做學科年齡。

設想的學科年齡 因為有些人，其智力分數高過於成人的常模以上、所以他們在學校科目中，其成績測驗分數常超過成人的常模。基此理由，且因習慣上我們常從智力年齡方面想到智力，有許多從學科年齡想到學校科目的成績，雖然成績是出乎成人的常模之外。 因此學科年齡的量尺常延長出乎成人的常模。 因此學科年齡成為設想的，如前面所說的智力年齡情形一樣。

教育商數 教育商數和智力商數一樣，以實足年齡除智力年齡，稱為智力商數，故一個學生的讀法年齡為其實足年齡所除，則稱其讀法商數。他的算術年齡為實足年齡所除，則稱算術商數，餘類推。 每一商數稱為學科商數。 一個學生各種學科商數的平均數即稱為教育商數。 或者他的教育商數的求法，以其實足年齡除他的全體的成績年齡。 例如一個10歲學生其讀法年齡為11歲，則讀法商數為$\frac{11}{10}$或110(即是常態的百分之110)。 如果他的算術年齡是9歲則算術商數為$\frac{9}{10}$或90(即是常態的百分之90) 如果這個學生的成績年齡(平均學科年齡，或等於普通成績測驗的年齡)是10歲，則其教育商數是$\frac{10}{10}$，或100

成業率 佛亞任博士 (Dr. Raymond Franzen) ●宣布一個意

●佛亞任，"成業商數"，師範院報告，1920，十一月號 (Raymond Frangen, "The Accomplishment Quoticnt" Teachers Callege Record, november, 1920)

見，即將學生的學科年齡如綴法或讀法，和他的智力年齡作一比較，以決定我們在他的智力年齡上所希望的達到了何種程度。如果一個學生的智力年齡是10歲，我們能希望他在每種科目中達到10歲的學科年齡，無論他年齡是多少。如果他的讀法年齡是11歲，他就是在讀法方面進步很快（縱然他或者是11歲），我們可以他的智力年齡除他的讀法年齡，並說明他的讀法速率是$\frac{11}{10}$，或110（在他智力年齡常態中，其讀法能力是百分之110）。如果一個學生智力年齡10歲，其拼法年齡只9歲，則其拼法成績，實在是退步（縱然他僅9歲）並且我們可以說他的拼法速率是$\frac{9}{10}$，或90（在他智力年齡常態中，其拼法能力是百分之90）

一個學生的學科率（Subjeot Ratio S.R.）的平均數，或他的全體成績年齡，對於他智力年齡（結果是一樣東西）的速率，稱爲他的成業率（Acc-mplishmant Ratio A.R.）❶。

總　結

$$\frac{\text{算術年齡}}{\text{實足年齡}}=\text{算術商數}\qquad\frac{\text{算術年齡}}{\text{智力年齡}}=\text{算術率}$$

$$\frac{\text{讀法年齡}}{\text{實足年齡}}=\text{讀法商數}\qquad\frac{\text{讀法年齡}}{\text{智力年齡}}=\text{讀法率}$$

$$\frac{\text{學科年齡}}{\text{實足年齡}}=\text{學科商數}\qquad\frac{\text{學科年齡}}{\text{智力年齡}}=\text{學科率}$$

$$\frac{\text{成績年齡}}{\text{實足年齡}}=\text{教育年齡}\qquad\frac{\text{成績年齡}}{\text{智力年齡}}=\text{成業率}$$

$$\frac{\text{智力年齡}}{\text{實足年齡}}=\text{智力商數}\qquad\frac{\text{教育商數}}{\text{智力商數}}=\text{成業率}$$

當智力年齡成績年齡差不多同在同一日期時，則成業率可以智力年齡除成績年齡求之；否則求成業率，須以智力商數除教育商數。下部小數和

❶此是第一次稱爲成業商數

上部是一樣，分子分母每項皆用實足年齡。當實足年齡在兩種情形爲同樣時，則無須改變小數的價值。

在第八章內，我們已知道測驗聰明所謂"智力商數"的方法，即在俄提斯智力的自治測驗中其求法可以減法代替除法。在俄提斯的分班測驗(Otis Classification Test)的情形中，此測驗爲中級試驗與成績測驗的組合，則求教育商數，可用同一方法，而比較智力測驗和成績測驗的分數，則"成業率"可以減的方法求之。

最近佛亞任博士和著者通信，謂彼相信以除的方法(即以智力年齡除教育年齡或學科年齡)求測量成績對於智力的關係，含有"重要的統計限制"，並且彼已採用減的方法，以求其關係。減較除來得容易，這是很顯明的，而且似乎沒有什麼特殊理由，說明何以不能用減的方法以達到這種目的。

第十五章　相關的意義

相關等第的比較——相關的意義——自然的方法——完全相關——相關係數——相關係數的要義——相關係數和因果的關係——問題

相關等第的比較　我們假設某組學生有64人，教師照其對於算術日常工作的估計，給予一月的等第爲甲，乙，丙，丁，與戊。我們假設這些學生受算術十個問題的測驗，其中包括一月的功課，我們要按照教師的等第，比較茲假設64個學生的等第與分數如第三十二表：他們在測驗和日常工作的相關等第。

相關的意義　當我們說要比較學生日常工作與測驗的相關等第，其意當然是要看這些學生，對於日常工作做好的人，是否對於測驗亦做的好，並要看他們在這一種做的不好，是否對於那一種亦做的不好，以及這種信度能到什麽程度。換句話說，學生對於日常工作做的好，對於測驗也做的好，測驗做的和日常工作一樣好，其中是否有一個顯著的趨勢，或者僅有些微的趨勢，怎樣些微，怎樣顯著？如果我們要求出學生在日常工作得優等而在測驗中亦得優等分數的趨勢，且反是亦如此，我們就應當說，測驗分數和教師的等第相關。如果有一個很顯著的趨勢，我們應當說，在分數與記號(Marks)之間，其相關甚高，如果趨勢甚小，我們應當說相間很低。

表三二　表明64個學生算術成績假設的等第與算術測驗的假設分數

學生	等第	分數	學生	等第	分數	學生	等第	分數	學生	等第	分數
1	甲	10	17	丙	8	33	丙	9	49	戊	7
2	丁	9	18	丁	9	34	丙	7	50	丙	7
3	乙	8	19	乙	7	35	乙	10	51	丁	6
4	丙	9	20	丙	9	36	丁	7	52	乙	8
5	丙	8	21	甲	9	37	丙	8	53	丙	8
6	乙	9	22	丁	8	38	丙	8	54	丁	7
7	丙	6	23	乙	10	39	戊	7	55	乙	9
8	丁	8	24	丙	10	40	乙	8	56	丙	7
9	甲	8	25	丁	8	41	乙	8	57	乙	9
10	丙	8	26	丙	8	42	丙	9	58	丁	7
11	戊	9	27	乙	8	43	丁	6	59	丙	8
12	乙	6	28	丙	8	44	丁	8	60	丙	7
13	丙	9	29	甲	9	45	乙	9	61	丙	9
14	戊	8	30	丙	7	46	丙	7	62	丁	7
15	丙	8	31	丁	8	47	丁	7	63	丁	8
16	乙	8	32	乙	9	48	丁	7	64	乙	7

自然的方法　學生得高的等第，其分數亦高，求這種相關程度，最自然的方法，就是按照等第分學生爲各組，以觀察什麼分數是得甲等，什麼分數是得乙等，餘類推。

如果我們將每一學生等第與分數，記於卡片上，我們就能按照等第，將卡片分類，將所有甲等歸爲一類，乙等另歸一類，餘如此類推。這是最容易最妥善的方法，因爲我們能每類分配而確信未將乙等歸入甲等。

但是如果等第與分數未記入卡片內，我們可分配於一個表格內，將甲等列於一行，乙等列入另一行，並將分數依照量表分入每一行內如第三十三表所示者。(爲計算便利起見，在此表內有一個人爲的相等)。像這一類的任何

表格，稱爲分佈圖(Scatter-Diagram)。小的數目之分數分配，和每一單獨等第相應——例如在甲等項下，得10分的有一個人，9分的兩個人，8分的一個人——這種稱爲分數行列(Arrag of Scores)。同樣，等第分配和每項分數相關——例如1,2,1和10相對——這種稱爲等第行列(Arrag of Rating)。

表三三分佈圖，表明這種等第分數的分配

教師的等第

分數	戊	丁	丙	乙	甲㊟	總數
10			ǀ	ǁ	ǀ	4
9		ǁ	卌 ǀ	卌 ǀ	ǁ	16
8	ǀ	卌 ǀ	卌 卌	卌 ǀ	ǁ	24
7	ǁ	卌 ǀ	卌 ǀ	ǁ		16
6	ǀ	ǁ	ǀ			4
總數	4	16	24	16	4	64

製此表的一種方法，就是先記甲等，並將得甲等分數的學生分入甲等欄內，其次再記乙等，餘如此類推。如應用這個方法，在每項分數列出後應做一記號；否則遺漏一兩個後，就不知道是遺漏了那幾個了。

㊟將甲等放在右邊的理由到後面就清楚了

此外還有一方法，就是從第一個學生起，每一學生依次下去，先按照學生的等第，求適當的行列，然後再求每行內與他的分數相關的方格，並將分數記入方格中。用這個方法，則不會遺漏了一個，但須小心得到正確的方格。

分數的分配，既如第三十三表內所示，我們可看出，有四個學生得甲等，一個是10分，兩個9分，一個8分。其平均數是9。

問題： 得乙等分數的平均數是什麽？

解答： 我們再把第一章內的簡法迴憶一下

實在分數	輔助量尺(替代的)	次　數	乘　積
10	4	2	8
9	3	6	18
8	2	6	12
7	1	2	2
		16	40

$$40 \div 16 = 2.5$$

輔助量尺價值2.5＝實在價值的8.5

得乙等分數的平均數，所以是8.5

練習35. 用簡法求丙，丁，與戊等的平均分數，如願從戊等起，卽從戊等起。

如果將以上的練習做的正確，則所求分數序列的平均數，與五個第相關者如下：

等　第	戊	丁	丙	乙	甲
平均分數	7	7.5	8	8.5	9

從這些數目，我們看出有一個趨勢，卽得甲等者，其分數高於得乙等者，餘類推，並且教師所評定的等第愈低，則分數集中的趨勢愈低。是以有幾個

在這樣情形中，分數與等第，有些關係。

於此就發生問題了，即如果有完全的相關，從這一個分數序列到那一個分數序列，我們能希望有多少平均分數。

完全相關　我們假設所有列甲等的學生得分數10，列乙等的得分數9，等，則我們的表格加上分數，即如第三十四表。在這樣情形中，我們應當說，分數和教師的等第是完全相關

表三四　表示分數和教師的等第之完全相關

教師等第

	戊	丁	丙	乙	甲	總數
10					4	4
9				16		16
8			24			24
7		16				16
6	4					4
總數	4	16	24	16	4	64

兩種變數完全相關，即表示一種高的價值和其他一種高的價值的最大的趨勢，反是亦復如此㊵。

在這樣情形之下，每一等第的平均分數如下：

等　第…………戊丁丙乙甲

平均分數…………6 7 8 9 10

㊵現在所討論者，只限於所謂積極相關

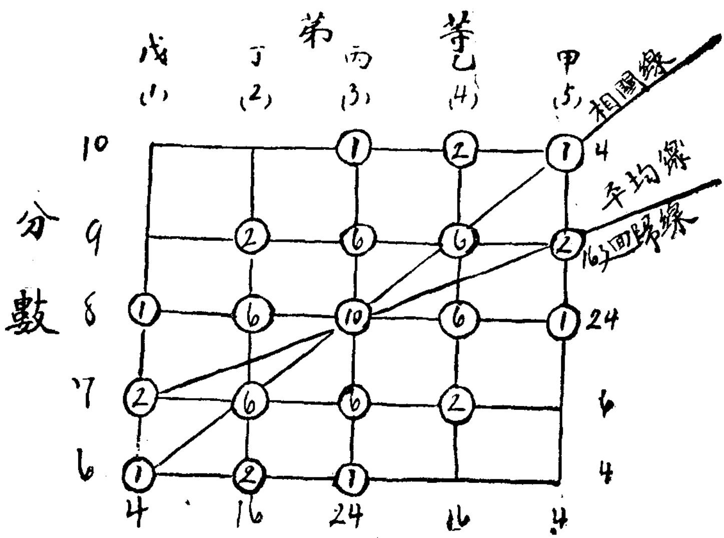
這些平均分數從低逐漸增高，頭兩個所得的等第，僅從7到9，而全部等第是從6到10，從此可看出分數和等第的相關愈高，則分數序列中所得的分數愈大。這當然確實在我們希望之中，而且如果分數不高，則分數與等第就沒有相關了。

講到這一點，問題就自然發生了，就是我們是否可以不測驗相關的程度——高的等第與高的分數相關趨勢的數量——藉分數序列高起的數量以表明各種等第。這個回答是，是的。此在圖表中最能表明。

我們先求分數和等第的相關線。要想這樣做，我們要把甲，乙，丙，丁，戊予以數目的價值，俾能求等第分配的差異數量。

我們假設甲，乙，丙，丁，戊的等級代表算術能力的程度，相等於成績量

圖四八　表明迴歸線與相關線的關係



表。我們可將等第以數字指定之如下：

等　　第…………………戊丁丙乙甲

指定的數目價值………… 1 2 3 4 5

分數和等第的差異，按照他們的數目價值是一樣的，因爲分配是相等的。所以每一分數單位和每一個等第單位相關，其相關線如第四十八圖所表示者。

此外還有一線，叫做平均線，從每一縱線上的一點畫起來，代表分數分配的平均數，此分數是和等第相關的

注意，與甲等相關的分數是10，而這個等第相關的分數平均數僅爲9(距8的一半——所有分數的平均數)。同樣，與乙等相關的分數是9，和這個等第相關的分數平均數僅爲8.5(距8的一半)。在這樣情形中，平均分數僅爲從所有分數的平均數到與等第相關的分數的一半。

再從另一觀點看一下，我們從這一等第到次一等第，其相關分數，由相關線表明是增加1點，而平均分數，只增加.5點。換句話說，平均線僅有相關線一半直。這叫做向橫線迴歸，因此理由，所以稱爲迴歸線。

相關係數　如前面所說的，平均線愈直，則相關愈高；在完全相關的情形中，平均線和相關線相符合，而在不相關的情形中，則平均線成水平。現在就上面的情形看起來，分數與等第相關的趨勢平均數線的直度僅有相關線一半，我們可說分數與等第的相關到$\frac{50}{100}$的程度，或.50。相關的數量通常以小數表明，這個小數叫做相關係數。

和各種等第相伴的分數的平均數不常爲直線，如我們在所製相關表中的情形，在我們所製的表中，繪直線是假設大多數經過平均數。

因爲相關係數尋常計算時，實際上不繪直線，不過求係數的方法是和上面所說的一樣。

如果是完全相關，則平均線是$\frac{1}{1}\frac{0}{0}\frac{0}{0}$和相關線一樣直，其相關係數是1.00。如果不相關，平均線沒有傾斜，則係數是.00。

在第四十九圖內，用各種方法表明分數和等第的相關。係數的全距離自.00到1.00。這些還是假作的相關表。

圖四九　表明五種模範相關的散布圖之普通形狀

	1	2	1	
1	4	6	4	1
2	6	8	6	2
1	4	6	4	1
	1	2	1	

係數=.00

		2	2	
	4	6	4	2
2	6	8	6	2
2	4	6	4	
	2	2		

係數=.25

		1	2	1
	2	6	6	2
1	6	10	6	1
2	6	6	2	
1	2	1		

係數=.50

			2	2
		6	8	2
	6	12	6	
2	8	6		
2	2			

係數=.75

				4
			16	
		24		
	16			
4				

係數=1.00

練[v] 36.　將49圖內第二與第四圖變爲48圖所示的形式——就是將數目寫在線上交點的地方。求每一縱行分數分配的均數，在縱行上繪一點表明均數正確地位，並繪和48圖一樣的平均線（迴歸線）合關係線均相同，比較迴歸線和相關係數的斜度，如181頁下面所做的。

相關係數的要義　上面已經說過，相關係數，通常不藉迴歸線以求之；下面說明求相關係數完全方法，前面所討論者，不過是表明相關係數的意義與重要而已。相關係數乃測驗一個數量（卽等第）的高價值和其他數量（卽分數）相關的程度。相關係數乃測驗一個數量（卽分數）平均價值所增加的數，和其他一個數量（卽等第）的繼續價值，以比較這種平均價值最大限度可能的增加。換句話說，就是測驗平均線（迴歸線）的直度，而與相關線相比較。

相關係數和因果的關係　關於相關係數有一重要意義，我們

還未討論。即從相關係數以推論兩種數量的因果關係。例如，有一學生測驗分數和教師等第，其相關係數爲.50，則教師的等第和測驗分數的相關，可以說是什麼原因？這很可以用投擲銅元來證明。

假設我們投擲四個銅元而記載其正面數目，於是放下兩個，再擲其他兩個，並記載其正面數目，再合併爲四個銅元。假設我們做了64次，先以四個投擲，再以兩個投擲。按照機遇律，第一次擲的64次正面次數分配如下：

正面數目	0	1	2	3	4
次　數	4	16	24	16	4

當正面數目爲四時，則四個銅元當然全爲正面，如將兩個拿開，這兩個必爲正面；所以正面數目，在第二次計算時，不能少於2，可爲2，3，或4，依機遇律看起來，第二次擲的正面數目，大多數如下面情形：

4個正面…………1

3個正面…………2

2個正面…………1

同樣，按照機遇律，第二次計算16次正面的次數分配，其正面次數如下：

4個正面…………2

3個正面…………6

2個正面…………6

1個正面…………2

把上面兩種擲的次數，和其餘三種擲的情形合起來，其第二次擲的（兩個銅元任意選擇）正面次數大都如下：

表三五

第一次擲的正面次數

第二次擲的正面次數	0	1	2	3	4
4			1	2	1
3		2	6	6	2
2	1	6	10	6	1
1	2	6	6	2	
0	1	2	1		

我們立刻看出假設例子的相關是.50。

現在如果我們做同樣的試驗，而置一銅元不投，則在第二次的投擲，其正面數目最多的次數分配，必恰如第四十九圖所示者，得相關係數.25。如果四個之中有三個置諸不投，則散布圖所得的相關係數必趨於.75。

由此觀之，相關係數可視為一種小數，是說明影響兩種變數數量的原因之比例。這種原因的比例數是兩種變數共有的。

例如，有10種原因影響於教師所給學生的等第，譬如智力，有規則的出席，以前所受教育的分量，專心，教師的好惡，健康等，再其他同樣10種原因影響於學生測驗的分數，倘若這兩種原因有同樣的勢力，如果10種之中有7次是影響於學生的等第並影響於他的分數，則等第與分數的相關係數是.如果相關係數為.80，則10種原因中有8次是兩種變數中共有的●。

●如果在這一種情形有10種原因，而在他種情形只有8種，其共同的原因比如說是6，這個意思當然就是在這一種情形中，其原因為$\frac{6}{10}$，或百分之60；在那一種情形中，其原因為$\frac{6}{8}$，或百分之75一樣。在這樣例證中，其相關為$\sqrt{.60\times.75}$，或約為.67。以上所說者，皆假設每個原因皆是獨立的。(即是無關係)

問　題

你能想出幾種原因，是算術能力和語言能力所共有的，而在這兩種能之間產生相關，縱然是在同一年齡或同樣年級的學生？

第十六章　相關係數計算法

乘積率法——差異法——有小數的困難——應用假設平均數——俄提斯相關圖——相關圖應用法——應用T形正方與三角形——怎樣應用乘積表——負相關——用等級法計算相關——司畢門的尺度——第三種等級法——補插法——異號相關——測驗相關的其他方法——問題

求相關係數第一個方法，已如上述：即是求迴歸線的比較斜度。迴歸線的方法和名稱，第一次是高爾登 (Sir Francis Galton) 在生物科學方面用以研究相互關係的。

後來皮爾生教授 (Professor karl Pearson) 計畫了一個教學的方法，求同樣的係數（即不用求迴歸線的方法）。皮爾生所創的這個方法，叫做乘積率法 (Product-moment method)。

乘積率法，並不是求相關係數最好的方法，在本章的後一部分再講。這個較好的方法，尚未著名，而乘積率法已經通用。且因其有歷史的意義，所以在此地把乘積率法簡單說明一下。對於這個方法沒有興趣的人，可跳過看下面的差異法。

乘積率法　假設有64個學生的教師等第與分數的散佈圖於此，如第五十圖所示者。這是一個假設的散佈圖，十分簡單，以求計算的便利。

圖五十　表明相關係數計算法

		等第						
		戊 (1)	丁 (2)	丙 (3)	乙 (4)	甲 (5)	總數y	
分數	10				2	2	4	+2
	9			6	8	2	16	+1
	8		6	12	6		24	0
	7	2	8	6			16	—1
	6	2	2				4	—2
總數		4	16	24	16	4	N= 64	
x		—2	—1	0	+1	+2		

求$\sum x^2$(看下頁)

$4\times(+2)^2=16$
$16\times(+1)^2=16$
$24\times0^2=0$
$16\times(-1)^2=16$
$4\times(-2)^2=16$
$\sum x^2=64$
同樣$\sum y^2=64$

求$\sum y$(看下頁)

次數	x	y	xy
2×	(+1)×	(+2)=	+4
2×	(+2)×	(+2)=	+8
8×	(+1)×	(+1)=	+8
2×	(+2)×	(+1)=	+4
2×	(—2)×	(—1)=	+4
8×	(—1)×	(—1)=	+8
2×	(—2)×	(—2)=	+8
2×	(—1)×	(—2)=	+4

$\sum xy=48$

$$r=\frac{\sum xy}{\sqrt{\sum x^2\sum y^2}}$$

$$r=\frac{48}{\sqrt{64\times64}}$$

$$r=\frac{48}{64}$$

$$r=.75$$

第一步，就是求每一橫行和每一直行次數的總數。這在大方格的右邊和底下的矩形圖內表明。其次，計算每一矩形圖內數目的總數求出N，即所有次數的總數。這兩種總數當然要一樣的。

第二步，將等第分配做一輔尺，叫做x量尺，以0值對含平均數的部分，而以其他部分為＋1，＋2，等價值，放在右邊，—1，—2，等價值，放在左邊，同樣，以y量尺作為分數的分配。

次數分配的平均數，可用前數章內所說的任何方法以求之。在我們假設的例證中，分數的平均數恰是8而等第的平均數恰爲3。如果分數的平均數爲$7\frac{1}{2}$與$8\frac{1}{2}$之間，則所指定分數分配的y之價值亦爲一樣。這就是說，小數通常對於x與y價值的指定沒有關係。

兩種變數中，有一種平均數含有小數如不去管牠，則於相關係數上，必致些微錯誤，但此可以輔助計算法改正之。爲我們的舉示例證起見，這種改正可不注意。

第三步，是求Σx^2，即x價值在等第分配中平方數的總數。有四個次數$x=+2$。這四個次數x^2的總數是16。有十六個次數$x=+1$，24個次數$x=0$等。所有x^2的總數是64。y價值的分配，因爲與x價值的分配恰爲一樣，故Σy^2亦是64。

第四步，是求Σxy，即所有x與y乘積的總數。有兩個次數$x=+1$（等第＝乙）而$y=+2$（分數＝10）。這兩個xy的次數＝$(+1)\times(+2)$，2xy 的總數是$2\times(+1)\times(+2)=4$。有兩個次數$x=+2$而$y=+2$，餘類推。

在縱行小格內所有的次數，與丙等相關者，須注意其$x=0$；所以$xy=0$；其次數可不去管牠，因爲牠們沒有方法影響於所有xy乘積的總數。同樣，橫行小格內的次數，和分數8相關的$y=0$；所以這許多次數，亦可以不去管牠。是以在這種情形中，只有八個小格的次數須加以計算。這八個小格內的xy乘積（Σxy）的總數是48。

所有這些xy的乘積皆爲正數。如果有些次數是在圖上的右下角，則x爲正而y爲負，其xy得負數（在這種情形中）。至在左上角時，則x爲負而y爲正；所以xy的乘積仍爲負數。如此則Σxy變爲所有xy正的價值與負的價值的代數總和（algebraic Sum）了。就是從正xy總數裏減去負xy的總數。

相關係數的求法，是以Σx^2與Σy^2乘積的方根，除Σxy即得。就是用求相關係數的乘積率法公式（Product-moment formula)。以r代表。

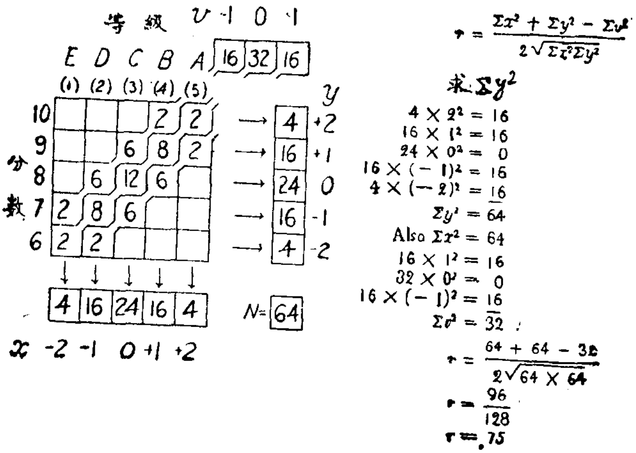
$$r=\frac{\Sigma xy}{\sqrt{\Sigma x^2\Sigma y^2}}\qquad\text{(公式4，乘積率法公式)}$$

就假設的例證看，我們用以證明相關的，所得的數目是.75。

差異法 求Σxy必須求每一小格xy價值的總數，所以用乘積率法求相關係數稍感麻煩。現在有一較簡便的方法稱爲差異法 (difference method）這可做爲普通的應用。

要說明這個方法，我們還用說明乘積率法的同樣的假設散佈圖。這在第五十一圖內表明。

圖五一 說明用差異法計算相關係數



普通程序如下：

1. 求等第分配 即將各縱行方格內之次數相加。圖之底下矩形是表

明次數。在橫行方向所做的變數叫做X變數。在此例中，等第一項即表示X變數。

2. 求分數分配　即將橫行方格內之次數相加。其分配是在右邊的矩形表明。在直行方向所做的變數叫做Y變數。在此例中，分數一項，乃表示Y變數。

3. 求對角線總數的分配　這在圖內上角的三個方格內表明。其求法是將沿每一對角線的次數相加。這種分配叫做V分配。若以其本來的方法測驗，則X，Y，與V價值，每個可稱為x，y與v。在X變數價值的分配中，有四個次數x=—2，十六個次數x=—1，餘類推。

4. 求平方的總數　即x，y，與v，的價值。x價值平方的總數是由Σx^2符號表示，同樣，以Σy^2與Σv^2表示x與y價值。Σx^2，Σy^2與Σv^2的價值所求出之數，均在計算的數目表明。

5. 以Σx^2，Σy^2與Σv^2代入公式。

$$r=\frac{\Sigma x^2+\Sigma y^2-\Sigma v^2}{2\sqrt{\Sigma x^2\Sigma y^2}}\qquad\text{（公式5，差異公式）}$$

在此公式內，r代表相關係數。這種代替和計算r價值的方法，在五十一圖內表明。

有小數的困難　當然，上面所用以證明的散佈圖，是很簡單而是假設的，是一個完全常態的分配，其平均數恰為“偶數”這是可以看出的。通常分配的平均數，當然不能為偶數，於是我們必須在兩者之中選擇最近於整數的數目，則不得不用小數以從平均數中求各價值差數的平方數之總和，例如Σx^2是也。

如果選最近於整數的數目，則計算上所生的某種錯誤必須免去。而一方

面如果分配的平均數為27.41，則求.41，1.41，2.41，等，或者到10.41差數的平方數，非常麻煩；同樣，−.59，−1.59，等以及加這些平方數等，亦是同一麻煩。

應用假設平均數　有一個方法求Σx^2價值可不用小數，其所得價值和用眞實平均數的一樣。這個方法，就是用假設的平均數——可以說，其總數小於實在平均數——從這個假設平均數求分數差數的平方的總數（稱為Σx^2），然後用一校正數，校正數的計算，並不甚難。校正數就是差數自身的總數的平方以次數的數目除之。

公式如下❶

$$\Sigma x^2 = \Sigma X^2 - \frac{(\Sigma X)^2}{r} \qquad \text{(公式6)}$$

這個同樣的校正數，當然亦可應用於Σx^2，Σy^2，與Σv^2三種價值，以應計算相關係數之需要。

計算相關係數，無需研究實在分數的價值。就是，我們可用同樣方法以輔助量尺替代，猶如我們在第二章內用"簡法"求平均數一樣。論到計算相關係數，則x與y用輔助量尺從假設平均數以求差數，其輔助量尺以價值0為分配的假設平均數。（看第五十與五十二圖）

俄提斯相關圖

$$r = \frac{\Sigma x^2 + \Sigma y^2 - \Sigma v^2}{2\sqrt{\Sigma x^2 \Sigma y^2}}$$

❶要知道個公式的由來，可看塞斯頓所作的計算皮爾生相關係數不用差數的方法L, L, Thurstone A Method of Calculating the Pearson Carrelation Caefficient Without the use of Deviations,）心理學雜誌第十四卷（1917）27—32頁Psychologicrl Bulletin）

這個公式的產生，是非常麻煩；而以之計算相關係數却很容易，但其中步驟容易忽略。基此理由，所以要製一圖來求相關係數，似乎是適宜些，有此圖則"瑣屑的分析"為計算上不可少的各種步驟皆可在圖中做好，並列為次序，而於計算時無需注意公式了。

俄提斯相關圖● (The Otis Correlation Chart) 即適應這個需要。(看第五十二圖) 這個圖的組織無論何人皆可用以求相關係數無需知道是應用那一種公式。所要者在對於圖的說明仔細讀一下，和確確的數學之計算而已。讀者須注意，圖內所有計算的方法，並非皆為求相關係數的。此圖並可求相關係數的機誤，於相關係數在有限制的次數時用之，此外並可求實在平均數和標準差，如無特殊需要，亦可省去。

要進一步討論俄提斯相關圖所應用相關公式的原理，這不屬於這初步的測驗統計書的範圍之內。我們可以說這個公式和第五十一圖所證明的實例是一樣的，應用校正數，以免去小數而保持係數的完全正確。此圖較乘積法便利的地方，見"俄提斯相關圖"一文內，文載教育研究雜誌，1923，十二月八卷五號，第440頁 (Journal of Educational Rearch) 為免除對於Σx^2，Σy^2，等符號不熟習的人之混淆起見，這許多價值，仍放在公式內，並以簡單字母計算之，所用相關的公式，在第五十二圖內表明。rxy符號，乃代表x與y兩個變數的相關係數。

相關圖應用法　看下面的說明時，參看第五十二圖。

第一個主要工作是繪兩個相關變數的價值。在做這種步驟以前，須(1)

●俄提斯相關圖，是在紐約榮克永赫貞(Youkers-on-Hudson New York)世界書局出版，一包25張，有完全應用說明及樣圖如第五十二圖所示者，每包一元二角五分，圖長寬為8½和11吋，¼吋見方。每一圖在背面有乘積表和平方表。

將一個變數稱爲x，一個稱爲y，(2)決定每變數的組距，(3)將圖註名，以定次數之分配。

1. 指定變數 如果以爲這一個變數是另一個變數有關係的，則自變數尋常稱爲x變數，而倚變數稱爲y變數。這可隨意的假定，選擇的標準多半看繪圖的便利以爲決定。既指定變數x與y以後，則將變數上的各種名稱記入紙的頂端。

2. 選擇組距 如果變數全距離之單位的數目不超過19(例如價值的全距離僅從15到33)，則無歸類之需要。如全距離多於19，則各價值必須歸類。通常歸類都用2,5,或10，卽：0—1,2—3,4—5,等；或0—4,5—9,10—14,等；或0—9,10—19,20—29等。這叫做組距，或者稱爲組的全距離更加好些。

各價值如能歸類應使之歸類，其歸類的數目，可自10到15。

3. 標明組距以定次數分配 選擇組距以便歸類以後，則將組距註名。(大方格)在圖的下部及左邊按序註明全組距。其做法應將x與y價值集中於圖的中心。如此計畫，則在X與Y的量尺上，圖的下部與右邊之0點可與分配的中心點略下一些。

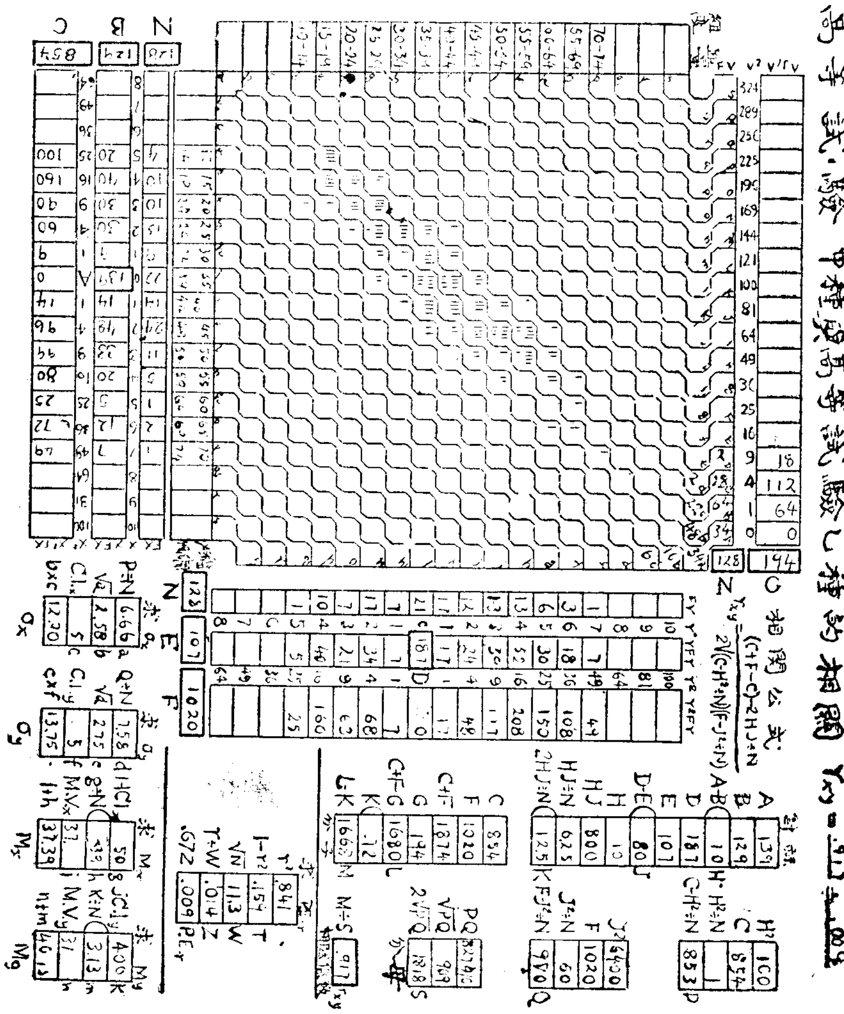
集中次數分配的目的，是爲便於決定每一變數最低與最高的價值，並求從最低到最高的全距離中所包含的組距數目。由每一變數的全距離，於是就可適於繪作，俾X價值能向右增加，而Y價值向上增加。

4. 塡記分數 繪每對相關價值的一"點"，是將這一點畫在對y價值的組距橫行方格內，而一方面是在x價值所在的組距之縱行內。

繪"各點"時，通常不作小點而作直線。這較爲容易計算些。

應用T形正方與三角形 要免去繪作的疲勞和屢次錯誤起見，最好應用一個輔助的紙條，包含一種變數的組距；紙條可以移到圖內以

圖五二　用俄提斯相關圖證明相關係數的計算法。(圖的實際大小，長寬8與11吋)



定各點的位置。假設先註x的價値。將y價値的全組距抄於紙條之上。移動紙條使接近縱行各點所在之處；然後再以紙條定縱行內方格。用這個方法，錯誤的危險可以免去不少。

要使紙條能夠適應合宜，須配置一個三角形或樣方塊的紙板，背面使之平滑，沿T形方塊或其他一面的直邊，固定其爲水平位置。統計學家常應用此法。

5.求次數分配　將所有直綫從三方面相加 橫行，縱行，對角線。

第一，計算每一橫排的直線數目，將總數書於Fy的一行下(Y的次數、即每組距Y價値的數目)，計其總數而書於N小方格內。

第二，將紙向反的方向移動如鐘錶，四分之一的轉動，而計算縱行的直綫，將總數寫在FX的一行下。計其總數而書於N小方格內。這個總數須與其他一個N合符。如果不符，再將橫行，縱行計算一次。

等三，將紙移轉到原來的地位，並移開八分之一。於是對角線變成橫行。每一次從左邊的小字母起，計算每一對角線內的直線，而書於總數於方格內。此方格在粗線以外亦有同樣的字母在頂端或圖的右邊。

第四，將對角線分配的總數之在圖的右邊者(即16,6)和在頂端的分配(即2,22,48)相加。其法爲將在a方格內數目抄在A方格內，將在兩個b方格內的總數寫在B方格內，兩個c方格內的總數，寫在C方格內，餘類推。(這種步驟熟悉以後，可將兩行b的對角線內直線相加作一次簡單手續，而立刻將總數寫在B方格內，餘如此類推)。

6. 求G. 將填在FV行內的數目相加，將總數記於N方格內。這個總數應與其他兩個N方格內數目符合。如其不然，將對角線內面目再加一次，注意斜線。

其次將FV行每一數目，得鄰近V^2行㊀的數乘之。將其乘積書於V^2FV行㊁之下。

再次將V^2FV行數目相加，而書其總數於G方格內。

7. 求D，E，與F. 將FY行的每一數目以鄰近Y行的數目乘之。書其乘積於YFY行中。D的方格內，不寫數目，因在任何情形之下皆爲O。在YFY行中將在D方格以上的數目相加，而書其總數於D方格內。將在D方格以下的數目相加而書其總數於F方格內。

其次，將YFY行內每一數目，以鄰近的Y行(不是Y^2)數目乘之，而書其乘積於Y^2FY行。在FY行的每一數目被X乘兩次，所以Y^2FY行，就是Y^2乘FY。Y^2的價值仍表明出來，以便Y^2FY可以Y^2乘FY得之，這個比較以Y乘YFY便利些。而其結果當然是一樣的。在D的右邊亦沒有什麼數目，因爲任何數目　乘O^2仍等於O。

再次，將Y^2FY行內各數目相加，書其總數於F方格內。

8. 求AB與C　求FX行的數目和求FY行的數目是一樣的。(以解釋X

㊀看頁關於乘積表的應用以助了解。

㊁V代表Y-X價值。如Y=3，X=4，則V=2，而V^2=4。FV卽V價值的次數。V^2FV卽V價值次數以V^2乘之的意思。

者解釋Y，以解釋A，B，C者解釋D，E，F，其說明是相等的。）

A，B，C，D，E，F，與G各方格，現在可以數目填入。

怎樣應用乘積表　在相關圖背面的乘積表，乃為便利求乘積而製者，如XFX，X^2FX，YFY，Y^2FY，及V^2FV。這在五十三圖內表明。應用此表的方法如下：

將此表的右邊放在FX行，使中段粗線橫行恰與A方格相對。在表內求與FX價值相關的數目之縱行。在此縱行與橫行內，即可求XFX與X^2FX價值。例如X的次數為7，而以4與16乘之，其乘積為28與112，即可在表內7的數字下而對4與16的橫排的一行下求之。其乘積可立刻寫在XFX與X^2FX行中。

用此表求YFY和Y^2FY的價值及V^2FV價值，亦是同樣情形。求V^2FV，當然用表的下部的數目。

幫助在表中定適當數目，可抄第二張表置於第一張上，俾包含次數的上部一邊，恰在乘積所在一行的數目之下。用輔助量尺，則縱行於是很快的而正確的確定其位置。

9. 求M. 從A與B方格內，將A，B價值抄入"計算法"一行的空格內。從A內減去B。其差數就是H。（如次數分配適當，A必大於B，則計算時無負數。如B大於A，從A減B，則在半圓形內，做一負號）。

將D與E抄下來，並從D減E。（如E大於D，在半圓內做一負號。）其差數為J。

將H寫在J之下，而與J相乘。次以N除其乘積。再以2乘之，於是得K⊖。

⊖如N為偶數，則有一求K的簡法，就是以N之半數除HJ。

如H或J為負數，則K亦為負數；否則——如H和J是正數，或皆為負數——K就是正數。H和J求出以後，如有一為負數(不過只有一個)，則在下面兩個半圓形的K上做一負號。

將C和F抄下並相加。將G抄下並與C，F的和數相減㊀。將K抄下並與L相減㊁。(如K為負數，則將K值與L相加)。於是得M，是卽公式中的分子。

10. 求S。 以H自乘，㊂並置諸第二行的頂端。將C抄下。以N除H^2並與C相減。於是得P。

將J平方。把F抄下。以N除J^2而與F相減。於是得Q。(H^2與K^2常為正數。)

以Q乘P。取其乘積的平方根而以2乘之。於是得S，是卽公式中之分母。

11. 求S的簡捷法。 如P與Q相差不過百分之10，則P+Q的價值，可以$2\sqrt{PQ}$代之，不過極端的正確，不能得到，因為P+Q在這種情形和$2\sqrt{PQ}$相差不出千分之一。

12. 求r，相關係數。 以S除M。如得到相關係數，則計算法已實現了。

關於圖內"求P.E.r"，"求σx"等應用的說明，另附說明於圖內。

負相關　我們所已討論的，只說明一種變數的高價值和他種變數的高價值相關的趨勢，這種趨勢，其變化可從沒有趨勢(不相關)到完全趨勢(完全相關)。相關係數(正的)在這種極端變異中，如我們所說的，是從.00到1.00。

一種變數的高價值，可和他一種低價值相關，這種趨勢是可能的。例如我們看出高的智力商數有和低的成業，有相關的趨勢。在這樣情形中，我們說，

㊀負相關。M為負數，有兩種可能，或因G大於C+F，或K大於L，在這種情形之下，係數必為負數(看下一頁)

㊁如L大於1000，則只要取最近於K值的整數，就夠了。

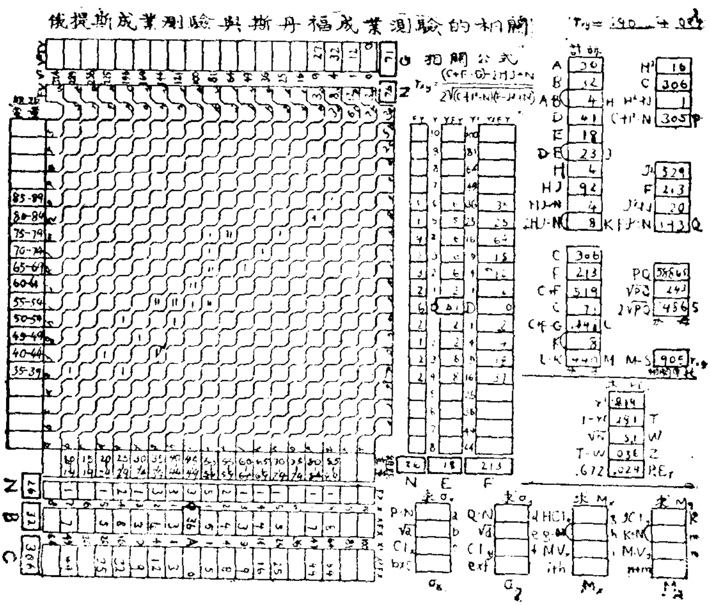
㊂此可用乘方表求之。若$H^2 \div N$或$J^2 \div N$小於C或F $\frac{1}{1000}$時，可取其最近的整數。

這是負相關。負相關的理論上全距離是從沒有趨勢到完全趨勢，或完全負相關。負相關的係數，其全距離是從.00到－1.00。實際負相關的例子是很少的。

練習37.　將第三十二表的每對分數與等第，繪於俄提斯相關圖，並按照說明，求其相關係數，此係數當然要爲.50。

練習38.　用俄提斯相關圖，求第三十六表的二十六個學生之第一部的俄提斯分級測驗，(教育測驗)與斯丹福教育測驗的相關。以俄提斯教育測驗分數代表x變數，而以斯丹福教育測驗代表y變數。將這些分數依5歸類。使x變數50—54的一組和y變數60—64的一組做"中心"的部分。此可使你的工作和第五十四圖相比較。

圖五四　表明求俄提斯分級測驗和斯丹福教育測驗二十六個學生兩種分數的相關。



表三六　表明墨蒲里通中學㊳八年級二十六個學生在第一部之俄提斯分級測驗(教育測驗)與斯丹福教育測驗的分數。

學生	俄提斯成績測驗	斯丹福成績測驗	學生	俄提斯成績測驗	斯丹福成績測驗
1	89	88.5	14	34	46.5
2	71	79.8	15	14	36.3
3	59	77.2	16	82	83.7
4	54	71.8	17	53	77.2
5	66	70.0	18	57	75.6
6	63	69.7	19	51	66.7
7	54	67.3	20	46	58.3
8	46	62.8	21	43	57.0
9	49	61.7	22	51	56.8
10	44	59.8	23	28	54.0
11	39	59.7	24	38	42.9
12	38	55.1	25	23	42.1
13	40	54.9	26	29	39.5

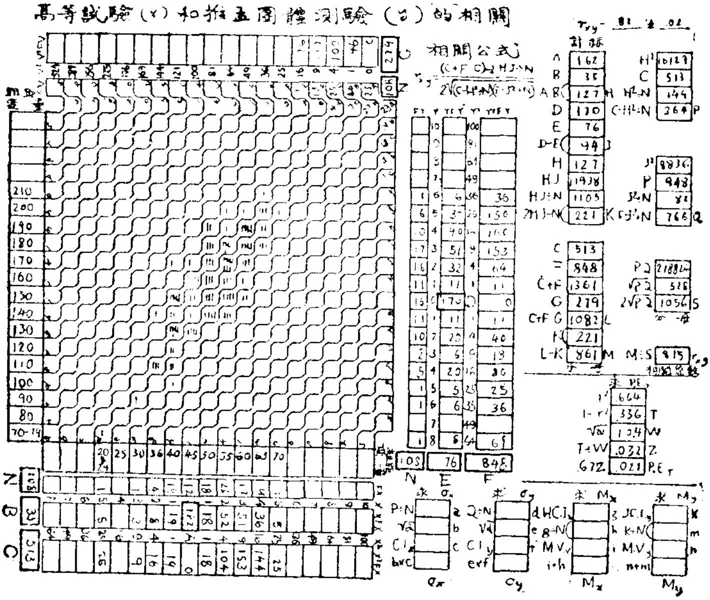
練習39.　用俄提斯相關圖求第三十七表的108個次數的高等試驗和推孟團體智力測驗的相關。使高等試驗分數代替x變數，以50—54組距為"中心"部分。使150—159組距為推孟團體智力測驗的"中心"部分。你可參照第五十五圖校對你的工作錯不錯。

練習40.　求推孟團體智力測驗分數與第三十七表中108個次數的"優等成績平均數"的相關係數。

練習41.　求高等試驗與優等成績平均數的相關。(看表37)。

㊳材料得自梅因省 (Maine) 墨蒲里通 (Mapleton) 城，學校監督，韋白 (Elmer H.webber)

圖五五 高等試驗和推孟團體智力測驗的相關。



練習42. 要爲計算上進步的練習，可用上面同樣的材料，求俄提斯教育測驗與斯丹福教育測驗的相關係數，不過給每一分配時，向上移動一部分而已。就是使俄提斯教育測驗的45—49組距，與斯丹福教育測驗55—59組距在中心的部分。這不過整個的散布圖向圖的右上角移動一個方格，即使全部計算法變動，但M,P,與Q仍是一樣，至相關係數當然還是相同。相關係數，無論如何，不受散布圖的影響。如願意變換方法，這種同樣的變換的次數分配，還可行之於其他的例子。

表三七 表明威斯康辛，芮彭大學108個一年級生高等試驗與推孟團體

智力測驗分數。㊟

次數	推孟團體智力測驗	高等試驗	成績	次數	推孟團體智力測驗	高等試驗	成績	次數	推孟團體智力測驗	高等試驗	成績
1	191	61	84	37	166	49	87	73	171	48	88
2	204	55	90	38	190	52	90	74	160	47	83
3	151	51	76	39	170	56	79	75	192	62	90
4	119	36	79	40	200	69	90	76	193	59	85
5	90	31	66	41	161	51	73	77	195	51	89
6	173	50	87	42	177	63	85	78	186	63	87
7	154	56	70	43	163	50	73	79	180	53	86
8	153	50	87	44	181	58	86	80	207	69	94
9	159	59	82	45	146	44	81	81	173	55	90
10	158	69	83	46	157	44	82	82	129	42	84
11	161	57	78	47	207	66	90	83	171	60	87
12	153	48	86	48	170	57	83	84	187	55	87
13	165	60	84	49	113	40	75	85	130	49	81
14	183	65	86	50	199	67	88	86	134	43	75
15	189	62	89	51	157	64	89	87	181	62	89
16	141	45	77	52	136	46	84	88	158	40	85
17	146	37	81	53	168	49	82	89	155	58	77
18	187	55	86	54	161	49	80	90	179	43	75
19	144	54	81	55	172	53	92	91	168	55	81
20	144	51	86	56	116	38	79	92	216	66	86
21	151	49	78	57	180	55	85	93	131	41	75
22	149	55	78	58	182	54	91	94	177	53	87
33	158	58	91	59	143	54	85	95	142	57	88
24	173	57	72	60	137	43	73	96	153	43	83
25	205	61	85	61	176	55	89	97	105	43	73
26	154	42	70	62	142	55	84	98	155	60	88
27	74	24	61	63	146	54	85	99	119	39	84
28	188	51	88	64	168	56	83	100	181	59	81
29	154	44	85	65	131	43	86	101	125	40	74
30	175	59	87	66	137	47	84	102	177	59	88
31	175	62	77	67	135	44	60	103	167	50	78
32	111	44	83	68	182	60	91	104	182	59	92
33	185	69	84	69	190	63	90	105	177	57	79
34	199	65	87	70	193	61	87	106	187	60	90
35	190	63	83	71	136	46	91	107	135	42	74
36	201	72	91	72	141	44	80	108	152	50	84

㊟材料得自威斯康辛芮彭大學 Ripon College, Wisconsin 教育與心理科休布萊教授(Prsfessor B. P. Heubrer)

練習43. 為多方練習起見，再以第三十八表的材料，求另兩種測驗分數之相關係數。可用九種其他的組合。在國家智力測驗與推孟團體測驗分數用十個，而假提斯中級試驗分數用五個。

用等級法計算相關

司皮門（Spearman）發明兩個公式求兩個變數的相關係數，不是從變數的本身價值去求，而是從兩種次數分配的各個等級去求。

如果兩種測驗是完全相關，則學生的等級次序依第一種測驗分數必與第二種測驗分數恰在同一等級——即學生在第一種測驗為最高等級，其在第二種測驗亦必為最高等級；在第一種測驗為次一等等級，其在第二種測驗亦必為次一等等級，餘類推，這是很顯明的。但如相關不是完全的，則兩種測驗的學生等級次序必缺少符合。例如學生在第一種測驗分數甚高，而在第二種測驗也許得次一等分數，在第一種測驗得次一等分數者，也許為在第二種測驗得最高分數者，餘類推。

相關度愈高，則差異的數量愈少，這是顯明的。現在能夠用等級法研究這許多差異，藉適當的公式求出兩種測驗的相關係數。

為達到這種目的來求等級，通常以次數分配中最高的分數作為等級1，其次做為等級2，餘類推㊟。如果有兩個或兩個以上的人得同樣分數，則每一個等級用兩個或兩個以上的平均數或中數做等級。

㊟前面所討論的等級，我們將一組中最低的一個做為等級 1，以預先研究百分等級，在百分等級中，高的等級代表高的數目，如果要用這種方法，可用同一手續，以兩種等級的一種求相關係數。最高等級和次於最高等級的差異是一樣的，無論其為等級1與等級2之差異或26與25之差異(假設所要研究的是26個人)這是很明顯的。

表三八　表明墨蒲里適初中26個學生各種測驗的分數。

學　生	俄提斯成績測驗	斯丹福成績測驗	國家智力測　驗	推論團體測驗	俄提斯中級試驗
1	89	88.5	111	108	65
2	71	79.8	141	99	45
3	59	77.2	123	87	54
4	54	71.8	111	41	37
5	66	70.0	111	57	39
6	63	69.7	118	72	48
7	54	67.3	86	49	23
8	46	62.8	121	66	42
9	49	61.7	99	51	35
10	44	59.8	124	53	38
11	39	59.7	81	51	33
12	38	55.1	78	48	22
13	40	54.9	91	48	39
14	34	46.5	81	32	25
15	14	36.3	78	31	20
16	82	83.8	112	107	65
17	53	77.2	118	62	52
18	57	75.6	101	69	39
19	51	66.7	72	35	36
20	46	58.3	89	33	39
21	43	57.0	93	64	43
22	51	56.8	92	45	42
23	28	54.0	57	31	33
24	38	42.9	57	28	18
25	23	42.1	48	23	12
26	29	39.5	79	30	20

這兩種等級法在第三十九表內說明。在此表內，仍用第三十六表內的俄提斯與斯丹福測驗的分數。第四行乃表明俄提斯教育測驗各學生的等級，第五行乃表明同樣學生在斯丹福教育測驗的等級。例如第二個學生在每種測

驗中，等級爲3。在斯丹福教育測驗中，有兩77.2分數，其等級爲4與5；所以每一種定爲$4\frac{1}{2}$等級。

再下的三行乃兩種測驗學生等級的差數。正的差數與負的差數須分開：第三個學生在斯丹福教育測驗中等級高些，因爲等級是用低的數代表的。我們可武斷的把這一方面的差數稱爲正數。(我們亦可稱爲負數而稱其他的爲正數)。第三個學生等級6和等級$4\frac{1}{2}$的差數是$1\frac{1}{2}$，大數目6是在左邊；所以$1\frac{1}{2}$放在零行的左邊。第五個學生，大數目8在右邊；所以差數4是放在零行的右邊。這個方法幫助求所有的正數差數使在一行，而使負數差數在其他一行。

$$\Sigma g=24.\quad R=1-\frac{6\times 24}{26^2-1}=1-\frac{144}{675}=.79。$$

用表III㊟ $r=.95.\ \Sigma D^2=167.5$。

$$P=1-\frac{6\times 167.5}{26(26^2-1)}=1-\frac{1005}{17550}=.94。$$

用表IV㊟ $r=.95$。

其次，卽求正差數 (Gains) 的總數。這用Σg符號代表。通常亦求負差數的總數，以驗其是否正確。負差數總數必與正差數總數一樣，因爲每一學生在這一方面所得的等級爲其他學生所得者以補償之，或由其他方面的學生以補償之。在這樣情形中，正差數的總數和負差數的總數，皆爲24。所以$\Sigma g=24$。

司畢門的尺度　要使這兩個等級法化爲簡單，就要應用司畢門(Spearman)的尺度(Footrule)。R 價值第一步先以尺度求之，其次相關係數r再從R求之，其式如下：

$$R=1-\frac{6\Sigma g}{N^2-1}，(公式7，司畢門尺度)$$

㊟附錄

表三九　表明用兩種等級法求相關係數的方法

學生	假提斯教育測驗	斯丹福教育測驗	假提斯教育測驗等級	斯丹福教育測驗等級	差數 +	○	−	差數平方
1	89	88.5	1	1		0		0
2	71	87.9	3	3		0		0
3	59	77.2	6	$4\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$			$2\frac{1}{2}$
4	54	71.8	$8\frac{1}{2}$	7	$1\frac{1}{2}$			$2\frac{1}{2}$
5	66	70.0	4	8			4	16
6	63	69.7	5	9			4	16
7	54	67.3	$8\frac{1}{2}$	10			$1\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$
8	46	62.8	$14\frac{1}{2}$	12	$2\frac{1}{2}$			
9	49	61.7	13	13		0		0
10	44	59.8	16	14	2			4
11	39	59.7	19	15	4			16
12	38	55.1	$20\frac{1}{2}$	19	$1\frac{1}{2}$			$2\frac{1}{2}$
13	40	54.9	18	20			2	4
14	34	46.5	22	22		0		0
15	14	36.3	26	26		0		0
16	82	83.7	2	2		0		0
17	53	77.2	10	$4\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{2}$			$30\frac{1}{4}$
18	57	75.6	7	6	1			1
19	51	66.7	$11\frac{1}{2}$	11	$0\frac{1}{2}$			$0\frac{1}{4}$
20	46	58.3	$14\frac{1}{2}$	16			$1\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{4}$
21	43	57.0	17	17		0		0
22	51	56.8	$11\frac{1}{2}$	18			$6\frac{1}{2}$	$42\frac{1}{2}$
23	28	54.0	24	21	3			9
24	38	42.9	$20\frac{1}{2}$	23			$2\frac{1}{2}$	$6\frac{1}{4}$
25	23	42.1	25	24	1			1
26	29	39.5	23	25			2	4
					24		24	167.5

$$R=1-\frac{6\times 24}{26^2-1},$$

$$R=-.79.$$

第二步即從R價值中求相關係數(r)。這可用附錄二表三㊀求之。從這個表中，r價值和R價值.79相關者爲.952，可稱爲.95。

第三種等級法　爲一種選擇法——這個方法稍微麻煩，但結果較爲可靠，——其中有各等級差數的平方數包含在內，如在第三十九表末行所示者。各等級差數的平方總數，以ΣD^2符號代表之。

P的價值就以ΣD^2在公式中求之

$$P=\frac{6\Sigma D^2}{N(N^2-1)}\quad(\text{公式9，第二種等級公式})$$

其相關係數r，用附錄二表四，㊁從P求出之。

用實例證明(表39)，$\Sigma D^2=167.5$.以此值代入公式

$$P=1-\frac{6\times 167.5}{26(26^2-1)},$$

$$P=.94.$$

從表四中求P的.94價值，我們看出相等於r的價值爲.945⁺，可稱爲.95。

補插法　在我們最初計算R與P，我們表明這些量數的價值到三位數目。例如在表三應以.945⁺爲相等於R的.79價值。嚴格說起來，r的945價值是相等於R的價值.790。現在r價值記作.79，然並非爲.790。可以爲.791，或.792在這種情形中，其相等的r價值可爲.946。如果我們要得r價值第三位

㊀此表是根據下面公式

$$r=2\cos\frac{\pi}{3}(1-R)-1,\ (\text{公式8})$$

$$R=1-\frac{6\Sigma g}{N^2-1}\text{而}\frac{\pi}{3}=60^0$$

㊁表四是從下面公式製成的

$$r=2\sin\left(\frac{\pi}{6}P\right),$$

$$\frac{\pi}{6}=30^0$$

正確數，我們至少須得R價值的第三位正確數。在從P計算r，這許多說明，當然也是同樣的應用。

將第三十九表，計算到第三位數目，則R＝.787。如果我們要求.787的r價值，我們可從表三內求之。

.787價值為從.78到.79中的$\frac{7}{10}$。所以r的相等價值在表三中為從.947到.952的$\frac{7}{10}$。.947和.952相差是.005；.005的$\frac{7}{10}$為.0035；我們可稱為.004。將.004加入.947，則得.951，即為較精密的相關係數之價值。這種工作，稱為補插法。(interpolation)。

問題：用第二種等級法，求係數價值以補插法求至第三位小數。在看解答以前你自己先試一下。

解答：將第三十九表計算P到第三位小數，我們得P＝.943

.943價值為從.94到.95的$\frac{3}{10}$，所以r相關的價值必為.945到.954的$\frac{3}{10}$。.945和.954相差是.009；.009的$\frac{3}{10}$約為.003。以此數加於.945則得.948，為用第二種等級法求相關係數較精密的價值。這和我們從簡捷法所得的.951看起來相差甚微。

於此須注意者。即用這兩種等級法所得r價值，較用標準法所求得之r價值.905稍高幾點。兩種等級法所得的結果，彼此關係密切，但兩種從標準法眞正r價值上相差甚為顯明。看附錄三，練習43與44答案表。因此理由，等級法除非在非直綫相關中，不必應用此法；即是關係綫是曲綫時應用此法。就是在這種情形中，等級法如果表明關係綫為直綫時，其相關為如何。

練習44.　用每一種等級法求第三十八表其他每對分數的相關。

異號相關　有時求相關係數，無需十分正確，只要得近似之值，則此種係數可用異號法(Method of unlike Signs)求之。

這個方法，只須注意次數的比例，其中有一個人對於甲量數是在中數以上而對於乙量數是在中數以下。例如我們稱一個分數爲正數，如果此分數是在分配上的中數以上，則必有幾對分數全爲正數，有幾對分數全爲負數，並且有幾對分數，其一爲正數，而一爲負數。在後者情形，其分數爲同號。（看表40）

表四十

	在中數以下	在中數以上	
＋	－　＋ 異　號	＋　＋ 同　號	在中數以上
－	－　－ 同　號	＋　－ 異　號	在中數以下
	－	＋	

以異號定每對分數的比例，是相關度的粗淺測量。相關度愈高，比例愈低。異號（U）比例和相關係數（r）的關係在附錄三㊸中表五內表明之。

假設我們只求第55圖芮彭大學，一年級生的近似相關係數。在這種情形，我們照平常一樣，繪對偶分數，並將兩種分配畫分出來，愈近中數愈佳。例如，我們如將俄提斯分數在50—54和55—59間的組距分開，則在畫分點以上有53個次數；在下面的有55個次數；如將推孟分數在160—169和170—179

㊸有百分之50爲異號則相關當然爲0）；所以異號的比例僅延長到，50，有百分之50以上的異號，則相關爲負數，而其相關則以同號的比例求之。

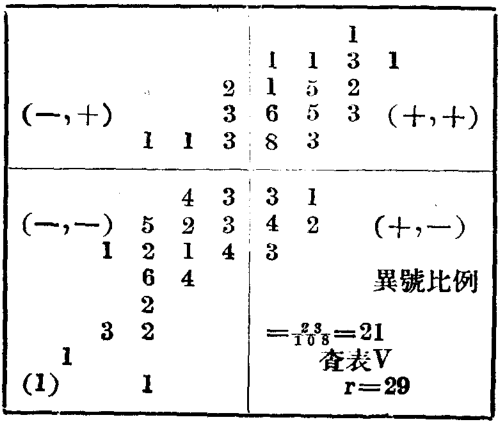
間的組距分開，則在畫分點以下有56個次數，而在上面的有52個次數。這幾部分差不多近於相等。(看56圖)。

試看第56圖，在(一，十)部分者共有10個次數，在(十，一)部分者共有13個次數，總計異號共有26個次數。這個數目以總數108除之。則得21，為異號的比例。查表五，其相等的相關係數為.79。前面所求的真正係數為.82，即表示此方法不過是近似而已。相關愈高，則以異號法所求之係數，其機誤愈大。

練習45.　第57圖為曲綫的一部，表明相關係數和異號每一部分的相關從.00到.50.(繪製各點要代表表五的對偶價值。)

測驗相關的其他方法　此外還有幾種方法測驗相關，大部分都是應用於非直綫相關的。——即兩種變數綫的關係是已知的，或相信可以畫曲綫的。

圖五六　表明以異號法求相關係數的方法

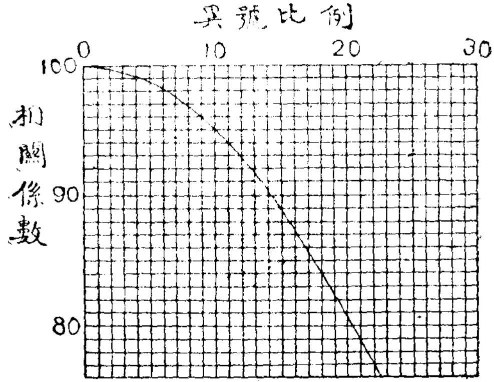


在這些方法中，有一種是求相關率。所謂相關率，就是y行列對於y本身

的標準差的平均數之標準差率；或x行列對於x本身的標準差的平均數之標準差率。(看寇萊的統計法第238頁、Kelly, Statistical Method)

再有一方法測驗相關者，即所謂接觸係數 (Coefficient of contingency)。此不能作簡單的說明而且亦不常用。(看寇萊，統計法第265頁)。

圖五七 此圖表明在相關圖上之異號比例和相關係數的關係。



著者曾推演一個求關係數的公式，叫做離中差公式，此公式和皮爾生所發明的乘積率法，是有同樣的價值，公式為。

$$r=1-\frac{1}{2}\ \frac{\sigma d^2}{\sigma y^2}$$ ，(公式11，求相關係數)

在此公式內，d是相關圖內在關係綫(非迴歸綫)上下任何一點的離中差。將此公式稍修改一下，以計算相關係數的方法，見"拚法量尺的信度，包含求相關'離中差的公式'"一文。此文載學校與社會雜誌第四卷(1916)96到99期，第750頁。再看俄提斯與柯羅林(Arthur S. Oti sand H. E. Knollin,)"皮奈量尺的信度與教育量尺"一文，載教育研究雜誌(Journal of Educational Research) 第四卷(1921)132頁。這個公式在非直線相關某種形式中，

甚爲有用。此可做求相關係數信度簡便公式的依據(公式23，253頁)

問　題

1. 你能想出什麼理由，何以用異號法求得的相關係數和用標準法求得的係數不同?

2. 用等級法求得的係數何以和用標準法求得的也不同?

3. 你能想出有什麼特質的得負相關的?

第十七章　相關和預占

標準——轉移係數——相關係數的進一步解釋——從轉移上解釋相關係數——測驗的錯誤——測驗錯誤對於相關的影響——可靠性——相關減弱改正法——問題

相關的主要目的，便是用以度量從一種測驗，預測他種測驗的程度。例如我們要想知道一個學生研究外國語能成功到什麼程度，則可予以"預占測驗"。測驗分數和繼續研究外國語的學業成績，其相關的數量，可藉這測驗以預占之。

標準　在這種情形之中，當然要應用幾種學業成績的測驗，這種成績是和分數相關的。至測驗相關的成績，我們可用一班學生在學年終了時，外國語最後考試的分數；或用教師逐日上課的分數紀錄，或兩者並用。無論用那一種，這種成績的測驗，卽是一種標準(Criterion)。測驗的價值大半視其和標準相關的程度如何以爲判斷——在這種情形中，施行測驗，當然在外國語開始教授以前。

外國語預占測驗和研究語言的成績，其相關在.50以上。係數.50在測驗中表明什麼預占的價值呢？我們假設在預占測驗中所測驗的分數，從10到20，而最後考試分數，從60到100，其測驗分數和考試分數的相關，在6
個學生中的情形，表明於第四十一表中。這就是我們起初所討論的同樣情

定的係數.50。我們現在是從另一方面觀察相關的意義。

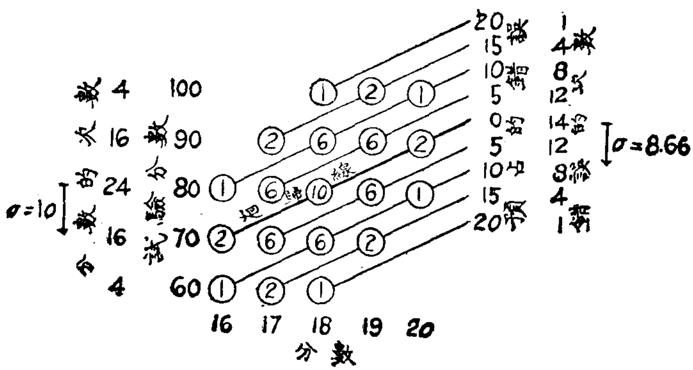
表四一　表明外國語預占測驗分數和最後攷試分數假定的相關。

考試分數						
	100			1	2	1
	90		2	6	6	2
	80	1	6	10	6	1
	70	2	6	6	2	
	.60	1	2	1		
		16	17	18	19	20

預占測驗分數

我們先看四個得16分的學生，這四個學生，一個得考試分數60，兩個得70，一個得80。現在要問一個學生得16分的，其最近是的考試分數能得多少？我們從48圖的相關直綫，可以知道和16分相關的是60。但學生得分數的趨勢，常趨向近於所有分數的平均數（在這個例子中是80)而不與相關的分數相近。我們僅可說，一個學生得16分的，其所得最近是的分數是所有得16分人的平均數。所有得16人的平均數是70。所以我們應當預占得16分的學生，其考試分數能得70。然而得70分的人只兩個。一個得80分。80分在平均數(70)上10點；所以我們應當說，在這種情形，預占的錯誤是10點。同樣，四個學生之中，有一個60分；所以我們應當說，在這樣情形，預占的錯誤亦是10點。每種預占的錯誤，對於平均數的一行的各點，爲同等的距離，或在其上，或在其下。(看第58圖)

圖五八 表明在標準相關中求預占錯誤的次數分配。



同樣，得17分的學生，其得最近是的分數是75——所有得17分的平均

數。所以我們當預占一個學生得17分的，其考試分數能得75。但是實際上沒有學生得75分。有6個學生比75分多得5分——所以在這六個次數中預占的錯誤是5點。同樣，在其他六個次數中，預占錯誤亦是5點，而在上下四個次數中，其預占錯誤則爲15點。在每一情形中，預占的錯誤對於迴歸綫的距離點是相等的，或在其上，或在其下，因爲迴歸綫是經過行列的平均數的。(看58圖)

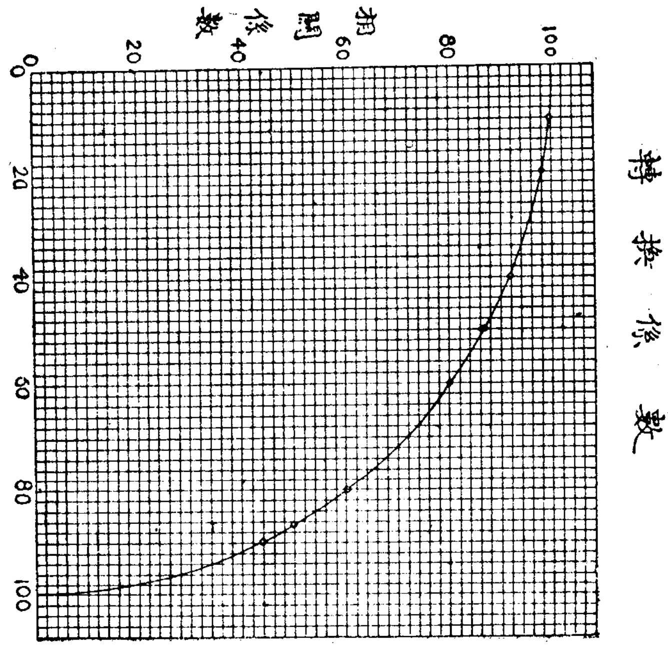
如果我們將這些預占錯誤聯合起來，則其分配卽如第58圖右方所示者而預占錯誤的平均數，(不管錯誤的方向)是$6\frac{7}{8}$點。從此可以看出如果我們不利用分數，而僅預占每一考試分數爲70(所有考試分數的平均數)則我們預占錯誤的平均數，不會大於(實際上恰等於)分數自身的分配之平均差現在考試分數自身的分配之平均差，僅爲$7\frac{1}{2}$點，此可於實際上做出來的觀察之。試想這是什麼意義。這就是說，縱然測驗分數和考試分數的相關是.50，其分數預占錯誤的平均數，差不多仍和我們偶爾揣測分數所生錯誤的

平均數是一樣的多。就預占的目的而言，所以相關.50確是很低的。

我們可以用一種量數的預占平均錯誤和從純粹機遇揣測的平均錯誤之比例，推定一種量數的預占價值。例如$6\frac{7}{8}$點，對於$7\frac{1}{2}$點的比率，是預占分數價值的量數，是我們在外國語中假設預占的成績。但通常是應用標準差的比率而不用平均差的比率。兩種比率是趨於同樣的。

轉移係數　在第58圖，預占錯誤的標準差是8.66點。（注意此僅爲在迴歸綫上下各點距離的標準差）考試分數自身的標準差是10點。8.66

圖五九　表明轉移係數與相關係數的關係。



對於10的比率，便是測驗預占價值的量數。此種比率稱轉移係數㊵（Coeff

icient of alienation)這可以看出此種係數愈大，則預占價值愈小。我們以K字母代表轉移係數。如K＝1.00，則毫無預占價值，如K＝0，預占價值爲完全的。

從相關係數計算K的價值是很簡單的，因$K=\sqrt{1-r^2}$。例如，我們可預先說出第58圖標準差(8.66)對於考試分數標準差(10)的比率是.866，因爲以相關的係數(.50)代入公式，$K=\sqrt{1-r^2}$，則$K=\sqrt{1-.50^2}=.866$。

我們如要知道一種變數預占的標準錯誤和從純粹揣測的標準錯誤之比率，第59圖就是表明轉移係數與相等的相關係數之關係。注意此曲線是圓周四分之一的形式。

表四二 表明相關係數(r)和轉移係數(K)的關係。

r	k	r	k	r	k	r	k
1.00	.00	.85	.53	.70	.71	.51	.86
.99	.14	.84	.54	.69	.72	.49	.87
.98	.20	.83	.56	.68	.73	.47	.88
.97	.24	.82	.57	.67	.74	.46	.89
.96	.28	.81	.59	.66	.75	.44	.90
.95	.31	.80	.60	.65	.76	.41	.91
.94	.34	.79	.61	.64	.77	.39	.92
.93	.37	.78	.63	.63	.78	.37	.93
.92	.39	.77	.64	.61	.79	.34	.94
.91	.41	.76	.65	.60	.80	.31	.95
.90	.44	.75	.66	.59	.81	.28	.96
.89	.46	.74	.67	.57	.82	.24	.97
.88	.47	.73	.68	.56	.83	.20	.98
.87	.49	.72	.69	.54	.84	.14	.99
.86	.51	.71	.70	.53	.85	.00	1.00

●看寇萊，統計法173頁(T. L. Kelley, Statistical Method)

問題：　求從預占測驗分數之預占標準錯誤與由機遇推測之標準錯誤之比例，假使測驗分數與試驗分數的相關爲.60。

解答：　從第59圖的曲線上，我們看出相關係數.60，意卽爲轉移係數.80其意卽謂比率爲.80。

練習46.　從第59圖求與相關係數20，40，50，80，和90相關的轉移係數。將預占標準錯誤減爲$\frac{1}{2}$的標準錯誤，以機遇推測之，則所得的相關係數是什麼?

問題：　試製一表，表明轉移係數和每一相關係數的相關，從1.00到.70。其價值可從第59圖看出之。

解答：　看表42，注意此表有兩方面作用；例如轉移係數1.00和相關係數.00相等，轉移係數.99和相關係數.14相等，餘類推。所以無需將表在每行延長.70價值以外。

相關係數的進一步解釋　附錄表五示吾們對於相關係數的又一種解釋。我們再以預占測驗來解釋。假設一班中願意接受外國語測驗只一半，而被選擇者所得之預占測驗分數爲在中數以上。設預占測驗分數和在這課程的成績之相關是.50。如果未經准許讀此課程的學生，也與以測驗的機會，他們分數能成就的人有多少?　在表五，我們看出和係數.50相等的異號比例，是.33$\frac{1}{3}$。這個意思，就是說全部學生的三分之能及格者，或在被擯除之列，而不能及格者，或未被擯除。

且因這兩種數目趨於相等，其意卽謂或者有三分之一的人，其預占測驗分數在中數以下，對於此課程能及格，而有三分之一的，其分數在中數以上，但不能及格。

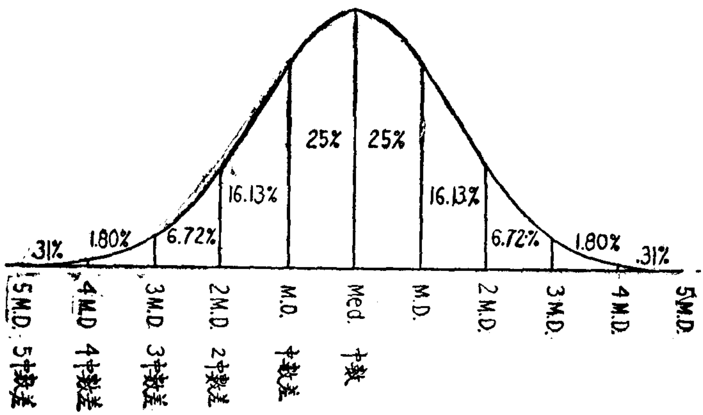
練習47　從表五求預占測驗分數和成績應如何相關，俾分數在中數以

下而能及格者使其比例僅爲五分之一；或十分之一。

從轉移上解釋相關係數　假使兩者的相關係數已經知道了，應如何從一個學生，在一組中的位置，推知其在另一組之位置？這也是我們要研究的㊉。

爲使討論上具體起見，試看第60圖。在此圖中，將一常態分配面分爲十份，每份距離相等，每一距離爲分配上之一個中數差（Median Deviation）注意有百分之25次數在分配上中數的左右之一部分，百分之16,13在每邊的第二組部分，餘如此類推，直到每邊的第五部分，則包含分配上百分之.31。這10個部分，每一距離含一個中數差（1M.D.）所以共含百分之99.92次數，爲實際上目的應用起見，我們可視這10個中數差距離，實際上是包含分配的全距離。或者，換句話說，我們可視每一個中數差距離，在底綫上爲分配的"十分之一"照這個意思解釋，我們來討論這個例證的分配上的"十分之一"。

圖六十　說明次數常態面的底綫分爲"十分之一"。



㊉此亦可應用於同一測驗的兩種形式。

我們現在假設，某一個學生所得分數，其地位是在第六個"十分之一。"我們再假設他受第二個測驗，其與第一種分數相關爲.50。 則其在第二種測驗所得的分數有多少機會使其地位仍在同樣的"十分之一；"就是第六個"十分之一"？ 同樣，他在第二種測驗所得的分數，可以使他的地位，或在同樣的"十分之一"或二個毗連的"十分之一"有多少機會？

表四三　表明各種，相關的數量，機遇在100者，其個第二種的測驗可爲分配上同樣"十分之一"㉓，非轉移一個"十分之一"二個"十分之一"以上等。第六行讀法如下：例如相關爲.50，其機遇僅100之26，其個人的第二種分數能與其第一種分數在分配上的同一"十分之一"，機遇在100之69，其第二種分數不致爲多於一個"十分之一"以上之轉移；餘類推。

相關係數	"十分之一"轉移的數目							
	0	1	2	3	4	5	6	7
.00	19	53	77	91	97	99.2	99.8	99.9+
.10	20	55	79	92	98	99.4	99.9	
.20	21	58	82	94	98	99.6	99.9+	
.30	22	61	85	95	99.0	99.8	99.9+	
.40	24	64	88	97	99.5	99.9+		
.50	26	69	91	98	99.7	99.9+		
.60	29	73	94	99.2	99.9+			
.70	34	81	97	99.8	99.9+			
.80	41	89	99.2	99.9+				
.90	55	98	99.9+					
.95	71	99.9						
.98	91							
1.00	100							

要回答這些問題，因此製了43表。 注意表中與相關係數行下相對.50

㉓看前面解釋"十分之一"的特別意義

的一行。這一行的讀法如下：在相關爲.50時，在上面所說的學生，100中有26個機遇，其第二種測驗分數可使其地位在同樣的"十分之一"100中有69個機遇，其分數可使其地位，或在同樣的"十分之一"的地位，或其他毗連的"十分之一"100中有91個機遇，其分數可使其地位在同樣的"十分之一"，的地位或每邊其他兩個毗連的"十分之一"，餘如此類推㊀。

在此須注意者，卽在完全相關時，100中有100機遇，則無轉移之可能。這當然是很顯明的。而自他一方面觀之，相關爲.00時，則轉移性甚大，可由純粹機遇而發生。換句話說，卽100中有19機遇，任意選擇兩個學生分數，可在同一"十分之一"以內；100中有53機遇，這些學生的分數，可在兩個毗連的"十分之一"以內，餘類推；這可以從零相關中得之。

我們須牢記，分配上的許多"十分之一"並非小數，而是次數面上底綫中數差距離。例如在第一種測驗中，其分數分配的中數差是5點，則我們此地所用的分配"十分之一"的名詞，就是一個組距爲分數5點的意思。

測驗的錯誤 所有智力測驗和教育測驗都免不了我們所謂測驗的錯誤。測驗的錯誤，是一個人在測驗中的某種分數對於眞實分數的差數。眞實的分數，就是如果情境恰爲常態或爲標準時，他可以得到的分數。我們可以將眞實分數當作一種大數量的分數之中數。

測驗錯誤對於相關的影響 兩種變量的相關係數，是一種程度的測驗，在這程度之中，一種變量有改變時，他種變量卽隨之改變。除掉負相關的例子以外，這個意思當然就是說，一種變量高的價值是隨他種變

㊀這許多價值是普通的並屬於轉移的機遇，不問學生分數之地位如何。按照分配上第一個分數的地位，轉移的機遇，其變動不過爲簡單相關。學生分數距中數愈遠，其轉移的機遇愈大。四十三表的價值乃機遇的平均數目。

量高的價值而起。

當然，有許多原因使兩種量數不能爲完全相關（如數學能力和讀法能力），一種是能力固有性的差異，一種是這許多能力測驗不完全的事實。例如，一個學生數學測驗的分數，其所生錯誤是向下的，而其讀法測驗分數的錯誤是向上的，所以分數的差異，因所測驗之能力固有的差異的關係，可因錯誤而增加。換句話說，測驗的錯誤，使兩種變量的相關係數降低。我們稱這種係數降低爲減弱(Attenuation)

可靠性　如果兩種智力測驗，恰爲同樣的特質，而測驗的結果爲完全的，（一致的）則這一組各個人的分數在兩種測驗中，是表明完全相關。兩種測驗不能爲完全相關者，其主要原因在有測驗上的錯誤。測驗錯誤愈大，則相關愈低。所以兩種測驗的相關係數乃測量測驗中的相關數目之測驗。換句話說，兩種測驗的相關係數，是測量測驗的可靠性(Reliability)。

可靠性這個名詞，專門用於測驗中者，其意即表明一種測驗和所測驗的一致之程度如何。關於可靠性各方面的討論，詳見著者所作的"皮奈量尺的可靠性和教育量尺"一文㊟中 (The Reliability of the Binet Scale and Pedagogical Scales) 同類的兩種測驗之相關係數，或同一測驗的兩種得數，就叫做可靠係數(reliability coefficient)。

同樣情形，一個測驗兩種形式的相關係數因測驗錯誤而降低，所以各種不同測驗相關係數亦降低。兩種測驗的相關，不能高於其每種測驗之自身相關。例如，在兩種測驗中，每種可靠係數爲.80，則兩種測驗互相關係不

㊟教育研究雜誌，九月號，1921 (Journal of Education Research，September，1921)

能高於.8)(反過來觀察當然是不變的)如果兩種測驗除掉測驗的錯誤外，則可爲完全相關，在免不了測驗的錯誤時，其相關程度只能到.80。

相關減弱改正法 我們指定X與Y代表兩種測驗。兩種測驗的可靠係數，每項可稱爲r_{xx}與r_{yy}而兩種測驗相關係數，稱做r_{xy}。在此例中，每以r_{xx}和r_{yy}每項等於.80，r_{xy}不能超過.80。我們假設r_{xx}等於.70而r_{yy}等於.80(相反的各組常假設爲常數)由此r_{yy}的係數，無論所測驗的特質是如何相等，不能高於$\sqrt{.70\times.80}$。即係數r_{xy}不能超過.748，如r_{xy}爲.748，我們應知除測驗的錯誤外，係數r_{xy}必爲1.00。如僅爲.70，我們應知兩種能力完全測驗的相關必爲1.00的$\frac{.70}{.748}$，或.935。

這個.935的價值，可說是因測驗錯誤而改正相關減弱——或簡稱改正相關減弱。如果每種所測驗的爲完全測驗，而求兩種測驗如何爲理想的相關，則用下面公式求其相關係數：

$$r_{xy}\ (\text{改正相關減弱})=\frac{r_{xy}}{\sqrt{r_{xx}r_{yy}}}\quad(\text{公式}12)$$

問題： 假設兩種測驗的可靠係數爲.75與.84，而兩種相關爲.61，則其改正相關減弱之係數如何?

解答： $\frac{.61}{\sqrt{.75\times.84}}=.77$

這兩種測驗改正相關減弱爲.77。

對於測驗的錯誤，再進一步的討論，可看第二十章。

練習48 如兩種測驗的可靠係數在某組中，一爲.64，一爲.81，而兩種未改正的相關係數爲.70，則在這一組所測驗的兩種能力，其相關係數是多少(改正係數)?

問　題

1. 從上面的討論看起來，對於速記能力預占測驗或學習外國語能力，你以爲圓滿的相關是什麼?其標準如何(研究問題最後的成功)?

2.你以爲在任何環境之下，皆可求兩種變量的係數，改正其相關減弱否?

3. 預占測驗係數和標準，應改正其相關減弱否?

第十八章　分析相關

對於相關流行的誤解——較直接測驗相關的需要——求分析相關法——分析相關的性質——異樣對於相關的影響——異樣變動時怎樣改正係數——問題

在本書範圍中，對於分析相關，不作高深的研究，但解釋其意義而已。

對於相關流行的誤解　我們測驗學生的聰明，如智力商數(IQ)與進步的能力有很高的相關；同時，進步慢的學生，便可假設其爲愚笨所阻，有兩種變量相關時，我們常假設一種變量是他種變量的原因。

我們常相信學生在學校的進步，和學生家庭普通的特性，因爲有實在的相關，所以不良的普通家庭環境，爲使學生在學校進步遲緩的重要因素。某種家庭環境，如父母不合文法的語言，確阻礙學生在學校中的進步至相當程度，但同時當學校和家庭無因果關係時，我們可看出在學校的進步和其他家庭環境的相關。

所以眞正聰明，大部分是因遺傳的關係，在學校各種進步不同的能力，大部分是因聰明的不同，如其這是一種事實（或者是如此）並且“聰明”的父母，大半經濟較豐，家庭美滿，如其這也是一種事實，則當然我們知道在學校中進步快的學生，是來自良好的家庭。故學生在校的進步和普通家庭的環境，其結果爲正相關。換句話說，“聰明”的父母，其子女在學校中進步是

快的，而這種學生是享受"良好的家庭"。

我們很容易想像，家庭經濟充足的父母，有豐富之飲食和烹調的用具，所以對於學生在校進步的速率和家庭中豐富的飲食和烹調用具，可得一正相關。當然，我們不能說家庭飲食用具不豐者，即使學生在學校中不能爲常態的進步。這不過解釋一種事實，即"家庭境况"和在校進步的相關，不一定證明第一種總是第二種的原因。

前面所說者，乃證明兩種變量相關時，則有些原因或許多原因（如遺傳）相合，而在兩種變量中產生變化。例如某組學生的拉丁成績，和以後英文的成績，我們求出相關是.60，我們不能從單獨事實，以推論學習拉丁對於以後英文成績有若何影響。或者是智力成熟的學生，對於拉丁與英文要學的好些，而未成熟的學生，對於拉丁與英文，要學的壞些。

較直接測驗相關的需要　在上述的情形中，我們測驗拉丁成績和英文成績，所需要者是所有學生的智力，要爲同樣程度。要得大多數的學生恰爲同樣的智力是很不容易，但是有一個方法，假設所有學生是同樣的智力而求其兩種科目成績的相關係數，這叫做分析相關法（Method of Partial correlation)。

相關係數縱然有，假設是適當的然而我們不能說，學習拉丁，能影響於以後英文的成績。我們所能說的是有幾種原因，非智力的差異，使拉丁成績優良亦使以後英文成績優良。這種原因是值得求出來的。

同樣，如果所有學生，其聰明是同等程度，用分析相關法，我們能求出家庭環境和在校進步的能力，二者的相關是什麼。這可以變爲微量相關。(Negligible correlation)

求分析相關法　求分析相關係數，常包含三種變量，如(1)拉丁

成績，(2)英文成績，(3)智力。通常定這三種變量的數目如上面所示者，皆以兩個變量在前，從這兩個變量以求相關係數，除去第三變量的影響，或使為常數。例如，我們要知道拉丁成績和英文成績的相關係數是什麼，將智力差異的影響除去(或使為常數)則我們應使智力數目為3，而其他兩種為1與2，其次序可任意定之。

我們要表明第一種和第二種變量相關係數，不除去第三種變量的影響，則為 r_{12}。表明第一和第三變量的相關係數則為 r_{13}，表明第二與第三變量的相關係數則為 r_{23}。我們表明第一第二兩種變量而除去第三種變量的影響，則為$r_{12\cdot3}$。

$r_{12\cdot3}$的價值，從r_{12}，r_{13}，與r_{23}價值求之，用下面公式：

$$r_{12\cdot3}=\frac{r_{12}-(r_{13}\times r_{23})}{\sqrt{(1-r^2_{13})(1-r^2_{23})}}$$ (公式13，求分析相關係數)

假設上面所述的三種變量，其相關如下：

r_{12}(拉丁與英文相關)$=.60$

r_{13}(拉丁與智力相關)$=.70$

r_{23}(英文與智力相關)$=.80$

求拉丁成績和英文成績的相關係數，除去智力的影響，我們當解下面的方程式：

$$r_{12\cdot3}=\frac{.60-(.70\times .80)}{\sqrt{(1-.70^2)(1-.80^2)}}$$

$$\doteq\frac{.60-.56}{\sqrt{.51\times .36}}$$

$$=\frac{.04}{.43}$$

$$=.09。$$

按照我們的假設，拉丁成績與以後英文成績的相關，除去智力差異的各種影響，僅爲.09（微量相關）。

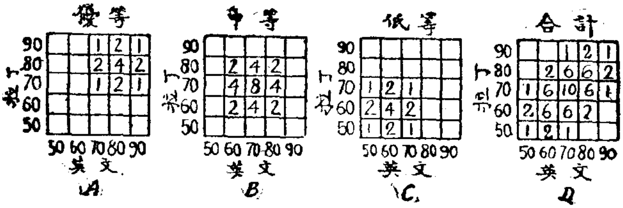
兩種變量的分析相關，除去第三種變量的影響，有時卽稱爲兩種變量的相關，而將第三種變量“析除”之。

用他種公式亦能求出兩種變量的相關，除去其他兩種變量，或三種變量，或任何數目的變量。

分析相關的性質　爲說明起見，我們假設同等智力學生的拉丁成績與英文成績，其相關爲零，但每種科目的成績皆與智力相關。

我們假設有16個學生，其智力超過某班的平均數，拉丁成績和英文成績，二者的相關，如61圖A所示者。這當然是一個很不自然而過於簡單的散佈圖。此圖恰代表零相關。

圖六一　表明兩種變量自身無關，當受第三種變量影響時，如何表示其顯明的相關。



我們假設有32個學生，其智力恰爲某班的平均數，拉丁成績和英文成績的相關，在61圖內B表明，至求C圖爲16個學生其智力在一班中平均數之下。這個量表是假設的。這些相關還是爲零。

如果我們將以上三組學生合爲一組而爲64個學生，以求其拉丁成績與英文成績的相關，則散佈圖卽如D所示者。於此我們所求出的散佈圖和起

初用以說明求相關係數的是一樣的，並且如圖所示者，其係數爲.50。

現在我們得兩個變量很明顯的相關是.50，這兩個變量預先知道是完全無關的！

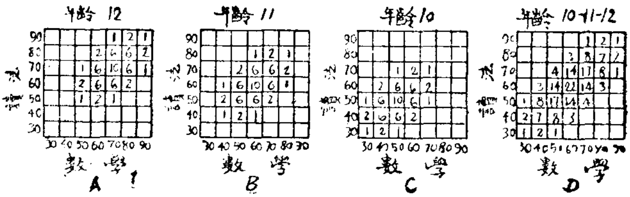
我們已經知道，如果我們不預先曉得兩種變量不受第三種影響時是如何相關，則求兩種變量相關不得不受第三種變量的影響，如果我們曉得每種變量對於第三種的相關，我們卽能以分析相關法，求最先兩種變量的相關不受第三種的影響。

練習49. 用下面表求分析相關($r_{12\cdot3}$)係數。

r_{12}	.40	.50	.60	.75	.30	.40	.54	.83	.56	.41
r_{13}	.50	.50	.50	.50	.40	.40	.40	.58	.59	.13
r_{23}	.50	.50	.50	.50	.60	.60	.60	.23	.00	−.24
$r_{12\cdot3}$										

異樣對於相關的影響 恰如61圖所說明的同樣方法，兩種數量的相關，如智力測驗的分數是受各種學生間年齡差異量的影響。例如我們假設某種年齡(譬如說12歲)數學能力和讀法能力的相關是.50，如在第62圖所表示者。其次，假設稍小年齡(譬如說11歲)的數學能力和讀法能力的相關亦是.50，但此組分數要低些（因爲數學能力和讀法能力的相關對於年齡的關係)我們可以B圖代表這種相關。再假設10歲的相關亦爲.50，但分數仍低，如C圖。此項測驗量表還是假設的。

圖六二 表明各組異樣對於相關係數的影響。



如果我們將以上三種年齡的各組合併觀察，則相關圖如D圖。倘將此圖抄俄提斯相關圖的地位而求其相關係數，則得.70。如果將年齡9用同樣方法加入，則相關爲.77$\frac{7}{8}$，如再將年齡8以同樣方法加入，則相關爲.83$\frac{1}{3}$，時時逐漸變大。

因此，我們看出，當論到兩種能力的相關，每種受各個人年齡的影響，於是發生一很大的差異，即團體測驗是否應限于同年齡的學生，抑包含各種年齡的個人在內。年齡的全距離愈廣，則相關愈高。(再閱第二十章)

所以說明兩種測驗的相關，而不說明年齡的全距或智力年齡，或年級等，以表明各組的異樣者，是沒有價值的。如兩種測驗的相關是.60，而對於學生是否在一個年級，或年級的距離是否從3到9等，沒有一種說明，則這些學生即或年齡相若，智力年齡相等，但不能定其相關爲.60，.40，.20或爲零。

異樣變動時怎樣改正係數　假設我們知道兩種測驗的相關係數爲.80，其學生包含各種年齡，測驗分數的標準差如說是15點。又假設我們在彼種測驗中，學生年齡相同，其分數的標準差是10點，而要曉得其係數爲何。其計算根據標準差⊖的比率如下：

$$\text{新的係數} = 1 - \left(\frac{\sigma\,(\text{舊組})}{\sigma\,(\text{新組})}\right)^2 \times (1 - \text{舊的係數})$$

⊖任何差異數量的比率，如五十分距離等即可，因爲在所有普通情形中，任何差異的同樣數量的比率，和其他任何差異的兩個同樣的數量，有同樣的傾向。

$$=1-\left(\tfrac{15}{10}\right)^2\times(1-.80)\ (\text{公式}14)$$ [1]

$$=1-2.25\times.20$$

$$=1-.45$$

$$=.55。$$

這表明兩種測驗的相關在第二種情形中僅爲.55。

我們從上面的證明看出減少一組的不同，使分數的差異減爲$\frac{2}{3}$，係數從.70降低到.55。

練習50. 如果有興味，可將62圖內A與D兩圖的變量之標準比率求出來，而觀察在明瞭此種比率時，是否你能表明係數.70，用上面公式從係數.50求出之。

證明上面公式，著者有一文"從異樣團體變化中所產生之相關係數推求其變化的方法"文載教育心理雜誌1922五月號。

問　　題

如果第一個著者對於他的測驗所得的可靠係數爲.80，而第二個著者對於他的測驗所得的可靠係數爲.90你是否要說，第二個著者的測驗較可靠性些?

[1]這個公式是根據一個假設，即一種測驗標準差的比率和他一種測驗標準差的比率是一樣的。兩種比率當然傾向一樣的，但如在特殊情形中有些微的差異，則眞正新的係數從公式上計算，必與估計的係數有些微的差異。

第十九章　複相關

測驗預占的價值——複相關的意義——求複相關的公式——求加重的方法——加重的公式——符號——複相關對於全體相關的關係——迴歸方程式——四個或四個以上變量計算法

測驗預占的價值　在現代各種測驗中，有一種目的是預占此種或彼種職業的成就，例如我們用智力測驗預占學校工作中的普通成績。我們可應用特殊預占的測驗以預占研究外國語，速寫，工程，機械訓練，等等的成就。

測量一個測驗的預占價值，即是求測驗分數和最後試驗分數，教師估定的能力，教師指定最後的年級等所測量其學習上最後成績的相關。後面所說的幾種測量法，用任何一種以判斷測驗價值者，就叫做標準(Criterion)。

複相關的意義　我們假設要預占學習速寫的成績並製一構成某種聯想的速度測驗，其與我們所懸爲標準的最後試驗分數的相關，到.60的程度。再譬如說，某種形式的手工機巧測驗，其與我們的標準相關僅爲.50。

你以爲兩種測驗合併計算後，對於標準的相關，會比任何一種單獨的分數要高些嗎?換句話說，你以爲測驗結果對於標準，其相關爲.50者，會比對

於一種測驗結果與標準相關爲.60者，增加一些價值嗎？這很可在預先決定的。

有一公式求一種相關，此種相關能從兩種測驗合併的分數和標準中得來，而實際不需將分數合併。這種相關叫做複相關。(multiple correlation)

如求兩種測驗合併分數和標準的相關，首先須求兩種測驗本身的相關。我們假設是.40。於是可將三個相關係數代入公式而求其複相關。

求複相關的公式 我們假定稱聯想測驗爲測驗一，機巧測驗爲測驗二，而以C代表標準。則三個相關係數，表示如下：

標準與測驗一相關 $= r_{c_1} = .60$

標準與測驗二相關 $= r_{c_2} = .50$

測驗一與測驗二相關 $= r_{12} = .40$

至測驗一和測驗二的合併分數與標準最高的相關，再以 $R_{c.12}$ 符號代表之，則複相關之公式如下：

$$R_{c.12} = \sqrt{\frac{r^2_{c_1} + r^2_{c2} - 2r_{c1}r_{c2}r_{12}}{1 - r^2_{12}}}$$ （公式15 ● 求三個變量複相關係數）

將 r_{c_1}，r_{c2}，與 r_{12} 價值代入上式，則爲

$$R_{c.12} = \sqrt{\frac{.60^2 + .50^2 - 2 \times .50 \times .40}{1 - .40^2}}$$

● 求複相關的係數常用的有兩種公式：

$$R_{c.12} = \sqrt{1 - (1 - r^2c2)(1 - r^2c1.2)}$$ （公式16）

與 $$R_{c.12} = \sqrt{1 - (1 - r^2c1)(1 - r^2c2.1)}$$ （公式16a）

這兩種公式同用時，第二種用以校對第一種。然而可看出這兩種公式皆含分析相關係數。因此理由，公式15比較上面任何一種爲簡單，因爲公式15包括全體的相關。

$$=\sqrt{\frac{.36+.25-.24}{.84}}$$

$$=\sqrt{\frac{.37}{.84}}$$

$$=.66$$

此表明測驗一與測驗二分數適當合併，每種和標準的相關，一爲.60，一爲.50，而測驗一與測驗二的相關爲.40，則可得合併分數和標準的相關爲.66。所以合併分數對於學習速寫成績的預占較每種單獨測驗稍微好些。

求加重的方法　第15公式，須知是對於標準求最大限度的相關，可合併兩種測驗以得之。如果我們只須以原始分數加入兩種測驗中，則不能得最大限度的相關。例如我們假使加入原始分數，則複相關會變爲.63，或.64。要得最大限度的相關，(在這個例子中是.66)，則兩種測驗分數爲合併分數時，須按照其重要關係增加些；這就是說，要加重些。(Weighted)

通常第一種測驗用原始分數，第二種測驗分數以幾個"加重"數目乘之，然後再合併。此"加重"數目可大於1或小與1，視第二種需要增減以爲決定。如果我們以St代表一個學生在兩種測驗的總分數，第二種測驗分數爲適當的加重，俾得數能表明對於成績最佳的預占，以S_1和S_2代表學生在測驗一與測驗二的分數，並以W代表對於第二種測驗適當的加重。於是㊀

$$St=S_1+wS_2$$

加重的公式　我們現在可從三個係數rc_1，rc_2，r_{12}，與兩種測驗分數的標準差σ_1和σ_2，用下面公式求適當的加重W：

㊀此公式讀法如下："總分數＝(第一種分數)＋(加重×第二種分數)"

$$W=\frac{rc_2-rc_1r_{12}\sigma_1}{rc_1-rc_2r_{12}\sigma_2}$$ (公式17，求加重)

假設$\sigma_1=10$，$\sigma_2=12$。於是以係數的價值和標準差代入公式15，則得

$$W=\frac{.50-.60\times.40}{.60-.50\times.40}\times\frac{.10}{.12}$$

$$=\frac{.26}{.40}\times\frac{.10}{.12}$$

$$=.54$$。

所以$St=S_1+.54S_2$

這個公式的意思，就是我們要以.54乘測驗二分數，然後再加在測驗一分數內，以便得最佳標準的預占——合併分數對於標準最佳的相關。所以第二種測驗比第一種測驗只加重一半多一點。這半由於第二種測驗對於標準的相關，小於第一種測驗對於標準的相關，而半於第二種測驗分數的標準差，大於第一種測驗分數的標準差，這種情形在本身上對第二種測驗分數是不合理的加重。

符號 我們現在知道有三種相關：即全體相關，分析相關，與複相關。全體相關是兩種變量的普通相關。

全體相關是x和y$=r_{xy}$

分析相關是x和y而z爲常數$=r_{xy\cdot z}$

複相關是x和(y+wz)(w=適當加重)$=r_{x\cdot yz}$

於此須注意者，即在分析相關的情形中，有一小點是在頭兩個附字（Subscripts）之後（即相關的二變量），和其他爲常數的變量附字●分開，其

●常數可有兩個或兩個以上之變量。如a與b二變量的相關，受常數c，d，與e變量的影響，則可以$r_{ab\cdot cde}$代表之。

在複相關的情形中，此小點在第一個附字之後（與標準有關者）和與標準有關之合併變量的附字❶分開。

複相關對於全體相關的關係 如果兩種測驗對於一個標準是相等的，則能做百分數的估計，由此百分數的估計，可以在表44上看出複相關超過每種單獨測驗的標準相關。在此表內，$Rc._{12}$的得數，即$Rc._{12}$超過rc_1或rc_2（二者相等）百分數的意思。

第44表，表明r_{12}為1.00時，則複相關$Rc._{12}$不大於rc_1或rc_2。還有一種說法，就是兩種完全相關，則合併起來沒有得數。

此表還表明r_{12}的價值愈小，則$Rc._{12}$超過rc_1與rc_2的數愈大。換句話說，就是合併兩種驗測，愈少愈佳，這是很重要的，如能不合併最好，以便得最佳的複相關（即是對於標準最佳的合併相關）。此因為第二種測驗和第一種測驗相似的愈少，則為適當合併時對於第一種測驗增加的愈多。

表四四❷ 表明在$rc_1=rc_2$的特殊情形中，$Rc._{12}$對於r_{12}各種價值中，超過rc_1或rc_2增加的百分比

r_{12}	1.00	.90	.80	.70	.60	.50	.40	.30	.20	.10
$Rc._{12}$正差數	0.0%	2.6%	5%	8%	12%	15%	19%	24%	29%	35%
r_{12}	.00	-.10	-.20	-.30	-.40	-.50	-.60	-.70	-.80	-.90
$Rc._{12}$正差數	41%	49%	58%	69%	83%	100%	124%	158%	216%	347%

❶合併的變量有兩個以上。如a與b，c，d，及e，合併變量的相關可以Ra，bcde代表之。

❷這種關係當然到$Rc._{12}$達1.00為止，普通到r_{12}達1.00為止。

迴歸方程式 上面所討論的，已經論到求第二種量數最好的加重方法，有此方法，然後就可以之和第一種量數合併，使加重後兩種總數對於標準達最高度的相關，及從這個最好的加重法，求兩種合併數量和標準的相關。

要達到這第二個目的複相關是主要的應用。然而有很少的時候，需要再進一步並要從任何個人的兩種量數，預占一個標準的確實價值。要達到這個目的，則需要高深的計算；就是迴歸方程的解法。

求一個標準和兩個自變量，其迴歸方程式如下：

$X_c = b_{c1.2}X_1 + b_{c2.1}X_2 + c$。 （公式18，求三個變量的迴歸方程式）

在此公式內，X_1代表第一個變量，X_2代表第二個變量，X_0代表從分數適當之標準價值。其$b_{c1.2}$與$b_{c2.1}$之價值如下：

$$b_{c1.2} = \frac{r_{c1} - r_{c2} r_{12}}{1 - r^2_{12}} \quad \frac{\sigma_c}{\sigma_1},$$ （公式19，求迴歸係數）

$$b_{c2.1} = \frac{r_{c2} - r_{c1} r_{12}}{1 - r^2_{12}} \quad \frac{\sigma_c}{\sigma_2},$$ （公式20，求迴歸係數）

而$c = M_c - b_{c1.2}M_1 - b_{c2.1}M_2$，

在此式內M_c＝C變量價值的平均數，

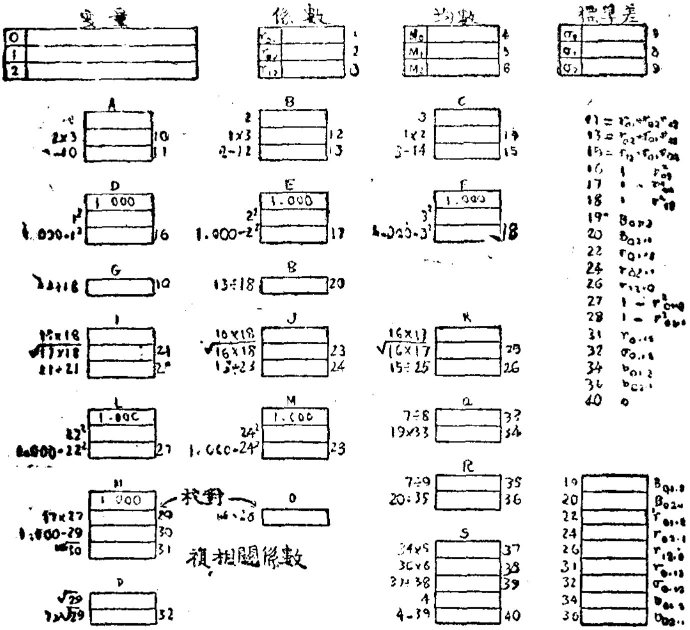
M_1＝變量1價值的平均數，

M_2＝變量2價值的平均數。

很少的學生能有機會做出這種完全的迴歸方程式，實際在各種例證中，可應用上述加重測驗及求複相關係數的方法以達此目的。因此理由，此處所說的迴歸方程式不過供參攷而已，不必有詳盡的解釋。其對於迴歸方程式有興趣者可參看下面所舉的較專門的書籍。

紐約哥崙比亞大學師範院錫蒙斯博士(Dr. Percival M. Symonds)曾製一圖叫做錫蒙斯複相關圖(Symonds Multiple Carrelation Chart)以便計算分析相關和複相關的係數。這個圖和俄提斯相關圖相似並於必需計算的步驟上，有"各部的分析"，且留有地位以便計算，和俄提斯相關圖一樣第63圖卽表明此圖的形狀。錫蒙斯博士另製一圖以爲有四個變量時之用。

圖六三　錫蒙斯複相關圖(註)



迴歸方程 $X_0=b_{01.2}X_1+b_{02.1}X_2+\cdots$

$X_0=(34)X_1+(36)X_2+(40)$

求 Bo1.2　用步驟A，F，和G
求 Bo2.1　用步驟B，F，和H
求 ro1.2　用步驟A，F，F和I
求 ro2.1　用步驟N，D，F，和J
求 r12.0　用步驟C，D，E，和K
求 ro.12　用步驟A，E，F，G，I，L和N
求 Xo　用步驟，A，B，F，G，H，Q，R，S，

凱電博士(Dr. Truman L. kelley)在其所著統計法(Statistical

●現在出版者只有模寫器(Mimcogreph form)形式

Method) 書中，將此圖印入，以便計算分析相關與複相關之係數。

練習51 用下表求複相關($R_{C.12}$)係數。

r_{C1}	50	60	70	70	70	25	25	67	61	48
r_{C2}	50	60	70	70	70	50	35	73	58	39
r_{12}	50	50	50	60	70	50	45	84	19	—27
$R_{C.12}$										

四個或四個以上變量計算法 前面所討論者已經講到三個變量的計算法。此外還可用任何數目的變量計算分析相關和複相關的係數，並製出迴歸方程式。但研究這許多繁複的事實，非本書之範圍。讀者可參看較專門的書籍，如虞爾(G. Udny Yule)的統計學原理概論 (An) Introduction to the Theory of Statistics C. Griffin & Co. London 及凱雷的統計法 (Statistical Method by Truman L. kelley, The Macmillam Company, New York) 凱雷博士在袖珍數學統計 (Hand-book of Mathematical Statistics by H. L. Rietz et al, Houghton Miffin Company, Boston)書中，有一篇關於分析相關與複相關論文，在第139—149頁。布金亨博士(Dr. B. R. Buckingham)曾著一篇文章，對分析相關的意義，有很明晰的解釋，文載1923四月，教育研究雜誌(Journal of Educational Research) 論說欄，並有一篇解釋複相關，載1924，二月教育研究雜誌內。

著者亦有一篇"迴歸方程式"簡式的由來"The Derivation of Simple Forms of Regression Equations"一文，載1917, 十二月教育心理雜誌 Journal of Educational Psychology)。此文表明有三個及四個測驗合併時，如何求最佳的加重。

第二十章　可靠性

測驗分數的錯誤性——測驗分數變異的原因——可靠性——可靠性的測驗——測驗的機誤——測驗機誤的求法——從簡單的個人每對分數的差異求分數機誤的公式——其他可靠性測驗的需要——以分數差異解釋機誤——相關的可靠係數——可靠係數和機誤的關係——從可靠係數求分數機誤的公式——可靠係數的解釋——可靠性與異樣——測驗的錯誤——效度——相關係數的機誤——相係數機誤的公式——用俄提斯相關圖所求出的相關係數怎樣求機誤——機誤係數的要義——差數的機誤——均數與標準差的機誤——分析相關與複相關之係數的機誤——平均數的可靠性——練習的效力——問題

測驗分數的錯誤性　我們量一個學生的身長，可相信這個測量是正確的，卽少至一時的幾分之幾以內，亦可正確。但假設我們對於一組學生予以20個字的拚法測驗，張生得分數120這是否他的拚法能力之眞正的測驗呢？當然是不能的。如果我們以測驗分數爲對於他的拚法能力之眞正測驗，我們也許求出眞正分數或降低爲9或升高爲15。換句話說，一個學生的拚法，在任何簡單的測驗裏，能於分數20點中有1，2，3，或4點的錯誤(過高或過低)。

測驗分數變異的原因　我們一定要不明白爲什麼一個學生，

對於一種測驗的兩種同等形式者㊟，常不能得同樣的分數。一個學生所以得不同分數的理由，就是20個字只代表學生所學的一種取樣 (Sampling)，而學生在20個字中所能拚出之字的數目又多靠機會如何而定，猶如以銅元20個投擲一樣，其正面的數目亦免不了機遇。

此外在一種測驗中，一個人分數變異，還有其他許多的原因，如對於測驗態度的不同，及做測驗時的努力程度等。有時分數是由計分的人來判斷，則許多計分的人在同一測驗紙中必計出各種不同的方法來。

可靠性 一個學生所做的幾種同等選擇的測驗，比較說起來，其分數差不多是一樣的，這種測驗叫做可靠；但是一個學生在同等形式的測驗，其所得分數，如有顯明的差異，這種測驗就叫做不可靠。倘其他各項相等，分數的變異愈小，則測驗的可靠性愈大。

可靠性的測驗 測量一個測驗的可靠性有許多方法。一種是求機誤(Probable error)還有一種是求兩種同等形式測驗的相關係數，這種係數叫做測驗的可靠係數。(Reliability Coefficient)

測驗的機誤 假設張生受20個字拚法測驗，共測驗25次同等選擇的形式，其分數分配如下：

分數	6	7	8	9	10	11	12	13	14
次數	1	2	4	3	5	4	2	3	1

在此表內，中數分數是10，我們可假設分數10是張生在這個測驗所得之拚法能力分數。如果這是對的，則三個9分和四個11分，其錯誤為1點，其餘分數錯誤如下：

㊟同等形式的意義，就是第一種形式每一字和第二種形式的字相當，在大多數學生受兩種測驗時，其拚法可得很相似的百分比。

錯　　誤	0	1	2	3	4
次　　數	5	7	6	5	2

這許多錯誤的中數是2點。這和張生所得25個分數分配的中數差，是一樣的。此中數錯誤可用作測量測驗的可靠性。這就是說，如果有幾個其他測驗表明中數錯誤爲3點（其餘各次是一樣的），我們則應認第二種測驗是不甚可靠。

但是我們不應當根據一個人的分數以判斷一個測驗的可靠性。就理論上講起來，我們應當有很多個人的大多數。如果我們得每一個人充分的分數，俾能以中數分數作爲此個人的眞正分數，則從其中數分數上所得的各種分數之差數，是他的分數錯誤的眞正數量。再如果我們在一個測驗中，得許多個人各種分數錯誤的眞價值，則所有錯誤的中數，也許是這個測驗可靠性很正確的測驗。這種中數錯誤叫做測驗的機誤。

所以，一個測驗的機誤，是許多人中每人所有分數錯誤的中數價值；所以任何新測驗中所免不了的錯誤數量卽是這新測驗的錯誤，不能超過的數量。

測驗機誤的求法　當然，我們通常不能對於一組學生測驗很多的時間，但是能夠從一大組的學生每對分數的差異，得到一個測驗機誤之理論的價值。這個意思就是說，每人只受兩次測驗。

在實際上，通常從每一個人予以兩種同等形式的測驗以得兩種分數，而於此種分數中作爲計算機誤的根據。這種手續是假設學生的眞正分數，不視爲在同等測驗中大多數分數的中數，而視爲個人在大多數同等選擇形式的測驗分數的中數。這種假設較前者爲優，因爲一個測驗有兩種或兩種形式以上的分數相比較，其中因問題選擇不同發生的差異，皆足以使測驗發生錯

誤，所以在求個人兩種形式測驗分數的差異以前，測驗反覆的效力㊀。及其中難度的差異，均須加以斟酌。

從簡單的個人每對分數的差異求分數機誤的公式

假設我們已求出每一個人在某種測驗兩種分數差異的分配，所有第二種形式的分數皆變爲第一種形式的分數。測驗機誤的近似價值，可從這些差異的中數價值上求之，即僅以.707乘之，就是$\sqrt{\frac{1}{2}}$，所以，機誤分數＝近似的.707（各分數的中數差異）。

（公式21求分數的機誤）㊁。

較正確的公式㊂是機誤$_{分數}$＝.4796σ（各分數的差異）

（公式22）

其他可靠性測驗的需要　假設我們予一組學生兩種形式的100個字拚法測驗，而求其機誤爲5點。我們可否說，這個測驗不如20個字測驗之可靠？當然不是的，因爲在100個字中有5點錯誤，其學生地位的移置，也許較在20個字中有2點錯誤的要少的。所以如五年級在20個字拚法測驗分數的中數差異，只有3點，則2點的錯誤可變更一個學生百分比等級從50到33然而如五年級在100個字中分數的中數差異爲15點，則5點的錯誤，在百分等級的50中也許不變更過於8或9點。從此可看出測驗分數變化有怎樣的關係了。

㊀看以下"練習的效力"

㊁這個公式的證明，和此法的說明，見著者所作"皮奈量尺與教育量尺的可靠性"文載教育研究雜誌1921，九月號，第137頁。在此文內還有一簡便方法求兩種形式測驗分數差異的中數除去難度的差異。

㊂ $.4769 = .6745\sqrt{\frac{1}{2}}$

以分數差異解釋機誤　現在我們要以所研究的某組分數分配，作機誤的測量了。簡單的方法，就是求分數分配之中數差與機誤，是什麽比例。如果我們照剛才所說的情形來做，我們應求20個字拚法測驗分數的機誤，是等於中數差$\frac{2}{3}$(機誤＝2中數差＝3)，而100個字測驗分數的機誤，是等於中數差的$\frac{1}{3}$(機誤＝5，中數差＝15)。在其他各組測驗中，這些價值不能適用這種情形，然而在所研究的一組中，可以這些價值直接比較，並確實表明100個字的測驗比20個字測驗，是如何可靠，至少是對於所測驗的一組，可以表明。

相關的可靠係數　測量測驗的可靠性之另一方法，卽研究分數的差異，就是求兩種形式測驗的相關係數；卽一組學生在測驗中的每對分數。這種係數如以前所說的，叫做測驗的可靠係數。有時叫做自身相關(Self correlation)可靠係數愈高，則測驗的可靠性愈大。可靠係數爲＋1.00時，則可說是完全一致。可靠係數爲.00，其意卽任何一個學生的兩種分數，比兩個不同學生的分數在任意選擇時的關係，未見得密切些。

在我們假設的例子中，20個字的測驗，其分數的機誤爲2點，分數的中數差爲3點，則自身相關約爲.55，而在100個字的測驗中，其機誤爲5點，分數的中數差爲15點，其自身相關約爲.89所以在100個字的測驗中，其機誤點的數目雖大，但其可靠性較大，因爲他的機誤比較的少些。

可靠係數和機誤的關係　在機誤以分數分配上中數差的單位解釋時，則測驗的可靠係數和機誤有很確定的關係。所以如果我們以所要研究這一組分數的中數差●除分數的機誤，將其商數平方之，而無100相減，則得可靠係數。公式如下：

●兩個分配中數差的平均數

可靠係數$=1-\left(\frac{\text{機誤(分數)}}{\text{中數差(分配)}}\right)^2$。(公式23●,求可靠係數)

問題: 已知一個測驗的機誤爲5點,而某組學生分數分配之中數差,在兩種形式的測驗中爲10點,在此情形中,其可靠係數爲何?

解答: 可靠係數$=1-(\frac{5}{10})^2=.75$。

可靠係數爲.75。

從可靠係數求分數機誤的公式 這個方法當然也可反過來做一下。如果我們知道某組測驗的可靠係數,並知測驗分數的中數差(兩種形式),我們就能求分數的機誤。其法是從1.00裏減去可靠係數,以其差數開方,而以分數分配的中數差乘之。公式如下:

機誤(分數)$=$中數差(分配)$\times\sqrt{1.00-\text{可靠係數}}$(公式24,求分數的機誤)

於此須記憶,無論何時,分配的差異以百分比曲線圖求出時,則中五十分距離在各種情形中,除分配有顯著的偏斜外,以2除之,可用以代替中數差。此在各種普通情形中是如此,

中數差(分配)$=\left(\frac{\text{百分之75}-\text{百分之25}}{2}\right)$

問題: 已知某組測驗的可靠係數爲.91而在分數每一分配中,其中五十分距離爲25點,可靠係數是從此分數而來,此測驗之機誤是多少?

解答: 機誤$=\frac{20}{2}\times\sqrt{1-.91}=10\times\sqrt{.09}=10\times.3=3$

此測驗之機誤爲3點。

可靠係數的解釋 某一測驗,其可靠係數爲.75,是如何可靠呢?這種可靠係數的意義,最好的說明,是藉分數的機誤,和求可靠係數

●這個公式從公式11而來,第十六章。

的分數分配之中數差㊀二者關係來解釋。

第45表可幫助解釋

表四五　表明測驗的可靠係數和機誤的關係。

可靠係數	.00	.25	.50	.60	.70	.75	.80	.85	.90	.95	.98	.99	1.00
機誤÷中數差	1.00	.87	.71	.63	.55	.50	.45	.39	32	.22	.14	.10	.00

從此表內，我們看出某組學生其測驗可靠係數爲.75，則分數的機誤恰爲全部分數中數差的一半(.50)。所以這不是很高的可靠係數。

可靠性與異樣　分數的機誤，完全與任何組的異樣無關，由此以計算機誤。從同組所得的分數之機誤，和從異組所得的，恰爲一樣，因爲一個學生任何兩種分數的差異，無論其在此組或在彼組，可有同樣的趨勢。

自他一方面觀之，可靠係數須視一組的異樣如何以爲斷，而從此以得可靠係數。在前面研究求可靠係數的公式則看出如果我們增加一組的異樣，包括學生能力的較廣距離在內，則分數分配的中數差變大，而$\frac{\text{機誤}}{\text{中數差}}$分數變小，於是1減分數的平方，其數變多。所以計算可靠係數一組的異樣——包括各年級，或其他同樣的——則對於測量一個測驗的可靠，是沒有多少價值或毫無價值。

還有同樣可以說明的，就是如果我們能減少一個測驗的機誤不改變某組分數的中數差，則可靠係數能以增加，同樣，機誤增加，卽使可靠係數降低。

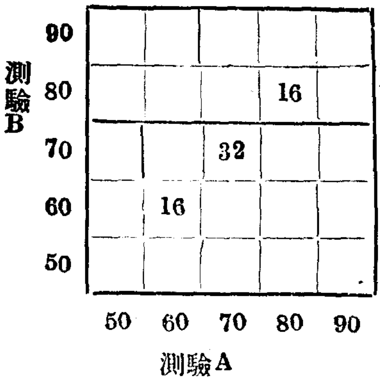
測驗的錯誤　我們應用測驗錯誤這一個名詞，卽是說學生在一

㊀兩個分配之兩種中數差的平均數，假設是相等的。

種測驗的分數對於假設眞正分數的差數——眞正分數，認為一種分數是設測驗時，所有情形恰為常態或為標準的，所得的分數，或是某學生在某測驗大多數分數的中數，其反覆練習的效果完全除去。我們所研究的機誤乃是指任何測驗中之測驗錯誤上理論的中數。(看十七章)

測驗錯誤對於相關的可靠係數的影響，是很容易看出的。我們先假設某種測驗的兩種形式所測驗的能力是完全相關。我們再假設第64圖的相|圖表明64人在兩種形式測驗眞正分數的完全相關。

圖六四



我們現在假設測驗的錯誤，16個人得眞正分數80的，在每種測驗，其散佈情形如61圖 A，(見十八章)，32個人得眞正分數70的，在每種測驗，散佈情形如61圖 B，16個人得分數60者，其散佈情形如 C。

如是則相關圖的結果當然如61圖D所示者，其相關為.50。

所以我們可看出測驗的錯誤是怎樣3，其分數散佈如第61圖A，B，C所示者，將相關1.00減少為.50如第64圖所表示的。

特效（Validity） 一種測驗要做為"標準"測驗，有兩個要點必須注意。一個是關於可靠性，一個是關於所謂特效。

所謂測驗的可靠性者，是測量這個測驗對於所測驗的一致之程度，所謂測驗的特效者，是測量這個測驗所要達到的程度。

所以我們可編造一種測驗而稱爲外國語預占測驗，其意卽用以預占學生研究外國語是否有成。我們已經討論過這種形式的測驗，題爲"相關與預占"在第十七章，測驗的特效，卽實際預占研究一種外國語成就的程度。

現在可以看出一種測驗對於幾種能力可以成爲很可靠的測驗，例如，按照語言學，學習外國文字的能力，雖然這種能力在學習外國語中不十分重要，但於預占成績上，也許有很多的幫助。這就是說，"預占測驗"的可靠係數爲.80，而學習語言實際繼續的成績其相關僅爲.50。係數.80是可靠性的測驗。係數.50是特效的測驗。

相關係數的機誤　我們對同組的學生，施以兩種測驗，根據材料求其相關係數，我們所求兩種測驗分數相關的程度，只限於這些學生，而已。如果我們另取一組學生以與第一組愈能類似愈佳，或同在一樣環境之下，用同樣測驗，測量同組學生，則所得係數仍有細微之相差。實際上，我們可繼續取一組新學生或將測驗反覆一次，縱然各組或各種環境，在各方面極能相似，但係數仍有點小變化，和一個人分數在一種測驗所變化的一樣。所以國家智力測驗與軍隊智力考試甲種的相關係數，在9組100個未選擇的成人中爲.80.83.79.78.81.84.76.73與.87。其中數爲.80，從中數所得的中數差爲.03。

.03價値對於係數的變異是重要的，因爲是表明係數的一半，是在中點係數(Median coefficient)的.03以內。如果我們以兩種測驗試100個未選擇的成人中兩種測驗最可信的相關係數。這可和所有各個人在一個團體中所得的相關係數是相等的。

所以任何係數從中數所得的差數，可視爲有錯誤的係數，而這些差數的中數，也是係數的中數錯誤。

現在我們當然不能求出這種中數的錯誤，因爲我們沒有大數目的係數，但是在任何簡單的係數及係數所根據次數的數目中，有一公式可藉此以求中數錯誤的最可能的價值。這種中數錯誤最可能價值，叫做由於取樣之係數的機誤；就是說，因沒有各種可能的次數。

求係數機誤的公式 從係數價值求係數(r)機誤(P.E.r)的公式如下：

$$P.E.r = .6745\frac{1-r^2}{\sqrt{N}}$$，(公式26，求相關係數的機誤)

求係數的機誤是從1.00減去係數的平方，所餘之數以次數的平方根除之，而以.6745乘其商數。

由此看出N價值(一組的人數)發現於公式中。求係數的次數數目增加時，如個人用同一方法選擇，則對於係數的分量並無增減，但次數數目增加，則對於係數的可靠性，確有增加。這個公式是表明機誤對於次數的數目平方根成反比例；就是如以100乘次數的數目，則P.E.必多$\frac{1}{10}$。

設r=.80，N=100，以上面公式求其P.E.r

$$P.E.r = .6745\frac{1-r^2}{\sqrt{100}} = .6745\cdot\frac{.36}{10} = .024$$

我們求出九個假設係數之分配上的中數差爲.03，而大多數同樣所得係數之中數差的理論價值，從九個中第一個計算者則爲.024。換句話說，係數.80的機誤，根據從100個次數者爲.024，這個所解釋的意義，卽設機遇是均等的，在.024以內，這個係數是正確的；就是介乎.776與.824之間。在這樣情

形中，我們常說係數是.80±.024(.80加或減.024)。如果係數說是.50±.05，就是說係數爲.50，機誤爲.05。

用俄提斯相關圖所求出的相關係數怎樣求機誤

在俄提斯相關圖有求係數機誤的方法。這只是以下面的公式解答而已。

$$P.E._r = .67\frac{1-r^2}{\sqrt{N}}。$$

其步驟如下：(1)將係數平方，(2)與1相減，(3)求N(次數)的平方根，(4)以(3)的結果除(2)的結果，(5)以.67(或.6745亦可)乘其商數。

練習52： 求練習43所得相關係數的機誤。如練習43是用俄提斯相關圖，則應用其空餘的地位。

係數機誤的要義　假設我們要知道兩種預占測驗，那一種是預占一個學生學習外國語課程在何種年級較好的方法。假定分數與年級的相關，在這一種測驗是.50，而在其他一種測驗是.55。我們是否可以毫無疑義的說，第二種是較佳的預占測驗呢？

這就要看係數的機誤了。假設每種人數是100，則兩種係數的機誤怎樣比較其差異？

在$r=.50$，$N=100$時，其$P.E._r$爲.051，在$r=.55$ $N=100$，則$P.E._r$爲.047。所以我們看出係數間的差異不比機誤來的大，用此不能說第二種測驗比第一種所預占的是較爲好些。兩個係數的平均數，每種根據於100個次數，可以假定和一種係數根據於200個次數是一樣的正確。

差數的機誤　我們可進一步不僅以兩種係數和其機誤比較其差異。我們並能求係數間差數的機誤。這和求係數的機誤完全相似。如果我們得很多組的係數，則這種係數是第一種測驗和第二種測驗同樣差異之分

配上中數差的最近似價值。

不相關數量之差數❸的機誤，由於兩種數量(在比例爲係數)的機誤而定其式如下：

$$\text{P.E.}(\text{兩數量的差數})=\sqrt{\text{P.E.}^2(\text{第一數量})+\text{P.E.}^2(\text{第二數量})}$$

(公式27，求不相關數量之差數的機誤)

以前面係數的機誤代入此式，則爲，

$$\text{P.E.}(\text{兩係數的差數})=\sqrt{.051^2+.047^2}=.069。$$

所以我們看出兩種係數的差異，是兩種差數較小的機誤。故一對一的機遇甚少，兩種係數的差異完全是偶然的。所以我們對於這種差異，不能認爲十分重要而解釋此種測驗比彼種測驗的預占較爲好些。

平均數與標準差的機誤　假設我們要求六年級在斯丹福教育測驗的常模。假設眞正常模在全國中爲所有六年級學生的平均分數；所以我們儘能力所及以測驗，並假設所測驗之一組足以代表六年級學生全體數目。我們再假設1000 個六年級學生的平均分數和所有六年級的平均分數十分接近，好像可做代表的選擇一樣。我們又假設1000個學生分數的差異亦和六年級全體數目十分相近。有許多公式，可示吾人以"近似的"數目，蓋在一定的團體中所得的均數或標準差，和在全體中所得的，稍有差異，這是因任

❸差數的標準差公式27求不相關量數之差數的機誤，是從下面較普通的公式而來：

$$\sigma x-y=\sqrt{\sigma^2x+\sigma^2y-2rxy\sigma x\sigma y}\ ,$$

在此公式內，σx與σy爲任何兩個變量x與y之分配的標準差，無論其相關或不相關是x－y之分配的標準差，爲二者之差數。

x與y量數不相關時，則 $rxy=0$而公式變爲$\sigma x-y=\sqrt{\sigma^2x+\sigma^2y}$，公式27，即直接從此式而準。

像這種情形的係數當然自身是不相關的；公式27亦是如此。

意取樣的緣故——就是因爲一組的一部分和全體的集中趨勢與差異，有相差的趨勢。

當然，如果次數選擇不是有代表性質的根據，則所選擇的團體之均數，和全體的均數，有進一步的差異。例如，從某地所選擇的六年級一組的平均分數和所有六年級均數相差有多少，這是無從說起的。這種討論，只有因“任意取樣”的差異可以研究。

因任意取樣之分配的均數機誤，其公式如下：

$$P.E.(\text{分配的均數})=\frac{.6745\times(\text{分配的標準差})}{\sqrt{\text{次數數目}}}$$

$$\text{或}P.E.(\text{均數})=\frac{.6745\sigma}{\sqrt{N}}\text{（公式28，求均數的機誤）}$$

因任意取樣之分配的標準差誤，其公式如下：

$$P.E.(\text{分配的標準差})=\frac{.6745\times(\text{分配的標準差})}{\sqrt{\text{次數數目}}}$$

$$\text{或}P.E.\sigma=\frac{.6745\sigma}{\sqrt{N}}\text{（公式29求標準差的機誤）}$$

分析相關與複相關之係數的機誤　分析相關或複相關的係數機誤，與普通係數之機誤對於係數與次數有同一之關係就是：

$$P.E.(r_{12\cdot3})=.6745\frac{1-r^2_{12\cdot3}}{\sqrt{N}}\text{（公式30，求分析相關係數的機誤）}$$

$$\text{及}P.E.r_{c.12}=.6745\frac{1-r^2_{c.12}}{\sqrt{N}}\text{（公式31，求複相關係數的機誤）}$$

相關係數減弱的機誤冗長而繁複，讀者很難有機會以應用之。此可參考

寇萊的統計法(Kelley's statistical Method)書中第209頁。

平均數的可靠性　如果一種測驗的可靠係數，對於一種分不能十分確定其可靠，則可對於一個人，個別與以兩種或兩種以上形式的驗，而平均其分數。此可用公式預先決定可靠係數，這種可靠係數可在求種形式測驗的平均分數與其他兩種形式測驗的平均分數的相關以得之，用任何形式的測驗的平均分數之可靠係數亦可。這個公式大家都知道的，巴庸的公式("Brown's formula")但寇萊[註]指出這個公式，不過是司畢在求一組測驗分數的總數，和其他一組測驗分數總數相關在特殊情形中公式。

如果我們以 raa代表a種測驗平均分數和其他同樣a種的相關，$r_{1\cdot 1}$ 代一種測驗和其他同樣一種測驗，則

$$raa=\frac{ar_{1\cdot 1}}{1+(a-1)r_{1\cdot 1}}$$ (公式32，求a種形式測驗平均分數和a種其他樣形式的相關係數)

在特殊情形中，我們要求兩種形式測驗平均分數，和其他兩種形式平分數的相關，我們只須以2代替a於上面公式中，其公式爲

$$R_{2\cdot 2}=\frac{2r_{1\cdot 1}}{1+r_{1\cdot 1}}$$ (公式33，求兩種形式的測驗平均分數與其他兩種同樣式平均分數的相關)

問題：假設有一測驗的可靠係數於此，第一種形式和其他一種形式其相關爲.50。求其可靠係數($r_{2\cdot 2}$)，這種係數可從兩種形式的測驗平均分和其他兩種形式的相關中得之。

[註]統計法，205頁。

解答： 以.50代替公式33中之$r_{1\cdot1}$

$$r_{2\cdot2}=\frac{2\times .50}{1+.50}=\frac{1}{1.50}=.66\tfrac{2}{3}$$

從此可看出將兩種測驗平均，我們可提高係數從.50到.66$\tfrac{2}{3}$。

問題： 如平均分數爲三種形式，則可靠係數是如何？

解答： 在這種情形，$r_{1\cdot1}=.50$和以前一樣，公式33中之$a=3$。以這些價值代入公式32，

$$r_{3\cdot3}=\frac{3+.50}{1+2+.50}=\frac{1.50}{2}=.75$$

這表明如平均分數是從三種形式的測驗而來，則可靠係數從.50提高到.75。

練習53： 在一種形式的測驗，其可靠係數爲.60時，求兩種，三種，四種形式的測驗平均分數之可靠係數；再求其爲.70；爲.80時的可靠係數。

練習的效力 一個人在一種測驗中分數的差異，其中有一原因，如不嚴格的歸作不可靠的來源，則仍須予以考慮。例如我們通常發現，如果一個學生在予以第一種形式測驗短時間以後，而給以選擇形式的測驗，雖兩種測驗形式，爲同等的困難，然能得較優的分數。的確，如果許多學生先做A種測驗，然後再做B種測驗，大多數所做的成績，B種必優於A種；要是另一組先做B種，後做A種，則A種成績，大多數優於B種。

這種所得的分數很顯明的不能歸諸各種測驗形式難度的差異。其在第二種形式的測驗所得成績或趨勢，大半是因學生在做第二次測驗時對於測驗已較爲熟悉的緣故。所以做過一次測驗後，學生覺較爲熟悉，預先了解做法並做的較快；並且在一種新環境裏，少受擾亂思想的束縛。

這些原因,無論其爲何種,可歸併爲練習的效力。(Practice effect)之關係。不過練習的效力是限於某種情形中之某種測驗,這是很要知道的。

在一定距離的時間以後,求某種練習效力的分量,其通常的程序如下:對於甲組學生,先給以A種測驗,再給以B種測驗;對於乙組學生,先以B種測驗,再給以A種測驗;乙組學生能力與甲組學生能力,十分相近。求每組每種測驗的中數分數。比較第一組兩種形式的中數,以覘其第二次所給予測驗的中數是否比第一次所給予測驗的中數高些。第二組的中數亦照同樣方法做一次。如果測驗的形式是同等的困難,則兩組中所得的第一個中數比第二個中數必爲一樣;但如各種測驗形式有難度的不同,則這一組所得者可比那一組爲大,在這樣情形之中,則求兩種得數的平均數。用此方法,則除去各種測驗形式難度差異的效力,其第二次所給予測驗的中數分數,超過第一次所給予測驗的中數分數之平均數目,可視爲經過相當時之練習效力。

一種測驗練習的效力,可爲任何數目,自零或10或12或12以上,視測驗情形而定。有幾種測驗,其練習的效力較在其他幾種測驗中更爲顯著。測驗上的說明,須解釋練習的效力,以便平均一個學生兩種測驗形式分數,再與常模比較時而加以注想。例如,有一個學生先作A種測驗,得分數20,次做B種測驗,得分數24,在這種情形下,測驗練習的效力爲4點,如此則不能求20與24兩種分數的平均數而與常模相比較,或與其他學生第一種分數相比較,因爲常模是根據於第一種分數,其中沒有練習的效力。如果要將一個學生在兩種測驗的平均分數和常模比較,或和其他學生第一種分數常模相比較,則須從第二種(24)減去4點(練習的效力),然後再求兩種分數的平均數,這兩種分數皆直接和第一種分數相比較。換句話說,要將一個人兩種分數的平均數和常模相比較,則影響於第二種分數的練習效力要首先除去,即

從第二種分數減去練習效力的點數，然後再平均兩種分數。

問題： 你以爲圓滿的可靠係數是什麼？

第二十一章　分級與分組

所要研究的問題——根據智力重行分級——成績測驗的需要——以計算紙分級——以百分比曲線分級——較和緩分級的方法——在各年級內分組——聰明、中等、和愚笨的部分——各種課程的需要——三軌制——詮釋圖——詮釋圖的便利——三軌制的分組——聰明、中等、愚笨各組的分級——分組的活動性——在分級與分組時研究教師的分數——怎樣研究教師的分數——等級量尺——"五點"的量尺

所要研究的問題　智力測驗和教育測驗要用以達到何種所預定的主要目的，這一層似乎沒有普通的了解——即是爲教學目的上，關於學生的分級與分組問題，如何教授學生使其時間與精力最有效而最經濟，以及如何使教師的時間與精力能最有效力而最經濟。所以這最末一章專論分級與分組所根據的幾種普通原則。

在前數十年，我們從應用智力測驗上所得到最重要的事實，即是學生學習的能力差異甚大，而我們的學校，在以往的組織上，和辦法上，發見在任何學校的學生，同級之中，其學習能力差異極大。我們看出這種學習能力極大的差異，使教師的工作，感受很大的困難，並減少教學的效力。

這是因教師普通在教學上，只能適應中等能力以上的學生，於是所餘下

的兩組學生，教師的教學方法，多少就有些不能適合了。這些學生一種是覺得功課太容易，不需教師對於中等學生的許多解釋，他們就能明瞭，所以他們不但是濫費很多時間來聽不需要的解釋，並養成偷惰的習慣，其成績亦未達到其能力所達到的完全數量。

還有一組學生覺得功課太難，除對中等學生所需要的解釋以外，如再不加以解釋和練習，他們就不能了解。其結果是教師或費額外的時間，重複解釋，濫費中等和優等學生的時間，或者使這些學生對於功課，未能完全明瞭。在這樣情形中，他們不但逐漸落後，並且要成爲沒有勇氣的人，漸以爲自己是失敗者。

於此問題就發生了，就是學生覺得他們級中的功課太容易，爲什麼還要他們在這一級裏，爲什麼其他學生升到別的級裏，功課又太難。我們先來研究頭一部分的問題。如果普通學生進步的常率，是每年升一級，而聰明的學生進步較快，亦只每年升一級，則時間上就有遲早之不同。例如，聰明學生已經做到六年級常態學生的成績，並對於所有六年級的功課做的很好，而他還在五年級裏。這個學生所以不放在六年級的原因，或者因教師不了解這些事實，或者以爲把他放在六年級，則少學了許多重要的教材，或者因爲要紊亂學校的慣例，而要做這種適應的事情。

關於遲鈍的學生升級後覺得功課太難的緣故——此或者因爲教師不明瞭同樣年齡的學生，在智力上是怎樣的差異。教師或者以爲這個學生是懶惰的，而不能做這一級的功課。

每一學校校長的責任第一要知道他的學校關於各年級學生能力差異的情形，然後再將學生分級，研究做的有無錯誤，並應了解，學校的慣例，在適應學生能力的各種教學上，是不能存在的。

第46表，表明一個學校的學生以教育測驗所得之成績差異的情形。在此表中可看出四年級乙組有幾個學生成績，比八年級甲組幾個學生好，每年級成績的全距離，比最低級和最高級中數的差異大。

表四六 表明某學校各年級每級的成績分配(用俄提斯分組測驗第一部甲種與乙種所得的平均分數)

分數	年							級
	4乙	5甲	5乙	6甲	6乙	7甲	7乙	8甲
90——94				1	1			
85——89				0	0	1	1	1
80——84				0	3	1	0	0
75——79				3	2	1	1	3
70——74				4	2	4	6	11
65——69			1	8	2	5	8	3
60——64			3	2	8	7	5	8
55——59	1	2	8	4	7	4	5	8
50——54	1	3	6	7	7	7	3	1
45——49	2	9	12	5	4	2	2	0
40——44	6	4	8	3	0	1	2	2
35——39	6	8	1	2	0			
30——34	8	5	0		0			
25——29	7	2	3		1			
20——24	3	1	1		1			
15——19	0	0						
10——14	1	1						

表47表明同一學校各年級智力更大的差異

表四七 表明某學校各年級每級的智力分配(用俄提斯分組測驗第二部

甲種與乙種所得的平均分數）

分數	年級							
	4乙	5甲	5乙	6甲	6乙	7甲	7乙	8甲
70——74								1
65　69				4	2	2	3	2
60　64			1	0	5	4	4	7
55　59	1		4	9	7	5	8	7
50　54	0	2	5	6	5	7	6	6
45　49	2	4	5	5	6	6	4	2
40　44	1	5	8	4	2	1	4	4
35——39	7	4	3	5	4	4	0	1
30　34	2	4	6	1	4	3	1	
25——29	5	7	6	4	1	0	0	
20——24	6	4	2	1	0	1	1	
15——19	6	4	2	1	0			
10——14	5	0	1		1			
5——9		1			1			

在此表內，可看出四年級乙組中有一個學生在智力測驗所得的平均分數，在八年級乙組中數以上，七年級乙組中，有一個學生所得的分數，在四年級乙組中數以下。像這樣學校的情形，教師感受教學的困難，覺得驚異嗎？然而在未有根據標準測驗重行編製以前，這正是大多數學校所有的現象。

根據智力重行分級　上表46與47的情形，最近根據智力測驗，已有救濟了。例如，一個學校，要重行分級，通常施以智力測驗，如用國家智力測驗之類。倘五年級有一個學生，其智力表示在六年級常態以上，則這個學生認為是特別升入六年級的候補者。

成績測驗的需要　學生的實際分級做過以後，校長就要研究

教師的判斷，以測驗學生的分數是否爲其對於學校功課之能力上眞正的表現。自此以後，教師與校長逐漸明了除用智力測驗材料外，還需要其他資料。除了解決定適合各級學生教材的性質和分量之智力以外，還要知道其他許多因素。這許多因素是興趣，努力，健康，以前教學的性質等。這些因素在測驗實驗的成績中，均能影響其分數。因此理由，所以教育測驗應與智力測驗並用，以達到分級與分組的目的。

俄提斯分組測驗（Otis classification test）的編造，就是應這種需要。應用這個測驗只需將學生在俄提斯分組測驗內所包含的智力測驗所得的分數和教育測驗分數相加，而稱其總分數爲分組的分數。如以2除之，其結果當然爲智力分數和成績分數的平均數。兩種測驗分數的分配，十分相似時，求平均分數並不需將一種分數移轉爲他種分數。然此無需以2除之而求其得數，因分組分數中，已有常模在焉。總分數不動，只去其小數而已。

浮芒（Vermont）學校自三年級到九年級525個學生的分組分數分配見48表。

於此我們看出各年級學生能力通常重疊，這種情形每校中皆可看出，而對於分級上未能予以特別注意，使各組程度齊一。爲什麽得分數160或160以上的學生，其智力和實際成績，按照俄提斯分組測驗的總分數，已超過八年級或九年級任何學生的分數，仍然放在七年級？同樣，如果四年級的學生得分90或90以上，其智力和五年級任何學生一樣，能讀，能拚字，能應用語言，知道地理，歷史等和五年級的學生一樣多，並能解答和五年級任何學生同樣困難的算術題，爲什麽把他放在四年級，犧牲他的時間？

假使我們在一年的中間，要把這七個年級的學生重行分級，以使各級的程度更加齊一，則理論與實際兩方面，當然須加以研究。我們先研究理論方

面的問題，然後再及於實際部分。

表四八 表明一個學校各年級用伲提斯分組測驗（甲種與乙種的平均）所得全體分數的分配。

分數	年級 3	4	5	6	7	8	9	總數
160——169					1			1
150——159						1	2	3
140——149					2	7	15	24
130——139					3	8	13	24
120——129					8	10	17	35
110——119				3	12	16	10	41
100——109				4	11	5	7	30
90——99		1	3	8	9	13	2	36
80——89		1	2	9	11	5	1	29
70——79		2	13	14	3	3		35
60——69		3	15	18	7	2		45
50——59		5	13	13	2			33
40——49	2	12	20	7	0			41
30——39	6	28	6	1	1			42
20——29	15	15	7	2				39
10——19	33	7	1					41
0——9	24	2						26
總數	80	76	80	79	73	70	67	525

以計算紙分級　如果學生在各年級上可自由升降，則使每級學生在智力——教育的能力上（猶如我們在伲提斯分組測驗上稱爲總分數一樣）完全一致，這是一件簡單的事。例如，有一個方法，就是把525張分數紙排

成次序，最低的分數放在下面，最高的分數放在上面。如果我們要每級爲同樣的數目，可以7除525，每年級得75個學生，從頭上起，以75張分數紙爲一類，作爲第九年級學生，再以75張分數紙爲一類作爲第八年級學生，餘如此類推。像這樣分級，則分數的分配如第49表。

表四九 表明3年級到9年級各組學生理論的均齊，結果是根據於分數的重行分組，不管學生編配的數量。

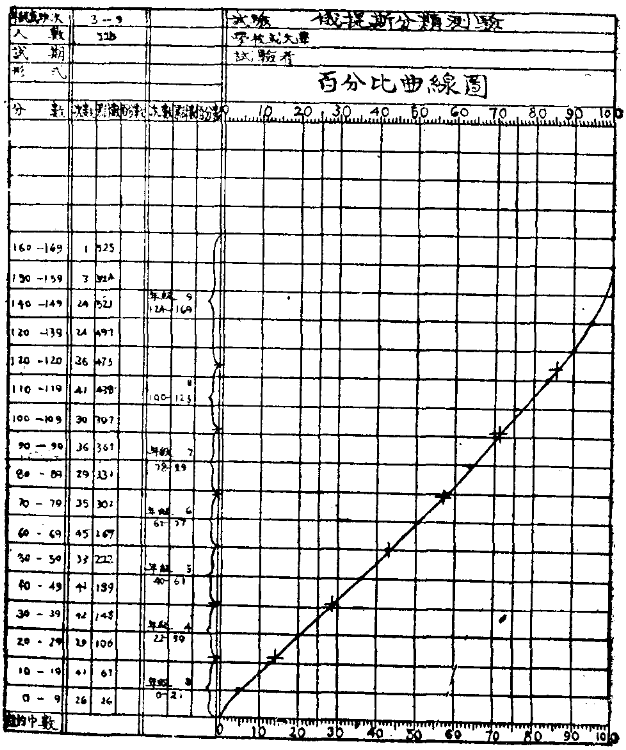
分數	年級 3	4	5	6	7	8	9	總數
160——169							1	1
150——159							3	3
140——149							24	24
130——139							24	24
120——129						12	23	35
110——119						41		41
100——109					8	22		30
90——99					36			36
80——89					29			29
70——79				33	2			35
60——69			3	42				45
50——59			33					33
40——49		2	39					41
30——39		42						42
20——29	8	31						39
10——19	41							41
0——9	26							26
總數	75	75	75	75	75	75	75	526

以百分比曲綫分級　在第48表求出525個學生分數分配後，則有一方法分這些學生為程度相同的各組，不需排列分成七組然後按照現有各數再行歸類。

這個方法就只是做一個百分比曲線，以代表全分配，如第65圖所示者。用量尺圖A (Scale Chart) 上的量尺70，將此曲線橫分為七等份，如圖所示者。於是我們立刻就得出每一新的年級之分數全距離。如圖所示者。

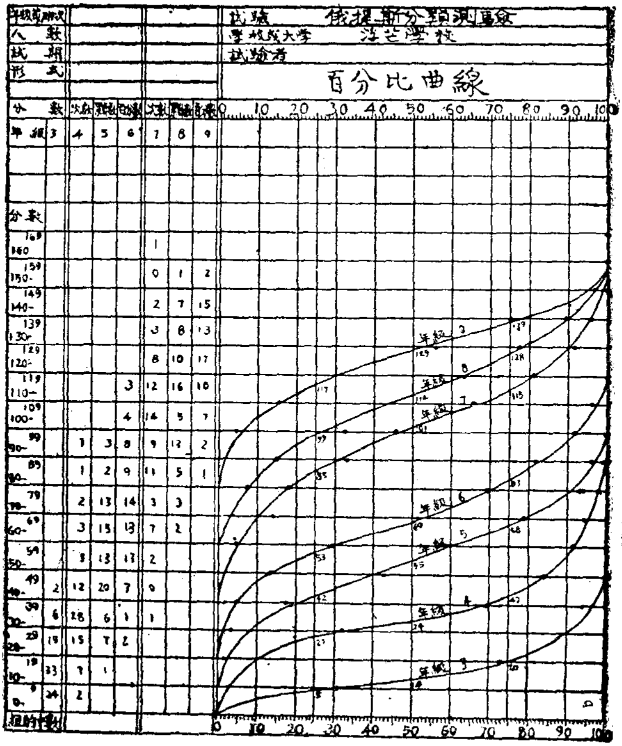
既求出每一新年級分數的全距離，我們就可細查計算紙的情形，或各班記錄表 (Class Record) 上，查出學生的姓名，而按照他的分數立刻指定適當的年級。

圖六五　表明用百分比曲線分級的方法



較和緩分級的方法　以上所說的分級方法，當然是劇烈的，並非說是革命的。這許多方法，證明出我們所要達到的各級均齊目的，但把所有的學級立時分好則不免有從一個學級到三個學級的升降，所以還是逐漸做的好。例如我們先決定只升得分數在中數以上的學生，或只升一級中得上百分之二十五分數的人，同樣，降級的人，只降得分數在中數以下的，或只降一級中得下百分之二十五分數的人。

圖六六　表明浮芒學校 3 年級到 9 年級在俄提斯分組測驗分數分配之百分比曲線



在這樣情形，我們很可以繪百分比曲線，代表七個年級單獨分數的分配，如第66圖所示者。如果我們應用中數，我們可只升得分數超過4年級中數34者，從3年級升到4年級；從4年級升到5年級，只升得分數超過55者，餘類推。在這樣情形，我們要把學生從4年級降到3年級，是降得分數在3年級中數14分以下者，餘類推。

如果我們再要守舊些，如上面所暗示的意思，則4年級升到5年級，可只升得超過5年級上二十五分點分數68的人，同樣，從5年級降到4年級，只降得低於4年級下二十五分點分數27的人，餘如此類推。每年照這樣手續做過一次，就智力和成績方面而言，可逐漸使各組程度變爲均齊。

在各年級內分組　我們以前所討論的，並未注意到學生的年齡。如果我們將525個學生重行分組，俾能從智力與成績的觀點上得到各組最均齊的程度，如第49表所示者，我們仍須在每級中，求出年齡的全距離，如第50表所示者。

表五十　表明俄提斯分組測驗，分某種組距之各學生年齡分配。

年級	分數組距	年齡 8—8:11	9—9:11	10—10:11	11—11:11	12—12:11	13—13:11	14—14:11	15—15:11	16—16:11	17—17:11	總數
9	124——169			1	3	13	29	17	10	2		75
8	102——123		1	0	10	16	25	13	8	2		75
7	78——101		1	10	12	13	14	12	7	3	3	75
6	62—— 77	1	5	14	21	19	6	6	2	1		75
5	40—— 61	6	6	20	16	17	6	3	1			75
4	22 —— 39	60	20	18	13	10	5	1	2			75
3	0—— 21	24	19	16	7	5	3	0	1			75

在簡單的學級內，年齡像這樣差異，普通認爲不是好的方法。15歲年齡的學生，因其智力的幼稚，和對於學校功課的遲鈍，把他歸入3年級，使與8，9，10歲的學生在一級，實在很不合宜。同樣，把9歲的兒童和大多數青年學生，放在同一級裏，縱然他的智力與學識和他們相等，也覺不甚相宜。

因此理由，通常在一級中分組所用的方法，是把年輕聰明的學生放在一班，而把年長的愚笨的放在另一班。如果在一級中能分三組，則以一級中三分之一的年輕聰明的，歸爲一組，三分之一的年長愚笨的歸爲另一組，其餘三分之一的中等的再作一組。或者以聰明與愚笨的兩組，使每組占全級的四分之一，其餘中等的占二分之一。

聰明、中等、和愚笨的部分 我們所應用的"年輕的，聰明的學生"和"年長的，愚笨的學生"這個意思，大概已知道了。此處所用的"聰明"這個名詞，其意指智力和教育兩方面超過一個人的年齡而言。在一組的學生中，其智力相同，則年齡愈輕者愈聰明，愈大者愈愚笨，這是很顯明的。一級的學生，其智力差不多爲同樣程度時，如第49與50表所示分級的情形，無論其爲根據於年齡劃分，或根據於分組指數，[Classification Index (C.I)]（和俄提斯分組測驗並用的一種測驗，其性質爲智力商數和教育商數的平均）其差異甚小。

譬如一級中有75個學生可分爲三組，最小的25個人在一組，最大的25個人在另一組，其餘的25個人再作一組。然而這種分法，通常亦有以三分之一以上者（譬如說30人）作爲聰明的部分，以三分之一以下的（譬如說20人）作爲愚笨的部分，因爲教師感覺愚笨學生較難教授，像這樣排列，則"教授的負担"平均了。下面第51表爲用這種方法把525個學生分組的結果。

表五一　表明根據年齡用分組方法將學生分為聰明、中等、愚笨三部分（每種包含30，25與20個學生）

年級	分數組距	組別	8—8:11	9—9:11	10—10:11	11—11:11	12—12:11	13—13:11	14—14:11	15—15:11	16—16:11	17—17:11	總數
9	124——169	聰			1	3	13	13					30
		中						16	9				25
		愚							8	10	2		20
8	100——123	聰		1		10	16	3					30
		中						22	3				25
		愚							10	8	2		20
7	78——99	聰		1	10	12	7						30
		中					6	14	5				25
		愚							7	7	3	3	20
6	62——77	聰	1	5	14	10							30
		中				11	14						25
		愚					5	6	6	2	1		20
5	40——61	聰	6	6	18								30
		中			2	18	5						25
		愚					10	6	3	1			20
4	22——39	聰	6	20	4								30
		中			14	11							25
		愚				2	10	5	1	2			20
3	0——21	聰	24	6									30
		中		13	12								25
		愚			4	7	5	3	0	1			20

像上面所說的，如果我們願意，可以根據分組指數來分組，把上面的第三部分，放在聰明部分，作爲最高的分組指數，把下面的第三部分，放在愚笨部分，作爲最低的分組指數。

各種課程的需要 像第51表所表示的，將學生在一級中分爲聰明，中等，愚笨幾部分，就教學的便利方面言，一個學校的組織，已經理想化了。中等的部分當然是最整齊的，但其餘的，亦相差不遠。

然而有一件事，我們要牢記的，就是3年級的三組不要和其餘的六個學年，靠的太近。在四個學年之中，其中等的部分，或能分到7年級。但是聰明的一組，除被抑制外，至少要在8年級，並且有幾人在9年級。無論如何，這些學生必達到智力的限度，及各年級常態兒童的成績。

同樣，愚笨的一組在四年之中，不能達到7年級，除非出乎其能力與成績以外而升級。例如，15歲學生在3年級，縱然他到學校沒有一定的時間，決不能超過5年級以外，而在3年級的三個兒童，其年齡爲13歲，在四年以內不能讀完5年級課程。

基此理由，在各方面看起來，對於聰明兒童，多予以各種課程，從常態兒童所規定學習的起，俾能於七年或六年以內做完全八年級的功課，或補充其他更豐富的課程，這似乎是好些，同樣，對於愚笨兒童在八年以內，僅學到前六年級或七年級的功課，或僅學到"最低限度"爲止。

三軌制 如有三軌制的需要，則可使聰明，中等，愚笨的學生，依據幾種根據使之分組，然後再重行分級，而使這三組學生學習三種課程。這種計劃，就叫做三軌制(Three-track Plan)這像分類，當然不是嚴格的，學生可自由從這一組移到那一組，只要有相當理由。要是想避免"聰明"，"中等"，"愚笨"的名詞，可稱這三組爲A，B，C，或X，Y，Z，亦可。

還種分組不能根據年齡來分，這是很顯明的，猶如一組學生，大約為同樣的智力情形一樣，因為11歲的學生，如在3年級可歸入“愚笨”一組，如在8年級可歸入“聰明”一組。所以要根據聰明的測驗如智力商數（IQ)之類。但分組指數(CI)要比智力商數好些，因為分組指數注意到智力與教育的兩種升降。

詮釋圖　求一個學生分組指數最簡便的方法，就是用俄提斯分組測驗的詮釋圖(Interpretation Chart)如第67圖㊀。例如在67圖最上面的一點是表明某一學生，其年齡為11歲，○月，在俄提斯分組測驗所得的分數為162。這一點在曲線上表出148，此卽表明這個學生的分組指數約為148。（此層前已解釋，和智力商數所代表之248為同等的聰明不過分組指數注意到實際成績及智力）。所以求一個學生的分組指數，只要在詮釋圖縱行上繪一點代表其年齡，在橫行上畫一點代表其分數㊁，而找出此點在曲線上所指的數目。這個數目就是學生的分組指數。如此點在曲線的中間，則分組指數，可以估計求之。

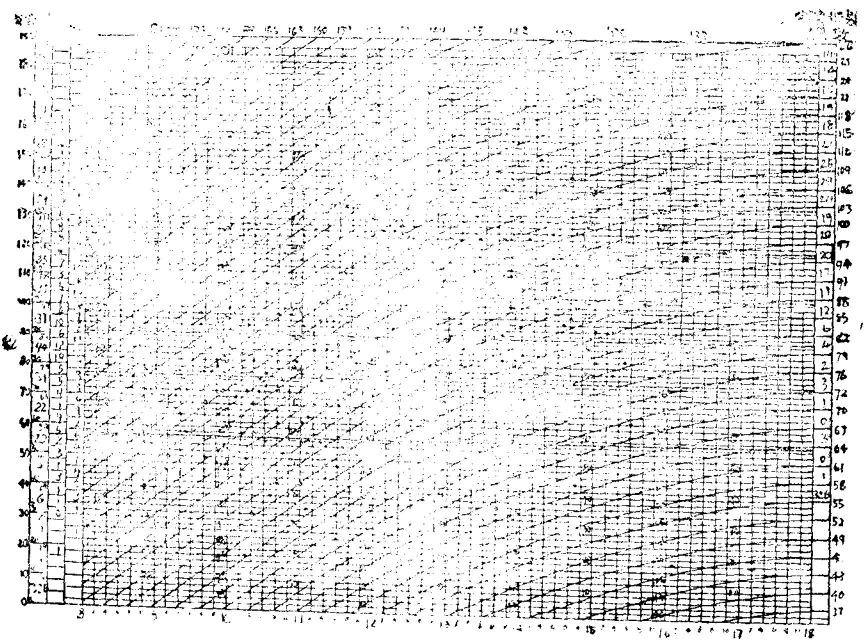
詮釋圖的便利　詮釋圖的價值，就是如果圖上的一點實際繪出以後，就可求出每個學生的分組指數(CI)，此圖做成時，則對於學校實在情形，瞭如指掌，而求分組指數的分配，只需於幾分鐘以內計算每對曲線間的各小點而已。分組指數，分配於圖的右上方。

圖內各點如能細心研究，確含有很多的意義。圖內各點，使你明瞭各種年齡兒童，在智力教育聯合的能力方面，怎樣的差異，以及任何一級的智力教育的能力、在年齡方面，又是怎樣的差異。

㊀從俄提斯分組測驗說明書28頁產生出來的。

㊁月份的奇數，當然在縱行的中間，如分數為奇數，則將此點繪在代表偶數分數下的一行，因為這兩根線是很接近的。

圖六七 俄提斯分組測驗詮釋圖(實際大小,長寬爲10與14吋)



譬如11歲和12歲學生,其所得分數的差異,從24到162。而得分數90與99的學生,其年齡的不同,自9歲4個月至15歲7個月。我們已有一表,表明各組分數之年齡的分配,(表50)但是沒有詮釋圖,則製此表需要計分,分配,計算等手續,且不能得分組指數。以求分組指數做爲副產品而言,則從詮釋圖看起來,這些分配的普通性質是很顯明的。

三軌制的分組 如上面所說的,我們可以計算每對接近的曲線各點,以求分組指數的分配。做這種手續最好計算靠近下面曲綫的各點,而不要計算靠近上面曲線的各點。分組指數可歸類如下:

100 — 102,103 — 105,等。

既求出分組指數的分配,如第67圖以後,我們就可選擇分組指數的各

組，將學生分爲X，Y，Z三組。最好不以分組指數上三分之一做爲X組，以下三分之一做爲Z組，可以上四分之一和下四分之一做爲X，與Z兩組，以其餘全校的一半歸爲Y組。

假設我們選用四分之一——二分之一——四分之一制。則525的四分之一的爲131。自上向下數，則上131的分組指數，在106—108組中包含32個中的10個；所以我們可決定凡學生得分組指數108或108以上者，應歸於X組，其得得分組指數107或106者歸入Y組。再自下向上數，則求出下131的分組指數在85——87一組，包含31個中的6個；所以我們使得分組指數86者歸入Z組。其餘約有263個學生歸入Y組。

聰明、中等、愚笨各組的分級　這三組中的每組學生，可爲各級。263個學生，或組成中等組的學生可分爲7級，每級37人。這種分法，可按照分數次序排列，各學生的分組指數，自85至108在紙上分爲七類。這些學生可組成中等組的3級到9級，我們可稱爲重要的一部。

得109或109以上的分組指數之130個學生，可根據其分數歸入任何適宜的各級，我們可稱爲在上的一部。這些學生可予以豐富的課程，或使其所學一級的功課不到一年卽可學了。

同樣，得分數指數在85以下的130個學生，可根據其分數，分爲適宜之年級，我們可稱爲在下的一部。這些學生只予以最低限度的課程，或使其在一年之內，學習不到一年的功課。

三軌制的好處，就是愚笨的學生對於尋常一學年的功課，可依其所需要之時間，把功課學完；或者換一個方法學習，使以最便利的方法學習，使以最便利的方法，學習尋常一學年的功課，下學年仍可繼續學習，而不管中等學生學至何種程度。同樣，聰明的兒童能以其最快的速度，在一年中向前學習，

以至於下學年的功課而不管中等學生學至何種程度。

分組的活動性　前面已經說過，學生能分爲X，Y與Z三組，然却不可認爲這是最後的，或是永久的；而且無論何時，一個學生最好能有升降。這種目的，無非使有三種不同的速率，俾學生能在三種不同速度中進展，以便各種能力不同的學生，能有較好的適合，使每種學生有最適宜的課程——就是，費最少的時間，生最高的興趣與努力，而得最大的利益。

在分級與分組時研究教師的分數　關於上面所討論的分級和分組中，當將學生分級或分組時，還未提及研究教師的分數以及學生在智力和成績的分數。我們不能說，爲什麼教師的分數，在這種情形中，不應注意；的確，在可能範圍內，應當注意教師的分數，因爲適宜的教師對於兒童能力的判斷，常增加僅憑測驗所得的知識之價值。各種個人的特質，每不能以測驗測量者，而影響兒童在校成就的能力。

怎樣研究教師的分數　平均測驗分數和教師分數的方法，已於第十一章內討論了，要應用教師分數和智力分數與成績分數，只需將這些分數合爲一個簡單測驗；使等於分組的分數(Classification Score)

求新聯合的分數，即用第十一章所解釋的方法，將每一教師所定的成績分數，轉爲分組分數，而求其每一學生分組分數及教師分數轉爲分組分數之平均數。前面曾經說過，對於教師分數，可任意加重(Weight)如要在分組測驗中，對於教師分數加重兩次，則於平均分組分數和轉移的教師分數時，將分數加兩次，將總分以3除之。其結果在分級與分組目的點可視爲與從以測驗所得之分組分數，完全一致。

一種測驗，能和分組指數相比較，並注意到教師的分數者可從新聯合的分數，得之；此聯合分數，在尋常情形中，可以上面的詮釋圖求出。換句話說

就是對於注意教師分數的新分組分數，使和從測驗所得的分組分數完全一樣。

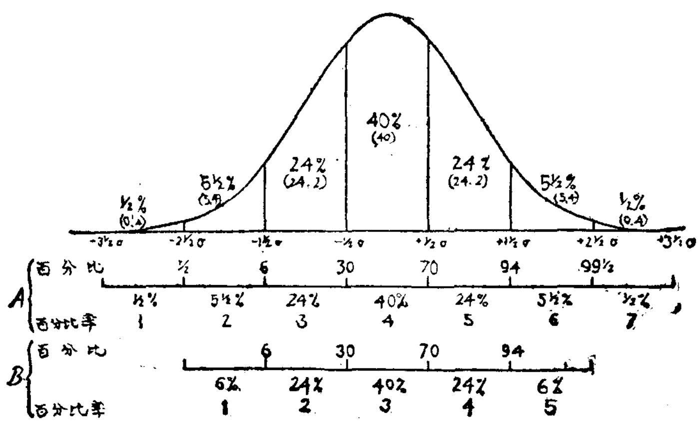
如用這種聯合測驗，作兒童分級和分組的標準，則可免去任何大的錯誤，因爲兒童從各方面受測驗與定級。

等級量尺　有時對於主觀性質的分級，需要數字的價值；這就是說，估計所不能測驗的性質。例如一個教師可對其學生將來的學業作一種估計，根據其幾種所觀察之學生新感覺的興趣，或志氣，或環境的變遷，或家庭的境遇等以爲判斷。

像這種情形，一個教師當然不能得到精密的測驗，或對於將來的成就，作精密的估計，所以需要一種方法，將主觀的判斷，變爲數字的說明。

爲達到這種目的起見，通常假設教師的判斷，以眞正數字的說明來解釋，對於任何大團體的測驗，如一班中的學生，可依照常態分配律以分配之（看第68圖）

圖六八　表明做等級量表的方法



在常態分配中，其中間百分之40的次數，在底線上㊀，約80占1σ的距離。在中間百分之40的兩邊，每邊百分之24亦占1σ的距離，再次每邊百分之$5\frac{1}{2}$亦是占1σ。（看第68圖）。於是在這五距離的每邊，所餘的約爲百分之$\frac{1}{2}$，實際上這所有的百分數㊁皆在1σ的次一個距離之內。

所以我們可假設這七組以百分數$\frac{1}{2}$,6,30,70,94,與$99\frac{1}{2}$表出者，在能力的眞正測驗上，或特質估計上，差不多爲相等的等級。我們可將各組以數字價值1,2,3,4,5,6,7,表明，如第68圖A所表示者。這就是說，任何學生，他的特質估計爲一班中之中間的百分之40，其等級爲4；任何學生，所估計的百分等級，在班中爲70與94之間，其等級爲5；一個學生估計所得的百分等級，在94與$99\frac{1}{2}$之間，其等級爲6；而一個學生估計在百分數之上$\frac{1}{2}$，則其等級爲7；其等級3,2,1,同樣類推。

用這種指定的數字價值，其等級可和其他的量數聯合，藉加重與平均之方法，以聯合之，或與其他量數相關，等。在相關方面，無需加重，但用10,20,30,40,50,60,與70等價值，做七種等級，如果要和分數平均，這似乎是需要的，俾七種等級的加重和其價值更爲符合，而與所聯合的分數價值作一比較。

"五點"的量尺 一組中除有二百人外，不必用剛才所說的七點量尺，因爲百分之$\frac{1}{2}$僅代表二百人中有一個人。所以爲達尋常的目的起見，用第68圖B所表明的五點等級量尺已足應用。其百分之$5\frac{1}{2}$與百分之$\frac{1}{2}$融合於百分之6的團體中，只有1,2,3,4與5等級卽夠用了。

㊀實際上從$-.524\sigma$到$+.524\sigma$

㊁在常態分配上，大約只有1百分之一在$+3\frac{1}{2}\sigma$之上或$-3\frac{1}{2}\sigma$之下

附　錄　一

省略字與符號說明

A.D.表明平均差

A.R.或A.Q.表明成業率，在以前稱成業商數

b表明迴歸方程係數

CI表明分組指數

d表明差數

G.S.表明年級狀態

F表明量數的次數

IQ表明智力商數

I.R.Q.表明中五十分距離

k表明轉換相關係數

M表明均數（在和上二十五分點與下二十五分點並用時，從上下文看起來，其意義明瞭時，亦用以表明中數）

M.D.表明中數差

Med.或Mdn表明中數

N表明次數的總數

P.R.表明百分等級

P.E.表明機誤

P.E.另有附字(如P.E.r)表明數量的機誤，其數量以附字表示。

±表明"加或減"

π(Pi)表明圓周率。π=3.14159。用於角度時，則表明180°

Q表明二十五分距值[=(Q_3—Q_1)/2]

Q_3表明上二十五分點

Q_1表明下二十五分點

r表明相關係數

r_{xy}表明兩個變量的相關係數x與y

r_{xx}表明同一測驗兩種形式的相關係數

R表明用司畢門尺度所求相關的量數，由此以得r

$r_{xy.z}$表明分析相關係數

$r_{x.yz}$表明複相關係數

P(Rho)表明用等級法所求的相關量數，由此以得r

σ(Sigma)表明標準差

$\sigma_{1.2}$ 表明在散佈圖內從迴歸線上各點差數之標準差，看冠萊統計法(Kelley Statistical Mathod)

Σ(Sigma)表明總數

S.R.表明學科率

U表明在相關圖上異號的比例

V表明Y——X

x,y,與z,表明變量

X,Y,Z組，表明聰明，中等，與愚笨組

附錄二

統計表

表一

百分比數目從11到60

%	16ths	17ths	18ths	19ths	20ths	21sts	22ds	23ds	24ths	25ths	26ths	27ths	28ths	29ths	30ths	
1	6	6	6	5	5	5	5	4	4	4	4	4	4	3	3	1
2	12	12	11	11	10	10	9	9	8	8	8	7	7	7	7	2
3	19	18	17	16	15	14	14	13	12	12	12	11	11	10	10	3
4	25	24	22	21	20	19	18	17	17	16	15	15	14	14	13	4
5	31	29	28	26	25	24	23	22	21	20	19	19	18	17	17	5
6	38	35	33	32	30	29	27	26	25	24	23	22	21	21	20	6
7	44	41	39	37	35	33	32	30	29	28	27	26	25	24	23	7
8	50	47	44	42	40	38	36	35	33	32	31	30	29	28	27	8
9	56	53	50	47	43	43	41	29	38	36	35	33	32	31	30	9
10	62	59	56	53	50	48	45	43	42	40	38	37	36	34	33	10
11	69	65	61	58	55	52	50	48	46	44	42	41	39	38	37	11
12	75	71	67	63	60	57	55	52	50	48	46	44	43	41	40	12
13	81	76	72	68	65	62	59	57	54	52	50	48	46	45	43	13
14	88	82	78	74	70	67	64	61	58	56	54	52	50	48	47	14
15	94	88	83	79	75	71	68	65	62	60	58	56	54	52	50	15
16	100	94	89	84	80	76	73	70	67	64	62	59	57	55	53	16
17		100	94	90	85	81	77	74	71	68	65	63	61	59	57	17
18			100	95	90	86	82	78	75	72	69	67	64	62	60	18
19				100	95	90	86	83	79	76	73	70	68	66	63	19
20					100	95	91	87	83	80	77	74	71	69	67	20
21						100	95	91	88	84	81	78	75	72	70	21
22							100	96	92	88	85	81	79	76	73	22
23								100	96	92	88	85	82	79	77	23
24									100	96	92	89	86	83	80	24
25										100	96	93	89	86	83	25
26											100	96	93	90	87	26
27												100	96	93	90	27
28													100	97	93	28
29														100	97	29
30															100	30

	11ths	12ths	13ths	14ths	15ths
1	9	8	8	7	7
2	18	17	16	14	13
3	27	25	23	21	20
4	36	33	31	29	27
5	45	42	38	36	33
6	55	50	46	43	40
7	64	58	54	50	47
8	73	67	62	57	53
9	82	75	69	64	60
10	91	83	77	71	67
11	100	92	85	79	73
12		100	92	86	80
13			100	93	87
14				100	93
15					100

	31sts	32ds	33ds	34ths	35ths	36ths	37ths	38ths	39ths	40ths	41ths	42ds	43ds	44ths	45ths	
1	3	3	3	3	3	3	3	3	3	2	2	2	2	2	2	1
2	6	6	6	6	6	6	5	5	5	5	5	5	5	5	4	2
3	10	9	9	9	9	8	8	8	8	8	7	7	7	7	7	3
4	13	12	12	12	11	11	11	11	10	10	10	10	9	9	9	4
5	16	16	15	15	14	14	14	13	13	12	12	12	12	11	11	5
6	19	19	18	18	17	17	16	16	15	15	15	14	14	14	13	6
7	23	22	21	21	20	19	19	18	18	18	17	17	16	16	16	7
8	26	25	24	24	23	22	22	21	21	20	20	19	19	18	18	8
9	29	28	27	26	26	25	24	24	23	22	22	21	21	20	20	9
10	32	31	30	29	29	28	27	26	26	25	24	24	23	23	22	10
11	35	34	33	32	31	31	30	29	28	28	27	26	25	25	24	11
12	39	38	36	35	34	33	32	32	31	30	29	29	28	27	27	12
13	42	41	39	38	37	36	35	34	33	32	32	31	30	30	29	13
14	45	44	42	41	40	39	38	37	36	35	34	33	33	32	31	14
15	48	47	45	44	43	42	41	39	38	38	37	36	35	34	33	15
16	52	50	48	47	46	44	43	42	41	40	39	38	37	36	36	16
17	55	53	52	50	49	47	46	45	44	42	41	40	40	39	38	17
18	58	56	55	53	51	50	49	47	46	45	44	43	42	41	40	18
19	61	59	58	56	54	53	51	50	49	48	46	45	44	43	42	19
20	65	62	61	59	57	56	54	53	51	50	49	48	47	45	44	20
21	68	66	64	62	60	58	57	55	54	52	51	50	49	48	47	21
22	71	69	67	65	63	61	59	58	56	55	54	52	51	50	49	22
23	74	72	70	68	66	64	62	61	59	58	56	55	53	52	51	23
24	77	75	73	71	69	67	65	63	62	60	59	57	56	55	53	24
25	81	78	76	74	71	69	68	66	64	62	61	60	58	57	56	25
26	84	81	79	76	74	72	70	68	67	65	63	62	60	59	58	26
27	87	84	82	79	77	75	73	71	69	68	66	64	63	61	60	27
28	90	88	85	82	80	78	76	74	72	70	68	67	65	64	62	28
29	94	91	88	85	83	81	78	76	74	72	71	69	67	66	64	29
30	97	94	91	88	86	83	81	79	77	75	73	71	70	68	67	30
31	100	97	94	91	89	86	84	82	79	78	76	74	72	70	69	31
32		100	97	94	91	89	87	84	82	80	78	76	74	73	71	32
33			100	97	94	92	89	87	85	82	80	79	77	75	73	33
34				100	97	94	92	89	87	85	83	81	79	77	76	34
35					100	97	95	92	90	88	85	83	81	80	78	35
36						100	97	95	92	90	88	86	84	82	80	36
37							100	97	95	92	90	88	86	84	82	37
38								100	97	95	93	90	88	86	85	38
39									100	98	95	93	91	89	87	39
40										100	98	95	93	91	89	40
41											100	98	95	93	91	41
42												100	98	95	93	42
43													100	98	96	43
44														100	98	44
45															100	45

	46ths	47ths	48ths	49ths	50ths	51sts	52ds	53ds	54ths	55ths	56ths	57ths	58ths	59ths	60ths	
1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1
2	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	3	3	3	2
3	7	6	6	6	6	6	6	6	6	5	5	5	5	5	5	3
4	9	9	9	8	8	8	8	8	7	7	7	7	7	7	7	4
5	11	11	10	10	10	10	10	9	9	9	9	9	9	8	8	5
6	13	13	12	12	12	12	12	11	11	11	11	11	10	10	10	6
7	15	15	15	14	14	14	13	13	13	13	12	12	12	12	12	7
8	17	17	17	16	16	16	15	15	15	15	14	14	14	14	13	8
9	20	19	19	18	18	18	17	17	17	16	16	16	16	15	15	9
10	22	21	21	20	20	20	19	19	19	18	18	18	17	17	17	10
11	24	23	23	22	22	22	21	21	20	20	20	19	19	19	18	11
12	26	26	25	24	24	24	23	23	22	22	21	21	21	20	20	12
13	28	28	27	27	26	25	25	25	24	24	23	23	22	22	22	13
14	30	30	29	29	28	27	27	26	26	25	25	25	24	24	23	14
15	33	32	31	31	30	29	29	28	28	27	27	26	26	25	25	15
16	35	34	33	33	32	31	31	30	30	29	29	28	28	27	27	16
17	37	36	35	35	34	33	33	32	31	31	30	30	29	29	28	17
18	39	38	38	37	36	35	35	34	33	33	32	32	31	31	30	18
19	41	40	40	39	38	37	37	36	35	35	34	33	33	32	32	19
20	43	43	42	41	40	39	38	38	37	36	36	35	34	34	33	20
21	46	45	44	43	42	41	40	40	39	38	38	37	36	36	35	21
22	48	47	46	45	44	43	42	42	41	40	39	39	38	37	37	22
23	50	49	48	47	46	45	44	43	43	42	41	40	40	39	38	23
24	52	51	50	49	48	47	46	45	44	44	43	42	41	41	40	24
25	54	53	52	51	50	49	48	47	46	45	45	44	43	42	42	25
26	57	55	54	53	52	51	50	49	48	47	46	46	45	44	43	26
27	59	57	56	55	54	53	52	51	50	49	48	47	47	46	45	27
28	61	60	58	57	56	55	54	53	52	51	50	49	48	47	47	28
29	63	62	60	59	58	57	56	55	54	53	52	51	50	49	48	29
30	65	64	62	61	60	59	58	57	56	55	54	53	52	51	50	30
31	67	66	65	63	62	61	60	58	57	56	55	54	53	53	52	31
32	70	68	67	65	64	63	62	60	59	58	57	56	55	54	53	32
33	72	70	69	67	66	65	63	62	61	60	59	58	57	56	55	33
34	74	72	71	69	68	67	65	64	63	62	61	60	59	58	57	34
35	76	74	73	71	70	69	67	66	65	64	63	61	60	59	58	35
36	78	77	75	73	72	71	69	68	67	65	64	63	62	61	60	36
37	80	79	77	76	74	73	71	70	69	67	66	65	64	63	62	37
38	83	81	79	78	76	75	73	72	70	69	68	67	66	64	63	38
39	85	83	81	80	78	76	75	74	72	71	70	68	67	66	65	39
40	87	85	83	82	80	78	77	75	74	73	71	70	69	68	67	40
41	89	87	85	84	82	80	79	77	76	75	73	72	71	69	68	41
42	91	89	88	86	84	82	81	79	78	76	75	74	72	71	70	42
43	93	91	90	88	86	84	83	81	80	78	77	75	74	73	72	43
44	96	94	92	90	88	86	85	83	81	80	79	77	76	75	73	44
45	98	96	94	92	90	88	87	85	83	82	80	79	78	76	75	45
46	100	98	96	94	92	90	88	87	85	84	82	81	79	78	77	46
47		100	98	96	94	92	90	89	87	85	84	82	81	80	78	47
48			100	98	96	94	92	91	89	87	86	84	83	81	80	48
49				100	98	96	94	92	91	89	88	86	84	83	82	49
50					100	98	96	94	93	91	89	88	86	85	83	50
51						100	98	96	94	93	91	89	88	86	85	51
52							100	98	96	95	93	91	90	88	87	52
53								100	98	96	95	93	91	90	88	53
54									100	98	96	95	93	92	90	54
55										100	98	96	95	93	92	55
56											100	98	97	95	93	56
57												100	98	97	95	57
58													100	98	97	58
59														100	98	59

表 二

表明各個人所得各種分數的百分等級，此項分數是在常態分配情形中藉中數差(或Q)從中數測量而得者。分數—5，即爲在分配上，中數下的5個中數差或5Q的分數。

分數—M	百分	分數—M	百分	分數—M	百分	分數—M	百分
Q	等級	Q	等級	Q	等級	Q	等級
5.0	99.96	2.5	95.4	—0.0	50.0	—2.5	4.59
4.9	99.95	2.4	94.7	—0.1	47.3	—2.6	3.98
4.8	99.94	2.3	94.0	—0.2	44.6	—2.7	3.43
4.7	99.92	2.2	93.1	—0.3	42.0	—2.8	2.95
4.6	99.90	2.1	92.2	—0.4	39.4	—2.9	2.52
4.5	99.88	2.0	91.1	—0.5	36.8	—3.0	2.15
4.4	99.85	1.9	90.0	—0.6	34.3	—3.1	1.83
4.3	99.81	1.8	88.8	—0.7	31.8	—3.2	1.55
4.2	99.77	1.7	87.4	—0.8	29.5	—3.3	1.30
4.1	99.71	1.6	86.0	—0.9	27.2	—3.4	1.09
4.0	99.65	1.5	84.4	—1.0	25.0	—3.5	0.91
3.9	99.57	1.4	82.8	—1.1	22.9	—3.6	0.76
3.8	99.48	1.3	81.0	—1.2	20.9	—3.7	0.63
3.7	99.37	1.2	79.1	—1.3	19.0	—3.8	0.52
3.6	99.24	1.1	77.1	—1.4	17.2	—3.9	0.43
3.5	99.09	1.0	75.0	—1.5	15.6	—4.0	0.35
3.4	98.91	0.9	72.8	—1.6	14.0	—4.1	0.29
3.3	98.70	0.8	70.5	—1.7	12.6	—4.2	0.23
3.2	98.45	0.7	68.2	—1.8	11.2	—4.3	0.19
3.1	98.17	0.6	65.7	—1.9	10.0	—4.4	0.15
3.0	97.85	0.5	63.2	—2.0	8.9	—4.5	0.12
2.9	97.48	0.4	60.6	—2.1	7.8	—4.6	0.10
2.8	97.05	0.3	58.0	—2.2	6.9	—4.7	0.08
2.7	96.57	0.2	55.4	—2.3	6.0	—4.8	0.06
2.6	96.02	0.1	52.7	—2.4	5.3	—4.9	0.05

表 三

表明r與每一R相關的價值，按照$r=2\cos(1-R)60^{0}-1$的公式，在此公式中

$$R=1-\frac{6\Sigma G}{n^2-1}$$

R	r	R	r	R	r	R	r
.01	.018	.26	.429	.51	.742	.76	.937
.02	.036	.27	.444	.52	.753	.77	.942
.03	.054	.28	.458	.53	.763	.78	.947
.04	.071	.29	.472	.54	.772	.79	.952
.05	.089	.30	.486	.55	.782	.80	.956
.06	.107	.31	.500	.56	.791	.81	.961
.07	.124	.32	.514	.57	.801	.82	.965—
.08	.141	.33	.528	.58	.810	.83	.968
.09	.158	.34	.541	.59	.818	.84	.972
.10	.176	.35	.554	.60	.828	.85	.975+
.11	.192	.36	.567	.61	.836	.86	.979
.12	.209	.37	.580	.62	.844	.87	.982
.13	.226	.38	.593	.63	.852	.88	.984
.14	.242	.39	.606	.64	.860	.89	.987
.15	.259	.40	.618	.65	.867	.90	.989
.16	.275—	.41	.630	.66	.875—	.91	.991
.17	.291	.42	.642	.67	.882	.92	.993
.18	.307	.43	.654	.68	.889	.93	.995—
.19	.323	.44	.666	.69	.896	.94	.996
.20	.338	.45	.677	.70	.902	.95	.997
.21	.354	.46	.689	.71	.908	.96	.998
.22	.369	.47	.700	.72	.915—	.97	.999
.23	.384	.48	.711	.73	.921	.98	.9996
.24	.399	.49	.721	.74	.926	.99	.9999
.25	.414	.50	.732	.75	.932	1.00	1.0000

表　四

表明r與每一p相關的價值，按照 $r=2\sin(30^0\times p)$的公式，在此公

內。

$$p=1-\frac{6\sum D^2}{n(n^2-1)}$$

p	r	p	r	p	r	p	r
.01	.010	.26	.271	.51	.528	.76	.775+
.02	.021	.27	.282	.52	.538	.77	.785—
.03	.031	.28	.292	.53	.548	.78	.794
.04	.042	.29	.303	.54	.558	.79	.804
.05	.052	.30	.313	.55	.568	.80	.813
.06	.063	.31	.323	.56	.578	.81	.823
.07	.073	.32	.334	.57	.588	.82	.833
.08	.084	.33	.344	.58	.598	.83	.842
.09	.094	.34	.354	.59	.608	.84	.852
.10	.105—	.35	.364	.60	.618	.85	.861
.11	.115+	.36	.375—	.61	.628	.86	.870
.12	.126	.37	.385+	.62	.638	.87	.880
.13	.136	.38	.395+	.63	.648	.88	.889
.14	.146	.39	.406	.64	.658	.89	.899
.15	.157	.40	.416	.65	.668	.90	.908
.16	.167	.41	.426	.66	.677	.91	.917
.17	.178	.42	.436	.67	.687	.92	.927
.18	.188	.43	.446	.68	.697	.93	.936
.19	.199	.44	.457	.69	.707	.94	.945+
.20	.209	.45	.467	.70	.717	.95	.954
.21	.219	.46	.477	.71	.726	.96	.973
.22	.230	.47	.487	.72	.736	.97	.982
.23	.240	.48	.497	.73	.746	.98	.991
.24	.251	.49	.507	.74	.756	.99	1.000
.25	.261	.50	.518	.75	.765+	1.00	

表　五

表明相關係數(r)與異號(U)相關的比例

U	r	U	r
.00	1.0000	.26	.685
.01	9996	.27	.662
.02	.9982	.28	.638
.03	.9958	.29	.613
.04	.9924	.30	.588
.05	.998	.31	.562
.06	.983	.32	.536
.07	.976	.33	.509
.08	.969	.33$\frac{1}{3}$	.500
.09	.960	.34	.482
.10	.951	.35	.452
.11	.941	.36	.426
.12	.930	.37	.397
.13	.917	.38	.368
.14	.904	.39	.339
.15	.891	.40	.309
.16	.876	.41	.279
.17	.860	.42	.249
.18	.844	.43	.218
.19	.827	.44	.188
.20	.809	.45	.156
.21	.790	.46	.125
.22	.771	.47	.094
.23	.750	.48	.063
.24	.729	.49	.031
.25	.707	.50	.000

表　六

相關係數(r)因各種r價值的取樣和各種測驗(N)的次數所生之機誤

N 測驗次數	r 價值（相關係數）												
	.00	.10	.20	.30	.40	.50	.60	.70	.75	.80	.85	.90	.95
10	.213	.211	.205	.194	.179	.160	.157	.109	.093	.077	.059	.041	.0208
20	.151	.149	.145	.137	.127	.113	.097	.077	.066	.054	.042	.029	.0147
30	.123	.122	.118	.112	.103	.092	.079	.063	.054	.044	.034	.023	.0120
40	.107	.106	.102	.097	.090	.080	.068	.054	.047	.038	.030	.020	.0104
50	.095	.094	.092	.087	.080	.072	.061	.049	.042	.034	.026	.018	.0093
60	.087	.086	.083	.079	.073	.065	.058	.044	.038	.031	.024	.017	.0085
70	.081	.080	.077	.073	.068	.060	.052	.041	.035	.029	.022	.015	.0079
80	.075	.075	.072	.069	.063	.057	.048	.038	.033	.027	.021	.014	.0074
90	.071	.070	.068	.064	.060	.053	.045	.036	.031	.026	.020	.014	.0069
100	.067	.067	.065	.061	.057	.051	.043	.034	.029	.024	.019	.013	.0066
125	.060	.060	.058	.055	.051	.045	.039	.031	.026	.022	.017	.011	.0059
150	.055	.055	.053	.050	.046	.041	.035	.028	.024	.020	.015	.010	.0054
200	.048	.047	.046	.043	.040	.036	.031	.024	.021	.017	.013	.0091	.0047
250	.043	.042	.041	.039	.036	.032	.027	.022	.019	.015	.012	.0081	.0042
300	.039	.039	.037	.035	.033	.029	.025	.020	.017	.014	.011	.0074	.0038
400	.034	.033	.032	.031	.028	.025	.022	.017	.015	.012	.0094	.0064	.0033
500	.030	.030	.029	.027	.025	.023	.019	.015	.013	.011	.0084	.0057	.0029
600	.028	.027	.026	.025	.023	.021	.018	.014	.012	.0099	.0076	.0052	.0027
750	.025	.024	.024	.022	.021	.018	.016	.013	.011	.0089	.0068	.0047	.0024
1000	.021	.021	.020	.019	.018	.016	.014	.011	.0093	.0077	.0059	.0041	.0021

表 七

平方及平方根表 1到1000

數	平方	平方根	數	平方	平方根	數	平方	平方根
1	1	1.000	31	961	5.568	61	3721	7.810
2	4	1.414	32	1024	5.657	62	3844	7.874
3	9	1.732	33	1089	5.745	63	3969	7.937
4	16	2.000	34	1156	5.831	64	4096	8.000
5	25	2.236	35	1225	5.916	65	4225	8.062
6	36	2.449	36	1296	6.000	66	4356	8.124
7	49	2.646	37	1369	6.083	67	4489	8.185
8	64	2.828	38	1444	6.164	68	4624	8.246
9	81	3.000	39	1521	6.245	69	4761	8.307
10	100	3.162	40	1600	6.325	70	4900	8.367
11	121	3.317	41	1681	6.403	71	5041	8.426
12	144	3.464	42	1764	6.481	72	5184	8.484
13	169	3.606	43	1849	6.557	73	5329	8.544
14	196	3.742	44	1936	6.633	74	5476	8.602
15	225	3.873	45	2025	6.708	75	5625	8.660
16	256	4.000	46	2116	6.782	76	5776	8.718
17	289	4.123	47	2209	6.856	77	5929	8.775
18	324	4.243	48	2304	6.928	78	6084	8.832
19	361	4.359	49	2401	7.000	79	6241	8.888
20	400	4.472	50	2500	7.071	80	6400	8.944
21	441	4.583	51	2601	7.141	81	6561	9.000
22	484	4.690	52	2704	7.211	82	6724	9.055
23	529	4.796	53	2809	7.280	83	6889	9.110
24	576	4.899	54	2916	7.348	84	7056	9.165
25	625	5.000	55	3025	7.416	85	7225	9.220
26	676	5.099	56	3136	7.483	86	7396	9.274
27	729	5.196	57	3249	7.550	87	7569	9.327
28	784	5.292	58	3364	7.616	88	7744	9.381
29	841	5.385	59	3481	7.681	89	7921	9.434
30	900	5.477	60	3600	7.746	90	8100	9.487

數	平方	平方根	數	平方	平方根	數	平方	平方根
91	8281	9.539	126	15876	11.225	161	25921	12.689
92	8464	9.592	127	16129	11.269	162	26244	12.728
93	8649	9.644	128	16384	11.314	163	26569	12.767
94	8836	9.695	129	16641	11.358	164	26896	12.806
95	9025	9.747	130	16900	11.402	165	27225	12.845
96	9216	9.798	131	17161	11.446	166	27556	12.884
97	9409	9.849	132	17424	11.489	167	27889	12.923
98	9604	9.899	133	17689	11.533	168	28224	12.961
99	9801	9.950	134	17956	11.576	169	28561	13.000
100	10000	10.000	135	18225	11.619	170	28900	13.038
101	10201	10.050	136	18496	11.662	171	29241	13.077
102	10404	10.000	137	18769	11.705	172	29584	13.115
103	10609	10.149	138	19044	11.747	173	29929	13.153
104	10816	10.198	139	19321	11.790	174	30276	13.191
105	11025	10.247	140	19600	11.832	175	30625	13.229
106	11236	10.296	141	19881	11.874	176	30976	13.266
107	11449	10.344	142	20164	11.916	177	31329	13.304
108	11664	10.392	143	20449	11.958	178	31684	13.342
109	11881	10.440	144	20736	12.000	179	32041	13.379
110	12100	10.488	145	21025	12.042	180	32400	13.416
111	12321	10.536	146	21316	12.083	181	32761	13.454
112	12544	10.583	147	21609	12.124	182	33124	13.491
113	12769	10.630	148	21904	12.166	183	33489	13.528
114	12996	10.677	149	22201	12.207	184	33856	13.565
115	13225	10.724	150	22500	12.247	185	34225	13.601
116	13456	10.770	151	22801	12.288	186	34596	13.638
117	13689	10.817	152	23104	12.239	187	34969	13.675
118	13924	10.863	153	23409	12.369	188	35344	13.711
119	14161	10.909	154	23716	12.410	189	35721	13.748
120	14400	10.954	155	24025	12.450	190	36100	13.784
121	14641	11.000	156	24336	12.490	191	36481	13.820
122	14884	11.045	157	24649	12.530	192	36864	13.856
123	15129	11.091	158	24964	12.570	193	37249	13.892
124	15376	11.136	159	25281	12.610	194	37636	13.928
125	15625	11.180	160	25600	12.649	195	38025	13.964

數	平方	平方根	數	平方	平方根	數	平方	平方根
196	38416	14.000	231	53361	15.199	266	70756	16.310
197	38809	14.036	232	53824	15.232	267	71289	16.340
198	39204	14.071	233	54289	15.264	268	71824	16.371
199	39601	14.107	234	54756	15.297	269	72361	16.401
200	40000	14.142	235	55225	15.330	270	72900	16.432
201	40401	14.177	236	55696	15.362	271	73441	16.462
202	40804	14.213	237	56169	15.395	272	73984	16.492
203	41209	14.248	238	56644	15.427	273	74529	16.523
204	41616	14.283	239	57121	15.460	274	75076	16.553
205	42025	14.318	240	57600	15.492	275	75625	16.583
206	42436	14.353	241	58081	15.524	276	76176	16.613
207	42849	14.387	242	58564	15.556	277	76729	16.643
208	43264	14.422	243	59049	15.588	278	77284	16.673
209	43681	14.457	244	59536	15.620	279	77841	16.703
210	44100	14.491	245	60025	15.652	280	78400	16.733
211	44521	14.526	246	60516	15.684	281	78961	16.763
212	44944	14.560	247	61009	15.716	282	79524	16.793
213	45369	14.595	248	61504	15.748	283	80089	16.823
214	45796	14.629	249	62001	15.780	284	80656	16.853
215	46225	14.663	250	62500	15.811	285	81225	16.882
216	46656	14.697	251	63001	15.843	286	81796	16.912
217	47089	14.731	252	63504	15.875	287	82369	16.941
218	47524	14.765	253	64009	15.906	288	82944	16.971
219	47961	14.799	254	64516	15.937	289	83521	17.000
220	48400	14.832	255	65025	15.969	290	84100	17.029
221	48841	14.866	256	65536	16.000	291	84681	17.059
222	49284	14.900	257	66049	16.031	292	85264	17.088
223	49729	14.933	258	66564	16.062	293	85849	17.117
224	50176	14.967	259	67081	16.093	294	86436	17.146
225	50625	15.000	260	67600	16.125	295	87025	17.176
226	51076	15.033	261	68121	16.155	296	87616	17.205
227	51529	15.067	262	68644	16.186	297	88209	17.234
228	51984	15.100	263	69169	16.217	298	88804	17.263
229	52441	15.133	264	69696	16.248	299	89401	17.292
230	52900	15.166	265	70225	16.279	300	90000	17.321

數	平方	平方根	數	平方	平方根	數	平方	平方根
301	90601	17.349	336	112896	18.330	371	137641	19.261
302	91204	17.378	337	113569	18.358	372	138384	19.287
303	91809	17.407	338	114244	18.385	373	139129	19.313
304	92416	17.436	339	114921	18.412	374	139876	19.339
305	93025	17.464	340	115600	18.439	375	140625	19.365
306	93636	17.493	341	116281	18.466	376	141376	19.391
307	94249	17.521	342	116964	18.493	377	142129	19.416
308	94894	17.550	343	117649	18.520	378	142884	19.442
309	95481	17.578	344	118336	18.547	379	143641	19.468
310	96100	17.607	345	119025	18.574	380	144400	19.494
311	96721	17.635	346	119716	18.601	381	145161	19.519
312	97344	17.664	347	120409	18.628	382	145924	19.545
313	97969	17.692	348	121104	18.655	383	146689	19.570
314	98596	17.720	349	121801	18.682	384	147456	19.596
315	99225	17.748	350	122500	18.708	385	148225	19.621
316	99856	17.776	351	123201	18.735	386	148996	19.647
317	100489	17.804	352	123904	18.762	387	149769	19.672
318	101124	17.833	353	124609	18.788	388	150544	19.698
319	101761	17.861	354	125316	18.815	389	151321	19.723
320	102400	17.889	355	126025	18.841	390	152100	19.748
321	103041	17.916	356	126736	18.868	391	152881	19.774
322	103684	17,944	357	127449	18.894	392	153664	19.799
323	104329	17.972	358	128164	18.921	393	154449	19.824
324	104976	18.000	359	128881	18.947	394	155236	19.849
325	105625	18.028	360	129600	18.974	395	156025	19.875
326	106276	18.055	361	130321	19.000	396	156816	19.900
327	106929	18.083	362	131044	19.026	397	157609	19.925
328	107584	18.111	363	131769	19.053	398	158404	19.950
329	108241	18.138	364	132496	19.079	399	159201	19.975
330	108900	18.166	365	133225	19.105	400	160000	20.000
331	109561	18.193	366	133956	19.131	401	160801	20.025
332	110224	18.221	367	134689	19.157	402	161604	20.050
333	110889	18.248	368	135424	19.183	403	162409	20.075
334	111556	18.276	369	136161	19.209	404	163216	20.100
335	112225	18.303	370	136900	19.235	405	164025	20.125

數	平方	平方根	數	平方	平方根	數	平方	平方根
406	164836	20.149	441	194481	21.000	476	226576	21.817
407	165649	20.174	442	195364	21.024	477	227529	21.840
408	166464	20.199	443	196249	21.048	478	228484	21.863
409	167281	20.224	444	197136	21.071	479	229441	21.886
410	168100	20.248	445	198025	21.095	480	230400	21.909
411	168921	20.273	446	198916	21.119	481	231361	21.932
412	169744	20.298	447	199809	21.142	482	232324	21.954
413	170569	20.322	448	200704	21.166	483	233289	21.977
414	171396	20.347	449	201601	21.190	484	234256	22.000
415	172225	20.372	450	202500	21.213	485	235225	22.023
416	173056	20.396	451	203401	21.237	486	236196	22.045
417	173889	20.421	452	204304	21.260	487	237169	22.068
418	174724	20.445	453	205209	21.284	488	238144	22.091
419	175561	20.469	454	206161	21.307	489	239121	22.113
420	176400	20.494	455	207025	21.331	490	240100	22.136
421	177241	20.518	456	207936	21.354	491	241081	22.159
422	178084	20.543	457	208849	21.378	492	242064	22.181
423	178929	20.567	458	209764	21.401	493	243049	22.204
424	179776	20.591	459	210681	21.424	494	244036	22.226
425	180625	20.616	460	211600	21.448	495	245025	22.249
426	181476	20.640	461	212521	21.471	496	246016	22.271
427	182329	20.664	462	213444	21.494	497	247009	22.293
428	183184	20.688	463	214369	21.517	498	248004	22.316
429	184041	20.712	464	215296	21.541	499	249001	22.338
430	184900	20.736	465	216225	21.564	500	250000	22.361
431	185761	20.761	466	217156	21.587	501	251001	22.383
432	186624	20.785	467	218089	21.610	502	252004	22.405
433	187489	20.809	468	219024	21.633	503	253009	22.428
434	188356	20.833	469	219961	21.656	504	254016	22.450
435	189225	20.857	470	220900	21.679	505	255025	22.472
436	190096	20.881	471	221841	21.703	506	256036	22.494
437	190969	20.905	472	222784	21.726	507	257049	22.517
438	191844	20.928	473	223729	21.749	508	258064	22.539
439	192721	20.952	474	224 76	21.772	509	259081	22.561
440	193600	20.976	475	225625	21.794	510	260100	22.583

數	平方	平方根	數	平方	平方根	數	平方	平方根
511	261121	22.605	546	298116	23.367	581	337561	24.104
512	262144	22.627	547	299 09	23.388	582	338724	24.125
513	263169	22.650	548	300304	23.409	583	339889	24.145
514	264196	22.672	549	301401	23.431	584	341056	14.166
515	265225	22.694	550	302500	23.452	585	342225	24.187
516	266256	22.716	551	303601	23.473	586	343396	24.207
517	267289	22.738	552	304704	23.495	587	344569	24.228
518	268324	22.760	553	305809	23.516	588	345744	24.249
519	269381	22.782	554	306916	23.537	589	346921	24.269
520	270400	22.804	555	308025	23.558	590	348100	24.290
521	271441	22.825	556	309136	23.580	591	349281	24.310
522	272484	22.847	557	310249	23.601	592	350464	24.331
523	273529	22.869	558	311364	23.622	593	351649	24.352
524	274576	22.891	559	312481	23.643	594	352836	24.372
525	275625	22.913	560	313600	23.664	595	354025	24.393
526	276676	22.935	561	314721	23.685	596	355216	24.413
527	277729	22.956	562	315844	23.707	597	356409	24.434
528	278784	22.978	563	316969	23.728	598	357604	24.454
529	279841	23.000	564	318096	23.749	599	358801	24.474
530	280900	23.022	565	319225	23.770	600	360000	24.495
531	281961	23.043	566	320356	23.791	601	361201	24.515
532	283024	23.065	567	321489	23.812	602	362404	24.536
533	284089	23.087	568	322624	23.833	603	363609	24.556
534	285156	23.108	569	322761	23.854	604	364816	24.576
535	286225	23.130	570	324900	23.875	605	366025	24.597
536	287296	23.152	571	326041	23.896	606	367236	24.617
537	286369	23.173	572	327184	23.917	607	368449	24.637
538	289444	23.195	573	328329	23.937	608	369664	24.658
539	290521	23.216	574	329476	23.958	609	370881	24.678
540	291600	23.238	575	330625	23.979	610	372100	24.698
541	292681	23.259	576	331776	24.000	611	373321	24.718
542	293764	23.281	577	332929	24.021	612	374544	24.739
543	294849	23.302	578	334084	24.042	613	375769	24.759
544	295936	23.324	579	335241	24.062	614	376996	24.779
545	297025	23.345	580	336400	24.083	615	378225	24.799

數	平方	平方根	數	平方	平方根	數	平方	平方根
616	379456	24.819	651	423801	25.515	686	470596	26.192
617	380689	24.839	652	425104	25.534	687	471969	26.211
618	381924	24.860	653	426409	25.554	688	473344	26.230
619	383161	24.880	654	427716	25.573	689	473721	26.249
620	384400	24.900	655	429025	25.593	690	476100	26.268
621	385641	24.920	656	430336	25.612	691	477481	26.287
622	386884	24.940	657	431649	25.632	692	478864	26.306
623	388129	24.960	658	432964	25.652	693	480249	26.325
624	389376	24.980	659	434281	25.671	694	481636	26.344
625	390625	25.000	660	435600	25.690	695	483025	26.363
626	391876	25.020	661	436921	25.710	696	484416	26.382
627	393129	25.040	662	438244	25.729	697	485809	26.401
628	394384	25.060	663	439569	25.749	698	487204	26.420
629	395641	25.080	664	440896	25.768	699	488601	26.439
630	396900	25.100	665	442225	25.788	700	490000	26.458
631	398161	25.120	666	443556	25.807	701	491401	26.476
632	399424	25.140	667	444889	25.826	702	492804	26.495
633	400689	25.159	668	446224	25.846	703	494209	26.514
634	401956	25.179	669	447561	25.865	704	495616	26.533
635	403225	25.199	670	448900	25.884	705	497025	26.552
636	404496	25.219	671	450241	25.904	706	498436	26.571
637	405769	25.259	672	451584	25.923	707	499849	26.589
638	407044	25.378	673	452929	25.942	708	501264	26.608
639	408321	25.298	674	454276	25.962	709	502681	26.627
640	409600	25.298	675	455625	25.981	710	504100	26.646
641	410881	25.318	676	456976	26.000	711	505521	26.665
642	412164	25.338	677	458329	26.019	712	506944	26.683
643	413449	25.357	678	459684	26.038	713	508369	26.702
644	414736	25.377	679	461041	26.058	714	509796	26.721
645	416025	25.397	680	462400	26.077	715	511225	26.739
646	41732[illegible]	25.417	681	463761	26.096	716	512656	26.758
647	418629	25.436	682	465124	26.115	717	514098	26.777
648	419904	25.456	683	466489	26.134	718	515524	26.796
496	421201	25.474	684	467856	26.153	719	516961	26.814
506	422500	25.495	685	469225	26.173	720	518400	26.833

數	平方	平方根	數	平方	平方根	數	平方	平方根
721	519841	26.851	756	571536	27.495	791	625681	28.125
722	521284	26.870	757	573049	27.514	792	627264	28.142
723	522729	26.889	758	574564	27.532	793	628849	28.160
724	524176	26.907	759	576081	27.550	794	630436	28.178
725	525625	26.926	760	577600	27.568	795	632025	28.196
726	527076	26.944	761	579121	27.586	796	633616	28.213
727	528529	26.963	762	580644	27.604	797	635209	28.231
728	529984	26.981	763	582169	27.622	798	636804	28.249
729	531441	27.000	764	583696	27.641	799	638401	28.267
730	532900	27.019	765	585225	27.659	800	640000	28.284
731	534361	27.037	766	586756	27.677	801	641601	28.302
732	535824	27.055	767	588289	27.695	802	643204	28.320
733	537289	27.074	768	589824	27.713	803	644809	28.337
734	538756	27.092	769	591361	27.731	804	646416	28.355
735	540225	27.111	770	592900	27.749	805	648025	28.373
736	541696	27.129	771	594441	27.767	806	649636	28.390
737	543169	27.148	772	595984	27.785	807	651249	28.408
738	544644	27.166	773	597529	27.803	808	652864	28.425
739	546121	27.185	774	599076	27.821	809	654481	28.443
740	547600	27.203	775	600625	27.839	810	656100	28.460
741	549081	27.221	776	602176	27.857	811	657721	28.478
742	550564	27.240	777	603729	27.875	812	659344	28.496
743	552049	72.528	778	605284	27.893	813	660969	28.513
744	553536	27.276	779	606841	27.911	814	662596	28.531
745	555025	27.295	780	608400	27.928	815	664225	28.548
746	556516	27.313	781	609961	27.946	816	665856	28.566
747	558009	27.331	782	611524	27.964	817	667489	28.583
748	559504	27.350	783	613089	27.982	818	669124	28.601
749	561001	27.365	784	614656	28.000	819	670761	28.618
750	562500	27.386	785	616225	28.018	820	672400	28.636
751	564001	27.404	786	617796	28.036	821	674041	28.653
752	565504	27.423	787	619369	28.054	822	675684	28.671
753	567009	27.441	788	620944	28.071	823	677329	28.638
754	568516	27.459	789	622521	28.089	824	678976	28.705
755	570025	27.477	790	624100	28.107	825	680625	28.723

數	平方	平方根	數	平方	平方根	數	平方	平方根
826	682276	28.740	861	741321	29.343	896	802816	29.933
827	683929	28.758	862	743044	29.360	897	804609	29.950
828	685584	28.775	863	744769	29.377	898	806404	29.967
829	687241	28.792	864	746496	29.394	899	808201	29.983
830	688900	28.810	865	748225	29.411	900	810000	30.000
831	690561	28.827	866	749956	29.428	901	811801	30.017
832	692224	28.844	867	751689	29.445	902	813604	30.033
833	693889	28.86[illegible]	868	753424	29.462	903	815409	30.050
834	695556	28.879	869	755161	29.4[illegible]9	904	817216	30.067
835	697225	28.896	870	756900	29.496	905	819025	30.083
836	698896	28.914	871	758641	29.513	906	820836	30.100
837	700569	28.931	872	760384	29.530	907	822649	30.116
838	702224	28.948	873	76[illegible]129	29.547	908	824464	30.133
839	703921	28.965	874	763876	29.563	909	826281	30.150
840	705600	28.983	875	765925	29.580	910	828100	30.166
841	707281	29.000	876	767376	29.597	911	829921	30.183
842	708964	29.017	877	769129	29.614	912	831744	30.199
843	710649	29.034	878	770884	29.631	913	833569	30.216
844	712336	29.052	879	772641	29.648	914	835396	30.232
845	714025	29.069	880	774400	29.665	915	837225	30.249
846	715716	29.086	881	776161	29.682	916	839056	30.265
847	717409	29.103	882	777924	29.698	917	840889	30.282
848	719104	29.120	883	779689	29.715	918	842724	30.299
849	720801	29.138	884	781456	29.732	919	844561	30.315
850	722500	29.155	885	783225	29.749	920	846400	30.332
851	724201	29.172	886	784996	29.766	921	848241	30.348
852	725904	29.189	887	786769	29.783	922	850084	30.364
853	727609	29.206	888	788544	29.799	923	851929	30.381
854	729316	29.223	889	790321	29.816	924	853776	30.397
855	731025	29.240	890	792100	29.833	925	855625	30.414
856	732736	29.257	891	793881	29.850	926	857476	30.430
857	734449	29.275	892	795664	29.866	927	859729	30.447
858	736164	29.292	893	797449	29.883	928	861184	30.463
859	737881	29.309	894	799236	29.900	929	863041	30.480
860	739600	29.326	895	801025	29.916	930	864900	30.496

數	平方	平方根	數	平方	平方根	數	平方	平方根
913	866761	30.512	966	933156	31.081			
932	868624	30.529	967	935089	31.097			
933	870489	30.545	968	937024	31.113			
934	872356	30.561	969	938961	31.129			
935	874225	30.578	970	940900	31.145			
936	876096	30.594	971	942841	31.161			
937	877969	30.610	972	944784	31.177			
938	879844	30.627	973	946729	31.193			
939	881721	30.643	974	948676	31.209			
940	883600	30.659	975	950625	31.225			
941	885481	30.676	976	952576	31.241			
942	887364	30.692	977	954529	31.257			
943	889249	30.708	978	956484	31.273			
944	891136	30.725	979	958441	31.289			
945	893025	30.741	980	960400	31.305			
946	894916	30.757	981	962361	31.321			
947	896809	30.773	982	964324	31.337			
948	898704	30.790	983	966289	31.353			
949	900601	30.806	984	968256	31.369			
950	902500	30.822	985	970225	31.385			
951	904401	30.838	986	972196	31.401			
952	906304	30.854	987	974169	31.417			
953	908209	30.871	988	976144	31.432			
954	910116	30.887	989	978121	31.448			
955	912025	30.903	990	980100	31.464			
956	913936	30.919	991	982081	31.480			
957	915849	30.935	992	984064	31.496			
958	917764	30.952	993	986049	31.512			
959	919681	30.968	994	988036	31.528			
960	921600	30.984	995	990025	31.544			
961	923521	31.000	996	992016	31.559			
962	925444	31.016	997	994009	31.575			
963	927369	31.032	998	996004	31.591			
964	929296	31.048	999	998001	31.607			
965	931225	31.064	1000	1000000	31.623			

附錄三

練習答案

練習1: 89.

練習2: 須得同樣結果

練習3: 須得同樣結果

練習4: (a)12.9,(b)25.6,(c)57.8。

練習5:

年級	分數 3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	數目	中數
6甲	1	2	1	2	3	3	3	5	2	8	4	7	2	0	0	1	44	11
6乙	2	1	1	1	0	6	2	7	8	6	4	2	2	1	0	1	44	11
7甲			3	2	1	4	3	4	8	3	6	3	4				41	11
7乙	1			1	1	2	3	8	2	3	6	6	2	1			36	11

	年級	分數 3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
練習6:	6甲	1	$2\frac{1}{2}$	4	$5\frac{1}{2}$	8	11	14	18	$21\frac{1}{2}$	$26\frac{1}{2}$	$32\frac{1}{2}$	38	$42\frac{1}{2}$			44
練習7:	6乙	$1\frac{1}{2}$	3	4	5		$8\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{2}$	17	$24\frac{1}{2}$	$31\frac{1}{2}$	$36\frac{1}{2}$	$39\frac{1}{2}$	$41\frac{1}{2}$	43		44

練習8: 分數10在六年級甲得較高等級

練習9:

分數	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
機誤	0	7	14	25	38	50	66	80	90	97		100

練習14: 次數從組距20到24:3,2,5,4,3,10,7,5,2,4,至組距65到69止。

次數數目,45。

練習15:

1×10=	10	
2× 9=	18	
2× 8=	16	
3× 7=	21	
4× 6=	24	
5× 5=	25	
6× 4=	24	
8× 3=	24	
4× 2=	8	
3× 1=	3	
38	173	

173÷38=4.55。輔值,4=分數22。

.55的5點,約等于3點。(實在分數的確實均數當然不能求出,因爲我們只用中點而已)。

均數=22+3=25。

練習18:

年級	10%	25%	50%	75%	90%
5甲	19	27	37	47	57
6甲	28	36	47	54	63

練習20: 5甲,中五十分距離約等於20點(27到47)。

5甲,10—90—百分比距離約等於37點(19到57)。

6甲,中五十分距離約等於17點(37,用修勻曲線,到54)

6甲,10—90—百分比距離約等於34點(在曲線上28到62)。

練習21: 6甲約百分之25在5甲的中數以下。

5甲約百分之25超過6甲的中數以上。

練習22: 5甲的中數差=2點;5乙=2點。

練習23: 5甲的平均差=2.1點;5乙=2.0點。

練習25：.80×43=34.4=平均差的最近似值

.67×43=29　=中數差的最近似值

2×29=58　=中五十分距離的最近似值

練習26：24÷2=12　=中數差的最近似值

1.18×12=14.2=平均差的最近似值

1.48×12=17.8=標準差的最近似值

練習27：學生2,3.4,5,與11做國家智力測驗比較好些（這些學生做國家智力測驗好些，其所得各點在線的上面——即線的左面）

練習30：

中級試驗分數……………	8	16	24	32	40
和國家智力測驗相關分數	56	70	85	98	111

練習31：

國家智力測驗	中級試驗
42	0
43	1
44	2
45	2
46	3
47	3
48	4
49	4
50	5

練習32：2,1,7,,8,5,6,3,9,10,4。

練習33：2,1,7;5,8及9,6,3,10,4。

練習34：(14歲)49;(53)15歲;($9\frac{1}{2}$歲)19;(10歲3個月)25;

(11歲5個月)34;(16歲)56;(17歲)58;(18歲)59;

(19歲)59;(20歲 59;(21)9歲9個月;(37)11歲10個月;

(46)13歲4個月；(智力年齡)13歲4個月；(47)13歲7個月；

(51)14歲6個月；(57)16歲5個月；(58)17歲；(59)18歲。

練習35：看練習下面的一段文章

練習36：第二圖均數，從左到右為 7.5,7.75,8,8.25和8.5，第四圖均數

6.5,7.25,8,8.75,和9.5。

練習37：.50。

練習38：看54圖

練習39：看52圖

練習40：相關係數=60±.04

練習41：相關係數=.56±.04

練習42：.905

練習43：看下表第4行

練習44：看下表第7與第10行

練習43與44答案表

變　　數	M	S	r	$P.E._r$	ΣG	R	r	ΣD^2	P	r
O.A.T.—N.I.T.	309	434	.712	.065	53.5	524	.757	769	.737	.753
O.A.T.—T.G.T.	312	39[illegible]	.782	.051	46	.591	.819	553	.811	.824
.O.A.T.—O.I.E,	392	474	.827	.042	50.5	.551	.783	630	.785	.799
S.A.T.—N.I.T.	252	315	.730	.061	54	.520	.753	692	.764	.779
S.A.T.—T.G.T.	256	317	.808	.046	39	.653	.871	437	.851	.862
S.A.T.—O.I.E.	306	377	.812	.045	51.5	.542	.774	644.5	.780	.794
N.I.T.—T.G.T.	222	283	.784	.051	44.5	.605	.832	478.5	.836	.848
N.I.T.—O.I.E.	250	337	.742	.059	47.5	.578	.808	561.8	.808	.821
T.G.T.—O.I.E.	272	309	.880	.030	41	.636	.855	434.5	.851	.862

O.A.T.=Otis Achievement Test(俄提斯成績測驗)

N.I.T.=National Intelligence Test(國家智力測驗)

T.G.T.=Terman Group Test(推孟團體測驗)

O.I.E.=Otis Intermediate Examination(俄提斯中級試驗)

S.A.T.=Stanford Achievement Test(斯丹福成績測驗)

練習46: .98,.92,.87,.60,.44,.98。

練習47: .81,95。

練習48: 97。

練習49 $r_{12.3}$ =.20,.33,.47,.67,.08,.22,.41,.88,.69,.46。

練習50: 標準差的比率=12.91:10

$$\text{新係數}=1-\left[\left(\frac{10}{12.91}\right)^2\times(1-.50)\right]=.70$$

練習51: $R_{0.12}$ =.58,.69.81.78,.76,.50,.36,.74,.78,.72。

練習52: 看練習43答案表第五行

練習53: .75,.82,.86,.82,,88,.90,.89,.92,.94。

中西名詞對照表

Accomplishment ratio 成業率

Alternative form 選擇式

Assumed mean 假設均數

Attenuation 減弱

Average 平均數

Bar graph 闊條圖

Barlow's Tables 巴羅氏表

Binet mental age 皮奈智力測驗

Binet-Simon Tests 皮奈—西門測驗

Bright, normal, and dull sections 聰明,中等,愚笨部分

"B score") B分數

Central tendency 集中趨勢

Classification Index 分類指數,分組指數

Class intervals 組距

Coefficient of alienation 轉換係數

Coefficient of Brightness 聰明係數

Coefficient of contingency 聯列係數

Coefficient of correlation 相關數係

calculation of coefficient fo correlation 相關係數的計算

probable error of coefficient of correlation 相關係數的機誤

Correction for attenuation 減弱校正

Correlation 相關

negative correlation 負相關

rank methods of computing

等級計算法

by unlike signs 異號求法

Correlation Chart 相關圖

Correlation ratio 相關率

Correspondence

Criterion 標準

Cumulative errors 累積錯誤

Deviation 差數

standard deviation 標準差

median deviation 中數差

Difference 差異

Difference method 差異法

Displacement

Distribution 分配

bimodal distribution grouped distribution 已歸類的分配

normal curve of distribution 分配的常態曲線

skewed distribution 偏斜分配

Educational quotient 教育商數

Errors 錯誤

errors of measurement 測驗的錯誤

Fallibility of test scores

Footrule 尺

Frequency 次數

normal surface of frequency 次數的常態面

Galton, Francis 高爾登

Geometric mean 幾何均數

Grade norms 年級常模

Grade status 年級地位

Grouping 歸類

"G score" G分數

Heterogeneity 異樣

Higher Examination 高級試驗

Histogram 直方圖

Homogeneity 整齊

Index of Brightness 聰明指數

Individual differences 個人差異

Intelligence quotient 智力商數

Intermediate Examination 中級試驗

Interpolation

Interpretation Chart 詮釋圖

Interquartile range 中五十分距

Non-linear relationship 非直線關係

Normal distribution 常態分配

Normal surface of distribution 分配的常態面

Normal surface of frequency 次數的常態面

Norms 常模

Otis Achievement Test 俄提斯成績測驗

Otis Classification Test 俄提斯分班測驗

Otis Correlation Chart 俄提斯相關圖

Otis Group Intelligence Scale 俄提斯團體智力量尺

Otis Self-Administering Tests of Mental Ability

Overlapping 重疊

Partial correlation 部分相關

Pearson, Karl 皮爾生

Percentage table 百分比表

Percentile curve 百分比曲線

Percentile graph 百分比曲線圖

Percentile ranks 百分比等級

Practice effect 練習的效率

Probability surface 機率面

Probable error 機誤

of a coefficient of correlation 相關係數機誤

of a difference 差異機誤

of a mean 均數機誤

of a standard deviation 標準差機誤

of coefficient of Partial and multiple correlation 部分相關與複相關係數機誤

Product-moment method 乘積率法

Prognostic test 預占測驗

Quartile scores 四分差分數

Range 全距離

Rank 等級

relative rank 比較等級

Percentile rank 百分比等級

Rank methods of computing

correlation 計算相關等級法
Rating scale
Regression equation 迴歸方程式，消長方程式
Regression line 迴歸線
Reliability 信度，可靠性
Reliability coefficient
Sampling 取樣
Scale chart 量尺圖
Scatter diagram 散佈圖
Semi-interquartile range
Skewness 偏斜
Spearman 司畢門
Spearman Footrule
Square roots 平方根
Standard deviation 標準差
Stanford Achievement Test 斯丹福成績測驗
Stanford Revision of the Binet-Simon Test 斯丹福修正皮奈——西門測驗
Statistical tables 統計學
Step graph 等級圖
Subject ages 學科年齡
Subject ratios 學科率
Symbols 符號
Table of correspondence
Table of products
Teachers marks 教師評斷分數
Terman, Lewis M. 推孟
Test scores 測驗分數
Three-track plan 三軌制
Thurstone 塞司通
Transmuting scores 轉移分數
True mental age 眞正智力分數
T-score method 求T分數法
T scores T分數
Universal Percentile Graph 普通百分比曲線圖
Unlike signs 異號
Validity 確度
Variability 差異
Weighting of tests 測驗之均衡
Yule 尤爾