Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2019**

Singularitätentheorie

Arbeitsblatt 23

Aufgabe 23.1. Es sei R ein kommutativer Ring. Zeige, dass der R-Modul R^n flach ist.

Aufgabe 23.2. Es sei R ein kommutativer Ring und $S \subseteq R$ ein multiplikatives System. Zeige, dass der R-Modul R_S flach ist.

Aufgabe 23.3. Es sei R ein kommutativer Ring und M ein flacher R-Modul. Es sei S eine R-Algebra. Zeige, dass $M \otimes_R S$ ein flacher S-Modul ist.

Aufgabe 23.4.*

Es sei R ein kommutativer Ring und M ein R-Modul. Zeige, dass M genau dann ein projektiver Modul, wenn es einen weiteren Modul N derart gibt, dass die direkte Summe $M \oplus N$ frei ist.

Aufgabe 23.5. Es sei K ein Körper und $R = K^n$ der Produktring. Zeige, dass jeder R-Modul M projektiv ist.

Aufgabe 23.6. Man gebe ein Beispiel für einen artinschen Ring und einen endlich erzeugten R-Modul M, der nicht projektiv ist.

Aufgabe 23.7. Zeige, dass es zu dem surjektiven Gruppenhomomorphismus

$$p\colon \mathbb{Z}^{(\mathbb{N}_+)} \longrightarrow \mathbb{Q},\, e_n \longmapsto \frac{1}{n},$$

keinen Gruppenhomomorphismus

$$i\colon \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Z}^{(\mathbb{N}_+)}$$

mit $p \circ i = \mathrm{Id}_{\mathbb{Q}}$ gibt. Folgere, dass der $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Q}$ nicht projektiv ist.

Aufgabe 23.8. Es sei R ein kommutativer Ring und M ein projektiver R-Modul. Es sei $T \subseteq R$ ein multiplikatives System. Zeige, dass M_T ein projektiver R_T-Modul ist.

Aufgabe 23.9. Es sei R ein kommutativer Ring und M ein projektiver R-Modul. Es sei S eine R-Algebra. Zeige, dass $M \otimes_R S$ ein projektiver S-Modul ist.

Aufgabe 23.10. Es sei R ein kommutativer Ring und M ein endlich erzeugter R-Modul. Zeige, dass M genau dann lokal frei ist, wenn es Elemente $f_1, \ldots, f_n \in R$ mit

$$(f_1, \ldots, f_n) = R$$

derart gibt, dass die M_{f_i} frei sind.

Aufgabe 23.11. Sei $R = \mathbb{R}[X, Y, Z]/\left(X^2 + Y^2 + Z^2 - 1\right)$. Zeige, dass der R-Modul der Kählerdifferentiale

$$\Omega_{R|\mathbb{R}} = RdX \oplus RdY \oplus RdZ/(XdX + YdY + ZdZ)$$

eingeschränkt auf die offenen Mengen $D(X)$, $D(Y)$, $D(Z)$ (also $\left(\Omega_{R|\mathbb{R}}\right)_X = \Omega_{R_X|\mathbb{R}}$ etc.) frei ist und dass damit $\Omega_{R|\mathbb{R}}$ lokal frei ist.

Aufgabe 23.12. Es sei R ein lokaler noetherscher Ring, M ein endlich erzeugter R-Modul und

$$\ldots \longrightarrow F_2 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

eine minimale freie Auflösung von M. Zeige, dass der Rang von F_i gleich der $R/\mathfrak{m}$-Dimension von $M_i \otimes_R R/\mathfrak{m}$ mit $M_i = \operatorname{kern}(\theta_{i-1})$ ist.

Aufgabe 23.13. Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring und sei $M = R/\mathfrak{b}$ mit einem Ideal $\mathfrak{b} \neq (1)$. Zeige, dass dann für jedes Ideal $\mathfrak{a} \neq (1)$ die natürliche Abbildung

$$\mathfrak{a} \longrightarrow R/\mathfrak{b}$$

nicht surjektiv ist.

Aufgabe 23.14. Wir betrachten den Restklassenhomomorphismus

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/(2).$$

Zeige, dass für jede Primzahl $p \neq 2$ die induzierte Abbildung

$$(p) \longrightarrow \mathbb{Z}/(2)$$

surjektiv ist.

Aufgabe 23.15. Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring und sei M ein endlich erzeugter R-Modul. Es sei

$$\varphi\colon F \longrightarrow M$$

ein surjektiver R-Modulhomomorphismus mit einem freien Modul F, wobei eine Basis auf ein minimales Erzeugendensystem abgebildet werde. Zeige, dass die Einschränkung von φ auf einen echten Untermodul $U \subseteq F$ nicht surjektiv ist.

Aufgabe 23.16. Es sei R ein Integritätsbereich und $f \in R$, $f \neq 0$. Bestimme die minimale freie Auflösung des R-Moduls $R/(f)$.

Aufgabe 23.17. Es sei R ein kommutativer Ring und M eine Matrix über R, die eine injektive lineare Abbildung

$$M\colon R^m \longrightarrow R^n$$

definiere. Zeige, dass die projektive Dimension des Kokerns ≤ 1 ist.

Aufgabe 23.18. Es sei K ein Körper und sei $A = K[X_1, \ldots, X_n]/(F)$ mit $F \neq 0$. Zeige, dass der A-Modul der Kählerdifferentiale $\Omega_{A|K}$ eine endliche freie Auflösung besitzt.

Tipp: Siehe Bemerkung 12.9.

Aufgabe 23.19. Es beschreibe R eine zweidimensionale ADE-Singularität. Zeige, dass es im maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ jeweils zwei Elemente f, g derart gibt, dass der Restklassenring $R/(f, g)$ eine endliche freie Auflösung ähnlich zu Beispiel 23.17 besitzt.

Aufgabe 23.20. Es sei R eine zweidimensionale ADE-Singularität. Beschreibe (den Anfang) die minimale freie Auflösung des Restklassenkörpers.

Aufgabe 23.21. Es sei R ein dreidimensionaler lokaler regulärer Ring. Konstruiere eine endliche freie Auflösung des Restklassenkörpers ähnlich zu Beispiel 23.17.

Aufgabe 23.22. Es sei R ein kommutativer Ring, M ein R-Modul und

$$0 \longrightarrow F_n \longrightarrow \ldots \longrightarrow F_2 \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

eine endliche freie Auflösung. Zeige, dass sämtliche Kerne zu $d_i\colon F_{i+1} \to F_i$ eine endliche freie Auflösung besitzen.

Abbildungsverzeichnis