小森數藏先生 編纂

受驗應用 代數理論的問答

附諸官立學校試驗問題

大阪書肆 積善館出版

緒言

此書ハ曩ニ算術ノ部ノ凡例ニモ記載セシ如ク受驗者及ビ速成主義ヲ以テ學バント欲スルモノヽ爲メニ作リシモノナルヲ以テ畢竟其要點ノミヲ抜萃シ之レニ私意ヲ加ヘタルモノナレバ此書ニ據テ代數學ノ理ヲ極ムルニ足ルモノニア

ラズ然レモ必要欠クベカラザルモノハ漏ラサズ掲ゲタルヲ以テ之レヲ揩揥トシテ學ベバ其蘊奧ニ達スルヿ難キニアラザルナリ

明治廿五年九月中浣　編者識ス

受驗應用 代數理論的問答上卷

大阪　小森數藏編纂

○界說問題

●代數學トハ如何

代數學トハ數字或ハ字母ヲ以テ數量ニ換ヘ演算ノ術理ヲ講究スル學ナリ

●代數量トハ如何

代數量トハ正負ノ二量之レナリ此二量ハ互ニ反對ノ意ヲ含ムモノナリ例ヘハ財產ヲ正量トスレハ負債ハ負量ナリ又右ヘ行クモノヲ正量トスレハ左リヘ行クモノハ負量ナル、ガ如シ

●如何ナルモノヲ記號ト云フヤ

量ノ關係或ハ演算ヲ指示スルモノナリ

●算術ノ諸界說及ヒ定理ヲ代數學ニ直ニ適用スルヿヲ得ルヤ

代數學ニ於テモ其數量ノ意義算術ノ範圍ヲ超ヘサルモノハ直ニ用フルヿヲ得ト雖モ或ハ用ヒテ不合理ナルモノ多シ

●代數式トハ如何

代數式トハ數量ノ一項或ハ數項ヲ關係ノ符号ニ由リテ連結シタルモノナリ

●代數學ノ範式トハ如何

範式トハ其演算或ハ原理ヲ代數語則チ代數記号ヲ以テ指定セシモノナリ

●加法ノ界説ヲ示セ

加法トハ二量或ハ夫レヨリ多クノ量ヲ合シテ其總計ヲ求ムル法ナリ

●減法ノ界説ヲ示セ

減法トハ減量ニ加ヘテ被減量ニ等シクナル如キ量ヲ發見スル法ナリ

●乘法ノ界説ヲ示セ

乘法トハ同量ヲ相加フルノ簡法ナリ

●係數トハ如何

係數トハ同量ヲ累加スル回數ヲ云フナリ例ヘハ　$a+a+a+a=4a$　ニ於テ4ハaナル量ノ係數ナリ

●指數トハ如何

指數トハ同量ヲ幾乘スル回數ナリ例ハ$a\times a\times a\times a=a^4$ニ於テ4ハ$a$ナル量ノ指數ナリ

●除法ノ界説ヲ示セ

除法トハ或ル量ガ同種類ナル他ノ量ノ幾倍アルヤヲ發見スル法ナリ故ニ除法ハ乘法ノ還原ナリ

●昇冪及ヒ降冪ニ排列スルトハ如何

昇冪ニ排列スルトハ多項式ノ或ル字母ノ指數ノ小ナルモノヨリ順次ニ大ナルモノニ列記スルナリ設令ハ　$A+Bx+Cx^2+Dx^3$　ノ如キハxノ昇冪ニ排列シタルモノナリ

又降冪ノ順ニ排列スルトハ或ル多項式ノ或ル字母ノ指數ノ大ナルモノヨリ順次ニ小ナル者ニ列記スルナリ設令ハAx^3+Bx^2+Cx+D此ノ如ハxノ降冪ノ順ニ排列シタルナリ

●係數乘法トハ如何

係數乘法トハ實法トモ或ル變數ノ降冪ノ順ニ排列シタル多項式ナルトキ其變數ヲ省キ演算ヲ簡畧ニスル法ナリ

●係數除法トハ如何

係數除法トハ係數乘法ト同シ

●恒同式(或ハ両同式或ハ一致式)トハ如何

恒同式トハ二ツノ代數式相等シキモノヲ等号ノ左右ニ置キ其變數ニ如何ナル數ヲ代用スルモ両式相等シキ數ヲ得ルモナリ又恒同式ニ限リ等号即チ＝ニ換フルニ≡ヲ用フ

●代用法トハ如何

代用法トハ代數式ノ或ル字母ニ他ノ數或ハ他ノ式ヲ入換フル法ナリ

●因子分割法トハ如何

因子分割法トハ二ツ或ハソレヨリ多クノ因子ヨリナル積ノ原因子ヲ發見スル法ナリ

●對稱式トハ如何

對稱式トハ代數函數式ニ於ケル任意二ツノ字母ヲ取換ユルモ其式ガ變セザルモノヲ云フ

●環列式トハ如何

環列式トハ記號ノミ變シテ式ノ變セサル代數函數式ナリ然レ𪜈前者ト通シテ對稱式ト云フ又數項ノ和ヨリ成ル對稱式ハ第一項ノ前ニ$\sum$ナル配號ヲ記シテ他ノ項ヲ記サズ數因子ノ連乘積ヨリ成ル對稱式ハΠナル記號ヲ第一因子ノ前ニ記シテ他ノ因子ヲ記サズ設令ハ $ab+bc+ca$ ナル對稱式ヲ記スルニハ $\sum ab$ 此ノ如シ $(a-b)(b-c)(c-a)$ ナル對稱式ヲ記スルニハ $\Pi(a-b)$ 此ノ如ク記スルナリ

●二式或ハ衆式ノ公因子トハ如何

二式或ハ衆式ノ公因子トハ一式ヲ以テ各式ヲ整除シ得ヘキ式ナリ

●二式或ハ衆式ノ最高公因子トハ如何

二式或ハ衆式ノ最高公因子トハ公因子中ノ或ル變數ノ最高指數ヲ有シ且ツ最大係數ヲ有スル式ナリ

●公倍數トハ如何

公倍數トハ二式或ハ衆式ヲ以テ整除シ得ヘキ式ナリ

●最底公倍數トハ如何

最底公倍數トハ公倍數中或ル變數ノ最底指數ヲ有シ且ツ最小ナル係數ヲ有スルモノナリ

●最高公因子及ヒ最低公倍數ノ一項式多項式ノ區別如何

一項式トハ各式ガ單純ノ一項式或ハ各式カ容易ニ分割シ得ヘキモノナリ

多項式トハ各式ガ容易ニ分割シ得サルモノナリ

●最高公因子及ヒ最低公倍數ヲ畧記スルニハ如何ナル符号ヲ用フルヤ

最高公因子ハ (H,C,F)　最低公倍數ハ (L,C,M) ナリ

●分數ノ界説ヲ示セ

分數トハ一量ヲ以テ他ノ一量ヲ除シタル商ヲ顯ハス代數式ナリ設令ハaヲ一量トシ他ノ一量ヲbトスレバ $b|a$ ハ分數式ナリ又一量ヲ $a-b$ トシ他ノ一量ヲ $c-d$ トスレバ $\frac{c-d}{a-b}$ ハ分數式ナリ此他分數式ノ界説ハ算術ニ於テ示シタルガ如シ

●相等式トハ如何

二量ノ相等シキヲ示ス代數式ノ總稱ナリ設令ハ $x \div b$　$a-c$ ガ相等シキ𪜈 $x+b=a-c$ 此ノ如ク記スルヲ相等式ト云フナリ

●方程式トハ如何

方程式トハ前ノ相等式ニ於テxニ特別ノ値ヲ代入スル𪜈両邊相等シキヲ得ル式ナリ

●何ヲカ方程式ノ根或ハ商ト云フヤ

方程式ノ兩邊ニ含ム未知量ニ代入シテ兩邊相等シクナラシムル者ナリ則チ本式ニ適合スル未知量ノ値ナリ

●方程式ノ一元二元及ヒ多元ト云フハ何ナルヤ

方程式中未知量一個ヲ含有スル𪜈一元方程式ト云ヒ未知量二個ヲ含有スル𪜈二元方程式ト云ヒ三個ヲ含有スル𪜈三元ノ方程式ト云フ逐テ此ノ如シ而シテ二個以上ヲ含有スルモノヲ通シテ多元ト云フ

●方程式ノ一次二次及ヒ高次等ト云フハ何ナルヤ

方程式ノ次數ハ方程式中ニ含ム未知量ノ指數ノ大ナルモノヲ以テ其方程式ノ次數トナス或ハ一項中ニ多クノ未知量ヲ含ム𪜈ハ其指數ノ和ノ大ナルモノヲ以テ其次數トス

●方程式ノ兩邊(或ハ兩節)トハ如何

方程式ノ等号ヨリ左ニアル量ヲ前邊(或ハ前節)ト云ヒ右ニアル量ヲ後邊(後節)ト云フ

●通同方程式(同商方程式)或ハ(同値方程式)トハ何ソヤ

二個以上ノ方程式ニ同根ヲ有スル𪜈之レヲ通同方程式ト云フ

●無究大及ヒ無究小ノ界説ヲ示セ

無究大トハ或ル一ノ變量ヲ無究ニ增大セシモノニシテ之レヲ顯スニ(∞)ヲ以テシ

無究小トハ或ル一ノ變量ヲ無究ニ減少シタルモノニテ之レヲ顯スニ(0)ヲ以テス

○法則問題

●加法ノ法則ヲ示セ

二個若シクハ數個ノ代數式ヲ加フルニハ各項ヲ逐次ニ其符号ヲ變セスシテ記載スヘシ

●減法ノ法則ヲ示セ

減式ノ正負ヲ變シテ被減式ニ加フベシ

●括弧用法ノ法則ヲ示セ

第一正号ヲ有スル括弧ヲ取リ去ルハ弧項内ナル正負ヲ故ノ如クスベシ

第二二項或ハ數項ヲ括弧ヲ以テ括ル𪜈各項ノ正負ヲ變セザレバ括弧ノ前ニ正号ヲ置クベシ

第三負号ヲ有スル括弧ヲ取リ去ル𪜈ハ括弧内ナル各項ノ正負ヲ悉ク變ズベシ

第四二項或ハ數項ヲ括弧ヲ以テ括ル𪜈各項ノ正負ヲ變ズレバ括弧ノ前ニ負号ヲ置クヘシ

●乘法ノ法則ヲ示セ

第一兩因子ノ係數ノ相乘積ヲ積ノ係數トナスベシ

第二兩因子ノ同字母ノ指數ノ和ヲ積ノ同字母ノ指數トナスベシ

第三兩因子ノ正負同号ナレバ積ヲ正トナシ異号ナレバ積ヲ負トナスベシ

●除法ノ法則ヲ示セ

第一法ノ係數ヲ以テ實ノ係數ヲ除シ得商ヲ商ノ係數トナスベシ
第二法ノ指數ヲ同字母ナル實ノ指數ヨリ減シ餘數ヲ商ノ指數トスベシ
第三實法同号ナレバ商ヲ正トナシ異号ナレバ商ヲ負トナスベシ

●多項式乘法ノ法則ヲ示セ

實ノ各項ト法ノ各項ノ相乘積ヲ合スベシ

●多項式乘法ノ演算ノ簡法ヲ一例ヲ擧ケテ之レヲ示セ

今假リニ $x-y+z$ ニ $a+b-c$ ヲ乘スルトセハ

$x-y+z$ ……實
$a+b-c$ ……法

$ax-ay+az$ ……………… 實 $(+a)$ 倍
$bx-by+bz$ ……………… 實 $(+b)$ 倍
$-cx+cy-cz$ ……………… 實 $(-c)$ 倍

$ax-ay+az+bx-by+bz-cx+cy-cz$ ……………… 全乘積

●多項式除法ノ法則ヲ示セ

第一實法兩式ノ同字母ノ降冪ノ順ニ排列スベシ
第二法ノ首項ヲ以テ實ノ首項ヲ除シ得商ヲ商ノ首項トナスベシ
第三商ノ首項ト全法ノ相乘積ヲ實ヨリ減スベシ
第四所得ノ餘數ヲ新實トシ前同法ヲ繰返シ實盡キテ止ム否ラサレハ實ノ首項ノ指數法ノ首項ノ同字母ノ指數ヨリ小ナルニ至テ止ム
第五若シ餘數アレバ分數ノ形狀ニ作リテ前所得ノ後ニ附スベシ

●多項式除法ノ演算ノ簡法ヲ一例ヲ擧ケテ之レヲ示セ

今假ニ $6x^4+x^3y-13x^2y^2+41xy^3-35y^4$ ヲ $2x^2+3xy-5y^2$ ニテ除スルトセハ

實 $6x^4+x^3y-13x^2y^2+41xy^3-35y^4$ | $2x^2+3xy-5y^2$ ……………… 法
$6x^4+9x^3y-15x^2y^2$ | $3x^2-4xy+7y^2$ ……………… 商
$-8x^3y+2x^2y^2+41xy^3$
$-8x^3y-12x^2y^2+20xy^3$
$14x^2y^2+21xy^3-35y^4$
$14x^2y^2+21xy^3-35y^4$

●$3x^2+4x+5=2x+6$ ヲ乘スル演算ヲ係數乘法ニテナスベシ

$3+4+5$
$2+6$
$6+8+10$
$18+24+30$
$6+26+34+30$

$6x^3+26x^2+34x+30$

●$40x^3-2x^2+11x-28$ ヲ $5x-4$ ニテ除スル演算ヲ係數除法ニテナスベシ

$40-2+11-28 \mid 5-4$
$40-32 \qquad \mid 8+6+7$
$30+11$
$30-24$
$35-28$
$35-28$

$8x^2+6x+7$

●$x=5,\ y=4$ トスレバ $x^3+3x^2y-4xy^2+y^3$ ノ値ヲ求ムル演算ヲ示セ
$x^3+3x^2y-4xy^2+y^3=5^3+3\times5^2\times4-4\times5\times4^2+4^3=125+300-320+64=169$

●$x=y-1$ トセハ x^3+2x^2-3x+1 ノ値ヲ求ムル演算ヲ示セ
$x^3+2x^2-3x+1=(y-1)^3+2(y-1)^2-3(y-1)+1=y^3-3y^2+3y-1+2y^2-4y+2$
$-3y+3+1=y^3-y^2-4y+5$

●因子ヲ分割スル順序ハ如何
第一多項式ノ各項ニ通有ナル因子ヲ發見スルヿ
第二若シ通因子アレバ之レヲ括弧ノ外ニ置キ其他ノ因子ヲ固有ノ正負号ヲ以テ連結シ括弧内ニ置クヿ
第三括弧内ノ式某公式ノ形狀ニ相當スルヤ否ヤヲ鑑定スルヿ
第四若シ公式ノ形狀ニ相當セハ直ニ其両因子ニ分割スベシ若シ然ラサルモ補欠シテ之レニ相當セバ補欠シタル後チ前ノ如ク分割スベシ
第五若シ補欠スルモ相當セザレバ私考ノ法方ヲ以テ分割スベシ

●Σab ハ $a\ b\ c$ ニ關シテノ對稱式ナリ之レヲ普通式ニ改ムレバ如何
答 $ab+bc+ca$

●$\Pi(a-b)$ ハ $a\ b\ c$ ニ關スル對稱式ナリ之レヲ普通式ニ改ムレバ如何
答 $(a-b)(b-c)(c-a)$

●$\Sigma bc(y-z)$ ハ $a\ b\ c$ ニ關シ且ツ $x\ y\ z$ ニ關スル對稱式ナリ之レヲ普通式ニ改ムレバ如
答 $bc(y-z)+ca(z-x)+ab(x-y)$

●一項式最高公因子ノ法則ヲ示セ
諸式ヲ元因子ニ分割シ其通有ナル最底冪ヲ盡ク連乘スベシ

●多項式最高公因子ノ法則ヲ示セ
第一両多項式ヲ同シ字母ノ冪數ノ順ニ排列シ若シ一項式因子ノ省クヘキモノアレバ之レヲ省クベシ又両式ノ通因子ハ最高公因子ノ一因子トス
第二省式ノ中チ底冪ノ式ヲ以テ他ノ式ヲ除シ餘數ノ次數法ノ次數ヨリ小ナルニ至テ止ム但シ此間式ハ一項式因子ヲ省クヿアリ一項式因子ヲ補フテ實ノ首項ヲ法ノ首項ニテ除スヘキモノニ改作スルヿアリト知ルヘシ
第三第一次除法ノ餘數ヲ第二次ノ法トシ第一次ノ法ヲ第二次ノ實トシ除法ヲ行ヒ第二

次ノ餘數ヲ第三次ノ法トナシ第二次ノ法ヲ實トシ除法ヲ行フ逐テ此ノ如ク迭ヒニ除シテ竟ニ餘數盡キテ止ム然ル後末ノ餘數ヲ所題ノ最高公因子トス若シ初メ省ク所ノ通因子アレバ之レヲ乘シ所要ノ最高公因子トナス

第四衆多項式ノ最高公因子ヲ求メントセハ先ツ両式ヲ撰テ之レガ最高公因子ヲ求メ然ル後所得ノ最高公因子ト第三式トヲ以テ之レガ最高公因子ヲ求メ之レト第四式ニテ求ムルヿ前ノ如クス逐テ此ノ如クシテ式盡ルニ至テ止ム則チ最後ノ最高公因子ハ所題ノ最高公因子ナリ

●一項式最底公倍數ノ法則ヲ示セ

第一所題ノ各式ヲ元因子ニ分割シ各因子ノ最高冪ヲ取ルヘシ

第二所得ノ因子ヲ盡ク連乘スヘシ

●多項式最底公倍數ノ法則ヲ示セ

第一両式ノ最高公因子ヲ求メ以テ一式ヲ除シ得商ヲ他ノ一式ニ乘スヘシ

第二衆數ノ最底公倍數ヲ求メントセバ先ツ両式ノ最底公倍數ヲ求メ之ト第三式トノ最底公倍數ヲ求ム逐テ此ソ如ク同法ヲ操返シ式盡テ止ム最後ノ最底公倍數ヲ以テ所題ノ最底公倍數トス

●分數式ヲ最簡式ニ化スル法則ヲ示セ

第一分母子ヲ元因子ニ分割シ然ル後分母子ノ通因子ヲ去ルヘシ

第二分母子ノ最高公因子ヲ求メ之ヲ以テ分母子ヲ除スヘシ

●假分數ヲ混分數或ハ整數ニ化スル法則ヲ示セ

分母ヲ以テ分子ヲ除シ所得ノ商ヲ整數式トスベシ若シ餘數アレバ之レヲ分數式ニ作リ餘數ノ正負號ヲ附シテ整數式ノ後ニ附スヘシ

●混分數ヲ假分數ニ化スル法則ヲ示セ

所題ノ整數分ニ分數分ノ分母ヲ乘シ分數ノ分子ヲ加減シ之レヲ分母ノ上ニ置クヘシ

●分數式ノ分母子ノ因子ヲ轉倒スル法則ヲ示セ

第一一因子ヲ轉倒セントセバ指數ノ正負ヲ變換スヘシ

第二分數式ヲ整數式ニ化セントセハ分母ノ指數ヲ變換シテ之ヲ分子ノ因子ニ配附ス

●異分母分數ヲ同分母ニ化スル法則ヲ示セ

諸分數ノ分母ノ最底公倍數ヲ求メテ最底通分母トナス而シテ其最底通分母ヲ各分數ノ分母ニテ除シ之ニ對スル分子ヲ乘シ所得ノ乘積ヲ所要ノ分子トス

●分數加法ノ法則ヲ示セ

諸分數ヲ最底通分母ヲ有スル式ニ化シ所得ノ分數式ノ分子ヲ合スヘシ

●分數減法ノ法則ヲ示セ

両式ヲ最底通分母ヲ有スル式ニ化シ其減式ノ分子ヲ被減式ノ分子ヨリ減スヘシ

●分數乘法ノ法則ヲ示セ

分子ノ相乘積ヲ分子トシ分母ノ相乘積ヲ分母トスベシ若シ分母子ニ公因子アレバ之レヲ最簡式トナスヘシ但シ整數式及ヒ混分數ハ仮分數ニ化スベシ

●分數除法ノ法則ヲ示セ

法ノ分母子ヲ轉倒シテ實ト相乘スヘシ但シ整數式及ヒ混分數式ハ仮分數ニ化スベシ

●重分數ヲ常分數ニ化スル法則ヲ示セ

分母子ナル諸分數ノ分母ノ最底公倍數ヲ分母子ニ乘スベシ

●一元一次方程式ノ未知量ノ値ヲ求ムル法則ヲ示セ

方程式ノ列項ニ分數アレバ先ツ其分母ヲ去リ未知量ノ諸項ヲ前邊ニ集メ既知量ノ諸項ヲ後邊ニ集メ而シテ前後兩邊ヲ最簡式ニ化シ未知元ノ係數ヲ以テ兩邊ヲ除スベシ

●一元一次方程式應用問題ヲ解クノ法則ヲ示セ

xヲ以テ未知量ノ一ニ命シ猶ホ他ニ未知量アレバ題意ニ從テ其代數式ヲ作リ尙題意ヲ按シ適等量ヲ求メ方程式ヲ作ルヘシ

●一次通同方程式ヲ解スル法則ヲ問フ

一式ヲ以テ他ノ各式ト一々連合シテ一元ヲ消去シ以テ新方程式ヲ作リ又其所得ノ方程式ノ一式ヲ以テ他ノ各式ト連合シ一元ヲ消去シ逐テ此ノ如クセバ最後ノ一式一元ヲ有スルニ至ルヘシ此式ヨリ一元ヲ發見シ之レヲ二元ヲ有スル式ニ代入シ又一元ヲ得次ニ此二元ヲ三元ヲ有スル式ニ代用セバ又一元ヲ得逐テ此ノ如クセバ終ニ各元ヲ得ヘシ

○理論問題

●代數上ノ和ハ算術上ノ和ノ如ク前量ヨリ増加スルヿアリ否ラズシテ減少スルヿアルハ何ノ理ナルヤ

代數量ノ和原量ヨリ減少スルノ理ハ正負ノ二量アルヲ以テ互ニ消滅スルガ故ナリ

●二量ノ和ト差ヲ合スレバ被減量ノ二倍ヲ得其理如何

二量ヲx及ビyトスレバ二量ノ和ハ$(x+y)$ニシテ二量ノ差ハ$(x-y)$ナリ今之レヲ合スレバ

$(x+y)+(x-y)=x+y+x-y=2x$

●$(ax+by+cz)+(bx+cy+az)+(cx+by+az)=(a+b+c)(x+y+z)$ナルヿヲ證セヨ

$(ax+by+cz)+(bx+cy+az)+(cx+by+az)=ax+by+cz+bx+cy+az+cx+ay+bz$

$=ax+bx+cx+ay+by+cy+az+bz+cz=(a+b+c)x+(a+b+c)y+(a+b+c)z=$

$(a+b+c)(x+y+z)$

●二量ノ和ヨリ差ヲ減ズレバ原減量ノ二倍ヲ得其理如何

$(x+y)-(x-y)=x+y-x+y=2y$

●代數學ニ於テハ減ジテ原量ヨリ大トナルヿアルハ如何ナル理ナルヤ

負量ヲ減ズレバ正量トナルヲ以テ原量ヨリ大トナルヿアルナリ

●$-(-(-(\cdots\cdots(-a)\cdots\cdots)))$ナル式ニ於テ$+a$或ハ$-a$トナルハ何故ナルヤ

負号ヲ帶ビタル括弧偶數ナレバ正トナリ奇數ナレバ負トナルヲ以テ$(+a)$トナリ或ハ

$(-a)$トナルナリ

● $a^5\times a^4=a^{5+4}$ ナルコトヲ證セヨ

$a^5=aaaaa,\ a^4=aaaa$ 故ニ $a^5\times a^4=(aaaaa)\times(aaaa)=aaaaaaaaa=a^9=a^{5+4}$

●次ノ四式ヲ證セヨ

(1) $(+a)\times(+b)=+ab$, (2) $(+a)\times(-b)=-ab$, (3) $(-a)\times(+b)=-ab$, (4) $(-a)\times(-b)=+ab$

設令バ a ヲ四 b ヲ五トスレバ $(+a)\times(+b)=(+4)\times(+5)=(+4)\times(1+1+1+1+1)$

$=+4+4+4+4+4=+20,$

$(+a)\times(-b)=(+4)\times(-5)=(+4)\times(-1-1-1-1-1)=-4-4-4-4-4=-20,$

$(-a)\times(+b)=(-4)\times(+5)=(-4)\times(+1+1+1+1+1)=-4-4-4-4-4=-20,$

$(-a)\times(-b)=(-4)\times(-5)=(-4)\times(-1-1-1-1-1)=-(-4)-(-4)-(-4)-(-4)-(-4)$

$=+4+4+4+4+4=+20$

● $(+a)\times(\pm b)=\pm ab$ ナルヲ證セヨ

前題ノ理ニヨリ $(+a)+(+b)=+ab$ ニシテ $(+a)+(-b)=-ab$ ナリ故ニ $(+a)\times(\pm b)$

$=\pm ab$

● $(-a)\times(\pm b)=\mp ab$ ナルヲ證セヨ

$(-a)\times(+b)=-ab$ ニシテ $(-a)\times(-b)=+ab$ ナリ故ニ $(-a)\times(\pm b)=\mp ab$

● $(a^3)^4=a^{3\times4}$ ナルヲ證セヨ

$(a^3)^4=a^3\times a^3\times a^3\times a^3=(aaa)\times(aaa)\times(aaa)\times(aaa)=aaaaaaaaaaaa=a^{12}=a^{3\times4}$

●兩量ノ和ノ平方ハ各量ノ平方ノ和ニ各量ノ相乘積ニ倍ヲ加ヘタルモノニ等シ其理如何

兩量ヲ a 及 b トスレバ $(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a(a+b)+b(a+b)=a^2+2ab+b^2$……(甲)

●兩量ノ差ノ平方ハ各量ノ平方ノ和ヨリ各量ノ相乘積ニ倍ヲ減ジタルモノニ等シ其理如何

$(a-b)^2=(a-b)\times(a-b)=a(a-b)-b(a-b)=a^2-ab-ab+b^2=a^2-2ab+b^2$ …………(乙)

●兩量ノ和ト差トノ相乘積ハ兩量ノ平方ノ差ニ等シ其理如何

$(a+b)\times(a-b)=a(a+b)-b(a+b)=a^2+ab-ab-b^2=a^2-b^2$ ……………………(丙)

右甲乙丙ノ三結果ヲ乘法ノ三公式ト稱シ其應用少ナカラズ學者ヨロシク記憶スベシ

● $(ab+2bc)^2=a^2b^2+4ab^2c+4b^2c^2$ ナルヲ證セ但シ乘法三公式ヲ應用スベシ以下之レニ倣フ

$(ab+2bc)^2=(ab)^2+2(ab)(2bc)+(2bc)^2=a^2b^2+4ab^2c+4b^2c^2$

● $(a+b-c)^2=a^2+2ab-2ac+b^2-2bc+c^2$ ナルヲ證セヨ

$(a+b-c)^2=\{(a+b)-c\}^2=(a+b)^2-2(a+b)c+c^2=a^2+2ab+b^2-2ac-2bc+c^2$

● $(a+b+c)(a-b+c)=a^2+2ac+c^2-b^2$ ナルヲ證セヨ

$(a+b+c)(a-b+c)=\{(a+c)+b\}\{(a+c)-b\}=(a+c)^2-b^2=a^2+2ac+c^2-b^2$

● $(a\pm b\pm c)(a\pm b\mp c)=a^2\pm2ab+b^2-c^2$ ナルヲ證セヨ

$(a\pm b\pm c)(a\pm b\mp c)=\{(a\pm b)\pm c\}\{(a\pm b)\mp c\}=(a\pm b)^2-c^2=a^2\pm2ab+b^2-c^2$

● $(a\pm b\mp c)(a\mp b\mp c)=a^2-b^2+c^2\mp2ac$ ナルヲ證セヨ

$(a\pm b\mp c)(a\mp b\mp c)=\{(a\mp c)\pm b\}\{(a\mp c)\mp b\}=(a\mp c)^2-b^2=a^2\mp 2ac+c^2-b^2$
$=a^2-b^2+c^2\mp 2ac$

● $(a^2+ab+b^2)(a-b)=a^3-b^3$ ナルヲ證セヨ
$(a^2+ab+b^2)(a-b)=(a^2+ab+b^2)a-(a^2+ab+b^2)b=a^3+a^2b+ab^2-a^2b-ab^2-b^3=a^3-b^3$

● $(a^2-ab+b^2)(a+b)=a^3+b^3$ ナルヲ證セヨ
$(a^2-ab+b^2)(a+b)=a(a^2-ab+b^2)+b(a^2-ab+b^2)=a^3-a^2b+ab^2+a^2b-ab^2+b^3=a^3+b^3$

● $(a^3-a^2b+ab^2-b^3)(a+b)=a^4-b^4$ ナルヲ證セヨ
$(a^3-a^2b+ab^2-b^3)(a+b)=a(a^3-a^2b+ab^2-b^3)+b(a^3-a^2b+ab^2-b^3)=a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3$
$+a^3b-a^2b^2+ab^3-b^4=a^4-b^4$

● $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=a_4+a^2b^2+b^4$ ナルヲ證セヨ
$(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=\{(a^2+b^2)+ab\}\{(a^2+b^2)-ab\}=(a^2+b^2)^2-a^2b^2=a^4+2a^2b^2+b^4$
$-a^2b^2=a^4+a^2b^2+b^4,$

● $(a-b+c-d)(a-b-c+d)=a^2+b^2-c^2-d^2-2ab+2cd$ ナリ此證ヲ求ム
$\{(a-b)+(c-d)\}\{(a-b)-(c-d)\}=(a-b)^2-(c-d)^2=a^2-2ab+b^2-(c^2-2cd+d^2)$
$=a^2-2ab+b^2-c^2+2cd-d^2,$

● $(x+a)(x+b)=x^2+px+q$ ナル式ニ於テ $p=a+b,\ q=ab$ ナルヲ證セヨ
$(x+a)(x+b)=x(x+a)+b(x+a)=x^2+ax+bx+ab=x^2+(a+b)x+ab$ ……………(丁)

● $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ ナルヲ證セヨ
$(a+b)^3=(a+b)^2(a+b)=(a^2+2ab+b^2)(a+b)=a^2(a+b)+2ab(a+b)+b^2(a+b)=a^3+a^2b$
$+2a^2b+2ab^2+ab^2+b^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^2,$

● $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ ナルコトヲ證セヨ
$(a-b)^3=(a-b)^2(a-b)=(a^2-2ab+b^2)(a-b)=a(a^2-2ab+b^2)-b(a^2-2ab+b^2)=a^3-2a^2b$
$+ab^2-a^2b+2ab^2-b^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3,$

● 如何ナル數ニテモ其零乘冪ハ一個ナルコトヲ證セヨ
某數ヲ a トセバ $a^0=a^{m-m}=\dfrac{a^m}{a^m}=1$ ……(戊)之レニ由リテ a ガ b トナルモ c トナルモ此理變ズルコトナシ故ニ題言ノ如シ

● $a^8\div a^5=a^{8-5}$ ナルヲ證セヨ
積ノ指數ハ實ノ指數ト法ノ指數トノ和ナリ然ルニ除法ハ乘法ノ還元ナルヲ以テ實ノ指數ヨリ法ノ指數ヲ減ズレバ商ノ指數ナルベシ故ニ $a^8\div a^5=a^{8-5}$

● $(-ab)\div a=-b$ ヲ證セヨ
乘法ニ於テ兩因子異号ナレバ積ハ負ナリ然ルニ除法ハ乘法ノ還元ナルガ故ニ實負ニシテ法正ナレバ商ハ必ズ負ナラザルヲ得ズ故ニ $(-ab)\div a=-b$ ナルコト明カナリ

● $(-ab)\div(-a)=b$ ナルヲ證セヨ

前同理ニ由リテ知ルベシ

● $ab\div(-a)=-b$ ナルヲ證セヨ

乘法ニ於テ同號相乘バ正ナリ然ルニ實正ニシテ法負ナレバ商ハ必ズ負ナルベシ故ニ $ab\div(-a)=-b$ ナルヿ明カナリ

● $a^5\div a^8=a^{-3}$ ナルヿヲ證セヨ

$a^5\div a^8=\frac{a^5}{a^8}=a^{5-8}=a^{-3}$ ナリ

● $(a+b)\div c=a\div c+b\div c$ ナルヿヲ證セヨ

$(a+b)\div c=(a\div c\times c+b\div c\times c)\div c=(a\div c+b\div c)\times c\div c=a\div c+b\div c$

● $(a-b)\div c=a\div c-b\div c$ ナルヿヲ證セヨ

$(a-b)\div c=(a\div c\times c-b\div c\times c)\div c=(a\div c-b\div c)\times c\div c=a\div c-b\div c$

● $(-a)\div(\pm b)=\mp a\div b$ ナルヿヲ證セヨ

實法同号ナレバ商ハ正ニシテ異号ナレバ商ハ負ナリ然ルニ本題ノ實負ナルヲ以テ法ノ複号ノ上ヲ取レバ商ハ負トナリ下ヲ取レバ商ハ正トナル故ニ商ノ複号ハ法ノ複号ノ反對トナルナリ

● 零ハ如何ナル數ヲ以テ除スルモ零ナルヲ證セヨ

$0=a-a$ トスレバ $0\div b=(a-a)\div b=a\div b-a\div b=0$ ナリ此理ニヨレバ b ガ如何ナル數ニ變ズルモ結果ニ於テ變ズルヿナシ故ニ題言ノ如シ

● $(a^m\mp b^m)\div(a+b)=a^{m-1}-a^{m-2}b\cdots\cdots b^{m-1}$ ニ於テ m 奇數ナレバ整除シ得ベク m 偶數ナレバ整除シ得ズト云フ其理如何

多項式除法ニ於テ第一商 a^{m-1} ヲ得タル片餘數 $-b(a^{m-1}-b^{m-1})$ ヲ得又第二商 $-a^{m-2}b$ ヲ得タル片餘數ハ $+b^2(a^{m-2}+b^{m-2})$ ヲ得之レニ由リテ考フレバ第 m 商ヲ得タル片ノ餘數ハ $\mp b^m(a^{m-m}\mp b^{m-m})=\mp b^m(a^0\mp b^0)$ ナラザルヲ得ス然ルニ此複号ハ m 奇數ナレバ負ニシテ m 偶數ナレバ正ナリ故ニ m 奇數ノ片ノ餘數ハ $-b^m(a^0-b^0)$ ナリ然ルニ $a^0=1, b^0=1$ ナルヲ以テ $-b^m(a^0-b^0)=-b^m(1-1)=-b^m(0)=0$ ナリ則チ餘數ナキヲ以テ m 奇數ナレバ整除シ得ラル、ヿ明カナリ又 m 偶數ナル片ノ餘數ハ $+b^m(a^0+b^0)=+b^0(1+1)=+b^0(2)=+2b^m$ ナリ則チ第 m 商ニ至リテ $2b^m$ ヲ餘ス故ニ m 偶數ナレバ整除シ能ハサルナリ是レ除法三公式ノ一ナリ此理ヲ推シテ左ノ三公式ヲ證スルヿ容易ナリ之レニ由リテ左ニ之レヲ揭グ

除法三公式

$\frac{a^m+b^m}{a+b}=a^{m-1}-a^{m-2}b+a^{m-3}b^2\cdots\cdots-ab^{m-2}+b^{m-1}\cdots\cdots$(巳)　此三式ニ數ヲ

$\frac{a^m-b^m}{a+b}=a^{m-1}-a^{m-2}b+a^{m-3}b^2\cdots\cdots+ab^{m-2}-b^{m-1}\cdots\cdots$(庚)　配スル片ハ左

$\frac{a^m-b^m}{a-b}=a^{m-1}+a^{m-2}b+a^{m-3}b^2\cdots\cdots+ab^{m-2}+b^{m-1}\cdots\cdots$(辛)　ノ如シ

(己) $\begin{cases} \dfrac{a^3+b^3}{a+b}=a^2-ab+b^2 \\ \dfrac{a^5+b^5}{a+b}=a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4 \\ \dfrac{a^7+b^7}{a+b}=a^6-a^5b+a^4b^2-a^3b^3+a^2b^4-ab^5+b^6 \end{cases}$

(庚) $\begin{cases} \dfrac{a^2-b^2}{a+b}=a-b \\ \dfrac{a^4-b^4}{a+b}=a^3-a^2b+ab^2-b^3 \\ \dfrac{a^6-b^6}{a+b}=a^5-a^4b+a^3b^2-a^2b^3+ab^4-b^5 \end{cases}$

(辛) $\begin{cases} \dfrac{a^2-b^2}{a-b}=a+b \\ \dfrac{a^3-b^3}{a-b}=a^2+ab+b^2 \\ \dfrac{a^4-b^4}{a-b}=a^3+a^2b+ab^2+b^3 \\ \dfrac{a^5-b^5}{a-b}=a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4 \end{cases}$

● $\dfrac{8a^3+27b^3}{2a+3b}=4a^2-6ab+9b^2$ ナルヲ證セヨ

$8a^3+27b^3=(2a)^3+(3b)^3$ 故ニ

$\dfrac{8a^3+27b^3}{2a+3b}=(2a)^2-(2a)(3b)+(3b)^2=4a^2-6ab+9b^2$

● $\dfrac{a^5+32b^5}{a+2b}=a^4-2a^3b+4a^2b^2-8ab^3+16a^4$ ナルヲ證セヨ

$32b^5=(2b)^5$ 故ニ $\dfrac{a^5+32b^5}{a+2b}=a^4-a^3(2b)+a^2(2b)^2-a(2b)^3+(2b)^4=a^4-2a^3b+4a^2b^2-8ab^3+16a^4$,

● $\dfrac{16a^4-81b^4}{2a+3b}=8a^3-12a^2b+18ab^2-27b^3$ ナルヲ證セヨ

$16a^4=(2a)^4, 81b^4=(3b)^4$ 故ニ $\dfrac{16a^4-81b^4}{2a+3b}=(2a)^3-(2a)^2(3b)+(2a)(3b)^2-(3b)^2$

$=8a^3-12a^2b+18ab^2-27b^3$

● $\dfrac{256a^8-625b^2}{4a^2+5b}=64a^6-80a^4b+100a^2b^2-125b^3$ ナルヲ證セヨ

$\dfrac{256a^8-625b^4}{4a^2+5b}=\dfrac{(4a^2)^4-(5b)^4}{4a^2+5b}=(4a^2)^3-(4a^2)^2 5b+(4a^2)(5b)^2-(5b)^3=64a^6-80a^4b+100a^2b^2$
$-125b^3$

●$\frac{(a+b)^3-b^3}{a}=a^2+3ab+3b^2$ ナルヲ證セヨ

$\frac{(a+b)^3-b^3}{a}=\frac{(a+b)^3-b^3}{(a+b)-b}=(a+b)^2+(a+b)b+b^2=a^2+2ab+b^2+ab+b^2+b^2=a^2+3ab+3b^2$

●$\frac{(a+b)^3-(a-b)^3}{2b}=3a^2-b^2$ ナルヿヲ證セヨ

$\frac{(a+b)^3-(a-b)^3}{2b}=\frac{(a+b)^3-(a-b)^3}{(a+b-a+b)}=\frac{(a+b)^3-(a-b)^3}{(a+b)-(a-b)}=(a+b)^2+(a+b)(a-b)+(a-b)^2$

$=a^2+2ab+b^2+a^2-b^2+a^2-2ab+b^2=3a^2-b^2$

●$\frac{(a^2+b^2)^3+(a^2-b^2)^3}{2a^2}=a^4+3b^4$ ナルヿヲ證セヨ

$\frac{(a^2+b^2)^3+(a^2-b^2)^3}{2a^2}=\frac{(a^2+b^2)^3+(a^2-b^2)^3}{2a^2+b^2-b^2}=\frac{(a^2+b^2)^3+(a^2-b^2)^3}{(a^2+b^2)+(a^2-b^2)}=(a^2+b^2)^2-(a^2+b^2)(a^2-b^2)$

$+(a^2-b^2)^2=a^4+2a^2b^2+b^4-(a^4-b^4)+a^4-2a^2b^2+b^4=a^4+3b^4$

●十八ノ幾乗冪ニテモ一個ヲ減ズレバ十七ニテ整除シ得ルハ何故ナルヤ

18^n-1 ハ n ノ如何ナル數ニ係ハラズ $18-1$ ニテ整除シ得ベシ然ルニ $18-1=17$ ナルヲ以テ整除シ得ルヤ必セリ今假リニ 18^4-1 ヲ 17 ニテ除セントスルニ

$\frac{18^4-1}{17}=\frac{18^4-1^4}{18-1}=18^3+18^2\times1+18\times1^2+1^3=18^3+18^2+18+1=5832+324+18+1$

$=6175$

●十九ノ方乘冪ノ指數ガ若シ奇數ナレバ其冪數ニ一個ヲ加フレバ四或ハ五ニテ整除シ得ベシ其理如何

19^n+1 ニ於テ n 若シ奇數ナレバ $19+1$ 卽チ 20 ヲ以テ整除シ得ベシ然ルニ $20=4\times5$ ナルヲ以テ題辭ノ眞ナルヲ證ス

●負指數ヲ有スル除商ヲ得ルハ如何ナル關係ヨリ生スルヤ

實ノ指數同字母ナル法ノ指數ヨリ小ナルカ或ハ實ニ其字母ガナキカニ由ル何トナレバ實ノ或ル字母ノ指數ヨリ法ノ同字母ノ指數ヲ減スルヲ以テナリ

●多項式除法ニ於テ餘數ノ生スルハ如何ナル關係ニ由ルヤ

法ノ首位ナル字母實ノ首位ニ無キニ至ルカ或ハ其指數法ノ指數ヨリ小ナルニ至ルトキ、ナリ何トナレバ實ノ指數ヨリ法ノ指數ヲ減スル能ハサレバナリ

●同次式ニ同次式ヲ乘シタル積ハ兩指數ノ和ニ等シキ指數ナル同次式ヲ生ス此理如何

多項式乘法ノ法則ニ由リ實ノ各項ト法ノ各項トノ乘積ノ和ヲ以テ全乘積トナス然ルニ各項ノ乘積ノ指數ハ各々兩指數ノ和ナルヲ以テ亦各項同次ナルヿ明カナリ

●二個ノ字母ヨリナル同次式ノ項數ハ次數ト一個ノ和ヨリ多カラズ此理如何

x 及ヒ y ヨリナル m 次式ニ於テ ABC ……… XYZ 等ヲ x y ヲ含マザル數トシ其最多項式ヲ x ノ降冪ノ順ニ排列セバ $Ax^m+Bx^{m-1}y+Cx^{m-2}y^2$ ……… $Xx^2y^{m-2}Yxy^{m-1}+Zy^m$ ナリ何トナレハ此他 x y ニ於テ一ツノ異項ヲモ生スルヿナシ而シテ x y トモ m 乘ヨリ〇乘

迄即チ $m+1$ 項ヨリ多キヿ能ハサレバナリ

● 前題ニ於テ $m+1$ ヨリ多カラサルハ證セリ若シ之レヨリ小ナルヿアリヤ否ヤ之レアルトセハ如何ナル理ヨリ然ルヤ

A B C 等ハ如何ナル數ヲモ含ムヲ以テ或ハ零ナルヿモアリ若是等ガ零ナル𪜈ハ其項ヲ缺クヲ以テ小ナルヿアルナリ

● $(x+a)(x^2+a^2)$……$(x^{16}+a^{16})=\dfrac{x^{32}-a^{32}}{x-a}$ ナリ此理如何

$(x-a)(x+a)(x^2+a^2)$……$(x^{16}+a^{16})=x^{32}-a^{32}$ ナリ故ニ今乘シタル $x-a$ ヲ以テ除スレバ原式ヲ得ルヿ明カナリ

● $(a-b+c)^n-(a-b-c)^n$ ニ於テ n 若シ奇數ナレバ $2c$ ニテ整除シ得ヘク n 若シ偶數ナレバ $2(a-b)$ ニテ整除シ得ベシ此理如何

本題ノ n 若シ奇數ナレバ $(a-b+c)-(a-b-c)$ ニテ整除シ得ヘシ今之レヲ最簡式ニ化スレバ $a-b+c-a+b+c=2c$ ナリ故ニ $2c$ ニテ整除シ得ヘシ又 n カ偶數ナレバ $(a-b+c)+(a-b-c)$ ニテ整除シ得ヘシ之レヲ最簡式ニ化スレバ $a-b+c+a-b-c=2a-2b=2(a-b)$ ナリ故ニ $2(a-b)$ ニテ整除シ得ルヤ明カナリ

● $(a-b)^5-a^n+b^n$ ハ $a-b$ ニテ整除シ得ベシ此理如何

$(a-b)^5$ ハ $a-b$ ニテ整除シ得ルハ論ヲ竢タズ又 $-a^n+b^n=-(a^n-b^n)$ ナルヲ以テ n ノ奇偶ニ係ラズ整除シ得ラルヽハ〔辛〕ニ見ヘタリ然ルニ一數ノ倍數ノ和モ差モ其一數ノ倍數ナルヲ以テ $(a-b)^5-(a^n-b^n)$ ハ $(a-b)$ ノ倍數ナリ故ニ題言ノ如シ

● a^c-b^c ヲ a^d-b^d ニテ整除セシメンニハ c d ノ關係如何ニシテ可ナルヤ

c ヲ d ノ倍數ニスレバ可ナリ何トナレバ今 $c=nd$ トスレバ $a^c-b^c=a^{nd}-b^{nd}=(a^d)^n-(b^d)^n$ トナル然ルニ $(a^d)^n-(b^d)^n$ ハ n ノ奇偶ニ係ハラズ a^d-b^d ニテ整除シ得ラルヽガ故ナリ

● x^3 ヲ二十七ニ代フレバ零トナルヘキ多項式ハ x^2+3x+9 ニテ整除シ得ヘシ其理如何

多項式ヲ A トスレバ $A=n(x^3-27)$ ナリ然ルニ $x^3-27=(x-3)(x^2+3x+9)$ ナリ故ニ $A=n(x-3)(x^2+3x+9)$ ナリ故ニ x^2+3x+9 ニテ整除シ得ラルヽヤ明カナリ

● 恒同式ニ於テ同指數ナル同字母ノ係數ハ相等シ其理如何

$Ax^3+Bx^2+Cx+D\equiv ax^3+bx^2+cx+d$ ニ於テ $A=a.\ B=b.\ C=c.\ D=d$ ナリ何トナレバ $Ax^3+Bx^2+Cx+D-(ax^3+bx^2+cx+d)$ ハ x ノ値何ナルニ係ラス零ナリ故ニ $(A-a)x^3+(B-b)x^2+(C-c)x+(D-d)$ モ亦 x ノ値如何ナルニ係ラズ零ナルヘシ $a-a.\ B-b.\ C-c.\ D-d$ モ亦零ナラサルヲ得ズ故ニ題言ノ如シ

● $(x-y)^2$ ト $(y-x)^2$ ハ恒同式ナレ𪜈 $(x-y)^3$ ト $(y-x)^3$ ハ否ラズ其理如何

$(x-y)^2=x^2-2xy+y^2$ ニシテ $(y-x)^2=y^2-2xy+x^2=x^2-2xy+y^2$ ナリ故ニ之レ恒同式ナルヿ明カナリ

又 $(x-y)^3=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$ ニシテ又 $(y-x)^3=y^3-3xy^2+3x^2y-x^3=-x^3+3x^2y-3xy^2$

$+y^2$ ナリ故ニ之レ恒同式ニアラザルナリ

● $z(x-y)+x(y-z)+y(z-x)$ 此式ニ於テ x・y・z ニ如何ナル數ヲ與フルモ零トナルハ何故ナルヤ

$z(x-y)+x(y-z)+y(z-x)\equiv xz-yz+xy-xz+yz-xy\equiv 0$…………(壬)ナリ故ニ x・y・z・ノ値ニ關係ナク此式ハ零トナルナリ

● $(a-b)+(b-c)$…………$+(p-q)+(q-a)$ 等此ノ如ク順次ノ差ヲ求メ終ニ末字ヨリ首字ニ歸ヘレバ此式必ズ零トナル其理如何

$(a-b)+(b-c)$…………$+(p-q)+(q-a)\equiv a-b+b-c$…………$+p-q+q-a\equiv 0$…………(癸)

此ノ如ク順次ノ差ハ必ズ同字母ガ正負互ニ消滅スルヿ明カナリ

● $(a^2+b^2)(c^2+d^2)\equiv(ac\pm bd)^2+(bc\mp ad)^2$ ナルヲ證セヨ

$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\equiv a^2c^2+b^2c^2+a^2d^2+b^2d^2\equiv a^2c^2\pm 2abcd+b^2d^2+b^2c^2\mp 2abcd+a^2d^2$
$\equiv(ac\pm bd)^2+(bc\mp ad)^2$…………(子)

● $(a^2-b^2)(c^2-d^2)\equiv(ac\pm bd)^2-(bc\pm ad)^2$ ナルヲ證セヨ

$(a^2-b^2)(c^2-d^2)\equiv a^2c^2-b^2c^2-a^2d^2+b^2d^2\equiv a^2c^2\pm 2abcd+b^2d^2-b^2c^2\mp 2abcd-a^2d^2$
$\equiv(ac\pm bd)^2-(bc\pm ad)^2$…………(丑)

● $(a-b)(b-c)(c-a)\equiv -a^2(b-c)-b^2(c-a)-c^2(a-b)$ ナルヲ證セヨ

$(a-b)(b-c)(c-a)\equiv abc-b^2c-ac^2+bc^2-a^2b+ab^2+a^2c-abc\equiv -a^2b+a^2c-b^2c+ab^2-ac^2$
$+bc^2\equiv -a^2(b-c)-b^2(c-a)-c^2(a-b)$…………(寅)

● $(a+b)(b+c)(c+a)\equiv a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc$ ナルヲ證セヨ

$(a+b)(b+c)(c+a)\equiv abc+b^2c+ac^2+bc^2+a^2b+ab^2+a^2c+abc\equiv a^2b+a^2c+b^2c+b^2a+c^2a+c^2b$
$+2abc\equiv a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc$…………(卯)

● $(a+b)(b+c)(c+a)(a-b)(b-c)(c-a)\equiv -a^4(b^2-c^2)-b^4(c^2-a^2)-c^4(a^2-b^2)$ ヲ證セヨ

$(a+b)(b+c)(c+a)(a-b)(b-c)(c-a)\equiv\{(a+b)(a-b)\}\{(b+c)(b-c)\}\{(c+a)(c-a)\}$
$\equiv(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)\equiv -a^4(b^2-c^2)-b^4(c^2-a^2)-c^4(a^2-b^2)$………(寅)ニヨル

● $(x+a)^5-(x-a)^5\equiv Ax^4+Cx^2+F$ ニ於テ $C=2500$ ナレバ a ノ値 5 ナリト云フ其理如何

$(x+a)^5-(x-a)^5\equiv x^5+5x^4a+10x^3a^2+10x^2a^3+5xa^4+a^5-(x^5-5x^4a+10x^3a^2-10x^2a^3+5xa^4$
$-a^5)\equiv 10x^4a+20x^2a^3+2a^5$ 之レニ由リテ $Ax^4+Cx^2+E\equiv 10x^4a+20x^2a^3+2a^5$ 故ニ $C\equiv 20a^3$
卽チ $20a^2=2500$ 故ニ $a^3=125$ 故ニ $a=5$ ナルヲ證セリ

● $A(x-3)(x-5)+B(x-5)(x-7)+c(x-7)(x-3)\equiv 60-4x$ ナレバ $A=4,\ B=6,\ C=-10$ ナルヲ證セヨ

本式ハ恒同式ナルヲ以テ x ノ値何ナルヲ論セサルカ故ニ x ヲ 3 トスレバ
$B(3-5)(3-7)=60-4\times 3.$ $B(-2)(-4)=60-12$ 卽チ $8B=48$ 故ニ $B=6$ 次ニ又 x ヲ 5 トスレバ $C(5-7)(5-3)=60-4\times 5.$ 卽チ $C(-2)(2)=60-20$ 卽チ $-4C=40$ 故ニ $C=-10$
又次ニ x ヲ 7 トスレバ $A(7-3)(7-5)=60-4\times 7$ 卽チ $A(4)(2)=60-28$ 卽チ $8A=32$ 故ニ

$A=4$ ナルヿ明カナリ

● $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)=a^3+b^3+c^3-3abc$……………(辰)ナルヲ證セヨ

$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)=a(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)+b(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$
$+c(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)=a^3+ab^2+ac^2-a^2b-a^2c-abc+a^2b+b^3+bc^2-ab^2-abc-b^2c$
$+a^2c+b^2c+c^3-abc-ac^2-bc^2=a^3+b^3+c^3-3abc$

因子ヲ分割スルニ便ナランガ爲メ是迄證セシ所ノ公式ヲ左ニ拔萃ス

(壹)……………$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

(貳)……………$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

(參)……………$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

(四)……………$(a+b)\times(a-b)=a^2-b^2$

(五)……………$(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)=a^4+a^2b^2+b^4$

(六)……………$\dfrac{a^m+b^m}{a+b}=a^{m-1}-a^{m-2}b+a^{m-3}b^2\cdots\cdots-ab^{m-2}+b^{m-1}$

(七)……………$\dfrac{a^m-b^m}{a+b}=a^{m-1}-a^{m-2}b+a^{m-3}\cdots\cdots+ab^{m-2}-b^{m-1}$

(八)……………$\dfrac{a^m-b^m}{a-b}=a^{m-1}+a^{m-2}b+a^{m-3}b^2\cdots\cdots+ab^{m-2}+b^{m-1}$

(九)……………$z(a-y)+x(y-z)+y(z-x)\equiv0$

(拾)……………$(a-b)+(b-c)\cdots\cdots+(p-q)+(q-a)\equiv0$

(拾壹)…………$(a^2+b^2)(c^2+d^2)\equiv(ac\pm bd)^2+(bc\mp ad)^2$

(拾貳)…………$(a^2-b^2)(c^2-d^2)\equiv(ac\pm bd)^2-(bc\pm ad)^2$

(拾參)…………$(a-b)(b-c)(c-a)\equiv-a^2(b-c)-b^2(c-a)-c^2(a-b)$

(拾四)…………$(a+b)(b+c)(c+a)\equiv a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc$

(拾五)…………$(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)=a^3+b^3+c^3-3abc$

● $x^2+12x+35=(x+5)(x+7)$ ナルヲ(壹)ニヨリテ證明スヘシ

$a+b=12.\ ab=35$ ナルガ故ニ先ツ 35 ヲ分割スレバ 5 及ビ 7 ナリ而シテ $7+5=12$ ナルガ故ニ $x^2+12x+35=x^2+(5+7)x+5\times7=(x+5)(x+7)$

● $x^2-4x-21=(x+3)(x-7)$ ナルヲ證セヨ

$a+b=-4.\ ab=-21$ ヲ分割スレバ $a=3\ \ b=-7$ 或ハ $a=-3.\ b=7$ 今此ノ一對ヲ取リテ其和ガ -4 ニナルヘキモノハ $3+(-7)$ ナリ故ニ $x^2-4x-21=x^2+\{3+(-7)\}x+3\times(-7)$
$=(x+3)(x-7)$ ナリ

$x^2+14x+49=(x+7)^2$ ナルヲ(貳)ニヨリテ證明セヨ

此式ノ首尾兩項ハ x 及ビ 7 ノ平方ニシテ中項ハ其相乘積ニ倍卽チ $2\times7x$ ナルヲ見ル之レニ由リテ $x^2+14x+49=x^2+2\times7x+7^2=(x+7)^2$ ナルヿ明カナリ

● $9a^2x^2+24abxy+16b^2y^2=(3ax+4by)^2$ ナルヲ證セヨ

此式ノ首項ハ $3ax$ ノ平方ニシテ尾項ハ $4by$ ノ平方ナリ又中項ハ此二數ノ相乘積二倍卽チ $2\times(3ax)(4by)$ ナルチ見ル之レニ由リテ $9a^2x^2+24abxy+16b^2y^2=(3ax)^2+2(3ax)(4by)+(4by)^2=(3ax+4by)^2$ ナリ

● $x^4-16x^2y+64y^2=(x^2-8y)^2$ ナルチ(參)ニヨリテ證明セヨ

此式ノ首項ハ x^2 ノ平方ニシテ尾項ハ $8y$ ノ平方ナリ而シテ中項ハ此兩量ノ相乘積二倍ノ負量卽チ $-2(x^2)(8y)$ ナリ故ニ $x^4-16x^2y+64y^2=(x^2)^2-2(x^2)(8y)+(8y)^2=(x^2-8y)^2$

● $25x^2-60xy+36y^2=(5x-6y)^2$ ナルチ證セヨ

$25x^2-60xy+36y^2=(5x)^2-2(5x)(6y)+(6y)^2=(5x-6y)^2$

● $36x^4-121y^6=(6x^2+11y^3)(6x^2-11y^3)$ ナルチ(四)ニヨリテ證セヨ

$36x^4-121y^6=(6x^2)^2-(11y^3)^2=(6x^2+11y^3)(6x^2-11y^3)$

● $a^4-a^2-2ab-b^2=(a^2+a+b)(a^2-a-b)$ ナルチ證セヨ

$a^4-a^2-2ab-b^2=a^4-(a^2+2ab+b^2)=(a^2)^2-(a+b)^2=\{a^2+(a+b)\}\{a^2-(a+b)\}$
$=(a^2+a+b)(a^2-a-b)$

● $a^4-7a^2b^2+b^4=(a^2+3ab+b^2)(a^2-3ab+b^2)$ ナルチ證セヨ

$a^4-7a^2b^2+b^4=a^4+2a^2b^2+b^4-9a^2b^2=(a^2+b^2)^2-(3ab)^2=\{(a^2+b^2)+3ab\}\{(a^2+b^2)-3ab\}$
$=(a^2+b^2+3ab)(a^2+b^2-3ab)=(a^2+3ab+b^2)(a^2-3ab+b^2)$

● $a^8+a^4b^4+b^8=(a^4-a^2b^2+b^4)(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)$ ナルチ(五)ニヨリテ證明セヨ

$a^8+a^4b^4+b^8=(a^4-a^2b^2+b^4)(a^4+a^2b^2+b^4)=(a^4-a^2b^2+b^4)(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)$

● $27a^3+64b^3=(3a+4b)(9a^2-12ab+16b^2)$ ナルチ(六)ニヨリテ證明セヨ

$27a^3+64b^3=(3a)^3+(4b)^3=(3a+4b)\{(3a)^2-(3a)(4b)+(4b)^2\}=(3a+4b)(9a^2-12ab+16b^2)$

● $8a^9-125b^3=(2a^3-5b)(4a^6+10a^3b+25b^2)$ ナルチ(八)ニヨリテ證明セヨ

$8a^9-125b^3=(2a^3)^3-(5b)^3=\{(2a^3)^3-5b\}\{(2a^3)^2+(2a^3)(5b)+(5b)^2\}$
$=(2a^3-5b)(4a^6+10a^3b+25b^2)$

● $x^6-a^6=(x+a)(x-a)(x^2-ax+a^2)(x^2+ax+a^2)$ ナルチ證セヨ

$x^6-a^6=(x^3)^2-(a^3)^2=(x^3+a^3)(x^3-a^3)=(x+a)(x^2-ax+a^2)(x-a)(x^2+ax+a^2)$
$=(x+a)(x-a)(x^2-ax+a^2)(x^2+ax+a^2)$

● $a^4c^4+b^4d^4+b^4c^4+a^4d^4=(a^4+b^4)(c^4+d^4)$ ナルチ(拾壹)ニヨリテ證セヨ

$a^4c^4+b^4d^4+b^4c^4+a^4d^4=a^4c^4+2a^2b^2c^2d^2+b^4d^4+b^4c^4-2a^2b^2c^2d^2+a^4d^4$
$=(a^2c^2+b^2d^2)^2+(b^2c^2-a^2d^2)^2=(a^4+b^4)(c^4+d^4)$ ……………(拾壹)

● $a^4c^4+b^4d^4-b^4c^4-a^4d^4=(a^2+b^2)(c^2+d^2)(a+b)(c+d)(a-b)(c-d)$ ナルチ(拾貳)ニヨリテ證セヨ

$a^4c^4+b^4d^4-b^4c^4-a^4d^4=a^4c^4+2a^2b^2c^2d^2+b^4d^4-b^4c^4-2a^2b^2c^2d^2-a^4d^4$
$=(a^4c^4+2a^2b^2c^2d^2+b^4d^4)-(b^4c^4+2a^2b^2c^2d^2+a^4d^4)=(a^2c^2+b^2d^2)^2-(b^2c^2+a^2d^2)^2$
$=(a^4-b^4)(c^4-d^4)$ ……………(拾貳 $=(a^2+b^2)(a^2-b^2)(c^2+d^2)(c^2-d^2)$
$=(a^2+b^2)(a+b)(a-b)(c^2+d^2)(c+d)(c-d)=(a^2+b^2)(c^2+d^2)(a+b)(c+d)(a-b)(c-d)$

● $a^4c^2+a^2b^4+b^2c^4-a^4b^2-a^2b^4-b^4c^2=(a+b)(b+c)(c+a)(a-b)(b-c)(c-a)$ ナルヲ（拾參）ニヨリテ證明セヨ

$a^4c^2+a^2b^4+b^2c^4-a^4b^2-a^2b^4-b^4c^2=-a^4b^2+a^4c^2-b^4c^2+a^2b^4-a^2c^4+b^2c^4$

$=-a^4(b^2-c^2)-b^4(c^2-a^2)-c^4(a^2-b^2)=(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)$

$=(a+b)(a-b)(b+c)(b-c)(c+a)(a-c)=(a+b)(b+c)(c+a)(a-b)(b-c)(c-a)$

● $a^4b^2+a^4c^2+b^4c^2+a^2b^4+a^2c^4+b^2c^4=(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)-2a^2b^2c^2$ ナルヲ（拾四）ニヨリテ證明セヨ

$a^4b^2+a^4c^2+b^4c^2+a^2b^4+a^2c^4+b^2c^4=a^4(b^2+c^2)+b^4(c^2+a^2)+c^4(a^2+b^2)$

$=a^4(b^2+c^2)+b^4(c^2+a^2)+c^4(a^2+b^2)+2a^2b^2c^2-2a^2b^2c^2=(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)-2a^2b^2c^2$

● $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3-3(a-b)(b-c)(c-a)=0$ ナルヲ（拾五）ニヨリテ證セヨ

$(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3-3(a-b)(b-c)(c-a)=\{(a-b)+(b-c)+(c-a)\}\{(a-b)^2+(b-c)^2$
$+(c-a)^2-(a-b)(b-c)-(b-c)(c-a)-(c-a)(c-b)\}$ ………（拾五）然ルニ $(a-b)+(b-c)$
$+(c-a)=0$ ナリ故ニ今一式モ亦零ナラサルヲ得ス

● $2x^2+9x+10=(x+2)(2x+5)$ ナルヲ證セヨ

本題ハ首項ガ完全ノ平方ニアラサルヲ以テ之レヲ完全ノ平方ニナサンガ爲メ全式ニ2ヲ乘スレバ $4x^2+18x+20=(2x)^2+9(2x)+20=(2x)^2+(5+4)(2x)+5\times4$ $=(2x+4)(2x+5)=2(x+2)(2x+5)$ 然ルニ之レ原式ヲ二倍セシモノナルガ故ニ折半スレバ $(x+2)(2x+5)$ トナル則チ題意ノ如シ

● $3x^2-13x-10=(3x+2)(x-5)$ ナルヲ證セヨ

本題ハ首項ガ完全ノ平方ニアラサルヲ以テ三倍スレバ $3^2x^2-13\times(3x)-30$ $=(3x)^2-(15-2)(3x)-15\times2-(3x-15)(3x+2)=3(x-5)(3x+2)$ トナル然ルニ之レ原式ヲ三倍セシモノナルヲ以テ之レヲ三分スレバ $(x-5)(3x+2)$ トナル則チ題意ニ適ス

● $x^4+(a+c)x^3+(b+d+ac)x^2+(ad+bc)x+bd=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$ ナルヲ證セヨ

是ヲ證スルニハ等號ノ右邊ノ式ヲ解散スレバ左邊ヲ得然レドモ左邊ヲ右邊ノ如ク分割スルニハ先ツ x^2 ヲ兩因子ノ首項ト假定シ左邊ノ末項 bd ヲ分割スレバ b 及ヒ d ヲ得ルト假定スレバ此二字ハ必ス兩因子ノ尾項トナルヘシ而シテ此兩因子ノ尾項ト兩因子ノ首項ト相乘スレバ x^2 ノ係數ヲ得ヘシ故ニ $b+d$ ハ x^2 ノ係數ナリ今之レヲ x^2 ノ係數 $(b+d+ac)$ ヨリ減スレバ ac ヲ得然ルニ x^2 ノ係數ノ內 $b+d$ ノ外ハ兩因子ノ x ノ係數ノ相乘積ナルヘシ故ニ ac ヲ分割シテ a 及ヒ c トナルトシ此和カ x^3 ノ係數トナレバ之レヲ兩因子ノ x ノ係數トナスヘシ然ルトキハ此兩因子ハ x^2+ax+b 及ヒ x^2+cx+d ナルカ或ハ x^2+ax+d 及ヒ x^2+cx+b ナルカヲ知ル而シテ此二件ノ中何レガ眞ナルヤヲ知ランニハ其兩因子ノ中項係數ト尾項ヲ互乘シテ其和カ x ノ係數ニ合スレバヨシ則チ前者ハ $(ad+bc)$ ニシテ原式ニ合ス又後者ハ $(ab+cd)$ ニシテ原式ニ合セズ故ニ前者則チ $(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$ ヲ以テ眞ナルヲ知ル

● $x^4+5x^3+13x^2+17x+12$ ヲ分割シテ $(x^2+2x+3)(x^2+3x+4)$ トナルト云フ其分解ノ法ヲ示セ

尾項12ヲ分割スレハ3ト4或ハ2ト6或ハ1ト12トナル故ニ先ツ前者則チ3ト4ヲ兩因子ノ尾項トナシ之レヲ合シテ7トナル之レヲ x^2 ノ係數13ヨリ減スレバ6トナル是レ x^2 ノ係數ノ一部分則チ兩因子ノ x ノ係數ノ相乘積ナリ今之レヲ分割スレバ2及ヒ3トナル而シテ此和則チ5ハ x^3 ノ係數トナル故ニ此兩因子ハ x^2+2x+3 及ヒ x^2+3x+4 ナルカ x^2+2x+4 及ヒ x^2+3x+3 ノ二件ノ中ニ違ヒナイ而シテ何レガ眞ナリヤハ兩因子ノ x ノ係數ト尾項ノ相乘積ノ和カ原式ノ x ノ係數ニ合スレバヨシ則前者ニ於テハ $2\times4+3\times3=8+9=17$ ニテ原式ニ合ス後者ニ有リテハ $2\times3+3\times4=6+12=18$ ニシテ原式ニ合セズ故ニ前者ヲ以テ眞ナリトス

若シ兩件トモ合セサルトキハ前ニ尾項ヲ分割シタル中2ト6或ハ1ト12ヲ以テ同法ヲ行フベシ

● $x^4-4x^3-3x^2+32x-35$ ヲ分割シテ $(x^2+x-5)(x^2-5x+7)$ トナルト云フ其法ヲ示セ

此式ノ尾項ヲ分割スレバ $+5,-7$ 及ヒ $-5,+7$ トナル今前者ヲ取リ合スレバ $5-7=-2$ トナル之レヲ x^2 ノ係數則チ -3 ヨリ減スレハ -1 トナル是レ因子ノ x ノ係數ノ相乘積ナリ今之レヲ分割スレバ $+1$ 及ヒ -1 トナル之レヲ合スレハ x^3 ノ係數則チ -4 トナルコトナシ故ニ $+5$ 及ヒ -7 ハ兩因子ノ尾項トナラズ故ニ後者則チ -5 及ヒ $+7$ ヲ取リ之レヲ合スレバ $-5+7=+2$ トナル之レヲ x^2 ノ係數 -3 ヨリ減スレバ $-3-2=-5$ トナル之レヲ分割スレバ $+1$ 及ヒ -5 或ハ -1 及ヒ $+5$ トナル今前者ヲ合スレバ $1-5=-4$ 後者ヲ合スレバ $-1+5=+4$ トナリ前者ハ x^3 ノ係數ニ合ス故本題ノ兩因子ハ (x^2+x-5) 及ヒ (x^2-5x+7) 或ハ (x^2+x+7) 及ヒ (x^2-5x-5) ノ二件ナリ今此ノ二件ノ內何レガ眞ナルヤヲ定ムルニハ兩因子ノ x ノ係數ト尾項ヲ互乘シテ合スレバ則チ前者ハ $1\times7+(-5)\times(-5)=7+25=32$ トナリ後者ハ $1\times(-5)+(-5)\times7=-5-35=-40$ トナル則チ前者ハ原式ノ x ノ係數ニ合ス故ニ $(x^2+x-5)(x^2-5x+7)$ ハ眞ナルヲ知ル

● $(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+3(a+b+c)(ab+ac+bc)-3abc$ ナルヲ證セヨ

$(a+b+c)^3=\{(a+b)+c\}^3=(a+b)^3+3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3$

$=a^3+3a^2b+3ab^2+3a^2c+6abc+3b^2c+3ac^2+3bc^2+c^3+b^3$

$=a^3+b^3+c^3+3a^2b+3a^2c+3ab^2+3ac^2+3b^2c+3bc^2+6abc$

$=a^3+b^3+c^3+3a^2b+3a^2c+3abc+3ab^2+3b^2c+3abc+3ac^2+3bc^2+-3abc$

$=a^3+b^3+c^3+3a(ab+ac+bc)+3b(ab+ac+bc)+3c(ab+ac+bc)-3abc$

$=a^3+b^3+c^3+3(a+b+c)(ab+ac+bc)-3abc$

● $bc+ca+ab$ ハ何故對稱式ナルヤ

此式ニ於テ對稱式ノ界說ニ由リ a ト b トヲ取リ換ルトキ $ac+cb+ba$ トナリ只位置ト因子ノ順ガ變シタルノミニテ因子ノ順ト位置トヲ改ムレバ卽チ $bc+ca+ab$ トナル又 a ト c ヲ取リ換ルトキハ $ba+ac+cb$ 卽チ $bc+ca+ab$ トナル又 b ト c ヲ取リ換ルトキハ $cb+ba+ac$

即チ $bc+ca+ab$ ナル故ニ是對稱式ナリ

● $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$ ハ何故對稱式（環列式）ナルヤ

此式ニ於テ a ト b トヲ取リ換ルトキハ $b^2(a-c)+a^2(c-b)+c^2(b-a)$ トナリテ只位置ト記號ガ變シタルノミ又 a ト c トヲ取リ換ルトキハ $c^2(b-a)+b^2(a-c)+a^2(c-b)$ トナリ又 b ト c トヲ取リ換ルトキハ $a^2(c-b)+c^2(b-a)+b^2(a-c)$ トナリ何レモ位置ト記號カ變スルノミ故ニ對稱式ナリ

● $\sum a^2(b-c)\equiv-(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$ ナルヲ證セ

$\sum a^3(b-c)\equiv a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)\equiv a^3(b-c)-a(b^3-c^3)+bc(b^2-c^2)$

$\equiv(b-c)\{a^3-a(b^2+bc+c^2)+bc(b+c)\}\equiv(b-c)\{b^2(c-a)+bc(c-a)-a(c^2-a^2)\}$

$\equiv(b-c)(c-a)\{b^2+bc-a(c+a)\}\equiv(b-c)(c-a)\{c(b-a)+(b^2-a^2)\}$

$\equiv(b-c)(c-a)(b-a)(a+b+c)$ $\therefore \sum a^3(b-c)\equiv-(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$

● $\sum a^3(b-c)\equiv\sum bc(b^2-c^2)$ ナルヲ證セヨ

$\sum a^3(b-c)\equiv a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)\equiv a^3b-a^3c+b^3c-ab^3+c^3a-c^3b$

$\equiv b^3c-bc^3+ac^3-a^3c+a^3b-ab^3\equiv bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)+ab(a^2-b^2)$

$\equiv\sum bc(b^2-c^2)$

● $\sum a^3(b-c)\equiv-\sum a(b^3-c^3)$ ナルヲ證セヨ

$a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)\equiv a^3b-a^3c+b^3c-ab^3+ac^3-bc^3$

$\equiv-ab^3+ac^3+bc^3-a^3c+a^3c+b^3c\equiv-a(b^3-c^3)-b(c^3-a^3)-c(a^3-b^3)\equiv-\sum a(b^3-c^3)$

● $(a+b+c)(bc+ca)-abc\equiv(b+c)(c+a)(a+b)$ ……（巳）ナルヲ證セヨ

$(a+b+c)(bc+ca)-abc\equiv a^2(b+c)+a(b+c)^2+bc(b+c)\equiv(b+c)\{a^2+a(b+c)+bc\}$

$\equiv(b+c)(a+b)(a+c)\equiv(b+c)(c+a)(a+b)$

● $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3\equiv3(b+c)(c+a)(a+b)$ ……（午）ナルヲ證セヨ

$(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3\equiv3a^2(b+c)+3a(b+c)^2+(3b^2c+3bc^2)$

$\equiv3\{a^2(b+c)+a(b+c)^2+bc(b+c)\}\equiv3(b+c)(c+a)(a+b)$

● $a^4+b^4+c^4-2ab^2c^2-2c^2a^2-2a^2b^2\equiv(a-b-c)(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)$ ……（未）ナルヲ證セヨ

$a^4+b^4+c^4-2ab^2c^2-2c^2a^2-2a^2b^2\equiv a^4-2(b^2+c^2)a^2+(b^4+c^4-2b^2c^2)$

$\equiv a^4-\{(b+c)^2+(b-c)^2\}a^2+(b+c)^2(b-c)^2\equiv\{a^2-(b+c)^2\}\{a^2-(b-c)^2\}$

$\equiv(a+b+c)(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)$

● $x^3+2x^2-5x-6\equiv(x+1)(x-2)(x+3)$ トナル此分割ノ法方及ヒ論証ヲ詳ニセヨ

三次式ガ一次式ノ連乘積ニ相當セバ必ス $(x-a)(x-b)(x-c)$

$\equiv x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc$ ……（申）ノ如キ形象ヨリナルヿ明カナリ故ニ尾項ハ各因子ノ尾項ノ連乘積ナルヲ知ル由テ今本式ノ尾項 -6 ヲ分割スレバ ±1 ±2 ±3 ±6 トナル而シテ此外ノ因子ヨリ -6 ノ生スルヿナシ故ニ先ッ $+1$ ヲ以テ本式ノ x ニ代入スレ

バ$(+1)^3+2(+1)^2-5(+1)-6=1+2-5-6=3-11=-8$トナル故ニ$(x-1)$ハ本式ノ一因子ナラズ又$-1$ヲ代入スレバ$(-1)^3+2(-1)^2-5(-1)-6$
$=-1+2+5-6=7-7=0$トナル故ニ$(x+1)$……(イ)ハ本式ノ一因子ナリ又$+2$ヲ以テ本式ニ代入スレバ$(+2)^3+2(+2)^2-5(+2)-6=8+8-10-6=0$トナル故ニ$(x-2)$……(ロ)ハ本式ノ一因子ナリ又$-2$ヲ本式ノ$x$ニ代入スレバ$(-2)^3-2(+2)^2-5(-2)-6$
$=-8+8+10-6=+4$トナル故ニ$(x+2)$ハ本式ノ因子ニアラズ又$+3$ヲ以テ本式ノxニ代入スレバ$(+3)^3+2(+3)^2-5(+3)-6+27+18-15-6=24$トナル故ニ$(x-3)$ハ本式ノ一因子ニアラズ又$-3$ヲ以テ本式ノ$x$ニ代入スレバ$(-3)^3+2(-3)^2-5(-3)-6$
$=-27+18+15-6=0$トナル故ニ$(x+3)$……(ハ)ハ本式ノ一因子ナリ又$+6$ヲ以テ本式ノxニ代入スルモ-6ヲ以テ代入スルモ〔演算畧ス〕皆零トナラズ故ニ$(x-6)$及ヒ$(x+6)$ハ本式ノ一因子ナラズ故ニ(イ)(ロ)(ハ)ノ外本式ノ一因子トナルモノナシ之レニ由テ本式ハ直ニ$(x+1)(x-2)(x+3)$此ノ如ク括ルコヲ得ルナリ而シテ之レガ眞ナルヤ否ナルヤヲ考フルニx^2ノ係數ハ$-(a+b+c)$ナルガ故ニ$-\{(-1)+(+2)+(-3)\}=-(-1+2-3)=-(-2)$
$=+2$トナリ本式ノx^2ノ係數ニ合ス又xノ係數ハ$+(ab+bc+ca)$ナルガ故ニ
$+\{(-1)(+2)+(+2)(-3)+(-3)(-1)\}=+(-2-6+3)=-5$トナリ本式ノ$x$ノ係數ニ合ス又尾項ハ$-(abc)$ナルガ故ニ$-\{(-1)(+2)(-3)\}=-(+6)=-6$ニシテ本式ノ尾項ニ合ス故ニ本式ノ眞ナルヲ證セリ

又三式ハ一次式ト二次式ノ相乘積則チ$(x+a)(x^2+px+q)$ノ如ク分割スルコヲ得ルヲ以テ初メ$(x+1)$ナル一因子ヲ發見シタルトキ$x^3+2x^2-5x-6=x^3+2x^2-5x-6-0$
$\equiv x^3+2x^2-5x-6-\{(-1)^3+2(-1)^2-5(-1)-6\}\equiv(x^3+1^3)+2(x^2-1^2)-5(x+1)$
$\equiv(x+1)(x^2-x+1)+2(x+1)(x-1)-5(x+1)\equiv(x+1)\{(x^2-x+1)+2(x-1)-5\}$
$\equiv(x+1)(x^2+x-6)\equiv(x+1)(x-2)(x+3)$ヲ得(壹)ニヨル又$(x+1)$ヲ以テ本式ヲ除スレバ$x^2+x-6$ヲ得之レヲ(壹)ニ由リテ分割スルモヨシ尚ホ三次以上ノ式ハ色々ト分割ノ仕様ガアル

記者曰ク尚ホ四次以上ノ分割法モ亦爰ニ述ヘント欲レ氏紙葉ニ限リアルヲ以テ其意ヲ得ズ然レ氏本式ヲ推考スレバ左ノミ難キニアラズ

● $a^5-14a^4b+43a^3b^2+43a^2b^3-14ab^4+b^5\equiv(a+b)(a^2+8ab+b^2)(a^2-7ab+b^2)$ナルヲ證セヨ

$a^5-14a^4b+43a^3b^2+43a^2b^3-14ab^4+b^5\equiv(a^5+b^5)-14ab(a^3+b^3)+43a^2b^2(a+b)$
$\equiv(a+b)\{(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)-14ab(a^2-ab+b^2)+43a^2b^2\}$
$\equiv(a+b)(a^4-15a^3b+58a^2b^2-15ab^3+b^4)$
$\equiv(a+b)\{(a^4+b^4)-15ab(a^2+b^2)+58a^2b^2\}$

是ニ於テ$a^2+b^2=abp$トスレバ$a^4+b^4=a^2b^2p^2-2a^2b^2$ナリ故ニ
$\equiv(a+b)\{a^2b^2p^2-2a^2b^2)-15ab(abp)+58a^2b^2\}\equiv(a+b)\{a^2b^2(p^2-2-15p+58)\}$
$\equiv(a+b)(a^2b^2)(p^2-15p+56)\equiv(a+b)(a^2b^2)(p-7)(p-8)$

$\equiv(a+b)(abp-7ab)(abp-8ab)$
是ニ於テ p ヲ (a^2+b^2) ニ復スレバ
$\equiv(a+b)\{(a^2+b^2)-8ab\}\{(a^2+b^2)-7ab\}\equiv(a+b)(a^2-8ab+b^2)(a^2-7ab+b^2)$

● n 次式若シ n 個ノ一次因子ニ分割スルヿヲ得ハ其答式只一ニ限ル其理如何
設令ハ $x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}\cdots\cdots+Px+Q\equiv(x-a)(x-b)(x-c)\cdots\cdots(x-q)$
此ノ如ク分割スルヿヲ得ハ此式ハ此各因子ノ外 $(x-r)$ ヲ以テ整除スル能ハズ何トナレハ若シ $(x-r)$ ニテ整除シ得ルト仮定セバ $(r-a)(r-b)(r-c)\cdots\cdots(r-q)=0$
ナラサルヲ得ズ然ルニ $a\ b\ c\cdots\cdots q$ 等ハ何レモ r ト同値ナルモノナシ然レバ一因子ダモ零トナルモノナシ故ニ本式零トナラズ故ニ $(x-r)$ ハ本式ノ因子ニアラズ

● 或ル整函數式 $Ax^n+Bx^{n-1}+cx^{n-2}\cdots\cdots Mx+N$ ガ若シ $x-a$ 及ヒ $x-b$ ニテ整除シ得ラル、ナレバ此式ハ $(x-a)(x-b)$ ニテモ整除シ得ヘシト云フ其理如何……(酉)
今本式ヲ $(x-a)$ ニテ除シタル商ヲ $Ax^{n-1}+B'x^{n-2}+C'x^{n-3}\cdots\cdots+M'x+N'$ トスレハ
$Ax+Bx^{n-1}+Cx^{n-2}\cdots\cdots+Mx+N\equiv(x-a)(Ax^{n-1}+B'x^{n-2}+Cx^{n-3}\cdots\cdots+M'x+N')$
然ルニ本式ハ $(x-b)$ ニテ整除シ得ラル、ガ故ニ x ニ b ヲ代入スレバ
$(b-a)(Ab^{n-1}+B'b^{n-2}+C'b^{n-3}\cdots\cdots+M'b+N')=0$ ナラサルヲ得ス然ルニ $(b-a)$ ハ零ニアラズ故ニ $Ab^{n-1}+B'b^{n-2}+C'b^{n-3}\cdots\cdots+M'b+N=0$ ナルヿ明カナリ故ニ
$Ax^{n-1}+B'x^{n-2}+C'x^{n-3}\cdots\cdots+M'x+N$ ハ $(x-b)$ ニテ整除シ得ラル、ヿ明カナリ故ニ
$Ax^{n-1}+B'x^{n-2}+C'x^{n-3}\cdots\cdots+M'x+M\equiv(x-b)(Ax^{n-2}+B''x^{n-3}+C''x^{n-4}\cdots\cdots+M''x+N'')$
ナルベシ故ニ $Ax^n+Bx^{n-1}+Cx^{n-2}\cdots\cdots+Mx+N$
$\equiv(x-a)(x-b)(Ax^{n-2}+B''x^{n-3}+C''x^{n-4}\cdots\cdots+M''x+N'')$ ナルヿ明カナリ

● $a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc$ ヲ因子ニ分割スルニハ前既ニ(卯)ニ於テ解ク所ノ公式ニ由テ直ニ括ルヿヲ得ト雖𪜈亦對稱式ノ法ニ由テ括ル片ハ如何
先ツ一因子ヲ發見センガ為メ本式ノ b ニ $-c$ ヲ代入スレバ
$a^2(-c+c)+(-c)^2(c+a)+c^2(a-c)-2ac^2=c^3+ac^2+ac^2-c^3-2ac^2=0$ トナル故ニ $b-(-c)=b+c$ ハ本式ノ一因子ナリ故ニ $(c+a)$ 及ヒ $(a+b)$ モ亦此式ノ一因子ナラサルヲ得ス故ニ
$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+2abc\equiv A(b+c)(c+a)(a+b)$ トナスヿヲ得今此式ノ a ニ如何ナル數ヲ與フルモ式ニ合スルガ故ニ a ヲ0トスレバ $b^2c+c^2b\equiv A(b+c)bc$ 卽チ
$bc(b+c)\equiv Abc(b+c)$ トナル故ニ $A=1$ ヲ得由テ本式ハ $(b+c)(c+a)(a+d)$ 此ノ如ク分割スルヿヲ得ルナリ

● $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$ ヲ分割スルヿ(午)ニ於テ解ケリ然レ𪜈前問ノ如キ法ヲ以テスレバ如何
本式 $\equiv(a+b+c)^3-a^3-(-c)^3-c^3\equiv a^3-a^3+c^3-c^3=0$ トナル故ニ $b-(-c)=b+c$ ハ本式ノ一因子ナリ故ニ $(c+a)$ 及ヒ $(a+b)$ モ亦本式ノ一因子ナラザルヲ得ス故ニ
$(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3\equiv A(b+c)(c+a)(a+b)$ 此式ノ a ニ如何ナル數ヲ與フルモ式ニ合ス

ルガ故ニ a ヲ零トスレバ $(b+c)^3-b^3-c^3\equiv A(b+c)bc$ 即チ $b^3+3b^2c+3bc^2+c^3-b^3-c^3$ $\equiv Abc(b+c)$ 即チ $3bc(b+c)\equiv Abc(b+c)$ 故ニ $A=3$ ヲ得之レニ由テ本式ハ $3(b+c)(c+a)(a+b)$ 此ノ如ク括ルヿヲ得ルナリ

● $(a+b+c)^5-a^5-b^5-c^5$ ヲ分割スレバ $5(b+c)(c+a)(a+b)(a^2+b^2+c^2+bc+ca+ab)$ トナル此證ヲ問フ

今之レヲ分割スルニハ例ノ如ク b ニ $-c$ ヲ代入スレバ $(a-c+c)^5-a^5-(-c)^5-c^5$ $\equiv a^5-a^5+c^5-c^5\equiv 0$ トナル故ニ $b-(-c)=(b+c)$ ハ本式ノ一因子ナリ故ニ $(c+a)$ 及ヒ $(a+b)$ モ亦本式ノ一因子ナラサルヲ得ス而シテ本式ハ五式同次式ナルガ故ニ右三因子ノ外 $(a^2+b^2+c^2)$, $(bc+ca+ab)$ ナルモノ幾段宛カノ和ヲ有セサルヲ得ス故ニ $(a+b+c)^5-a^5-b^5-c^5\equiv(b+c)(c+a)(a+b)\{A(a^2+b^2+c^2)+B(bc+ca+ab)\}$ ト仮定シ a ヲ零トスレバ $(b+c)^5-b^5-c^5\equiv bc(b+c)\{A(b^2+c^2)+Bbc\}$ トナル通因子則チ $(b+c)$ ヲ省去スレバ $(b+c)^4-(b^4-b^3c+b^2c^2-bc^3+c^4)\equiv bc\{A(b^2+c^2)+Bbc\}$ 即チ $5bc(b^2+\ c+c^2)\equiv bc\{A(b^2+c^2)+B\ c\}$ ヲ得通因子ヲ省ケバ $5(b^2+c^2)+5bc\equiv A(b+c)+Bbc$ ヲ得之レニ由テ $A=5$, $B=5$ ナルヲ知ル故ニ $(a+b+c)^5-a^5-b^5-c^5\equiv5(b+c)(c+a)(a+b)\{5(a^2+b^2+c^2)+5(bc+ca+ab)\}$ トナルナリ

● $45x^5y^2$ ト $105x^4y^3$ ト $120x^2y^5$ ナル三式ノ最高公因子ヲ求メ之レヲ論證セヨ

最高公因子ハ諸數ニ通有ナル因子ノ最高冪ヲ有スルモノナルヲ以テ先ツ諸式ヲ元因子ニ分割スレハ $3.3.5x^5y^2$, $3.5.7x^4y^3$, $3.5.8x^2y^5$ 此ノ如シ今此三式ノ通有ナルモノハ $3\ 5\ x^2y^2$ 故ニ此諸因子ハ三式ノ公因子ナリ由テ此諸因子ノ連乗積モ亦三式ノ公因子(酉)ナリ而シテ此諸因子ノ外三式通有ナル因子ナシ故ニ此諸因子ノ連乗積ハ三式ノ最高公因子ナルヿ明カナリ

● a^2-b^2, $a^3+a^2b-ab^2+b^3$, $a^3-a^2b-ab^2+b^3$ 上ノ三式ノ最高公因子ヲ求ムル法ヲ論セヨ

先ツ三式ヲ分割スレハ $(a+b)(a-b)$, $(a+b)^2(a-b)$, $(a+b)(a-b)^2$ 此ノ如シ此三式ノ通有因子ハ $a+b$, $a-b$ ナリ故ニ此二因子ヲ以テ三式ヲ除スルヿヲ得ヘシ故ニ此二因子ノ相乗積 $(a+b)(a-b)$ 即チ a^2-b^2 ハ此三式ノ最高公因子ナルヿ明カナリ

一數若シ他ノ數ヲ整除スルヿヲ得ハ其幾倍ヲモ整除シ得ヘシ其理如何

先ツ一數 A ヲ他ノ一數 D ニテ除スヘキモノトシ其除商ヲ Q トセバ $\frac{A}{D}=Q$ 之ニ m ヲ乗ズレバ $\frac{Am}{D}=Qm$ ヲ得故ニ m 整數ナレバ Qm モ亦整數ナリ

● 一數若シ他ノ両數ヲ整除シ得バ前ノ一數ハ後ノ両數ノ和モ亦整除シ得ベシ

両數ヲ AB トシ其和ヲ S トシ AB 両數何レモ D ニテ除スベキモノトシ其商ヲ QQ' トセバ $\frac{A}{D}=Q$ $\frac{B}{D}=Q'$ ニシテ $A+B=S$ ナルガ故ニ此式ノ各項ヲ D ニテ除ズ𪜈ハ $Q+Q'=\frac{S}{D}$ ヲ得此式ニ於テ $Q+Q'$ ハ整數ナルカ故ニ S/D 亦整數ナラサルヲ得ズ

●一數若シ他ノ両數ヲ整除シ得バ前ノ一數ハ後ノ両數ノ差モ亦整除シ得ベシ

両數A Bノ差ヲdトシA B両數何レモDニテ除スヘキモノトシ其除商ヲQ Q'トセバ$A-B=d$ヲ得此式ノ各項ヲDニテ除スキハ$Q-Q'=\frac{d}{D}$ヲ得此式ニ於テ$Q-Q'$ハ整數ナルガ故ニ$\frac{d}{D}$モ亦整數ナラザルヲ得ス

●多項式最高公因子ヲ求ムル法ヲ論証セヨ

$B)A(Q$
BQ
第一餘數 … $R)B(Q'$
RQ'
第二餘數 …… $R')R(Q''$
$R'Q''$

両數ヲA Bトシ之レヲ同字母ノ降冪ノ順ニ排列シテAヲ小ナラザル數トシBヲ大ナラサル數トス今Bヲ以テAヲ除シ得商ヲQトシ其餘數ヲRトシ之レヲ以テBヲ除シ其商ヲQ'トシ其餘數ヲR'トシ以テRヲ除ス逐テ此ノ如ク迭ヒニ除シテ餘數盡キテ止ム

今此R'ガ最高公因子ナルヤ否ヤヲ証明セントスルニハ除法ノ理ニ由テ商ト法ノ相乘積(餘數アレバ之レヲ加フ)ハ實ニ等シキカ故ニ

$R=Q''R'$

$B=Q'R+R'=Q'Q''R'+R'=R'(Q'Q''+1)$

$A=QB+R=QR'(Q'Q''+1)+Q''R'=R'\{Q(Q'Q''+1)+Q''\}$

是ニ於テ$(Q'Q''+1)$ヲPトスレバ$B=R'P$　$A=R'(QP+Q'')$ヲ得故ニR'ハA及ヒBノ公因

子ナリ而シテ之レガ最高ナルヤ否ヤハAトBトノ他ノ因子Pト$(QP+Q'')$ニ公因子ノアルヤナキヤヲ知ルニアリ是ハ決シテナキモノナリ何トナレバPハQ''ノ倍數ニ一個ヲ加ヘタルモノナルガ故ニ之レノQ倍ニQ''ヲ加フレバPノ倍數ニ一個足ラザル乛明カナリ故ニAトBノ公因子ハR'ヨリ高キモノアルヘカラズ

今此A Bヲ實際ノ式ニ改メ$2x^4+3x^3+2x^2-4x-3$…(A)　x^3+x^2-2…(B)トスレハ其演算左ノ如シ

(B)　(A)　(Q)
$x^3+x^2-2)2x^4+3x^3+2x^2-4x-3(2x+1$ ……… 第一商
$2x^4+2x^3\qquad\qquad -4x$
x^3+2x^2-3
x^3+x^2-2
第一餘數(R) …… $x^2-1)x^3+x^2-2(x+1$ ……… 第二商
x^3-x
x^2+x-2
x^2-1
(Q)
第二餘數(R′)即最高公因子 …… $x-1)x^2-1(x+1$ 第三商
x^2-x
$x-1$
$x-1$

今此演算ヲ簡便ニスレバ

$$\begin{array}{l|c|l}
(B)\cdots\cdots x^3+x^2-2 & Q & 2x^4+3x^3+2x^2-4x-3\cdots\cdots(A)\\
 & 2x+1 & 2x^4+2x^3 \qquad -4x\\
x^3-x & & x^3+2x^2-3\\
x^2+x-2 & Q' & x^3+x^2-2\\
x^2 \qquad -2 & x+1 & x^2-1\cdots\cdots(R)\\
(R')\cdots\cdots x-1 & Q'' & x^2-x\\
 & x+1 & x-1\\
 & & x-1
\end{array}$$

●最高公因子ヲ求ムルニ演算上ニ起ル三ツノ注意スヘキ事ハ何ソ

第一與ヘラレタル式ノ一目シテ両式ニ通スル因子アレバ之レヲ省キ後之レヲ最高公因ノ一因子トナスヘシ

第二實ノ首項法ノ首項ノ倍數ナラサルキハ之レニ相當スヘキ最小ノ數ヲ全實ニ乘ズヘシ

第三實或ハ法ノ各項ニ通スル因子アレバ之レヲ省クベシ

此三件ハ次ノ二問題ニ由テ知ルベシ

● $12x^5+22x^3+6x$ 及ヒ $6x^5-15x^3-36x$ ノ最高公因子ヲ求ムレハ如何

前式ハ通因子 $2x$ ヲ有シ後式ハ通因子 $3x$ ヲ有ス然ルニ x ハ両式通有ナルヲ以テ之レヲ最高公因子ノ一因子トナスヘシ2ト3ハ一式ニ通シテ両式ニ通セサルヲ以テ之ヲ省畧スルモ最高公因子ニ變化ヲ生スルコトナシ故ニ之レヲ省畧スレバ

$$\begin{array}{l|c|l}
2x)12x^5+22x^3+6x & (Q) & 3x)6x^5-15x^3-36x\\
(A)\cdots 6x^4+11x^2+3 & 3 & (B)2x^4-5x^2-12\\
6x^4-15x^2-36 & & 2x^4+3x^2\\
13)26x^2+39 & (Q') & -8x^2-12\\
(R)\cdots\cdots 2x^2+3 & x^2-4 & -8x^2-12
\end{array}$$

故ニ $(2x^2+3)x=2x^3+3x$

$6x^4+11x^2+3\cdots\cdots(A)$ 及ヒ $2x^4-5x^2-12\cdots\cdots(B)$ ヲ得今 (B) ヲ以テ (A) ヲ除スレバ商即チ (Q) 3ヲ得テ餘數 $26x^2+39$ ヲ得然ルニ此餘數ノ通因子13ヲ含有ス然ルニ両式ノ最高公因子ハ連除法ノ毎次ノ實法両式ノ最高公因子ニ等キガ故ニ毎次ノ餘數ヨリ一項式因子ヲ省去スルコヲ得故ニ今此ノ通因子13ヲ省去セバ $2x^2+3\cdots\cdots(R)$ ヲ得以テ (B) ヲ除スレバ商即チ (Q') x^2-4、ヲ得テ餘數ナシ之レニ原両式ノ通有ナル x ヲ乘スレバ $2x^3+3x$ トナル之レ所要ノ最高公因子ナリ

● $14x^4-84x^3+119x^2+42x-63$ 及ヒ $8x^4-36x^3+38x^2-6x$ ノ両式ノ最高公因子ヲ問フ

今此両式ヲ見ルニ前式ハ7ノ通因子ヲ有シ後式ハ $2x$ ノ通因子ヲ有ス故ニ盡ク之ヲ省去シ前式ハ $2x^4-12x^3+17x^2+6x-9$ 後式ハ $4x^3-18x^2+19x-3$ ヲ得而ルニ此首項ハ $4x^3$ ニシテ前式ノ省式即チ (A) ノ首項ハ $2x^4$ ナリ故ニ前式ニ補因子2ヲ乘シ後式ノ首項ヲ以

$7)\ 14x^4-84x^3+119x^2+42x-63\ (Q)$

$(A)\ 2x^4-12x^3+17x^2+6x-9 \qquad x-1$

$4x^4-24x^3+34x^2+12x-18\ (2 \qquad -1$

$4x^4-18x^3+19x^2-3x$

$-6x^3+15x^2+15x-18 \qquad (Q')$

$3)\ -2x^3+5x^2+5x-6 \qquad -x,$

$-4x^3+10x^2+10x-12\ (2 \qquad +7$

$-4x^3+18x^2-19x+3 \qquad (Q'')$

$(R)\ -8x^2+29x-15 \qquad -8x+5$

$-8x^2+24x$

$5x-15$

$5x-15$

$2x)\ 8x^4-36x^3+38x^2-6x$

$(B)\ 4x^3-18x^2+19x-3\ (2$

$8x^3-36x^2+38x-6$

$8x^3-29x^2+15x$

$-7x^2+23x-6\ (8$

$-56x^2+184x-48$

$-56x^2+203x-105$

$-19)\ -19x+57$

$x-3\ (R')$

テ前式ノ首項ヲ除シ得ヘカラシム〔此ノ如キ補因子ハ必ス實ト法トニ通スルコトナシ何トナレバ初メ法ノ一項式因子ハ盡ク省去セシ故ナレバナリ〕而シテ後式ヲ以テ前式ヲ除シ商 x ヲ得ルトキ餘數 $-6x^3+15x^2+15x-18$ ヲ得而シテ此餘數ニ通因子 3 アリ故ニ之ヲ省去シ $-2x^3+5x^2+5x-6$ ヲ得而ルニ此式ノ首項ハ $-2x^3$ ナルヲ以テ前法ニテ除スル能ハス故ニ又補因子 2 ヲ乘シテ $-4x^3+10x^2+10x-12$ トナシ前ノ如ク除スルニ商 -1 ヲ得テ餘數 $-8x^2+29x-15$ ヲ得是ニ於テ實ノ首項法ノ首項ヨリ底冪トナル故ニ之ヲ次ノ法トス(則 R)之ヲ以テ前法(則 B)ヲ除セントスルニ首項 $4x^3$ ナルヲ以テ除スル能ハズ故ニ補因子 2 ヲ乘シ之ヲ除スルニ商 $-x$ ヲ得テ餘數 $-7x^2+23x-6$ ヲ得故ニ此首項ハ R ノ首項ノ幾倍ニ相當セズ故ニ補因子 8 ヲ乘シ之ヲ除スルニ商 7 ヲ得テ餘數 $-19x+57$ ヲ得然ルニ此餘數ハ -19 ノ通因子アリ故ニ之ヲ省去シテ $x-3$ ヲ得(則 R')以テ前法(則 R)ヲ除スレハ商 $-8x+5$ ヲ得テ餘數ナシ故ニ $x-3$ ハ本題ノ最高公因子ナリ若シ前ニ -19 ヲ省去スルトキ $+19$ ヲ省去セバ最高公因子ハ $-x+3$ 卽チ $3-x$ ナルベシ然レトモ最高公因子ハ以テ原數ヲ除シ得ヘキ性質ヲ有スルノミナルヲ以テ其正負ノ關係スル所ニアラズ故ニ $x-3$ モ $-x+3$ モ所題ノ最高公因子ナルコト明カナリ由テ此連除法中ニ於テ省去スヘキ一項式因子ハ正トスルモ負トスルモ妨ケナシ同理ニ由テ補因子モ亦然リ

左ノ三問題ハ前ノ三問題ノ中ニテ答フルコトヲ得ルナリ

● 最高公因子ヲ求ムル爲メニ互除法ヲ施シ最後ノ餘數則チ最後ノ除法ニ法トナセシ式ハ最高公因子ナリト云フ其理如何

● 最高公因子ヲ求ムル演算中實或ハ法ヲ一數ヲ以テ除スルモ最高公因子ニ變更ナシ其理如何

● 最高公因子ヲ求ムル演算中實ニ一數ヲ乘スルモ最高公因子ニ於テ變更ナシ其理如何

● 一項式最底公倍數法ヲ例ヲ舉ゲテ論証セヨ

設令ハ $15x^2y$, $25xy^2$ 或ハ $a^2+2ab+b^2$. $a^2-2ab+b^2$ 上式ノ最底公倍數ヲ求ムレバ $15x^2y=3\times5x^2y$, $25xy^2=5^2xy^2$ 故ニ $15x^2y$, $25xy^2$ ノ最底公倍數ハ $3\times5^2x^2y^2=75x^2y^2$ 又 $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$. $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$ 故ニ

$a^2+2ab+b^2$, $a^2-2ab+b^2$ ノ最底公倍數ハ $(a+b)^2(a-b)^2=a^4-2a^2b^2+b^4$ ナリ

●多項式最底公倍數ヲ求ムル法ヲ例ヲ擧ケテ論証セヨ

設令ハ x^4+x^2+1, x^4-x^3-x+1 上ノ両式ノ最底公倍數ヲ求ム

本題ニ於テハ此式ヲ容易ニ元因子ニ分割スル能ハサルカ故ニ最高公因子ヲ求ムルニ x^2+x+1 ヲ得以テ両式ヲ除スレハ x^2-x+1 及ヒ x^2-2x+1 ヲ得故ニ両式ノ最底公倍數ハ $(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^2-2x+1)$ 即チ $x^6-2x^5+2x^4-2x^3+2x^2-2x+1$ ナリ然レ𪜈實算スルニ方テハ最高公因子ヲ以テ両式ヲ除セズ何レカ一式ヲ除シ得商ヲ他ノ式ニ乗スレバ所得ノ乗積ハ最底公倍數ナリ何トナレバ前ノ除商 x^2-x+1 及ヒ x^2-2x+1 ニ最高公因子ヲ乗セハ原式ニ等シキ故ナリ

●両數ノ最高公因子ト最底公倍數ノ相乗積ハ両數ノ相乗積ナリト云フ其理如何

算術之部ニ見ヘタリ

●分數ノ分母子ノ正負ヲ變換スルモ分數ノ値變セサルハ何故ナルヤ

$\frac{c-d}{a-b}=\frac{d-c}{b-a}$ ナリ何トナレバ $\frac{c-d}{a-b}=\frac{(c-d)(-1)}{(a-b)(-1)}=\frac{-c+d}{-a+b}=\frac{d-c}{b-a}$ ナレバナリ

●分數式ノ分母子ノ一因子ヲ轉倒セント欲セハ其因子ノ指數ヲ變スレハヨシ其理如何

$\frac{bc}{ax^3}=\frac{bcx^{-3}}{a}$ ナリ何トナレハ $\frac{bc}{ax^3}=\frac{bcx^{-3}}{ax^3\times x^{-3}}=\frac{bcx^{-3}}{ax^{3-3}}=\frac{bcx^{-3}}{ax^0}=\frac{bcx^{-3}}{a}$ ナレバナリ

● $\frac{b}{a}+\frac{d}{c}=\frac{bc+ad}{ac}$ ナルヲ証セヨ

$\frac{b}{a}+\frac{d}{c}=\frac{bc}{ac}+\frac{ad}{ac}=\frac{1}{ac}\times bc+\frac{1}{ac}\times ad=(bc+ad)\times\frac{1}{ac}=\frac{bc+ad}{ac}$

● $\frac{b}{a}-\frac{d}{c}=\frac{bc-ad}{ac}$

$\frac{b}{a}-\frac{d}{c}=\frac{bc}{ac}-\frac{ad}{ac}=\frac{1}{ac}\times bc-\frac{1}{ac}\times ad=(bc-ad)\times\frac{1}{ac}=\frac{bc-ad}{ac}$

●分數ニ分數ヲ乗スルニハ両分數ノ分母ノ相乗積ヲ分母トナシ分子ノ相乗積ヲ分子トナス其理如何

$\frac{b}{a}\times\frac{d}{c}=ba^{-1}\times dc^{-1}=(ba^{-1})(dc^{-1})=bda^{-1}c^{-1}=\frac{bd}{ac}$ ナリ

●分數ヲ以テ分數ヲ除スルニハ法ノ分母子ヲ轉倒シテ實ニ乗スレバ得其理如何

$\frac{b}{a}\div\frac{d}{c}=(ba^{-1})\div(dc^{-1})=\frac{ba^{-1}}{dc^{-1}}=\frac{bc}{ad}=\frac{b}{a}\times\frac{c}{d}$ 此ノ如シ

● $\dfrac{\frac{a-b}{a+b}}{\frac{a+b}{a-b}}=\frac{(a-b)^2}{(a-b)^2}$ ナルヲ証セ

分數除法ニ由レバ $\frac{\frac{a-b}{a+b}}{\frac{a+b}{a-b}}=\frac{a-b}{a+b}\times\frac{a-b}{a+b}=\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}$ ナリ又他ノ簡法ヲ用ユレバ

$$\frac{\frac{a-b}{a+b}\times(a+b)(a-b)}{\frac{a+b}{a-b}\times(a+b)(a-b)}=\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}$$

●常分數ニ常分數ヲ加フレバ亦常分數トナル此理如何

分數ノ和ノ分子ハ第一ノ分數ノ分子ト第二ノ分數ノ分母トノ相乘積ト第二ノ分數ノ分子ト第一ノ分數ノ分母ノ相乘積ノ和ニシテ分母ハ兩分數ノ分母ノ相乘積ナリ然ルニ各分子ト分母ノ相乘積ハ各分母ノ相乘積ヨリ其次數底キ冪數ヲ有スルヿ明カナリ故ニ其和モ亦低シ之レニ由テ常分數ナルヿ明カナリ

●常分數ノ分母ガ二個以上ノ因子ニ分割スルヿヲ得バ此分數ハ常分數ニ分ツヿヲ得則チ

$\frac{A}{(x-a)b}=\frac{P}{(x-a)}+\frac{q}{b}$ 此ノ如クナスヿヲ得其理如何

$\frac{A}{(x-a)b}=\frac{P}{x-a}+\frac{q}{b}=\frac{pb+q(x-a)}{(x-a)b}$ 故ニ $A=pb+q(x-a)$ ナリ今 x ニ a ヲ代入スレバ $A'=pb$ トナル而シテ此 A' 及ヒ q ハ A 及ヒ b ニ含メル x ニ a ヲ代入シタルモノナルヲ

以テ常數ナリ故ニ P ハ常數 $\frac{p}{x-a}$ ハ常分數ナリ而シテ $q(x-a)$ A ハ同次ナルカ或ハ低次ナルガ故ニ q ハ b ヨリ低次ナリ則チ常分數ニ分ツヿヲ得ルナリ

●前問ノ理ニ由テ $\frac{12x-46}{x^2-8x+15}$ ヲ二個ノ常分數ノ和ニ分テバ如何

$\frac{12x-46}{x^2-8x+15}=\frac{12x-46}{(x-3)(x-5)}=\frac{p}{x-3}+\frac{q}{x-5}=\frac{p(x-5)+q(x-3)}{(x-3)(x-5)}$ トナル故ニ

$12x-46\equiv p(x-5)+q(x-3)$ トナル今此 x ニ 3 ヲ代入スレバ $36-46\equiv 3p-5p$ 即チ $-10=-2p$ 故ニ $p=5$ 又 x ニ 5 ヲ代入スレバ $60-46=5q-3q$ 即チ $14=2q$ 故ニ $q=7$ 故ニ

$\frac{12x-46}{x^2-8x+15}=\frac{5}{x-3}+\frac{7}{x-5}$ 此ノ如ク分クルヿヲ得ルナリ

●二個ノ最簡分數ノ分母互ニ公因子ヲ有セサレバ其和モ差モ最簡分數ナルヿヲ證セ

二個ノ最簡分數ヲ $\frac{b}{a}$ 及ヒ $\frac{d}{c}$ トシ a ト c トガ互ニ公因子ヲ有セザレバ其和 $\frac{bc+ad}{ac}$ 及ヒ其差 $\frac{bc-ad}{ac}$ ハ皆最簡分數ナリ何トナレバ a ハ b 及ヒ c ト公因子ヲ有セサルカ故ニ bc トモ公因子ヲ有セズ故ニ $bc+ad$ 或ハ $bc-ad$ ト公因子ヲ有セズ又 c ハ d 及ヒ a ト公因子ヲ有セザルガ故ニ ad トモ公因子ヲ有セス故ニ亦 $bc+ad$ 或ハ $bc-ad$ トモ公因子ヲ有セサレバナリ

●方程式ノ分母ヲ消去スルニハ各項ノ分母ノ最低公倍數ヲ乘スレハ得其理如何

分數ハ分母ノ倍數ヲ乘スレバ整數トナル故ニ各項ノ最低公倍數ヲ乘スレバ各項皆整數トナル又方程式ノ両邊ニ同量ヲ乘スルモ其両邊ノ積ハ相等シ(公理)故ニ題言ノ如シ

●方程式ノ前邊ノ項ヲ後邊ニ移シ或ハ後邊ノ項ヲ前邊ニ移ス片ハ其正負ヲ變セサルヲ得ズ其理如何

方程式 $x+a=b$ ニ於テ前邊ノ $+a$ ヲ後邊ニ移ス片ハ其正負ヲ變シテ $x=b-a$ トナル何トナレバ方程式ノ両邊ヨリ同量ヲ減スルモ其適等ヲ失フヿナシ(公理)故ニ $x+a-a=b-a$ 此ノ如シ然ルニ $a-a=0$ ナルカ故ニ $x=b-a$ トナル而シテ此方程式ノ原方程式ヲ比スルニ原方程式ニ於テ a ハ前邊ニアリテ $+a$ ナリシニ今ハ後邊ニ來リテ $-a$ トナル此理ニ由テ本題ヲ証スルヿヲ得タリ

●一元一次方程式ハ只一商アルノミ其理如何

一元一次方程式ヲ $ax=b$……(一)トシ此方程式ニ二ツノ商ガアルトセバ之レヲ R R' トシ之レヲ(一)ニ代入スレバ $aR=b$……(二) $aR'=b$……(三)トナル故ニ $aR=aR'$ トナル両邊ヲ a ヲ以テ除スレバ $R=R'$ トナル故ニ R R' ハ同量トナル則チ只一商ニ歸スルナリ

●方程式ノ両邊ノ同量ヲ以テ除スルモ尚ホ方程式ノ適等ヲ失ハザレバ公理ニ由テ明カナリ然ルニ時トシテ其適等ヲ失フヿアリ其塲合如何

一元一次方程式ニ於テ未知量ヲ含ム一數ヲ以テ除スル片ハ其適等ヲ失フヿアリ設令ハ $7(x-3)=4(x-3)$ ハ合理ノ方程式トスル片両邊ヲ $(x-3)$ ヲ以テ除スレバ $7=4$ トナリテ適等ヲ失フナリ

●前問ノ $7(x-3)=4(x-3)$ ハ同量ノ七倍ト四倍カ適等スルニ合理ノ方程式トハ何ヲ以テ云フヤ

同量ニシテ其倍數ノ異ナルモノハ素ヨリ適等ナラズ然レ圧 x ノ値ニ由テ然ル塲合アリ則チ本題ニアリテハ x ノ價3ナル片ニ限リ適等スルナリ何トナレバ $x-3=0$ ナルヲ以テ零ハ幾倍スルモ零ナリ故ニ零ノ七倍ト四倍トハ適等スルナリ之レニ由テ合理ノ方程式ノ両邊ヲ一式ヲ以テ除シタル片若シ適等ヲ失フヿアラバ除シタル法ヲ零ト適等セシムレバ是レ元方程式ノ正答ヲ得ヘキ一種ノ方程式ナリ則チ本題ニ於テハ $x-3=0$ ハ本題ノ正答ヲ得ヘキ一種ノ方程式ナリ

●$(x-3)=0$ ナル方程式ヲ如何ナル正理ヲ以テ $7(x-3)=4(x-3)$ 此ノ如キ式ヲ得ルヤ

$(x-3)=0$ 此両邊ヲ三倍スレバ $3(x-3)=0$ 此両邊ニ $4(x-3)$ ヲ加プレハ $3(x-3)+4(x-3)=4(x-3)$ 卽チ $7(x-3)=4(x-3)$ 此ノ如シ

二元ヲ有スル一ノ方程式ハ不定方程式ナリト云フ其理如何

二元ヲ有スル方程式 $x+y=16$ ハ不定方程式ナリ何トナレバ x ノ値ニ由テ y ノ値モ亦變ス則チ x ヲ1トスレバ y ハ15 x ヲ2トスレバ y ハ14 x ヲ3トスレハ y ハ13逐テ此ノ如ク未知ノ値定マラサレバナリ

●方程式ノ兩邊ノ各項ノ正負ヲ變換スルモ妨ケナシ其理如何

方程式 $ax-b=c$ ニ於テ各項ニ -1 ヲ乘スレバ $-ax+b=-c$ トナル故ニ方程式ノ一項ノ正負ヲ變セント欲スレバ各項ノ正負ヲ變ズレバヨシ

●二個ノ方程式ニ二個ノ未知元ヲ有スル𪜈兩式ニ合スル各元ノ根ハ只一ツアルノミ其理如何

二個ノ方程式ヲ $ax+by=c$ ....(一) $a'x+b'y=c'$ ....(二) トナシ此方程式ニ合スル未知量ガ各二個アルトセバ x ヲ p 及ビ p' トシ y ヲ R 及ヒ R' トス然ル𪜈ハ $ap+bR=c$ ....(三) $ap'+bR'=c$ ....(四) (三)ト(四)ニ由テ $ap+bR=ap'+bR'$ トナル轉項スレバ $ap-ap'=bR'-bR$ トナル之レヲ括レバ $a(p-p')=b(R'-R)$ ....(五) トナル同理ニ由テ $a'(p-p')=b'(R'-R)$ ....(六) (五)ニ a' ヲ乘シ(六)ニ a ヲ乘スレバ $aa'(R-p')=a'b(R'-R)$ ....(七) $aa'(p-p')=ab'(R'-R)$ ....(八) トナル(七)(八)ノ前邊ハ等シキヲ以テ $a'b(R'-R)=ab'(R'-R)$ 即チ $(a'b-ab')(R'-R)=0$ ....(九) 同理ニ由テ $(ab'-a'b)(p-p')=0$ ....(十) 此(九)(十)二式ニ於テ考フルニ豫定ニ由テ $(p-p')$ 及ヒ $(R'-R)$ ハ零ニアラズ然レハ $(ab'-a'b)$ ハ零ナラザルヲ得ス然ルニ今 ab' ト $a'b$ ヲ等シクセンニハ a ト b トノ關係ガ $a'b'$ ノ關係ニ等シカラサルヲ得ス若シ之レ等ノ關係カ相等シキ𪜈ハ元二方程式ノ一ハ他ノ一ノ倍數ニシテ簡約スレハ同一ノモノトナル故ニ若シ同一ノモノニアラサル方程式ナレバ $(ba'-a'b)$ ハ零トナルヿナシ然レバ $(p-p')$ 及ヒ $(R'-R)$ ハ各零ナラサルヲ得ス故ニ $p=p'$ ニシテ $R=R'$ ナルガ故ニ x 及ビ y ノ値ハ各只一ツアルヲ証ス

●a b ノ二量公因子ヲ有セサル𪜈ハ $(a+b)^n$ ト $(a-b)^n$ トノ公因子ハ 2^n ヨリ大ナラズ其理如何

今 a b 倶ニ奇數ナル𪜈ハ $(a+b)-(a-b)=2b$ ニシテ $2b$ ト $(a+b)$ 及ヒ $(a-b)$ トハ 2 ノ公因子アルノミ故ニ $(a+b)^n$ 及ヒ $(a-b)^n$ ノ公因子ハ大ナルモ 2^n ニ越ルヿナシ又一ハ奇數一ハ偶數ナル𪜈ハ $(a+b)$ モ $(a-b)$ モ倶ニ奇數ナルヲ以テ $2b$ ト公因子ヲ有スルヿナシ故ニ a b ノ如何ナルニ係ラス題言ノ如シ

●二量ノ a b 公因子ヲ有セサル𪜈ハ (a^n+b^n) 及ヒ (a^n-b^n) ノ公因子ハ 2 ヨリ外ニアルヿナシ此理如何

$(a^n+b^n)-(a^n-b^n)=2b^n$ 然ルニ a ト b トハ公因子ナキガ故ニ $2b^n$ ト (a^n+b^n) 及ヒ (a^n-b^n) ト 2 ノ外ハ公因子アルヿナシ則チ題言ノ如シ

●二量 a b 若シ公因子ヲ有セサル𪜈ハ $(a+b)$ ト a^2-ab+b^2 ノ公因子ハ 3 ヨリ外ニアルヿナシ其理如何

$a^2-ab+b^2=a^2+2ab+b^2-3ab=(a+b)^2-3ab$ 然ルニ $(a+b)$ ト ab トハ公因子ヲ有セズ故ニ $(a+b)$ ト $3ab$ トニ公因子ヲ有スルモ 3 ヨリ外ニ出テズ則チ題言ノ如シ

●如何ナル數ニテモ其立方ヨリ原數ヲ減スレバ六ノ倍數トナル其理如何

某數ヲ x トスレバ x^3-x ハ六ノ倍數ナリ何トナレバ

$x^3-x=x(x^2-1)=x(x-1)(x+1)=(x-1)x(x+1)$ 此各因子ヲ見ルニ順次ニ一個ノ差ヲナス故ニ此三因子ハ連續三數ナリ然ルニ連續三數ノ中一ハ2ノ倍數ニシテ一ハ必ス3ノ倍數ナリ故ニ此連乘積ハ2×3即チ6ノ倍數ナルヿ明カナリ

●某數若シ3ノ倍數ヨリ一個少キヰハ某數ノ四乘冪ニ某數ヲ加フレバ9ノ倍數トナル其理如何

某數ヲxトスレハ(x^4+x)ハ九ノ倍數ナリ何トナレバ

$x^4+x=x(x^3+1)=x(x+1)(x^2-x+1)$然ルニ$x$ハ3ノ倍數ヨリ一個少キヲ以テ$(x+1)$ハ3ノ倍數ナリ又$x^2-x+1=x^2+2x+1-3x=(x+1)^2-3x$トナル故ニ$(x^2-x+1)$モ亦3ノ倍數ナリ故ニ$(x+1)(x^2-x+1)$ハ9ノ倍數ナルヲ以テ$x(x+1)(x^2-x+1)$即チ$x^4+x$モ亦9ノ倍數ナレバナリ

●二量ノ平方ノ和ノ二倍ハ二量ノ和ト差ノ平方ノ和ニ等シ其理如何

$2(a^2+b^2)=(a+b)^2+(a-b)^2$ナリ何トナレバ$2(a^2+b^2)=2a^2+2b^2=a^2+b^2+a^2+b^2$

$=a^2+2ab+b^2+a^2-2ab+b^2=(a+b)^2+(a-b)^2$ナレバナリ

●$\frac{A}{\infty}=0$ナルヿヲ証セ

分數$\frac{1}{10}=.1$, $\frac{1}{100}=.01$, $\frac{1}{1000}=.001$以下畧ス逐テ此ノ如ク分母カ増大スルニ従ヒ分數ノ値小トナル故ニ分母次第ニ増大シテ無究大ニ至ルヰハ其分數ノ値殆ト空數ニ至ルベシ故ニ$\frac{A}{\infty}=0$ナルヿ明カナリ

●$\frac{A}{0}=\infty$ナルヲ證セヨ

$\frac{1}{.1}=10$, $\frac{1}{.01}=100$, $\frac{1}{.001}=1000$逐テ此ノ如ク分母減小スルニ従ヒ分數ノ値ハ漸次ニ増大ス故ニ分母ガ無究ニ小ニ至レハ分數ノ値ハ無究大ニ至ルヘシ則チ$\frac{A}{0}=\infty$トナルヿ明カナリ

●$0\times0=0$ニシテ$\infty\times\infty=\infty$ナルヲ證セ

本題ハ論セスシテ明カナリ

●$0\times\infty$ハ不定ノ値ナリト云フ此理如何

$\frac{A}{0}=\infty$ナリ故ニ$A=0\times\infty$然ルニAハ任意ノ數ナリ故ニ$0\times\infty$ハ不定値ナリ

●$\frac{0}{0}$ハ不定値ナリ其理如何

$A\times0=0$ナリ故ニ$A=\frac{0}{0}$ナリ然ルニAハ任意ノ數ナリ故ニ$\frac{0}{0}$ハ不定値ナリ

●$\frac{\infty}{\infty}$ハ不定値ナリ其理如何

$\frac{\frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty}}=\frac{1}{\infty}\times\frac{\infty}{1}=\frac{\infty}{\infty}$ナリ然ルニ$\frac{\frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty}}=\frac{0}{0}$ナリ故ニ$\frac{\infty}{\infty}=\frac{0}{0}$トナル之レニ由テ$\frac{\infty}{\infty}$

ハ不定値ナルヿ明カナリ

● $\frac{a^3-b^3}{a^2(a-b)}$ナル式ニ於テ$a=b$ナルトキハ$\frac{b^3-b^3}{b^2(b-b)}=\frac{0}{0}$トナリ又原式ヲ最簡式ニ化シタル後$a$ヲ$b$ニ代フレバ$\frac{a^3-b^3}{a^2(a-b)}=\frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{a^2(a-b)}=\frac{a^2+ab+b^2}{a^2}=\frac{{}^2+b^2+b^2}{b^2}=\frac{3b^2}{b^2}=3$トナル然ルニ分數ノ分母子ヨリ公因子ヲ消去スルモ分數ノ値變セサルノ定義アルニ此ノ如ク最簡式ニ化シタル後ト化セサル前ト値ノ異ルハ何故ナルヤ且ツ此値ハ何レガ眞ナル ヤ

後ノ値コソ眞ナリ何トナレバ本式ヲ分割スレバ$\frac{a^3-b^3}{a^2(a-b)}=\frac{a-b}{a-b}\times\frac{a^2+ab+b^2}{a^2}$ナリ然ルニ$\frac{a-b}{a-b}$ハ$a$及ヒ$b$ノ値ノ大小如何ナルニ係ラズ一個ナリ然レバ$b$カ次第ニ$a$ニ接近シテ$a=b$ニ至ルモ分數ノ値變スルヿナク一個ナリ故ニ$\frac{a-b}{a-b}\times\frac{a^2+ab+b^2}{a^2}=1\times\frac{b^2+b^2+b^2}{b^2}=\frac{3b^2}{b^2}=3$トナル則チ最簡式ニ化セサルモ元式ノ性質ヲ知レハ決シテ値ノ變スルヿナキナリ

● $\frac{b-b}{b-b}=1$ナルヿアリ又$\frac{b-b}{b-b}=\frac{0}{0}$トナル然ルニ$\frac{0}{0}$ハ不定値ナリ一物ニシテ一個トナルモノアリ不定値トナルモノアルハ何故ナルヤ

除法ニ於テ實法同量ナレハ商ハ一個ナルヿハ論ヲ待タズ然レ𪜈$\frac{0}{0}$ハ然ラズ何トナレハ分母ノ0ト分子ノΘト性質ヲ異ニスルモノアレバナリ

● $\frac{0}{0}$ニ於テ分母ノ0ト分子ノ0カ性質ヲ異ニシ且$\frac{0}{0}$ガ不定値ナルヿハ實際上如何ナル點ヨリ生スルヤ

第一例爰ニ一ノ圓アリ其圓周ト圓徑ノ比ハ$\frac{355}{113}$ナリ故ニ圓周ト圓徑ノ比ハ3.14159……………ト1ナリ然ルニ此圓カ無究小ニ至ルトキ圓周モ圓徑モ無究小ナリ則チ$\frac{0}{0}$トナルモ圓周ト圓徑トハ常ニ3.14159……………ト1ノ比ヲ失ハズ故ニ$\frac{0}{0}=3.14159$……ナリ

第二例爰ニ一ノ方形アリ其一邊ト對角線トノ比ハ$\frac{\sqrt{2}}{1}$ナリ今此方形ガ無究ニ小ニ至ルトキハ其邊モ對角線モ無究小トナリ終ニ$\frac{0}{0}$トナル然レ𪜈方形ノ形ヲ失ハサル限リハ其一邊ト對角線トノ比ハ常ニ$\sqrt{2}$卽チ1.4142……………ナリ故ニ$\frac{0}{0}=1.4142$……………トナル

是ニ由テ$\frac{0}{0}$ハ其性質ニ由テ其値ヲ異ニス則チ不定量ナリ又分母ト分子ガ性質ヲ異ニスルヿモ此二例ニ由テ明カナリ

● 無究大ニ有限量ヲ加減スレバ如何ナル名稱ヲ附スヘキヤ

無究大則チ∞ハ無究ニ大ナル量ナルヲ以テ天地萬物殘ラズ合スルモ得サルモノナリ故ニ之レニ有限量ヲ加フルモ減スルモ依然トシテ無究大則チ∞ナリ依テ名稱ノ異ナルコナシ

明治二十五年十月廿二日印刷
明治二十五年十月廿六日出版

定價金四錢

編輯者　大阪市東區島町一丁目一番屋敷　小森數藏

發行兼印刷者　大阪市東區安土町四丁目三十八番屋敷　花井卯助

專賣所　大阪市東區安土町四丁目十一番屋敷　積善館

專賣所　福岡市博多中島町七十六番屋敷　積善館支店

●文學篤志者の珍寶

●學校生徒の新文範

樞密院副議長　東久世通禧公題辭
大阪府尋常中學校教諭吉見經綸君閱
大阪府文學院教師松本謙堂君編輯

中等教育 新撰文章教科書

洋裝美本全壹冊紙頁四百五十頁餘
本書實價金三拾錢　郵稅ヲ要セス
拾部一纏メ御注文之節ハ特別一割引

本篇載する所皆な日本の文壇に雄視する名家の傑作にして文學の大觀たるに怍ぢず加ふるに其文悉く高雅純潔獨り作文の摸範たるに止らず本書の如きは世間文章に從事する諸士に取りて坐右の至寶たるべきは勿論亦單に文章教科書として尋常師範學校及び中學校其他諸學校に採用せらるゝにも極めて適當なるものなるべしと確信す乞ふ陸續購讀の榮を賜へ

攝陽永松毅軒君著

●日本青年立志要訣 國民振氣篇

本書は勅語の趣旨に基き編纂せしものにして凡人たるもの良心を啓培し廉耻を重んじ貞淑禮敬等の德性を涵養し尊王愛國の志氣を養成することに注意し古今人の稱すべき言行事蹟にして後者の摸範と爲るへきものを輯め文章を平易流暢にし之を忠義、孝心、貞節、友愛、勤勉、愛國、耐忍、剛毅、立志、節儉、廉潔、謙讓、等の部門に分ち門毎に其大体を說き事蹟の終に格言を記し小學生徒より一般青年子弟に讀ましめ志を立て身を修め家を齊んと奮發興起し以て勅語の趣旨に背かす各世に立つ所の志氣を養成するの一大至寶の書なり

一六居士嚴谷修君　鴻齋石川英君序　河野春颿君閱　福井淳君著

●新撰漢文軌範

和裝美本全貳冊
郵稅共實價金三十五錢

本書ハ卷首ニ文体式解句作文諸法ヲ述ヘ而シテ漢文ノ摸範トナルベキモノヲ甄別編纂シ頼山陽先生ヲ始メ文學博士重野成齋先生及ビ諸名家ノ批評ヲ掲ケ鼇頭ニハ難解ノ熟字ヲ解釋掲載シ文法明了作法瞭然タルモノニシテ漢文ヲ學ブ者ノ一大好材料ト謂フ可キ珍書ナリ

近藤元粹君序　松本謙堂君著

●漢文指南

正價金貳拾五錢
郵稅金四錢

本書ハ專ラ我日本ノ文壇ニ雄視スル古今諸名家ノ傑作ニ係ル文詩中尤モ粹ナルモノヲ拔集シ一文詩每ニ邦文ヲ以テ之ヲ譯シ而メ簡明ニ其意ト法トヲ釋キ毫モ餘蘊ナキモノニシテ初學漢ノ文詩ヲ學フノ楷梯ニ適切ナルハ論ヲ俟タズ且ツ每編文學博士重野成齋中村敬宇兩先生其他諸名家ノ卓見ニ係ル評語ヲ附シ文思才識ヲ開發スルノ裨益ヲ與ヘタルモノナリ苟モ作文ニ從事スル諸士ガ机上ノ淸玩トナサバ明治至隆至治ノ文彩ヲ煥發スルヤ益シ疑ヲ容レス南州北史近藤先生ノ序中ニ

每編別以國文譯之、且細註解釋其法格字義典故、此所謂別出一機軸者非耶、是書一出、我知世人必以爲破天荒之選也、幼童由是學焉、以作自家之文詩、其所益蓋不尠少也、

トアルヲ以テ亦タ其初學ニ裨益アルヲ證スルニ足レリ

一六居士嚴谷修君　鴻齋石川英君序　河野春颿君閱　福井淳君著

●新撰漢文軌範

和裝美本全貳冊
郵稅共實價金三十五錢

本書ハ卷首ニ文体式解句作文諸法ヲ述ヘ而シテ漢文ノ摸範トナルベキモノヲ甄別編纂シ頼山陽先生ヲ始メ文學博士重野成齋先生及ビ諸名家ノ批評ヲ掲ケ鼇頭ニハ難解ノ熟字ヲ解釋掲載シ文法明了作法瞭然タルモノニシテ漢文ヲ學ブ者ノ一大好材料ト謂フ可キ珍書ナリ

大阪府尋常中學校教諭吉見經綸君編纂

●漢文入門

洋裝美本全壹冊實價金拾貳錢拾部以上壹纏御注文之節特別壹割引郵送稅を要せず

本書は尋常師範學校及び中學校商業學校漢文科教科用書として編纂せられたるものなり編纂の要領は讀者をして漢文學の要領を知り漢文の練習を得せしむるを的目として編纂せられたり故に主として文章易平にして主意教育上の價値ある者を撰擇せられ編纂の順序の如きも專ら教育上の原則に準據せられたり教育家諸君冀くは續々教科書に採用せられんことを