

東南大學教育叢書

教育統計學

朱君毅著

商務印書館發行

東南大學教育叢書

教 育 統 計 學

朱 君 毅 著



商務印書館發行

自序

統計學爲今日研究科學教育之必需工具，夫人知之矣。顧統計專書，多見於西文，而漢文本絕少。近日各種教育之實施：如智力之測驗，學力之考察，課程之編製，校舍之調查，教育專家，雖已熱心提倡，而教育人士，間或缺乏統計知識，未能協力合作，繼續推行，誠爲憾事。按此項統計書籍，國內研究教育者，略有編譯，大抵多未詳贍。不佞忝膺東南大學講席，授教育統計學者垂三年。搜羅統計原則與方法之適用於研究教育問題者，編爲講義。又承陸君志章，校正此書，備極周密。余意所未至者，陸君皆爲之發揮焉。用付手民，貢諸明達。

民國十四年五月朱君毅序於國立東南大學

國難後第三版附言

本書初版時，誤印甚多。自再版以至六版，每次均有修改。刻國難後第三版又將付印，爰再加增訂，以求完善。修正時，趙君桓生，襄助甚力，著者不勝感謝。

民國二十四年三月君毅誌於南京

凡 例

1. 本書注重統計學上之原則與公式之應用，而不詳述其數理上之導來。
2. 本書材料，多採自莊士(D. C. Jones)，雷格(H. O. Rugg)，桑戴克(E. L. Thorndike)，猶爾(Y. U. Yule)諸研究統計學者之著作。
3. 本書引例，多由編者從本國教育事實上採取。
4. 本書所用名詞，悉由編者所著之「統計與測驗名詞漢譯」一書撮出，惟修正時參用中國統計學社審定「統計譯名」所規定之譯名。
5. 本書所用符號，係用凱萊(T. L. Kelley)「統計方法」(Statistical Method)書中之制。
6. 本書可用為大學「教育統計」學程之教本；師範學生，小學教師，研究教育測驗者，以及各種教育機關辦事人員，均可用為參考書。

520-28
B2

教育統計學

目 錄

第一章 緒 論

1. 統計學之歷史1
2. 統計學之定義與應用2
3. 統計學之大別3
4. 教育測量之困難4
5. 教育測量之要素5

第二章 表列法

6. 表列法與圖示法之不同7
7. 表列之種類7
8. 表列之功用10
9. 作表之規則10

第三章 圖示法

10. 圖示法之功用12
11. 圖示法之種類12

1560

12. 作圖之規則.....20

第四章 次數分配

13. 次數分配之性質.....23
 14. 事實之歸類法.....24
 15. 次數分配圖.....26
 16. 次數分配圖之種類.....27

第五章 集中趨勢

17. 何謂集中趨勢.....36
 18. 平均數之要素.....37
 19. 算術平均數.....38
 20. 中數.....46
 21. 衆數.....52
 22. 倒數平均數.....54
 23. 幾何平均數.....56

第六章 離中趨勢

24. 何謂離中趨勢.....59
 25. 離中趨勢之種類.....59
 26. 全距.....60

27. 四分位差.....60

28. 標準差.....62

29. 平均差.....68

30. 相對差數.....74

31. 偏態性之測量.....76

第七章 常態曲線

32. 次數多邊圖之修勻法.....80

33. 常態曲線圖之繪法.....81

34. 常態曲線圖與次數多邊圖之比較法.....84

35. 常態曲線圖下之面積推算法.....89

36. 常態曲線圖之應用.....90

第八章 可靠性

37. 何謂可靠性.....97

38. 可靠性之用標準差表示者.....97

39. 可靠性之用機誤表示者.....102

40. 何謂機遇.....103

第九章 相關

41. 何謂相關.....106

42. 用分布圖表示相關法	107
43. 相關之種類	109
44. 相關係數之意義	110
45. 相關係數之求法	112
46. 迴歸方程及迴歸線	129
47. 迴歸方程之應用	134
48. 相關減弱之改正法	135
49. 自身相關	137
50. 淨相關	138

附 錄

I. 附表一	144
II. 附表二	145
III. 附表三	146
IV. 附表四	147
V. 附表五	148
VI. 附表六	149
VII. 乘數表	150
VIII. 平方與平方根表	170
IX. 對數表	180
X. 符號表	182
XI. 公式表	186

XII. 統計名詞英漢對照表	192
XIII. 參考書表	196
XIV. 答案	199

表 次

第一表	東南大學十一年度暑校學員年齡比較表	7
第二表	中國全國初等學校學生統計表（民國十一年）	8
第三表	東南大學十三年度投考生統計表	8
第四表	東南大學十三年度錄取新生之史地公民分數表	24
第五表	東南大學十三年度錄取新生之史地公民分數劃記表	26
第六表	東南大學十三年度投考生之數學分數分配表	30
第七表	德國勃萊司勞 1876-85 年雲量測量表	32
第八表	算術平均數之算法：方法一	39
第九表	算術平均數之算法：方法二	40
第十表	算術平均數之算法：方法三	41
第十一表	算術平均數之算法：簡捷法 (a)	43
第十二表	算術平均數之算法：簡捷法 (b)	44
第十三表	求中數法：方法一	47
第十四表	求中數法：方法二	48
第十五表	求中數法：方法三	49
第十六表	倒數平均數之算法	55
第十七表	四分位差之求法	61
第十八表	標準差之求法	64
第十九表	標準差之簡捷求法	66

第二十表	平均差之求法：方法一	69
第二十一表	平均差之求法：方法二	70
第二十二表	平均差之簡捷求法	72
第二十三表	某校某級二十四個學生歷史與地理分數分配表	107
第二十四表	積差相關之通常求法	113
第二十五表	積差相關之簡捷求法	115
第二十六表	某校某級學生各科總平均分數與英文平均分數之分配表	117
第二十七表	司畢門等級相關之求法	125
第二十八表	先改分數為等級再用司畢門等級相關法	126
第二十九表	司畢門求等級相關之簡捷法	127
第三十表	薛伯異號相關之求法	129

圖 次

第一圖	<u>東南大學</u> 十年度暑期學校學員資格分配圖	13
第二圖	<u>江蘇省立第一女子師範學校</u> 各部學生數之比較圖	13
第三圖	<u>東南大學</u> 大學部學生分配圖	14
第四圖	<u>中華教育改進社</u> 第一屆年會與第二屆年會人員職務比較圖	15
第五圖	<u>中國</u> 現行學制系統圖	16
第六圖	<u>中華教育改進社</u> 民國十二年年會各省區到會人數圖	17
第七圖	次數多邊圖	19
第八圖	直方圖	20
第九圖	常態分配圖	23
第十圖	量表	24
第十一圖	偏態次數分配圖	29
第十二圖	極不對稱次數分配圖	31
第十三圖	U形次數分配圖	33
第十四圖	多峯形圖	34
第十五圖	比較次數分配圖	37
第十六圖	在偏態圖上算術平均數，中數，衆數之關係	53
第十七圖	常態分配圖上之標準差	63
第十八圖	原來次數多邊圖與第一次修勻圖及第二次修勻圖之比	

較.....	81
第十九圖 常態曲線圖之繪法.....	83
第二十圖 常態曲線圖與次數多邊圖之比較.....	85
第二十一圖 常態曲線圖下之人數推算法.....	91
第二十二圖 問題難度之量表.....	94
第二十三圖 實得算術平均數與真正算術平均數之差數分配圖.....	99
第二十四圖 用分布圖表示相關法	108
第二十五圖 表示三種不同之相關	110
第二十六圖 例一 用分布圖求相關之方法	118
第二十七圖 用分布圖求相關之劃記法	122
第二十八圖 例二 用分布圖求相關之方法	123
第二十九圖 迴歸線作法	132

教育統計學

第一章 緒論

1. 統計學之歷史

統計學何由而濫觴乎？在昔東西各文明之邦：如猶太國，羅馬帝國，莫不應用統計之學，調查一國物產之肥瘠，人口之衆寡；藉以富國利民，徵兵課稅。迨至十七世紀中葉，英吉利之工商業漸興，經濟問題，逐漸發生，而統計學之用途遂廣；如當時天文學家 Sir William Petty and Halley 之造死亡人數表，是其彰明較著者。

然對於統計學確有學理之貢獻者，厥推比利時之數學家奎德萊 (Quetelet, 1796-1874)，其所發明學理之主要者，爲「巨數之恆性」：例如有十萬人於斯，年齡與環境相同，任分爲十組，然後記錄每人死亡時之年齡。氏謂此十萬人中各人死亡之年齡，雖不可預測，然每組萬人死亡年齡之平均數，與其他各組相較，差異甚微。此即巨數之恆性。今日保險公司，即本此原則，而計算保險價目焉。承奎德萊之後，繼續闡明其學理者，有奧之漢安 (Hain)，德之納伯 (Knapp)，與萊克拾司 (Lexis)，英之高爾登 (Galton)，及代之皮而生 (Pearson) 與愛基烏司 (Edgeworth) 諸統計學名

0961



高爾登 (Sir Francis Galton, 1822-1911) 實爲統計學之鼻祖，科學淵博，尤精於遺傳學，對於人種智力及體力之遺傳，多所發明，莫不以統計學爲其研究之利器。繼氏而興者，爲皮而生 (Karl Pearson)。氏對於統計學本身之貢獻最多；吾人今日得應用統計學之多種公式，藉以研究宇宙間無窮之現象，并得窺其真理者，皆氏之所賜也。

現在英之統計學家，如 Elderton, Spearman, Sheppard, Yule, 諸人，均各有貢獻，未能詳述，只提其名而已。

美國之研究統計學，而應用其方法於教育問題之上者，當首推桑戴克 (E. L. Thorndike)。自氏於二十年前 (1904) 著「智力與社會的測量」一書 (Mental and Social Measurements) 後，美國始漸有研究教育統計之人，如 Kelley, Rugg, Otis, 等人，皆各有著述，爲美國今日研究教育統計學之有心得者。

2. 統計學之定義與應用

統計學之定義甚多，而各有注重之點。鮑萊 (Bowley) 以統計學爲「平均數之科學」。蓋單獨事實，統計學不能涉及。統計學所研究者，乃團體之材料，羣衆之趨勢；例如言一城人之貧富，統計學之所注意者，不重在一二至貧極富之人，而必統籌全局，藉知大部分人之貧富如何。易言之，即知平均數也。鮑萊又以統計學爲「計算之科學」；如計算一鄉，一市，一省，一國之人口然。然統計學

之計算，注意在大概與趨勢，而數學之計算，注意在實數與準確，此統計學與數學之不同也。

猶爾(Yule)謂凡可量之事實而受無窮原因之影響者，皆為統計學所研究。蓋統計所涉及者，如社會之狀況；人種之遺傳；天象之變遷；任舉一種，莫不千百原因，同時影響之；統計學家，歸類分析，手續甚繁。

桑戴克(Thorndike)以統計學為「測量天下萬事萬物之狀況，及其差異，變化，以及其相關之方法」。設有人於斯，而犯煙賭盜之事。則凡此三者之現狀如何，及其因時因事之差異與變化如何，與夫三者有無彼此因果之關係，皆為統計學所應研究者。

統計學之應用。昔只限於人口與財產之調查，今則各種科學，凡有可量之事實，以供研究者，莫不需統計之方法，如天文學，地質學，生物學，氣象學，物理學，化學，人口學，社會學，人類學，經濟學，心理學以及最近教育學皆是也。

教育統計學，即以統計學方法，應用於教育問題之上，其與他種統計學出入之處，即材料之不同，及方法注重點之互異。

3. 統計學之大別

統計學之定義與應用，已如上述矣。然統計學可因性質之不同，而別為二種，茲分別言之。

(1) 品質統計 宇宙間之事物常可以某種品質之「有」與「無」

或「在」與「不在」而分類，例如普通人有「是」與「非」之分，「智」與「愚」之分，「善」與「惡」之分，「明」與「瞽」之分，「聰」與「聵」之分。大概以一種品質為標準，凡具此品質者，歸為一類；否者又為一類，兩者截為二物，隔不相關；如「是」則非「非」，「善」則非「惡」，不能合「是」「非」（或「善」「惡」）為一物，而度量其中多少或深淺之不同；凡統計學之研究此種事實者，謂之品質統計。

(2)變量統計 反之，世間事物，不能儘以「有」與「無」或「在」與「不在」之法而分類。如言人之智愚，智者不必盡智，愚者不必皆愚。智愚本非絕然二物，不過同一品質，而有等級之不同。故由愚而智，乃由淺入深之意，故曰「愚者千慮，必有一得，智者千慮，必有一失」。學校之測驗兒童，決不能分兒童為「智」與「愚」之二類。今所用者，為智力商數，分兒童智力為若干等級，中無間斷，如寒暑表然。凡統計學之研究此種事實者，謂之變量統計。本書所討論之各種方法，亦以此為限。

4. 教育測量之困難

教育統計，多取材於各種教育測量。惟測量物質上之事實較易，測量精神上之事實較難。各種教育上之測量，如學業之進退，品行之優劣，大都精神上之測量也。茲將此種測量困難之點，略舉如下。

(1)事實常變 有寸鐵於斯，在平常溫度之下，其長短不變，

今日量之爲一寸，明日量之亦爲一寸。雖量者不免有個人觀察之不同，而寸鐵本身，固無差別。惟人事則不然，千變萬化，瞬息千里。如測量記憶力然，同一兒童，此時與彼時不同，今日與明日又異，不特測量者有個人觀察之相差也。此教育測量之困難一。

(2)事實繁複 今有一物體，其化合之原質雖多，然一經精密之化學分析，其數量悉可寫出，絲毫不爽。然苟有一兒童不肯努力，欲將其原因悉數舉出，已是難事，若欲將其各種原因分別輕重舉之，則更非易事，此教育測量之困難二。

(3)單位缺乏 權，然後知輕重。度，然後知長短。凡具體之物，多有單位相等之量表以量之。如甲物重百斤，乙物重三百斤，則乙物之重，三倍於甲物無疑。獨教育上測量之物，多乏完美量表，如綴字然，甲綴對十個，乙綴對三十個，則乙之能力，不必適三倍於甲者，以字之難度不必儘同。近來教育家雖編製教育上各種量表，然欲求其達到如時，空，重，各種量表之完美，實非易事。此教育測量之困難三。

5. 教育測量之要素

(1)客觀 科學上所謂客觀，即有一種測量，而凡精於測量者，盡皆同意之謂。有文一篇，甲師給七十分，乙師給八十分，丙師給九十分，此種分數是主觀而非客觀。有言某物極白者，則此極白，是白馬之白歟？抑白雪之白歟？或白玉之白也。吾知各有標準，

意見紛歧。此種意見，謂之主觀，而非客觀。三四馬，四點鐘，五尺布，盡人知之，而無疑義，此所謂客觀之量。

(2) 單位 單位之最整齊者，莫過於時，空，重，之量表。然欲編製教育測量之量表，則整齊甚難，最相率者，莫過於最優等，優等，中等，下等等量表之稱。稍進一層，則列舉具體之樣本，庶他物可與比較，而藉資評定。若將此類樣本，再分段階，則為用更大。此類段階，即互不相等，而吾人得略知或確知其不相等之數為若干，則更佳矣。

(3) 參照點 教育測量與他種測量同，必有一起點。此起點或參照點即代表「恰一點沒有」之意。如曰六寸三倍於二寸，人皆知六寸與二寸，在量表上各為與「恰一點沒有」寸處相差之距離。否則，彼此不能為三與一之比。物質測量所用之參照點，如量氣候，攝氏以零度為參照點（冰點），華氏以 32 度為參照點。量陸地之高，則以海洋面為參照點。惟教育測量上之參照點，最不易得。勇敢，道德，忍耐，溫雅，均為抽象之物，欲求一參照點甚難。蓋何為「恰一點沒有」勇敢，殊不易知。故在教育測量上有人以平均數為參照點者。如平均數為50，則所測量之事實，可稱50以上多少，或50以下多少。然以平均數為參照點，究不若用「恰一點沒有」處為妥，惟得之較難耳。

第二章 表列法

6. 表列法與圖示法之不同

圖示法之目的，在將統計上之事實用圖綫表示之，使此事實不啻畫圖，而讀者一目瞭然，不難記憶。表列法為圖示法之初步，其目的在將統計之事實，列入表內，而為作圖之根據。故表列法實為統計事實之縮影也。

7. 表列之種類

表列可分為一重的，二重的，三重的等，而以事實之為一種的，二種的，三種的等為標準。

(1) 一重的表列 此表列只有一種事實，如第一表內人數之分配，是以年齡為依歸。

第一表 東南大學十一年度暑校學員年齡比較表

年 齡	人 數
15—20	180
21—25	354
26—30	138
31—35	38
36—40	22
41—45	12
46—50	3
	<hr/> 747

(2) 二重的表列 此表列有二種事實，如第二表內有校別與性別二事實是也。

第二表 中國全國初等學校學生統計表

(民國十一年)

學 校	學 生	
	男	女
國民學校	3,319,320	143,207
高等小學	310,798	17,332
乙種農業	11,347	153
乙種工業	1,899	1,339
乙種商業	4,827
其 他	30,405	2,688
總 數	3,678,596	164,714

(3) 三重的表列 此表列有三種事實，如第三表內有省分，校別與性別三種事實是也。餘可類推。

第三表 東南大學十三年度投考生統計表

省 別	類 別	人 數	校 別				性 別	
			畢 業 之 學 校			專 門 學 肄 業 大 業	男	女
			中 學	師 範	實 業			
江 蘇	539	358	90	27	64	519	20	
浙 江	203	141	28	8	26	194	9	
安 徽	176	119	20	14	23	169	7	

江 西	138	83	19	1	35	137	1
四 川	131	99	13	4	15	127	4
湖 南	113	79	16	4	14	105	8
湖 北	48	32	8	3	5	40	8
廣 東	47	40	5		2	45	2
河 南	33	21	3	1	8	32	1
山 東	28	17	2	2	7	26	2
福 建	21	12	5		4	21	
廣 西	20	12	3		5	20	
雲 南	20	13	1	5	1	20	
陝 西	11	7			4	11	
山 西	9	9				9	
貴 州	4	3			1	4	
甘 肅	4	3			1	4	
直 隸	2				2	2	
京 兆	1	1				1	
奉 天	1				1	1	
吉 林	1	1				1	
總 數	1,550	1,050	213	69	218	1,488	62

8. 表列之功用

(1)提綱挈領 材料之未經歸類而表列者，毫無倫次，讀之不特難得要領，反增疑竇。排列之次序，宜以數量之大小為標準，或以時間之早遲為標準，或以地位之觀念為標準。凡教育上之統計，多以數目之大小為次序。如第一第二第三各表，材料既依次排列，則提綱挈領，讀之不啻事半功倍。

(2)輔助記憶 且事實既經排列，以其得論理的次序，故記憶自易，較之七零八落，茫無頭緒者，其利弊不可同日而語。

(3)便利比較 材料未經表列，則全體之彼此關係，難以察覺，且勞多功少。若分類而表列之，全體關係，一目瞭然，比較對照，亦非難事。

(4)易於總核 若欲知總數，則表列更不可少，因事實列在一縱行或一橫行上，計算甚便，不若散於各紙上，非費極多之時間與精力，不足以見功效者。

(5)免除重複 事實之報告，若不用表列式，往往有同一事實，而反覆提及至無數次。若用表列，則一種事實，只用一種標目，概括一切，如第三表「專門大學肄業」六字，即可包括一切同樣事實。凡是專門大學肄業者，同入此項，不必每次提及矣。

9. 作表之規則

作表之法，似甚簡單，然作者往往任意爲之，致多乖謬。茲特將作表之規則數條列下*

- (1)表數及表題，必寫於表之上面（然用圖則寫在下面）。
- (2)表題必須詳盡，不待書中之說明，而本身能十分清晰。
- (3)說明項（如第三表之「省別」項「類別」項等，宜寫在表之左邊與上面。
- (4)說明項宜可持書順讀，不宜橫讀。
- (5)小項目宜放在大項目底下，且宜向內稍退。
- (6)讀表時宜自上而下，自左而右。
- (7)項目與事實間，有時宜用線或點連接之。
- (8)重要之線宜畫兩條，或特別粗大。
- (9)若表過長，則每五行，宜隔一空行。
- (10)表中之字，不宜過小，致使閱者眼倦。
- (11)如事實忽斷，宜作虛線，以表出之。
- (12)總數宜劃一線，或留一空地，以表出之。
- (13)凡小數點必排在一線上，不宜參差。
- (14)事實之排列，宜照數目之大小。
- (15)重要事實，宜用粗大之線表出之。
- (16)表與說文，宜相接近，不宜離遠。

*McCall, W.A.: How to Measure in Education, pp. 325—330

第三章 圖示法

10. 圖示法之功用

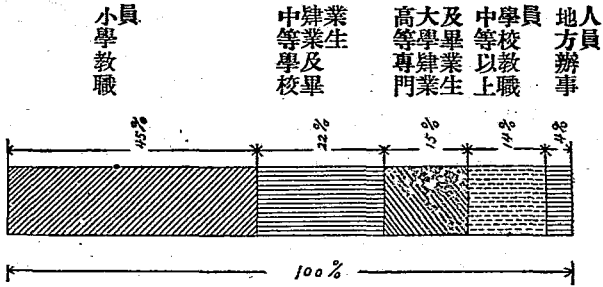
圖示法之功用，在將事實之全部情形及其前後關係，實現於圖形之上，使普通閱者，亦能一目瞭然，而得其真義。凡事實之繁者，平均數固能以幾個數目字表出之。然平均法只能表示事實之大概趨勢，而圖示法并能於此外再表出其逐部之聯絡。此圖示法之勝於平均法處。

近來商業發達，圖示法之用，日漸推廣。下自小販商店之告白，上至銀行公司之報告，圖示法莫不利用無遺。即數年來教育報告，亦將複雜之事實，非數百字不可以解釋者，藉圖示法以表出之。不特學者可以閱讀省時，即普通人亦能領略其真意，而發生對於教育之同情。此為圖示法在教育上之功用。

11. 圖示法之種類

圖示之式，千態萬狀，電氣車內，展覽場中，形形色色，雅俗俱備。然提綱挈要，不外數種，茲由簡而繁，臚列於下。

(1) 橫條圖

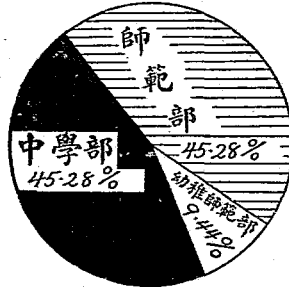


第一圖 東南大學十年度暑期學校專員資格分配圖

此圖各格內，亦可填各種彩色，藉資顯明。

(2) 扇形圖

a. 作法 圓周共360度， 360° 之45.28%即 $\frac{360^\circ}{100} \times 45.28 = 163^\circ$ ，餘類推。再用平圓規切量之。



第二圖 江蘇省立第一女子師範學校各部學生數之比較圖 (民國十三年)

b. 長處

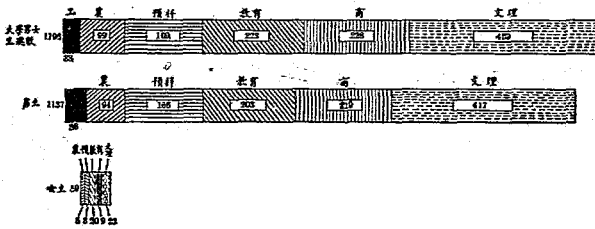
(a) 此種扇形圖，各種雜誌及展覽多採用之，故知者多。

(b) 此圖可利用彩色，使較顯明。

c. 短處

(a) 標字方向不同，不便閱讀。

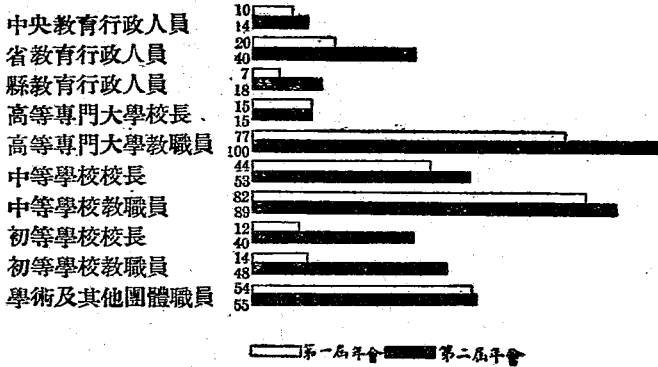
(b) 數目字不能如橫條圖之放在一行，以便比較。

(3) 分類的橫條圖

第三圖 東南大學大學部學生分配圖 (民國十三年四月)

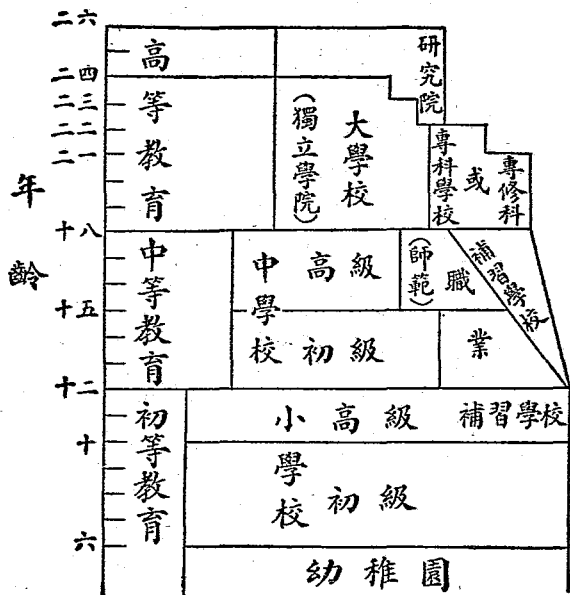
分類的橫條圖，即橫條圖再分為細部，其用處自較橫條圖更為精密。

(4) 簡單比較的橫條圖



第四圖 中華教育改進社第一屆年會與第二屆年會人員職務比較圖

(5) 系 統 圖



第五圖 中國現行學制系統圖

(7) 次 數 分 配 圖

次數分配圖，可分為二種；一為次數多邊圖，一為直方圖。茲將二者之作法，各詳於下：

a. 次數多邊圖之作法 吾人可利用第五表之材料，藉以表明此圖之作法，其法次如下：（參看第七圖）

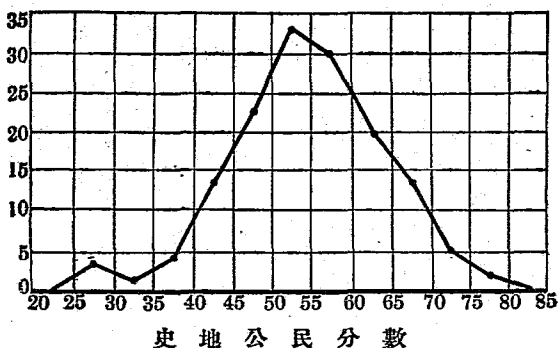
(a) 用精細之方格紙，而酌用其全面。（此種方格紙可由坊間購得）。

(b) 作一縱坐標分為若干相等之單位，代表次數，由下讀上，並沿線作 0, 5, 10, 15 等數字至 35 為止（因第五表最多次數為 33 也）。

(c) 作一橫坐標與縱坐標在零點相交，此線亦分為若干相等之單位，自左向右，代表史地公民分數之自少而多。沿線作 20, 25, 30, 35 等組距數字至 85 為止。橫坐標分為單位，註明數目後，即成一量表，其量品質之優劣，猶寒暑表之量溫度。

(d) 在橫坐標上 25—30 組距之中點 (27.5) 讀上至第三格（代表次數 3），即 25 分與 30 分之間有三人，作一個 (•) 為記，在 30—35 組距之中點上第一格（代表次數 1），作一個 (•) 為記，餘類推。

(e) 將各點用直線連接之，惟末端兩組（即 25—30 及 75—80）之兩點，應各與其次組橫坐標上之中點相連接。如是即得次數多邊圖。

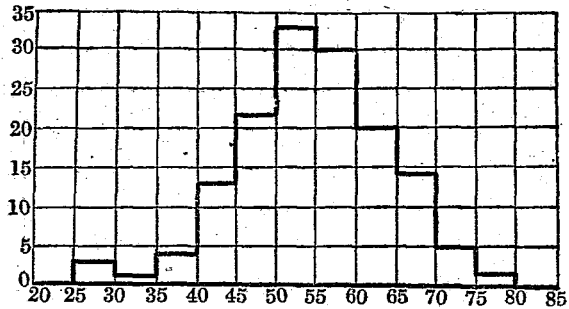


第七圖 次數多邊圖

(根據第五表東南大學十三年度錄取新生之史地公民分數)

b. 直方圖之作法 直方圖之作法(a)(b)(c)(d)各步均與次數多邊圖相同，然在(e)步不連接各點，而將每交點延長為一橫線，其長一組距為限，然後將各橫線用縱線連接之即得直方圖(參看第八圖)。





第八圖 直方圖

(根據第五表東南大學十三年度錄取新生之史地公民分數)

12. 作圖之規則*

圖示法之規則綦繁，依事實而變更，學者只好隨機應變。美國圖示標準委員會曾於 1919 年規定圖示法之規則十七條，茲譯述於下，並附圖說明，以作指南（參看本章末各附圖）。

- (1) 圖之大略排法，宜自左至右（參看附圖 1）。
- (2) 能用線代表量數最好，蓋面積與體積，均易誤解（參看附圖 2）。
- (3) 在曲線圖上，最好能將縱坐標之零度畫出（參看附圖 3）。
- (4) 倘縱坐標之零度，依照事實不致用到，則圖上宜用一種波線，而仍保存零度橫坐標（參看附圖 4）。

*參看 22 頁後面各頁之附圖。

- (5) 零度橫坐標應較粗大，以別於他線（參看附圖 5,6,7）。
- (6) 若曲線圖以百分為標準者，則凡百分線宜較闊大，以示區別。其他用以比較之線，亦宜較闊（參看附圖 8, 9, 10）。
- (7) 若圖表示年月者，則兩旁界線不宜闊大，以示時間之起終，不能加以限制（參看附圖11）。
- (8) 若曲線畫在對數線格上，則縱橫兩界線應各畫在對數級上十數之某次方處（參看附圖12）。
- (9) 縱橫線除必要外，不宜太多（參看附圖 13,14）。
- (10) 圖上曲線宜與他線不同，以示區別（參看附圖15）。
- (11) 倘曲線代表各種事實之觀察，則在可能時，應於曲線上表明此類觀察之點（參看附圖16,17,18）。
- (12) 圖上量表之讀法，宜自左而右，自下而上（參看附圖19）。
- (13) 量表上之數字，宜列在縱坐標之左，橫坐標之下，或縱橫軸上（參看附圖20,21,22）。
- (14) 圖上有時應載所代表之數目或方程式（參看附圖 23, 24, 25）。
- (15) 若數目不能表出，可另列一表表出之（參看附圖26）。
- (16) 凡文字與數字之排列，宜使以橫坐標為底而閱讀順利，或以右邊縱界線為底而閱讀順利。（參看附圖27）。
- (17) 圖之題目，放在圖下，宜詳備明晰，如遇必要時，不妨多加說明（參看附圖28）。

問 題

試將以下材料，用一種圖示法表示之。

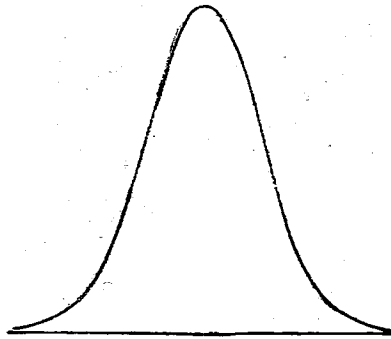
東南大學十三年度錄取新生之籍貫統計表

省 分	人 數
江 蘇.....	120
浙 江.....	88
四 川.....	29
安 徽.....	26
湖 南.....	26
江 西.....	21
廣 東.....	8
山 東.....	7
河 南.....	7
湖 北.....	5
廣 西.....	5
雲 南.....	5
福 建.....	1
陝 西.....	1
甘 肅.....	1
總 數.....	300

第四章 次數分配

13. 次數分配之性質

次數分配者，即將事實之觀察分配於等距量表之上之謂。世間事物之任何品質，其本身變異雖大，而莫不受一種規式之限制。吾人散步園中，試觀某種樹葉，初若大小相若者，再任拾數千，量其長度，則差異立見。再將其長度相等者，歸為一類，順序而列，則將見長度適中者居多數，長度愈大者，其數愈少，長度愈小者亦然。若以橫坐標代表長度，自左向右長度漸加，再以縱坐標代表每種長度所得之次數，自下向上次數漸加，則此數千萬樹葉之長度分配，必為一種「鐘形」圖，或常態分配圖。（見第九圖）此圖之分配，左右對稱，故亦名對稱分配圖。



第九圖 常態分配圖

就理論言，世間有若干現象之分配，若不受外界之影響，而吾人得其無窮之觀察者，則其分配必適合於第九圖。惟就實際言之，理想之鐘形的分配圖極少，偏態的次數分配圖甚多。

14. 事實之歸類法

凡欲畫分配圖，必先將事實之觀察，歸為若干類；歸類之法，有如下述。

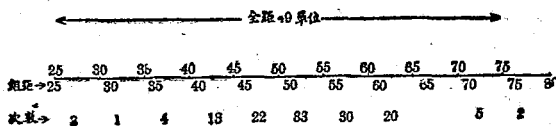
第四表 東南大學十三年度錄取新生之史地公民分數表

26, 29, 29, 30, 35, 37, 39, 39, 40, 40, 41, 41, 41, 41, 41, 42, 42, 42, 42, 44, 44, 44, 45, 45, 45, 45, 45, 45, 45, 45, 45, 45, 46, 46, 46, 46, 46, 46, 46, 47, 48, 48, 49, 49, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 50, 51, 51, 51, 51, 51, 51, 51, 51, 51, 52, 52, 52, 52, 52, 52, 52, 53, 53, 53, 53, 53, 53, 54, 54, 54, 54, 54, 55, 55, 55, 55, 55, 55, 55, 57, 57, 57, 57, 57, 57, 57, 57, 58, 58, 58, 58, 58, 58, 58, 59, 59, 59, 59, 59, 59, 60, 60, 61, 61, 61, 61, 61, 61, 61, 62, 62, 62, 62, 62, 62, 63, 63, 63, 63, 64, 64, 65, 65, 65, 65, 66, 66, 66, 68, 68, 68, 69, 69, 69, 69, 69, 70, 71, 71, 72, 74, 75, 75.

第四表中之數字，已順序排好，茲為歸類之。（參看第十圖）

(1) 全距。試從分數中之最大者減去最小者，即 $75 - 26 = 49$ 。

是即分配自最少數至最大數之全距。



第十圖 量表(根據第四表材料)

(2)組距 若全距中之分數等級太多，則計算費時，如本節所論者，其全距為49，即分數共為49等級。欲節省工夫，則組距之法尚矣。作組距之用意，即將繁多等級，束而簡之。如每三數為一組；或每五數為一組；或每十數為一組。假設每五數為一組，則第四表分配之分距離，當如第五表。照第五表，如25-30為一組，則25為此組之最低限，而30為此組之最高限。凡分數之從25起，至將達到30而仍不包括30者，均屬此組。（初學者宜注意，凡數已達30，即屬於30-35之一組）。然在此處，必有一極要之假設，即凡國文分數之歸於任何一組，如25-30者，則25, 26, 27, 28, 29等分數，其價值假定與此組距中點數27.5均相等。此假設初學者宜注意之。

斷定組距之大小，有二原則，可以遵守：a. 大部分之量數，宜與組距之中點數大小相近。在斷定時，必檢視各分數之情形；如每分數，均與每組距中點相近而與組距兩端之分數相遠者，則此組距必合宜。如有五個分數為2, 2, 3, 3, 3者，則以0-5之組距為是，而以2-7之組距為非。b. 組距不宜太多，亦不宜太少。為便利計算，大概組距之數在15與25之間，為最合宜；而比10少者，則恐多生錯誤。故欲知組距之大小應為3或5或10或15。可先以15至25之數除全距之限度，而得其大概。根據以上二條原則，則第四表之分數，可以分配如第五表。

第五表 東南大學十三年度錄取新生之史地公民分數劃記表

組 距	組距中點	劃 記	次 數
25—30	27.5		3
30—35	32.5		1
35—40	37.5		4
40—45	42.5		13
45—50	47.5		22
50—55	52.5		33
55—60	57.5		30
60—65	62.5		20
65—70	67.5		14
70—75	72.5		5
75—80	77.5		2
總數=147			

此表宜注意者，即組距之限度。如每組為5單位者，可有以下之寫法：5-10；2.5-7.5；3.5-8.5；4.5-9.5；然以5-10等為適宜。

15. 次數分配圖

次數分配圖，可分為二種。一為次數多邊圖，一為直方圖，其畫法見第11節第(7)目。

(1)次數多邊圖與直方圖不同之點 次數多邊圖，以垂直線之高度代表量數。直方圖以直方面積代表量數。二者之假定，各不相同。詳言之，在次數多邊圖上，吾人乃假定每組之量數，均集中於該組之中點數上。假令該組共有五個量數，則每量數之價值各與組距之中點數相等。在直方圖上，吾人乃假定每組之量數，均勻散布於該組。假令該組共有五個量數，縱各量數之平均價值，不能與組距中點數相同，然既假定其分布均勻，則即假定此五數之平均數，必與組距之中點數相同。

總言之，若測量為精細者，則用次數多邊圖；若測量為草率者，則用直方圖。

(2)次數分配圖之解釋 次數分配圖，常人視之，似乏意義。然諳統計學者見之，則各種特性，可以表出。若以第七第八兩圖為例，吾人可注意以下諸端：(a)此圖分數之最小者在25-30之間，最大者在75-80之間；(b)全距共為4單位；(c)分配極近常態，可與第九圖相比較；(d)變量自始至終，一貫不斷，每一單位分數均佔若干人；(e)此圖只有一處高起，可名為單峯形。

16. 次數分配圖之種類

次數分配圖，除(1)常態分配圖或對稱次數分配圖（見第九圖）外，其餘形狀不一，變化無窮，然可略分以下四種：(2)略不對稱次數分配圖（或稱偏態次數分配圖）；(3)極不對稱次數分配圖

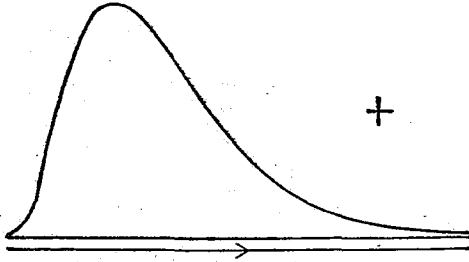
(或丁字形次數分配圖)；(4) U 字形次數分配圖 (或凹形次數分配圖)；(5)多峯形圖。

(1)對稱次數分配圖 此圖已見第九圖，然完全對稱分配，實際上不能多得。因世間事實莫不受複雜原因之影響。欲得完全對稱分配，必適合以下諸條件：(a)關於一事實，必求盡量之觀察(最少必得極多之觀察)；(b)有影響於此事實之原因，其勢力必互相均等，而每種勢力之或隱或現，其機會相等；(c)諸原因必互不相關，各自獨立。凡材料之屬於此種分配者，如智力，體高等均是。

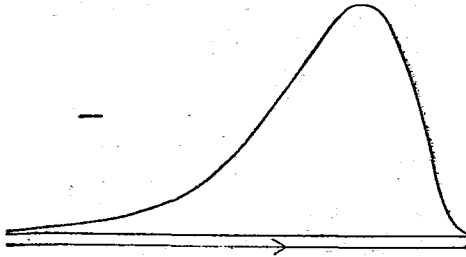
(2)略不對稱次數分配圖 (或偏態次數分配圖) 偏態次數分配圖，可分為二種： a.正的偏態次數分配圖；b.負的偏態次數分配圖；如第十一圖(a)與(b)。

正的偏態次數分配圖，偏在橫線上數字大的一邊，其偏尾向右；負的偏態次數分配圖反是。偏態之原因，則在(a)事實觀察之不足，及(b)有影響於此事實之原因之勢力不均，與夫(c)諸原因之互相關係。世間之事實，多屬此類，如財產之分配，死亡律之分配，甚至體重之分配，亦不免稍帶偏態。

正的偏態次數分配圖



(a) 橫線數字由小而大
負的偏態次數分配圖



(b) 橫線數字由小而大

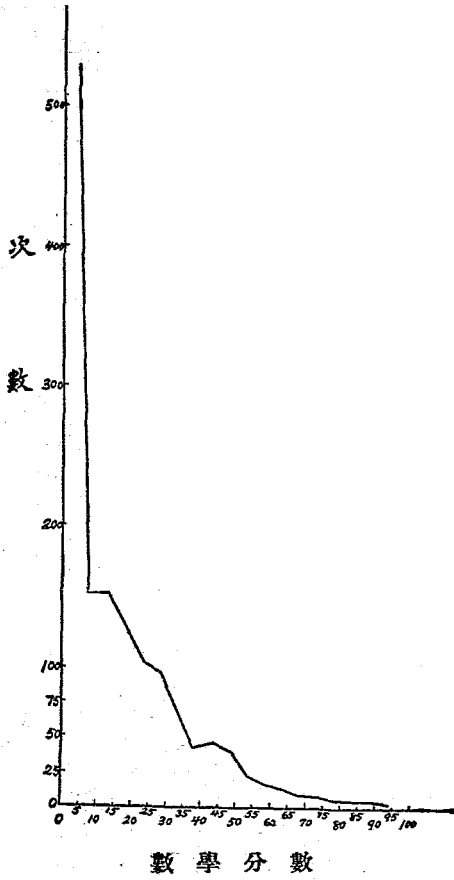
第十一圖 偏態次數分配圖

(3) 極不對稱次數分配圖 此種圖不若偏態次數分配圖之多得；有之，則事實必大異於常態。如試題太難，大多數被試者均不能答，或答而不確；與夫試題太易，大多數被試者均能確答，則其分數之分配，多類此種。茲將東南大學十三年度投考生數學成績之

分配，列於第六表，並示於第十二圖。

第六表 東南大學十三年度投考生之數學分數分配表

分 數	次 數
0—5	525
5—10	157
10—15	155
15—20	125
20—25	103
25—30	94
30—35	66
35—40	41
40—45	45
45—50	39
50—55	23
55—60	15
60—65	11
65—70	7
70—75	7
75—80	3
80—85	3
85—90	3
90—95	1
	1,423



數學分數
第十二圖 極不對稱次數分配圖

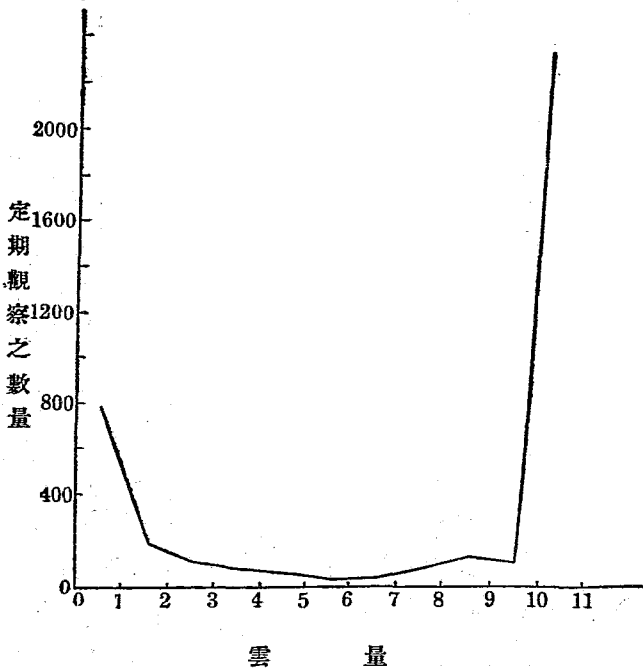
(根據第六表東南大學十三年度投考生之數學分數表)

(4) U形次數分配圖 此種分配圖，極不易得。茲將德國勃萊司勞 1876-85年雲量之觀察表*錄下，並在第十三圖表出之。

第七表 德國勃萊司勞 1876-85年雲量測量表

雲 量	次 數
0	751
1	179
2	107
3	69
4	46
5	9
6	21
7	71
8	194
9	117
10	2,089
總 數	3,653

*Yule, G. Udny: An Introduction to the Theory of Statistics, pp. 103-4.

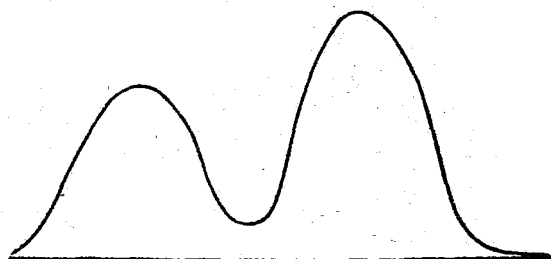


第十三圖 U 形次數分配圖

(根據德國勃萊司勞1876—85之氣象觀察)

(5) 多峯形之次數分配圖 凡次數分配，可為單峯形，亦可為雙峯形，或多峯形。即圖上之曲線，可有一處高起，亦可有二處或多處高起。大概事實為同樣者，其分配必為單峯形。若數種不相調和之事實，雜為一團，則雖合猶分，每種必表出其集中趨勢，而各

露高峯，此多峯形圖之所由起也。例如合初級小學三年級與初中三年級學生為一堂，而測驗其算術程度，則其分數之分配，必為雙峯形。若分子愈雜，則峯愈多（見第十四圖）。



第十四圖 多峯形圖
問 題

1. 將下列事實以次數多邊圖表示之

東南大學十三年度錄取新生英文分數分配表

組 距	次 數	組 距	次 數
25—30	3	65—70	31
30—35	10	70—75	25
35—40	7	75—80	26
40—45	17	80—85	10
45—50	37	85—90	9
50—55	27	90—95	4
55—60	30	95—100	1
60—65	30		267

2. 將下列事實以直方圖表示之

東南大學十三年度錄取生生物分數分配

組 距	次 數
10—15	2
15—20	2
20—25	5
25—30	8
30—35	10
35—40	15
40—45	22
45—50	30
50—55	34
55—60	22
60—65	20
65—70	12
70—75	7
75—80	3
80—85	5
	197

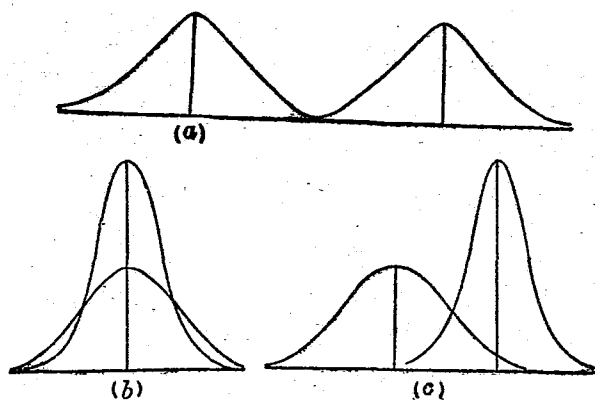
第五章 集中趨勢

17 何謂集中趨勢

統計學之目的，原在研究事實，而得其真象。惟第二，三，四章所討論各法，祇能觀察每種事實之大體趨勢，置重於質的方面，而非置重於量的方面。若欲將兩種或數種事實，作精密之比較，不能不有一種簡單正確之量數以代表每種事實之性質或數種事實彼此之關係。現統計學家所用之方法有三：(1) 集中趨勢法，(2) 離中趨勢法，(3) 相關法。本章所論，為集中趨勢法。

無論何種事實，集為一組，必有多少大小之差異，而其分配每集中於某處，是謂其集中趨勢。此種集中趨勢，在量表上可以最適中之量數表示之。

然兩組事實，其集中趨勢雖有時相同，而其全距則彼此互異。其全距大者，則其離中趨勢亦大，全距小者，則其離中趨勢亦小。故兩組事實，即同具常態之分配，而其比較，仍必呈以下現象之一：(1) 集中趨勢不同，而離中趨勢相同者，如第十五圖(a)；(2) 集中趨勢相同，而離中趨勢互異者，如第十五圖(b)；(3) 集中趨勢與離中趨勢均不同者，如第十五圖(c)。



第十五圖 比較次數分配圖

- (a) 集中趨勢不同，而離中趨勢相同。
- (b) 集中趨勢相同，而離中趨勢互異。
- (c) 集中趨勢與離中趨勢均不相同。

18. 平均數之要素

表示集中趨勢之量數，名曰平均數。

平均數不止一種，何種最為適宜，何時應用何種。似非一語可盡，故必先將平均數應有之要素，表出於下，藉資參考。

(1) 平均數應具切實數量，不宜由觀察者之主觀推測而定。

(2) 平均數應根據事實之全部觀察，否則必不足以代表全體，而難免片面事實之影響。

(3)平均數宜簡明易曉，而不具抽象的數學性質。

(4)平均數宜易於計算。若有數種平均數，均合乎事理，則計算最易者，為最好；然徒求計算之便利，而忽略他種要點者，亦是得不償失。

(5)平均數宜固定，而不受「抽樣之變動」之影響。若將同一組事實分為數部分，每部分取數種平均數；則各部分之同一種平均數，不能完全相等。但何種平均數之互相差別最少，即何種最為固定。

(6)平均數宜能用代數法計算。

平常所用之平均數，凡有五種，即(1)算術平均數，(2)中數，(3)乘數，(4)倒數平均數，(5)幾何平均數。(平常所謂平均數者即算術平均數)茲分別言之。

19. 算術平均數

算術平均數，為人人共曉之平均數，即先將各個分數相加，得一總數，然後以次數除之。茲將計算算術平均數之方法列下：

(1)方法一 量數未歸類者

設 M 為算術平均數。

N 為次數之總和。

X 為量數。

Σ 為和號。則

$$M = \frac{1}{N} \Sigma (X) \dots\dots\dots (1)$$

第八表 算術平均數之算法：方法一

(根據某校二十個學生之政治學考試分數)

學生號數	分 數	學生號數	分 數
1	45	11	40
2	80	12	50
3	45	13	75
4	65	14	50
5	50	15	40
6	88	16	45
7	73	17	75
8	65	18	74
9	84	19	74
10	63	20	60
			1,241

$$N=20, \quad \Sigma(X)=1241$$

$$\therefore M=1241 \div 20=62.05$$

(2) 方法二 量數已歸類但組距為一單位者

$$M = \frac{1}{N} \Sigma(f \cdot X) \dots \dots \dots (1a)$$

此公式之 f ，為每組距之「次數」，其算法詳第九表。

第九表 算術平均數之算法：方法二

(根據某校 63 個學生之「社會學」考試分數)

分 數	次 數	分數×次數
56	1	56
60	1	60
65	1	65
66	1	66
68	2	136
70	1	70
71	3	213
72	2	144
74	2	148
75	3	225
76	4	304
77	3	231
78	3	234
79	3	237
80	2	160
81	3	243
82	4	328
83	5	415
84	6	504
85	4	340
86	2	172
87	3	261
89	3	267
90	1	90
	63	4,969
$\Sigma(fX) = 4969$ $N = 63$ $\therefore M = \frac{4969}{63}$ $= 78.87$		

(3) 方法三 量數已歸類而組距爲二單位以上者。此方法有一假定，即每組內之諸量數，分配均勻，其平均數必與該組之中點數相同。公式與「方法二」相同。第十表即表示此法之應用。

第十表 算術平均數算法：方法三

組 距	組距中點	次 數	次數×組距中點
5—10	7.5	1	7.5
10—15	12.5	1	12.5
15—20	17.5	2	35.0
20—25	22.5	4	90.0
25—30	27.5	9	247.5
30—35	32.5	22	715.0
35—40	37.5	13	487.5
40—45	42.5	26	1105.0
45—50	47.5	28	1330.0
50—55	52.5	19	997.5
55—60	57.5	21	1207.5
60—65	62.5	14	875.0
65—70	67.5	11	742.5
70—75	72.5	5	362.5
75—80	77.5	3	232.5
80—85	82.5	2	165.0
		181	8,612.5

$$\Sigma(f \cdot X) = 8612.5$$

$$N = 181$$

$$\therefore M = \frac{8612.5}{181} = 47.58$$

但照此法，數目太大，計算費時，殊不經濟。為便利起見，宜用方法五。

(4) 方法四 簡捷法 (a)：量數之未歸類者

若量數衆多，則宜用簡捷法計算之。公式如下：

$$M = A + \frac{1}{N} \Sigma(f \cdot \xi) \dots \dots \dots (1b)$$

在此公式內：

M = 實得算術平均數。

A = 假定算術平均數。

N = 次數之總和。

Σ = 和號。

f = 次數。

ξ = 量數與假定平均數之差。

$\frac{1}{N} \Sigma(f \cdot \xi)$ = 校正數。

算式如下：

第十一表 算術平均數之算法：簡捷法(a)
(根據第八表材料)

分 數	假定平均數	分數與假定平均數之差	
		+	-
45	63		-18
80		17	
45			-18
65		2	
50			-13
88		25	
73		10	
65		2	
84		21	
63			
50			-13
40			-23
50			-13
75		12	
40			-23
45			-18
74		11	
74		11	
60			- 3
75		12	
N=20		123	-142
$-142+123 = -19$ $-19 \div 20 = -.95 = \text{校正數}$ $\therefore M = 63 + (-.95)$ $= 62.05$			

此法與前法之不同有二點：a. 先假定一平均數；b. 所計算者，非真正平均數，乃真正平均數與假定平均數之差，此差數即校正數。

(5) 方法五 簡捷法 (b)：量數之已歸類而組距為二單位以上

者 公式如下：
$$M = A + \frac{1}{N} \Sigma (f \cdot d) i \dots \dots \dots (1c)$$

 $i = \text{組距}。$

算式如下：

第十二表 算術平均數之算法：簡捷法(b)

(根據第十表材料)

組 距	次 數	量數與假定 平均數之差	次數×差數
5—10	1	-8	-8
10—15	1	-7	-7
15—20	2	-6	-12
20—25	4	-5	-20
25—30	9	-4	-36
30—35	22	-3	-66
35—40	13	-2	-26
40—45	26	-1	-26
45—50	28	0	-201
50—55	19	1	19
55—60	21	2	42
60—65	14	3	42
65—70	11	4	44
70—75	5	5	25
75—80	3	6	18
80—85	2	7	14
	181		204
$204 - 201 = 3 \quad 3 \div 181 = .016 \quad .016 \times 5 = .08 \text{ (校正數)}$ 假定平均數 = 47.50 $\therefore M = 47.50 + .08$ $= 47.58$			

法次如下：

- a. (參看第十二表)組距與次數既排好後，求次數之總和得 181。
- b. 觀察大勢，假定平均數所在之組距。此組距須與真正平均數相差不遠。現假定為 45-50，此組之中點 47.50 即為假定平均數。
- c. 每組雖為五單位，而暫作為 1 計算。求各組中點數與 47.50 之差。若較 47.50 大，則差為正；小則為負，而將差數寫於「量數與假定平均數之差」項下，如 40-45 之中點數，42.50 與 47.50 之差，為負 5 單位，則作 -1；50-55 之中點數 52.50 與 47.50 之差為正 5 單位則作 1；餘類推。
- d. 以差數乘次數而將正負號記下。
- e. 將負號的「次數×差數」及正號的「次數×差數」分別相加，然後相消，而得餘數 3。
- f. 以次數之總和 181 除 3 得 .016，再以 5 乘之。(因先以 5 單位為 1，藉省時力，故仍以 5 乘之)得 .08 為校正數。
- g. 將校正數 .08 加於假定平均數 47.50 之上，得 47.58 為真正算術平均數。

(6)算術平均數之長處 算術平均數之長處何在，宜看此法與第 18 節所述之平均數之要素相脗合者多少。第一，算術平均數是客觀的量數；第二，算術平均數，根據事實全部之觀察；第三，

算術平均數簡明易曉；第四，算術平均數計算甚易。

(7) 算術平均數之短處

- a. 在次數分配圖上，算術平均數，不能一時指定其地位，必待算出後始可。若中數與衆數，則較易指定。
- b. 算術平均數，常受極端量數之影響，而大變其數量。
- c. 若極端量數遺漏，則算術平均數無從指定。
- d. 算術平均數未必見諸事實（即實在量數中不必有此數）。學理上之算術平均數，與普通人所謂平均數常非一物；如常人所謂平均兒童，乃最普通兒童中之一（爲衆數），而學理上之平均兒童，爲一切兒童之平均，但實際上未必有此兒童。

20 中 數

測量集中趨勢之又一法，爲中數法。中數或稱中位數，即量表上之一點，使數量分爲兩半，左右相等。欲求許多量數之中數，必經過二步手續。第一，將量數依大小排列。第二，從一端數起，至達量數之一半，此處爲分配之中心，兩邊量數相等，即爲中數。茲將求中數之方法列下：

(1) 方法一 分立數列而次數之數目爲單數者 所謂分立數列者，即量數依大小次序排列後，各數分立，而無繼續不斷之意。如每月薪水之排列，\$30, \$35, \$38, \$41 是也。

公式如下：

$$\text{Mdn之位置} = \frac{N+1}{2} \dots\dots\dots (2)$$

Mdn = median 中數

N = 次數之總和。

第十三表 求中數法：方法一

(根據十一個學生之某學程分數)

量數	
60	N = 11
65	
65	
70	$\therefore \text{Mdn之位置} = \frac{11+1}{2}$
75	
75	$= \frac{12}{2} = 6$
75	
80	
90	即Mdn之價值 = 75
90	
95	
N = 11	

此表之算法，即先將分數依大小排列，然後將其次數加起，得11為單數。11加1以2除之得6。意即此十一個量數內之中數為任何一端數起之第六個量數，故中數為75（初學之宜注意者，即勿以6為中數之價值）。

(2) 方法二 分立數列而次數之數目為雙數者

第十四表 求中數法：方法二

(根據十二個學生之某學程分數)

量數	
75	$Mdn\text{-之位置} = \frac{12+1}{2}$
75	
76	
77	$= \frac{13}{2} = 6.5$
78	
79	
83	$\therefore Mdn\text{-之價值} = \frac{79+83}{2}$
85	
87	
87	$= \frac{162}{2}$
88	
89	
N=12	= 81

凡數列分立而次數為偶數者，則中數之價值不為各量數之最中間一數而為最居中二數中間之數。依上例，中數之位置在 6.5 之點，即其價值在 79 至 83 之中間，即 81。

(3) 方法三 連續數列

算式如下：

第十五表 求中數法：方法三

(根據東南大學十三年度投考英文分數分配表)

組 距	次 數	算 法
0— 5	58	$\frac{N}{2} = \frac{1448}{2} = 724$
5— 10	42	
10— 15	76	由上向下遞加：58+42+76
15— 20	94	+94+134+149+144=697
20— 25	134	
25— 30	149	724-697=27
30— 35	144	
35— 40	117	$\frac{27}{117} \times 5 = 1.15$
40— 45	123	35+1.15=36.15
45— 50	132	∴ Mdn=36.15
50— 55	92	
55— 60	75	或由下向上遞加：1+4+11
60— 65	62	
65— 70	50	+13+32+39+50+62+75
70— 75	39	+92+132+123=634
75— 80	32	
80— 85	13	724-634=90
85— 90	11	
90— 95	4	$\frac{90}{117} \times 5 = 3.846$
95—100	1	40-3.846=36.15
	N=1448	∴ Mdn=36.15

法次如下：

- a. 以 2 除次數之總和 1448 得 724。
- b. 從次數之上端向下遞加（從下端向上亦可）直至含有中數之組距之前一組（30-35）為止，共次數 697。
- c. 以 $\frac{N}{2}$ （即 724）之數減去 697 得 27。
- d. 以 35-40 組之次數 117 除 27 而以組距之單位數 5 乘之得 1.15。
- e. 以 1.15 加於含有中數之組距之最低限 35 上，得 36.15，即為中數。（若由下向上遞加，應以組距之高限 40 減去 3.846）

以上法次，即依照凱萊 (Kelley) 之公式。既有公式遵循，不致錯誤，然其符號之多，或反使初學者覺其複雜。

公式如下：

$$Mdn = v + \frac{\frac{N}{2} - F}{f} i ; \text{或} \dots \dots \dots (2a)$$

$$Mdn = v' - \frac{\frac{N}{2} - F'}{f'} i \dots \dots \dots (2b)$$

在此公式內：

N = 次數之總和，

f = 含有中數之組距之次數，

i = 組距之大小，

F = 含有中數之組距以上次數之和，

F' = 含有中數之組距以下次數之和，

v = 此組之最低限，

v' = 此組之最高限，

Mdn = 中數。

若以第十五表之材料代入此公式，則

$$\begin{aligned} Mdn\text{-之價值} &= 35 + \frac{\frac{1448}{2} - 697}{117} \times 5 \\ &= 35 + \frac{27}{117} \times 5 \\ &= 36.15. \end{aligned}$$

(4) 中數之長處 與第 18 節所載平均數之要素相核對，中數之長處，可列舉如下：

- a. 是一客觀的量數。
- b. 根據全部事實（惟量數必依等級排列）。
- c. 簡明易曉。
- d. 易於計算。
- e. 固定而不受『抽樣之變動』之影響。

(5) 中數之短處

- a. 不能用代數法計算。
- b. 計算法不若算術平均數之易曉。
- c. 以中數乘次數之和，不能得總數。

21. 衆 數

在許多量數中，其次數之最多者爲衆數。衆數之原名爲 Mode，即通式之意。凡物之爲通式者，其數必衆。若帶玳瑁眼鏡之學生，較帶其他任何一種眼鏡之學生爲多，則玳瑁眼鏡爲衆數矣；若小學教師之月薪以三十元者人數爲最多，則三十元爲衆數矣。

衆數可依其粗精而分爲二種：近似衆數與理論（或真正）衆數。近似衆數，殊不固定。若在量數歸類時，稍變組距之範圍，衆數亦隨之而變，故不可多用；即用之，亦只能作初步觀察之用，不可視爲精確之價值。理論衆數，則價值可靠，然算法甚繁，非初學者所能涉及。茲將求衆數之各種方法列下：

(1) 近似衆數a. 量數之已歸類而組距爲一單位者

某學程之考試分數。

分數	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
次數	2	4	6	14	11	9	7	5	4	3	1

以上各分數之次數，以 14 爲最大，73 凡發現 14 次，故 73 爲近似衆數，（初學者不可以次數 14 爲衆數，宜注意）。

b. 量數之已歸類而組距爲單位以上者

參看第十五表中，次數之最多者，爲 149。故與 149 相當之組(25-30)之中點數(27.5) 爲近似衆數。

(2) 理論衆數 欲求理論衆數，須用二種方法：(a)求得無窮之觀察與採用極小之組距。然此二者，不易達到。(b)用曲線配合法，但手續極其艱繁，不適於初學之用。

(3) 從算術平均數，中數，衆數之關係，而求得之衆數 此公式適用於略略偏態之次數分配之上，學者可斟酌採用之。

公式如下：

$$Mo = M - 3(M - Mdn) \dots \dots \dots (3)$$

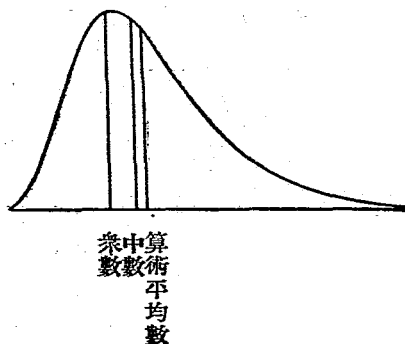
在此公式內：

Mo = 衆數，

M = 算術平均數，

Mdn = 中數。

從此公式，可知在一偏態分配圖之橫線上，中數約在由算術平均數至衆數之距離三分之一處，如下圖：



第十六圖 在偏態圖上算術平均數，中數，衆數之關係。

(4) 衆數之長處

- a. 衆數之意義，常人共曉，故有時亦稱為尋常人之平均數。
- b. 欲除去極端量數之影響，應用衆數，最為適宜，因少數的極端量數，不能影響衆數也。
- c. 近似衆數，計算簡易。
- d. 衆數常為偏態分配之代表的量數。

(5) 衆數之短處

- a. 分配圖中，有時缺乏彰明特出之處，足以表示衆數者。
- b. 若欲置重於極端量數，則衆數不適宜。
- c. 以衆數乘總次數，不能得各量數之總和。
- d. 衆數不必根據事實之全部觀察。
- e. 理論的衆數，計算甚難。
- f. 衆數不甚固定，常因分組之不同，而變其量。

22. 倒數平均數

倒數平均數，等於各量數之倒數之平均數之倒數。公式如下：

$$H. M. = \frac{1}{\frac{1}{N} \sum \frac{1}{X}} \dots\dots\dots (4)$$

H. M. = Harmonic Mean, 倒數平均數。

茲舉例說明以上公式之應用。設有人步行二里；其行第一里時之速度為每點鐘十里，其行第二里時之速度，為每點鐘二十里；問

此人平均每點鐘步行若干里？此題答案，似為每點鐘步行十五里 $\left(\frac{10+20}{2} = \frac{30}{2} = 15\right)$ ，而實則非也。蓋此人實未步行二點鐘，不過步行二里耳。其步行第一里時，其時間為一點鐘之十分之一 $\left(\frac{1}{10}\right)$ ，或 6 分鐘；其步行第二里時，其時間為一點鐘之二十分之一 $\left(\frac{1}{20}\right)$ ，或 3 分鐘，故其平均時間為 $\frac{6+3}{2} = \frac{9}{2} = 4.5$ 分鐘一里，即每點鐘平均步行里數為 $\frac{60\text{分}}{4.5} = 13.3$ 里，此即為倒數平均數，較算術平均數 15 為小，宜注意也。

又設甲乙丙三學生，解答一算題，甲需 7.5 分鐘，或每點鐘可以解答 8 題（即 $\frac{60}{7.5} = 8$ ）；乙需 10 分鐘，或每點鐘解答 6 題（即 $\frac{60}{10} = 6$ ）；丙需 15 分鐘，或每點鐘解答 4 題（即 $\frac{60}{15} = 4$ ）；問三人平均每點鐘解答算題若干？茲將算式列在第十六表。

第十六表 倒數平均數之算法

每點鐘解答算題之數	每點鐘解答算題之數之倒數 $\left(\frac{1}{X}\right)$	解答每個算題所需之時間
8	$\frac{1}{8} = .12500$	$\frac{60}{8} = 7.5$ 分鐘
6	$\frac{1}{6} = .16667$	$\frac{60}{6} = 10$ 分鐘
4	$\frac{1}{4} = .25000$	$\frac{60}{4} = 15$ 分鐘
3) 18 (6 = 甲乙丙三學生平均每點鐘解答算題之數)	3) .54167 (.180557 = 甲乙丙三學生解答每個算題之平均時間)	3) 32.5 (10.83 = 甲乙丙三學生解答每個算題之平均時間)
(算術平均數)	$\frac{1}{.180557} = 5.54 =$ 甲乙丙三學生平均每點鐘解答算題之數 (倒數平均數)	$\frac{60}{5.54} = 10.83 =$ 甲乙丙三學生平均每點鐘解答算題之數 (倒數平均數)

按第十六表算法結果，以倒數平均數5.54爲是，若用算術平均數6，則誤矣。

23. 幾何平均數

N量數之幾何平均數（或稱對數平均數）爲N量數乘積後之N次根。公式如下：

$$G.M. = \sqrt[n]{a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_4 \cdots \cdots \times a_n} \cdots \cdots (5)$$

在此公式內：

$a_1, a_2, a_3, a_4 \cdots \cdots a_n =$ 變量數。

G.M. = Geometric Mean, 幾何平均數。

若用對數表，則計算較易，其公式如下：

$$\log G.M. = \frac{\log a_1 + \log a_2 + \log a_3 + \log a_4 \cdots \cdots + \log a_n}{n} \cdots \cdots (5a)$$

舉例如下：

試求以下諸數之幾何平均數：24, 28, 34, 38, 44.

$$G.M. = \sqrt[5]{24 \times 28 \times 34 \times 38 \times 44}$$

$$\log G.M. = \frac{\log 24 + \log 28 + \log 34 + \log 38 + \log 44}{5}$$

$$\therefore G.M. = 32.84。$$

(1)用法 a. 若一學童，四月之內，其進步之百分比爲80%，問其每月平均進步率爲百分之幾。其平均進步率決非 $\frac{80}{4} = 20\%$ ，但爲

$$G.M. = \sqrt[4]{1.80} - 1$$

$$=1.16-1=16\%, \text{即}$$

平均每月進步為百分之16,或以原有之程度為1;則

第一月之進步比原有者多16%,成1.16;

第二月之進步比第一月者多16%,成1.35;

第三月之進步比第二月者多16%,成1.56;

第四月之進步比第三月者多16%,成1.80。

b. 調查人口,常為十年一次。若已知第一次(假定1900年)與第二次(假定1910年)之人口,則其中間時期(即1905年)之人口,即為第一與第二時期人口之幾何平均數。例如1910年美國本部人口為91,972,266;1920年為105,710,620,則1915年人口,若不受兵災之影響,大約必為

$$\sqrt{91,972,266 \times 105,710,620} = 98,602,461。$$

(2)特點 a. (a) 算術平均數, (b) 幾何平均數, (c) 倒數平均數, 三平均數中, 最大者為(a), 次大者為(b), 其次為(c)。例如1, 2二數, 其(a)為1.5; 其(b)為1.41; 其(c)為1.35。

b. 幾何平均數, 能減少較大數目之影響, 而增加較小數目之影響。例如4與50之算術平均數為 $\frac{4+50}{2}=27$; 而其幾何平均數則為 $\sqrt{4 \times 50}=14.14$ 。故經濟學家, 常用幾何平均數, 以求各種物價之指數。

問 題

1. 試用簡捷法，求下表內所載事實之算術平均數。

東南大學十三年度錄取生數學分數分配表

組 距	次 數
0—5	7
5—10	11
10—15	20
15—20	29
20—25	24
25—30	32
30—35	27
35—40	24
40—45	24
45—50	14
50—55	15
55—60	7
60—65	10
65—70	8
70—75	5
75—80	2
80—85	2
85—90	2
90—95	1
	N=264

2. 試求上表所載事實之中數。
3. 試用關而生公式，求上表所載事實之理論衆數。
4. 若甲乙丙三學生，解答某個算題，甲需5分鐘，乙需6分鐘，丙需10分鐘，問三生平均每點鐘解答若干算題。
5. 若一學童三月內進步之百分比為70%，問每月平均進步率為多少。

第六章 離中趨勢

24. 何謂離中趨勢

集中趨勢法，為形容次數分配法之一，已如上章所述矣。然有時有數種次數分配，其平均數雖完全相同，而論各量數與平均數之差，則兩種分配，彼此互異；例如甲乙兩班學生各五十人，其算學成績之平均數各為70分；然甲班之最好者得95分，最劣者得45分；而乙班之最好者僅得80分，最劣者得65分。由此而觀，可知甲班良莠不齊，上智與下愚共處；而乙班則類多中材，乏天才亦鮮下能。易言之，甲班之學生與乙班之學生比較，雖其中人（或平均人）程度相等；然就全班而言，一則參差極大，一則參差甚微，此種參差情形，謂之離中趨勢，而研究此參差之情形，並用數字以表示之之法，名為離中趨勢法。

離中趨勢有與集中趨勢不同之一點，即照尋常之了解，後者在分配圖橫坐標上，其地位為一點。前者在分配圖橫坐標上，其地位為一距離，此不可不注意者。

25. 離中趨勢之種類

此法可略分為四種如下：

- (1) 全距。

- (2) 四分位差。
- (3) 標準差。
- (4) 平均差。

26. 全 距

以全距測量離中趨勢，只能得其大概，且不免有以下之困難
 (1) 分配中之極端量數（極大或極小）雖不多觀，然偶爾發現，全距將大受其影響；取之，則全距突然漲大；捨之，又忽然縮小，殊不固定。(2) 全距雖能表示首尾之相差，而不能形容內部分配之實情。因此二種困難，此法可棄而不用。

27. 四分位差

四分位差(Quartile deviation, or Semi-inter-quartile range, 或 Q), 非量數與某平均數之差，不過一種表示離中趨勢之數量耳。試將量數之總和，分為相等之四段，則從最小之量數或最劣之成績數起，第一段終了處之量數之價值為第一四分位點(Q_1)，第二段終了處為中點(Mdn)，第三段終了處為第三四分位點(Q_3)。若分配為完全對稱者，則

$$Mdn - Q_1 = Q_3 - Mdn$$

而其差數($Mdn - Q_1$ 或 $Q_3 - Mdn$)均可為量數離中趨勢之一種表示，但分配偏態時或不對稱時，則宜另用公式。

公式如下：

$$Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2} \dots\dots\dots(6)$$

以上Q 爲四分位差， Q_1 爲第一四分位點， Q_3 爲第三四分位點。算式如下：

第十七表 四分位差之求法

組 距	次 數	算 法
0—5	4	$\frac{N}{4} = \frac{66}{4} = 16.5$
5—10	5	由上向下遞加：4+5
10—15	7	+7=16
15—20	9	$16.5 - 16 = .5$
20—25	10	$15 + \frac{.5}{9} \times 5 = 15.28 = Q_1$
25—30	12	由下向上遞加：1+2+3
30—35	8	+5=11
35—40	5	$16.5 - 11 = 5.5$
40—45	3	$35 - \frac{5.5}{8} \times 5 = 31.56 = Q_3$
45—50	2	$\therefore Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$
50—55	1	$= \frac{31.56 - 15.28}{2}$
	4)66(16.5	= 8.14

法次如下：

a. 以4除次數之總和66得16.5。

b. $Q_1 = 15 + \frac{.5}{9} \times 5 = 15.28$ 。

c. $Q_3 = 35 - \frac{5.5}{8} \times 5 = 31.56$

$$d. \text{ 因 } Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}, \therefore Q = \frac{31.56 - 15.28}{2} = 8.14$$

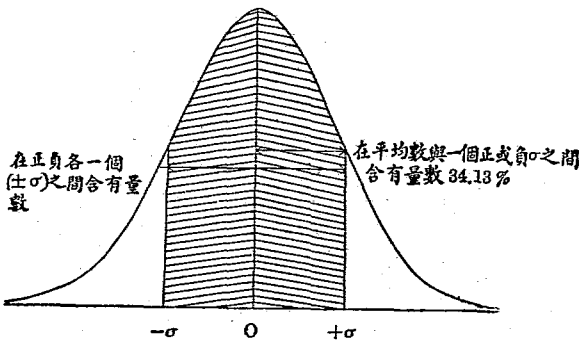
四分位差之特性

- a. 以四分位差表示離中趨勢，常人多能了解。
- b. 四分位差計算簡易。
- c. 士 Q = 全數之 50% (或正負四分位差等於全數之百分之五十)。
- d. 從中數起，前後展開各百分之二十五量數，共含有百分之五十量數，其中任何一量數，與平均數之差，不能超過四分位差之價值之外，此即四分位差之意義。例如第十七表內所載事實之四分位差為 8.14，意即此表量數之中間百分之五十量數與平均數之差，無一能超過 8.14 也。

28. 標 準 差

標準差，或名均方根差，原名 Standard Deviation (S. D.)，有時以希臘字母“ σ ”(Sigma) 為符號。本書亦沿用此符號。標準差為表示離中趨勢之最完善之差數，其定義如下：「標準差為差數之方之平均數之平方根」；詳言之，欲得標準差，必 (1) 先求各量數與平均數之差數；(2) 方之；(3) 求各方之和；(4) 以次數之總和除之；(5) 再求其平方根。欲求標準差，必以算術平均數為集中趨勢數。

標準差在分配圖之橫坐標上，為一距離，若在一常態分配圖上，則自平均數上之縱線起至標準差上之縱線止，曲線內含有全部分配之 34.13%；若就平均數左右展開，至正負各一標準差，則所含之數量應加倍為 68.26%；詳下圖：



第十七圖 常態分配圖上之標準差

(1) 標準差之求法

公式如下：

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum x^2}{N}} \dots\dots\dots (7)$$

$$\text{或 } \sigma = \sqrt{\frac{\sum fx^2}{N}} \dots\dots\dots (7a)$$

在此二公式內：

- σ 為標準差，
 x 為各量數與平均數之差，
 N 為次數之總和，
 f 為次數。

算式如下：

第十八表 標準差之求法

量 數	差 數	差 數 方
68	-8.14	66.26
68	-8.14	66.26
69	-7.14	50.98
70	-6.14	37.70
70	-6.14	37.70
71	-5.14	26.42
72	-4.14	17.14
73	-3.14	9.86
74	-2.14	4.58
75	-1.14	1.30
76	- .14	.02
77	+ .36	.74
77	+ .36	.74
78	+1.36	3.46
79	+2.36	8.18
80	+3.36	14.90
81	+4.36	23.62
82	+5.36	34.34
83	+6.36	47.06
83	+6.36	47.06
84	+7.36	61.78
85	+8.36	78.50
$M=76.14$		638.60

$$\begin{aligned}\therefore \sigma &= \sqrt{\frac{638.60}{22}} \\ &= \sqrt{29.03} \\ &= 5.38\end{aligned}$$

法次如下：

- a. 求量數之平均數為76.14。
- b. 求各量數與76.14之差，寫在差數項下，如-8.14, -8.14 -7.14等。
- c. 求差數乘方，得66.26, 66.26, 50.98等。
- d. 求各差數方之和得638.60。
- e. 以次數之總和除638.60得29.03。
- f. 求29.03之平方根為5.38，即標準差。

(2) 標準差之求法 簡捷法

公式如下：

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f\xi^2}{N} - \delta^2} \quad \text{Xi} \dots\dots\dots (7b)$$

$\xi(\text{Xi})$ 為各量數與假定平均數之差。

$\delta(\text{Delta})$ 為校正數 c

算式如下：

第十九表 標準差之簡捷求法

(根據東南大學十三年度投考生英文分數分配表)

組 距	次 數	與假定平 均數之差	次數×差數	次數×差數方
0— 5	58	-8	-464	3712
5— 10	42	-7	-294	2058
10— 15	76	-6	-456	2736
15— 20	94	-5	-470	2350
20— 25	134	-4	-536	2144
25— 30	149	-3	-447	1341
30— 35	144	-2	-288	576
35— 40	117	-1	-117	117
40— 45	123	0	-3172	
45— 50	132	1	132	132
50— 55	92	2	184	368
55— 60	75	3	225	675
60— 65	62	4	248	992
65— 70	50	5	250	1250
70— 75	39	6	234	1404
75— 80	32	7	224	1568
80— 85	13	8	104	832
85— 90	11	9	99	891
90— 95	4	10	40	400
95—100	1	11	11	121
N = 1448			1751 -3172 1448) 23667 (16.34	
			1448) -1421 (-.98	
$\delta = -.98 \quad \therefore \delta^2 = (-.98)^2 = .9604$				
$\frac{\sum f\delta^2}{N} = 16.34 \quad 16.34 - .9604 = 15.3796 = \sigma^2$				
$\therefore \sigma = 3.92 \text{組距} \quad \therefore \sigma = 3.92 \times 5 = 19.6 \text{單位}$				

法次如下：

- a. 將分數歸入相當組內。
- b. 假定一含有平均數之組，而以其組距中點為假定平均數，即40—45之一組，假定平均數為42.5。
- c. 求各組與此組(40—45)之差，(以一組為單位，得相差若干組，如得-1, -2, 等及1, 2, 等)。
- d. 以「次數」乘「與假定平均數之差」，如 $58 \times (-8) = -464$ 等。
- e. 求次數乘差數之代數的總和為-1421。
- f. 以次數之總和1448除-1421，得商數-.98，為校正數，方之，得.9604為校正數方。
- g. 以「次數乘差數」 \times 差數，得3712等數，加之，共為23,667。
- h. 以1448除23,667得16.34為
- $$\frac{\sum f x^2}{N}$$
- i. $16.34 - .9604 = 15.3796$ 為 σ^2 。
- j. 15.3796之平方根為3.92即標準差之以組距為單位者。
- k. 3.92×5 即實得標準差或 σ 。

(3) 標準差之特性

- a. 用切實量數表示之。
- b. 根據全部事實。
- c. 計算容易。

- d. 可用代數法計算。
- e. 不受「抽樣之變動」之影響。
- f. 若分配對稱或近乎對稱，則以 6 乘標準差，可以包括量數百分之九十九有奇，此法可常用之，以驗所求得之標準差有無錯誤。
- g. 正負各一標準差等於全數之 68.26% (或士 $\sigma = 68.26\%$)。
- h. 從平均數起，前後展開各一標準差 (一標準差 = 34.13%) 共含有百分之 68.26 量數。其中任何一量數與平均數之差，不能超過標準差之價值。是即標準差之意義。

29 平 均 差

先求各量數與平均數之差，各差數相加，不計正負符號，得一總和，以次數之總和除之，則得平均差。求平均差時，中數與算術平均數，均可用為標準。然就理論言，則以中數為較好。因差數以與中數相較量者，其和為最小也。茲將平均差計算法列下：

(1) 方法一 量數未經歸類者

公式如下：

$$A. D. = \frac{\sum |x|}{N} \dots\dots\dots (8)$$

在此公式內：

$|x|$ = 各量數與中數相差之絕對值，正負號不計。

A. D. = 平均差。

算式如下：

第二十表 平均差之求法：方法一

量 數	差 數
90	9.5
87	6.5
86	5.5
85	4.5
83	2.5
78	2.5
74	6.5
73	7.5
71	9.5
70	10.5
$2 \frac{10+1}{5.5}$	10)65(6.5
中數=80.5	=A. D.(平均差)

法次如下：

- 計算中數為 80.5。
- 求各量數與此中數之差數，如 9.5；6.5 等。
- 不計符號之正負，而將各差數相加，得 65。
- 以次數之總和 10 除 65 得 6.5，即為平均差。

(2) 方法二 量數已經歸類者

公式如下：

$$A.D. = \frac{\sum |f \cdot x|}{N} \dots\dots\dots (8a)$$

差數 x 之正負號不計。

算式如下：

第二十一表 平均差之求法：方法二

組 距	組距中點	次 數	差 數	次數×差數
5—10	7.5	4	12.08	48.32
10—15	12.5	5	7.08	35.40
15—20	17.5	6	2.08	12.48
20—25	22.5	7	2.92	20.44
25—30	27.5	4	7.92	31.68
30—35	32.5	3	12.92	38.76
29				187.08
中數=19.58 ∴ A. D. = $\frac{187.08}{29} = 6.45$				

法次如下：

- a. 照常法求中數得 19.58。
- b. 求各組距中點與 19.58 之差數之絕對值得 12.08, 7.08 等
- c. 以各次數乘各該差數之絕對值得 48.32, 35.40 等。

- d. 不計符號之正負，而將 c 項所得各數相加得 187.08。
 e. 以次數之總和 29 除次數乘差數之絕對值之和 187.08，得 6.45，即為平均差。

(3) 方法三 簡捷法

公式如下：

$$A. D. = \frac{\sum |f\xi| + \delta(N_b - N_a)}{N} \quad \text{xi} \dots\dots\dots (8b)$$

A. D. = 平均差。

$\sum |f\xi|$ = 次數乘差數（與假定中數）之絕對值之和，正負號不計。

δ = 校正數。（初學之宜注意者，即此處之校正數 = （中數 - 假定中數）÷ 組距；此與計算算術平均數時之校正數不同。）

N_a = 較實得中數為大各量數次數之和。

N_b = 較實得中數為小各量數次數之和。

算式如下：

第二十二表 平均差之簡捷求法 (材料與第十九表同)

組 距	次 數	差數 (以組距 為單位)	次數 × 差數
0— 5	58	7	406
5— 10	42	6	252
10— 15	76	5	380
15— 20	94	4	376
20— 25	134	3	402
25— 30	149	2	298
30— 35	144	1	144
35— 40	117	0	
40— 45	123	1	123
45— 50	132	2	264
50— 55	92	3	276
55— 60	75	4	300
60— 65	62	5	310
65— 70	50	6	300
70— 75	39	7	273
75— 80	32	8	256
80— 85	13	9	117
85— 90	11	10	110
90— 95	4	11	44
95— 100	1	12	12

N=1448	$\sum f \xi = 4643$
較實得中數為大各量數次數之和=751	實得中數=36.15
較實得中數為小各量數次數之和=697	假定中數=37.50
次數乘差數之和	=4643 校正數 = $\frac{36.15 - 37.50}{5}$
$\therefore A.D. = \frac{4643 + [-.27(697 - 751)]}{1448} = -.27$	
$= \frac{4643 + (-.27) \times (-54)}{1448}$	
$= \frac{4657.58}{1448} = 3.2 \text{ 組距}$	
$\therefore A.D. = 3.2 \times 5 = 16 \text{ 單位}$	

法次如下：

- a. 求次數之總和(N) 爲1448。
- b. 求實得中數爲36.15。
- c. 因實得中數 36.15 在 35—40 組距間，故即用此組之中點 37.50 爲假定中數。並假定此組中之各量數均集中於此組中點，其價值各爲 37.50。
- d. 求校正數(δ) 爲 $\frac{36.15-37.50}{5} = -.27$
- e. 求量數之較實得中數大者次數之和 (N_a) 即 (參看第二十二表次數行) $1+4+11+13+32+\dots+117=751$ (最後 117 亦算入，因此組之 117 個量數，均假設集中於此組之中點，其價值等於 37.50，較實得中數 36.15 爲大也)。
- f. 再求量數之較實得中數小者次數之和 (N_b) 即 $N-N_a$ 或 $1448-751=697$ 。
- g. 求次數乘差數之總和($\sum |fz|$) 得4643。
- h. 將以上所得價值代入公式(8b)

$$A.D. = \frac{4643 + [-.27(697-751)]}{1448} = 3.2 \text{ 組距}$$

\therefore 平均差 = $3.2 \times 5 = 16$ 單位。

(4) 平均差之特性

- a. 算法繁複。

- b. 受「抽樣之變動」之影響。
- c. $\pm A.D. = \text{全數之 } 57.5\%$ 。
- d. 在常態分配圖或略不對稱圖上， $A.D. = .7979\sigma$ 。

30 相對差數

吾人欲比較二項事實之離中趨勢，常有二種困難；二者得一，則比較即無價值。第一種困難，即二事實之測量單位不同；如以高小學生默讀測驗成績之標準差與其體重標準差相比較，則單位不同，其乏意義可知。第二種困難，即二項事實之測量單位雖相同，而其平均數之大小多少則懸殊；如以一城中中等學校經費之標準差與初等學校經費之標準差相比較，則其無意義亦可知；又如甲班五十學生之國文分數最多者為 100 分，最少者為 60 分；乙班五十學生之國文分數最多者為 10 分，最少者為 6 分，則其差數之不能比較亦可知。故欲比較二事實之離中趨勢，不能用其絕對差數，而必用其相對差數，茲將皮而生及桑戴克之公式列下：

(1) 皮而生公式

$$v = \frac{100 \sigma}{M} \dots\dots\dots (9)$$

此公式內之 v = 相對差數。

舉例如下：

東南大學十三年度錄取生英文分數之算術平均數 = 69.45, 標準差 =

14.50, 則相對差數

$$v = \frac{100 \times 14.50}{69.45} = 20$$

但投考生英文分數之算術平均數 = 41.52; 標準差 = 19.70 則相對差數

$$v = \frac{100 \times 19.70}{41.52} = 47$$

從此可知投考生之差數 (47) 實二倍於錄取生之差數 (20) 而有餘。易言之, 即錄取生之英文程度較投考生之英文程度為齊整也。若單比絕對的差數, 一則為 19.70, 一則為 14.50, 其相差數不相上下, 而實則相差甚遠。

(2) 桑戴克公式

$$v = \frac{100 \text{ A. D.}}{\sqrt{\text{Median}}} \dots\dots\dots (9a)$$

惟桑氏之公式不若皮氏之固定不變, 茲特舉例以明之。

假定標準差 = 4 呎, 算術平均數 = 12 呎; 求相對差數, 則皮

而生之 $v = \frac{100 \times 4}{12} = \frac{400}{12} = 33.3$

若將呎改為吋, 則

$$v = \frac{100 \times 48}{144} = \frac{4800}{144} = 33.3$$

二次之相對差數均為 33.3 而未變。

然假定平均差 = 4 呎；中數 = 12 呎，而用桑戴克之公式，求相對差數，則

$$v = \frac{100 \times 4}{\sqrt{12}} = \frac{400}{3.464} = 115.4$$

再將呎改為吋，則

$$v = \frac{100 \times 48}{\sqrt{144}} = \frac{4800}{12} = 400$$

115.4 與 400 顯不相同，則桑氏公式，不甚固定可知。故欲求相對差數，以用皮而生之公式為是。

31. 偏態性之測量

量數分配不對稱，謂之偏態。偏態之情狀不一；有略略偏態者，有極端偏態者。已詳第十一，十二，及第十三圖矣。有時兩項事實性質相類，測量之方法亦同，而其分配各有若干偏態，吾人欲比較其偏態之大小與性質，可用公式如下：

(1) 公式一 皮而生公式

$$\text{偏態性 (Skewness)} = \frac{M - M_o}{\sigma} \dots\dots\dots (10)$$

$$\text{但 } M_o = M - 3(M - M_{dn}) \dots\dots\dots \text{見公式(3)}$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{偏態性} &= \frac{M - [M - 3(M - M_{dn})]}{\sigma} \\ &= \frac{3(M - M_{dn})}{\sigma} \dots\dots\dots (10a) \end{aligned}$$

細察公式(10)，及參觀第十六圖，可知偏態愈大，則算術平均數離衆數愈遠，而二數之差 (mean-mode) 愈大。公式(10)乃用算術平均數與衆數相差之大小，而推算偏態性之多少。公式(10a)乃用算術平均數與中數相差之大小，而推算偏態性之多少。

(2) 公式二 猶爾公式 此公式乃利用四分位差，推算偏態性之多少者。

公式如下：

$$\text{偏態性} = \frac{(Q_3 - \text{Mdn}) - (\text{Mdn} - Q_1)}{Q} \dots\dots\dots (11)$$

$$= \frac{Q_1 + Q_3 - 2\text{Mdn}}{Q} \dots\dots\dots (11a)$$

舉例如下：

a. 在第十表內： Mdn = 47.2

$$Q_1 = 37.4$$

$$Q_3 = 57.6$$

$$Q = 10.1$$

$$\text{偏態性} = \frac{(57.6 - 47.2) - (47.2 - 37.4)}{10.1}$$

$$= \frac{10.60 - 9.60}{10.1}$$

$$= .099$$

故東南大學十三年度錄取生理化考試分數之分配，為正偏態形。

b. 在第四章問題 2 之表內：

$$Mdn = 50.66$$

$$Q_1 = 41.65$$

$$Q_3 = 59.49$$

$$Q = 8.92$$

$$\therefore \text{偏態性} = \frac{(59.49 - 50.66) - (50.66 - 41.65)}{8.92}$$

$$= \frac{8.83 - 9.01}{8.92}$$

$$= \frac{-.18}{8.92}$$

$$= -.02$$

故東南大學十三年度錄取生生物分數之分配為負偏態形。a 與 b 相較，則偏態之大小與性質可知矣。

問 題

1. 試求下表所列事實之四分位差。
2. 試求下表所列事實之標準差。
3. 試求下表所列事實之平均差。
4. 試求下表所列事實之比較的差數（應用公式 9）。
5. 試求下表所列事實之偏態性（用公式 11a）。

東南大學十三年度投考生公民分數分配表

分 數	次 數
5—10	3
10—15	18
15—20	30
20—25	64
25—30	81
30—35	103
35—40	109
40—45	118
45—50	115
50—55	98
55—60	59
60—65	32
65—70	13
70—75	5
75—80	4
	N=852

第七章 常態曲線

32. 次數多邊圖之修勻法

第三章第11節(7)曾述次數分配圖之作法。惟教育上之事實，常因觀察不能詳盡，致其圖不能適合理想的曲線。或統計之時，組距太大，則事實雖多，亦難得理想的曲線。只有事實豐足，組距精細，其曲線始能近於理想者。事實少，組距大時，欲求得理想的曲線，不能不用「修勻次數多邊圖之方法」。此法之唯一假設，即：凡量一事實，得幾個量數，其中最近乎事實之數，即為此幾個量數之算術平均數。例如有五個組距，其各中點為A,B,C,D,E，則AB等最近事實之值，可以下式表出之，此即所謂已修勻之價值。(注意第一個組距與末了一個組距之修勻法)。

$$A \text{ 之修勻的價值} = \frac{A+A+B}{3} \dots\dots\dots (12)$$

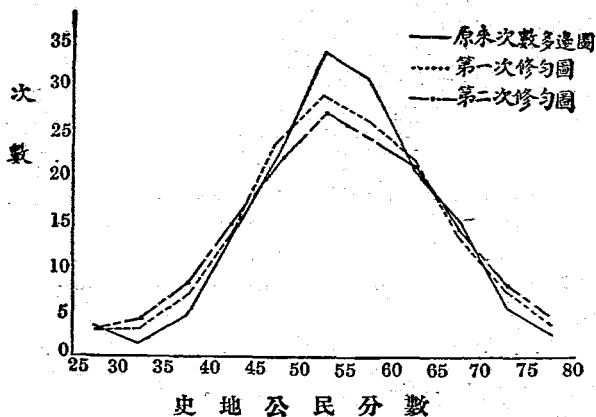
$$B \text{ 之修勻的價值} = \frac{A+B+C}{3} \dots\dots\dots (12a)$$

$$C \text{ 之修勻的價值} = \frac{B+C+D}{3} \dots\dots\dots (12b)$$

$$D \text{ 之修勻的價值} = \frac{C+D+E}{3} \dots\dots\dots (12c)$$

$$E \text{ 之修勻的價值} = \frac{D+E+E}{3} \dots\dots\dots (12d)$$

第一次修勻後可再依照同一手續，為第二次之修勻詳如第十八圖。



原來次數	3	1	4	13	22	33	30	20	14	5	2
第一次修勻	2.3	2.7	6	13	22.6	26.3	27.6	21.3	13	7	3
第二次修勻	2.4	3.6	7.2	13.8	21.3	26.1	25.7	20.6	13.7	7.6	4.3

第十八圖 原來次數多邊圖與第一次修勻圖及第二次修勻圖之比較（根據第五表材料）

33. 常態曲線圖之繪法

常態曲線，又名機率曲線，或差誤曲線，或蓋氏曲線，或拉伯拉司——高氏曲線。欲繪此圖時，必根據以下公式：

$$y = y_0 e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}} \dots \dots \dots (13)$$

在此公式內：

y = 圖內之任何縱線。

y_0 = 平均縱線 (即縱線之最高者)。

e = 2.71828, Napierian 對數底數。

$$\sigma = \text{標準差} = \sqrt{\frac{\sum x^2}{N}}。$$

x = 橫坐標上由平均點至任何點之距離。

然

$$y_0 = \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}} \dots\dots\dots(13a)$$

故

$$y = \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \dots\dots\dots(13b)$$

在此公式內：

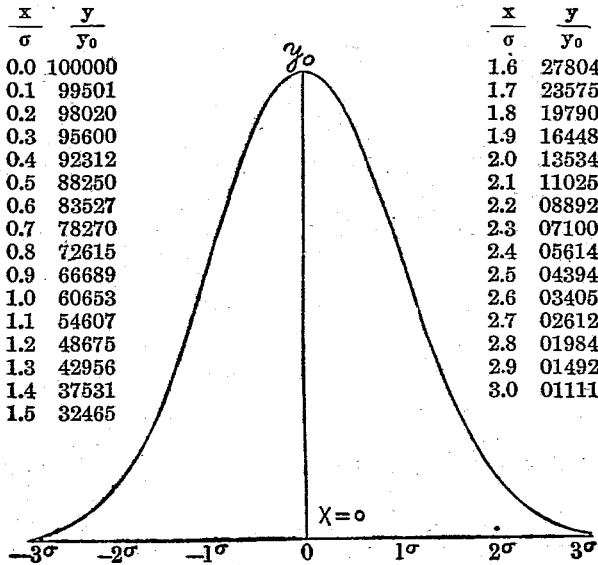
N, σ, π, e 均為常數，

y 與 x 為變數，

故 x 漸變時， y 亦隨之漸變。茲將 y 與 x 之性質，加詳言之。

在常態曲線圖內， y_0 為平均縱線，即橫坐標平均點 0 上所建之最高縱線，其餘許多較短之縱線 y_1 均以 y_0 為標準，而以 $\frac{y}{y_0}$ 表示之。又在一常態次數曲線圖內，橫坐標上之中間平均點為 $x=0$ ，自 0 至其左右兩面距離，均以 x 表之，然 σ 之距離已經慣用為橫坐標上標準距離，故凡他種較長或較短之距離 x ，均以 σ 為標準，而以

$\frac{x}{\sigma}$ 表示之。公式 (13b) 所欲求各種 y 之價值，已經算學家算好，另詳於附表一，吾人所應知者，即如何利用此表耳。今若參觀附表一，可知 y 之價值與 x 之價值互變之例。如 $x=0$ ，則 $y=100000$ (或謂之 1 亦可)； $x=.1$ (即標準差之十分之一或 $\frac{\sigma}{10}$)， $y=.99501$ ；若 $x=.2$ ，則 $y=.98020$ 等。吾人若能閱解此表，則繪常態曲線圖之法知過半矣。



第十九圖 常態曲線圖之繪法

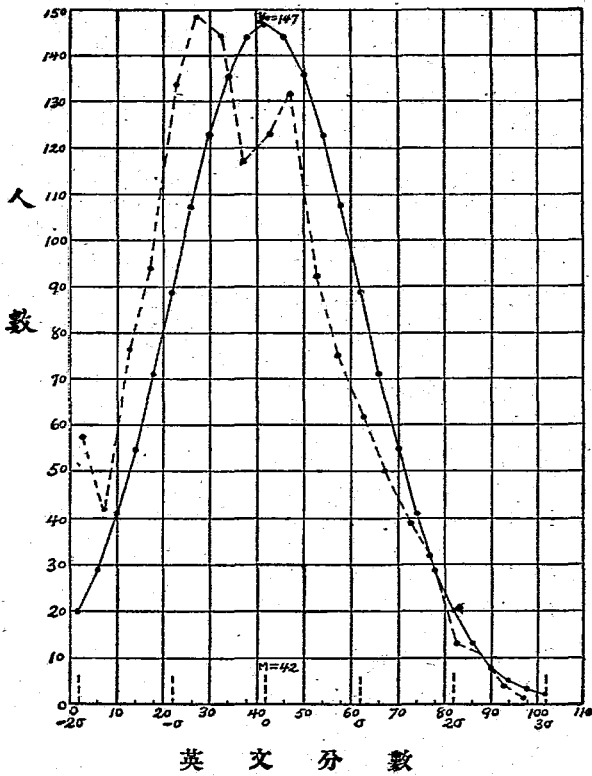
作法如下 (參閱第十九圖)：

- a. 用精細方格紙，依紙之大小，分配縱橫線，務使此圖高闊適中。
- b. 橫坐標可分為六段，自 -3σ 至 3σ ，中點為 0，此點上作一最高縱線 y_0 ，其長宜為 1，或 10，或 100 等。
- c. 自 0 至 1σ (或 -1σ)，再分十小段，為 $.1\sigma, .2\sigma, .3\sigma, .4\sigma, .5\sigma$ 等。
- d. 參閱附表一， $x=.1\sigma$ 則 $y=.99501$ 。故從 $.1\sigma$ 上作一縱線其長 $=.99501$ ，而於上端作一點，餘類推。
- e. 將各點用線連好，即為常態曲線圖。

34. 常態曲線圖與次數多邊圖之比較法

繪製理論的常態曲線圖之法，已如上節所述。使吾人欲將實際的事實之分配與理論的事實之分配兩相比較，則可將二圖重疊，而驗其配合與否。繪製此種二個比較圖之條件有三：(1) 二圖必用同一集中趨勢點，即用實際的分配之平均數點，為理論的分配之平均數點，而二圖之標準差距離之度量，均由此點始。(2) 二圖之標準差必用同一距離代表之。(3) 理論的分配之平均縱線 y_0 可用 $y_0 = \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ 公式求出，因 N, σ 及 π ，均為已知之數，而各種 y 之價值，可由 y_0 之價值乘附表一所載 $\frac{x}{\sigma}$ 之價值而得。

茲根據第十九表所載之事實，先繪次數多邊圖，後繪常態曲線圖，如第二十圖。



第二十圖 常態曲線圖與次數多邊圖之比較

(次數多邊圖之材料根據第十九表)

作法如下：

- a. 用第15節(1)之方法，繪次數多邊圖。

- b. 以實際的分配之平均數 24，為理論的分配之平均點，即 $x=0$ 。
- c. 以 0 為起點，在 0 之左右兩邊橫線上分記 $.2\sigma, .4\sigma, .6\sigma, .8\sigma$ ，等距離（一個 σ 可任分為幾段，然段數愈細，則曲線愈精），其分法即以原來實際事實之 σ 價值 19.7 乘 2, .4, .6, .8 等，而得 3.94, 7.88 等價值。
- d. 用公式(13a)，求理論分配之 y_0 ，
- $$y_0 = \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}} \text{ 即 } y_0 = \frac{1448}{3.921\sqrt{2} \times 3.1416} = 147, \text{ (此處之 } 3.94 \text{ 為標準差之用組距表示者，參看第十九表，倘原來事實，不用組距表示而以單位表示者，則此處亦用單位表示，即 } 19.6 \text{)。}$$
- e. 其餘 $.2\sigma, .4\sigma, .6\sigma$ ，等相對之 y 的價值，即以附表一所載 $.2\sigma, .4\sigma, .6\sigma$ 等相當之價值 .980, .923, .835 各乘 y_0 之價值 147。如 $x = .2\sigma$ ，則
- $$y = .980 \times 147 = 144; x = .4\sigma \text{ 則}$$
- $$y = .923 \times 147 = 136; x = .6\sigma \text{ 則}$$
- $$y = .835 \times 147 = 123 \text{ 等。}$$
- f. 在橫坐標之 $x=0$ 上作縱線，其長等於 147。
- g. 在橫線之 $\pm .2\sigma, \pm .4\sigma, \pm .6\sigma$ 等點上作縱線，其長等於 144, 136, 123 等。
- h. 用曲線尺（不用亦可）連接各縱線之頂點，即得所求之理

論的常態曲線圖。

i. 茲將常態曲線圖之 x 與 y 價值列下 (參看第二十圖)

$M=42$	$\sigma=19.7$	$y_0=147$
$x=$	$y=$	
$.2\sigma$	$.980 \times 147 = 144$	
$.4\sigma$	$.923 \times 147 = 136$	
$.6\sigma$	$.835 \times 147 = 123$	
$.8\sigma$	$.726 \times 147 = 107$	
1.0σ	$.606 \times 147 = 89$	
1.2σ	$.486 \times 147 = 71$	
1.4σ	$.375 \times 147 = 55$	
1.6σ	$.278 \times 147 = 41$	
1.8σ	$.197 \times 147 = 29$	
2.0σ	$.135 \times 147 = 20$	
2.2σ	$.088 \times 147 = 13$	
2.4σ	$.056 \times 147 = 8$	
2.6σ	$.034 \times 147 = 5$	
2.8σ	$.019 \times 147 = 3$	
3.0σ	$.011 \times 147 = 2$	

然用圖形比較事實之實際的分配與事實之理論的分配，只可得二圖全體配合之大概。欲知精確及局部配合，則不能不知“抽樣之標準誤”。此差誤可用下列公式求得。

$$\sigma_s = \sqrt{\frac{f(N-f)}{N}} \dots\dots\dots (14)$$

在此公式內：

σ_s = 抽樣之標準誤。

f = 理論曲線上任何點至其橫坐標上之垂線 y 。

N = 次數之總和。

茲舉例以明之：

在第二十圖橫坐標 -1σ 處，作縱線 y 與理論曲線相交於次數 89 處，又與實際曲線相交於次數 135 處。二數之差等於 $135 - 89 = 46$ 。假使理論曲線與實際曲線完全重合，則二數之差，必等於零。現在差數 46，是否太大。

按 89 為公式(14)內之 f ；又按第二十圖， $N = 1448$ 。

$$\begin{aligned} \therefore \sigma_s &= \sqrt{\frac{f(N-f)}{N}} \\ &= \sqrt{\frac{89(1448-89)}{1448}} \\ &= 9.14 \text{ (抽樣之標準誤)} \end{aligned}$$

茲解釋如下：若理論次數與實際次數之差，較三倍“抽樣之標準誤”為小，則此差誤之發現，乃由於抽樣之變動，可視之為無關緊要，而實際分差亦可以常態視之。若理論次數與實際次數之差，較三倍“抽樣之標準誤”為大，則此差誤必非由於“抽樣之變動”，而由於他種原因之影響。故此種差異，即為不配合之表示，而實際分配，不能以常態視之。

今理論次數為 89；實際次數為 135；其差為 46。此差數 46 較“抽樣之標準誤”之三倍為大（因 $3 \times 9.14 = 27.42$ ），則從 89 與 135

二點而言，第二十圖之理論曲線與實際曲線，不能配合可知，其理由非因抽樣之變動，乃由他種原因之影響。

35. 常態曲線圖下之面積推算法

在常態曲線圖之橫坐標上，若以平均點為中點，而使其價值等於 0，則此點之左右可以標準差 σ 之距離為單位，任分此線為若干段，而以 $\frac{x}{\sigma}$ 表示之。在任何 $\frac{x}{\sigma}$ 點上，立一縱線 y ，則 y 與 y_0 之間曲線下，共有多少面積（即人數多少），可從附表二得之。例如在平均點 0 與 $.4\sigma$ 之間，其面積或人數為 $\frac{1554}{10,000}$ 或 15.54%；在 0 與 $.8\sigma$ 之間，其人數或面積為 $\frac{2381}{10,000}$ 或 23.81%；在 0 與 1.0σ 之間為 $\frac{3413}{10,000}$ 或 34.13%。因圖為常態，故 0 之左右兩邊等距離內之人數亦等。如 0 至 1.2σ 內之人數為 38.49%，0 至 -1.2σ 內之人數亦為 38.49%；因之，在 $\pm 1.2\sigma$ 之間，其人數為 $2 \times 38.49 = 76.98\%$ 。

在 $\pm 2.5\sigma$ 之間，其人數為 $2 \times 49.38\% = 98.76\%$ ，以 100 減 98.76，尚餘 1.24，因之，若用 $\pm 2.5\sigma$ 為全距，尚有 1.24% 之面積或人數未經包括在內。

在 $\pm 3.0\sigma$ 之間，其所包括人數等於 $2 \times 49.86 = 99.72\%$ ，所餘下人數只有 .28%，因之，若用 $\pm 3.0\sigma$ 為全距，則全體人數幾包含無遺；故曰以 6 乘均方差可以包括量數百分之九十九有奇（見第 28 節第 (3) f）。

在橫線上任何二點之間亦可推求面積。

(例一) 求 1.6σ 與 $.9\sigma$ 間之面積，

其法如下：

$$\begin{array}{r} 0 \text{ 至 } 1.6\sigma = 44.52\% \\ 0 \text{ 至 } .9\sigma = 31.59\% \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 0 \text{ 至 } 1.6\sigma = 44.52\% \\ 0 \text{ 至 } .9\sigma = 31.59\% \end{array}} \right\} \text{相減}$$

$$\therefore .9\sigma \text{ 至 } 1.6\sigma = 12.93\%$$

(例二) 求 2.1σ 與 -1.3σ 間之面積，

其法如下：

$$\begin{array}{r} 0 \text{ 至 } 2.1\sigma = 48.21\% \\ 0 \text{ 至 } -1.3\sigma = 40.32\% \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 0 \text{ 至 } 2.1\sigma = 48.21\% \\ 0 \text{ 至 } -1.3\sigma = 40.32\% \end{array}} \right\} \text{相加}$$

$$\therefore -1.3\sigma \text{ 至 } 2.1\sigma = 88.53\%$$

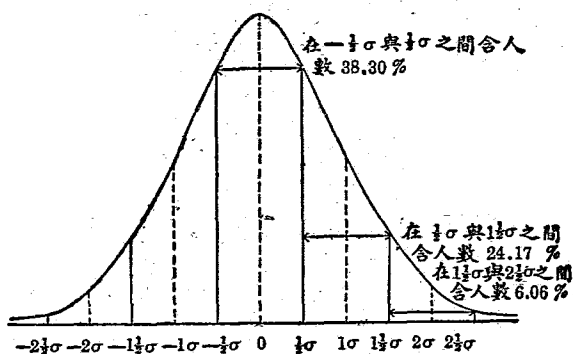
餘類推。

36. 常態曲線圖之應用

(1) 計分數時人數分配之推算法 學校教師記分，常犯各種弊病；有時分數高者人數太多，有時分數少者人數太多，有時全班分數，相差不遠；甚至一班中各得同等分數，如六十分，七十分，或八十分者。此非學生程度之整齊，實教員測驗方法之欠精，或記分手續之不周。舉行智力或學力測驗時，若人數足夠，其分配必近常態。果如是，則程度優秀者，其數必少；程度低淺者，其數亦必少，且二數或相等，而程度中等者，定佔多數。若以甲，乙，丙，

丁，戊五級，分別每班不齊之程度，則丙級之人數必居最多數，乙級丁級次之，甲級戊級又次之。苟事實不受他種不純原因之影響，其必適合此條件者無疑。

因之，吾人可利用常態分配圖，以表示此種現狀。若將橫坐標上，用標準差分之，中點左右，各為 2.5 標準差，正負共 5 標準



第二十一圖 常態曲線圖下之人數推算法

(橫線分為五段，即正負共 5σ ，每段為 1.0σ 。)

差，則以一個標準差為一段，可得五段。每段內所包括人數之百分比，可從附表二尋出。又按士 2.5σ 包括 98.76% 人數，故所遺漏者不過 1.24% 人數，似不甚多。(參看第二十一圖)。若將標準差之數展至士 3σ ，則可包括 99.72%，所遺漏者不過 .28%，更為精密。

茲將以士 2.5σ 包括全距之求法，詳述如下，餘可類推。

- a. 將常態分配之橫線分為五段如下：
- (a) $-2\frac{1}{2}\sigma$ 至 $-1\frac{1}{2}\sigma$; (b) $-1\frac{1}{2}\sigma$ 至 $-\frac{1}{2}\sigma$;
 (c) $-\frac{1}{2}\sigma$ 至 $\frac{1}{2}\sigma$; (d) $\frac{1}{2}\sigma$ 至 $1\frac{1}{2}\sigma$;
 (e) $1\frac{1}{2}\sigma$ 至 $2\frac{1}{2}\sigma$ 。
- b. 參閱附表二，0 至 $2\frac{1}{2}\sigma$ 之人數為 49.38%；0 至 $1\frac{1}{2}\sigma$ 之人數為 43.32%。二數相減，得 6.06% 為甲等之人數。
- c. 同理，乙丙丁戊各等級分數之人數可推算如下：

$$\begin{array}{r} 2\frac{1}{2}\sigma = 49.38\% \\ 1\frac{1}{2}\sigma = 43.32\% \\ \hline \text{相減} \quad 6.06\% \quad (\text{甲或戊}) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1\frac{1}{2}\sigma = 43.32\% \\ \frac{1}{2}\sigma = 19.15\% \\ \hline \text{相減} \quad 24.17\% \quad (\text{乙或丁}) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \frac{1}{2}\sigma = 19.15\% \\ \frac{1}{2}\sigma = 19.15\% \\ \hline \text{相加} \quad 38.30\% \quad (\text{丙}) \end{array}$$

分數等級	甲	乙	丙	丁	戊	} 全距 = $\pm 2.5\sigma$
每級人數之百分比 =	6.06	24.17	38.30	24.17	6.06	
或	= 7	24	38	24	7	

(2) 問題難度之斷定法 平常學校考題，常難度不同，而分數則一，或分數不同，而難度則一。問題之難易，決不能由主試者之

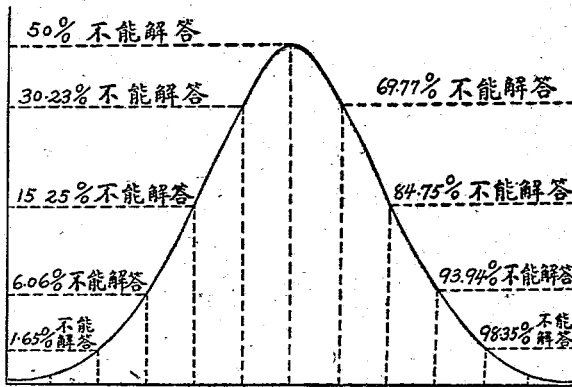
主觀的標準而定，必有一客觀的標準，此客觀的標準，即被試者本身也。如有一題，大多數被試者均不能解答，則其題必難。如有一題，被試者一半之人不能解答，則其題必難易適中；如有一題，只有一部分人不能解答，則其題必易。故每題之不能解答者人數之多少，可定其題之難易，難者應得之分數自多，易者應得之分數自少。此種分數之比較，亦決不能由主試者任意加減，必從一種客觀的研究而得。近年智力及學力測驗之試題，每問必有一定分數，如 Kansas 默讀測驗，各題之分數，有如下者：1.2; 1.2; 1.4; 1.3; 1.6; 1.7; 1.8; 1.9; 2.0; 2.1; 2.2; 2.2; 3.1; 3.5; 4.8; 8.9; 皆根據「不能解答者愈多，則分數愈多」之原則也。茲將問題難度之斷定法，詳述之。

智力與學力之測驗結果，若無不純原因之影響，其分配必屬於常態，或近於常態。在常態分配圖上，若取 $\pm 2.5\sigma$ 之距離，則所遺漏之人，不過全數之1.24%（此條已詳於36節）。若將此 $\pm 2.5\sigma$ 之距離分為十段，則每段為 $.50\sigma$ （參看第二十二圖）。

若以 $-2\frac{1}{2}\sigma$ 為起點(0)，則0至 -2σ 為 $.5\sigma$ ；0至 $-1\frac{1}{2}\sigma$ 為 1.0σ ；0至 -1σ 為 1.5σ ；其餘 σ 之距離，均可類推而得。

此十段，又可用分數表示如0,10,20,30,40……直至100。

自 $-2\frac{1}{2}\sigma$ 至 -2σ 間，只有全數之1.65%人（ $2\frac{1}{2}\sigma$ 減 2σ 或 49.38 減 $47.73=1.65\%$ ）則凡問題為1.65%人所不能解答者，其易可知，故其分數為10。



分數	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
σ 距離	0	.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
$\pm\sigma$	$-2\frac{1}{2}\sigma$	-2σ	$-1\frac{1}{2}\sigma$	1σ	$-\frac{1}{2}\sigma$	0	$\frac{1}{2}\sigma$	1σ	$1\frac{1}{2}\sigma$	2σ	$2\frac{1}{2}\sigma$

第二十二圖 問題難度之量表

(問題之難度，可由不能解答者之多少而定，不能解答者愈少，則題愈易，而分數亦愈少；不能解答者愈多，則題愈難，而分數亦愈多。)

又 $-2\frac{1}{2}\sigma$ 至 $-\frac{1}{2}\sigma$ 間，有30.23%人($2\frac{1}{2}\sigma$ 減 $\frac{1}{2}\sigma$ ，或49.38減19.15 = 30.23%)則凡問題之為30.23%人所不能解答者，其較難可知，故其分數為40。

今將第二十二圖內橫坐標之十段與其各所屬曲線內之百分人數，推算如下：

a. $2\frac{1}{2}\sigma = 49.38$

$$2\sigma = \frac{47.73}{1.65\%}$$

(問題之分數=10)

b. $2\frac{1}{2}\sigma = 49.38$

$$1\frac{1}{2}\sigma = \frac{48.32}{6.06\%}$$

(問題之分數=20)

c. $2\frac{1}{2}\sigma = 49.38$

$$\sigma = \frac{34.13}{15.25\%}$$

(問題之分數=30)

d. $2\frac{1}{2}\sigma = 49.38$

$$\frac{1}{2}\sigma = \frac{19.15}{30.23\%}$$

(問題之分數=40)

e. $2\frac{1}{2}\sigma = 49.38$

或 50%

(問題之分數=50)

f. $-2\frac{1}{2}\sigma$ 至 $\frac{1}{2}\sigma = 50 + (50 - 30.23)$

$$= 69.77\%$$

(問題之分數=60)

g. $-2\frac{1}{2}\sigma$ 至 $\sigma = 69.77 + (30.23 - 15.25)$

$$= 84.75\%$$

(問題之分數=70)

$$\begin{aligned} \text{h. } -2\frac{1}{2}\sigma \text{ 至 } 1\frac{1}{2}\sigma &= 84.75 + (15.25 - 6.06) \\ &= 93.94\% \end{aligned}$$

(問題之分數=80)

$$\begin{aligned} \text{i. } -2\frac{1}{2}\sigma \text{ 至 } 2\sigma &= 93.94 + (6.06 - 1.65) \\ &= 98.35\% \end{aligned}$$

(問題之分數=90)

$$\begin{aligned} \text{j. } -2\frac{1}{2}\sigma \text{ 至 } 2\frac{1}{2}\sigma &= 98.35 + (1.65 - 0) \\ &= 100\% \end{aligned}$$

(問題之分數=100)

問 題

1. 應用第六章問題內之分配表(東南大學十三年度公民分數)先作次數多邊圖，後加第一次與第二次之修勻。
2. 再根據此表之材料作常態曲線圖與次數多邊圖，藉作比較。
3. 試求下列範圍內之面積：
 - a. $.4\sigma$ 至 $.8\sigma$;
 - b. -1.4σ 至 $-.7\sigma$;
 - c. -1.5σ 至 1.5σ ;
 - d. 0 至 1.7σ ;
 - e. 0 至 -2.4σ 。
4. 將橫坐標上之全距離，自 -3σ 展至 3σ ，試將此線分為五段，而求每段內人數之百分比，以支配分數。

第八章 可 靠 性

37. 何謂可靠性

吾人若在無限量數之事物中，取其有限的若干量數，而求其平均數，則此平均數，苟非偶爾湊巧者，決不能與真正平均數相同；因此有限的若干量數中，若加多一量數，或減少一量數，則其平均數亦隨之變更。所謂真正平均數者，即事物之所有一切可能量數之平均數也。然欲得事物之所有一切可能量數，再進而求其真正平均數，實際上每是不可能事。平常之實得平均數，不過真正平均數之近似數耳。

由此以觀，則統計學上之問題顯矣：即平常實得之平均數，究與真正者相去遠否。易言之，即實得平均數與真正平均數之差數為何。

實得數與真正數相較，其差數愈小，則實得數之可靠愈甚；其差數愈大，則實得數之不可靠愈甚；故差數與“可靠性”相背，而與“不可靠性”相並行。

38. 可靠性之用標準差表示者

欲知實得量數之可靠性如何，應知實得量數與真正量數之差數如何。表示差數，有二種方法，一為標準差（ σ ）；一為機誤

(Probable Error, P. E.), 茲先用標準差法, 求各種平均數及差數之可靠性。

(1) 算術平均數之標準差 公式如下：

$$\sigma_M = \frac{\sigma_{dis}}{\sqrt{N}} \dots \dots \dots (15)$$

在此公式內：

σ_M = 算術平均數之標準差。

σ_{dis} = 某分配之標準差, 或 N 量數中之標準差。

N = 次數之總和。

茲舉例以明之：假設受某種測驗之學生, 共分爲若干部, 其一部之成績如下：

$$\sigma_{dis} = 14.95$$

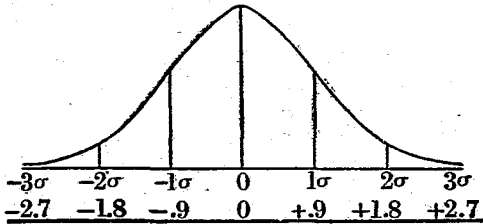
$$N = 267$$

$$M = 62.11$$

則此實得之算術平均數 ($M = 62.11$) 若非偶爾湊巧, 必不能與真正平均數脗合, 其不可靠可知。欲知其不可靠或可靠之度, 可引用下式：

$$\sigma_M = \frac{14.95}{\sqrt{267}} = \frac{14.95}{16.34} = .9$$

其意義之解釋如下 (參看第二十三圖)。



第二十三圖 實得算術平均數與真正算術平均數之差數分配圖

- a. 受某種測驗之一部分學生，其成績之算術平均數為 62.11。
- b. 此平均數 62.11 之可靠性，用標準差表示者為 .9。
- c. 假令真正算術平均數可知，則此數與 62.11 之差數以及其他許多之實得算術平均數之差數，均一一求出，則此差數之分配，必近乎常態。而上例所得之 .9 為許多實得算術平均數之標準差，亦即為許多實得算術平均數中之任何一數與真正平均數之最近乎事實之差數。
- d. 因一正負標準差含全數之 68.26%，故許多實得平均數中之 68.26% 與真正平均數之差數，不出 $-.9$ 與 $+.9$ 之外，其中之 95.46% ($\pm 2\sigma$) 與真正平均數之差數，不出 -1.8 與 $+1.8$ 之外；其中之 99.72% ($\pm 3\sigma$) 與真正平均數之差數，不出 -2.7 與 $+2.7$ 之外。
- e. 以機遇言之（參看第 40 節），則真正平均數與實得平均數 62.11 之差，能不出 .9 之外者，其機遇為 2.15 與 1 之

比；能不出 1.8 之外者，其機遇為 21 與 1 之比；能不出 2.7 之外者，其機遇為 369 與 1 之比。

更易言之，真正平均數之落在 $62.11 - 3 \times .9$ 與 $62.11 + 3 \times .9$ 之間，或落在 59.41 與 64.81 之間。其機遇之大為 369 與 1 之比；則真正平均數決不出 59.41 與 64.81 之外可知；真正平均數之落在 $62.11 - 2 \times .9$ 與 $62.11 + 2 \times .9$ 之間，或落在 60.31 與 63.91 之間，其機遇之大，為 21 與 1 之比，則真正平均數大概不出 60.31 與 63.91 之外可知；真正平均數之落在 $62.11 - .9$ 與 $62.11 + .9$ 之間，或落在 61.21 與 63.01 之間，其機遇之大，為 2.15 與 1 之比，則真正平均數之勉強可不出 61.21 與 63.01 之外可知。

(2) 中數之標準差 公式如下：

$$\sigma_{Md_n} = \frac{1.25\sigma_{dis}}{\sqrt{N}} \dots\dots\dots (16)$$

此公式之意義，可依照公式(15)類推。

(3) 可靠性之計算 不僅限於平均數；即 σ ，或兩數之差數，或相關數，均可計算可靠性或不可靠性。標準差之標準差，公式如下，其意義亦可類推。

$$\sigma_{\sigma} = \frac{\sigma_{dis}}{\sqrt{2N}} \dots\dots\dots (17)$$

(4) 二數差數之標準差 公式如下：

$$\sigma_{diff} = \sqrt{(\sigma_x)^2 + (\sigma_y)^2} \dots \dots \dots (18)$$

設有一真正平均數為 x ，又一真正平均數為 y ，則此 x 與 y 之相差為真正差數。其餘無數之 x 與 y 之相差數，均是實得而非真正者。但此無數之實得差數，與此真正差數相較而得許多差數，亦可依常態分配排列，茲特舉例以明之。

設有甲乙二班，用二種不同教授法教授之，半年後，甲班 144 人之平均進步為 80，其標準差為 9；乙班 169 人之平均進步為 70，其標準差為 6；則二種方法所得進步之差為 $80 - 70 = 10$ ，然此二數之差，是否可靠，設此試驗重複行之，其結果是否與 10 相去不遠，抑大相徑庭。茲將算法詳下：

設甲班平均進步 $80 = x$

乙班平均進步 $70 = y$

x 與 y 之差數 $10 = \text{diff}$ ，則

$$\sigma_x = \frac{9}{\sqrt{144}} = .75$$

$$\sigma_y = \frac{6}{\sqrt{169}} = .46$$

$$\begin{aligned} \therefore \sigma_{diff} &= \sqrt{(.75)^2 + (.46)^2} \\ &= .88 \end{aligned}$$

其意義即甲班與乙班各班平均進步之真正相差，不出 $10 \pm .88$ 之外，或不出 9.12 與 10.88 之外者，其機遇為 2.15 與 1 之比；不

出 $10-2 \times .88$ 與 $10+2 \times .88$ 之外，或不出 8.24 與 11.76 之外者，其機遇之大為 21 與 1 之比；不出 $10-3 \times .88$ 與 $10+3 \times .88$ 之外，或不出 7.36 與 12.64 之外者，其機遇之大為 369 與 1 之比。

(5) 相關係數之標準差(先讀第九章，回讀此節) 公式如下：

$$\sigma_r = \frac{1-r^2}{\sqrt{N}} \dots \dots \dots (19)$$

在此公式內， r = 相關係數。

39. 可靠性之用機誤表示者

何謂“機誤”？機誤之原名為 Probable Error, 或 P. E.。在一常態分配圖內，機誤(P. E.)與四分位差(Q)本相同，即自橫坐標中點至 $\pm Q$ 或 $\pm P. E.$ 之距離各含有百分之二十五人數，或 $\pm P. E.$ 含百分之五十人數。惟 Q 已採為差數之用，而 P. E. 則用以度量可靠性，此二者之分也。P. E. 與 σ 之關係可述之如下：

$$P. E. = .67449 \sigma$$

其求法詳於附表二。在此表內，可依面積之大小，而求 σ 之大小。

今既知 P. E. 含有面積之 25%，則面積 25% 處之 σ 即 P. E. 用 σ 表示之價值，照表推算即得。

茲將可靠性之用標準差表示者再用 P. E. 表示之如下：

$$(1) P. E. = .67449 \frac{\sigma_{dis}}{\sqrt{N}} \dots \dots \dots (20)$$

$$(2) P. E. \cdot \sigma_{\bar{m}} = .84535 \frac{\sigma_{dx}}{\sqrt{N}} \dots\dots\dots (21)$$

$$(3) P. E. \cdot \sigma = .67449 \frac{\sigma_{dx}}{\sqrt{2N}} \dots\dots\dots (22)$$

$$(4) P. E. \cdot r = .67449 \frac{1-r^2}{\sqrt{N}} \dots\dots\dots (23)$$

40. 何謂機遇

袋內藏黑白球各一百，掩目取之，則所得之球，非黑即白，故得黑球或白球之機遇為 1 與 1 之比。若袋內藏黑球二百，白球一百，則得黑球之機遇為 2，得白球之機遇為 1，其比為 2 與 1，即得黑球之機遇，較得白球者多一倍。若袋內藏黑球九百，白球一百，則其比為 9 與 1。即得黑球之機遇極多而得白球之機遇極少。若袋內藏黑球九百九十，白球一十，其比為 99 與 1，即得黑球之機遇更大，得白球之機遇更微。

統計學中，常用此種機遇 (chances) 以表示事實之可有 (probable) 與否。有二法焉。一以標準差表示之；一以機誤表示之。如在一常態分配圖內，在士 σ 之間共有 68.26% 人數，尚餘 31.74% 人數，則在士 σ 內之事實，其可有之機遇為 2.15，其不可有之機遇為 1，此謂 2.15 與 1 之機遇。在士 P. E. 之間，共有 50% 人數，尚餘 50% 人數，則在士 P. E. 內之事實，其可有之機遇為 1，其不可有之機遇亦為 1，此謂 1 與 1 之機遇。茲將二種計算機遇之方式列下：

(1) 機遇之用標準差表示者

$\pm 1\sigma$ 爲 2.15 與 1 之機遇

$\pm 2\sigma$ 爲 21 與 1 之機遇

$\pm 3\sigma$ 爲 369 與 1 之機遇

$\pm 4\sigma$ 爲 12819 與 1 之機遇

$\pm 5\sigma$ 爲 174398 與 1 之機遇

(2) 機遇之用機誤表示者

$\pm 1 P. E.$ 爲 1 與 1 之機遇

$\pm 2 P. E.$ 爲 4.6 與 1 之機遇

$\pm 3 P. E.$ 爲 22 與 1 之機遇

$\pm 4 P. E.$ 爲 142 與 1 之機遇

$\pm 5 P. E.$ 爲 1315 與 1 之機遇

$\pm 6 P. E.$ 爲 19200 與 1 之機遇

問 題

1. 試求下列 (a)(b)(c) 之算術平均數，與標準差之可靠性。

(用標準差表示者)

(a) $M=12, \sigma_{\bar{x}}=2, N=18$

(b) $M=13, \sigma_{\bar{x}}=3, N=20$

(c) $M=14, \sigma_{\bar{x}}=4, N=25$

2. 試根據第一問題內之 (a) 與 (b) 事實而求二數相差之可靠性。

3. 試求下列 (a)(b)(c) 之相關係數之機誤：

$$(a) \quad r = .56, \quad N = 160$$

$$(d) \quad r = .60, \quad N = 200$$

$$(e) \quad r = .95, \quad N = 500$$

* 讀第九章後，再回算此項問題。

第 九 章 相 關

41. 何謂相關

前數章所述各法，如集中趨勢法，離中趨勢法等，皆從一種事實上研究其特性。然宇宙間事物，千態萬類，彼此雜陳，每每互生關係，或此消彼長，或此長彼消，或彼此消長相共。凡此種種，均有研究之價值。茲就教育問題上，略舉數條，藉資說明，(1) 品行端正者，其學業是否亦優美？(2) 今日之好學生，是否即他日之良公民？(3) 學校所教之功課，是否即社會所需要之工具？(4) 國文程度高深者，其英文程度是否亦高深？(5) 智力高者，學力是否亦高？(6) 善跳者是否善跑？(7) 善琴者是否善畫？(8) 身長者是否體重？問題之如此者，不勝枚舉，而皆不外彼此相關之問題。相關之定義，可約舉如下：若有二種數量，其一種之各數量增多或減少時，其又一種之各數量亦隨之增多或減少（或相反），且一種之各數量之變度漸大時，其又一種之各數量之變度亦隨之漸大，此之謂相關。*

故欲求相關，必具兩類事實；且此兩類事實之各數量，必雙雙相對，稱曰對偶量數（參看第二十三表）。

* Bowley, A. L.: Elements of Statistics, p 316.

第二十三表 某校某級二十四個學生歷史與地理分數分配表

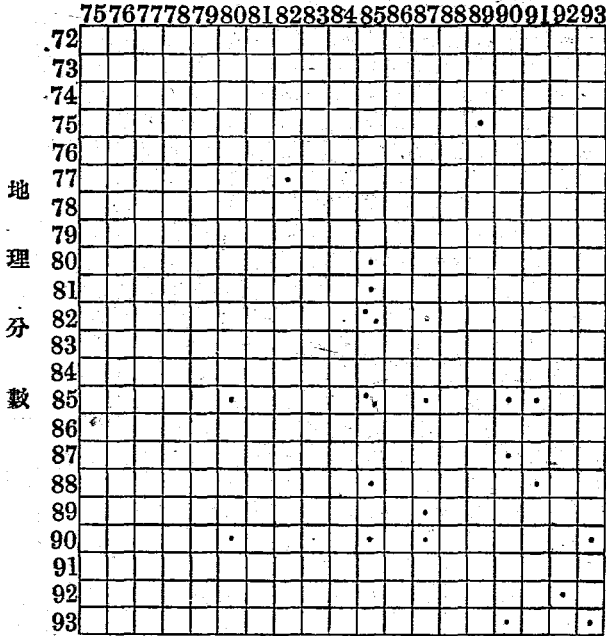
學 生	歷史分數	地理分數	學 生	歷史分數	地理分數
1	92	92	13	75	72
2	90	93	14	85	85
3	90	85	15	80	85
4	85	81	16	85	82
5	87	89	17	85	82
6	87	90	18	90	87
7	85	88	19	91	85
8	93	90	20	85	80
9	91	88	21	80	90
10	85	90	22	87	85
11	85	85	23	82	77
12	89	75	24	93	93

在此表內，歷史與地理分數爲二類事實，每生各有二種分數，爲對偶量數；如 92 與 92；90 與 93；90 與 85 等。今相關所研究之問題，即歷史分數漸大時，地理分數是否隨之漸大，抑反而漸小，抑兩不相關。

42. 用分布圖表示相關法

欲斷定此二類分數之相關與否，可採用二種方法，即圖示法與算法；算法自較精確，然圖示法亦可得其趨勢，茲先將第二十三表之事實用第二十四圖表示之。

歷 史 分 數



第二十四圖 用分布圖表示相關法 (根據第二十三表)

第二十四圖，為一種分布圖，上橫界線，自左至右，代表歷史分數，由小而大；左縱界線，自上至下，代表地理分數由小而大。作圖時先看第二十三表之第一個學生其歷史分數為92，又其地理分數亦為92，故在橫界線上標明92之縱行與左縱界線上標明92之

橫行相交切之一格內作一點，假定各點均集中於格之中點。餘點作法仿此。

吾人若一覽此圖各點之分布，雖不能立斷歷史與地理分數相關之度數，然可略知關係之存在，即歷史分數漸大時，地理分數亦有隨而漸大之趨勢。惟有數點其趨勢反是，如第十二學生之歷史分數 89 與地理分數 75，又第二十一學生之歷史分數 80 與地理分數 90 之二交切點，似與大眾趨勢，不相一致。

43. 相關之種類

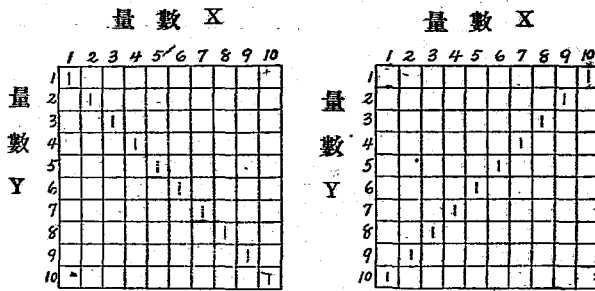
相關之種數有二，列之如下：

(1) 正相關 若一種量數由小而大，他種量數亦隨之由小而大，則其相關為正相關。如燕度之增高與鐵條之漲大是。燕度愈高則鐵條愈大。

(2) 負相關 若一種量數由小而大，他種量數反由大而小，則其相關為負相關，如壓力與容量是。壓力愈大，則容量愈小。

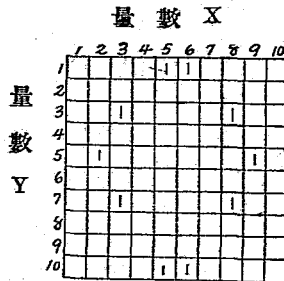
若一種量數由小而大，他種量數，或大或小，毫無一定趨勢，不稍受第一種量數之影響者，是謂之零相關。如貌之美醜與學之優劣是。蓋貌之美者，其學或優或劣；貌之醜者亦然。

茲將二種相關情形用第二十五圖之 (a)(b) 表示之。(c) 圖表示零相關之現象。



(a) 完全正相關

(b) 完全負相關



(c) 零相關

第二十五圖 表示三種不同之相關

在(a)圖, $r=1.00$

在(b)圖, $r=-1.00$

在(c)圖, $r=0$

44. 相關係數之意義

相關之意義及種類已如上述。然兩種量數相關之多少，必有確

實之數字以表示之，否則不足以知相關之實情。相關係數者，即二種量數總相關之指數也。

兩種量數完全正相關時，其相關係數可定為 $+1$ ；兩種量數完全負相關時，其相關係數為 -1 ；兩種量數不相關時，則相關係數為 0 。故自 -1 至 $+1$ ；可得相關係數之種種等級。就事實言， $+1$ ， -1 及 0 不可多得。實際上緊要之問題，即相關之程度，宜根據何種標準；例如 ± 0.65 之相關係數，是否應視為高； ± 0.35 之相關係數，是否應視為低。研究教育者，對此意見紛歧，且所研究事實之性質，亦有關係。有時 ± 0.65 之係數在某二類事實上，應視為高，而在他二類事實上，則視為低。茲將麥柯爾 (Wm. A. McCall) 所定之標準錄下：

- * 0 至 ± 0.4 表示相關之低者，
- ± 0.4 至 ± 0.7 表示相關之切實者，
- ± 0.7 至 ± 1.0 表示相關之高者。

但相關係數之高低，須視量數總和之大小。大概量數愈大，則係數愈可靠，稍低亦無妨。

* McCall, W. A.: *How to Measure in Education*, p. 393.

45. 相關係數之求法

相關之情形有二；一為直線性相關，即吾人若將二類相關之事實用圖表示，其相關趨勢，可用直線代表；一為非直線性相關，即吾人若將二類相關之事實用圖表示，其相關趨勢，可用曲線代表。教育上之事實多屬於直線性相關，故本書所討論各種相關數求法，以屬於直線性者為限。

(1) 積差相關之求法 積差相關法 (productmoment)。其公式為英人皮而生所求得，並為求直線性相關法之最完美者，茲分條述之。

a. 通常求法 皮而生之求積差相關公式如下：

$$r = \frac{\sum x.y}{\sqrt{\sum x^2} \sqrt{\sum y^2}} \dots \dots \dots (24)$$

在此公式內：

r = 皮而生相關係數之符號 (coefficient of correlation) ，

x = X 行之任何量數與諸 X 量數之平均數之差數，

y = Y 行之任何量數與諸 Y 量數之平均數之差數。

公式(24)亦可用下式表示之：

$$r = \frac{\sum x.y}{N \sigma_x \sigma_y} \dots \dots \dots (24a)$$

茲將應用公式(24)之算式列在第二十四表內。

第二十四表 積差相關之通常求法

(根據第二十三表材料)

個人	X	Y	x	y	x ²	y ²	+xy	-xy
1	92	92	+ 5	+ 7	25	49	35	
2	90	93	+ 3	+ 8	9	64	24	
3	90	85	+ 3	0	9	0		
4	85	81	- 2	- 4	4	16	8	
5	87	89	0	+ 4	0	16		
6	87	90	0	+ 5	0	25		
7	85	88	- 2	+ 3	4	9		- 6
8	93	90	+ 6	+ 5	36	25	30	
9	91	88	+ 4	+ 3	16	9	12	
10	85	90	- 2	+ 5	4	25		-10
11	85	85	- 2	0	4			
12	89	75	+ 2	-10	4	100		-20
13	75	72	-12	-13	144	169	156	
14	85	85	- 2	0	4	0		
15	80	85	- 7	0	49	0		
16	85	82	- 2	- 3	4	9	6	
17	85	82	- 2	- 3	4	9	6	
18	90	87	+ 3	+ 2	9	4	6	
19	91	85	+ 4	0	16	0		
20	85	80	- 2	- 5	4	25	10	
21	80	90	- 7	+ 5	49	25		-35
22	87	85	0	0	0	0		
23	82	77	- 5	- 8	25	64	40	
24	93	93	+ 6	+ 8	36	64	48	

$M=87, M=85$

459 707 381 -71

$$r = \frac{381-71}{\sqrt{459} \sqrt{707}}$$

$$P.E.r = .67449 \frac{1-.544^2}{\sqrt{24}}$$

$$= \frac{310}{21.424 \times 26.689}$$

= .097

= .544

∴ $r = .544 \pm .097$

法次如下：

1. 在第二十四表內，第一行 1, 2, 3, 4, 5 等數字代表學生；
X 行代表歷史分數；Y 行代表地理分數。
2. 求 X 行之實得算術平均數得 87；Y 行之實得算術平均數得 85。
3. 將 X 行各量數與平均數 87 之差數，寫在 x 行內；量數較平均數大者，左面作正(+)小者作負(-)之符號。
4. Y 行算法相同。
5. 求 x^2 ，并得其和；求 y^2 ，并得其和；求 $+xy$ ，并得其和；求 $-xy$ ，并得其和。
6. 將所得之數代入公式(24)即得 $r = .544$ 。
7. 此相關係數 .544 之可靠程度，可從公式(23)尋出，即 $P.E.r = .097$ 。初學者凡求相關係數時，宜慣用第二十四表之寫法，即 $r = .544 \pm .097$ 。

b. 簡捷求法 簡捷求法之原則，與通常求法之原則無異，惟其公式之寫法，稍有不同耳。其公式如下：

$$r = \frac{\Sigma(\xi, \eta) - N\delta_x \delta_y}{N \sqrt{\frac{\Sigma f \xi^2}{N} - \delta_x^2} \sqrt{\frac{\Sigma f \eta^2}{N} - \delta_y^2}} \dots\dots\dots (24b)$$

在此公式內：

ξ = X 行之任何量數與假定平均數之差數。

η = Y 行之任何量數與假定平均數之差數。

$\delta_x = X$ 行假定平均數之校正數。

$\delta_y = Y$ 行假定平均數之校正數。

若用公式(24)則凡實得平均數非整數時，其差數常有小數，乘除極費時力，故用公式(24b)可以節省一切。茲用第二十五表之算式說明之。

第二十五表 積差相關之簡捷求法

(根據東南大學十三年度錄取新生中任取二十四名之理化生物分數)

理化	生物	ξ	η	ξ^2	η^2	$+\xi\eta$	$-\xi\eta$
31	48	-9	8	81	64		-72
40	45	0	5	0	25		
40	36	0	-4	0	16		
57	49	17	9	289	81	153	
48	57	8	17	64	289	136	
54	54	14	14	196	196	196	
41	55	1	15	1	225	15	
44	25	4	-15	16	225		-60
46	46	6	6	36	36	36	
57	31	17	-9	289	81		-153
64	47	24	7	576	49	168	
61	64	21	24	441	576	504	
60	46	20	6	400	36	120	
47	37	7	-3	49	9		-21
51	26	11	-14	121	196		-154
43	62	3	22	9	484	66	
57	58	17	18	289	324	306	
65	29	25	-11	625	121		-275
36	40	-4	0	16	0		
73	48	33	8	1089	64	264	
48	55	8	15	64	225	120	
46	51	6	11	36	121	66	
27	46	-13	6	169	36		-78
51	54	11	14	121	196	154	

40 =	40 =	253	205	4977	3675	2304	-813
假定	假定	-26	-56				
平均	平均	227	149				
數	數						

$$\delta_x = \frac{227}{24} = 9.4 \quad \therefore \delta_x^2 = 9.4^2 = 88.36$$

$$\delta_y = \frac{149}{24} = 6.2 \quad \therefore \delta_y^2 = 6.2^2 = 38.44$$

$$\frac{\sum f \varepsilon^2}{N} = \frac{4977}{24}; \quad \frac{\sum f \eta^2}{N} = \frac{3675}{24}; \quad \sum \varepsilon \eta = 2304 - 813$$

$$\begin{aligned} \therefore r &= \frac{(2304 - 813) - 24(9.4)(6.2)}{24 \sqrt{\frac{4977}{24} - 88.36} \sqrt{\frac{3675}{24} - 38.44}} \\ &= \frac{92.28}{2803.68} = .03 \pm .13 \end{aligned}$$

c. 分布圖求法 求相關時若對偶量數繁多，則 a, b 二法，均感不便，宜用分布圖法以減困難，按公式(24b)：

$$r = \frac{\sum(\varepsilon \eta) - N \delta_x \delta_y}{N \sqrt{\frac{\sum f \varepsilon^2}{N} - \delta_x^2} \sqrt{\frac{\sum f \eta^2}{N} - \delta_y^2}}$$

上式以 N 除之。

$$\text{則 } r = \frac{\frac{\sum(\varepsilon \eta)}{N} - \delta_x \delta_y}{\sqrt{\frac{\sum f \varepsilon^2}{N} - \delta_x^2} \sqrt{\frac{\sum f \eta^2}{N} - \delta_y^2}} \quad \text{或} \dots\dots\dots (24c)$$

$$r = \frac{\frac{\sum(\varepsilon \eta)}{N} - \delta_x \delta_y}{\sigma_x \sigma_y} \dots\dots\dots (24d)$$

茲將公式(24c)或(24d)之應用，用下列二例說明之。

例一 事實簡單不分組距者 若事實不甚多，或全距離不大者，則縱行及橫行，可用原來量數為單位，不必另用組距；且每格內之次數，可用劃記，不必改作數字，（參看第二十六表及第二十六圖）。

第 二 十 六 表

某校某級學生各科總平均分數與英文平均分數之分配表

學 生	各 科 總平均	英文平均	學 生	各 科 總平均	英文平均
1	84	78	22	87	83
2	75	79	23	77	76
3	83	81	24	84	84
4	79	83	25	87	85
5	83	74	26	85	86
6	78	77	27	87	82
7	88	83	28	84	78
8	89	88	29	80	80
9	85	85	30	84	78
10	86	85	31	84	83
11	86	83	32	88	85
12	77	78	33	87	88
13	82	73	34	83	80
14	79	75	35	78	77
15	84	81	36	81	77
16	87	83	37	83	84
17	84	82	38	85	84
18	84	83	39	80	83
19	86	83	40	84	78
20	82	83	41	81	79
21	85	80	41		

法次如下：

- a. 作分配圖，橫行 X 自左至右，代表各科總平均分數之由小而大；縱行 Y 自上而下，代表英文平均分數之由小而大。圖之大小，應視材料之多少而定。每一格為一單位（或每一格為一組距）。
 - b. 將每個學生之二種分數交切點，作一劃記於方格內。如是，則劃記作成後，可一覽而知相關之趨勢。
 - c. 求縱行 Y 各量數（英文平均分數）之次數，而將其總數書於 f_y 行之下為 41。再求橫行 X 各量數（各科總平均分數）之次數，而將其總數書於 f_x 行之後為 41（二總數必相同）。
 - d. 用 84 為橫行 X 各量數之假定平均數，作二縱線，使此行特別顯著。用 83 為縱行 Y 各量數之假定平均數，作二橫線，使此行特別顯著。
 - e. η 行為 Y 行各量數之差數； ξ 行為 X 行各量數之差數。
 - f. 求次數乘差數 $f\eta$ 之總數為 -76；求次數乘差數方 $f\eta^2$ 之總數為 674。再求 $f.\xi$ 之總數為 -29； $f.\xi^2$ 之總數為 481。
- $\xi\eta$ 之求法如下：先將第二十六圖依所假定之 X 與 Y 之兩平均數分為四方如下：乃看 X 行之分數 82 與 Y 行



之分數 73 交切點。此點代表 73 與 82 二數，故對 Y 行言，其差數為 -10，對 X 行言，其差數為 -2。以 -2 乘 -10 得 20 書於 $\Sigma \xi \eta$ 行之下。

此四方中右上一方 $x = +, y = -$ ，意即在此方內之劃記，其 X 差數皆為正者，（量數較假定平均數為大）其 Y 差數皆為負者（量數較假定平均數為小）。

X = -	X = +
Y = -	Y = -
X = -	X = +
Y = +	Y = +

再看 Y 行 77 之橫行上三個劃記。Y 行之 77 與 X 行之 78 有二個交切點。以次數 2 乘 Y 行差數 -6 得 -12，再乘 X 行差數 -6 得 72。然 Y 行 77 與 X 行 81 尚有一交切點，其二差數 $(-6) \times (-3) = 18$ 。72 + 18 = 90；將此數寫於 $\Sigma \xi \eta$ 行之下。

再看 Y 行 80 之橫行上三個劃記。第一為 X 行 80 與 Y 行 80 之交切點，其差數 $(-3) \times (-4) = 12$ ，第二為 X 行 83 與 Y 行 80 之交切點，其差數 $(-3) \times (-1) = 3$ ；第三為 X 行 85 與 Y 行 80 之交切點，其差數 $(-3) \times 1$

$= -3$ 。故 $12+3-3=12$ ，寫於 $\Sigma\xi\eta$ 行之下，餘類推。

- h. 求 $\Sigma\xi\eta$ 得 365。
- i. 求 X 行量數之校正數，得 $\delta_x = -.71$ ，自乘得 $\delta_x^2 = .5041$ 。
- 求 Y 行量數之校正數，得 $\delta_y = -1.85$ ，自乘得 $\delta_y^2 = 3.4225$ 。
- j. 求 X 行各量數之標準差，得 $\sigma_x = 3.35$ 。
- 求 Y 行各量數之標準差，得 $\sigma_y = 3.60$ 。
- k. 二校正數自乘得 $\delta_x\delta_y = 1.3135$ 。

l. $\frac{\Sigma\xi\eta}{N} = \frac{365}{41} = 8.9$

- m. 將以上所得各數，代入公式(24a)或(24a)。

得 $r = \frac{8.9 - 1.3135}{3.35 \times 3.60} = .629$

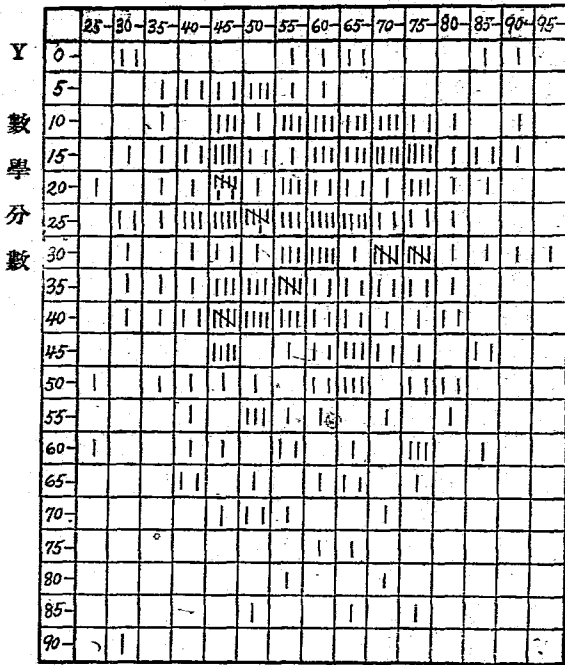
n. 機誤 $= .67449 \frac{1 - (.629)^2}{\sqrt{41}} = \pm .063$

故 $r = .629 \pm .063$

例二 事實繁多已分組距者 若事實繁多，則宜以組距為單位，且宜用二步手續；第一步用劃記法將對偶量數填入分布圖內；第二步將劃記改成數字填入另一分布圖。

茲用第二十七圖及第二十八圖說明之。（法次與例一同，從略。）

X 英 文 分 數



第二十七圖 用分布圖求相關之劃記法

(根據東南大學十三年度錄取新生之英文分數與數學分數)

X 英文分數

Y	85	80	75	70	65	60	55	50	45	40	35	30	25	20	15	10	5	f_y	η	$f\eta$	$f\eta^2$	$\sum \xi\eta$	$-\sum \xi\eta$
0																		8	-6	-48	288		
5			1	2	3	1	1											10	-5	-50	250	190	
10			1	3	3	3	3	2	1	1								21	-4	-84	336		-24
15		1	2	4	2	1	3	4	4	1	2	1						29	-3	-87	261		-21
20		1	1	1	1	3	2	1	3	1	1							24	-2	-48	96	40	
25		2	1	3	4	6	3	4	4	2	2	1						32	-1	-32	32	38	
30		1	1	2	1	3	4	1	5	5	1	1	1	1				27	0	-349			
35			1	1	3	3	5	2	2	2	1							23	1	23	23		-19
40			1	1	2	5	4	3	2	2	1	1	2					24	2	48	96		-60
45					4	4	1	2	3	2	1	2						15	3	45	135	21	
50		1	1	1	1	1	2	3	2	2								14	4	56	224		-19
55				1	3	1	1	1	1	1								8	5	40	200		-25
60				1	1	1	2	1	1	3	1	1						10	6	60	360		-6
65				2	1	1	1	2	1	1								7	7	49	343		-35
70						1	2	1	1	1								5	8	40	320		-48
75							1	1	1	1								3	9	18	162	9	
80							1	1	1	1								2	0	20	200	10	
85							1	1	1	1								3	1	33	363	22	
90																		1	12	12	144		-72
Σ	3	9	8	17	27	27	27	29	26	23	27	11	8	4	1			95	444	3833	+270	-326	

$$\delta_x = -109 \div 265 = -.4113 \quad \therefore \delta_x^2 = .169168$$

$$\delta_y = 95 \div 265 = .36 \quad \therefore \delta_y^2 = .1296$$

$$\delta_x \delta_y = (-.4113 \times .36) = -.14807$$

$$\sigma_x^2 = (2355 \div 265) - .169168 = 8.7176 \quad \therefore \sigma_x = 2.95$$

$$\sigma_y^2 = (3833 \div 265) - .1296 = 14.3346 \quad \therefore \sigma_y = 3.78$$

$$\frac{\sum \xi\eta}{N} = \frac{270 - 326}{265} = -.2113$$

$$\therefore r = \frac{(-.2113) - (-.14807)}{2.95 \times 3.78} = -.0057 \pm .0413$$

第二十八圖 例二 用分布圖求相關之方法(根據第二十七圖材料)



(2) 等級相關之求法 教師評定成績，若不用分數，而以程度之優劣排列等級，如第一，第二，第三等者，則求相關，可用英人司畢門 (Spearman) 之公式。

a. 司畢門等級相關法

公式如下：

$$\rho = 1 - \frac{6\sum D^2}{N(N^2 - 1)} \dots\dots\dots (25)$$

在此公式內：

ρ (讀 Rho) = 司畢門等級相關係數之符號，猶皮而生之用 r 為積差相關係數之符號然。惟 ρ 較 r 之價值稍小耳 (ρ 之價值可直接改為 r 之價值) (參看附表四)。

$D = X$ 與 Y 次第之差數。

$N =$ 次數之總和。

例一：若二類事實之評定用等級方法者，其算法詳如第二十七表。

第二十七表 司畢門等級相關之求法

學生	等級 X (物理)	等級 Y (化學)	D	D ²
A	1	3	2	4
B	2	1	1	1
C	3	4	1	1
D	4	2	2	4
E	5	6	1	1
F	6	7	1	1
G	7	8	1	1
H	8	5	3	9
I	9	9	0	0
J	10	10	0	0
K	11	13	2	4
L	12	11	1	1
M	13	12	1	1
N	14	14	0	0
O	15	16	1	1
P	16	15	1	1

N=16

N=16

 $\Sigma D^2=30$

$$\rho = 1 - \frac{6\Sigma D^2}{N(N^2-1)} = 1 - \frac{6 \times 30}{16(16^2-1)} = .956$$

若 $\rho = .956$ ，則 $r = .960$ (參看附表四)

例二：若材料為分數者，則在用司畢門等級相關法以前，宜先將分數改為等級，其法次如下：

在第二十八表內，將 X 行各分數中之最大者，42 改為等級“1”，次大者 39 改為“2”，又次者 33 改為“3”，31 改為“4”，29 改為“5”，28 改為“6”，27 改為“7”。惟 25 共有二個，而佔“8”與“9”之位置。故二個 25 各改為第“8.5” (即 $\frac{8+9}{2} = 8.5$)。又如 Y 行 4 共有

三個，而佔“9”，“10”，“11”之位置。故三個4各改爲第“10”
 (即 $\frac{9+10+11}{3}=10$)，餘類推(見第二十八表)。

第二十八表 先改分數爲等級再用司畢門等級相關法

學 生	X (第一類 分數)	Y (第二類 分數)	X' (第一類 等級)	Y' (第二類 等級)	D	D ²
A	39	5	2	5.5	3.5	12.25
B	23	2	11	15	4	16
C	29	7	5	1	4	16
D	27	4	7	10	3	9
E	20	3	13	13.5	.5	.25
F	28	6	6	2.5	3.5	12.25
G	42	5	1	5.5	4.5	20.25
H	33	6	3	2.5	.5	.25
I	25	5	8.5	5.5	3	9
J	19	4	14	10	4	16
K	24	4	10	10	0	0
L	25	4	8.5	10	1.5	2.25
M	31	5	4	5.5	1.5	2.25
N	22	4	12	10	2	4
O	17	3	15	13.5	1.5	2.25

N=15 N=15 N=15 N=15 $\Sigma D^2=122$

$$\rho = 1 - \frac{6 \times 122}{15(15^2 - 1)} = .782$$

若 $\rho = .782$

則 $r = .796$ (參看附表四)

司畢門等級相關之優點，即易於計算，然不若皮而生積差相差方法之真確。大約對偶量數在三十對左右者，尚可用司畢門之方法。多則宜用皮而生之方法。

b. 司畢門簡捷法 其公式如下：

$$R = 1 - \frac{6\Sigma G}{N^2 - 1} \dots\dots\dots (26)$$

在此公式內：

R = 司畢門之簡捷法相關係數之符號，其價值較 r 為大（參看附表五）。

G (Gains) = Y 量數之次第大於 X 量數之次第（或 X 量數大於 Y 量數亦可）。算式見第二十九表。

第二十九表 司畢門求等級相關之簡捷法

學 生	等 級 X	等 級 Y	G (Y 大於 X)
A	1	3	2
B	2	1	
C	3	2	
D	4	6	2
E	5	4	
F	6	7	1
G	7	5	
H	8	9	1
I	9	8	
J	10	11	1
K	11	12	1
L	12	10	

N=12

N=12

ΣG=8

$$R = 1 - \frac{6\Sigma G}{N^2 - 1} = 1 - \frac{6 \times 8}{144 - 1}$$

$$= .664$$

若 $R = .664$ ，則 $r = .378$ （參看附表五）

(3) 異號相關之求法 求相關係數之最迅捷但不甚精確之方法，為異號相關之方法。其公式為英人薛伯 (Sheppard) 所求得，舉之如下：

$$U = \frac{u + \left(\frac{u+l}{2} + \frac{1}{2} \right) d}{N} \dots \dots \dots (27)$$

在此公式內：

U = 薛伯異號相關係數之符號，其價值適與 r 之價值相反（參看附表六）。

l = 每雙對偶量數之差數符號相同者，如++及--。

u = 符號相異者，如+-。

d = 符號如下列者：00；+0；0+；-0；0-。

茲舉例以明之（參看第三十二表）。

第三十表 薛伯異號相關之求法

學生	X	Y	x	y
A	3	13	-	-
B	5	14	-	-
C	5	13	-	-
D	7	17	-	0
E	10	18	-	+
F	12	18	0	+
G	13	17	+	0
H	14	19	+	+
I	18	20	+	+
J	24	16	+	-
K	21	22	+	+

$$N=11 \quad M=12 \quad M=17$$

$$N=11 \quad l=6$$

$$u=2 \quad d=3$$

$$U = \frac{u + \left(\frac{u + l + 1}{2} \right) d}{N} = \frac{2 + \left(\frac{2 + 6 + 1}{2} \right) 3}{11}$$

$$= \frac{2 + (.375 \times 3)}{11} = .284$$

若 $U = .284$ ，則 $r = .628$ (參看附表六)

46. 迴歸方程及迴歸線

相關係數，乃用幾個數字，表示甲乙二物之關係，使常人見



之，亦能明其意義。然分析言之，甲物對於乙物，其影響多少？乙物對於甲物其影響多少？二者是否相等，否則，孰為較大？此種問題實較重要，然均非相關係數所能解答。

迴歸方程(Regression Equation)能分析甲乙二物彼此互施不同之影響。惟其意義較深，算法較繁。

茲將皮而生之迴歸方程式列下：

$$X - \bar{X} = r \frac{\sigma_x}{\sigma_y} (Y - \bar{Y}) \dots\dots\dots (28)$$

$$Y - \bar{Y} = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (X - \bar{X}) \dots\dots\dots (28a)$$

在此公式內：

\bar{X} = 實得平均數 M_x ；

X = 任何量數 X 。

\bar{Y} = 實得平均數 M_y ；

Y = 任何量數 Y 。

r = X 及 Y 二類量數之相關係數。

σ_x 及 σ_y = X 量數及 Y 量數之標準差。

以上方程式，亦可作以下寫法：

$$x = r \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \cdot y \dots\dots\dots (29)$$

$$y = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \cdot x \dots\dots\dots (29a)$$

在此二方程式內：

x = 任何量數 X 與實得平均數 \bar{X} 之差數；

y = 任何量數 Y 與實得平均數 \bar{Y} 之差數。

從公式(28) (28a)，可得

$$\frac{x}{y} = r \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \qquad \frac{y}{x} = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

惟上二式，有時亦作以下寫法，謂之迴歸係數。

$$b_1 = r \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \dots\dots\dots (30)$$

$$b_2 = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \dots\dots\dots (30a)$$

在此二公式內：

b_1 表示 x 向 y 之傾斜度 (slope) 或差數 x 與差數 y 之比例，即當 Y 量數有一單位差 (deviation) 時， X 量數有多少差。

b_2 表示 y 向 x 之傾斜度或差數 y 與差數 x 之比例，即當 X 量數有一單位差時， Y 量數有多少差。

公式(29) (29a)亦可作以下寫法：

$$x = b_1 y \dots\dots\dots (31)$$

$$y = b_2 x \dots\dots\dots (31a)$$

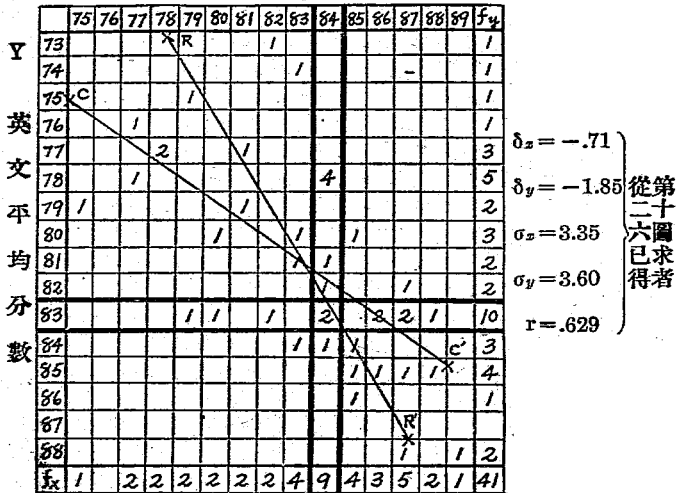
假令 $x = .72y$, $y = .35x$,

其意即凡 Y 量數有一單位差 y 時，則 X 量數之差 x 當佔 y 之 .72。

或凡 X 量數有一單位差 x 時，則 Y 量數之差 y ，當佔 x 之 .35。

茲將作迴歸線之方法，用第二十九圖說明之。

X 各 科 總 平 均 分 數



$M_x = 84.5 + (-.71) = 83.79$; $M_y = 83.5 + (-1.85) = 81.65$.

$b_1 = r \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = .629 \frac{3.35}{3.60} = .59$; $b_2 = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = .629 \frac{3.60}{3.35} = .68$

$x = r \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \cdot y = .59y$ (RR'線) ; $y = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \cdot x = .68x$ (CC'線)

但 $x = X - 83.79$;

故 $X - 83.79 = .59(Y - 81.65)$; $\bar{X} = 35.62 + .59Y$

若 $Y = 88$, 則 $X = 87.54$; 若 $Y = 73$, 則 $X = 78.69$

再 $y = Y - 81.65$

故 $Y - 81.65 = .68(X - 83.79)$; $\bar{Y} = 24.67 + .68X$.

若 $X = 89$, 則 $Y = 85.19$; 若 $X = 75$, 則 $Y = 75.67$

第二十九圖 迴歸線作法 (根據第二十六圖)

法次如下：

a. $\delta_x = -.71$; $\delta_y = -1.85$; $\sigma_x = 3.35$; $\sigma_y = 3.60$; $r = .629$ 悉已由第二十六圖求出。

b. 求各科總平均分數之平均數，得 $M_x = 83.79$ ，及英文平均分數之平均數，得 $M_y = 81.65$ 。

c. 迴歸係數 $b_1 = r \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = .629 \frac{3.35}{3.60} = .59$

迴歸係數 $b_2 = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} = .629 \frac{3.60}{3.35} = .68$ 。

d. x 向 y 之迴歸線（即連接橫行各平均點之線）之方程式為

$$x = r \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \cdot y = .59y$$

y 向 x 之迴歸線（即連接縱行各平均點之線）之方程式，為

$$y = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \cdot x = .68x$$

e. 因 x 與 y 為差數，故用實際量數 X 及 Y 代之，因 $x = X - 83.79$ ，故 $X - 83.79 = .59(Y - 81.65) \therefore X = .59Y + 35.62$ 。

f. 再用 Y 行最大量數 88 及最小量數 73 而求相當之 Y 價值，即

若 $Y = 88$ ，則 $X = 87.54$ ；

若 $Y = 73$ ，則 $X = 78.69$ 。

用此四個數字，即可畫 x 向 y 之迴歸線 RR' 。

g. 同理求得

$$\text{若 } X=89, \text{ 則 } Y=85.19;$$

$$\text{若 } X=75, \text{ 則 } Y=75.67。$$

h. 從此四個數字，即可得 y 向 x 之迴歸線 CC' 。

47. 迴歸方程之應用

根據相關係數，可知甲乙二物籠統相關之程度；根據迴歸方程，可知甲乙二物彼此互施影響之輕重。既知甲物對於乙物之確切影響，則吾人可根據甲物之知識，而預占乙物之狀況，反之亦然。故迴歸方程，具有預占之功用，茲用第二十九圖材料說明之。

根據第二十九圖：

$$\text{各科總平均之平均數 } \bar{X}=83.79;$$

$$\text{標準差 } \sigma_x=3.35;$$

$$\text{英文平均之平均數 } \bar{Y}=81.65;$$

$$\text{標準差 } \sigma_y=3.60; r=.629; N=41。$$

如是，則各科總分數向英文分數迴歸之方程如下：

$$X - \bar{X} = r \frac{\sigma_x}{\sigma_y} (Y - \bar{Y})$$

$$X - 83.79 = .629 \frac{3.35}{3.60} (Y - 81.65)$$

$$X = .59Y + 35.62$$

根據上列方程，吾人若知第二十九圖 41 學生中之任何人英文分數

Y ，即可預占其各科總分數之為多少。若某生之英文分數 Y 為 75，則其各科總分數 X 大概必為

$$\begin{aligned} X &= 35.62 + .59 \times 75 \\ &= 79.87 \end{aligned}$$

若某生之英文分數 Y 為 88，則其各科總分數 X 大概必為

$$\begin{aligned} X &= 35.62 + .59 \times 88 \\ &= 87.54 \end{aligned}$$

同理，吾人可根據某生各科總分 X ，而預占其英文分數 Y 大概必為多少。

48 相關減弱之改正法

量數之由一次之觀察而得者，其確度必不若由數次之觀察而得者之高；因之，相關之由一次所觀察之量數而得者，常較低；此種較低之相關，謂之相關「減弱」。改正之法，宜於各類事實作數次之觀察，然後求其相關。茲將司畢門改正相關減弱之公式，說明如下：

設 A 與 B 為二類相關之事實；

p 為事實 A 理想上最精確之量數；

q 為事實 B 理想上最精確之量數；

r_{pq} 為 A 與 B 二類事實相關之由 p 與 q 二類量數而求得者，故相關係數 r_{pq} 實為理想上最精確者。

再設 p_1 爲事實 A 第一次之量數， p_2 爲事實 A 第二次之量數；

q_1 爲事實 B 第一次之量數， q_2 爲事實 B 第二次之量數。

$r_{p_1q_2}$ 爲事實 A 之第一次量數與事實 B 之第二次量數之相關係數；

$r_{p_2q_1}$ 爲事實 A 之第二次量數與事實 B 之第一次量數之相關係數；

$r_{p_1p_2}$ 爲事實 A 之第一次量數及第二次量數之自身相關；

$r_{q_1q_2}$ 爲事實 B 之第一次量數及第二次量數之自身相關；

則司畢門相關減弱之改正公式如下：

$$r_{pq} = \frac{\sqrt{(r_{p_1q_2})(r_{p_2q_1})}}{\sqrt{(r_{p_1p_2})(r_{q_1q_2})}} \dots \dots \dots (32)$$

例：設 l = 國文分數；

m = 數學分數；

$r_{l_1m_2} = .50$ = 國文第一次與數學第二次分數之相關係數；

$r_{l_2m_1} = .32$ = 國文第二次與數學第一次分數之相關係數；

$r_{l_1l_2} = .50$ = 國文第一次與第二次分數之自身相關係數；

$r_{m_1m_2} = .50$ = 數學第一次與第二次分數之自身相關係數。

則代入公式(32)：

$$r_{lm} = \frac{\sqrt{(r_{l_1m_2})(r_{l_2m_1})}}{\sqrt{(r_{l_1l_2})(r_{m_1m_2})}}$$

$$\therefore r_{lm} = \frac{\sqrt{.50 \times .32}}{\sqrt{.50 \times .50}} = .80$$

49. 自身相關

觀察之可靠與否，常以其自身之相關為準。如有一百學生，先施以某種測驗，再施以此測驗之替換測驗（按每種測驗與其替換測驗之難度，假設相等）則此二種觀察之相關，謂之自身相關。若自身相關係數為 1.00，則此觀察是完全可靠，施行一次已足，不必覆試。若自身相關係數不及 1.00 者，則此觀察尚須試行若干次，大約次數愈多，則以後所得之係數愈大。自身相關方程式，可使吾人根據已觀察之次數而預占將來再經若干次觀察後之自身相關係數為多少。例如有算術測驗與其替換測驗，各施於一百學生一次，而兩項測驗之自身相關為 .50；問若兩項各施三次，則其自身相關應為多少？蓋無論何種測驗，必其自身相關係數高，然後其可靠度始高，而應用無虞。惟欲增加其可靠度者，可增加其測驗次數，然後取其次數之平均數以為標準觀察。茲將司畢門之預占公式（Prophecy formula）列下：

$$r_p = \frac{p(r_q)}{q + (p - q)r_q} \dots \dots \dots (33)$$

在此公式內：

q = 已知相關係數之次數（即已測驗之次數）

p = 欲知相關係數之次數（即總共測驗之次數）

r_q = 已知之 q 次數之平均自身相關係數。

r_p = 欲知之 p 次數之平均自身相關係數。

例：某種算術測驗與其替換測驗各施行 2 次，其自身之相關為 .63，試問若各施行 3 次，其自身相關為多少？將數字代入公式 (33)。

$$\text{因 } p=3 ; q=2 ; r_q=.630$$

$$\text{故 } r_p = \frac{3(.63)}{2+(3-2).63} = .72$$

可見觀察之次數較多，則自身相關係數亦較高，有如下表。

觀察次數	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
相關係數	.630	.720	.773	.810	.836	.856	.872	.884	.895	.903	.911

反之，若欲得一較高之相關係數，則觀察之次數應各為多少，此問題亦可由此公式解答之。

例：某種算術測驗與其替換測驗各施行一次時，其自身相關為 .8，試問欲得 .96 之自身相關應試行幾次？

$$\text{因 } r_p=.96 ; r_q=.8 ; q=1。$$

$$\text{故 } .96 = \frac{N(.8)}{1+(N-1).8}$$

∴ $N=6$ ，即應試行六次也。

50. 淨相關

通常之相關法，只計及二種變量；然天下事物之彼此關係，決非如此簡純。蓋一種事物，常受他數種事物之影響，而此他數種事

物彼此亦互施影響，其情形甚為複雜。設有甲乙丙三人，甲與乙，乙與丙之關係，本極密切，然甲丙之關係極冷淡，故甲乙或乙丙之密切關係，因之稍減。丙不存在時，甲乙密切之關係為二人純粹之關係，今丙雜出其間，則甲乙二人減淡之關係，為二人不純粹之關係。再設有人焉，其稟質聰慧；身體健壯，環境優美。則其稟質與身體，必有密切之關係；易言之，其質之聰或由其體之強；然優美之環境，亦與有力焉。蓋使其環境惡劣，則稟質或因之而稍減。故對稟質與身體二者之關係而言，環境實為第三分子雜出其間，而使第一第二者之關係不能純粹。淨相關之目的，即將此第三分子（或第三第四等分子）抽出，稍減其影響，而求第一第二者之純粹不雜之關係。

平常相關，只用二種變量，如英文與數學之相關為 -0.24 者，吾人可書 $r_{12} = -0.24$ ，蓋“1”代表第一類變量，“2”代表第二類變量。 r_{12} 者，即“第一類變量與第二類變量之相關係數”（或“英文與數學之相關係數”）。設第一變量英文，第二變量數學外，復有第三變量健康雜出其間，並與英文數學各發生關係，則欲得英數之純粹關係，可將健康抽出，表出之如下： $r_{12.3} = ?$ 讀法：“若將第三變量健康抽出，則第一變量英文與第二變量數學之純粹相關係數，等於多少？”

茲將淨相關之公式列下：

(1) 三個變量之淨相關之公式

$$r_{12.3} = \frac{r_{12} - r_{13}r_{23}}{\sqrt{1-r_{13}^2}\sqrt{1-r_{23}^2}} \dots\dots\dots (34)$$

例：設學業總成績爲 1，

國文成績爲 2，

英文成績爲 3。

再設 * 學業總成績與國文成績之相關 = .389 ($r_{12} = .389$)；

學業總成績與英文成績之相關 = .719 ($r_{13} = .719$)；

國文成績與英文成績之相關 = -.024 ($r_{23} = -.024$)。

問(a) 英文變量抽出後學業與國文之純粹相關，等於多少 (即 $r_{12.3} = ?$)。

(b) 國文變量抽出後學業與英文之純粹相關等於多少 (即 $r_{13.2} = ?$)。

(c) 學業變量抽出後，國文與英文之純粹相關等於多少 (即 $r_{23.1} = ?$)。

茲將(a)(b)(c)三問——解答如下：

$$\begin{aligned} \text{(a) } r_{12.3} &= \frac{r_{12} - r_{13}r_{23}}{\sqrt{1-r_{13}^2}\sqrt{1-r_{23}^2}} \\ &= \frac{.389 - (.719) \times (-.024)}{\sqrt{1 - (.719)^2} \sqrt{1 - (-.024)^2}} \\ &= .594 \end{aligned}$$

* Chu, J. P.: Chinese Students in America: Qualities Associated with Their Success, p. 27.

從此可知，若無英文混雜其間，學業與國文之純粹相關較高。

$$\begin{aligned} (b) \quad r_{13.2} &= \frac{r_{13} - r_{12} r_{23}}{\sqrt{1 - r_{12}^2} \sqrt{1 - r_{23}^2}} \\ &= \frac{.719 - (.389) \times (-.024)}{\sqrt{1 - (.389)^2} \sqrt{1 - (-.024)^2}} \\ &= .799 \end{aligned}$$

從此可知，若無國文混雜其間，學業與英文之純粹相關亦較高。

$$\begin{aligned} (c) \quad r_{23.1} &= \frac{r_{23} - r_{12} r_{13}}{\sqrt{1 - r_{12}^2} \sqrt{1 - r_{13}^2}} \\ &= \frac{-.024 - (.389 \times .719)}{\sqrt{1 - (.389)^2} \sqrt{1 - (.719)^2}} \\ &= -.478 \end{aligned}$$

從此可知，若無學業混雜其間，國文與英文之純粹相關，亦較高。

(2) 四個變量之淨相關之公式

$$r_{12.34} = \frac{r_{12.3} - r_{14.3} r_{24.3}}{\sqrt{1 - r_{14.3}^2} \sqrt{1 - r_{24.3}^2}} \dots \dots \dots (34a)$$

此公式可用以下較便之式代之：

$$\begin{aligned} r_{12.34} &= \\ &= \frac{r_{12}(1 - r_{34}^2) - r_{13}(r_{23} - r_{24}r_{34}) - r_{14}(r_{24} - r_{23}r_{34})}{\sqrt{1 - r_{13}^2 - r_{14}^2 - r_{34}^2 + 2r_{13}r_{14}r_{34}} \sqrt{1 - r_{23}^2 - r_{34}^2 - r_{24}^2 + 2r_{23}r_{34}r_{24}}} \\ &\dots \dots \dots 34b \end{aligned}$$

(3) n 個變量之淨相關之公式

$$r_{12.34 \dots n} = \frac{r_{12.34 \dots n-1} - r_{1n.34 \dots n-1} r_{2n.34 \dots n-1}}{\sqrt{(1 - r_{1n.34 \dots n-1}^2)} \sqrt{(1 - r_{2n.34 \dots n-1}^2)}} \dots \dots (34c)$$

問 題

1. 試用各種方法，求下表之相關係數：

- (a) 用積差相關之簡捷法求 r 。
 (b) 用分布圖法求 r 。
 (c) 用等級相關法求 ρ 。
 (d) 用司畢門簡捷法求 R 。
 (e) 用異號相關法求 U 。

東南大學十三年度錄取新生中任取二十人之國文英文分數表：

X 國文分數	Y 英文分數
63	33
76	53
81	52
89	48
77	56
64	50
53	54
70	78
80	61
55	45
87	58
77	86
77	80
85	33
74	51
54	62
69	64
52	63
50	55
77	62

2. 在上題(b)分布圖內畫 RR' , CC' 二迴歸線。
3. 設某錄取生之國文分數為65, 其英文分數大概必為多少?
 設某錄取生之英文分數為 80, 其國文分數, 大概必為多

少？

4. 設算術第一次試驗分數與國文第二次試驗分數之相關為 .75；

設算術第二次試驗分數與國文第一次試驗分數之相關為 .70；

國文第一次與國文第二次試驗分數之自身相關為 .90；

算術第一次與算術第二次試驗分數之自身相關為 .85；

試問算術與國文試驗之相關「減弱改正」後，應為多少？

5. 某種智力測驗與其替換測驗各試行 3 次，其自身相關為 .55；(1) 試問若各施行 6 次，其自身相關為多少？(2) 若欲其自身相關為 .95 者，各須試行幾次？

6. 設甲與乙之相關為 .75；

乙與丙之相關為 .10；

甲與丙之相關為 .45；

試問(a) 丙抽出後，甲與乙之純粹相關為多少？

(b) 乙抽出後，甲與丙之純粹相關為多少？

(c) 甲抽出後，乙與丙之純粹相關為多少？

II. 附表二

常態曲線圖上在平均縱線橫坐標各段，與該段上曲線內之面積。平均縱線在橫坐標 $x=0$ 之上。橫坐標上之距離，則以 σ 為單位。讀法如下： $x=.3\sigma$ 時，則其所包括之面積 = 全數之 $\frac{1179}{10,000}$ 或 11.79%； $x=1.4\sigma$ 時，則其包括之面積 = 全數之 $\frac{4192}{10,000}$ 或 41.92%；餘類推。

x/σ	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	0000	0040	0080	0120	0159	0199	0239	0279	0319	0359
0.1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0753
0.2	0793	0832	0871	0910	0948	0987	1026	1064	1103	1141
0.3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0.4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0.5	1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0.6	2257	2291	2324	2357	2389	2422	2454	2486	2518	2549
0.7	2580	2612	2642	2673	2704	2734	2764	2794	2823	2852
0.8	2881	2910	2939	2967	2995	3023	3051	3078	3106	3133
0.9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3365	3389
1.0	3413	3438	3461	3485	3508	3531	3554	3577	3599	3621
1.1	3643	3665	3686	3718	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1.2	3849	3869	3888	3907	3925	3944	3962	3980	3997	4015
1.3	4032	4049	4066	4083	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1.4	4192	4207	4222	4236	4251	4265	4279	4292	4306	4319
1.5	4332	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4430	4441
1.6	4452	4463	4474	4485	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1.7	4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1.8	4641	4649	4656	4664	4671	4678	4686	4693	4699	4706
1.9	4713	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4756	4762	4767
2.0	4773	4778	4783	4788	4793	4798	4803	4808	4812	4817
2.1	4821	4826	4830	4834	4838	4842	4846	4850	4854	4857
2.2	4861	4865	4868	4871	4875	4878	4881	4884	4887	4890
2.3	4893	4896	4898	4901	4904	4906	4909	4911	4913	4916
2.4	4918	4920	4922	4925	4927	4929	4931	4932	4934	4936
2.5	4938	4940	4941	4943	4945	4946	4948	4949	4951	4952
2.6	4953	4955	4956	4957	4959	4960	4961	4962	4963	4964
2.7	4965	4966	4967	4968	4969	4970	4971	4972	4973	4974
2.8	4974	4975	4976	4977	4977	4978	4979	4980	4980	4981
2.9	4981	4982	4983	4984	4984	4984	4985	4985	4986	4986
3.0	4986	4987	4987	4988	4988	4988	4989	4989	4989	4990



III. 附表三

常態曲線圖上，在平均縱線，橫坐標各段，與該段曲線內之面積，平均縱線在橫坐標 $x=0$ 之上；橫坐標上之距離，則以機誤 (P. E.) 爲單位。讀法如下： $x=.5$ P. E. 時，則其所包括之面積 $=\frac{1321}{10,000}$ ，或 13.21%； $x=1.5$ P. E. 時，則其所包括之面積 $=\frac{3441}{10,000}$ ，或 34.41%，餘類推。

$\frac{x}{P.E.}$.00	.05	$\frac{x}{P.E.}$.00	.05	$\frac{x}{P.E.}$.00	.05	$\frac{x}{P.E.}$.00	.05
.0	0000	0135	1.5	3441	3521	3.0	4785	4802	4.5	4988	4989
.1	0289	0403	1.6	3597	3671	3.1	4817	4831	4.6	4990	4991
.2	0536	0670	1.7	3742	3811	3.2	4845	4858	4.7	4992	4993
.3	0802	0933	1.8	3896	3939	3.3	4870	4881	4.8	4994	4994.6
.4	1083	1193	1.9	4000	4057	3.4	4891	4900	4.9	4995.2	4995.7
.5	1321	1447	2.0	4113	4166	3.5	4909	4917	5.0	4996.2	4996.6
.6	1571	1695	2.1	4217	4265	3.6	4924	4931	5.1	4997.1	4997.4
.7	1816	1935	2.2	4311	4354	3.7	4937	4943	5.2	4997.7	4998.0
.8	2053	2168	2.3	4396	4435	3.8	4948	4953	5.3	4998.2	4998.4
.9	2291	2392	2.4	4472	4508	3.9	4957	4961	5.4	4998.6	4998.8
1.0	2500	2606	2.5	4541	4573	4.0	4965	4968	5.5	4999.0	4999.1
1.1	2709	2810	2.6	4602	4631	4.1	4971	4974	5.6	4999.2	4999.3
1.2	2908	3004	2.7	4657	4682	4.2	4977	4979	5.7	4999.4	4999.5
1.3	3097	3188	2.8	4705	4727	4.3	4981	4983	5.8	4999.55	4999.6
1.4	3275	3360	2.9	4748	4767	4.4	4985	4987	5.9	4999.65	4999.7

IV. 附表四

此表可從 ρ 之價值，求與 ρ 相當之 r 價值。 $r = 2\sin\left(\frac{\pi}{6}\rho\right)$ 。

讀法如下：如 $\rho = .75$ ，則 $r = .7654$ ； $\rho = .80$ ，則 $r = .8135$ 。學者如

用 $\rho = 1 - \frac{6\Sigma D^2}{N(N^2-1)}$ 時，宜將 ρ 之價值，變為 r 之價值。以冀得普

通之了解。

ρ	r	ρ	r	ρ	r	ρ	r
.01	.0105	.26	.2714	.51	.5277	.76	.7750
.02	.0209	.27	.2818	.52	.5378	.77	.7847
.03	.0314	.28	.2922	.53	.5479	.78	.7943
.04	.0419	.29	.3025	.54	.5580	.79	.8039
.05	.0524	.30	.3129	.55	.5680	.80	.8135
.06	.0628	.31	.3232	.56	.5781	.81	.8230
.07	.0733	.32	.3335	.57	.5881	.82	.8325
.08	.0838	.33	.3439	.58	.5981	.83	.8421
.09	.0942	.34	.3542	.59	.6081	.84	.8516
.10	.1047	.35	.3645	.60	.6180	.85	.8610
.11	.1151	.36	.3748	.61	.6280	.86	.8705
.12	.1256	.37	.3850	.62	.6379	.87	.8799
.13	.1360	.38	.3953	.63	.6478	.88	.8893
.14	.1465	.39	.4056	.64	.6577	.89	.8986
.15	.1569	.40	.4158	.65	.6676	.90	.9080
.16	.1674	.41	.4261	.66	.6775	.91	.9183
.17	.1778	.42	.4363	.67	.6873	.92	.9296
.18	.1882	.43	.4465	.68	.6971	.93	.9359
.19	.1986	.44	.4567	.69	.7069	.94	.9451
.20	.2091	.45	.4669	.70	.7167	.95	.9543
.21	.2195	.46	.4771	.71	.7265	.96	.9635
.22	.2299	.47	.4872	.72	.7363	.97	.9727
.23	.2403	.48	.4973	.73	.7460	.98	.9818
.24	.2507	.49	.5075	.74	.7557	.99	.9909
.25	.2611	.50	.5176	.75	.7654	1.00	1.0000

V. 附表五

此表可從 R 之價值求與 R 相當之 r 價值。 $r = 2\cos\frac{\pi}{3}(1 - R)$

-1。讀法如下，如 R=.50，則 r=.732；如 R=.90，則 r=.989。

學者如用 $R = 1 - \frac{6\Sigma G}{N^2 - 1}$ 時，宜將 R 之價值變為 r 之價值。以冀得普

通之了解。

R	r	R	r	R	r	R	r
.00	.000	.26	.429	.51	.742	.76	.937
.01	.018	.27	.444	.52	.753	.77	.942
.02	.036	.28	.458	.53	.763	.78	.947
.03	.054	.29	.472	.54	.772	.79	.952
.04	.071	.30	.486	.55	.782	.80	.956
.05	.089	.31	.500	.56	.791	.81	.961
.06	.107	.32	.514	.57	.801	.82	.965
.07	.124	.33	.528	.58	.810	.83	.968
.08	.141	.34	.541	.59	.818	.84	.972
.09	.158	.35	.554	.60	.827	.85	.975
.10	.176	.36	.567	.61	.836	.86	.979
.11	.192	.37	.580	.62	.844	.87	.981
.12	.209	.38	.593	.63	.852	.88	.984
.13	.226	.39	.606	.64	.860	.89	.987
.14	.242	.40	.618	.65	.867	.90	.989
.15	.259	.41	.630	.66	.875	.91	.991
.16	.275	.42	.642	.67	.882	.92	.993
.17	.291	.43	.654	.68	.889	.93	.995
.18	.307	.44	.666	.69	.896	.94	.996
.19	.323	.45	.677	.70	.902	.95	.997
.20	.338	.46	.689	.71	.908	.96	.998
.21	.354	.47	.700	.72	.915	.97	.999
.22	.369	.48	.711	.73	.921	.98	.999
.23	.384	.49	.721	.74	.926	.99	.999
.24	.399	.50	.732	.75	.932	1.00	1.000

VI. 附表六

此表可從 U 之價值求與 U 相當之 r 價值。

U	r	U	r	U	r	U	r
.00	1.0000	.13	.9174	.26	.6848	.38	.3682
.01	.9996	.14	.9044	.27	.6615	.39	.3387
.02	.9982	.15	.8905	.28	.6375	.40	.3089
.03	.9958	.16	.8757	.29	.6129	.41	.2788
.04	.9924	.17	.8602	.30	.5877	.42	.2485
.05	.9880	.18	.8439	.31	.5620	.43	.2180
.06	.9823	.19	.8268	.32	.5358	.44	.1873
.07	.9762	.20	.8089	.33	.5091	.45	.1564
.08	.9688	.21	.7902	.34	.4819	.46	.1253
.09	.9604	.22	.7707	.35	.4542	.47	.0941
.10	.9510	.23	.7504	.36	.4260	.48	.0628
.11	.9407	.24	.7293	.37	.3973	.49	.0314
.12	.9295	.25	.7074			.50	.0000

VII. 乘 數 表

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1
2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	2
3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	3
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	4
5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	5
6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	6
7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	7
8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	8
9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	9
10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	10
11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	11
12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	12
13	26	39	52	65	78	91	104	117	130	13
14	28	42	56	70	84	98	112	126	140	14
15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	15
16	32	48	64	80	96	112	128	144	160	16
17	34	51	68	85	102	119	136	153	170	17
18	36	54	72	90	108	126	144	162	180	18
19	38	57	76	95	114	133	152	171	190	19
20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	20
21	42	63	84	105	126	147	168	189	210	21
22	44	66	88	110	132	154	176	198	220	22
23	46	69	92	115	138	161	184	207	230	23
24	48	72	96	120	144	168	192	216	240	24
25	50	75	100	125	150	175	200	225	250	25
26	52	78	104	130	156	182	208	234	260	26
27	54	81	108	135	162	189	216	243	270	27
28	56	84	112	140	168	196	224	252	280	28
29	58	87	116	145	174	203	232	261	290	29
30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	30
31	62	93	124	155	186	217	248	279	310	31
32	64	96	128	160	192	224	256	288	320	32
33	66	99	132	165	198	231	264	297	330	33
34	68	102	136	170	204	238	272	306	340	34
35	70	105	140	175	210	245	280	315	350	35
36	72	108	144	180	216	252	288	324	360	36
37	74	111	148	185	222	259	296	333	370	37
38	76	114	152	190	228	266	304	342	380	38
39	78	117	156	195	234	273	312	351	390	39
40	80	120	160	200	240	280	320	360	400	40
41	82	123	164	205	246	287	328	369	410	41
42	84	126	168	210	252	294	336	378	420	42
43	86	129	172	215	258	301	344	387	430	43
44	88	132	176	220	264	308	352	396	440	44
45	90	135	180	225	270	315	360	405	450	45
46	92	138	184	230	276	322	368	414	460	46
47	94	141	188	235	282	329	376	423	470	47
48	96	144	192	240	288	336	384	432	480	48
49	98	147	196	245	294	343	392	441	490	49
50	100	150	200	250	300	350	400	450	500	50
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
51	102	153	204	255	306	357	408	459	510	51
52	104	156	208	260	312	364	416	468	520	52
53	106	159	212	265	318	371	424	477	530	53
54	108	162	216	270	324	378	432	486	540	54
55	110	165	220	275	330	385	440	495	550	55
56	112	168	224	280	336	392	448	504	560	56
57	114	171	228	285	342	399	456	513	570	57
58	116	174	232	290	348	406	464	522	580	58
59	118	177	236	295	354	413	472	531	590	59
60	120	180	240	300	360	420	480	540	600	60
61	122	183	244	305	366	427	488	549	610	61
62	124	186	248	310	372	434	496	558	620	62
63	126	189	252	315	378	441	504	567	630	63
64	128	192	256	320	384	448	512	576	640	64
65	130	195	260	325	390	455	520	585	650	65
66	132	198	264	330	396	462	528	594	660	66
67	134	201	268	335	402	469	536	603	670	67
68	136	204	272	340	408	476	544	612	680	68
69	138	207	276	345	414	483	552	621	690	69
70	140	210	280	350	420	490	560	630	700	70
71	142	213	284	355	426	497	568	639	710	71
72	144	216	288	360	432	504	576	648	720	72
73	146	219	292	365	438	511	584	657	730	73
74	148	222	296	370	444	518	592	666	740	74
75	150	225	300	375	450	525	600	675	750	75
76	152	228	304	380	456	532	608	684	760	76
77	154	231	308	385	462	539	616	693	770	77
78	156	234	312	390	468	546	624	702	780	78
79	158	237	316	395	474	553	632	711	790	79
80	160	240	320	400	480	560	640	720	800	80
81	162	243	324	405	486	567	648	729	810	81
82	164	246	328	410	492	574	656	738	820	82
83	166	249	332	415	498	581	664	747	830	83
84	168	252	336	420	504	588	672	756	840	84
85	170	255	340	425	510	595	680	765	850	85
86	172	258	344	430	516	602	688	774	860	86
87	174	261	348	435	522	609	696	783	870	87
88	176	264	352	440	528	616	704	792	880	88
89	178	267	356	445	534	623	712	801	890	89
90	180	270	360	450	540	630	720	810	900	90
91	182	273	364	455	546	637	728	819	910	91
92	184	276	368	460	552	644	736	828	920	92
93	186	279	372	465	558	651	744	837	930	93
94	188	282	376	470	564	658	752	846	940	94
95	190	285	380	475	570	665	760	855	950	95
96	192	288	384	480	576	672	768	864	960	96
97	194	291	388	485	582	679	776	873	970	97
98	196	294	392	490	588	686	784	882	980	98
99	198	297	396	495	594	693	792	891	990	99
100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000	100
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
1	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	1
2	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	2
3	33	36	39	42	45	48	51	54	57	60	3
4	44	48	52	56	60	64	68	72	76	80	4
5	55	60	65	70	75	80	85	90	95	100	5
6	66	72	78	84	90	96	102	108	114	120	6
7	77	84	91	98	105	112	119	126	133	140	7
8	88	96	104	112	120	128	136	144	152	160	8
9	99	108	117	126	135	144	153	162	171	180	9
10	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200	10
11	121	132	143	154	165	176	187	198	209	220	11
12	132	144	156	168	180	192	204	216	228	240	12
13	143	156	169	182	195	208	221	234	247	260	13
14	154	168	182	196	210	224	238	252	266	280	14
15	165	180	195	210	225	240	255	270	285	300	15
16	176	192	208	224	240	256	272	288	304	320	16
17	187	204	221	238	255	272	289	306	323	340	17
18	198	216	234	252	270	288	306	324	342	360	18
19	209	228	247	266	285	304	323	342	361	380	19
20	220	240	260	280	300	320	340	360	380	400	20
21	231	252	273	294	315	336	357	378	399	420	21
22	242	264	286	308	330	352	374	396	418	440	22
23	253	276	299	322	345	368	391	414	437	460	23
24	264	288	312	336	360	384	408	432	456	480	24
25	275	300	325	350	375	400	425	450	475	500	25
26	286	312	338	364	390	416	442	468	494	520	26
27	297	324	351	378	405	432	459	486	513	540	27
28	308	336	364	392	420	448	476	504	532	560	28
29	319	348	377	406	435	464	493	522	551	580	29
30	330	360	390	420	450	480	510	540	570	600	30
31	341	372	403	434	465	496	527	558	589	620	31
32	352	384	416	448	480	512	544	576	608	640	32
33	363	396	429	462	495	528	561	594	627	660	33
34	374	408	442	476	510	544	578	612	646	680	34
35	385	420	455	490	525	560	595	630	665	700	35
36	396	432	468	504	540	576	612	648	684	720	36
37	407	444	481	518	555	592	629	666	703	740	37
38	418	456	494	532	570	608	646	684	722	760	38
39	429	468	507	546	585	624	663	702	741	780	39
40	440	480	520	560	600	640	680	720	760	800	40
41	451	492	533	574	615	656	697	738	779	820	41
42	462	504	546	588	630	672	714	756	798	840	42
43	473	516	559	602	645	688	731	774	817	860	43
44	484	528	572	616	660	704	748	792	836	880	44
45	495	540	585	630	675	720	765	810	855	900	45
46	506	552	598	644	690	736	782	828	874	920	46
47	517	564	611	658	705	752	799	846	893	940	47
48	528	576	624	672	720	768	816	864	912	960	48
49	539	588	637	686	735	784	833	882	931	980	49
50	550	600	650	700	750	800	850	900	950	1000	50
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	

	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
51	561	612	663	714	765	816	867	918	969	1020	51
52	572	624	676	728	780	832	884	936	988	1040	52
53	583	636	689	742	795	848	901	954	1007	1060	53
54	594	648	702	756	810	864	918	972	1026	1080	54
55	605	660	715	770	825	880	935	990	1045	1100	55
56	616	672	728	784	840	896	952	1008	1064	1120	56
57	627	684	741	798	855	912	969	1026	1083	1140	57
58	638	696	754	812	870	928	986	1044	1102	1160	58
59	649	708	767	826	885	944	1003	1062	1121	1180	59
60	660	720	780	840	900	960	1020	1080	1140	1200	60
61	671	732	793	854	915	976	1037	1098	1159	1220	61
62	682	744	806	868	930	992	1054	1116	1178	1240	62
63	693	756	819	882	945	1008	1071	1134	1197	1260	63
64	704	768	832	896	960	1024	1088	1152	1216	1280	64
65	715	780	845	910	975	1040	1105	1170	1235	1300	65
66	726	792	858	924	990	1056	1122	1188	1254	1320	66
67	737	804	871	938	1005	1072	1139	1206	1273	1340	67
68	748	816	884	952	1020	1088	1156	1224	1292	1360	68
69	759	828	897	966	1035	1104	1173	1242	1311	1380	69
70	770	840	910	980	1050	1120	1190	1260	1330	1400	70
71	781	852	923	994	1065	1136	1207	1278	1349	1420	71
72	792	864	936	1008	1080	1152	1224	1296	1368	1440	72
73	803	876	949	1022	1095	1168	1241	1314	1387	1460	73
74	814	888	962	1036	1110	1184	1258	1332	1406	1480	74
75	825	900	975	1050	1125	1200	1275	1350	1425	1500	75
76	836	912	988	1064	1140	1216	1292	1368	1444	1520	76
77	847	924	1001	1078	1155	1232	1309	1386	1463	1540	77
78	858	936	1014	1092	1170	1248	1326	1404	1482	1560	78
79	869	948	1027	1106	1185	1264	1343	1422	1501	1580	79
80	880	960	1040	1120	1200	1280	1360	1440	1520	1600	80
81	891	972	1053	1134	1215	1296	1377	1458	1539	1620	81
82	902	984	1066	1148	1230	1312	1394	1476	1558	1640	82
83	913	996	1079	1162	1245	1328	1411	1494	1577	1660	83
84	924	1008	1092	1176	1260	1344	1428	1512	1596	1680	84
85	935	1020	1105	1190	1275	1360	1445	1530	1615	1700	85
86	946	1032	1118	1204	1290	1376	1462	1548	1634	1720	86
87	957	1044	1131	1218	1305	1392	1479	1566	1653	1740	87
88	968	1056	1144	1232	1320	1408	1496	1584	1672	1760	88
89	979	1068	1157	1246	1335	1424	1513	1602	1691	1780	89
90	990	1080	1170	1260	1350	1440	1530	1620	1710	1800	90
91	1001	1092	1183	1274	1365	1456	1547	1638	1729	1820	91
92	1012	1104	1196	1288	1380	1472	1564	1656	1748	1840	92
93	1023	1116	1209	1302	1395	1488	1581	1674	1767	1860	93
94	1034	1128	1222	1316	1410	1504	1598	1692	1786	1880	94
95	1045	1140	1235	1330	1425	1520	1615	1710	1805	1900	95
96	1056	1152	1248	1344	1440	1536	1632	1728	1824	1920	96
97	1067	1164	1261	1358	1455	1552	1649	1746	1843	1940	97
98	1078	1176	1274	1372	1470	1568	1666	1764	1862	1960	98
99	1089	1188	1287	1386	1485	1584	1683	1782	1881	1980	99
100	1100	1200	1300	1400	1500	1600	1700	1800	1900	2000	100
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	

	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
1	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	1
2	42	44	46	48	50	52	54	56	58	60	2
3	63	66	69	72	75	78	81	84	87	90	3
4	84	88	92	96	100	104	108	112	116	120	4
5	105	110	115	120	125	130	135	140	145	150	5
6	126	132	138	144	150	156	162	168	174	180	6
7	147	154	161	168	175	182	189	196	203	210	7
8	168	176	184	192	200	208	216	224	232	240	8
9	189	198	207	216	225	234	243	252	261	270	9
10	210	220	230	240	250	260	270	280	290	300	10
11	231	242	253	264	275	286	297	308	319	330	11
12	252	264	276	288	300	312	324	336	348	360	12
13	273	285	299	312	325	338	351	364	377	390	13
14	294	308	322	336	350	364	378	392	406	420	14
15	315	330	345	360	375	390	405	420	435	450	15
16	336	352	368	384	400	416	432	448	464	480	16
17	357	374	391	408	425	442	459	476	493	510	17
18	378	396	414	432	450	468	486	504	522	540	18
19	399	418	437	456	475	494	513	532	551	570	19
20	420	440	460	480	500	520	540	560	580	600	20
21	441	462	483	504	525	546	567	588	609	630	21
22	462	484	506	528	550	572	594	616	638	660	22
23	483	506	529	552	575	598	621	644	667	690	23
24	504	528	552	576	600	624	648	672	696	720	24
25	525	550	575	600	625	650	675	700	725	750	25
26	546	572	598	624	650	676	702	728	754	780	26
27	567	594	621	648	675	702	729	756	783	810	27
28	588	616	644	672	700	728	756	784	812	840	28
29	609	638	667	696	725	754	783	812	841	870	29
30	630	660	690	720	750	780	810	840	870	900	30
31	651	682	713	744	775	806	837	868	899	930	31
32	672	704	736	768	800	832	864	896	928	960	32
33	693	726	759	792	825	858	891	924	957	990	33
34	714	748	782	816	850	884	918	952	986	1020	34
35	735	770	805	840	875	910	945	980	1015	1050	35
36	756	792	828	864	900	936	972	1008	1044	1080	36
37	777	814	851	888	925	962	999	1036	1073	1110	37
38	798	836	874	912	950	988	1026	1064	1102	1140	38
39	819	858	897	936	975	1014	1053	1092	1131	1170	39
40	840	880	920	960	1000	1040	1080	1120	1160	1200	40
41	861	902	943	984	1025	1066	1107	1148	1189	1230	41
42	882	924	966	1008	1050	1092	1134	1176	1218	1260	42
43	903	946	989	1032	1075	1118	1161	1204	1247	1290	43
44	924	968	1012	1056	1100	1144	1188	1232	1276	1320	44
45	945	990	1035	1080	1125	1170	1215	1260	1305	1350	45
46	966	1012	1058	1104	1150	1196	1242	1288	1334	1380	46
47	987	1034	1081	1128	1175	1222	1269	1316	1363	1410	47
48	1008	1056	1104	1152	1200	1248	1296	1344	1392	1440	48
49	1029	1078	1127	1176	1225	1274	1323	1372	1421	1470	49
50	1050	1100	1150	1200	1250	1300	1350	1400	1450	1500	50
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	

附 錄

155

	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
51	1071	1122	1173	1224	1275	1326	1377	1428	1479	1530	51
52	1092	1144	1196	1248	1300	1352	1404	1456	1508	1560	52
53	1113	1166	1219	1272	1325	1378	1431	1484	1537	1590	53
54	1134	1188	1242	1296	1350	1404	1458	1512	1566	1620	54
55	1155	1210	1265	1320	1375	1430	1485	1540	1595	1650	55
56	1176	1232	1288	1344	1400	1456	1512	1568	1624	1680	56
57	1197	1254	1311	1368	1425	1482	1539	1596	1653	1710	57
58	1218	1276	1334	1392	1450	1508	1566	1624	1682	1740	58
59	1239	1298	1357	1416	1475	1534	1593	1652	1711	1770	59
60	1260	1320	1380	1440	1500	1560	1620	1680	1740	1800	60
61	1281	1342	1403	1464	1525	1586	1647	1708	1769	1830	61
62	1302	1364	1426	1488	1550	1612	1674	1736	1798	1860	62
63	1323	1386	1449	1512	1575	1638	1701	1764	1827	1890	63
64	1344	1408	1472	1536	1600	1664	1728	1792	1856	1920	64
65	1365	1430	1495	1560	1625	1690	1755	1820	1885	1950	65
66	1386	1452	1518	1584	1650	1716	1782	1848	1914	1980	66
67	1407	1474	1541	1608	1675	1742	1809	1876	1943	2010	67
68	1428	1496	1564	1632	1700	1768	1836	1904	1972	2040	68
69	1449	1518	1587	1656	1725	1794	1863	1932	2001	2070	69
70	1470	1540	1610	1680	1750	1820	1890	1960	2030	2100	70
71	1491	1562	1633	1704	1775	1846	1917	1988	2059	2130	71
72	1512	1584	1656	1728	1800	1872	1944	2016	2088	2160	72
73	1533	1606	1679	1752	1825	1898	1971	2044	2117	2190	73
74	1554	1628	1702	1776	1850	1924	1998	2072	2146	2220	74
75	1575	1650	1725	1800	1875	1950	2025	2100	2175	2250	75
76	1596	1672	1748	1824	1900	1976	2052	2128	2204	2280	76
77	1617	1694	1771	1848	1925	2002	2079	2156	2233	2310	77
78	1638	1716	1794	1872	1950	2028	2106	2184	2262	2340	78
79	1659	1738	1817	1896	1975	2054	2133	2212	2291	2370	79
80	1680	1760	1840	1920	2000	2080	2160	2240	2320	2400	80
81	1701	1782	1863	1944	2025	2106	2187	2268	2349	2430	81
82	1722	1804	1886	1968	2050	2132	2214	2296	2378	2460	82
83	1743	1826	1909	1992	2075	2158	2241	2324	2407	2490	83
84	1764	1848	1932	2016	2100	2184	2268	2352	2436	2520	84
85	1785	1870	1955	2040	2125	2210	2295	2380	2465	2550	85
86	1806	1892	1978	2064	2150	2236	2322	2408	2494	2580	86
87	1827	1914	2001	2088	2175	2262	2349	2436	2523	2610	87
88	1848	1936	2024	2112	2200	2288	2376	2464	2552	2640	88
89	1869	1958	2047	2136	2225	2314	2403	2492	2581	2670	89
90	1890	1980	2070	2160	2250	2340	2430	2520	2610	2700	90
91	1911	2002	2093	2184	2275	2366	2457	2548	2639	2730	91
92	1932	2024	2116	2208	2300	2392	2484	2576	2668	2760	92
93	1953	2046	2139	2232	2325	2418	2511	2604	2697	2790	93
94	1974	2068	2162	2256	2350	2444	2538	2632	2726	2820	94
95	1995	2090	2185	2280	2375	2470	2565	2660	2755	2850	95
96	2016	2112	2208	2304	2400	2496	2592	2688	2784	2880	96
97	2037	2134	2231	2328	2425	2522	2619	2716	2813	2910	97
98	2058	2156	2254	2352	2450	2548	2646	2744	2842	2940	98
99	2079	2178	2277	2376	2475	2574	2673	2772	2871	2970	99
100	2100	2200	2300	2400	2500	2600	2700	2800	2900	3000	100
	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	

	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	
1	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	1
2	62	64	66	68	70	72	74	76	78	80	2
3	93	96	99	102	105	108	111	114	117	120	3
4	124	128	132	136	140	144	148	152	156	160	4
5	155	160	165	170	175	180	185	190	195	200	5
6	186	192	198	204	210	216	222	228	234	240	6
7	217	224	231	238	245	252	259	266	273	280	7
8	248	256	264	272	280	288	296	304	312	320	8
9	279	288	297	306	315	324	333	342	351	360	9
10	310	320	330	340	350	360	370	380	390	400	10
11	341	352	363	374	385	396	407	418	429	440	11
12	372	384	396	408	420	432	444	456	468	480	12
13	403	416	429	442	455	468	481	494	507	520	13
14	434	448	462	476	490	504	518	532	546	560	14
15	465	480	495	510	525	540	555	570	585	600	15
16	496	512	528	544	560	576	592	608	624	640	16
17	527	544	561	578	595	612	629	646	663	680	17
18	558	576	594	612	630	648	666	684	702	720	18
19	589	608	627	646	665	684	703	722	741	760	19
20	620	640	660	680	700	720	740	760	780	800	20
21	651	672	693	714	735	756	777	798	819	840	21
22	682	704	726	748	770	792	814	836	858	880	22
23	713	736	759	782	805	828	851	874	897	920	23
24	744	768	792	816	840	864	888	912	936	960	24
25	775	800	825	850	875	900	925	950	975	1000	25
26	806	832	858	884	910	936	962	988	1014	1040	26
27	837	864	891	918	945	972	999	1026	1053	1080	27
28	868	896	924	952	980	1008	1036	1064	1092	1120	28
29	899	928	957	986	1015	1044	1073	1102	1131	1160	29
30	930	960	990	1020	1050	1080	1110	1140	1170	1200	30
31	961	992	1023	1054	1085	1116	1147	1178	1209	1240	31
32	992	1024	1056	1088	1120	1152	1184	1216	1248	1280	32
33	1023	1056	1089	1122	1155	1188	1221	1254	1287	1320	33
34	1054	1088	1122	1156	1190	1224	1258	1292	1326	1360	34
35	1085	1120	1155	1190	1225	1260	1295	1330	1365	1400	35
36	1116	1152	1188	1224	1260	1296	1332	1368	1404	1440	36
37	1147	1184	1221	1258	1295	1332	1369	1406	1443	1480	37
38	1178	1216	1254	1292	1330	1368	1406	1444	1482	1520	38
39	1209	1248	1287	1326	1365	1404	1443	1482	1521	1560	39
40	1240	1280	1320	1360	1400	1440	1480	1520	1560	1600	40
41	1271	1312	1353	1394	1435	1476	1517	1558	1599	1640	41
42	1302	1344	1386	1428	1470	1512	1554	1596	1638	1680	42
43	1333	1376	1419	1462	1505	1548	1591	1634	1677	1720	43
44	1364	1408	1452	1496	1540	1584	1628	1672	1716	1760	44
45	1395	1440	1485	1530	1575	1620	1665	1710	1755	1800	45
46	1426	1472	1518	1564	1610	1656	1702	1748	1794	1840	46
47	1457	1504	1551	1598	1645	1692	1739	1786	1833	1880	47
48	1488	1536	1584	1632	1680	1728	1776	1824	1872	1920	48
49	1519	1568	1617	1666	1715	1764	1813	1862	1911	1960	49
50	1550	1600	1650	1700	1750	1800	1850	1900	1950	2000	50
	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	

	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	
51	1581	1632	1683	1734	1785	1836	1887	1938	1989	2040	51
52	1612	1664	1716	1768	1820	1872	1924	1976	2028	2080	52
53	1643	1696	1749	1802	1855	1908	1961	2014	2067	2120	53
54	1674	1728	1782	1836	1890	1944	1998	2052	2106	2160	54
55	1705	1760	1815	1870	1925	1980	2035	2090	2145	2200	55
56	1736	1792	1848	1904	1960	2016	2072	2128	2184	2240	56
57	1767	1824	1881	1938	1995	2052	2109	2166	2223	2280	57
58	1798	1856	1914	1972	2030	2088	2146	2204	2262	2320	58
59	1829	1888	1947	2006	2065	2124	2183	2242	2301	2360	59
60	1860	1920	1980	2040	2100	2160	2220	2280	2340	2400	60
61	1891	1952	2013	2074	2135	2196	2257	2318	2379	2440	61
62	1922	1984	2046	2108	2170	2232	2294	2356	2418	2480	62
63	1953	2016	2079	2142	2205	2268	2331	2394	2457	2520	63
64	1984	2048	2112	2176	2240	2304	2368	2432	2496	2560	64
65	2015	2080	2145	2210	2275	2340	2405	2470	2535	2600	65
66	2046	2112	2178	2244	2310	2376	2442	2508	2574	2640	66
67	2077	2144	2211	2278	2345	2412	2479	2546	2613	2680	67
68	2108	2176	2244	2312	2380	2448	2516	2584	2652	2720	68
69	2139	2208	2277	2346	2415	2484	2553	2622	2691	2760	69
70	2170	2240	2310	2380	2450	2520	2590	2660	2730	2800	70
71	2201	2272	2343	2414	2485	2556	2627	2698	2769	2840	71
72	2232	2304	2376	2448	2520	2592	2664	2736	2808	2880	72
73	2263	2336	2409	2482	2555	2628	2701	2774	2847	2920	73
74	2294	2368	2442	2516	2590	2664	2738	2812	2886	2960	74
75	2325	2400	2475	2550	2625	2700	2775	2850	2925	3000	75
76	2356	2432	2508	2584	2660	2736	2812	2888	2964	3040	76
77	2387	2464	2541	2618	2695	2772	2849	2926	3003	3080	77
78	2418	2496	2574	2652	2730	2808	2886	2964	3042	3120	78
79	2449	2528	2607	2686	2765	2844	2923	3002	3081	3160	79
80	2480	2560	2640	2720	2800	2880	2960	3040	3120	3200	80
81	2511	2592	2673	2754	2835	2916	2997	3078	3159	3240	81
82	2542	2624	2706	2788	2870	2952	3034	3116	3198	3280	82
83	2573	2656	2739	2822	2905	2988	3071	3154	3237	3320	83
84	2604	2688	2772	2856	2940	3024	3108	3192	3276	3360	84
85	2635	2720	2805	2890	2975	3060	3145	3230	3315	3400	85
86	2666	2752	2838	2924	3010	3096	3182	3268	3354	3440	86
87	2697	2784	2871	2958	3045	3132	3219	3306	3393	3480	87
88	2728	2816	2904	2992	3080	3168	3256	3344	3432	3520	88
89	2759	2848	2937	3025	3115	3204	3293	3382	3471	3560	89
90	2790	2880	2970	3060	3150	3240	3330	3420	3510	3600	90
91	2821	2912	3003	3094	3185	3276	3367	3458	3549	3640	91
92	2852	2944	3036	3128	3220	3312	3404	3496	3588	3680	92
93	2883	2976	3069	3162	3255	3348	3441	3534	3627	3720	93
94	2914	3008	3102	3196	3290	3384	3478	3572	3666	3760	94
95	2945	3040	3135	3230	3325	3420	3515	3610	3705	3800	95
96	2976	3072	3168	3264	3360	3456	3552	3648	3744	3840	96
97	3007	3104	3201	3298	3395	3492	3589	3686	3783	3880	97
98	3038	3136	3234	3332	3430	3528	3626	3724	3822	3920	98
99	3069	3168	3267	3366	3465	3564	3663	3762	3861	3960	99
100	3100	3200	3300	3400	3500	3600	3700	3800	3900	4000	100
	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	

	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	
1	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	1
2	82	84	86	88	90	92	94	96	98	100	2
3	123	126	129	132	135	138	141	144	147	150	3
4	164	168	172	176	180	184	188	192	196	200	4
5	205	210	215	220	225	230	235	240	245	250	5
6	246	252	258	264	270	276	282	288	294	300	6
7	287	294	301	308	315	322	329	336	343	350	7
8	328	336	344	352	360	368	376	384	392	400	8
9	369	378	387	396	405	414	423	432	441	450	9
10	410	420	430	440	450	460	470	480	490	500	10
11	451	462	473	484	495	506	517	528	539	550	11
12	492	504	516	528	540	552	564	576	588	600	12
13	533	546	559	572	585	598	611	624	637	650	13
14	574	588	602	616	630	644	658	672	686	700	14
15	615	630	645	660	675	690	705	720	735	750	15
16	656	672	688	704	720	736	752	768	784	800	16
17	697	714	731	748	765	782	799	816	833	850	17
18	738	756	774	792	810	828	846	864	882	900	18
19	779	798	817	836	855	874	893	912	931	950	19
20	820	840	860	880	900	920	940	960	980	1000	20
21	861	882	903	924	945	966	987	1008	1029	1050	21
22	902	924	946	968	990	1012	1034	1056	1078	1100	22
23	943	966	989	1012	1035	1058	1081	1104	1127	1150	23
24	984	1008	1032	1056	1080	1104	1128	1152	1176	1200	24
25	1025	1050	1075	1100	1125	1150	1175	1200	1225	1250	25
26	1066	1092	1118	1144	1170	1196	1222	1248	1274	1300	26
27	1107	1134	1161	1188	1215	1242	1269	1296	1323	1350	27
28	1148	1176	1204	1232	1260	1288	1316	1344	1372	1400	28
29	1189	1218	1247	1276	1305	1334	1363	1392	1421	1450	29
30	1230	1260	1290	1320	1350	1380	1410	1440	1470	1500	30
31	1271	1302	1333	1364	1395	1426	1457	1488	1519	1550	31
32	1312	1344	1376	1408	1440	1472	1504	1536	1568	1600	32
33	1353	1386	1419	1452	1485	1518	1551	1584	1617	1650	33
34	1394	1428	1462	1496	1530	1564	1598	1632	1666	1700	34
35	1435	1470	1505	1540	1575	1610	1645	1680	1715	1750	35
36	1476	1512	1548	1584	1620	1656	1692	1728	1764	1800	36
37	1517	1554	1591	1628	1665	1702	1739	1776	1813	1850	37
38	1558	1596	1634	1672	1710	1748	1786	1824	1862	1900	38
39	1599	1638	1677	1716	1755	1794	1833	1872	1911	1950	39
40	1640	1680	1720	1760	1800	1840	1880	1920	1960	2000	40
41	1681	1722	1763	1804	1845	1886	1927	1968	2009	2050	41
42	1722	1764	1806	1848	1890	1932	1974	2016	2058	2100	42
43	1763	1806	1849	1892	1935	1978	2021	2064	2107	2150	43
44	1804	1848	1892	1936	1980	2024	2068	2112	2156	2200	44
45	1845	1890	1935	1980	2025	2070	2115	2160	2205	2250	45
46	1886	1932	1978	2024	2070	2116	2162	2208	2254	2300	46
47	1927	1974	2021	2068	2115	2162	2209	2256	2303	2350	47
48	1968	2016	2064	2112	2160	2208	2256	2304	2352	2400	48
49	2009	2058	2107	2156	2205	2254	2303	2352	2401	2450	49
50	2050	2100	2150	2200	2250	2300	2350	2400	2450	2500	50
	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	

	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	
51	2091	2142	2193	2244	2295	2346	2397	2448	2499	2550	51
52	2132	2184	2236	2288	2340	2392	2444	2496	2548	2600	52
53	2173	2226	2279	2332	2385	2438	2491	2544	2597	2650	53
54	2214	2268	2322	2376	2430	2484	2538	2592	2646	2700	54
55	2255	2310	2365	2420	2475	2530	2585	2640	2695	2750	55
56	2296	2352	2408	2464	2520	2576	2632	2688	2744	2800	56
57	2337	2394	2451	2508	2565	2622	2679	2736	2793	2850	57
58	2378	2436	2494	2552	2610	2668	2726	2784	2842	2900	58
59	2419	2478	2537	2596	2655	2714	2773	2832	2891	2950	59
60	2460	2520	2580	2640	2700	2760	2820	2880	2940	3000	60
61	2501	2562	2623	2684	2745	2806	2867	2928	2989	3050	61
62	2542	2604	2666	2728	2790	2852	2914	2976	3038	3100	62
63	2583	2646	2709	2772	2835	2898	2961	3024	3087	3150	63
64	2624	2688	2752	2816	2880	2944	3008	3072	3136	3200	64
65	2665	2730	2795	2860	2925	2990	3055	3120	3185	3250	65
66	2706	2772	2838	2904	2970	3036	3102	3168	3234	3300	66
67	2747	2814	2881	2948	3015	3082	3149	3216	3283	3350	67
68	2788	2856	2924	2992	3060	3128	3196	3264	3332	3400	68
69	2829	2898	2967	3036	3105	3174	3243	3312	3381	3450	69
70	2870	2940	3010	3080	3150	3220	3290	3360	3430	3500	70
71	2911	2982	3053	3124	3195	3266	3337	3408	3479	3550	71
72	2952	3024	3096	3168	3240	3312	3384	3456	3528	3600	72
73	2993	3066	3139	3212	3285	3358	3431	3504	3577	3650	73
74	3034	3108	3182	3256	3330	3404	3478	3552	3626	3700	74
75	3075	3150	3225	3300	3375	3450	3525	3600	3675	3750	75
76	3116	3192	3268	3344	3420	3496	3572	3648	3724	3800	76
77	3157	3234	3311	3388	3465	3542	3619	3696	3773	3850	77
78	3198	3276	3354	3432	3510	3588	3666	3744	3822	3900	78
79	3239	3318	3397	3476	3555	3634	3713	3792	3871	3950	79
80	3280	3360	3440	3520	3600	3680	3760	3840	3920	4000	80
81	3321	3402	3483	3564	3645	3726	3807	3888	3969	4050	81
82	3362	3444	3526	3608	3690	3772	3854	3936	4018	4100	82
83	3403	3486	3569	3652	3735	3818	3901	3984	4067	4150	83
84	3444	3528	3612	3696	3780	3864	3948	4032	4116	4200	84
85	3485	3570	3655	3740	3825	3910	3995	4080	4165	4250	85
86	3526	3612	3698	3784	3870	3956	4042	4128	4214	4300	86
87	3567	3654	3741	3828	3915	4002	4089	4176	4263	4350	87
88	3608	3696	3784	3872	3960	4048	4136	4224	4312	4400	88
89	3649	3738	3827	3916	4005	4094	4183	4272	4361	4450	89
90	3690	3780	3870	3960	4050	4140	4230	4320	4410	4500	90
91	3731	3822	3913	4004	4095	4186	4277	4368	4459	4550	91
92	3772	3864	3956	4048	4140	4232	4324	4416	4508	4600	92
93	3813	3906	3999	4092	4185	4278	4371	4464	4557	4650	93
94	3854	3948	4042	4136	4230	4324	4418	4512	4606	4700	94
95	3895	3990	4085	4180	4275	4370	4465	4560	4655	4750	95
96	3936	4032	4128	4224	4320	4416	4512	4608	4704	4800	96
97	3977	4074	4171	4268	4365	4462	4559	4656	4753	4850	97
98	4018	4116	4214	4312	4410	4508	4606	4704	4802	4900	98
99	4059	4158	4257	4356	4455	4554	4653	4752	4851	4950	99
100	4100	4200	4300	4400	4500	4600	4700	4800	4900	5000	100
	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	

	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	
1	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	1
2	102	104	106	108	110	112	114	116	118	120	2
3	153	156	159	162	165	168	171	174	177	180	3
4	204	208	212	216	220	224	228	232	236	240	4
5	255	260	265	270	275	280	285	290	295	300	5
6	306	312	318	324	330	336	342	348	354	360	6
7	357	364	371	378	385	392	399	406	413	420	7
8	408	416	424	432	440	448	456	464	472	480	8
9	459	468	477	486	495	504	513	522	531	540	9
10	510	520	530	540	550	560	570	580	590	600	10
11	561	572	583	594	605	616	627	638	649	660	11
12	612	624	636	648	660	672	684	696	708	720	12
13	663	676	689	702	715	728	741	754	767	780	13
14	714	728	742	756	770	784	798	812	826	840	14
15	765	780	795	810	825	840	855	870	885	900	15
16	816	832	848	864	880	896	912	928	944	960	16
17	867	884	901	918	935	952	969	986	1003	1020	17
18	918	936	954	972	990	1008	1026	1044	1062	1080	18
19	969	988	1007	1026	1045	1064	1083	1102	1121	1140	19
20	1020	1040	1060	1080	1100	1120	1140	1160	1180	1200	20
21	1071	1092	1113	1134	1155	1176	1197	1218	1239	1260	21
22	1122	1144	1166	1188	1210	1232	1254	1276	1298	1320	22
23	1173	1196	1219	1242	1265	1288	1311	1334	1357	1380	23
24	1224	1248	1272	1296	1320	1344	1368	1392	1416	1440	24
25	1275	1300	1325	1350	1375	1400	1425	1450	1475	1500	25
26	1326	1352	1378	1404	1430	1456	1482	1508	1534	1560	26
27	1377	1404	1431	1458	1485	1512	1539	1566	1593	1620	27
28	1428	1456	1484	1512	1540	1568	1596	1624	1652	1680	28
29	1479	1508	1537	1566	1595	1624	1653	1682	1711	1740	29
30	1530	1560	1590	1620	1650	1680	1710	1740	1770	1800	30
31	1581	1612	1643	1674	1705	1736	1767	1798	1829	1860	31
32	1632	1664	1696	1728	1760	1792	1824	1856	1888	1920	32
33	1683	1716	1749	1782	1815	1848	1881	1914	1947	1980	33
34	1734	1768	1802	1836	1870	1904	1938	1972	2006	2040	34
35	1785	1820	1855	1890	1925	1960	1995	2030	2065	2100	35
36	1836	1872	1908	1944	1980	2016	2052	2088	2124	2160	36
37	1887	1924	1961	1998	2035	2072	2109	2146	2183	2220	37
38	1938	1976	2014	2052	2090	2128	2166	2204	2242	2280	38
39	1989	2028	2067	2106	2145	2184	2223	2262	2301	2340	39
40	2040	2080	2120	2160	2200	2240	2280	2320	2360	2400	40
41	2091	2132	2173	2214	2255	2296	2337	2378	2419	2460	41
42	2142	2184	2226	2268	2310	2352	2394	2436	2478	2520	42
43	2193	2236	2279	2322	2365	2408	2451	2494	2537	2580	43
44	2244	2288	2332	2376	2420	2464	2508	2552	2596	2640	44
45	2295	2340	2385	2430	2475	2520	2565	2610	2655	2700	45
46	2346	2392	2438	2484	2530	2576	2622	2668	2714	2760	46
47	2397	2444	2491	2538	2585	2632	2679	2726	2773	2820	47
48	2448	2496	2544	2592	2640	2688	2736	2784	2832	2880	48
49	2499	2548	2597	2646	2695	2744	2793	2842	2891	2940	49
50	2550	2600	2650	2700	2750	2800	2850	2900	2950	3000	50
	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	

	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	
51	2801	2652	2703	2754	2805	2856	2907	3958	3009	3060	51
52	2852	2704	2756	2808	2860	2912	2964	3016	3068	3120	52
53	2703	2756	2809	2862	2915	2968	3021	3074	3127	3180	53
54	2754	2808	2862	2916	2970	3024	3078	3132	3186	3240	54
55	2805	2860	2915	2970	3025	3080	3135	3190	3245	3300	55
56	2856	2912	2968	3024	3080	3136	3192	3248	3304	3360	56
57	2907	2964	3021	3078	3135	3192	3249	3306	3363	3420	57
58	2958	3016	3074	3132	3190	3248	3306	3364	3422	3480	58
59	3009	3068	3127	3186	3245	3304	3363	3422	3481	3540	59
60	3060	3120	3180	3240	3300	3360	3420	3480	3540	3600	60
61	3111	3172	3233	3294	3355	3416	3477	3538	3599	3660	61
62	3162	3224	3286	3348	3410	3472	3534	3596	3658	3720	62
63	3213	3276	3339	3402	3465	3528	3591	3654	3717	3780	63
64	3264	3328	3392	3456	3520	3584	3648	3712	3776	3840	64
65	3315	3380	3445	3510	3575	3640	3705	3770	3835	3900	65
66	3366	3432	3498	3564	3630	3696	3762	3828	3894	3960	66
67	3417	3484	3551	3618	3685	3752	3819	3886	3953	4020	67
68	3468	3536	3604	3672	3740	3808	3876	3944	4012	4080	68
69	3519	3588	3657	3726	3795	3864	3933	4002	4071	4140	69
70	3570	3640	3710	3780	3850	3920	3990	4060	4130	4200	70
71	3621	3692	3763	3834	3905	3976	4047	4118	4189	4260	71
72	3672	3744	3816	3888	3960	4032	4104	4176	4248	4320	72
73	3723	3796	3869	3942	4015	4088	4161	4234	4307	4380	73
74	3774	3848	3922	3996	4070	4144	4218	4292	4366	4440	74
75	3825	3900	3975	4050	4125	4200	4275	4350	4425	4500	75
76	3876	3952	4028	4104	4180	4256	4332	4408	4484	4560	76
77	3927	4004	4081	4158	4235	4312	4389	4466	4543	4620	77
78	3978	4056	4134	4212	4290	4368	4446	4524	4602	4680	78
79	4029	4108	4187	4266	4345	4424	4503	4582	4661	4740	79
80	4080	4160	4240	4320	4400	4480	4560	4640	4720	4800	80
81	4131	4212	4293	4374	4455	4536	4617	4698	4779	4860	81
82	4182	4264	4346	4428	4510	4592	4674	4756	4838	4920	82
83	4233	4316	4399	4482	4565	4648	4731	4814	4897	4980	83
84	4284	4368	4452	4536	4620	4704	4788	4872	4956	5040	84
85	4335	4420	4505	4590	4675	4760	4845	4930	5015	5100	85
86	4386	4472	4558	4644	4730	4816	4902	4988	5074	5160	86
87	4437	4524	4611	4698	4785	4872	4959	5046	5133	5220	87
88	4488	4576	4664	4752	4840	4928	5016	5104	5192	5280	88
89	4539	4628	4717	4806	4895	4984	5073	5162	5251	5340	89
90	4590	4680	4770	4860	4950	5040	5130	5220	5310	5400	90
91	4641	4732	4823	4914	5005	5096	5187	5278	5369	5460	91
92	4692	4784	4876	4968	5060	5152	5244	5336	5428	5520	92
93	4743	4836	4929	5022	5115	5208	5301	5394	5487	5580	93
94	4794	4888	4982	5076	5170	5264	5358	5452	5546	5640	94
95	4845	4940	5035	5130	5225	5320	5415	5510	5605	5700	95
96	4896	4992	5088	5184	5280	5376	5472	5568	5664	5760	96
97	4947	5044	5141	5238	5335	5432	5529	5626	5723	5820	97
98	4998	5096	5194	5292	5390	5488	5586	5684	5782	5880	98
99	5049	5148	5247	5346	5445	5544	5643	5742	5841	5940	99
100	5100	5200	5300	5400	5500	5600	5700	5800	5900	6000	100
	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	

	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	
1	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	1
2	122	124	126	128	130	132	134	136	138	140	2
3	183	186	189	192	195	198	201	204	207	210	3
4	244	248	252	256	260	264	268	272	276	280	4
5	305	310	315	320	325	330	335	340	345	350	5
6	366	372	378	384	390	396	402	408	414	420	6
7	427	434	441	448	455	462	469	476	483	490	7
8	488	496	504	512	520	528	536	544	552	560	8
9	549	558	567	576	585	594	603	612	621	630	9
10	610	620	630	640	650	660	670	680	690	700	10
11	671	682	693	704	715	726	737	748	759	770	11
12	732	744	756	768	780	792	804	816	828	840	12
13	793	806	819	832	845	858	871	884	897	910	13
14	854	868	882	896	910	924	938	952	966	980	14
15	915	930	945	960	975	990	1005	1020	1035	1050	15
16	976	992	1008	1024	1040	1056	1072	1088	1104	1120	16
17	1037	1054	1071	1088	1105	1122	1139	1156	1173	1190	17
18	1098	1116	1134	1152	1170	1188	1206	1224	1242	1260	18
19	1159	1178	1197	1216	1235	1254	1273	1292	1311	1330	19
20	1220	1240	1260	1280	1300	1320	1340	1360	1380	1400	20
21	1281	1302	1323	1344	1365	1386	1407	1428	1449	1470	21
22	1342	1364	1386	1408	1430	1452	1474	1496	1518	1540	22
23	1403	1426	1449	1472	1495	1518	1541	1564	1587	1610	23
24	1464	1488	1512	1536	1560	1584	1608	1632	1656	1680	24
25	1525	1550	1575	1600	1625	1650	1675	1700	1725	1750	25
26	1586	1612	1638	1664	1690	1716	1742	1768	1794	1820	26
27	1647	1674	1701	1728	1755	1782	1809	1836	1863	1890	27
28	1708	1736	1764	1792	1820	1848	1876	1904	1932	1960	28
29	1769	1798	1827	1856	1885	1914	1943	1972	2001	2030	29
30	1830	1860	1890	1920	1950	1980	2010	2040	2070	2100	30
31	1891	1922	1953	1984	2015	2046	2077	2108	2139	2170	31
32	1952	1984	2016	2048	2080	2112	2144	2176	2208	2240	32
33	2013	2046	2079	2112	2145	2178	2211	2244	2277	2310	33
34	2074	2108	2142	2176	2210	2244	2278	2312	2346	2380	34
35	2135	2170	2205	2240	2275	2310	2345	2380	2415	2450	35
36	2196	2232	2268	2304	2340	2376	2412	2448	2484	2520	36
37	2257	2294	2331	2368	2405	2442	2479	2516	2553	2590	37
38	2318	2356	2394	2432	2470	2508	2546	2584	2622	2660	38
39	2379	2418	2457	2496	2535	2574	2613	2652	2691	2730	39
40	2440	2480	2520	2560	2600	2640	2680	2720	2760	2800	40
41	2501	2542	2583	2624	2665	2706	2747	2788	2829	2870	41
42	2562	2604	2646	2688	2730	2772	2814	2856	2898	2940	42
43	2623	2666	2709	2752	2795	2838	2881	2924	2967	3010	43
44	2684	2728	2772	2816	2860	2904	2948	2992	3036	3080	44
45	2745	2790	2835	2880	2925	2970	3015	3060	3105	3150	45
46	2806	2852	2898	2944	2990	3036	3082	3128	3174	3220	46
47	2867	2914	2961	3008	3055	3102	3149	3196	3243	3290	47
48	2928	2976	3024	3072	3120	3168	3216	3264	3312	3360	48
49	2989	3038	3087	3136	3185	3234	3283	3332	3381	3430	49
50	3050	3100	3150	3200	3250	3300	3350	3400	3450	3500	50
	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	

附 錄

163

	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	
51	3111	3162	3213	3264	3315	3366	3417	3468	3519	3570	51
52	3172	3224	3276	3328	3380	3432	3484	3536	3588	3640	52
53	3233	3286	3339	3392	3445	3498	3551	3604	3657	3710	53
54	3294	3348	3402	3456	3510	3564	3618	3672	3726	3780	54
55	3355	3410	3465	3520	3575	3630	3685	3740	3795	3850	55
56	3416	3472	3528	3584	3640	3696	3752	3808	3864	3920	56
57	3477	3534	3591	3648	3705	3762	3819	3876	3933	3990	57
58	3538	3596	3654	3712	3770	3828	3886	3944	4002	4060	58
59	3599	3658	3717	3776	3835	3894	3953	4012	4071	4130	59
60	3660	3720	3780	3840	3900	3960	4020	4080	4140	4200	60
61	3721	3782	3843	3904	3965	4026	4087	4148	4209	4270	61
62	3782	3844	3906	3968	4030	4092	4154	4216	4278	4340	62
63	3843	3906	3969	4032	4095	4158	4221	4284	4347	4410	63
64	3904	3968	4032	4096	4160	4224	4288	4352	4416	4480	64
65	3965	4030	4095	4160	4225	4290	4355	4420	4485	4550	65
66	4026	4092	4158	4224	4290	4356	4422	4488	4554	4620	66
67	4087	4154	4221	4288	4355	4422	4489	4556	4623	4690	67
68	4148	4216	4284	4352	4420	4488	4556	4624	4692	4760	68
69	4209	4278	4347	4416	4485	4554	4623	4692	4761	4830	69
70	4270	4340	4410	4480	4550	4620	4690	4760	4830	4900	70
71	4331	4402	4473	4544	4615	4686	4757	4828	4899	4970	71
72	4392	4464	4536	4608	4680	4752	4824	4896	4968	5040	72
73	4453	4526	4599	4672	4745	4818	4891	4964	5037	5110	73
74	4514	4588	4662	4736	4810	4884	4958	5032	5106	5180	74
75	4575	4650	4725	4800	4875	4950	5025	5100	5175	5250	75
76	4636	4712	4788	4864	4940	5016	5092	5168	5244	5320	76
77	4697	4774	4851	4928	5005	5082	5159	5236	5313	5390	77
78	4758	4836	4914	4992	5070	5148	5226	5304	5382	5460	78
79	4819	4898	4977	5056	5135	5214	5293	5372	5451	5530	79
80	4880	4960	5040	5120	5200	5280	5360	5440	5520	5600	80
81	4941	5022	5103	5184	5265	5346	5427	5508	5589	5670	81
82	5002	5084	5166	5248	5330	5412	5494	5576	5658	5740	82
83	5063	5146	5229	5312	5395	5478	5561	5644	5727	5810	83
84	5124	5208	5292	5376	5460	5544	5628	5712	5796	5880	84
85	5185	5270	5355	5440	5525	5610	5695	5780	5865	5950	85
86	5246	5332	5418	5504	5590	5676	5762	5848	5934	6020	86
87	5307	5394	5481	5568	5655	5742	5829	5916	6003	6090	87
88	5368	5456	5544	5632	5720	5808	5896	5984	6072	6160	88
89	5429	5518	5607	5696	5785	5874	5963	6052	6141	6230	89
90	5490	5580	5670	5760	5850	5940	6030	6120	6210	6300	90
91	5551	5642	5733	5824	5915	6006	6097	6188	6279	6370	91
92	5612	5704	5796	5888	5980	6072	6164	6256	6348	6440	92
93	5673	5766	5859	5952	6045	6138	6231	6324	6417	6510	93
94	5734	5828	5922	6016	6110	6204	6298	6392	6486	6580	94
95	5795	5890	5985	6080	6175	6270	6365	6460	6555	6650	95
96	5856	5952	6048	6144	6240	6336	6432	6528	6624	6720	96
97	5917	6014	6111	6208	6305	6402	6499	6596	6693	6790	97
98	5978	6076	6174	6272	6370	6468	6566	6664	6762	6860	98
99	6039	6138	6237	6336	6435	6534	6633	6732	6831	6930	99
100	6100	6200	6300	6400	6500	6600	6700	6800	6900	7000	100
	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	

	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	
1	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	1
2	142	144	146	148	150	152	154	156	158	160	2
3	213	216	219	222	225	228	231	234	237	240	3
4	284	288	292	296	300	304	308	312	316	320	4
5	355	360	365	370	375	380	385	390	395	400	5
6	426	432	438	444	450	456	462	468	474	480	6
7	497	504	511	518	525	532	539	546	553	560	7
8	568	576	584	592	600	608	616	624	632	640	8
9	639	648	657	666	675	684	693	702	711	720	9
10	710	720	730	740	750	760	770	780	790	800	10
11	781	792	803	814	825	836	847	858	869	880	11
12	852	864	876	888	900	912	924	936	948	960	12
13	923	936	949	962	975	988	1001	1014	1027	1040	13
14	994	1008	1022	1036	1050	1064	1078	1092	1106	1120	14
15	1065	1080	1095	1110	1125	1140	1155	1170	1185	1200	15
16	1136	1152	1168	1184	1200	1216	1232	1248	1264	1280	16
17	1207	1224	1241	1258	1275	1292	1309	1326	1343	1360	17
18	1278	1296	1314	1332	1350	1368	1386	1404	1422	1440	18
19	1349	1368	1387	1406	1425	1444	1463	1482	1501	1520	19
20	1420	1440	1460	1480	1500	1520	1540	1560	1580	1600	20
21	1491	1512	1533	1554	1575	1596	1617	1638	1659	1680	21
22	1562	1584	1606	1628	1650	1672	1694	1716	1738	1760	22
23	1633	1656	1679	1702	1725	1748	1771	1794	1817	1840	23
24	1704	1728	1752	1776	1800	1824	1848	1872	1896	1920	24
25	1775	1800	1825	1850	1875	1900	1925	1950	1975	2000	25
26	1846	1872	1898	1924	1950	1976	2002	2028	2054	2080	26
27	1917	1944	1971	1998	2025	2052	2079	2106	2133	2160	27
28	1988	2016	2044	2072	2100	2128	2156	2184	2212	2240	28
29	2059	2088	2117	2146	2175	2204	2233	2262	2291	2320	29
30	2130	2160	2190	2220	2250	2280	2310	2340	2370	2400	30
31	2201	2232	2263	2294	2325	2356	2387	2418	2449	2480	31
32	2272	2304	2336	2368	2400	2432	2464	2496	2528	2560	32
33	2343	2376	2409	2442	2475	2508	2541	2574	2607	2640	33
34	2414	2448	2482	2516	2550	2584	2618	2652	2686	2720	34
35	2485	2520	2555	2590	2625	2660	2695	2730	2765	2800	35
36	2556	2592	2628	2664	2700	2736	2772	2808	2844	2880	36
37	2627	2664	2701	2738	2775	2812	2849	2886	2923	2960	37
38	2698	2736	2774	2812	2850	2888	2926	2964	3002	3040	38
39	2769	2808	2847	2886	2925	2964	3003	3042	3081	3120	39
40	2840	2880	2920	2960	3000	3040	3080	3120	3160	3200	40
41	2911	2952	2993	3034	3075	3116	3157	3198	3239	3280	41
42	2982	3024	3066	3108	3150	3192	3234	3276	3318	3360	42
43	3053	3096	3139	3182	3225	3268	3311	3354	3397	3440	43
44	3124	3168	3212	3256	3300	3344	3388	3432	3476	3520	44
45	3195	3240	3285	3330	3375	3420	3465	3510	3555	3600	45
46	3266	3312	3358	3404	3450	3496	3542	3588	3634	3680	46
47	3337	3384	3431	3478	3525	3572	3619	3666	3713	3760	47
48	3408	3456	3504	3552	3600	3648	3696	3744	3792	3840	48
49	3479	3528	3577	3626	3675	3724	3773	3822	3871	3920	49
50	3550	3600	3650	3700	3750	3800	3850	3900	3950	4000	50
	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	

	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	
51	3621	3672	3723	3774	3825	3876	3927	3978	4029	4080	51
52	3692	3744	3796	3848	3900	3952	4004	4056	4108	4160	52
53	3763	3816	3869	3922	3975	4028	4081	4134	4187	4240	53
54	3834	3888	3942	3996	4050	4104	4158	4212	4266	4320	54
55	3905	3960	4015	4070	4125	4180	4235	4290	4345	4400	55
56	3976	4032	4088	4144	4200	4256	4312	4368	4424	4480	56
57	4047	4104	4161	4218	4275	4332	4389	4446	4503	4560	57
58	4118	4176	4234	4292	4350	4408	4466	4524	4582	4640	58
59	4189	4248	4307	4366	4425	4484	4543	4602	4661	4720	59
60	4260	4320	4380	4440	4500	4560	4620	4680	4740	4800	60
61	4331	4392	4453	4514	4575	4636	4697	4758	4819	4880	61
62	4402	4464	4526	4588	4650	4712	4774	4836	4898	4960	62
63	4473	4536	4599	4662	4725	4788	4851	4914	4977	5040	63
64	4544	4608	4672	4736	4800	4864	4928	4992	5056	5120	64
65	4615	4680	4745	4810	4875	4940	5005	5070	5135	5200	65
66	4686	4752	4818	4884	4950	5016	5082	5148	5214	5280	66
67	4757	4824	4891	4958	5025	5092	5159	5226	5293	5360	67
68	4828	4896	4964	5032	5100	5168	5236	5304	5372	5440	68
69	4899	4968	5037	5106	5175	5244	5313	5382	5451	5520	69
70	4970	5040	5110	5180	5250	5320	5390	5460	5530	5600	70
71	5041	5112	5183	5254	5325	5396	5467	5538	5609	5680	71
72	5112	5184	5256	5328	5400	5472	5544	5616	5688	5760	72
73	5183	5256	5329	5402	5475	5548	5621	5694	5767	5840	73
74	5254	5328	5402	5476	5550	5624	5698	5772	5846	5920	74
75	5325	5400	5475	5550	5625	5700	5775	5850	5925	6000	75
76	5396	5482	5548	5624	5700	5776	5852	5928	6004	6080	76
77	5467	5544	5621	5698	5775	5852	5929	6006	6083	6160	77
78	5538	5616	5694	5772	5850	5928	6006	6084	6162	6240	78
79	5609	5688	5767	5846	5925	6004	6083	6162	6241	6320	79
80	5680	5760	5840	5920	6000	6080	6160	6240	6320	6400	80
81	5751	5832	5913	5994	6075	6156	6237	6318	6399	6480	81
82	5822	5904	5986	6068	6150	6232	6314	6396	6478	6560	82
83	5893	5976	6059	6142	6225	6308	6391	6474	6557	6640	83
84	5964	6048	6132	6216	6300	6384	6468	6552	6636	6720	84
85	6035	6120	6205	6290	6375	6460	6545	6630	6715	6800	85
86	6106	6192	6278	6364	6450	6536	6622	6708	6794	6880	86
87	6177	6264	6351	6438	6525	6612	6699	6786	6873	6960	87
88	6248	6336	6424	6512	6600	6688	6776	6864	6952	7040	88
89	6319	6408	6497	6586	6675	6764	6853	6942	7031	7120	89
90	6390	6480	6570	6660	6750	6840	6930	7020	7110	7200	90
91	6461	6552	6643	6734	6825	6916	7007	7098	7189	7280	91
92	6532	6624	6716	6808	6900	6992	7084	7176	7268	7360	92
93	6603	6696	6789	6882	6975	7068	7161	7254	7347	7440	93
94	6674	6768	6862	6956	7050	7144	7238	7332	7426	7520	94
95	6745	6840	6935	7030	7125	7220	7315	7410	7505	7600	95
96	6816	6912	7008	7104	7200	7296	7392	7488	7584	7680	96
97	6887	6984	7081	7178	7275	7372	7469	7566	7663	7760	97
98	6958	7056	7154	7252	7350	7448	7546	7644	7742	7840	98
99	7029	7128	7227	7326	7425	7524	7623	7722	7821	7920	99
100	7100	7200	7300	7400	7500	7600	7700	7800	7900	8000	100
	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	

	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	
1	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	1
2	162	164	166	168	170	172	174	176	178	180	2
3	243	246	249	252	255	258	261	264	267	270	3
4	324	328	332	336	340	344	348	352	356	360	4
5	405	410	415	420	425	430	435	440	445	450	5
6	486	492	498	504	510	516	522	528	534	540	6
7	567	574	581	588	595	602	609	616	623	630	7
8	648	656	664	672	680	688	696	704	712	720	8
9	729	738	747	756	765	774	783	792	801	810	9
10	810	820	830	840	850	860	870	880	890	900	10
11	891	902	913	924	935	946	957	968	979	990	11
12	972	984	996	1008	1020	1032	1044	1056	1068	1080	12
13	1053	1066	1079	1092	1105	1118	1131	1144	1157	1170	13
14	1134	1148	1162	1176	1190	1204	1218	1232	1246	1260	14
15	1215	1230	1245	1260	1275	1290	1305	1320	1335	1350	15
16	1296	1312	1328	1344	1360	1376	1392	1408	1424	1440	16
17	1377	1394	1411	1428	1445	1462	1479	1496	1513	1530	17
18	1458	1476	1494	1512	1530	1548	1566	1584	1602	1620	18
19	1539	1558	1577	1596	1615	1634	1653	1672	1691	1710	19
20	1620	1640	1660	1680	1700	1720	1740	1760	1780	1800	20
21	1701	1722	1743	1764	1785	1806	1827	1848	1869	1890	21
22	1782	1804	1826	1848	1870	1892	1914	1936	1958	1980	22
23	1863	1886	1909	1932	1955	1978	2001	2024	2047	2070	23
24	1944	1968	1992	2016	2040	2064	2088	2112	2136	2160	24
25	2025	2050	2075	2100	2125	2150	2175	2200	2225	2250	25
26	2106	2132	2158	2184	2210	2236	2262	2288	2314	2340	26
27	2187	2214	2241	2268	2295	2322	2349	2376	2403	2430	27
28	2268	2296	2324	2352	2380	2408	2436	2464	2492	2520	28
29	2349	2378	2407	2436	2465	2494	2523	2552	2581	2610	29
30	2430	2460	2490	2520	2550	2580	2610	2640	2670	2700	30
31	2511	2542	2573	2604	2635	2666	2697	2728	2759	2790	31
32	2592	2624	2656	2688	2720	2752	2784	2816	2848	2880	32
33	2673	2706	2739	2772	2805	2838	2871	2904	2937	2970	33
34	2754	2788	2822	2856	2890	2924	2958	2992	3026	3060	34
35	2835	2870	2905	2940	2975	3010	3045	3080	3115	3150	35
36	2916	2952	2988	3024	3060	3096	3132	3168	3204	3240	36
37	2997	3034	3071	3108	3145	3182	3219	3256	3293	3330	37
38	3078	3116	3154	3192	3230	3268	3306	3344	3382	3420	38
39	3159	3198	3237	3276	3315	3354	3393	3432	3471	3510	39
40	3240	3280	3320	3360	3400	3440	3480	3520	3560	3600	40
41	3321	3362	3403	3444	3485	3526	3567	3608	3649	3690	41
42	3402	3444	3486	3528	3570	3612	3654	3696	3738	3780	42
43	3483	3526	3569	3612	3655	3698	3741	3784	3827	3870	43
44	3564	3608	3652	3696	3740	3784	3828	3872	3916	3960	44
45	3645	3690	3735	3780	3825	3870	3915	3960	4005	4050	45
46	3726	3772	3818	3864	3910	3956	4002	4048	4094	4140	46
47	3807	3854	3901	3948	3995	4042	4089	4136	4183	4230	47
48	3888	3936	3984	4032	4080	4128	4176	4224	4272	4320	48
49	3969	4018	4067	4116	4165	4214	4263	4312	4361	4410	49
50	4050	4100	4150	4200	4250	4300	4350	4400	4450	4500	50
	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	

	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	
51	4131	4182	4233	4284	4335	4386	4437	4488	4539	4590	51
52	4212	4264	4316	4368	4420	4472	4524	4576	4628	4680	52
53	4293	4346	4399	4452	4505	4558	4611	4664	4717	4770	53
54	4374	4428	4482	4536	4590	4644	4698	4752	4806	4860	54
55	4455	4510	4565	4620	4675	4730	4785	4840	4895	4950	55
56	4536	4592	4648	4704	4760	4816	4872	4928	4984	5040	56
57	4617	4674	4731	4788	4845	4902	4959	5016	5073	5130	57
58	4698	4756	4814	4872	4930	4988	5046	5104	5162	5220	58
59	4779	4838	4897	4956	5015	5074	5133	5192	5251	5310	59
60	4860	4920	4980	5040	5100	5160	5220	5280	5340	5400	60
61	4941	5002	5063	5124	5185	5246	5307	5368	5429	5490	61
62	5022	5084	5146	5208	5270	5332	5394	5456	5518	5580	62
63	5103	5166	5229	5292	5355	5418	5481	5544	5607	5670	63
64	5184	5248	5312	5376	5440	5504	5568	5632	5696	5760	64
65	5265	5330	5395	5460	5525	5590	5655	5720	5785	5850	65
66	5346	5412	5478	5544	5610	5676	5742	5808	5874	5940	66
67	5427	5494	5561	5628	5695	5762	5829	5896	5963	6030	67
68	5508	5576	5644	5712	5780	5848	5916	5984	6052	6120	68
69	5589	5658	5727	5796	5865	5934	6003	6072	6141	6210	69
70	5670	5740	5810	5880	5950	6020	6090	6160	6230	6300	70
71	5751	5822	5893	5964	6035	6106	6177	6248	6319	6390	71
72	5832	5904	5976	6048	6120	6192	6264	6336	6408	6480	72
73	5913	5986	6059	6132	6205	6278	6351	6424	6497	6570	73
74	5994	6068	6142	6216	6290	6364	6438	6512	6586	6660	74
75	6075	6150	6225	6300	6375	6450	6525	6600	6675	6750	75
76	6156	6232	6308	6384	6460	6536	6612	6688	6764	6840	76
77	6237	6314	6391	6468	6545	6622	6699	6776	6853	6930	77
78	6318	6396	6474	6552	6630	6708	6786	6864	6942	7020	78
79	6399	6478	6557	6636	6715	6794	6873	6952	7031	7110	79
80	6480	6560	6640	6720	6800	6880	6960	7040	7120	7200	80
81	6561	6642	6723	6804	6885	6966	7047	7128	7209	7290	81
82	6642	6724	6806	6888	6970	7052	7134	7216	7298	7380	82
83	6723	6806	6889	6972	7055	7138	7221	7304	7387	7470	83
84	6804	6888	6972	7056	7140	7224	7308	7392	7476	7560	84
85	6885	6970	7055	7140	7225	7310	7395	7480	7565	7650	85
86	6966	7052	7138	7224	7310	7396	7482	7568	7654	7740	86
87	7047	7134	7221	7308	7395	7482	7569	7656	7743	7830	87
88	7128	7216	7304	7392	7480	7568	7656	7744	7832	7920	88
89	7209	7298	7387	7476	7565	7654	7743	7832	7921	8010	89
90	7290	7380	7470	7560	7650	7740	7830	7920	8010	8100	90
91	7371	7462	7553	7644	7735	7826	7917	8008	8099	8190	91
92	7452	7544	7636	7728	7820	7912	8004	8096	8188	8280	92
93	7533	7626	7719	7812	7905	7998	8091	8184	8277	8370	93
94	7614	7708	7802	7896	7990	8084	8178	8272	8366	8460	94
95	7695	7790	7885	7980	8075	8170	8265	8360	8455	8550	95
96	7776	7872	7968	8064	8160	8256	8352	8448	8544	8640	96
97	7857	7954	8051	8148	8245	8342	8439	8536	8633	8730	97
98	7938	8036	8134	8232	8330	8428	8526	8624	8722	8820	98
99	8019	8118	8217	8316	8415	8514	8613	8712	8811	8910	99
100	8100	8200	8300	8400	8500	8600	8700	8800	8900	9000	100
	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	

	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	
1	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	1
2	182	184	186	188	190	192	194	196	198	200	2
3	273	276	279	282	285	288	291	294	297	300	3
4	364	368	372	376	380	384	388	392	396	400	4
5	455	460	465	470	475	480	485	490	495	500	5
6	546	552	558	564	570	576	582	588	594	600	6
7	637	644	651	658	665	672	679	686	693	700	7
8	728	736	744	752	760	768	776	784	792	800	8
9	819	828	837	846	855	864	873	882	891	900	9
10	910	920	930	940	950	960	970	980	990	1000	10
11	1001	1012	1023	1034	1045	1056	1067	1078	1089	1100	11
12	1092	1104	1116	1128	1140	1152	1164	1176	1188	1200	12
13	1183	1196	1209	1222	1235	1248	1261	1274	1287	1300	13
14	1274	1288	1302	1316	1330	1344	1358	1372	1386	1400	14
15	1365	1380	1395	1410	1425	1440	1455	1470	1485	1500	15
16	1456	1472	1488	1504	1520	1536	1552	1568	1584	1600	16
17	1547	1564	1581	1598	1615	1632	1649	1666	1683	1700	17
18	1638	1656	1674	1692	1710	1728	1746	1764	1782	1800	18
19	1729	1748	1767	1786	1805	1824	1843	1862	1881	1900	19
20	1820	1840	1860	1880	1900	1920	1940	1960	1980	2000	20
21	1911	1932	1953	1974	1995	2016	2037	2058	2079	2100	21
22	2002	2024	2046	2068	2090	2112	2134	2156	2178	2200	22
23	2093	2116	2139	2162	2185	2208	2231	2254	2277	2300	23
24	2184	2208	2232	2256	2280	2304	2328	2352	2376	2400	24
25	2275	2300	2325	2350	2375	2400	2425	2450	2475	2500	25
26	2366	2392	2418	2444	2470	2496	2522	2548	2574	2600	26
27	2457	2484	2511	2538	2565	2592	2619	2646	2673	2700	27
28	2548	2576	2604	2632	2660	2688	2716	2744	2772	2800	28
29	2639	2668	2697	2726	2755	2784	2813	2842	2871	2900	29
30	2730	2760	2790	2820	2850	2880	2910	2940	2970	3000	30
31	2821	2852	2883	2914	2945	2976	3007	3038	3069	3100	31
32	2912	2944	2976	3008	3040	3072	3104	3136	3168	3200	32
33	3003	3036	3069	3102	3135	3168	3201	3234	3267	3300	33
34	3094	3128	3162	3196	3230	3264	3298	3332	3366	3400	34
35	3185	3220	3255	3290	3325	3360	3395	3430	3465	3500	35
36	3276	3312	3348	3384	3420	3456	3492	3528	3564	3600	36
37	3367	3404	3441	3478	3515	3552	3589	3626	3663	3700	37
38	3458	3496	3534	3572	3610	3648	3686	3724	3762	3800	38
39	3549	3588	3627	3666	3705	3744	3783	3822	3861	3900	39
40	3640	3680	3720	3760	3800	3840	3880	3920	3960	4000	40
41	3731	3772	3813	3854	3895	3936	3977	4018	4059	4100	41
42	3822	3864	3906	3948	3990	4032	4074	4116	4158	4200	42
43	3913	3956	3999	4042	4085	4128	4171	4214	4257	4300	43
44	4004	4048	4092	4136	4180	4224	4268	4312	4356	4400	44
45	4095	4140	4185	4230	4275	4320	4365	4410	4455	4500	45
46	4186	4232	4278	4324	4370	4416	4462	4508	4554	4600	46
47	4277	4324	4371	4418	4465	4512	4559	4606	4653	4700	47
48	4368	4416	4464	4512	4560	4608	4656	4704	4752	4800	48
49	4459	4508	4557	4606	4655	4704	4753	4802	4851	4900	49
50	4550	4600	4650	4700	4750	4800	4850	4900	4950	5000	50
	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	

附 錄

	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	
51	4641	4692	4743	4794	4845	4896	4947	4998	5049	5100	51
52	4732	4784	4836	4888	4940	4992	5044	5096	5148	5200	52
53	4823	4876	4929	4982	5035	5088	5141	5194	5247	5300	53
54	4914	4968	5022	5076	5130	5184	5238	5292	5346	5400	54
55	5005	5060	5115	5170	5225	5280	5335	5390	5445	5500	55
56	5096	5152	5208	5264	5320	5376	5432	5488	5544	5600	56
57	5187	5244	5301	5358	5415	5472	5529	5586	5643	5700	57
58	5278	5336	5394	5452	5510	5568	5626	5684	5742	5800	58
59	5369	5428	5487	5546	5605	5664	5723	5782	5841	5900	59
60	5460	5520	5580	5640	5700	5760	5820	5880	5940	6000	60
61	5551	5612	5673	5734	5795	5856	5917	5978	6039	6100	61
62	5642	5704	5766	5828	5890	5952	6014	6076	6138	6200	62
63	5733	5796	5859	5922	5985	6048	6111	6174	6237	6300	63
64	5824	5888	5952	6016	6080	6144	6208	6272	6336	6400	64
65	5915	5980	6045	6110	6175	6240	6305	6370	6435	6500	65
66	6006	6072	6138	6204	6270	6336	6402	6468	6534	6600	66
67	6097	6164	6231	6298	6365	6432	6499	6566	6633	6700	67
68	6188	6256	6324	6392	6460	6528	6596	6664	6732	6800	68
69	6279	6348	6417	6486	6555	6624	6693	6762	6831	6900	69
70	6370	6440	6510	6580	6650	6720	6790	6860	6930	7000	70
71	6461	6532	6603	6674	6745	6816	6887	6958	7029	7100	71
72	6552	6624	6696	6768	6840	6912	6984	7056	7128	7200	72
73	6643	6716	6789	6862	6935	7008	7081	7154	7227	7300	73
74	6734	6808	6882	6956	7030	7104	7178	7252	7326	7400	74
75	6825	6900	6975	7050	7125	7200	7275	7350	7425	7500	75
76	6916	6992	7068	7144	7220	7296	7372	7448	7524	7600	76
77	7007	7084	7161	7238	7315	7392	7469	7546	7623	7700	77
78	7098	7176	7254	7332	7410	7488	7566	7644	7722	7800	78
79	7189	7268	7347	7426	7505	7584	7663	7742	7821	7900	79
80	7280	7360	7440	7520	7600	7680	7760	7840	7920	8000	80
81	7371	7452	7533	7614	7695	7776	7857	7938	8019	8100	81
82	7462	7544	7626	7708	7790	7872	7954	8036	8118	8200	82
83	7553	7636	7719	7802	7885	7968	8051	8134	8217	8300	83
84	7644	7728	7812	7896	7980	8064	8148	8232	8316	8400	84
85	7735	7820	7905	7990	8075	8160	8245	8330	8415	8500	85
86	7826	7912	7998	8084	8170	8256	8342	8428	8514	8600	86
87	7917	8004	8091	8178	8265	8352	8439	8526	8613	8700	87
88	8008	8096	8184	8272	8360	8448	8536	8624	8712	8800	88
89	8099	8188	8277	8366	8455	8544	8633	8722	8811	8900	89
90	8190	8280	8370	8460	8550	8640	8730	8820	8910	9000	90
91	8281	8372	8463	8554	8645	8736	8827	8918	9009	9100	91
92	8372	8464	8556	8648	8740	8832	8924	9016	9108	9200	92
93	8463	8556	8649	8742	8835	8928	9021	9114	9207	9300	93
94	8554	8648	8742	8836	8930	9024	9118	9212	9306	9400	94
95	8645	8740	8835	8930	9025	9120	9215	9310	9405	9500	95
96	8736	8832	8928	9024	9120	9216	9312	9408	9504	9600	96
97	8827	8924	9021	9118	9215	9312	9409	9506	9603	9700	97
98	8918	9016	9114	9212	9310	9408	9506	9604	9702	9800	98
99	9009	9108	9207	9306	9405	9504	9603	9702	9801	9900	99
100	9100	9200	9300	9400	9500	9600	9700	9800	9900	10000	100
	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	

VIII 平方與平方根表 (1至100)

數	平方	平方根	數	平方	平方根
1	1	1.000	51	26 01	7.141
2	4	1.414	52	27 04	7.211
3	9	1.732	53	28 09	7.280
4	16	2.000	54	29 16	7.348
5	25	2.236	55	30 25	7.416
6	36	2.449	56	31 36	7.483
7	49	2.646	57	32 49	7.550
8	64	2.828	58	33 64	7.616
9	81	3.000	59	34 81	7.681
10	1 00	3.162	60	36 00	7.746
11	1 21	3.317	61	37 21	7.810
12	1 44	3.464	62	38 44	7.874
13	1 69	3.606	63	39 69	7.937
14	1 96	3.742	64	40 96	8.000
15	2 25	3.873	65	42 25	8.062
16	2 56	4.000	66	43 56	8.124
17	2 89	4.123	67	44 89	8.185
18	3 24	4.243	68	46 24	8.246
19	3 61	4.359	69	47 61	8.307
20	4 00	4.472	70	49 00	8.367
21	4 41	4.583	71	50 41	8.426
22	4 84	4.690	72	51 84	8.485
23	5 29	4.796	73	53 29	8.544
24	5 76	4.899	74	54 76	8.602
25	6 25	5.000	75	56 25	8.660
26	6 76	5.099	76	57 76	8.718
27	7 29	5.196	77	59 29	8.775
28	7 84	5.292	78	60 84	8.832
29	8 41	5.385	79	62 41	8.888
30	9 00	5.477	80	64 00	8.944
31	9 61	5.568	81	65 61	9.000
32	10 24	5.657	82	67 24	9.055
33	10 89	5.745	83	68 89	9.110
34	11 56	5.831	84	70 56	9.165
35	12 25	5.916	85	72 25	9.220
36	12 96	6.000	86	73 96	9.274
37	13 69	6.083	87	75 69	9.327
38	14 44	6.164	88	77 44	9.381
39	15 21	6.245	89	79 21	9.434
40	16 00	6.325	90	81 00	9.487
41	16 81	6.403	91	82 81	9.539
42	17 64	6.481	92	84 64	9.592
43	18 49	6.557	93	86 49	9.644
44	19 36	6.633	94	88 36	9.695
45	20 25	6.708	95	90 25	9.747
46	21 16	6.782	96	92 16	9.798
47	22 09	6.856	97	94 09	9.849
48	23 04	6.928	98	96 04	9.899
49	24 01	7.000	99	98 01	9.950
50	25 00	7.071	100	100 00	10.000

數	平方	平方根	數	平方	平方根
101	1 02 01	10.050 ⁰	151	2 28 01	12.288
102	1 04 04	10.100	152	2 31 04	12.329
103	1 06 09	10.149	153	2 34 09	12.369
104	1 08 16	10.198	154	2 37 16	12.410
105	1 10 25	10.247	155	2 40 25	12.450
106	1 12 36	10.296	156	2 43 36	12.490
107	1 14 49	10.344	157	2 46 49	12.530
108	1 16 64	10.392	158	2 49 64	12.570
109	1 18 81	10.440	159	2 52 81	12.610
110	1 21 00	10.488	160	2 56 00	12.649
111	1 23 21	10.536	161	2 59 21	12.689
112	1 25 44	10.583	162	2 62 44	12.728
113	1 27 69	10.630	163	2 65 69	12.767
114	1 29 96	10.677	164	2 68 96	12.806
115	1 32 25	10.724	165	2 72 25	12.845
116	1 34 56	10.770	166	2 75 56	12.884
117	1 36 89	10.817	167	2 78 89	12.923
118	1 39 24	10.863	168	2 82 24	12.961
119	1 41 61	10.909	169	2 85 61	13.000
120	1 44 00	10.954	170	2 89 00	13.038
121	1 46 41	11.000	171	2 92 41	13.077
122	1 48 84	11.045	172	2 95 84	13.115
123	1 51 29	11.091	173	2 99 29	13.153
124	1 53 76	11.136	174	3 02 76	13.191
125	1 56 25	11.180	175	3 06 25	13.228
126	1 58 76	11.225	176	3 09 76	13.266
127	1 61 29	11.269	177	3 13 29	13.304
128	1 63 84	11.314	178	3 16 84	13.342
129	1 66 41	11.358	179	3 20 41	13.379
130	1 69 00	11.402	180	3 24 00	13.416
131	1 71 61	11.446	181	3 27 61	13.454
132	1 74 24	11.489	182	3 31 24	13.491
133	1 76 89	11.533	183	3 34 89	13.528
134	1 79 56	11.576	184	3 38 56	13.565
135	1 82 25	11.619	185	3 42 25	13.601
136	1 84 96	11.662	186	3 45 96	13.638
137	1 87 69	11.705	187	3 49 69	13.675
138	1 90 44	11.747	188	3 53 44	13.711
139	1 93 21	11.790	189	3 57 21	13.748
140	1 96 00	11.832	190	3 61 00	13.784
141	1 98 81	11.874	191	3 64 81	13.820
142	2 01 64	11.916	192	3 68 64	13.856
143	2 04 49	11.958	193	3 72 49	13.892
144	2 07 36	12.000	194	3 76 36	13.928
145	2 10 25	12.042	195	3 80 25	13.964
146	2 13 16	12.083	196	3 84 16	14.000
147	2 16 09	12.124	197	3 88 09	14.036
148	2 19 04	12.166	198	3 92 04	14.071
149	2 22 01	12.207	199	3 96 01	14.107
150	2 25 00	12.247	200	4 00 00	14.142

數	平方	平方根	數	平方	平方根
201	4 04 01	14.177	251	6 30 01	15.843
202	4 08 04	14.213	252	6 35 04	15.875
203	4 12 09	14.248	253	6 40 09	15.906
204	4 16 16	14.283	254	6 45 16	15.937
205	4 20 25	14.318	255	6 50 25	15.969
206	4 24 36	14.353	256	6 55 36	16.000
207	4 28 49	14.387	257	6 60 49	16.031
208	4 32 64	14.422	258	6 65 64	16.062
209	4 36 81	14.457	259	6 70 81	16.093
210	4 41 00	14.491	260	6 76 00	16.125
211	4 45 21	14.526	261	6 81 21	16.155
212	4 49 44	14.560	262	6 86 44	16.186
213	4 53 69	14.595	263	6 91 69	16.217
214	4 57 96	14.629	264	6 96 96	16.248
215	4 62 25	14.663	265	7 02 25	16.279
216	4 66 56	14.697	266	7 07 56	16.310
217	4 70 89	14.731	267	7 12 89	16.340
218	4 75 24	14.765	268	7 18 24	16.371
219	4 79 61	14.799	269	7 23 61	16.401
220	4 84 00	14.832	270	7 29 00	16.432
221	4 88 41	14.866	271	7 34 41	16.462
222	4 92 84	14.900	272	7 39 84	16.492
223	4 97 29	14.933	273	7 45 29	16.523
224	5 01 76	14.967	274	7 50 76	16.553
225	5 06 25	15.000	275	7 56 25	16.583
226	5 10 76	15.033	276	7 61 76	16.613
227	5 15 29	15.067	277	7 67 29	16.643
228	5 19 84	15.100	278	7 72 84	16.673
229	5 24 41	15.133	279	7 78 41	16.703
230	5 29 00	15.166	280	7 84 00	16.733
231	5 33 61	15.199	281	7 89 61	16.763
232	5 38 24	15.232	282	7 95 24	16.793
233	5 42 89	15.264	283	8 00 89	16.823
234	5 47 56	15.297	284	8 06 56	16.852
235	5 52 25	15.330	285	8 12 25	16.882
236	5 56 96	15.362	286	8 17 96	16.912
237	5 61 69	15.395	287	8 23 69	16.941
238	5 66 44	15.427	288	8 29 44	16.971
239	5 71 21	15.460	289	8 35 21	17.000
240	5 76 00	15.492	290	8 41 00	17.029
241	5 80 81	15.524	291	8 46 81	17.059
242	5 85 64	15.556	292	8 52 64	17.088
243	5 90 49	15.588	293	8 58 49	17.117
244	5 95 36	15.620	294	8 64 36	17.146
245	6 00 25	15.652	295	8 70 25	17.176
246	6 05 16	15.684	296	8 76 16	17.205
247	6 10 09	15.716	297	8 82 09	17.234
248	6 15 04	15.748	298	8 88 04	17.263
249	6 20 01	15.780	299	8 94 01	17.292
250	6 25 00	15.811	300	9 00 00	17.321

數	平方	平方根	數	平方	平方根
301	9 06 01	17.349	351	12 32 01	18.735
302	9 12 04	17.378	352	12 39 04	18.762
303	9 18 09	17.407	353	12 46 09	18.788
304	9 24 16	17.436	354	12 53 16	18.815
305	9 30 25	17.464	355	12 60 25	18.841
306	9 36 36	17.493	356	12 67 36	18.868
307	9 42 49	17.521	357	12 74 49	18.894
308	9 48 64	17.550	358	12 81 64	18.921
309	9 54 81	17.578	359	12 88 81	18.947
310	9 61 00	17.607	360	12 96 00	18.974
311	9 67 21	17.635	361	13 03 21	19.000
312	9 73 44	17.664	362	13 10 44	19.026
313	9 79 69	17.692	363	13 17 69	19.053
314	9 85 96	17.720	364	13 24 96	19.079
315	9 92 25	17.748	365	13 32 25	19.105
316	9 98 56	17.776	366	13 39 56	19.131
317	10 04 89	17.804	367	13 46 89	19.157
318	10 11 24	17.833	368	13 54 24	19.183
319	10 17 61	17.861	369	13 61 61	19.209
320	10 24 00	17.889	370	13 69 00	19.235
321	10 30 41	17.916	371	13 76 41	19.261
322	10 36 84	17.944	372	13 83 84	19.287
323	10 43 29	17.972	373	13 91 29	19.313
324	10 49 76	18.000	374	13 98 76	19.339
325	10 56 25	18.028	375	14 06 25	19.365
326	10 62 76	18.055	376	14 13 76	19.391
327	10 69 29	18.083	377	14 21 29	19.416
328	10 75 84	18.111	378	14 28 84	19.442
329	10 82 41	18.138	379	14 36 41	19.468
330	10 89 00	18.166	380	14 44 00	19.494
331	10 95 61	18.193	381	14 51 61	19.519
332	11 02 24	18.221	382	14 59 24	19.545
333	11 08 89	18.248	383	14 66 89	19.570
334	11 15 56	18.276	384	14 74 56	19.596
335	11 22 25	18.303	385	14 82 25	19.621
336	11 28 96	18.330	386	14 89 96	19.647
337	11 35 69	18.358	387	14 97 69	19.672
338	11 42 44	18.385	388	15 05 44	19.698
339	11 49 21	18.412	389	15 13 21	19.723
340	11 56 00	18.439	390	15 21 00	19.748
341	11 62 81	18.466	391	15 28 81	19.774
342	11 69 64	18.493	392	15 36 64	19.799
343	11 76 49	18.520	393	15 44 49	19.824
344	11 83 36	18.547	394	15 52 36	19.849
345	11 90 25	18.574	395	15 60 25	19.875
346	11 97 16	18.601	396	15 68 16	19.900
347	12 04 09	18.628	397	15 76 09	19.925
348	12 11 04	18.655	398	15 84 04	19.950
349	12 18 01	18.682	399	15 92 01	19.975
350	12 25 00	18.708	400	16 00 00	20.000

數	平方	平方根	數	平方	平方根
401	16 08 01	20.025	451	20 34 01	21.237
402	16 16 04	20.050	452	20 43 04	21.260
403	16 24 09	20.075	453	20 52 09	21.284
404	16 32 16	20.100	454	20 61 16	21.307
405	16 40 25	20.125	455	20 70 25	21.331
406	16 48 36	20.149	456	20 79 36	21.354
407	16 56 49	20.174	457	20 88 49	21.378
408	16 64 64	20.199	458	20 97 64	21.401
409	16 72 81	20.224	459	21 06 81	21.424
410	16 81 00	20.248	460	21 16 00	21.448
411	16 89 21	20.273	461	21 25 21	21.471
412	16 97 44	20.298	462	21 34 44	21.494
413	17 05 69	20.322	463	21 43 69	21.517
414	17 13 96	20.347	464	21 52 96	21.541
415	17 22 25	20.372	465	21 62 25	21.564
416	17 30 56	20.396	466	21 71 56	21.587
417	17 38 89	20.421	467	21 80 89	21.610
418	17 47 24	20.445	468	21 90 24	21.633
419	17 55 61	20.469	469	21 99 61	21.656
420	17 64 00	20.494	470	22 09 00	21.679
421	17 72 41	20.518	471	22 18 41	21.703
422	17 80 84	20.543	472	22 27 84	21.726
423	17 89 29	20.567	473	22 37 29	21.749
424	17 97 76	20.591	474	22 46 76	21.772
425	18 06 25	20.616	475	22 56 25	21.794
426	18 14 76	20.640	476	22 65 76	21.817
427	18 23 29	20.664	477	22 75 29	21.840
428	18 31 84	20.688	478	22 84 84	21.863
429	18 40 41	20.712	479	22 94 41	21.886
430	18 49 00	20.736	480	23 04 00	21.909
431	18 57 61	20.761	481	23 13 61	21.932
432	18 66 24	20.785	482	23 23 24	21.954
433	18 74 89	20.809	483	23 32 89	21.977
434	18 83 56	20.833	484	23 42 56	22.000
435	18 92 25	20.857	485	23 52 25	22.023
436	19 00 96	20.881	486	23 61 96	22.045
437	19 09 69	20.905	487	23 71 69	22.068
438	19 18 44	20.928	488	23 81 44	22.091
439	19 27 21	20.952	489	23 91 21	22.113
440	19 36 00	20.976	490	24 01 00	22.136
441	19 44 81	21.000	491	24 10 81	22.159
442	19 53 64	21.024	492	24 20 64	22.181
443	19 62 49	21.048	493	24 30 49	22.204
444	19 71 36	21.071	494	24 40 36	22.226
445	19 80 25	21.095	495	24 50 25	22.249
446	19 89 16	21.119	496	24 60 16	22.271
447	19 98 09	21.142	497	24 70 09	22.293
448	20 07 04	21.166	498	24 80 04	22.316
449	20 16 01	21.190	499	24 90 01	22.338
450	20 25 00	21.213	500	25 00 00	22.361

數	平方	平方根	數	平方	平方根
501	25 10 01	22.383	551	30 36 01	23.473
502	25 20 04	22.405	552	30 47 04	23.495
503	25 30 09	22.428	553	30 58 09	23.516
504	25 40 16	22.450	554	30 69 16	23.537
505	25 50 25	22.472	555	30 80 25	23.558
506	25 60 36	22.494	556	30 91 36	23.580
507	25 70 49	22.517	557	31 02 49	23.601
508	25 80 64	22.539	558	31 13 64	23.622
509	25 90 81	22.561	559	31 24 81	23.643
510	26 01 00	22.583	560	31 36 00	23.664
511	26 11 21	22.605	561	31 47 21	23.685
512	26 21 44	22.627	562	31 58 44	23.707
513	26 31 69	22.650	563	31 69 69	23.728
514	26 41 96	22.672	564	31 80 96	23.749
515	26 52 25	22.694	565	31 92 25	23.770
516	26 62 56	22.716	566	32 03 56	23.791
517	26 72 89	22.738	567	32 14 89	23.812
518	26 83 24	22.760	568	32 26 24	23.833
519	26 93 61	22.782	569	32 37 61	23.854
520	27 04 00	22.804	570	32 49 00	23.875
521	27 14 41	22.825	571	32 60 41	23.896
522	27 24 84	22.847	572	32 71 84	23.917
523	27 35 29	22.869	573	32 83 29	23.937
524	27 45 76	22.891	574	32 94 76	23.958
525	27 56 25	22.913	575	33 06 25	23.979
526	27 66 76	22.935	576	33 17 76	24.000
527	27 77 29	22.956	577	33 29 29	24.021
528	27 87 84	22.978	578	33 40 84	24.042
529	27 98 41	23.000	579	33 52 41	24.063
530	28 09 00	23.022	580	33 64 00	24.083
531	28 19 61	23.043	581	33 75 61	24.104
532	28 30 24	23.065	582	33 87 24	24.125
533	28 40 89	23.087	583	33 98 89	24.145
534	28 51 56	23.108	584	34 10 56	24.166
535	28 62 25	23.130	585	34 22 25	24.187
536	28 72 96	23.152	586	34 33 96	24.207
537	28 83 69	23.173	587	34 45 69	24.228
538	28 94 44	23.195	588	34 57 44	24.249
539	29 05 21	23.216	589	34 69 21	24.269
540	29 16 00	23.238	590	34 81 00	24.290
541	29 26 81	23.259	591	34 92 81	24.310
542	29 37 64	23.281	592	35 04 64	24.331
543	29 48 49	23.302	593	35 16 49	24.352
544	29 59 36	23.324	594	35 28 36	24.372
545	29 70 25	23.345	595	35 40 25	24.393
546	29 81 16	23.367	596	35 52 16	24.413
547	29 92 09	23.388	597	35 64 09	24.434
548	30 03 04	23.409	598	35 76 04	24.454
549	30 14 01	23.431	599	35 88 01	24.474
550	30 25 00	23.452	600	36 00 00	24.495

數	平方	平方根	數	平方	平方根
601	36 12 01	24.515	651	42 38 01	25.515
602	36 24 04	24.536	652	42 51 04	25.534
603	36 36 09	24.556	653	42 64 09	25.554
604	36 48 16	24.576	654	42 77 16	25.573
605	36 60 25	24.597	655	42 90 25	25.593
606	36 72 36	24.617	656	43 03 36	25.612
607	36 84 49	24.637	657	43 16 49	25.632
608	36 96 64	24.658	658	43 29 64	25.652
609	37 08 81	24.678	659	43 42 81	25.671
610	37 21 00	24.698	660	43 56 00	25.690
611	37 33 21	24.718	661	43 69 21	25.710
612	37 45 44	24.739	662	43 82 44	25.729
613	37 57 69	24.759	663	43 95 69	25.749
614	37 69 96	24.779	664	44 08 96	25.768
615	37 82 25	24.799	665	44 22 25	25.788
616	37 94 56	24.819	666	44 35 56	25.807
617	38 06 89	24.839	667	44 48 89	25.826
618	38 19 24	24.860	668	44 62 24	25.846
619	38 31 61	24.880	669	44 75 61	25.865
620	38 44 00	24.900	670	44 89 00	25.884
621	38 56 41	24.920	671	45 02 41	25.904
622	38 68 84	24.940	672	45 15 84	25.923
623	38 81 29	24.960	673	45 29 29	25.942
624	38 93 76	24.980	674	45 42 76	25.962
625	39 06 25	25.000	675	45 56 25	25.981
626	39 18 76	25.020	676	45 69 76	26.000
627	39 31 29	25.040	677	45 83 29	26.019
628	39 43 84	25.060	678	45 96 84	26.038
629	39 56 41	25.080	679	46 10 41	26.058
630	39 69 00	25.100	680	46 24 00	26.077
631	39 81 61	25.120	681	46 37 61	26.096
632	39 94 24	25.140	682	46 51 24	26.115
633	40 06 89	25.159	683	46 64 89	26.134
634	40 19 56	25.179	684	46 78 56	26.153
635	40 32 25	25.199	685	46 92 25	26.173
636	40 44 96	25.219	686	47 05 96	26.192
637	40 57 69	25.239	687	47 19 69	26.211
638	40 70 44	25.259	688	47 33 44	26.230
639	40 83 21	25.278	689	47 47 21	26.249
640	40 96 00	25.298	690	47 61 00	26.268
641	41 08 81	25.318	691	47 74 81	26.287
642	41 21 64	25.338	692	47 88 64	26.306
643	41 34 49	25.357	693	48 02 49	26.325
644	41 47 36	25.377	694	48 16 36	26.344
645	41 60 25	25.397	695	48 30 25	26.363
646	41 73 16	25.417	696	48 44 16	26.382
647	41 86 09	25.436	697	48 58 09	26.401
648	41 99 04	25.456	698	48 72 04	26.420
649	42 12 01	25.475	699	48 86 01	26.439
650	42 25 00	25.495	700	49 00 00	26.458

數	平方	平方根	數	平方	平方根
701	49 14 01	26.476	751	56 40 01	27.404
702	49 28 04	26.495	752	56 55 04	27.423
703	49 42 09	26.514	753	56 70 09	27.441
704	49 56 16	26.533	754	56 85 16	27.459
705	49 70 25	26.552	755	57 00 25	27.477
706	49 84 36	26.571	756	57 15 36	27.495
707	49 98 49	26.589	757	57 30 49	27.514
708	50 12 64	26.608	758	57 45 64	27.532
709	50 26 81	26.627	759	57 60 81	27.550
710	50 41 00	26.646	760	57 76 00	27.568
711	50 55 21	26.665	761	57 91 21	27.586
712	50 69 44	26.683	762	58 06 44	27.604
713	50 83 69	26.702	763	58 21 69	27.622
714	50 97 96	26.721	764	58 36 96	27.641
715	51 12 25	26.739	765	58 52 25	27.659
716	51 26 56	26.758	766	58 67 56	27.677
717	51 40 89	26.777	767	58 82 89	27.695
718	51 55 24	26.796	768	58 98 24	27.712
719	51 69 61	26.814	769	59 13 61	27.731
720	51 84 00	26.833	770	59 29 00	27.749
721	51 98 41	26.851	771	59 44 41	27.767
722	52 12 84	26.870	772	59 59 84	27.785
723	52 27 29	26.889	773	59 75 29	27.803
724	52 41 76	26.907	774	59 90 76	27.821
725	52 56 25	26.926	775	50 06 25	27.839
726	52 70 76	26.944	776	60 21 76	27.857
727	52 85 29	26.963	777	60 37 29	27.875
728	52 99 84	26.981	778	60 52 84	27.893
729	53 14 41	27.000	779	60 68 41	27.911
730	53 29 00	27.019	780	60 84 00	27.928
731	53 43 61	27.037	781	60 99 61	27.946
732	53 58 24	27.055	782	61 15 24	27.964
733	53 72 89	27.074	783	61 30 89	27.982
734	53 87 56	27.092	784	61 46 56	28.000
735	54 02 25	27.111	785	61 62 25	28.018
736	54 16 96	27.129	786	61 77 96	28.036
737	54 31 69	27.148	787	61 93 69	28.054
738	54 46 44	27.166	788	62 09 44	28.071
739	54 61 21	27.185	789	62 25 21	28.089
740	54 76 00	27.203	790	62 41 00	28.107
741	54 90 81	27.221	791	62 56 81	28.125
742	55 05 64	27.240	792	62 72 64	28.142
743	55 20 49	27.258	793	62 88 49	28.160
744	55 35 36	27.276	794	63 04 36	28.178
745	55 50 25	27.295	795	63 20 25	28.196
746	55 65 16	27.313	796	63 36 16	28.213
747	55 80 09	27.331	797	63 52 09	28.231
748	55 95 04	27.350	798	63 68 04	28.249
749	56 10 01	27.368	799	63 84 01	28.267
750	56 25 00	27.386	800	64 00 00	28.284

數	平方	平方根	數	平方	平方根
801	64 16 01	28.302	851	72 42 01	29.172
802	64 32 04	28.320	852	72 59 04	29.189
803	64 48 09	28.337	853	72 76 09	29.206
804	64 64 16	28.355	854	72 93 16	29.223
805	64 80 25	28.373	855	73 10 25	29.240
806	64 96 36	28.390	856	73 27 36	29.257
807	65 12 49	28.408	857	73 44 49	29.275
808	65 28 64	28.425	858	73 61 64	29.292
809	65 44 81	28.443	859	73 78 81	29.309
810	65 61 00	28.460	860	73 96 00	29.326
811	65 77 21	28.478	861	74 13 21	29.343
812	65 93 44	28.496	862	74 30 44	29.360
813	66 09 69	28.513	863	74 47 69	29.377
814	66 25 96	28.531	864	74 64 96	29.394
815	66 42 25	28.548	865	74 82 25	29.411
816	66 58 56	28.566	866	74 99 56	29.428
817	66 74 89	28.583	867	75 16 89	29.445
818	66 91 24	28.601	868	75 34 24	29.462
819	67 07 61	28.618	869	75 51 61	29.479
820	67 24 00	28.636	870	75 69 00	29.496
821	67 40 41	28.653	871	75 86 41	29.513
822	67 56 84	28.671	872	76 03 84	29.530
823	67 73 29	28.688	873	76 21 29	29.547
824	67 89 76	28.705	874	76 38 76	29.563
825	68 06 25	28.723	875	76 56 25	29.580
826	68 22 76	28.740	876	76 73 76	29.597
827	68 39 29	28.758	877	76 91 29	29.614
828	68 55 84	28.775	878	77 08 84	29.631
829	68 72 41	28.792	879	77 26 41	29.648
830	68 89 00	28.810	880	77 44 00	29.665
831	69 05 61	28.827	881	77 61 61	29.682
832	69 22 24	28.844	882	77 79 24	29.698
833	69 38 89	28.862	883	77 96 89	29.715
834	69 55 56	28.879	884	78 14 56	29.732
835	69 72 25	28.896	885	78 32 25	29.749
836	69 88 96	28.914	886	78 49 96	29.766
837	70 05 69	28.931	887	78 67 69	29.783
838	70 22 44	28.948	888	78 85 44	29.799
839	70 39 21	28.965	889	79 03 21	29.816
840	70 56 00	28.983	890	79 21 00	29.833
841	70 72 81	29.000	891	79 38 81	29.850
842	70 89 64	29.017	892	79 56 64	29.866
843	71 06 49	29.034	893	79 74 49	29.883
844	71 23 36	29.052	894	79 92 36	29.900
845	71 40 25	29.069	895	80 10 25	29.915
846	71 57 16	29.089	896	80 28 16	29.933
847	71 74 09	29.108	897	80 46 09	29.950
848	71 91 04	29.120	898	80 64 04	29.967
849	72 08 01	29.138	899	80 82 01	29.983
850	72 25 00	29.156	900	81 00 00	30.000

數	平方	平方根	數	平方	平方根
901	81 18 01	30.017	951	90 44 01	30.838
902	81 36 04	30.033	952	90 63 04	30.854
903	81 54 09	30.050	953	90 82 09	30.871
904	81 72 16	30.067	954	91 01 16	30.887
905	81 90 25	30.083	955	91 20 25	30.903
906	82 08 36	30.100	956	91 39 36	30.919
907	82 26 49	30.116	957	91 58 49	30.935
908	82 44 64	30.133	958	91 77 64	30.952
909	82 62 81	30.150	959	91 96 81	30.968
910	82 81 00	30.166	960	92 16 00	30.984
911	82 99 21	30.183	961	92 35 21	31.000
912	83 17 44	30.199	962	92 54 44	31.016
913	83 35 69	30.216	963	92 73 69	31.032
914	83 53 96	30.232	964	92 92 96	31.048
915	83 72 25	30.249	965	93 12 25	31.064
916	83 90 56	30.265	966	93 31 56	31.081
917	84 08 89	30.282	967	93 50 89	31.097
918	84 27 24	30.299	968	93 70 24	31.113
919	84 45 61	30.315	969	93 89 61	31.129
920	84 64 00	30.332	970	94 09 00	31.145
921	84 82 41	30.348	971	94 28 41	31.161
922	85 00 84	30.364	972	94 47 84	31.177
923	85 19 29	30.381	973	94 67 29	31.193
924	85 37 76	30.397	974	94 86 76	31.209
925	85 56 25	30.414	975	95 06 25	31.225
926	85 74 76	30.430	976	95 25 76	31.241
927	85 93 29	30.447	977	95 45 29	31.257
928	86 11 84	30.463	978	95 64 84	31.273
929	86 30 41	30.480	979	95 84 41	31.289
930	86 49 00	30.496	980	96 04 00	31.305
931	86 67 61	30.512	981	96 23 61	31.321
932	86 86 24	30.529	982	96 43 24	31.337
933	87 04 89	30.545	983	96 62 89	31.353
934	87 23 56	30.561	984	96 82 56	31.369
935	87 42 25	30.578	985	97 02 25	31.385
936	87 60 96	30.594	986	97 21 96	31.401
937	87 79 69	30.610	987	97 41 69	31.417
938	87 98 44	30.627	988	97 61 44	31.432
939	88 17 21	30.643	989	97 81 21	31.448
940	88 36 00	30.659	990	98 01 00	31.464
941	88 54 81	30.676	991	98 20 81	31.480
942	88 73 64	30.692	992	98 40 64	31.496
943	88 92 49	30.708	993	98 60 49	31.512
944	89 11 36	30.725	994	98 80 36	31.528
945	89 30 25	30.741	995	99 00 25	31.544
946	89 49 16	30.757	996	99 20 16	31.559
947	89 68 09	30.773	997	99 40 09	31.575
948	89 87 04	30.790	998	99 60 04	31.591
949	90 06 01	30.806	999	99 80 01	31.607
950	90 25 00	30.822	1000	100 00 00	31.623

IX 對 數 表

N	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9										1 2 3 4 5 6 7 8 9									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	30	37	
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	22	26	30	34	
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31	
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29	
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27	
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	15	17	20	22	25	
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24	
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22	
18	2533	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21	
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20	
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19	
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18	
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17	
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17	
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16	
25	3979	3997	4014	4031	4049	4065	4082	4099	4116	4133	2	4	5	7	9	10	12	14	16	
26	4151	4166	4185	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15	
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14	
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14	
29	4624	4639	4654	4669	4685	4699	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13	
30	4771	4786	4800	4814	4828	4843	4857	4871	4885	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13	
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	5	7	8	10	11	12	
32	5057	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5158	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12	
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	7	8	9	11	12	
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	2	4	5	6	8	9	10	11	
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11	
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5659	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11	
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	4	5	6	7	8	9	11	
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	4	5	6	7	8	9	10	
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10	
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10	
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
42	6233	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
43	6335	6345	6355	6366	6376	6386	6396	6406	6416	6426	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
46	6625	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8	
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	6	7	7	8	
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	5	6	7	7	8	
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8	
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8	
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8	
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7227	7235	1	2	3	3	4	5	6	7	7	
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	3	3	4	5	6	7	7	
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7	

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
56	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	3	3	4	5	6	6	7
57	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	3	3	4	5	6	6	7
58	7559	7566	7574	7582	7590	7597	7604	7612	7619	7627	1	1	2	3	4	5	6	6	7
59	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	5	6	6	7
60	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	5	6	6	7
61	7782	7789	7796	7806	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	5	6	6	8
62	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
64	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	6	6
65	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	6	6
66	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	6	6
67	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	6	6
68	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	6	6
69	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	5	6	6
70	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	3	3	4	5	6	6
71	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	3	3	4	5	6	6
72	8512	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	3	3	4	5	6	6
73	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	3	3	4	5	6	6
74	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	3	3	4	5	6	6
75	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	3	3	4	5	6	6
76	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	3	3	4	5	6	6
77	8806	8811	8817	8823	8829	8834	8839	8845	8851	8856	1	1	2	3	3	4	5	6	6
78	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	3	3	4	5	6	6
79	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	3	3	4	5	6	6
80	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	3	3	4	5	6	6
81	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	3	3	4	5	6	6
82	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	3	3	4	5	6	6
83	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	3	3	4	5	6	6
84	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	3	3	4	5	6	6
85	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	3	3	4	5	6	6
86	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	3	3	4	5	6	6
87	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	3	3	4	5	6	6
88	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	1	1	2	3	3	4	5	6	6
89	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	3	3	4	5	6
90	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	3	3	4	5	6
91	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	5
92	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	5
93	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	5
94	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	5
95	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	5
96	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	5
97	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	5
98	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	5
99	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	5
00	9958	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	4	5
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

X. 符 號 表

N = 次數之總和。

M = 實得算術平均數。

X = (a)量數, (b)任一量數 X 。

Σ = 和。

A = 假定算術平均數。

f = 次數。

ξ = (a)量數與假定平均數之差, (b) X 行之任一量數與假定平均數之差。

η = Y 行之任一量數與假定平均數之差。

Mdn = 中數。

i = 組距之大小。

F = 含有中數之組距以上次數之和。

F' = 含有中數之組距以下次數之和。

v = (a)一組之最低限, (b)相對差數。

v' = 一組之最高限。

Mo = 衆數。

$H.M.$ = 倒數平均數。

$G.M.$ = 幾何平均數。

Q = 四分位差。

Q_1 = 第一四分位點。

Q_3 = 第三四分位點。

σ = 標準差。

δ = 校正數。

A.D. = 平均差。

N_a = 較實得中數為大各量數次數之和。

N_b = 較實得中數為小各量數次數之和。

Sk = 偏態性。

y = (a) 圖內之縱線；(b) Y 行之任一量數與諸 Y 量數之平均數之差數。

y_0 = 平均縱線。

e = 2.71828，即 Napierian 對數底數。

x = (a) 橫坐標上由平均點至任何點之距離，(b) X 行之任一量數與諸 X 量數之平均數之差數。

$|x|$ = X 行之任何量數，與平均數相差之絕對值，正負號不計。

π = 3.1416。

σ_M = 算術平均數之標準差。

σ_{all} = 全分配之標準差，或 N 量數中之標準差。

σ_s = 抽樣之標準誤。

σ_σ = 標準差之標準差。

σ_{Mdn} = 中數之標準差。

σ_{diff} = 二數相差之標準差。

σ_r = 相關係數之標準差。

P.E. = 機誤。

r = 皮而生之積差相關係數。

P.E._M = 算術平均數之機誤。

P.E. _{σ} = 標準差之機誤。

P.E._{Mdn} = 中數之機誤。

P.E._r = 相關係數之機誤。

δ_x = X 行假定平均數之校正數。

δ_y = Y 行假定平均數之校正數。

ρ_s = 司畢門之等級相關係數。

D = X 與 Y 對偶量數之差數。

R = 司畢門之簡捷法相關係數。

G = Y 量數大於 X 量數之數(或 X 量數大於 Y 量數之數)。

U = 薛伯之異號相關係數。

\bar{X} = 真正平均數, M_x 。

\bar{Y} = 真正平均數, M_y 。

Y = 任一量數 Y。

b_1 = x 向 y 之傾斜線。

b_2 = y 向 x 之傾斜線。

RR' = 在相關圖上連接橫行各平均點之線。

CC' = 在相關圖上連接縱行各平均點之線。

$r_{12.3}$ = 第三種變量抽出後，第一種變量與第二種變量之相關係數（ $r_{13.2}$ 及 $r_{23.1}$ 之意義，依理類推）。

XI. 公式表

$$M = \frac{1}{N} \Sigma (X) \dots\dots\dots (1)$$

$$M = \frac{1}{N} \Sigma (f.X) \dots\dots\dots (1a)$$

$$M = A + \frac{1}{N} \Sigma (f.\xi) \dots\dots\dots (1b)$$

$$M = A + \frac{1}{N} \Sigma (f.\xi) i \dots\dots\dots (1c)$$

$$\text{Mdn 之位置} = \frac{N+1}{2} \dots\dots\dots (2)$$

$$\text{Mdn} = V + \frac{\frac{N}{2} - F}{f} i \dots\dots\dots (2a)$$

$$\text{Mdn} = V' - \frac{\frac{N}{2} - F'}{f} i \dots\dots\dots (2b)$$

$$M_o = M - 3(M - \text{Mdn}) \dots\dots\dots (3)$$

$$\text{H. M.} = \frac{1}{\frac{1}{N} \Sigma \frac{1}{X}} \dots\dots\dots (4)$$

$$\text{G. M.} = \sqrt[n]{a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_4 \dots \times a_n} \dots\dots\dots (5)$$

$$\log \text{ G. M.} = \frac{\log a_1 + \log a_2 + \log a_3 + \log a_4 \dots + \log a_n}{n} \dots\dots (5a)$$

$$Q = \frac{Q_2 - Q_1}{2} \dots \dots \dots (6)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum X^2}{N}} \dots \dots \dots (7)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f X^2}{N}} \dots \dots \dots (7a)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f \xi^2}{N}} - \delta^2 \times i \dots \dots \dots (7b)$$

$$A. D. = \frac{\sum |X|}{N} \dots \dots \dots (8)$$

$$A. D. = \frac{\sum f \cdot X}{N} \dots \dots \dots (8a)$$

$$A. D. = \frac{\sum f \xi + \delta (N_0 - N_a)}{N} \times i \dots \dots \dots (8b)$$

$$V = \frac{100 \sigma}{M} \dots \dots \dots (9)$$

$$V = \frac{100 A. D.}{\sqrt{\text{Median}}} \dots \dots \dots (9a)$$

$$Sk = \frac{M - M_0}{\sigma} \dots \dots \dots (10)$$

$$Sk = \frac{3 (M - \text{Mdn})}{\sigma} \dots \dots \dots (10a)$$

$$Sk = \frac{(Q_2 - \text{Mdn}) - (\text{Mdn} - Q_1)}{Q} \dots \dots \dots (11)$$

$$Sk = \frac{Q_3 + Q_3 - 2Mdn}{Q} \dots\dots\dots (11a)$$

$$A\text{-之修勻價值} = \frac{A+A+B}{3} \dots\dots\dots (12)$$

$$B\text{-之修勻價值} = \frac{A+B+C}{3} \dots\dots\dots (12a)$$

$$C\text{-之修勻價值} = \frac{B+C+D}{3} \dots\dots\dots (12b)$$

$$D\text{-之修勻價值} = \frac{C+D+E}{3} \dots\dots\dots (12c)$$

$$E\text{-之修勻價值} = \frac{D+E+E}{3} \dots\dots\dots (12d)$$

$$Y = Y_0 E^{\frac{-X^2}{2\sigma^2}} \dots\dots\dots (13)$$

$$Y_0 = \frac{N}{\sigma \sqrt{2\pi}} \dots\dots\dots (13a)$$

$$Y = \frac{N}{\sigma \sqrt{2\pi}} E^{\frac{-X^2}{2\sigma^2}} \dots\dots\dots (13b)$$

$$\sigma_s = \sqrt{\frac{f(N-f)}{N}} \dots\dots\dots (14)$$

$$\sigma_M = \frac{\sigma_{dis}}{\sqrt{N}} \dots\dots\dots (15)$$

$$\sigma_{\text{Mdn}} = \frac{1.25 \sigma_{\text{dis}}}{\sqrt{N}} \dots\dots\dots (16)$$

$$\sigma_{\sigma} = \frac{\sigma_{\text{dis}}}{\sqrt{2N}} \dots\dots\dots (17)$$

$$\sigma^{\text{diff}} = \sqrt{(\sigma_x)^2 + (\sigma_y)^2} \dots\dots\dots (18)$$

$$\sigma_r = \frac{1-r^2}{\sqrt{N}} \dots\dots\dots (19)$$

$$P. E. M = 67449 \frac{\sigma_{\text{dis}}}{\sqrt{N}} \dots\dots\dots (20)$$

$$P. E. \text{Mdn} = 84535 \frac{\sigma_{\text{dis}}}{\sqrt{N}} \dots\dots\dots (21)$$

$$P. E. \sigma = 67449 \frac{\sigma_{\text{dis}}}{\sqrt{2N}} \dots\dots\dots (22)$$

$$P. E. r = 67449 \frac{1-r^2}{\sqrt{N}} \dots\dots\dots (23)$$

$$r = \frac{\sum X \cdot Y}{\sqrt{\sum X^2} \sqrt{\sum Y^2}} \dots\dots\dots (24)$$

$$r = \frac{\sum X \cdot Y}{N \sigma_x \sigma_y} \dots\dots\dots (24_a)$$

$$r = \frac{\sum (\xi \cdot \eta) - N \delta_x \delta_y}{N \sqrt{\frac{\sum f \xi^2}{N} - \delta_x^2} \sqrt{\frac{\sum f \eta^2}{N} - \delta_y^2}} \dots\dots\dots (24_b)$$

$$r = \frac{\frac{\Sigma(\xi \cdot \eta)}{N} - \delta_x \delta_y}{\sqrt{\frac{\Sigma f \xi^2}{N} - \delta_x^2} \sqrt{\frac{\Sigma f \eta^2}{N} - \delta_y^2}} \dots \dots \dots (24_c)$$

$$r = \frac{\frac{\Sigma(\xi \cdot \eta)}{N} - \delta_x \delta_y}{\sigma_x \sigma_y} \dots \dots \dots (24_d)$$

$$\rho = 1 - \frac{6 \Sigma D^2}{N(N^2-1)} \dots \dots \dots (25)$$

$$R = 1 - \frac{6 \Sigma G}{N^2-1} \dots \dots \dots (26)$$

$$U = \frac{\mu + \left(\frac{\frac{\mu}{\mu+1} + \frac{1}{2}}{2} \right) d}{N} \dots \dots \dots (27)$$

$$X - \bar{X} = r \frac{\sigma_x}{\sigma_y} (Y - \bar{Y}) \dots \dots \dots (28)$$

$$Y - \bar{Y} = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (X - \bar{X}) \dots \dots \dots (28_a)$$

$$x = r \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \cdot y \dots \dots \dots (29)$$

$$y = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \cdot x \dots \dots \dots (29_a)$$

$$b_1 = r \frac{\sigma_x}{\sigma_y} \dots \dots \dots (30)$$

$$b_2 = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \dots\dots\dots (30a)$$

$$x = b_{1y} \dots\dots\dots (31)$$

$$y = b_2 x \dots\dots\dots (31a)$$

$$r_{pq} = \frac{\sqrt{(r_{p,q_2}) (r_{p_2,q_1})}}{\sqrt{(r_{p_1,p_2}) (r_{q_1,q_2})}} \dots\dots\dots (32)$$

$$r_p = \frac{P (r_q)}{q + (P - q) r_q} \dots\dots\dots (33)$$

$$r_{12-3} = \frac{r_{12} - r_{13} r_{23}}{\sqrt{1 - r_{13}^2} \sqrt{1 - r_{23}^2}} \dots\dots\dots (34)$$

$$r_{12-34} = \frac{r_{12-3} - r_{14-3} r_{24-3}}{\sqrt{1 - r_{14-3}^2} \sqrt{1 - r_{24-3}^2}} \dots\dots\dots (34a)$$

$$r_{12-34} = \frac{r_{12}(1 - r_{34}^2) - r_{13}(r_{23} - r_{24}r_{34}) - r_{14}(r_{24} - r_{23}r_{34})}{\sqrt{1 - r_{13}^2 - r_{14}^2 - r_{34}^2 - 2r_{13}r_{14}r_{34}} \sqrt{1 - r_{23}^2 - r_{24}^2 - r_{34}^2 - 2r_{23}r_{24}r_{34}}} \dots\dots\dots (34b)$$

$$r_{12-34 \dots n} = \frac{r_{12-34 \dots n-1} - r_{1n-34 \dots n-1} r_{2n-34 \dots n-1}}{\sqrt{(1 - r_{1n-34 \dots n-1}^2)} \sqrt{(1 - r_{2n-34 \dots n-1}^2)}} \dots\dots\dots (34c)$$

XII. 統計名詞英漢對照表

Abscissa, 橫坐標.	Spearman's "Footrule" for correlation, 司畢門簡捷法相關.
Amount, 分量.	Unlike-signed correlation, 異號相關.
Arbitrary average (or arbitrary mean), 參看 Assumed average.	2. Nonrectilinear correlation, 非直線相關.
Arithmetic average (or arithmetic mean), 算術平均數.	Correlation co-efficient or co-efficient of correlation, 相關係數.
Array, 行列.	Criterion or standard, 標準.
Assumed average (or assumed mean), 假定平均數.	Crude mode, 近似衆數.
Asymmetrical distribution, 不對稱分配.	Curve of error, 差誤曲線.
Attenuation, 減弱 (機遇差誤後之相關減弱).	Curvilinearity, 曲線性.
Attribute, 品質.	Data 或 Datum, 資料或事實.
Average, 平均數.	Descriptive item, 說明項.
Average deviation, A. D., or mean deviation, M. D., 平均差.	Deviation, 離中差.
Average error, 平均差誤.	Diagram, 圖.
Bimodality, 雙峯形性.	1. Histogram, 直方圖.
Caption, 縱標目.	a. Normal histogram, 常態直方圖.
Central tendency, 集中趨勢.	(1) Normal histogram surface, 常態直方圖面.
Chance, 機遇.	(2) Normal histogram curve, 常態直方圖曲線.
Chance error, 機遇差誤或機誤.	b. Skewed histogram, 偏態直方圖.
Chart, 圖.	(1) Plus skewed histogram, 正的偏態直方圖.
Class, 組.	(a) Plus skewed histogram surface, 正的偏態直方圖面.
Class interval, 組距.	(b) Plus skewed
Co-efficient, 係數.	
Co-efficient of variation, 變量之係數.	
Column, 縱行.	
Constant, 常數.	
Continuous series, 連續數列.	
Correction, 校正數.	
Correlation, 相關.	
1. Rectilinear correlation, 直線相關.	
Product-moment correlation, 積差相關.	
Rank correlation, 等級相關.	

- histogram curve, 正的偏態直方圖曲線。
- (2) Minus skewed histogram, 負的偏態直方圖。
- (a) Minus skewed histogram surface, 負的偏態直方圖面。
- (b) Minus skewed histogram curve, 負的偏態直方圖曲線。
2. Polygon, 多邊圖。(分組法與直方圖相同)。
3. Curve diagram, 曲線圖。
- a. Unsmoothed curve diagram, 未修勻的曲線圖。
- b. Smoothed curve diagram, 已修勻的曲線圖。
4. Bar diagram, 橫條圖。
5. Sectioned bar diagram, 分類的橫條圖。
6. Sector diagram, 扇形圖。
- Discrete series, 間斷數列。
- Dispersion or variability, 離中趨勢。
- Distribution, 分配。
- Empirical mode, 經驗衆數。
- Estimated average (or Estimated mean), 參看 Assumed average。
- Fluctuation, 變動。
- Form, 形。
- Frequency, 次數。
- Frequency curve, 次數曲線。
- Frequency distribution, 次數分配。
- a. Normal frequency distribution, 常態次數分配。
- b. Skewed frequency distribution, 偏態次數分配。
- (1) Plus skewed frequency distribution, 正的偏態次數分配。
- (2) Minus skewed frequency distribution, 負的偏態次數分配。
- Multi-modal frequency distribution, 多峯次數分配。
- Frequency polygon, 次數多邊圖。
- Frequency surface, 次數面。
- Geometric mean, 幾何平均數。
- Graphic method, 圖示法。
- Grouped measures, 已歸類之量數。
- Harmonic mean, 倒數平均數。
- Index number, 指數。
- J-shaped distribution, 丁字形分配。
- Lower limit, 下限。
- Lower quartile point, 第一四分位點。
- Mass measure, 全部量數。
- Mean (參看 Average)。
- Mean deviation (參看 Average deviation)。
- Mean ordinate, 平均縱線。
- Mean square deviation or standard deviation, S. D. or sigma or σ , 標準差或均方根差。
- Measure, 量數。
- Median, 中數或中位數。
- Median deviation, Mdn. D., 中位差。
- Mid-point, 中點。
- Mid-scores or mid-value, 中值。
- Mode, 衆數。
- Multimodality, 多峯形性。
- Normal curve, 常態曲線。
- Normal frequency curve, 常態次數曲線。

- Normal distribution, 常態分配。
 Normal surface, 常態面。
 Objectivity, 客觀性。
 Order distribution, 順序分配。
 Ordinate, 縱坐標。
 Overlapping, 交疊。
 Paired measures, 對偶量數。
 Partial correlation, 淨相關。
 Percentage, 百分比。
 Plot, 繪製。
 Precision, 精度。
 Prediction, 預料。
 Probability, 機率。
 Probability surface, 機率面。
 Probable error, 機誤。
 Prophecy, 預占。
 Quartile deviation or semi-inter-quartile range or Q , 四分位差。
 Question blank or questionnaire, 訪問表格或條問。
 Quotient, 商數。
 Random, 隨機。
 Random sampling, 隨機抽樣。
 Range, 全距。
 Rank, 等級。
 Rank difference, 等級差。
 Rank distribution, 等級分配。
 Rank method, 等級法。
 Rectilinearity, 直綫性。
 Reference point, 參照點。
 Regression equation, 迴歸方程。
 Relation line, 相關綫。
 Relative position, 比較的地位。
 Relative variability, 比較的差數。
 Reliability or Unreliability, 可靠性。
 Probable error of mean, P. E. mean, 平均數之機誤。
 Probable error of median, P. E. median, 中數之機誤。
 Probable error of standard deviation, P. E. s.d., 標準差之機誤。
 Probable error of co-efficient of correlation P. E. r, 相關係數之機誤。
 Etc., 等。
 Standard deviation of mean, S.D. mean, 平均數之標準差。
 Standard deviation of median, S.D. median, 中數之標準差。
 Standard deviation of quartile deviation, S.D. q, 四分位差之標準差。
 Standard deviation of standard deviation, S. D. s.d., 標準差之標準差。
 Standard deviation of co-efficient of correlation S.D. r, 相關係數之標準差。
 Standard deviation of difference, S.D. diff. 差別之標準差。
 Standard deviation of sum, S.D. sum, 和之標準差。
 and similarly for other measures, 餘類推。
 Standard error of sampling, 抽樣之標準誤。
 Row, 橫行。
 Sampling, 抽樣。
 Scale, 量表或尺度。
 Scatter diagram, 分布圖。
 Score, 分數。
 Self-correlation, 自身相關。
 Semi-inter-quartile range (參看 quartile deviation)。
 Series, 數列。
 Skewed, 偏態的。
 Slope, 傾斜度。
 Smoothed curve, 修勻曲綫。
 Spurious correlation, 不純相關。
 Standard (參看 Criterion)。
 Standard deviation (參看 Mean square deviation)。
 Statistics of attributes, 品質統計。

Statistics of variables, 變量統計。
Step, 級。
Step interval, 級距。
Stub, 橫標目。
Subjective, 主觀的。
Subjectivity, 主觀性。
Symmetrical distribution, 對稱分配。
Table number, 表數。
Table title, 表題。
Tabulation, 表列。
Tail (of a distribution), 尾端。
Total population, 全數。
Theoretical mode, 理論衆數。
Transmutation, 蛻變。
True average (or true mean), 真正平均數。

Typical measure, 代表的量數。
Uncorrelated, 不相關。
Ungrouped measures, 未歸類之量數。
Unimodal distribution, 單峯的分配。
Unit, 單位。
Unreliability, 不可靠性。
Upper limit, 高限。
Upper quartile point, 第三四分位點。
U-shaped distribution, 凹形分配。
Validity, 效度。
Variability (參看 Dispersion), 變異性。
Variability measures, 差異量數。
Variable, 變量。
Weighted mean, 加權平均數。
Zero correlation, 零相關。
Zero point, 零點。

XIII 參 考 書 表

- Alexander, Carter: "School Statistics and Publicity," 1919, Silver Burdett and Co. New York.
- Bowley, Arthur L.: "Elements of Statistics," revised edition, 1926, Scribner's.
- Brinton, Willard C.: "Graphic Methods for Presenting Facts," 1914, The Engineering Magazine Co., New York.
- Brown W. and Thomson, G.H.: "The Essentials of Mental Measurement", 1921. Cambridge.
- Chaddock, Robert Emmet: "Principles and Methods of Statistics," 1925, Houghton Mifflin.
- Dittmer, Clarence G.: "Introduction to Social Statistics," 1926, A. W. Shaw.
- Elderton, W. Palin: "Frequency-Curves and Correlation," revised edition, 1927, Charles and Edward Layton, London.
- Elderton, W. Palin and Ethel M.: "Primer of Statistics," revised edition, 1923, A. and C. Black, London.
- Fisher, Arne: "The Mathematical Theory of Probabilities and Its Application to Frequency Curves and Statistical Methods," revised edition 1922. Macmillan.
- Fisher, R. A.: "Statistical Methods for Research Workers," 1925, Oliver and Boyd, Edinburgh.
- Garrett, Henry E.: "Statistics in Psychology and Education," 1926, Longmans Green.
- Gavett, G. Irving: "A First Course in Statistical Method," 1925, McGraw-Hill.
- Holzinger, K. J.: "Statistical Methods for Students in Education," 1928, Ginn and Co.

- Jones, D. Caradog: "A First Course in Statistics," revised edition, 1924, G. Bell and Sons, London.
- Karsten, Karl G.: "Charts and Graphs," 1923, Prentice-Hall.
- Kelley, Truman L.: "Statistical Method," 1923, Macmillan.
- McCall, W. A.: "How to Measure in Education," 1922, McMillan Co.
- Odell, C. W.: "Educational Statistics," The Century Co.
- Otis, A. S.: "Statistical Method in Educational Measurement, 1925, World Book Co., Chicago.
- Pearl, Raymond, "Medical Biometre and Statistics," 1923, W. B. Saunders Co., Philadelphia.
- Pearson, Karl: "The Grammar of Science," revised edition, 1911, A. and C. Black, London.
- Pearson, Karl (Editor): "Tables for Statisticians and Biometricians," 1914, Cambridge University Press.
- Rietz, Henry Lewis (Editor): "Handbook of Mathematical Statistics," 1924, Houghton Mifflin.
- Rugg, Harold O.: "Statistical Methods Applied to Education," 1917, Houghton Mifflin.
- Rugg, Harold O.: "A Primer of Graphics and Statistics for Teachers," 1925, Houghton Mifflin Co., New York.
- Secrist, Horace: "An Introduction to Statistical Methods," revised edition, 1925, Macmillan.
- Thorndike, Edward L.: "An Introduction to the Theory of Mental and Social Measurement," revised edition, 1913, Teachers College, Columbia University.
- Thurstone, L. L.: "The Fundamentals of Statistics," 1925, Macmillan.

Whipple, George Chandler: "Manual of Mental and Physical Tests,"
Warwick and York.

"Vital Statistics," revised edition, 1923, John Wiley.

Williams, J.H.: "Graphic Methods in Education," Houghton Mifflin.

Yule, G. Udny: "An Introduction to the Theory of Statistics," revised edition,
1924, C. Griffin and Co., London.

Zizek, Franz: "Statistical Averages, A Methodological Study," 1913,
Translated by Warren M. Persons, Henry Holt.

- | | | |
|---------|-----------|---------|
| 王仲武： | 統計公式及例解 | 商務印書館 |
| 金國寶： | 統計學大綱 | 商務印書館 |
| 唐啓賢： | 統計學 | 黎明書局 |
| 艾偉： | 高級統計學 | 商務印書館 |
| 羅大凡： | 數理統計學 | 北新書局 |
| 朱君毅： | 心理與教育之統計法 | 商務印書館 |
| 朱君毅： | 教育統計學綱要 | 商務印書館 |
| 朱君毅： | 教育測驗與統計 | 商務印書館 |
| 邵爽秋： | 教育圖示法 | 教育印書合作社 |
| 周調陽： | 教育統計學 | 中華書局 |
| 顧克彬： | 教育測量統計法 | 南京書店 |
| 中國統計學社： | 統計譯名 | |

XIV. 答 案

第五章

- | | |
|--------------------|------------------|
| 1. $M = 34.26$ | 2. $Mdn = 31.67$ |
| 3. $Mo = 26.48$ | 4. $H.M. = 8.6$ |
| 5. $G.M. = 19.5\%$ | |

第六章

- | | |
|----------------------|---------------------|
| 1. $Q = 9.54$ | 2. $\sigma = 13.18$ |
| 3. $A.D. = 10.80$ | 4. $v = 32.61$ |
| 5. $Skewness = -.08$ | |

第七章

3.

- (a) $.4\sigma$ 至 $.8\sigma = 13.27\%$
 (b) -1.4σ 至 $-.7\sigma = 16.12\%$
 (c) -1.5σ 至 $1.5\sigma = 86.64\%$
 (d) 0 至 $1.7\sigma = 45.54\%$
 (e) 0 至 $-2.4\sigma = 49.18\%$

4. 每段人數之百分比 = 3.45 23.84 45.14 23.84 3.45
 或 = 3.5 24 45 24 35

第八章

1.

- | | |
|-----------------------|----------------------|
| (a) $\sigma\mu = .49$ | $\sigma\sigma = .33$ |
| (b) $\sigma\mu = .67$ | $\sigma\sigma = .47$ |
| (c) $\sigma\mu = .80$ | $\sigma\sigma = .56$ |

2. $\sigma_{diff} = .83$

3.

(a) $P.E._r = .037$

(b) $P.E._r = .03$

(c) $P.E._r = .003$

第九章

1.

(a) $r = .22 \pm .14$

(b) $r = .24 \pm .19$

(c) $\rho = .1 \therefore r = .196$

(d) $R = .05 \therefore r = .089$

(e) $U = .47 \therefore r = .0941$

3. 英文分數大概為 59.10

國文分數大概為 70.96

4. $r_{lm} = .82$

5.

(1) 自身相關=.95

(2) 試行次數=14

6.

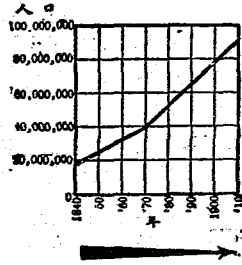
(a) 丙抽出後,甲與乙之純粹相關=.84

(b) 乙抽出後,甲與丙之純粹相關=.57

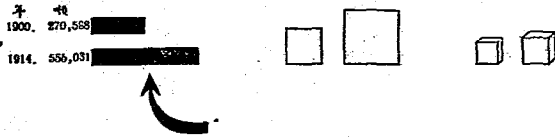
(c) 甲抽出後,乙與丙之純粹相關=-.42

附圖

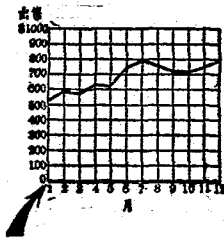
說明本書第12節所述之作圖規則



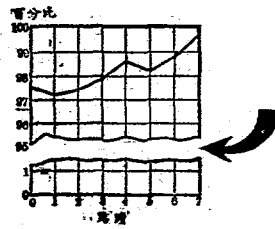
附圖 1. (參看規則 1.)



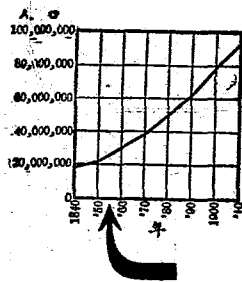
附圖 2. (參看規則 2.)



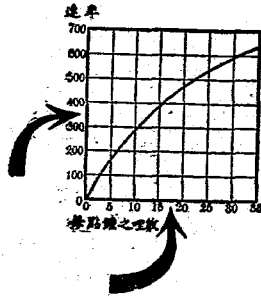
附圖 3. (參看規則 3.)



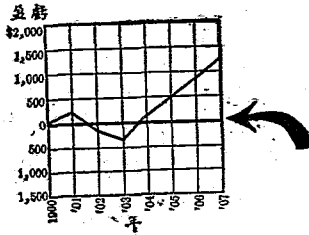
附圖 4. (參看規則 4.)



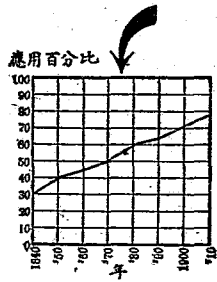
附圖 5. (參看規則 5.)



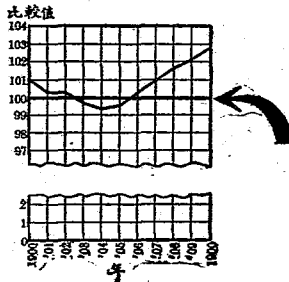
附圖 6. (參看規則 5.)



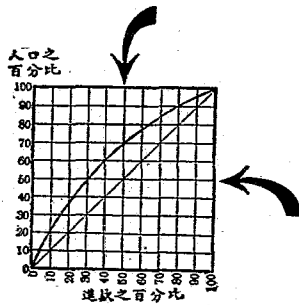
附圖 7. (參看規則 5.)



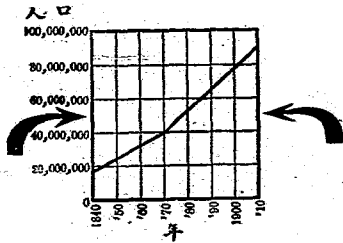
附圖 8. (參看規則 6.)



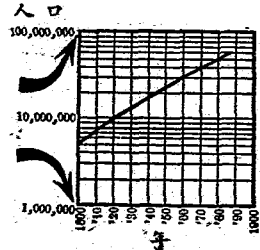
附圖 9. (參看規則 6.)



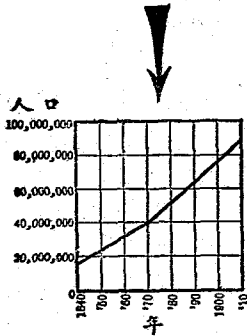
附圖 10. (參看規則 6.)



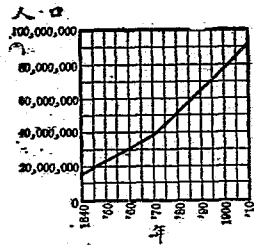
附圖 11. (參看規則 7.)



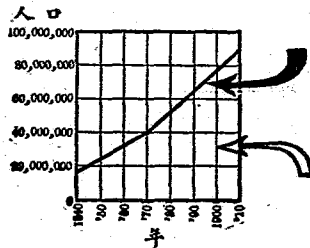
附圖 12. (參看規則 8.)



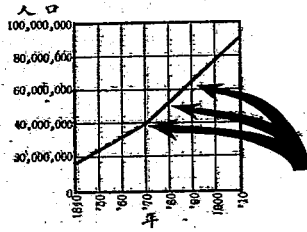
附圖 13. (參看規則 9.)



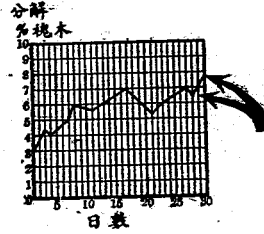
附圖 14. (參看規則 9.)



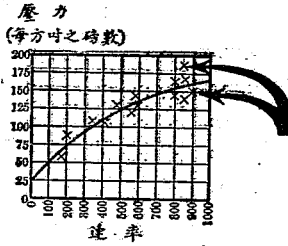
附圖 15. (參看規則 10.)



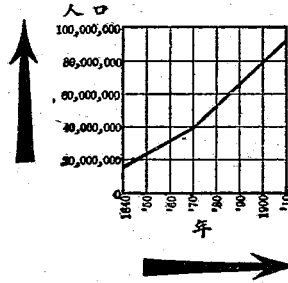
附圖 16. (參看規則 11.)



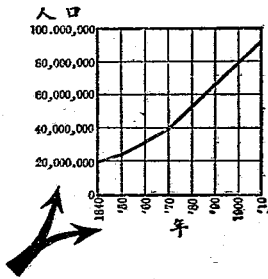
附圖 17. (參看規則 11.)



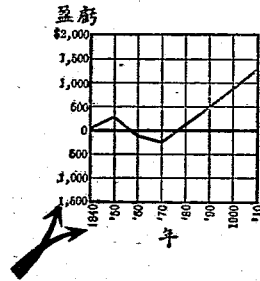
附圖 18. (參看規則 11.)



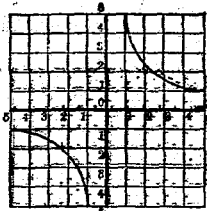
附圖 19. (參看規則 12.)



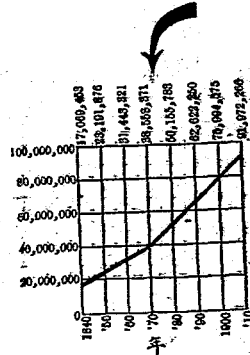
附圖 20. (參看規則 13.)



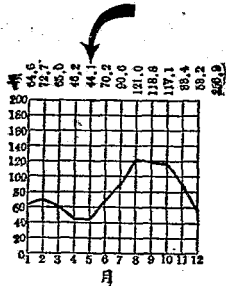
附圖 21. (參看規則 13a.)



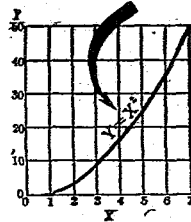
附圖 22. (參看規則 15.)



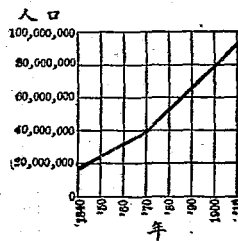
附圖 23. (參看規則 14.)



附圖 24. (參看規則 14.)

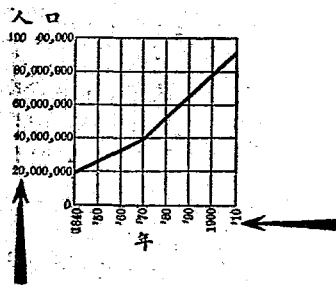


附圖 25. (參看規則 14.)

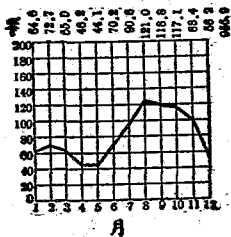


附圖 26. (參看規則 15.)

年	人口
1840	17,069,453
1850	23,101,576
1860	31,443,321
1870	38,658,371
1880	50,165,783
1890	62,622,250
1900	75,694,575
1910	91,972,268



附圖 27. (參看規則 16.)



附圖 28. (參看規則 17.)



中華民國十五年四月初版
中華民國二十五年十月國難後第三版

版 翻
權 印
所 必
有 究

東南大學
教育科叢書
教育統計學一冊

(24020)

每冊實價國幣柒角

外埠酌加運費匯費

著 者 朱 君 毅

發 行 者 上海河南路
商務印書館

發 行 所 上海及各埠
商務印書館

(本書校對者 董雲蓮 王永模)

五七一四上

本書定價五分



S. J. M.