Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2015/2016**

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Arbeitsblatt 18

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 18.1. Zeige, dass man jede endliche Permutation durch ein überschneidungsfreies Pfeildiagramm darstellen kann.

Übungsaufgaben

Aufgabe 18.2. Berechne für die Permutation

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$\sigma(x)$	2	5	7	3	1	4	8	6

die Anzahl der Fehlstände und das Vorzeichen.

Aufgabe 18.3. Berechne für die Permutation σ mit

P	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\sigma(P)$	7	10	3	9	5	2	4	1	8	6

die Potenzen σ^2 und σ^3 und gebe die Zyklendarstellung für diese drei Permutationen an.

Aufgabe 18.4.*

Betrachte die Permutation $\tau \in S_7$, die durch die Wertetabelle

x	1	2	3	4	5	6	7
$\tau(x)$	1	3	5	7	6	4	2

gegeben ist.

(1) Man gebe die Zyklendarstellung von τ an und bestimme den Wirkungsbereich.
(2) Berechne τ^3 und die Ordnung von τ^3.
(3) Bestimme die Fehlstände von τ und das Vorzeichen (Signum) von τ.
(4) Schreibe τ als Produkt von Transpositionen und bestimme erneut das Vorzeichen von τ.

AUFGABE 18.5.*

Betrachte die beiden Permutationen

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$\sigma(x)$	2	5	3	7	1	4	8	6

und

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$\tau(x)$	4	5	2	8	6	7	1	3

Berechne $\sigma\tau$ und $\tau\sigma$. Bestimme die Anzahl der Fehlstände und das Vorzeichen von τ. Gebe die Zyklendarstellung von σ und von σ^3 an. Was ist die Ordnung von σ?

AUFGABE 18.6. Zeige, dass durch die Zuordnung

$$S_n \times \{1, \ldots, n+1\} \longrightarrow S_{n+1},\ (\varphi, x) \longmapsto \tilde{\varphi},$$

mit

$$\tilde{\varphi}(k) = \begin{cases} \varphi(k) \text{ für } k \leq n \text{ und } \varphi(k) < x\,, \\ \varphi(k) + 1 \text{ für } k \leq n \text{ und } \varphi(k) \geq x\,, \\ x \text{ für } k = n+1\,, \end{cases}$$

eine wohldefinierte bijektive Abbildung gegeben ist.

AUFGABE 18.7. Berechne die Determinanten aller 3×3-Matrizen, bei denen in jeder Spalte und in jeder Zeile genau einmal 1 und zweimal 0 steht.

AUFGABE 18.8. Sei $M = \{1, \ldots, n\}$ und sei π eine Permutation auf M. Die zugehörige *Permutationsmatrix* M_π ist dadurch gegeben, dass

$$a_{\pi(i),i} = 1$$

ist und alle anderen Einträge 0 sind. Zeige, dass

$$\det M_\pi = \operatorname{sgn}(\pi)$$

ist.

AUFGABE 18.9. Bestimme mittels der Leibniz-Formel die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 9 & 8 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Sei $(G, e, \circ)$ eine Gruppe. Eine Teilmenge $H \subseteq G$ heißt *Untergruppe* von G wenn folgendes gilt.

(1) $e \in H$.
(2) Mit $g, h \in H$ ist auch $g \circ h \in H$.
(3) Mit $g \in H$ ist auch $g^{-1} \in H$.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 18.10. (2 Punkte)

Sei M eine Menge und sei $M = \biguplus_{i \in I} M_i$ eine Partition von M, d.h. jedes M_i ist eine Teilmenge von M und M ist die disjunkte Vereinigung der M_i. Zeige, dass die Produktgruppe

$$\prod_{i \in I} \operatorname{Perm}(M_i)$$

eine Untergruppe von $\operatorname{Perm}(M)$ ist.

AUFGABE 18.11. (2 Punkte)

Zeige, dass jede gerade Permutation $\sigma \in S_n$, $n \geq 3$, ein Produkt aus Dreierzykeln ist.

AUFGABE 18.12. (5 Punkte)

Sei σ ein Zykel der Ordnung n. Zeige, dass man σ als Produkt von $n-1$ Transpositionen schreiben kann, aber nicht mit einer kleineren Anzahl von Transpositionen.

AUFGABE 18.13. (3 Punkte)

Sei $m \geq n$. Wie viele injektive Abbildungen gibt es von $\{1, \ldots, n\}$ nach $\{1, \ldots, m\}$ und wie viele surjektive Abbildungen gibt es von $\{1, \ldots, m\}$ nach $\{1, \ldots, n\}$?

AUFGABE 18.14. (3 Punkte)

Bestimme mittels der Leibniz-Formel die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 6 & 8 & 2 \\ 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$