Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2022/2023**

Maß- und Integrationstheorie

Vorlesung 11

Parameterabhängige Integrale

Wie diskutieren nun, wie Integrale von einem Parameter abhängen, der sich in einem metrischen Raum bewegt. Dazu muss man in erster Linie das Verhalten bezüglich einer Folge verstehen, so dass man die Ergebnisse der letzten Vorlesung anwenden kann. Der folgende Stetigkeitssatz ist eine weitreichende Verallgemeinerung von Satz 58.2 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)).

Es sei $(M, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, E ein metrischer Raum und

$$f\colon E \times M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}},\, (t,x) \longmapsto f(t,x),$$

eine Funktion. Dann gibt es einerseits zu jedem $x \in M$ die Funktion

$$f(-,x)\colon E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}},\, t \longmapsto f_x(t) = f(t,x),$$

die man auf Stetigkeit untersuchen kann, und andererseits für jeden „Parameter“ $t \in E$ die Funktion

$$f(t,-)\colon M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}},\, x \longmapsto f_t(x) = f(t,x)$$

und dazu (im Falle der Integrierbarkeit) das Integral $\int_M f_t \, d\mu$. Wir interessieren uns für die Abhängigkeit von diesem Integral vom Parameter $t \in E$. Um deutlich zu machen, dass über $x \in M$

(nicht über $t \in E$) integriert wird, schreiben wir manchmal $\int_M f_t \, d\mu(x)$ oder $\int_M f(t,x) \, d\mu(x)$, wobei x die Variable zu M bezeichnet.

Satz 11.1. *Es sei $(M, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum, E ein metrischer Raum, $t_0 \in E$ und*

$$f\colon E \times M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}},\, (t,x) \longmapsto f(t,x),$$

eine Funktion, die die folgenden Eigenschaften erfülle.

(1) *Für alle $t \in E$ ist die Funktion $x \mapsto f(t,x)$ messbar.*
(2) *Für alle $x \in M$ ist die Funktion $t \mapsto f(t,x)$ stetig in t_0.*
(3) *Es gibt eine nichtnegative messbare integrierbare Funktion*

$$h\colon M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

mit

$$|f(t,x)| \leq h(x)$$

für alle $t \in E$ und alle $x \in M$.

Dann ist die Funktion

$$\varphi \colon E \longrightarrow \mathbb{R},\, t \longmapsto \varphi(t) = \int_M f(t,x)\, d\mu(x),$$

wohldefiniert und stetig in t_0.

Beweis. Die Integrierbarkeit der einzelnen Funktionen $x \mapsto f(t,x)$ folgt aus Lemma 9.5. Wir müssen die Stetigkeit der Funktion

$$t \mapsto \varphi(t) = \int_M f(t,x)\, d\mu(x)$$

in t_0 zeigen. Wir wenden das Folgenkriterium für die Stetigkeit an, sei also $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in E, die gegen t_0 konvergiert. Wir setzen $f_n(x) = f(s_n,x)$. Aufgrund der zweiten Voraussetzung konvergiert die Folge $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ für jedes $x \in M$ gegen $f(t_0,x)$. Daher konvergiert die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen $f(t_0,-)$. Wegen der dritten Bedingung kann man den Satz von der majorisierten Konvergenz anwenden und erhält

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(s_n) \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_M f_n(x)\, d\mu(x) \;=\; \int_M f(t_0,x)\, d\mu(x) \;=\; \varphi(t_0).$$

□

Satz 11.2. *Es sei* $(M,\mathcal{A},\mu)$ *ein* σ*-endlicher Maßraum,* I *ein nichtleeres offenes Intervall und*

$$f \colon I \times M \longrightarrow \mathbb{R},\, (t,x) \longmapsto f(t,x),$$

eine Funktion, die die folgenden Eigenschaften erfülle.

(1) *Für alle* $t \in I$ *ist die Funktion* $x \mapsto f(t,x)$ *integrierbar.*
(2) *Für alle* $x \in M$ *ist die Funktion* $t \mapsto f(t,x)$ *(stetig) differenzierbar.*
(3) *Es gibt eine nichtnegative messbare integrierbare Funktion*

$$h \colon M \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$|f'(t,x)| \;\leq\; h(x)$$

für alle $t \in I$ *und alle* $x \in M$.

Dann ist die Funktion

$$\varphi \colon I \longrightarrow \mathbb{R},\, t \longmapsto \varphi(t) = \int_M f(t,x)\, d\mu(x),$$

(stetig) differenzierbar in t*, die Zuordnung* $x \mapsto f'(t,x)$ *ist integrierbar und es gilt die Formel*

$$\varphi'(t) \;=\; \int_M f'(t,x)\, d\mu(x).$$

Beweis. Der Differenzenquotient für φ in einem Punkt $t \in I$ und $s \neq t$ ist

$$\frac{\varphi(s) - \varphi(t)}{s - t} = \frac{\int_M f(s,x)\, d\mu(x) - \int_M f(t,x)\, d\mu(x)}{s - t}.$$

Wir müssen für jede Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in I mit $s_n \neq t$, die gegen t konvergiert, zeigen, dass die zugehörige Folge der Differenzenquotienten konvergiert. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es (für jedes $x \in M$ und jedes n) ein $c \in I$ mit

$$\left| \frac{f(s_n,x) - f(t,x)}{s_n - t} \right| = |f'(c,x)| \leq h(x).$$

Da h integrierbar ist, ist auch für jedes $n \in \mathbb{N}$ der Differenzenquotient als Funktion in x nach Lemma 9.5 integrierbar. Dann ist unter Verwendung der Linearität des Integrals und des Satzes von der majorisierten Konvergenz

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= \lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(s_n) - \varphi(t)}{s_n - t} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\int_M f(s_n,x)\, d\mu(x) - \int_M f(t,x)\, d\mu(x)}{s_n - t} \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_M \frac{f(s_n,x) - f(t,x)}{s_n - t}\, d\mu(x) \\
&= \int_M \left(\lim_{n\to\infty} \frac{f(s_n,x) - f(t,x)}{s_n - t} \right) d\mu(x) \\
&= \int_M f'(t,x)\, d\mu(x).
\end{aligned}$$

Die stetige Differenzierbarkeit folgt aus Satz 11.1. □

KOROLLAR 11.3. *Es sei $(M, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und*

$$f \colon U \times M \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion, die die folgenden Eigenschaften erfülle.

(1) *Für jedes $z \in U$ ist die Funktion*

$$M \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto f(z,x),$$

integrierbar.

(2) *Für jedes $x \in M$ ist die Funktion*

$$U \longrightarrow \mathbb{R},\ z \longmapsto f(z,x),$$

stetig differenzierbar.

(3) *Es gibt eine nichtnegative integrierbare Funktion*

$$h \colon M \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$\| \frac{\partial f}{\partial z_i}(z,x) \| \leq h(x)$$

für alle $z \in U$, alle $x \in M$ und alle $i = 1, \ldots, n$.

Dann ist die Funktion

$$\varphi\colon\, U \longrightarrow \mathbb{R},\, z \longmapsto \varphi(z) = \int_M f(z,x)\, d\mu(x),$$

stetig differenzierbar und es gilt für jedes $i = 1, \ldots, n$ die Formel

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z_i}(z) \,=\, \int_M \frac{\partial f}{\partial z_i}(z,x)\, d\mu(x).$$

Beweis. Dies folgt aus Satz 11.2, indem man zu $i \in \{1, \ldots, n\}$ und $P \in U$ die lineare Kurve

$$\psi\colon\, I \longrightarrow U,\, t \longmapsto P + te_i,$$

vorschaltet und $f \circ (\psi \times \mathrm{Id}_M)$ betrachtet. $\square$

Das Cavalieri-Prinzip

Bonaventura Cavalieri (1598-1647)

Es seien $(M, \mathcal{A}, \mu)$ und $(N, \mathcal{B}, \nu)$ σ-endliche Maßräume und $T \subseteq M \times N$ eine messbare Teilmenge. Für jeden Punkt $x \in M$ ist

$$T(x) \,=\, \{y \in N \mid (x,y) \in T\}.$$

Wir erinnern an Lemma 4.10, nachdem diese Mengen messbar sind. In welcher Beziehung steht $(\mu \otimes \nu)(T)$ zur Funktion

$$M \longrightarrow \mathbb{R},\, x \longmapsto \nu(T(x))?$$

Bei $N = \mathbb{R}$ und wenn T der Subgraph zu einer nichtnegativen messbaren Funktion f ist, so ist $\lambda^1(T(x)) \,=\, f(x)$ und nach der Definition des Integrals gilt

$$(\mu \otimes \lambda^1)(T) \,=\, \int_M f(x)\, d\mu \,=\, \int_M \lambda^1(T(x))\, d\mu.$$

Der Satz von Cavalieri besagt, dass die Gleichheit zwischen links und rechts für beliebige messbare Teilmengen T gilt. Um diesen Satz überhaupt formulieren zu können, müssen wir zunächst sicherstellen, dass die Funktion $x \mapsto \nu(T(x))$ messbar ist.

LEMMA 11.4. *Es seien $(M, \mathcal{A}, \mu)$ und $(N, \mathcal{B}, \nu)$ σ-endliche Maßräume und sei $T \subseteq M \times N$ eine messbare Teilmenge. Dann sind die Funktionen*

$$M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}},\, x \longmapsto \nu(T(x)),$$

und

$$N \longrightarrow \overline{\mathbb{R}},\, y \longmapsto \mu(T(y)),$$

messbar.

Beweis. Wir zeigen die Messbarkeit der ersten Funktion $x \mapsto \nu(T(x))$. Dabei reduzieren wir zuerst auf die Situation in der das Maß ν auf N endlich ist. Nach Voraussetzung gibt es eine abzählbare messbare Ausschöpfung $N_n \uparrow N$ mit $\nu(N_n) < \infty$. Wir setzen $T_n = T \cap (M \times N_n)$. Dann ist $T_n \uparrow T$ und damit auch $T_n(x) \uparrow T(x)$ für jedes $x \in M$. Wenn wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Messbarkeit von $x \mapsto \nu(T_n(x))$ gezeigt haben, so folgt sie wegen Lemma 8.4 auch für $x \mapsto \nu(T(x)) = \lim_{n \to \infty} \nu(T_n(x))$. Wir können also annehmen, dass $\nu(N) < \infty$ ist.

Wir wollen zeigen, dass für jedes $T \subseteq M \times N$ die Funktion $x \mapsto \nu(T(x))$ messbar ist. Wie setzen

$$\mathcal{D} = \{T \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \mid \text{Die Funktion } x \mapsto \nu(T(x)) \text{ ist messbar}\}$$

und müssen zeigen, dass dies die gesamte Produkt-σ-Algebra ist. Zunächst gehören die messbaren Quader $A \times B$ zu $\mathcal{D}$. Es ist ja

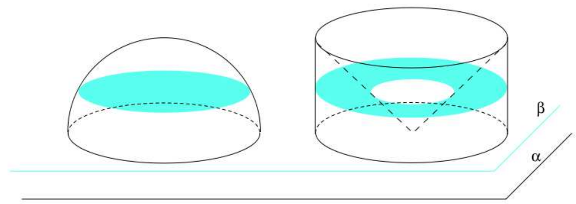
$$(A \times B)(x) = \begin{cases} B, & \text{falls } x \in A \\ \emptyset & \text{sonst}, \end{cases}$$

und damit ist

$$\nu(T(x)) = \nu(B) \cdot e_A(x)$$

messbar. Wir zeigen, dass $\mathcal{D}$ ein Dynkin-System ist. Es ist $M \times N \in \mathcal{D}$. Seien $S \subseteq T$ Teilmengen, die zu $\mathcal{D}$ gehören. Dann ist $(T \setminus S)(x) = T(x) \setminus S(x)$ und $\nu((T \setminus S)(x)) = \nu(T(x)) - \nu(S(x))$ ist nach Lemma 8.3 messbar. Für eine disjunkte abzählbare Vereinigung $T = \biguplus_{i \in I} T_i$ ist $T(x) = \biguplus_{i \in I} T_i(x)$. Wenn $T_i \in \mathcal{D}$ für alle $i \in I$ ist, so ist die Funktion $x \mapsto \nu(T(x)) = \sum_{i \in I} \nu(T_i(x))$ nach Korollar 8.8 wieder messbar. Damit ist insgesamt $\mathcal{D}$ ein Dynkin-System, das das durchschnittsstabile Erzeugendensystem aller Quader für die σ-Algebra $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ enthält. Deshalb ist $\mathcal{D} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ nach Lemma 1.13. $\square$

Wir werden im Folgenden die Notation $\int_M f(x)\, d\mu(x)$ verwenden, die betont, dass die Funktion f von $x \in M$ abhängt. Dies ist insbesondere dann sinnvoll, wenn es um einen Produktraum $M \times N$ geht und Verwechslungen möglich sind.



Satz 11.5. *Es seien $(M, \mathcal{A}, \mu)$ und $(N, \mathcal{B}, \nu)$ σ-endliche Maßräume. Dann gilt für alle messbaren Teilmengen $T \subseteq M \times N$ die Beziehung*

$$(\mu \otimes \nu)(T) = \int_M \nu(T(x))\, d\mu(x) = \int_N \mu(T(y))\, d\nu(y).$$

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass die Zuordnung

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}},\ T \longmapsto \int_M \nu(T(x))\, d\mu(x),$$

ein Maß auf der Produkt-σ-Algebra ist. Es sei dazu $T = \biguplus_{i \in I} T_i$ eine abzählbare Zerlegung in paarweise disjunkte messbare Teilmengen. Nach Aufgabe 10.10 ist

$$\begin{aligned} \int_M \nu(T(x))\, d\mu &= \int_M \nu\left(\left(\biguplus_{i \in I} T_i\right)(x)\right) d\mu \\ &= \int_M \nu\left(\biguplus_{i \in I} T_i(x)\right) d\mu \\ &= \int_M \sum_{i \in I} \nu(T_i(x))\, d\mu \\ &= \sum_{i \in I} \int_M \nu(T_i(x))\, d\mu, \end{aligned}$$

so dass die σ-Additivität erfüllt ist. Für einen Quader $A \times B$ ist

$$\int_M \nu((A \times B)(x))\, d\mu = \int_A \nu(B)\, d\mu = \mu(A) \cdot \nu(B).$$

Aufgrund des Eindeutigkeitssatzes für das Produktmaß muss daher das durch das Integral definierte Maß mit dem Produktmaß übereinstimmen. $\square$

Abbildungsverzeichnis

Quelle = Bonaventura Cavalieri.jpeg , Autor = Benutzer Gene.arboit auf Commons, Lizenz = PD 4

Quelle = Cavalieriho princip.svg , Autor = Benutzer Pajs auf cs Wikipedia, Lizenz = Public domain 6

Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von http://commons.wikimedia.org) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 7

Lizenzerklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 7