ヅクノミ

然ラバ若シ極少ノ差モ無ク正ニ一量ノ幾許ナルヤヲ表ハサントスルトキハ何如シテ能ク之ヲ爲シ得ルヤ吾輩ハ言語ヲ以テ之ヲ爲ス能ハザルナリ其量ヲ示スカ或ハ之ヲ代表スル量ヲ示サヾル可カラズ例ヘバ室ノ巾ヲ代表スル爲ニ十分一ノ尺度ニ縮メタル圖ヲ以テスルガ如シ

是ハ長サヲ代表スルニ長サヲ以テセルナリ然レドモ重サヲ代表スルニ重サヲ以テシ或ハ時間ヲ代表スルニ時間ヲ以テスルヲ要セザルナリ是皆實際長サヲ以テ代表スベシ例ヘバ化學者ハ極メテ精密ニ重サヲ量ラントスルトキハ其天秤盤ヘ入ルヽニ極メテ小キ分銅ヲ用ユ而シテ尚ホ此極小分銅ニテモ

正ニ量ル能ハザルトキハ天秤ノ杆上ニ細キ金條ヲ載セ其杆ノ中心ヨリノ距離ニ由リテ以テ剩餘ノ重サヲ量ル若シ天秤眞正ニシテ且摩擦等ノ爲ニ誤謬ヲ生ズルヿ無シトセバ此距離ハ最精密ニ重サヲ表ハス可シ

(日本ノ秤ニ於テハ直ニ距離ヲ以テ重サヲ表ハセリ)

是重サヲ長サ(即天秤ノ中心ヨリ金條マデノ距離)ヲ以テ表ハシタルモノナリ又吾輩ハ通例時ヲ知ルニ時計ヲ用ユ而シテ其分ヲ示ス針ハ少シヅヽ飛ビ動ク(例ヘバ一秒ニ二回)斯ノ如キ時計ハ半秒マデハ確ニ時ヲ示スト雖モ半秒ヨリ短キ時間ニ付テハ之ニ由リテ以テ知ル能ハザルナリ然レドモ若シ分針ノ動クヿ平等(ユニフオーム)ニシテ飛ビ飛ビナラザル時計有リ

ト想像セバ前ノ時(一時二時等)ヨリ何分ヲ過ギタルカハ正ニ此時計ノ周圍上ニ頂上ヨリ分針ノ尖端マデ量リタル距離ヲ以テ表ハス可シ

斯ノ如ク重サ(時間(其他何等ノ量ニテモ皆線ノ長サヲ以テ代表スルヲ得故ニ以下專ラ長サニ付テ說ク所ノモノハ總テ量ヲ代表スルモノト認ム可キナリ

第貳節　量ノ加法減法

二ツノ長サヲ加フルハ唯之ヲ端ト端ト合セテ一直線ニ置クヲ以テ足レリトス而シテ量ヲ加フルノ方法ニ於テ多樣有ルハ遠ク二數ヲ加フルノ方法ニ勝レリ何トナレバ啻ニ其端ト端ト合セルニ順序ヲ變ズ可キノミナラズ各長サヲ任意ニ

幾分シ其部分ヲ任意ニ接續スルモ加法ノ結果ニ於テ差ヲ生ゼザルナリ

又步ニ由リテ之ヲ說カン此ニ一直線有リ其上ニ一點ヲ取リ之ヲ起算ノ點トス其ヨリ順次同距離ニ數點ヲ標シ之ニ一、二、三、四等ノ數ヲ記ス然ルトキハ或ル一數ハ指針ヲ直線上其數ヲ記シタル標點ヲ指サシメテ以テ示ス可シ或ル數ヲ之ニ加ヘ或ハ之ヨリ減セントスルトキハ指針ヲ其數丈ケノ區分ヲ進退セシムルノミ然ルニ長サヲ量ルニ於テハ指針ハ直線上ノ標點ノミヲ指スニ限ラズ一ツノ長サハ起算ノ點ヨリノ距離恰モ其長ニ等シキ點ニ指針ヲ置キ以テ之ヲ表ハス而シテ此點ハ二數ヲ記セル標點ノ間ノ何處ニ在ルモ差

支ナシ又或ル長サヲ之ニ加ヘ或ハ之ヨリ減ゼント欲スルトキハ指針ヲ之ニ對スル距離ダケ進退セシム可シ
量ニ於テモ亦(數ニ於ケル如ク)數多ノ歩ヲ續ケテ爲ス時ハ結果ハ其順序ノ何如ニ關セザルヿ明白ナリ

第三節　量ノ乘法除法

量ニ乘ズルトハ相等シキ量幾許ヲ加フルナリ(即何倍スルト云フヿナリ)例ヘバ一尺ノ長サニ十六ヲ乘ズレバ十六尺ノ長サトナルガ如シ是特ニ説明ヲ要セザルナリ
又之ヲ反轉シテ左ノ如キ問ヲ起スヿ有ル可シ此ニ甲乙二ツノ長サ有リ甲ニ何數ヲ乘ズレバ乙トナルヤ此問ノ答タル數ヲ得ルハ特別ノ場合ニ限レルヿハ先ニ量ノ測法ニ付テ説

キタル所ニ由リテ自カラ明ナリ(第一編第十節ヲ參照ス可シ)例ヘバ一尺ニ何數ヲ乘ジ一尺五寸ト爲ルヤト問ハヾ(數ノ意義ヲ擴張スルニ非ラザレバ)此答タル數無キナリ吾輩ハ一寸ニ十五ヲ乘ズレバ一尺五寸トナルヲ知ル故ニ右ノ問ニ答ヘンニハ先一尺ニ何數ヲ乘ズレバ一寸トナルヤヲ問ハザル可カラズ而シテ此問タルヤ甚無理ナルガ如シ何トナレバ一寸ニ十ヲ乘ジテ一尺トナル一尺ヲ一寸ト爲スニハ之ニ乘ズルニ非ラズシテ之ヲ十分セザル可カラザレバナリ
今何如シテ一尺ヲ一尺五寸ニ變ズルヤヲ考フルニ先ツ一尺ヲ十ニ等分シ其一部分ニ等シキモノヲ十五合セザル可カラズ簡短ニ之ヲ云ヘバ十ヲ以テ除リ十五ヲ乘セザル可カ

ラズ或ハ其順序ヲ換ヘ先ッ十五ヲ乘シ十五尺ヲ得之ヲ十ニ等分スルモ亦可ナリ

今此複夾ナル演算ヲ表ハスニ新異ノ名稱ヲ作ラズシテ之ヲ舊ニ依リテ乘法ト稱スルトセバ一尺ニ乘シテ一尺五寸ヲ得ルト云フヲ得可キナリ十五ヲ乘シ十ヲ以テ除ル演算ヲ$\frac{15}{10}$ト記ス而シテ一尺ヲ一尺五寸ト爲スニハ之ニ分數$\frac{15}{10}$ヲ乘ゼザル可カラズ此分數ノ上ニ在ル數(15)ヲ分子ト稱シ下ニ在ルモノ(10)ヲ分母ト稱ス

算術及代數學ノ式ハ二重ノ解釋有ルコトハ第一編ニ於テ說明シタル所ナリ例ヘバ此ニ3ノ如キ一記號有レバ最初物(文字、人等)ノ數ヲ表ハスモノナリシヲ一演算(即三倍スルコト)ヲ表ハスモノト認ルコトヲ說明シタリ之ト同シク今$\frac{15}{10}$ノ如キ記號ハ一尺ノ十分ノ十五トモ又ハ一尺ヲ變シテ一尺五寸ト爲ス演算ノ記號トモ認ムルヲ得

甲量乙量ヨリ大ナル或ハ之ヨリ小ナルノ度即乙ヲ變シテ甲ト爲スニ必要ナル引延シ或ハ壓縮メノ度ヲ甲乙二量ノ比(レーシオ)ト稱ス若シa、bヲ二ツノ長サトセバaトbトノ比トハbヲ引延シ或ハ壓縮メテaト爲スノ演算ナリ而シテ此演算ハ常ニ殆ト正シク(時トシテハ全ク正シク)數ニ由リテ表ハスヲ得

第四節　比ヲ表ハス算術上ノ方法

比ヲ表ハス(殆ト正シク)爲ニ用ユル方法二有リ其孰レニ於

テモ量ヲ測ルニ於ケル如ク之ヲ量ル標準ヲ漸次ニ小ニス而シテ一方法ニ於テ標準ハ確定シタル規則ニ從テ之ヲ撰ビ一方法ニ於テハ吾輩ノ量ラント欲スル所ノ比ニ由リテ自然ニ起リ來ルモノナリ

第一ノ方法ニ於テハ標準ハ漸次ニ小クナリ各標準ハ其前ノ標準ノ十分ノ一ヲ取ル例ヘバ一間一尺五寸ト一間トノ比ヲ表ハサントス一間一尺五寸ハ一間ヲ一ツ含有シ餘剩一尺五寸有リ此一尺五寸ヲ量ル標準トシテ前ノ標準即一間ノ十分ノ一ヲ用ユ然ルトキハ一尺五寸ハ一間ノ十分一ヲ二ツ含有シ餘剩一間ノ十分一ノ半分有リ暫ク此餘剩無シトセバ比ハ十分ノ十二ナリ之ヲ1.2ト記ス可シ然レドモ是レハ比

ヲ正ニ表ハスモノニ非ラズ右ノ餘剩ヲ算入セザレバナリ今之ヲ算入センニハ標準トシテ一間ノ百分一ヲ取リ十分一ノ半分ハ恰モ百分ノ五ナレバ比ハ正ニ百分ノ百二十五即1.25ナリ

尚一例トシテ此方法ニ由リテ正方形ノ對角線ト其邊トノ比ヲ表ハス可シ對角線ハ邊ニ等シキ長サヲ一ツ含有シテ餘剩有リ故ニ求ムル所ノ比ハ一ト或ル分數ナリ今此餘剩ヲ邊ノ十分一ヲ標準トシテ量ルトキハ邊ノ十分ノ四ト少シノ餘剩有リ故ニ對角線ト邊トノ比ハ殆十分ノ十四即1.4ナリ此餘剩ヲ邊ノ百分ノ一ヲ以テ量ルトキハ百分ノ一ト餘剩有リ故ニ比ハ百分ノ百四十一即1.41トスレバ尚ホ眞ニ近シ又

餘剩ヲ邊ノ千分一ヲ標準トシテ量レバ千分ノ四ト餘剩有リ故ニ比ハ千分ノ千四百十四即1.414ニ近シ斯ノ如クニシテ以テ眞ノ比ニ近ク可キヿ限リ無シ然レドモ此例ニ於テヘ前ノ例ト異ナリ此方法決シテ終ルヿ無シ故ニ此比ハ正ニ數ヲ以テ表ハス能ハザルナリ

第二方法ニ於テモ標準ハ漸次小ナルヲ取ルト雖モ前ノ如ク十分ノ一ヅヽニ取ルニ非ラズシテ各比ニ就テ自然ニ顯ハルヽモノナリ此例トシテ前ノ如ク正方形ノ對角線ト其邊トノ比ヲ求ム可シ最初前ノ如ク邊ヲ標準トス對角線ハ邊ヲ一ッ含有シ餘剩有リ之ヲaトス然ルトキハ吾輩ハaヲ標準トシテ邊ヲ量ル邊ハaヲ二倍含有シ餘剩有リ即2aトaヨリ小ナル長サニ等シ此餘剩ヲbトシ之ヲ次ノ標準トシテaヲ量ルaハbヲ二倍含有シ餘剩有リ之ヲcトス斯ノ如クシテ遂ニ餘剩無キニ至ルカ或ハ隨意ノ所ニ至リテ止ル可シ此例ニ於テハ各餘剩ハ常ニ次ノ餘剩ヲ二倍含有シテ餘剩有リ

今是ニ由リテ何如シテ漸次對角線ト邊トノ比ニ近キ分數ヲ得可キヤヲ說明スベシ

第一、a正ニ邊ノ二分一ナリトセバ(即餘剩b無キモノトセバ)對角線ハ一邊ト二分一ニ等シ即一邊ノ二分ノ三ニ等シ

次ニbヲ算入スルモcヲ無キモノトセバbハ恰モaノ二分一ナリ故ニ一邊ハaヲ二倍ト其二分ノ一ヲ含有ス即a

ノ二分ノ五ニ等シクシテaハ邊ノ五分ノ二ニ等シ故ニ對角線ハ一邊ト其五分ノ二ニ等シ即一邊ノ五分ノ七ニ等シ

次ニcヲ算入シ次ノ餘剩ヲ無キモノトセバcハbノ二分一ナリaハbヲ二倍ト二分一含有スレバ即bノ二分ノ五ナリ故ニbハaノ五分ノ二ナリ故ニaノ二倍トaノ五分ノ二即aノ五分ノ十二ニ等シ故ニaハ一邊ノ十二分ノ五ナリ而シテ對角線ハ一邊トaニ等シケレバ即一邊ノ十二分ノ十七ナリ此比ハ前ノ比ヨリ眞ニ近シ何トナレバ此ニ棄捨シタル餘剩ハcヨリ小ナレバナリcハbノ二分ノ一bハaノ五分ノ二aハ邊ノ十二分ノ五ナレバ拋棄タル餘剩ハ一邊ノ十二分ノ一ヨリ少ナリ

此方法ヲ續クル時ハ漸次ニ眞比ニ近キ比ヲ得且眞比トノ差ヲ何程ニテモ小ナラシムルヿヲ得

第一ノ方法ヲ十分法ト稱シ第二ノ方法ヲ連分數法ト稱ス

第五節　第四比例項

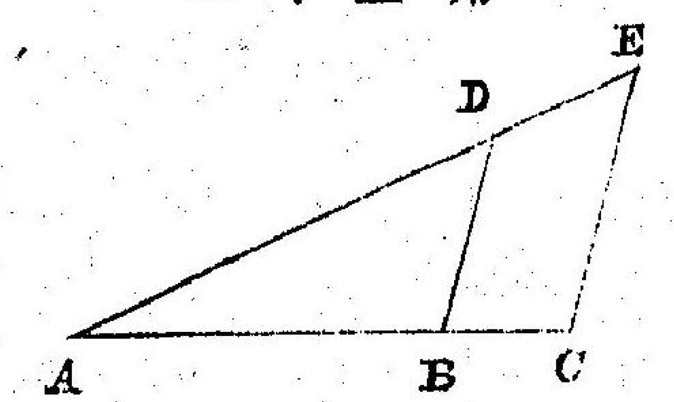
量ト數ト異ナル重要ノ一點ハ左ノ一項ナリ甲數ヲ乙數ヲ以テ除ルハ甲數乙數ノ倍數ナルニ非ラザレハ爲ス能ハザルナリ然ルニ量ハ任意ノ數ヲ以テ除ルヲ得ルハ吾輩ノ常ニ信ズル所ナリ量ハ何ニテモ皆長サヲ以テ表ハス可キモノナレバ是レ一ツノ長サハ幾分ニテモ等分スルヲ得ルトスルナリ而シテ除法常ニ行フ可ケレバ分數ヲ以テ乘ズルト稱シタル乘法除法ヲ合セタル演算モ亦常ニ行フ可キナリ例へ

バ一尺ノ十分ノ五ノミナラズ何如ナル長サノ十分ノ五ニテモ之ヲ得可キナリ

是ニ至リテ自然ニ起リ來ル疑問ハ吾輩ノ比ト名ケタル引延シ或ハ壓縮メノ演算ハ總テノ量ニ同一ニ行フ可キモノナルカノ點ナリ即此ニ三ツノ長サ(量)有リ之ヲa「b「cトス而シテaヲ變シテbト爲ス一演算有リ(引延シ或ハ壓縮メ)吾輩ハ同一ノ演算ヲcニ施シテ以テaトbノ比ニ等シキ比ヲcニ對シテ有スル所ノ一量dヲ得能フヤ吾輩ハ斯ノ如キ量ヲ得能フモノナリト假定シ之ヲ第四比例項ト名ク而シテ此假定ハ本節以下總テノ數理ノ基礎ナレバ極メテ重要ナルモノナリ故ニ今精シク之ヲ考フ可シ

此假定ハ第二編ノ始メニ於テ擧ゲタル「スペース」ニ係ル二件ノ第二條中ニ已ニ含有シタルモノナリ其第二條ハ左ノ如クナリシ「形同クシテ大サ異ナレル物有ルヲ得」而シテ同編第六節ニ於テ三角形ノ角度各相等シクシテ大サ異ナレルモノヲ取リテ以テ此件ヲ說明シ一ツノ三角形ハ其三邊ヲ一樣ニ大クシテ同形異大ノ三角形ト爲スヲ得ルヿヲ論ジタリ

第三十二



今之ヲ言ヒ換レバ甲乙二ツノ三角形ノ角度各相等シケレバ甲ノ各邊ト乙ノ之ニ對スル各邊トノ比ハ皆同一ナリ若シ果シテ然ラバ第四比例項ヲ求ムルハ同形ノ三角形ヲ畫クト同一ノ問題ナリ例ヘバAB AC(第三十二圖)ヲ最

初ノ二量トシADヲ第三量トシABヲ引延シACト為ストキ同一ノ演算ニ由リテADヨリ得ル所ノ量(第四比例項)ヲ求ムB、Dヲ結ヒ付ケACE角ABD角ニ等シキ樣ニCE線ヲ引クトキハ二ノ三角形ABD ACEハ同形ナリ故ニACEハABDノ各邊ヲ同樣ニ引延シテ得可キモノナリ即ABヲACニ變ズル引延シハADヲAEニ變ズル引延シト同一ナリ故ニAEハ即第四比例項ナリ

前述ノ事件ヲ尚明瞭ナラシムル為ニ第四比例項トハ何如ナルモノナルカヲ今一層精密ニ定ム可シ前ニハ第四比例項トハABヲACニ變ズルト同一ノ演算ニ由リテADヨリ得來ル所ノ量ナリトセリ然ルニ吾輩ハ何ニ由リテ二演算ノ同一ナルヲ知ルヤ吾輩ハ右ノ説明ニ基キ幾何學上ノ解釋ヲ下シADトAEノ比ABトACノ比ト同一ナリトハ即各AB AD及AC AEヲ對應邊トシテ二ッノ同形ナル三角形ヲ畫キ得ル場合ニ於テ斯ク云フトスルモ可ナリ然リト雖モ量ノ學ハ成ル可ク「スペース」ノ學ト區別シ置キ成ル可キ丈ケハ量ノミニ依ル解釋ヲ下スヲ宜トス斯ノ如キ解釋ハ已ニ學者ノ下シ得タル所ニシテ此定義ノ性質ハ最讀者ノ注意ス可キモノナリ蓋シ連續ノ原理(プリンシプル、オフ、コンチニユイテー)ニ由リテ存在セリトスル量ニ付テハ同樣ノ定義ヲ下スヿ多ケレバナリ連續ノ原理トハ即本節ノ始メニ吾輩ノ常ニ信ズル所ナリトシテ掲ゲタル事即量ハ幾分ニモ等分スルヲ得ルトスル事ナリ

此ニ同一量ニ二ッノ引延シ甲乙ヲ行フ甲演算ヲ行フノ結果

乙演算ヲ行フノ結果ヨリ大ナレバ甲ハ常ニ必ズ乙ヨリ大ナル効力有ルモノナリトスルハ至當ノヿナリ即二ツノ引延シヲ異ナレル量ニ行フトキハ其一量ニ付テ他ヨリ大ナル結果ヲ生ズル引延シハ他ノ量ニ付テモ亦大ナル結果ヲ生ズ可シ吾輩ハ此ニ基キ第四比例項ノ定義ヲ爲サントス

今ACトABノ比ヲ求ムルニ當テACハABノ十二分ノ十七ト十二分ノ十八トノ間ニ在ルヿヲ發見シタリトセン然ルトキハ此ニABニ行フ二ツノ引延シ有リ一ハ$\frac{17}{12}$ヲ以テ表ハスモノナリ一ハABヲ變ジテACト爲ス引延シ即$\frac{AC}{AB}$トス然ルトキハ$\frac{17}{12}$ハ$\frac{AC}{AB}$ヨリ小ナル結果ヲ生ズルモノナリ何トナレバACハABノ十二分ノ十七ヨリ大ナレバナリ今此二ツノ引

延シヲADニ行フトキハ一ハADノ十二分ノ十七ヲ生ジ一ハ即要スル所ノ第四比例項ヲ生ズ故ニ第四比例項ハADノ十二分ノ十七ヨリ大ナリ

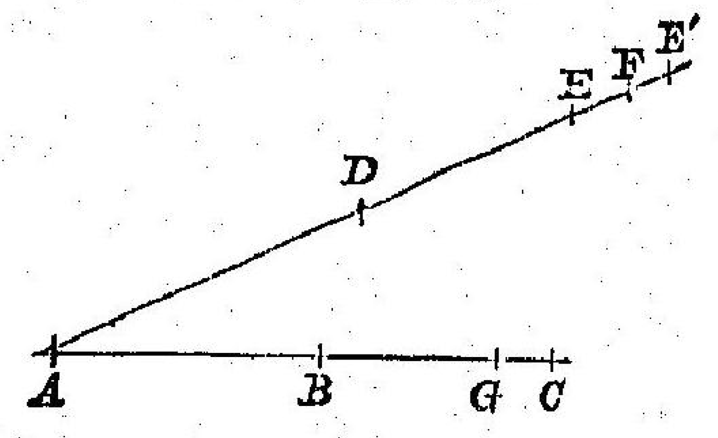
而シテ又ACハABノ十二分ノ十八ヨリ小ナリ故ニABヲACニ變ジタル演算ハ$\frac{18}{12}$ヨリ小ナル結果ヲ生ズ今此二ツノ演算ヲADニ行フトキハ第四比例項ハADノ十二分ノ十八ヨリ小ナリ何如ナル分數ヲ取リ來ルモ必ズ之ニ同ジ故ニACハ若シABノ或ル分數(右ノ例ニ於テハ十二分ノ十七)ヨリ大ナレバ第四比例項ハADノ同分數ヨリ大ナリACハ若シ是ヨリ小ナレバ第四比例項モ亦ADノ同分數ヨリ小ナリ

是第四比例項ノ性質ニシテ之ヲ其定義トナシテ可ナリ何

トナレバ此性質ヲ有スルモノハ唯一個有ルノミナレバナリ即此約束ニ適ヘル長サハ唯一個有ルノミ之ヲ證明スルヿ左ノ如シ

是ノ如キ長サ二個有ルヲ得ルモノト假定シ之ヲAE, AE'トセン

第三十三



即AE, AE'ハ孰レモ右ニ述タル性質ヲ備ヘタルモノ即第四比例項トセン今EE'ニ等シキ長サヲ數多加ヘ其和ヲADヨリ大クスルヿヲ得例ヘバEE'ヲ五百加フレバADニ足ラズ五百一加フレバADニ過タリトセン然レバADヲ五百一ニ等分スル片ハ各部分ハEE'ヨリ小ナルヿ明ナリ今DヨリEノ方ヘ此部分(ADノ五百一分ノ一)ニ等シキ長サヲ數多續ケテ取ルトキハ(各部分EE'ヨリ小ナルヲ以テ)斯ク取リタル數部分ノ内一部分ノ端ハ必ズEトE'トノ間ニ在ラザルヲ得ズFヲ此點トス故ニAFハADヲ五百一ニ等分シ之ニ或ル數ヲ乘ジタルモノナリ今同演算ヲABニ行フトキハ(之ヲ五百一ニ等分シ或ル數ヲ以テ乘ズル)AGヲ得而シテAGハACヨリ大ナルカ或ハ小ナルカノ一ナリ之ヲACヨリ小ナリトセバABヲAGト爲ス演算ハABヲACト爲ス演算ヨリ小ナル引延シナリ故ニADヲAFト爲ス演算モ亦ADヲAE(第四比例項)トナス演算ヨリ小ナル引延シナリ又ADヲAE'(同シク第四比例項)ト爲ス演算ヨリモ小ナル引延シナリ然ラバAFハAEヨリ小ニシテ又AE'ヨリモ小ナルヲ要ス然ルニFハEトE'トノ間ニ在ル

ヲ以テAF'ハAE AE'ノ兩者ヨリ小ナル能ハズ若シ又AGヲACヨリ大ナリトスルトキハ同樣ノ理ニ由リテAFハAE AE'兩者ヨリ大ナルヲ要ス是亦然ル能ハズ斯ク右ニ述タル性質ヲ備ヘタル長サ二ツ有リト假定シテ推究スルトキハ相矛盾セル斷定ニ至ル故ニ此假定ハ誤謬ナリ此論法ハ論理學ニ於テ「レドクシオ、アド、アブスルドム」ト稱スルモノニシテ數學ニ於テ屢用ユル所ナリ

斯クADヲ變シテ第四比例項ト爲スノ演算ハABヲ變シテACト爲ス演算ヨリ小ナル總テノ分數ヨリハ大ニシテ同演算ヨリ大ナル總テノ分數ヨリハ小ナルモノナリ是レ即前章ニ於テ二比同一ナリトハ何ニ由リテ之ヲ認ムルヤノ問題ニ對シテ充分ナル答ナリ之ヲ言ヒ換ユレバ第四比例項ノ

充分ナル定義ナリ

吾輩ハ尚ホ一層精シク此定義ヲ查考セントス

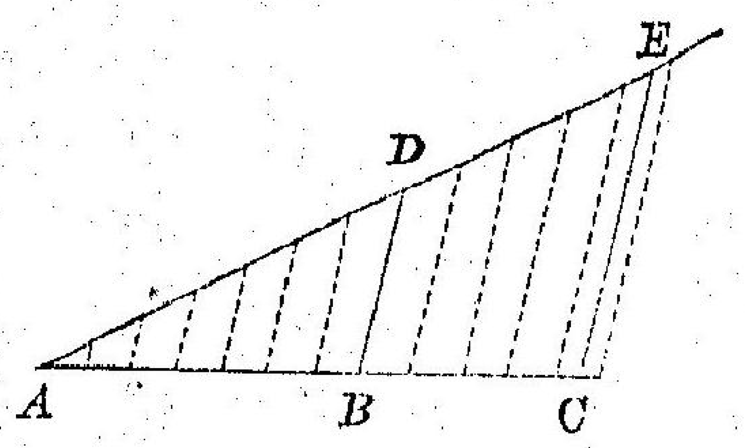
第一右ノ定義ニ曰ク任意ニ一分數ヲ取リ來リ若シ此分數ACトABノ比ヨリ大ナレバ亦AEトADノ比ヨリモ大ナリ若シ前者ヨリ小ナレバ後者ヨリモ小ナリ

此ニAEナル長サ有リAB AC ADノ第四比例項ナリト云フ然ルトキハ吾輩或ル分數ヲ取リ來リ此分數ニ付テAEハ果シテ右ノ約束ニ適ヘルヤ否ヲ撿スルハ容易ニ爲シ得可キ事ナリ

然ルニAEニ若シ眞ニ第四比例項ナレバ何如ナル分數ヲ取リ來リテ之ヲ撿スルモ必ズ此約束ニ適スルヲ要ス吾輩ハ固ヨリ一切ノ分數ヲ取リ來リテ一々直接ニ之ヲ撿スル能ハ

ズト雖モ證明ノ方法ニ由リテハ或ル一ツノ分數ニ付テ之ヲ撿シ其約束ニ適ヘルヲ證明シ何如ナル分數ヲ取リ來ルモ全ク同一ノ方法ヲ以テ之ヲ證明スルヲ得ルヲ以テ一切ノ分數ニ付テ一々之ヲ撿スルニ及バザルナリ

第三十四



ABD ACE ヲ同形ノ二三角形トスAB ヲ任意ノ部分ニ等分シ各等分點ヲ過リBDニ平行シタル直線ヲ引クトキハ此等ノ直線ハ又ADヲ同數ニ等分スベシ今BヨリCノ方ヘABヲ等分シタル各部分ニ等シキ長サヲ續ケテ取リ各部分ノ端ヨリBDニ平行シタル直線ヲ引クトキハ此等ノ直線ハDヨリEノ方ヘADヲ等分シタル各部分ニ等シキ長サヲ切ル可シ若シ此等ノ直線中ノ一個AC線上CヨリAニ近キ點ヨリ引キタルモノナレバADヲEヨリAニ近キ點ニ於テ切ル可シ何トナレバ其直線トACAEトノ爲ス三角形ハACEト同形ナレバナリ若シ又CヨリAニ遠キ點ヨリ引ケバADヲEヨリAニ遠キ點ニ於テ切ル可シ

故ニ此直線ニ標シタルABノ諸分數ヲ見ルニ其ACヨリ小ナル者ハ之ニ對スルADノ分數モ亦AEヨリ小ナリ若シACヨリ大ナレバADノ同分數モ亦大ナリ故ニAE(右ノ如ク同形三角形ノ一邊)ハ何如ナル分數ヲ取ルモ必ス右ニ述タル第四比例項ノ定義ニ適ヘリ故ニ若シ「スペース」ニ付テ第二編ノ始メニ述タル第二件眞ナリトスルトキハ第四比例項ハ必ズ

存シ此方法ニ由リテ之ヲ得

右ノ定義ニ付テ尚少シク論ゼザル可カラザル一點有リ此定義ハ量ハ「連續(コンチニユオス)セルモノ」ナリト假定ス(前章ヲ參照セヨ)之ヲ委ク云ヘバ量ハ總テ何分ニモ等分ス可キモノナリト假定ス(量ノ分數ヲ取ルトキハ即其必ズ等分ス可キヲ假定スルナリ)例ヘバa、b、c、d比例ヲ成ス四量ニシテa若シbノ五分ノ三ヨリ大ナレバcモ亦dノ五分ノ三ヨリ大ナリト云フ。bノ五分ノ三ヲ得ルハbヲ五等分ニ分チ其三ヲ取ルカ或ハbヲ三倍シ之ヲ五等部分ニ分ツナリ何レニテモ其結果ハ同一ニシテ一量ハ五等部分ニ分チ得可キ者ナリト假定セザル可カラズ

然ルニ定義ヲ爲スニハ假定スルヿ成ル可ク少キヲ宜シトス故ニ希臘ノ幾何學者ハ比例ヲ定義スルニ(三量ノ第四比例項ヲ定義スルト云フモ同一ノ事ナリ)此假定ヲ避ケタリ是レ難キ事ニ非ラザルナリ上ノ例ヲ取リテ之ヲ説明センa若シbノ五分ノ三ヨリ大ナレバcモ亦dノ五分ノ三ヨリ大ナリト云フ今a及bヲ五倍セヨa若シbノ五分ノ三ヨリ大ナルトキハaノ今變シテ成リタル量(即五倍a)ハbノ今變シテ成リタル量(即五倍b)ノ五分ノ三ヨリ大ナラザル可カラズ故ニ新bヲ五等分シテ新a(即五倍a)ハ其三ヨリ大ナラザル可カラズ新bヲ五等分シタル各部分ハ即舊bナリ故ニaトbノ大サノ關係ハ五倍aハ三倍bヨリ大ナ

リト云フモ可ナリ然レバa若シbノ五分ノ三ヨリ大ナルトキハcモ亦dノ五分ノ三ヨリ大ナリト云ハズシテ五倍a若シ三倍bヨリ大ナレバ五倍cモ亦三倍dヨリ大ナリト云フヲ得

一分數ハ二數ヲ含有ス蓋シ一數ヲ以テ除リ一數ヲ以テ乘ズルノ複夾演算ナレバナリ故ニ啻ニ五分ノ三ノ場合ノミナラズ何レノ分數ニテモ亦右ノ如ク述ブルヲ得可シ故ニa、b、c、d比例ヲ成ス四量ナレバm、nハ何如ナル數ナルモm倍aノn倍bヨリ大ナル或ハ小ナルニ從テm倍cモ亦n倍dヨリ大ナリ或ハ小ナリ

是希臘ノ幾何學者ノ説ク所ノ定義ニシテ連續ノ原理ヲ假

定セズ量ヲ何分ニモ等分スルヲ得ルヤ否ヤニ關ラズ唯其倍數ヲ取リ得ルヲ要スルノミ

以上述タル比、比ノ等シキヿ及第四比例項ノ性質ニ付テノ説明ハ以下論ズル所ノ基礎ニシテ最重要ナルモノナリ故ニ反覆丁寧ニ之ヲ論ジタレバ充分ニ明了ナルベシ又何如ナル量ニテモ(必ズ之ヲ倍スルヿヲ得ルヲ以テ)應用シ得可キモノナリト認ム可シ

第六節　面積、引延シ、壓縮メ

今右ニ述タル思想ヲ面積即表面ノ量特ニ平面積ニ應用セントス

測量スルニ最單易ナル平面積ハ矩形(サシガタ、レクタングル)(直角ナル平行方形)ナ

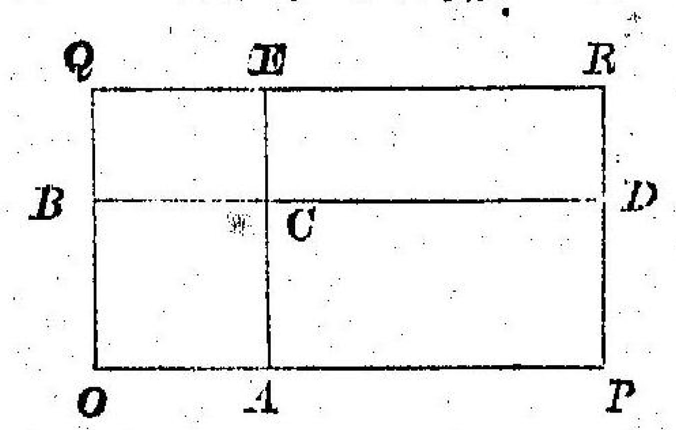
リ矩形ノ面積ヲ測ルハ唯數ノ乘法ニ由ルヿ有リ例ヘバ其長サ七寸ニシテ巾五寸ナレバ面積ハ三十五方寸ナリ是レ數ノ乘法ニ由リテ然ルナリ然レ𪜈此方法ハ唯矩形ノ各邊ハ長サノ單位幾許ニ等シキヤヲ知ル時ニノミ限レリ之ヲ知レバ矩形ノ面積ハ長サノ單位ノ上ニ畫キタル正方形幾許ニ等シキヤヲ知ル吾輩ハ今何如ナル場合ニモ用ヰ得ル方法ヲ求メントス

先第一ニ若シ矩形ノ一邊ヲ長クシ或ハ短クスル𬼀ハ(他ノ邊ハ其マヽニシテ)矩形ノ面積ハ恰モ同一ノ比ヲ以テ增減スルヿヲ認ム可シ

此ニ一ノ正方形OACB(以下單ニ方形ト云フモ正方形ナリ)

ヲ變シテ矩形OPRQトナサントスル𬼀ハ先一邊OAヲ引延シテOPニ等シクシ由リテ以テ方形ヲ引延シテ矩形ODトス其面積モ亦OAトOPノ比ニ增加ス次ニ此矩形ノ一邊OBヲ引延シテOQニ等シクスレバ矩形ODハ矩形ORトナリ其面積ハOBトOQノ比ニ增加ス或ハ先ツOB邊ヲ引延シテOQトシ方形OCヲ矩形OEト爲シ次ニOAヲ引延シテOPトシ矩形OEヲ矩形ORトニ變ズルモ亦可ナリ

第三十五



故ニ方形OCヲ矩形ORト爲スノ全演算ハ二ツノ引延シヨリ成ル吾輩ハ先ニ(本編第三節)乘法ノ意義ヲ擴メ斯ノ如キ引延シヲ乘法ト稱スルヿヲ說キタリ即方形OCニOPトOAノ比及

OQトOBノ比ヲ乘ズレバ矩形ORトナル而シテ之ヲ乘ズルニ孰レヲ先ニスルモ同一ノ結果ヲ生ズル亍明ナリ

今OPトOAノ比ヲaヲ以テ表ハシOQトOBノ比ヲbヲ以テ表ハサン然ル𬼂ハ矩形ODト方形OCトノ比モ亦aナリ即a倍OCハODニ等シORトODノ比ハbナリ即b倍ODハORニ等シ即b倍a倍OCハORニ等シ故ニba倍OCハORニ等シト云フ

又b倍OCハOEナリa倍b倍OCハa倍OE即ORナリ

故ニba倍OCトab倍OCトハ同一ノ結果ナリ即

$$ba = ab$$

此方程式ノ意ハ先ッ比aヲ以テ乘ジ次ニ比bヲ以テ乘ズルハ先ッ比bヲ以テ乘ジ次ニ比aヲ以テ乘ズルト同一ナリト

云フナリ即比ヲ以テ乘ズルノ結果ハ其順序何如ニ關ハラズ又之ヲ左ノ如ク異樣ニ述ブルヲ得

此ニ四量a、b、c、d有リaヲdニ變ズルニハ之ニ續ケテ二個ノ演算ヲ行フ即先ッbトaノ比ヲ以テ乘ジaヲ變ジテbトナシ次ニdトbトノ比ヲ以テ乘ジテ今得タル所ノbヲ變ジテdト爲ス或ハaヲ先ッcトaトノ比ヲ以テ乘ジテcニ變ジ次ニdトcトノ比ヲ以テ乘ジテdト爲スヲ得吾輩通例bトaトノ比ヲ表ハスニ

$b:a$　或ハ　$\frac{b}{a}$　或ハ　$b \div a$　或ハ　b/a

ノ四記號中ノ一ヲ用ユ故ニ右ニ述タル事ヲ左ノ如ク記ス可シ

$$\frac{d}{b}\times\frac{b}{a}=\frac{d}{c}\times\frac{c}{a}$$

今若シ四量a、b、c、d比例ヲ為ス量ナレバ比$\frac{b}{a}$及比$\frac{d}{c}$ハ相等シ故ニ此場合ニ於テハ比$\frac{c}{a}$ト比$\frac{d}{b}$ト相等シキヿ右ノ式ニ由リテ明ナリ

之ヲ云ヒ換レバ左ノ如シ若シ四量a、b、c、d比例ヲ為ス𪜊ハ四量a、c、b、dモ亦比例ヲ為ス可シ但シ四量a、c、b、d比例ヲ為ストハ其意味有ル場合ノミニ限レリ其意味無キ場合トハ何如ナルモノナルヤハ左ノ例ニ由リテ明ナル可シ

aトbハ二ツノ長サcトdハ時間ナリトセバbトaトノ比又dトcトノ比ト云フ意味ハ明ナレ𪜈cトaトノ比又ハbトdトノ比ノ如キハ有ル能ハザルナリ何トナレバ相比較セントスル所ノ量ハ全ク異種ノモノナレバナリ例ヘバ一時間ヲ何如ニ引延シ或ハ壓縮ムルモ一尺トナル能ハザルガ如シ故ニ異種量ノ比トハ意味無キヿナリ唯同種ノ四量比例ヲ為ス𪜊ハ中項ヲ交換スルモ尚比例ヲ為ス

第七節　分數

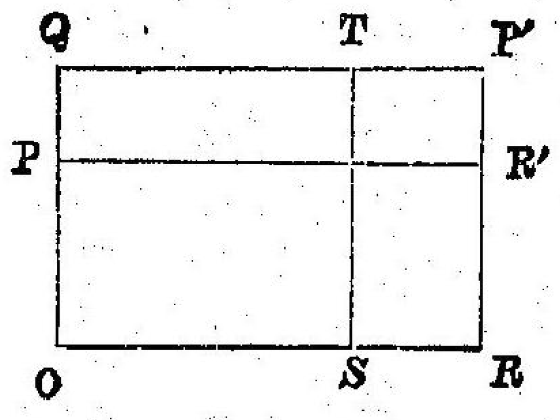
吾輩ハ第三節ニ於テ比ハ分數ヲ以テ表ハス可キヲ示シタリ故ニ今比aヲ分數$\frac{p}{q}$ヲ以テ表ハシ比bヲ分數$\frac{r}{s}$ヲ以テ表ハサン(此p、q、r、sハ各數ナリ)然ル𪜊ハ前節ノ結果ハ左ノ如ク記ス可シ

$$\frac{p}{q}\times\frac{r}{s}=\frac{r}{s}\times\frac{p}{q}$$

此方程式ノ各邊ノ意味ヲ少シク精細ニ考フ可シ矩形$OQTS$

有リ其一邊OQハ長サノ單位ヲq含有シ(例ヘバ一分ヲ以テ單位トセハq分ナリ)一邊OSハ長サノ單位ヲs含有ス此矩形ハ單位方形(長サノ單位ノ上ニ畫キタル正方形)ニq、s二ツノ引延シヲ行フテ得可キモノニシテ其面積ハqs單位方ヲ含有ス

第三十六



今此矩形ニ續ケテ$\frac{r}{s}$及ヒ$\frac{p}{q}$ヲ以テ表ハス二ツノ引延シヲ行ハヾ何如先矩形ヲOS邊ノ方向ニ$\frac{r}{s}$ノ比ニ引延スニハOSヲs等分シ此部分ヲr合セタルORヲ得然ル𬼀ハ此部分ハ各單位ニ等シキヲ以テORハ單位ヲr含有ス斯ク元ノ矩形OTヲ矩形OP'ト爲シタリ其一邊ORハr單位OQハq單位ヲ含有ス次ニ此矩形ニOQ邊ニ平行シテ$\frac{p}{q}$ヲ以テ表ハス引延シ(圖ニ於テハ引延シニ非ラズ壓縮メナリ)ヲ行フ可シ即OQヲq等分シOPヲ其pニ等シクスOPハp單位ヲ含有ス故ニ此引延シ(或ハ壓縮メ)ニ由リテ矩形OP'ヲ矩形OR'ニ變ジタリ此矩形ノ一邊OPハp單位ヲ含有シ一邊ORハr單位ヲ含有スレバ其面積ハpr單位方ナリ故ニ元ノ矩形OTニ二ツノ、引延シ$\frac{r}{s}$、$\frac{p}{q}$ヲ行ヘバ矩形OR'トナル之ヲ記スレバ

$$\frac{p}{q}\times\frac{r}{s}\ (\text{矩形}\ OT)=\text{矩形}\ OR'$$

$$=pr\ \text{單位方}$$

單位方ハ矩形OTニOQ邊ノ方向ニ壓縮メ$\frac{1}{q}$及OSノ方向ニ壓縮メ$\frac{1}{s}$ヲ行フテ之ヲ得可シ之ヲ言ヒ換レバ矩形OTハ

q^s 單位方ヲ含有ス然ラバ單位方ニ $\frac{p}{q}\times\frac{r}{s}$ 演算ヲ行ヘバ之ヲ矩形 OT ニ行ヒタル結果ノ $\frac{1}{q^s}$ ナルヿ明ナリ故ニ

即チ

$$\frac{p}{q}\times\frac{r}{s}\cdot(\text{單位方}) = \frac{1}{qs}\cdot pr\,(\text{單位方})$$

$$= \frac{pr}{qs}\,(\text{單位方})$$

是ヲ以テ單位方ニ $\frac{p}{q}\times\frac{r}{s}$ ナル演算ヲ行フ片ハ之ニ $\frac{pr}{q^s}$ ナル演算ヲ行フニ同シ即單位ヲ pr ヲ以テ乘シ q^s ヲ以テ除リタルニ等シ是分數ノ乘法ナリ

分數乘法ノ特別ノ一例ハ s ノ r ニ等シキ片ナリ其時ハ

$$\frac{p}{q}\times\frac{r}{r} = \frac{pr}{qr}$$

然ルニ $\frac{r}{r}$ トハ單位ヲ r ヲ以テ乘シ r ヲ以テ除ルナリ故ニ此演算ハ之ヲ行ハザルニ同シ故ニ右ノ式ハ左ノ如シ

$$\frac{p}{q} = \frac{pr}{qr}$$

之ヲ言語ニ述レバ分數ノ分母及分子ヲ同數ヲ以テ乘ズレハ分數ノ値ヲ變ゼズ

之ニ由リテ $\frac{p}{q}+\frac{r}{s}$ ノ如キ演算ヲ解釋スルヲ得前章ニ由リテ

$$\frac{p}{q} = \frac{ps}{qs} \qquad \frac{r}{s} = \frac{qr}{qs}$$

故ニ

$$\frac{p}{q}+\frac{r}{s} = \frac{ps}{qs}+\frac{qr}{qs}$$

即單位ニ演算 $\frac{p}{q}$ ヲ行ヒタル結果ト之ニ演算 $\frac{r}{s}$ ヲ行ヒタルモノトヲ加フレバ單位ヲ q^s 部分ニ等分シ其 p^s ヲ取リ又其 q^r ヲ取リ二ツヲ加フルニ等シ即其 p^s+q^r ヲ取ルニ同シ故ニ

$$\frac{p}{q}+\frac{r}{s}=\frac{ps+qr}{qs}$$

之ヲ分數ノ加法ト云フ讀者ハ圖ヲ書キ引延シ或ハ壓縮メヲ以テ容易ニ之ヲ説明スルヲ得可シ

乘法ノ結果ヲ反轉スル演算ヲ除法ト云フ故ニ分數 $\frac{p}{q}$ ヲ以テ除ルトハ何如ナルヿナリヤト問フハ分數 $\frac{p}{q}$ ヲ以テ乘シタル結果ニ何如ナル演算ヲ行ヘバ恰モ之ヲ反轉シ全ク演算ヲ行ハザルト同一ノ結果ヲ生ズルヤト云フニ同シ

今 $\frac{r}{s}\times\frac{p}{q}=\frac{p}{q}\times\frac{r}{s}=\frac{pr}{qs}$ ナリ

然ラバ $r=q$ $s=p$ トセバ $\frac{q}{p}\times\frac{p}{q}=\frac{pq}{qp}=\frac{pq}{pq}$

故ニ單位ヲ $\frac{p}{q}$ ヲ以テ乘シ次テ $\frac{q}{p}$ ヲ以テ之ヲ乘ズルハ全ク演算ヲ行ハザルニ同シ即引延シ $\frac{q}{p}$ ハ引延シ $\frac{p}{q}$ ヲ反轉ス故ニ $\frac{q}{p}$ ヲ以テ乘ズルハ $\frac{p}{q}$ ヲ以テ除ルト同一ノ結果ヲ生ズ之ヲ言換レバ $\frac{p}{q}$ ヲ以テ除ルトハ $\frac{q}{p}$ ヲ以テ乘ズルト同シ事ナリ之ヲ分數ノ除法ト云フ

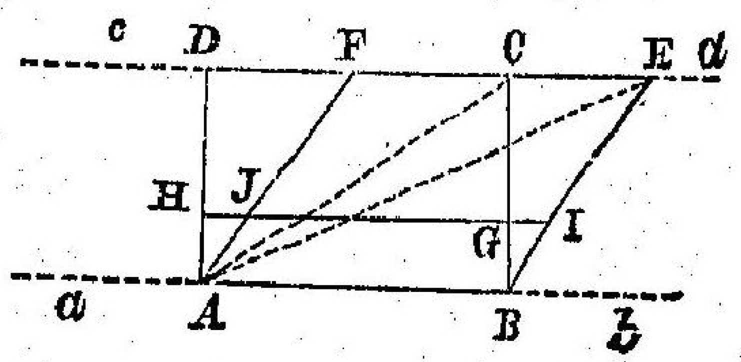
第八節　面積「ズリ」

前節ニ於テハ矩形ノ邊ヲ引延シ或ハ壓縮メルヿヲ説キタリ此等ノ演算ハ其面積ヲ變ズレドモ形ハ尚矩形ナリ本邊ニ於テハ其角度ヲ變シテ其面積ヲ變ゼザル演算ヲ論ゼントス」

$ABCD$ ヲ一ツノ矩形トシ $ABEF$ ハ平行方形ニシテ其一邊 AB ハ矩形ノ一邊ト同一ナリ之ニ反對セル邊 EF ハ CD ト同一直線上ニ在ルモノトス EF ノ長サハ AB ニ等シケレバ CD ニ等シ然

ルトキハCDハEFニ等シケレバECハFDニ等シク三角形BCEト三角形ADFハ全ク相等シ故ニ平行方形ABEFヨリ三角形BCEヲ切リ取リ之ヲADFノ位置ニ持チ來レバ平行方形ハ矩形ト成ル可シ故ニ平行方形ノ面積ハ矩形ノ面積ニ等シ而シテ矩形ノ面積ハADノ長サトABノ長サトノ積ナリABハ平行方形ノ底邊（ベース）ト稱スADハ平行方形ノ底邊ト之ニ對スル邊トノ垂直距離ニシテ其高サト稱ス故ニ平行方形ノ面積ハ其底邊ト高サノ積ニ等シ

第三十七



CDABヲ平行線cdabノ上ニ自由ニ滑リ得ル竿ナリトシ其間ニ「ゴム」ノ如ク伸縮シ得ル矩形ノ膜ヲ張リタリト想像セヨ

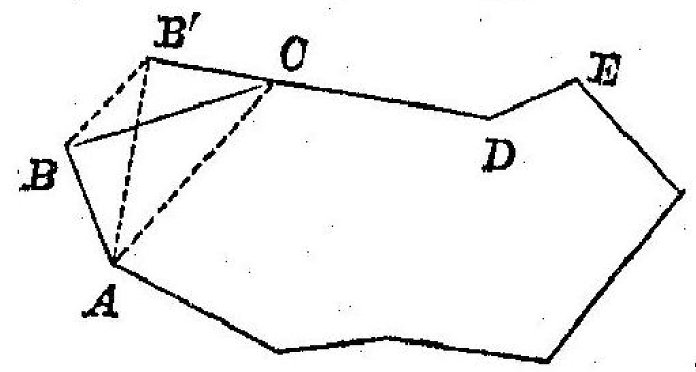
然レハ此竿ヲab及cd線上ニ滑ラストキハ膜ハ其形ヲ變ズ然レトキ常ニ平行方形ニシテ其底邊ノ長サ及其高サハ變ゼザレバ其面積モ亦常ニ同一ナリ今AB竿ヲ動カサズシテCD竿ヲ滑ラシテEFナル位置ニ至ラシム然ルトキハ膜中GHノ如クABニ平行ニシテ之ニ等シキ直線ハ常ニ平行ニ動キテIJノ位置ニ至リ其長サハ變ゼザルナリC點ハCEダケ動キタリG點ハGIダケ動キタリ而シテ三角形CBEト三角形GBIハ各邊相平行ナレバ同形三角形ナルヲ以テCEトGIノ比ハBCトBGノ比ニ等シ故ニ矩形ABCDヲ平行方形ABEFニ變ズルトキハABニ平行ナル直線ハ其長サヲ變ゼズシテABヨリノ高サニ準ジタル距離ダケ平行ニ動クナリ一圖形ノ形ヲ是ノ如ク變ズ

ルヲ「ズリ」(Shear)ト稱ス而シテ吾輩ハ矩形ヲ平行方形ニズラシタリトモ又ハ平行方形ヲ矩形ニズラシタリトモ見做ス可シ故ニ平行方形ノ面積ハ之ヲズラシタル矩形ノ面積ニ等シ

平行方形$ABEF$ヲ矩形$ABCD$ニ變ズルト同方法ニ由リテ平行方形ノ半分ナル三角形$\triangle ABE$ヲ矩形ノ半分ナル三角形$\triangle ABC$ニ變ズルヲ得斯ク吾輩ハ何如ナル三角形ニテモ之ヲ直角三角形ニズラスヲ得而シテ其面積ハ固ヨリ是ガ爲ニ變ズルヿナシ故ニ三角形ノ面積ハ對角ヨリ底線ヘ垂レタル垂線ニ等シキ高サヲ以テ同底線上ニ畫キタル矩形ノ面積ノ半分ニ等シ此高サヲ單ニ三角形ノ高サト稱ス故ニ三角形ノ面積ハ其底線ト其高サノ積ノ半分ナリ

直線ヲ以テ界ヒセル形ハ皆數度續ケテズリヲ行ヒ以テ同面積ノ三角形ト爲スヲ得而シテ此三角形ヲズラシテ直角三角形トシ以テ其面積ヲ知ルヲ得例ヘバ・$ABCDE$…ノ如キ直線形アリACヲ結ヒ付ケ三角形$\triangle ABC$ヲズラシテ頂點BヲDC線上ニ在ルB'點ニ從ス然ル片ハ$\triangle AB'C$ノ面積ハ$\triangle ABC$ノ面積ニ等シ故ニ直線形ヲ$\triangle AB'DE$…トスルモ面積ハ變ゼズ而シテ邊ノ數ハ一個ヲ減ジタリ斯ノ如クスルヿ數度ニシテ遂ニ同面積ノ三角形ヲ得由リテ以テ其面積ヲ知ル可シ

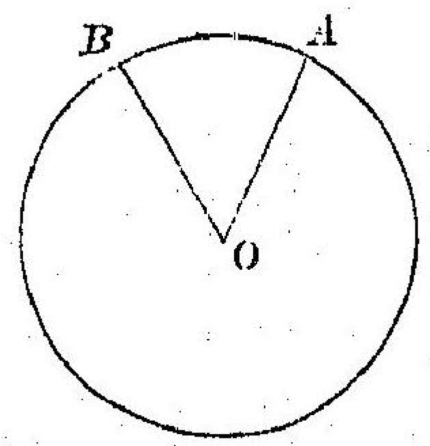
第三十八



第九節　圓及其面積

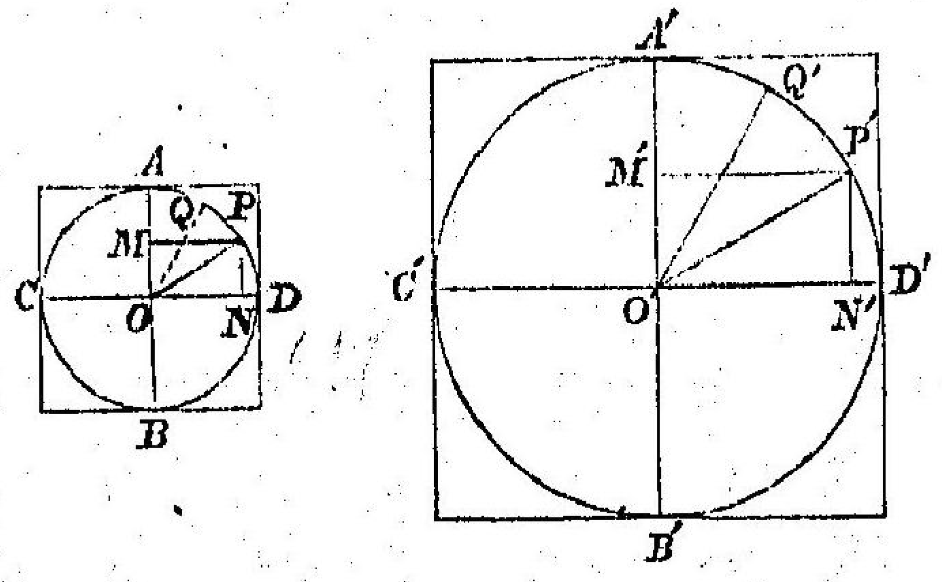
曲線ヲ以テ界セル面積中吾輩ハ先ツ圓ノ扇形（セクトル）ノ面積ヲ論ゼントス圓ノ扇形トハ圓ノ二半徑及其間ニ在ル圓弧ヲ以テ界セル圓ノ一部分ナリ即第三十九圖 OAB ノ如シ此扇形ノ面積ヲ求ムルニ先テ圓ノ重要ナル二三ノ性質ヲ説カザル可カラズ先單位半徑ノ圓（即其半徑ノ長サ長サノ單位ニ等シキモノヲ云フ）ヲ取リ互ニ直角ナル二直徑 AB CD（第四十圖）ノ兩端ニ於テ之ニ直角ニ直線ヲ引ク然ルトキハ圓ハ恰モ正方形ノ内ニ容レタルガ如シ而シテ其正方形ノ各邊ハ2ニシテ其面積ハ4ナリ

第三十九



今圓及正方形ヨリ成レル圖形ニ就テ第一ニ直線 AB ニ平行ナル各線ヲ $a:1$ ノ比ニ引延シ第二ニ CD ニ平行ナル、各線モ同シク $a:1$ ノ比ニ引延ストキハ元圖形ノ正方形ハ各邊 $2a$ ニ等シキ正方形ト成ルコト明白ナリ吾輩ハ元圖形ノ圓モ此引延シニ由リテ圓ト成ルコトヲ證明セン

第四十



OP ヲ任意ノ半徑トス PM PN ハ P 點ヨリ直徑 AB CD ヘ垂レタル垂線トス第一引延シニ由リテ互ニ相等シキ OM NP ハ互ニ相等シキ $O'M'$ $N'P'$ ト成リ而シテ

$$\frac{OM}{O'M'} = \frac{NP}{N'P'} = \frac{1}{a}$$ ナリ

之ト同ジク第二ノ引延シニ由リテ $\frac{MP}{ON}$(第一ノ引延シニ由リテハ長サヲ變ゼザリシ)ハ $\frac{M'P'}{O'N'}$ ト成リテ

$$\frac{ON}{O'N'}=\frac{MP}{M'P'}=\frac{1}{a}$$

第二引延シハ $O'M'$ $N'P'$ ノ長サヲ變ズルヿ無シ斯ク二ツノ引延シニ由リテ三角形 OPN ハ $O'P'N'$ ト成レリ此二ツノ三角形ハ同形ナリ何トナレバ N 及 N' ニ於ケル角ハ直角ニシテ $\frac{NP}{N'P'}=\frac{1}{a}=\frac{ON}{O'N'}$ ナレバナリ故ニ第三邊 OP モ亦 $O'P'$ ト $1:a$ ノ比ヲ為ス而シテ OP ハ 1 ナレバ $O'P'$ ノ長サハ a ナリ又 PON 角ハ $P'O'N'$ ニ等シケレバ $O'P'$ ハ OP ニ平行セリ故ニ元ノ圓ノ半徑ハ各之ニ平行ニシテ長サ a ナル直線ト成ル故ニ元ノ圓ハ其半徑 a ニ等シキ圓ト成ル

實ニ斯ク互ニ直角ナル二方向ニ相等シキ引延シヲ行フハ元ノ圖形ヲ顯微鏡ヲ以テ一齊ニ a 倍大キクシテ見ルト同一ナリ

故ニ新圓ノ周ハ舊圓ノ周ノ a 倍ナリ即二圓ノ周ノ比ハ其半徑ノ比ニ等シ又舊圓ノ弧 PQ 新圓ニ於テ $P'Q'$ ト成ル(即 OP ハ $O'P'$ ニ平行ニシテ OQ ハ $O'Q'$ ニ平行ナリ)トセバ $P'Q'$ ト PQ ノ比モ亦二圓ノ半徑ノ比ニ等シ而シテ PQ $P'Q'$ ノ二弧ハ各其圓ノ中心ニ於テ等角ニ對スル總テノ弧ニ等シケレバ吾輩ハ左ノ定理ヲ得

二圓ノ弧ニシテ各其圓ノ中心ニ於テ等角ニ對スルモノハ互ニ其圓ノ半徑ノ比ニ等シキ比ヲ為ス

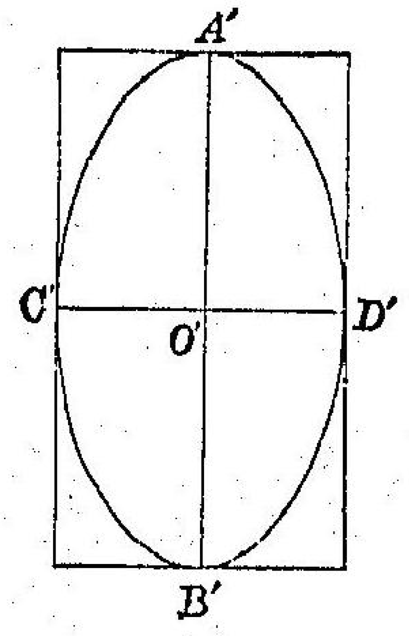
新圖形ハ舊圖形ヲ一齊ニ大クシタルモノナレバ舊圖形ノ

面積ノ各元素（元素トハ極メテ小部分ヲ云フ）モ新圖形ニ於テハ皆一齊ニ大クナリタリ舊圖形ノ方形ハ4單位方ヲ含有ス新圖形ノ方形ハ$4a^2$單位方ヲ含有ス故ニ舊圖形ノ面積ノ各元素ハ新圖形ニ於テハ$a^2:1$ノ比ニ大クサレタリ故ニ舊圖形ノ圓ノ面積モ亦新圖形ノ圓ノ面積ト$1:a^2$ノ比ヲ爲ス即圓ノ面積ハ其半徑ノ二乘ニ準ス

半徑長サノ單位ニ等シキ圓ノ面積ヲ通例π（希臘文字ナリ「パイ」ト讀ム）ヲ以テ表ハス故ニ半徑aニ等シキ圓ノ面積ハπa^2ヲ以テ表ハス可シ

今右ノ例ニ於テABヲ$a:1$ノ比ニ引延シテ$A'B'$トナシタル後CDヲ$b:1$ノ比ニ引延シ或ハ壓縮メテ$C'D'$ト爲ス片ハ（bハaニ異ナレルモノトス）元ノ正方形ハ矩形トナリ其邊ハ各$2a$ $2b$ニ等シ圓ハ形ヲ變シテ楕圓ト稱シタル圓ノ影ノ形ト成ルヿ證明シ得可キナリ面積ノ各原素ハ$ab:1$ノ比ニ引延サレタリ故ニ楕圓ノ面積ハ單位半徑ノ圓ノ面積ト$ab:1$ノ比ヲ爲ス即楕圓ノ最大半徑aニシテ最小半徑bナレバ其面積ハπabナリ

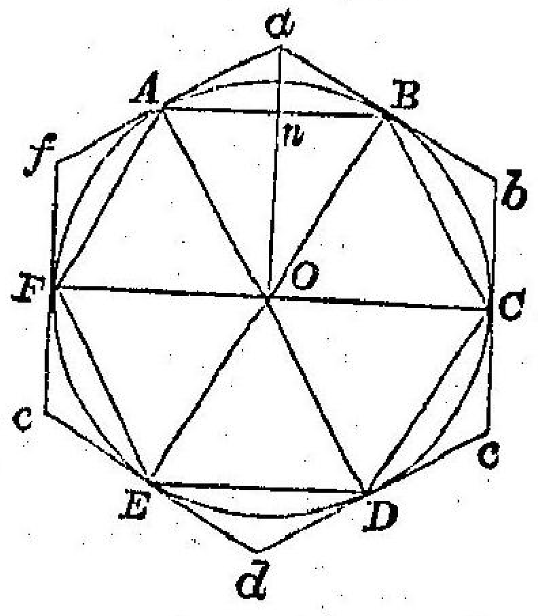
第四十一



吾輩ハ單位半徑ノ圓ノ面積πト同圓周ノ長サ（長サノ單位ノ數）トノ關係ヲ得ントス圓周$ABCDEF$上（第四十二圖）平等ニ數多ノ點ヲ取リ（即此等ノ點ヲ以テ圓周ヲ等分シ）諸點ヲ互ニ結付ケ及圓ノ中心ト結付ケ又各點ニ於テ半徑ニ直角ナル

線(即切線)ヲ引ク可シ斯ク二ツノ直線形ヲ得其一ハ圓內ニ容レタルモノニシテ內接形(インスクライブド、フヒギュアー)ト稱シ一ハ圓ヲ容レタルモノニシテ外接形(サルカムスクライブド、フヒギュアー)ト稱ス二者共ニ完全ナル對稱形(シムメトリカル、フヒギュアー)ナリ二形ノ面積ノ差ハAaBノ如キ三角形若干ノ和ナリ而シテ圓ノ面積ハ其內接形ノ面積ヨリ大ニシテ其外接形ノ面積ヨリ小ナル

第四十二



ヿ明ナリ故ニ圓ノ面積ト其內接形ノ面積トノ差ハAaB BbC等ノ小三角形ノ面積ノ和ヨリ小ナリ此小三角形ハ皆相等シク其面積ハ其高サ(皆anニ等シ)ト其底線(AB等)ノ積ノ二分ノ一ナリ故ニ其面積ノ和ハanト內接形ノ邊ノ和トノ積ノ二分ノ一ナリ而シテ內接形ノ邊ノ和

ハ(邊ノ數ハ幾許ナルモ)決シテ圓周ヨリ大ナラズ

今若シ點數ヲ多クスレバ相隣レル二點ABハ從テ近ヅク可シ而シテAトBト近クナレバanハ從テ小ナル可シ故ニ點數愈多ケレバanハ愈小(邊ノ和ハ決シテ圓周ヨリ大ナラズ)ニシテAaB BbC等三角形ノ面積ノ和ハ愈小ナリ故ニ點數ヲ極メテ多クスレバ內接形ト外接形トノ面積ノ差及圓トノ面積ノ差モ亦極メテ小ナル可ク點數ヲ增シテ以テ此差ヲ何程ニテモ小クスルヿヲ得斯ノ如クニシテ極限ニ至リ點數窮リ無ク多ケレバ內接形、外接形及圓ノ面積ハ遂ニ互ニ相等シト云フ可シ

內接形ノ面積ハAOBノ如キ三角形ノ面積ノ和ナリAOBノ面積

ハ高サOnト底線ABノ積ノ二分ノ一ナリ故ニ邊ノ和ヲpヲ以テ表ハス片ハ內接形ノ面積ハ$\frac{1}{2}p \times On$ナリ又p'ヲ以テ外接形ノ邊ノ和ヲ表ハス片ハ其面積ハ$\frac{1}{2}p' \times OB$ナリ二ツノ直角三角形OaB OBnハOニ於テ同角ナレバ同形三角形ニシテBnトaBノ比即其二倍ナルABトabノ比ハOnトOBノ比ニ等シ然ルニpトp'ノ比ハABトabノ比ニ等シキ亅明ナリ(各等邊形ナレバ)今點數ヲ多クスレバOnトOBトノ差ハ何程ニテモ少クスル亅ヲ得故ニpトp'トハ何程ニテモ其差ヲ少クスルヲ得從テ圓周ハpトp'トノ間ニ在ルモノナレバ圓周トノ差ハ何程ニテモ少クスルヲ得故ニ極限ニ至ル片ハpハ圓周ニ等シクOnハ其半徑ニ等シ內接形及外接形ノ面積ハ其

邊ノ數ヲ增加スルニ從テ圓ノ面積ニ近ヅキ遂ニ其邊ノ數ヲ無窮ニ多クスレバ互ニ相等シク為リ圓周ト其半徑ノ積ノ二分ノ一ニ等シ圓ノ面積モ亦即是ナラザルヲ得ズ然ラバ半徑aナル圓ノ面積ハ其圓周ノ二分ノ一ニaヲ乘シタルモノナリ然レ圧先ニ此面積ハπa^2ニ等シキ亅ヲ示シタリ故ニ圓周ハ$\pi 2a$ニ等シ此結果ヲ左ノ如ク二樣ニ述ブルヲ得

(一)圓周ト其直徑トノ比ハ常數πナリ

(二)單位半徑ノ圓周中長サノ單位ノ數(2π)ハ其面積中單位方ノ數(π)ノ二倍ニ等シ

πハ圓周ト直徑トノ比ナルヲ以テ之ヲ圓周率ト稱ス其值ハ(先ニ證明セル正方形ノ邊ト對角線ノ比ノ如ク)數ヲ以テ

正ニ表ハス能ハザルモノナリ凡ソ3.14159ニ等シ

說テ此ニ至レバ圓ノ扇形ノ面積ヲ得ルコト容易ナリ吾輩若シ扇形ノ弧ヲ二倍スレバ其面積モ亦二倍シ弧ヲ三倍スレバ面積モ亦三倍ス弧ノ任意ノ倍數ヲ取レバ面積モ亦同倍數トナル故ニ(第五節)二ツノ扇形ノ面積ノ比ハ其弧ノ比ニ等シ故ニ扇形ノ面積ト圓ノ面積トノ比ハ其弧ト圓周ノ比ニ等シ

Sヲ圓ノ扇形ノ面積、sヲ其弧ノ長サ、aヲ半徑トスレバ

$$\frac{S}{\pi a^2} = \frac{s}{2\pi a}$$

ナリ故ニ

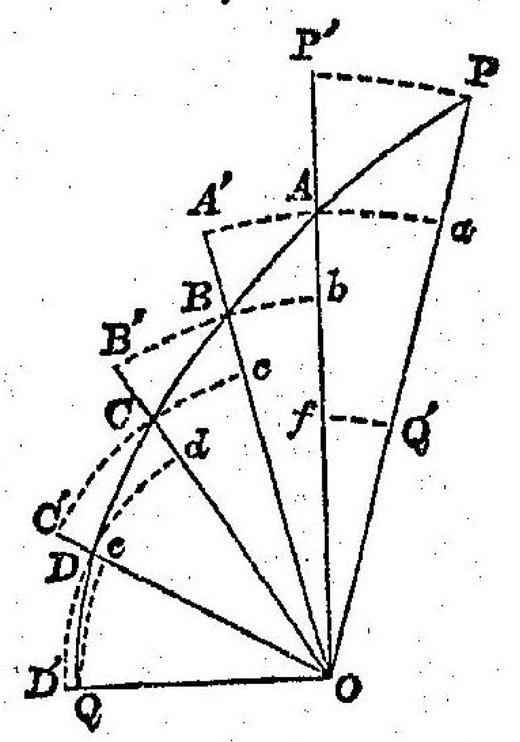
$$S = \frac{1}{2} s \times a$$

即圓ノ扇形ノ面積ハ其弧ト半徑トノ積ノ二分ノ一ナリ

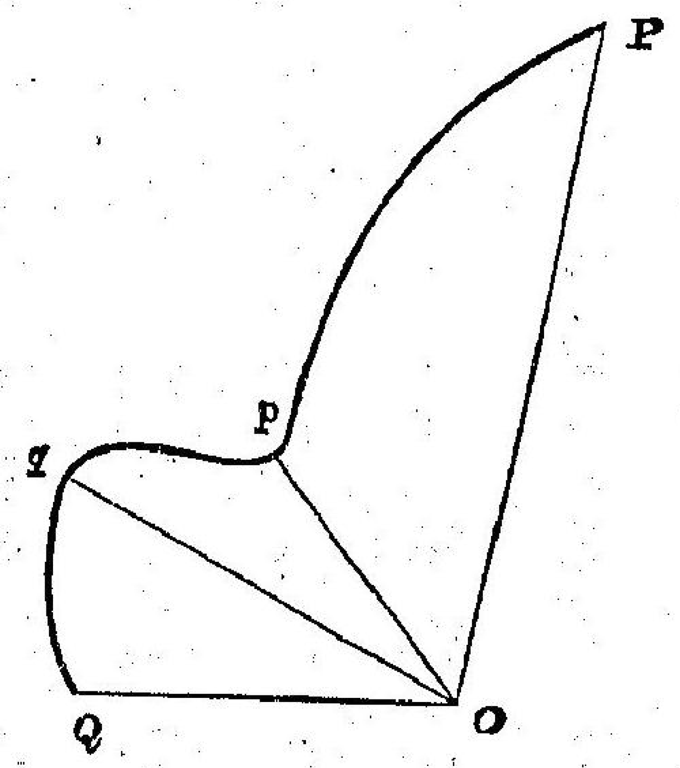
第拾節　曲線扇形ノ面積

圓ノ扇形ノ面積ヲ知レバ吾輩ハ之ニ由リテ以テ何如ナル曲線ノ弧ヲ以テ成セル扇形ノ面積ヲモ測ルヲ得弧PQヲ數多ノ部分ニ・PA AB BC CD DQノ如ク(第四十三圖甲)分チPAヲ此小弧中Oニ於テ最大角ニ對スルモノトス又扇形ハ常ニPヨリQニ至ルマデOヨリノ距離漸次減少スルモノト假定ス(若シ漸次減少セザル片ハ之ヲPOp pOq qOQ(第四十三圖乙)ノ如キ數

第四十三 甲



第四十三 乙



扇形ニ區分ス可シ各小扇形ニ於テOヨリ弧マデ引ケル直線ハ扇形ノ一端ヨリ一端マデ漸次ニ減少ス故ニ吾輩ノ假定ニ由リテ得ントスル所ノ結果ハ各小扇形ニ應用ス可ク之ヲ加ヘテ以テ元ノ扇形ノ面積ヲ知ル可シ」

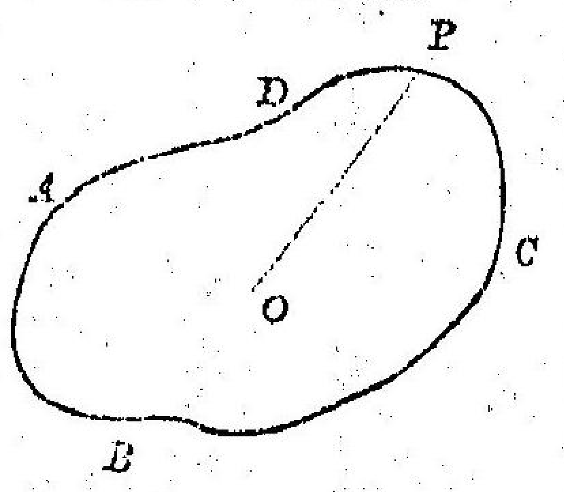
Oヲ中心トシテ半徑OPノ圓ヲ畫キOAヲ引延シ之トP'ニ於テ交ラシム又同中心及半徑OAヲ以テ圓ヲ畫キOBトA'ニ於テ$\overset{\frown}{OP}$トaニ於テ交ラシム同中心及各半徑OB $\overset{\frown}{OC}$ $\overset{\frown}{OD}$ヲ以テ圓弧ヲ畫キ各OAトbニ於テ$\overset{\frown}{OC}$トB'ニ於テ$\overset{\frown}{OB}$トcニ於テ$\overset{\frown}{OD}$トC'ニ於テ$\overset{\frown}{OC}$トdニ於テ$\overset{\frown}{OQ}$トD'ニ於テ交ラシム最後ニ中心O及半徑OQヲ以テ圓ヲ畫キ$\overset{\frown}{OD}$トeニ於テ$\overset{\frown}{OA}$トfニ於テ$\overset{\frown}{OP}$トQ'ニ於テ交ラシム然ルトキハ扇形ノ面積ハOP $\overset{\frown}{OD'}$及屈曲線$PP'AA'BB'CC'DD'$ヲ以テ界ヒセル形ノ面積トOa OQ及ヒ屈曲線$aAbBcCdDeQ$ヲ以テ界ヒセル形ノ面積トノ間ニ在ルヿ明ナリ即其各形ノ面積トノ差ハ二形ノ面積ノ差ヨリ小ナリ即$P'a$ $\overset{\frown}{A'b}$ $\overset{\frown}{B'c}$ $\overset{\frown}{C'd}$ $\overset{\frown}{D'e}$ノ面積ノ和ヨリ小ナリ然ルニPOP'角ハ他ノ小弧ノOニ於テ對スル角ヨリ大ナレバ此等ノ面積ノ和ハ$PP'fQ'$形ノ面積ヨリ小ナルヿ明ナリ今若シA $\overset{\frown}{B}$ $\overset{\frown}{C}$ D等ノ點ノ數ヲ多クスレバ各弧皆小クナリ其Oニ於テ對スル角モ從テ小クナリAOP角ヲ何程ニテモ小クスルヿヲ得AOPヲ小クスレバ$PP'fQ'$ノ面積モ從テ何程ニテモ小クスルヿヲ得故ニ吾輩ハ數多ノ圓ノ扇形ノ和ト扇形POQノ面積トノ差ヲ何程ニテモ少クスルヿヲ得故ニ極限ニ至リ小弧ノ

數ヲ窮リ無ク多クスレバ扇形POQノ面積ハ窮リ無ク數多ノ圓ノ扇形ノ面積ニ近シ即圓ノ扇形數多ノ面積ヲ加ヘテ以ヲ曲線ノ扇形ノ面積ヲ得而シテ圓ノ扇形ノ面積ハ前節ニ於テ之ヲ得タリ故ニ此問題ノ困難ハ唯甚數多ノ面積ヲ加フルノ困難ナリ蓋シ$ABCD$等ノ如キ點數極メテ多ク從テ其面積ヲ加フヘキ圓ノ扇形ノ數極メテ多キニ非ラザレバ其和ト求ムル所ノ面積ト相等シカラザレバナリ

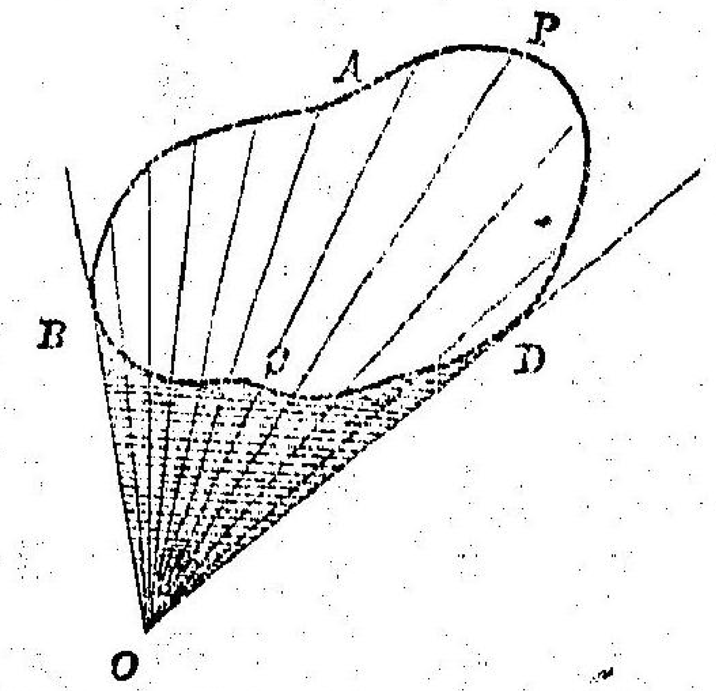
第拾壹節　面積ノ思想ノ擴張

$ABCD$ヲ完結シタル曲線即環(ルーフ)トスOヲ其內ニ在ル一點トス今若シ一點P此環ノ周圍ノ上ヲ動ク片ハOP線ハPト共ニ廻轉シ其動キタル跡ハ環$ABCD$ノ面積ナリ是ヲ稱シテ

第四十四



第四十五



OP線ハ環$ABCD$ノ面積ヲ描キタリト云フ」

今O點ヲ環外ニ取ル片ハ之ヲ環ノ周圍上ヲ動クP點ニ結付ケルOP線ノ描ク面積ハ何如ナルモノナルヤOB ODヲOPノ最左及右ヘ寄リタル位置トセヨ然ル片ハP點DABノ上ヲDヨリBマデ動ク間ハOPノ廻轉スル方向ハ時計針ノ廻轉ノ方向ニ反對セリ(之ヲ反。時。計。針。狀。ノ廻轉ト云フ)而シテ其描キタル面積ハ弧DABト直線OD OBヲ以テ界ヒセル形ナリ又P點BCDノ上ヲBヨリDマデ動ク間ハOPハ時計針ト同方向ニ廻轉

ス(之ヲ時計針狀ノ廻轉ト云フ)而シテ其描キタル面積ハ弧BCDト直線OB、ODヲ以テ界ヒセル形ナリ故ニ此二ツノ面積ノ差、ハ即環ノ面積ナリ然ラバ若シ第二ノ面積OBCDOヲ負ナリトセバ前ノ如クP點ノ環ノ周圍ヲ繞ル時ニOP線ハ環ノ面積ヲ描クトシテ可ナリ面積ODABOト面積OBCDOヲ描クニ於テ緊要ノ差ハ先者ニ於テハOPハ反時計針狀ニ動キ後者ニ於テハ時計針狀ニ動ク事ナリ故ニ今約束ヲ爲シOPノ反時計針狀ニ動ク時ニ描ク面積ハ正、ト計算シ其時計針狀ニ動ク時ニ描ク面積ハ負、ト計算ストス定ムレバO點環ノ內外ニ在ルニ關ラズP點ノ其周圍ヲ一周スルニ從テOP線ハ環ノ面積ヲ描クナリ

然ルニP點環ノ周圍上ヲ動クニ二ツノ方向有リ或ハ反時計針狀ニ諸點A、B、C、Dノ順ニ動キ或ハ時計針狀ニ諸點A、D、C、B、ノ順ニ動クヲ得其反時計針狀ニ動クトキハ大ナル面積ODABO正ニシテ其時計針狀ニ動クトキハ負ナリ是ニ於テ吾輩ハ面積、ニ、正、負、有ル、ノ、思想ヲ得即面積ハ其周圍ヲ繞ル點反時計針狀或ハ時計針狀ニ動クニ從テ正或ハ負ト區別ス可シ斯ク面積ノ思想ヲ擴張シ面積トハ啻ニ大小ノミナラズ亦正負ノ別有ルモノトスルハ極メテ緊要ナル事項ナリ獨リ純正數理上ニ於テ緊要ナルニ非ラズ實地應用ニ於テ然ルナリ例ヘバ提防費用ノ計算「蒸氣機械ノ「インデケートル「ダイヤグラム」等ノ如シ

O點ニ於テ環ノ平面ニ直角ニ直線ONヲ引キONノ長サ即チ其內ニ含有スル長サノ單位ノ數ヲ環ノ面積ニ含有スル單位方ノ數ト同シクス然ル片ハONハ此面積ノ大サヲ表ハスモノト認テ可ナリ又左ノ如クニシテ以テ之ニ由リテ其正負ヲ表ハサシムルヲ得ONヲ引クニ當テ之ヲ平面ヨリ上ヘ引ク可キヤ或ハ下ニ引ク可キヤト云フニ若シ人有リテ其足Oニ在リ其頭Nニ在ル片ハPハ必ズ右ヨリ左ヘ即反時計針狀ニ動クト見ユル樣ニONヲ引ク可シ即面積正ナレバONハ平面ヨリ上ノ方ヘ引キ面積負ナレバONハ平面ヨリ下ノ方ヘ引クモノトス斯ノ如クスレバ面積ハ其平面內ノ一點ヨリ直角ニ引キタル直線即歩ニ由リテ全ク(大小正負)表ハスヲ

得故ニ同一平面上ニ在ル數多ノ面積ノ和ハ此等ノ直線ヲ代數學上ニ(即歩ノ加法ニ從テ)加ヘテ以テ之ヲ知ル可シ

若シ面積皆同一ノ平面上ニ在ラザル片ハ之ヲ表ハス直線ハ平行ナラズ斯ノ如キ片ハ面積ヲ加フルニ二方法有リ一ハ面積ノ總計ヲ知ルヲ要スル場合ナリ例ヘバ數多ノ平面ヲ以テ界ヒセル體ヲ塗リ或ハ之ニ鍍金スル費用ヲ量ラント欲スル時ノ如シ此場合ニ於テハ總テノ直線ヲ其方向ニ關ラズ加ヘ其和ハ即面積ノ總計ヲ表ハスナリ

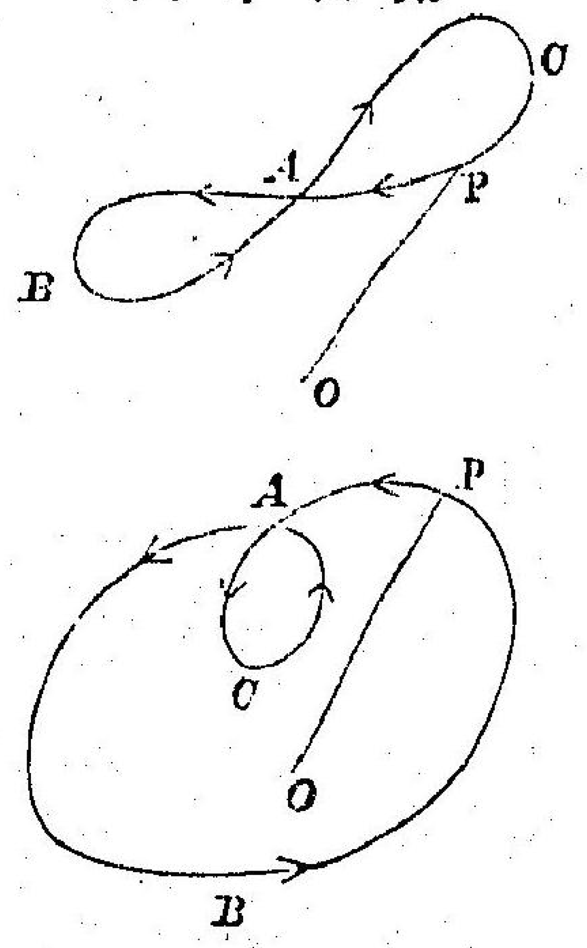
然レ𪜈又數多ノ場合ニ於テハ此等ノ直線ノ方向ニ注意セザレバ計算スル能ハザル量ヲ要スルヿ有リ例ヘバ大陽ニ由リテ生ズル立體ノ影ヲ論ジ又ハ瓦斯ノ之ヲ容レタル器

ノ表面ヲ歷スカヲ計ルガ如シ此ノ如ク方向有ル大サノ事ハ次編ニ詳ナリ面積ニ方向有リトスルノ思想ハ英人ヘーワードニ始レリ

第拾貳節　複環ノ面積

前節ニ於テ論シタル面積ハ單環內ニ在ルモノナリ本節ニ於テハ數環ヨリ成ル面積ヲ論ゼントス例ヘバ第四十六圖

第四十六



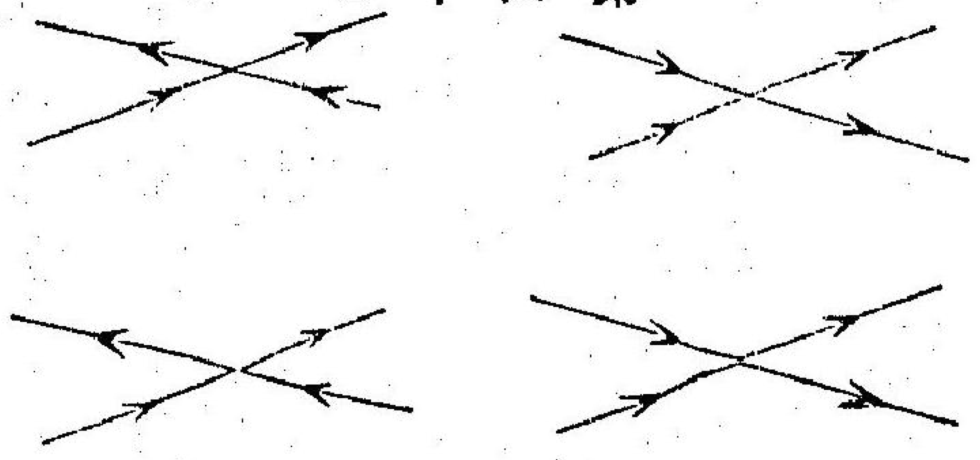
8字ノ如ク二環有ル形ヲ見ヨ若シ矢(↙)ヲ以テ表ハシタル方向ニ一周スル片ハ一環ノ面積ハ正ニシテ一環ノ面積ハ負ナリ故ニ合面積ハ二者ノ差ナリ

二者相等シケレバ合面積ハ零ナリ8字形ノ如ク自カラ交ル完結曲線ヲ複環ト稱ス其交ル點ヲ節ト云フ8字形ハ一節ノ複環ナリ一定點ヨリ複環ノ周圍上ヲ動ク點ヘ直線ヲ引ケバ其描ク所ノ面積ハ點ノ周圍上ヲ動ク方向及順序ニ由リテ異ナル可シト雖點ノ動キ方定マレバ面積モ亦確定セリ

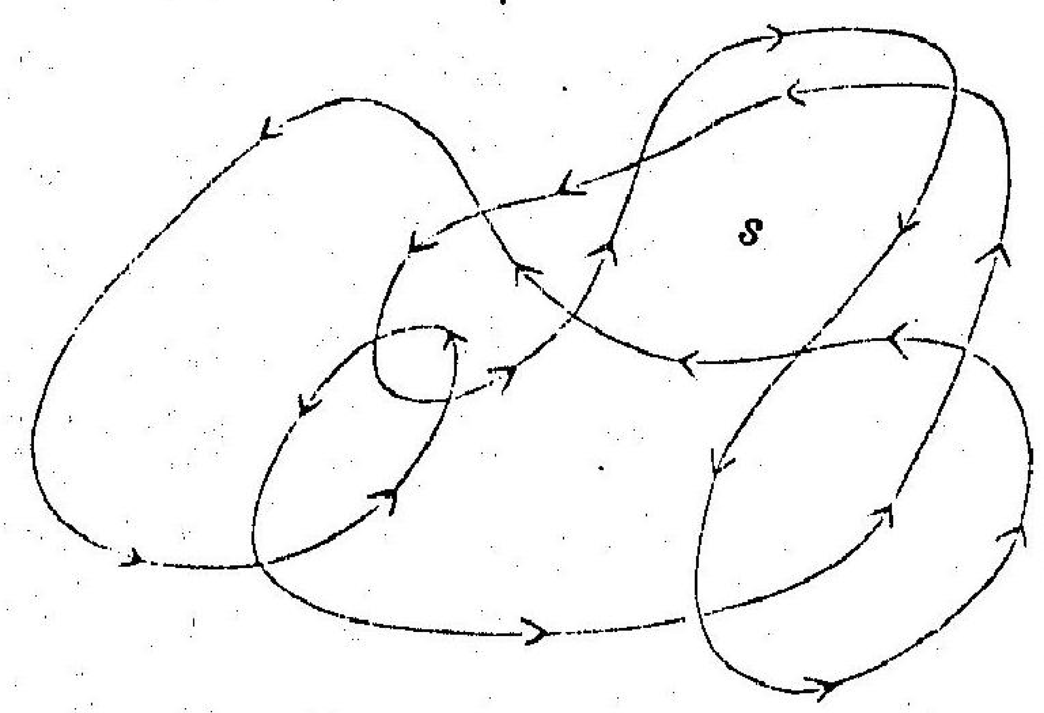
吾輩ハ今複環ヲ單環ニ分解シ由リテ以テ其面積ヲ知ル可キヲ示サントス點ノ其周圍ヲ動ク方向ハ矢ヲ以テ表ハシタル如クナリトス第四十六圖ノ二形ヲ見ヨ動線OP節Aニ於テ交ラズシテ最初AC環ヲ描キ次ニAB環ヲ描ク(各矢ヲ以テ示セル方向ニ繞リテ)トスルモ其描ク所ノ面積ニ於テ差

ヲ生ズルヿナシ故ニ自カラ交リテ節ヲ成ス一曲線ヲ分チテ各一環ヲ界ヒセル二曲線(元節ナリシ點ニ於テ恰モ相觸レタル)ト爲スヲ得斯ク節ヲ刖チタルヲ表ハス爲ニ少シ空隙ヲ開ケ置ケバ判然タル可シ即第四十七圖ニ於テ之ヲ示ス

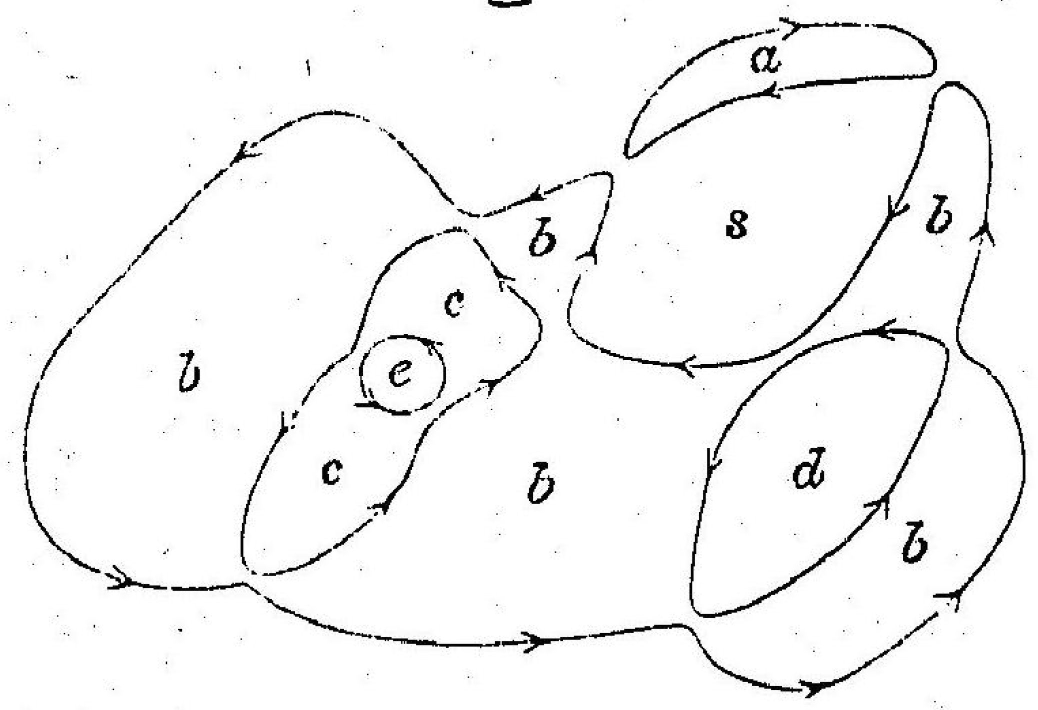
第四十七



第四十八甲



第四十八乙



此方法ヲ用ユレハ何如ナル錯夾ナル複環ニテモ之ヲ單環ニ分解スルヲ得而シテ各單環ノ正負ハ其周圍ノ矢ノ方向ニ由リテ明白ナリ左ニ一例ヲ揭ク

第四十八圖甲ノ複環ハ乙ニ示セル如ク負環a及大ナル正環bト爲リb內ニ正環c、d有リ尚c內ニ正環e有リ故ニ全複環ノ面積ハ

$$b+c+d+e-a$$

ニ等シ甲圖ニsト記シタル部分ハ乙圖ニ由リテ全ク複環ノ面積ノ一部分ニ非ラザルヲ見ル可シ

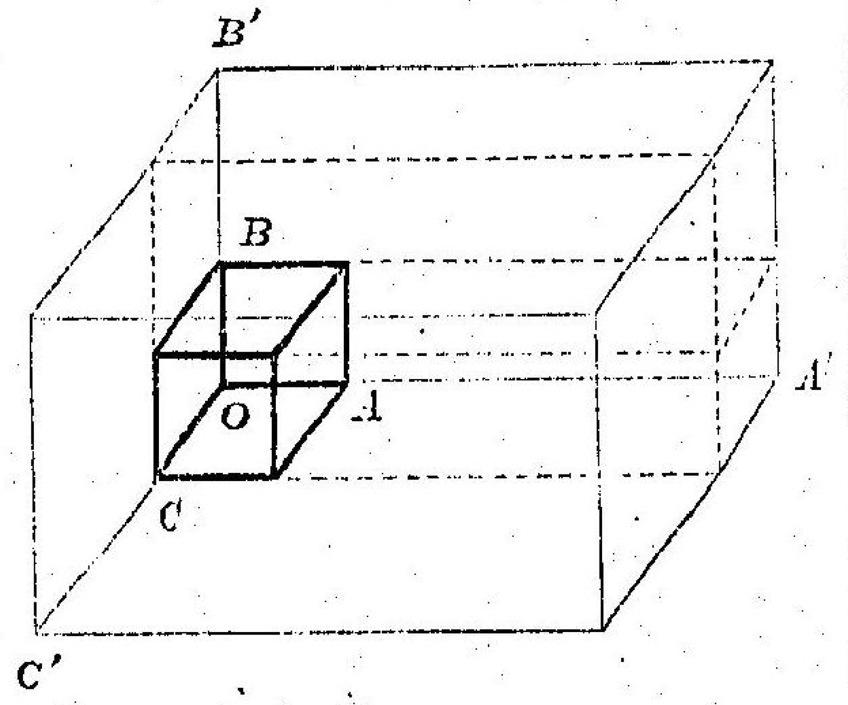
第拾三節　立體ノ體積

先互ニ直角ナル三雙ノ平行平面ヲ以テ界ヒセル體ノ體積

ヲ考フ可シ是即直角平行六面體(レクタンギユラル、パラルレピペドン)ト稱スルモノナリ又短ク直六面體(ライト、シックス、フエース)ト稱スルモ可ナリ第一ニ直六面體ノ一線ニ平行ナル總テノ直線ヲ任意ノ比ヲ以テ引延シ或ハ壓縮メル時ハ(他ノ方向ニ於テハ長サヲ變ゼズシテ)體積モ亦同比ニ增加スルヿヲ認ム可シ故ニ立方ヨリ直六面體ヲ作ラントスル片ハ之ニ其三組ノ平行線ノ方向ニ各引延シ或ハ壓縮メヲ行フヲ要ス(第七節ヲ參考セヨ)

OA OB OC ヲ立方ノ一角Oニ於テ交ル三線トスOAヲOA'ニ引延シOA'トOAノ比ヲaトス之ニ平行ナル總テノ直線モ同比ニ引延セバ立體ハ直六面體ト成リOA'ニ直角ナル截面ノミ正方形ナリ今OBヲOB'ニ引延シOB'トOBノ比ヲbトス之ニ平行ナル總テノ直線モ同比ニ引延セバ立體ハ直六面體ナリ今OCヲOC'ニ引延シOC'トOCノ比ヲcトシ之ニ平行ナル總テノ直線モ同比ニ引延スト片ハ立體ハ尚直六面體ナリ元ノ立方ヲ單位立方即其線各長サノ單位ニ等シキ立方ナリトセバ此六面體ノ體積ハabcナリ而シテ已ニ矩形ノ場合ニ於テ說明シタル如ク$abc = cba = bac$等(三比ヲ乘ジタル結果ハ其順序ニ關ハラザルヿヲ證明スルヲ得今直六面體ノ一面$A'C'$ヲ其底面ト稱シOB'ハ其高サト稱ス可シ然レバ底面ノ面積ハac其高サハbナリ故ニ直六面體ノ體積ハ

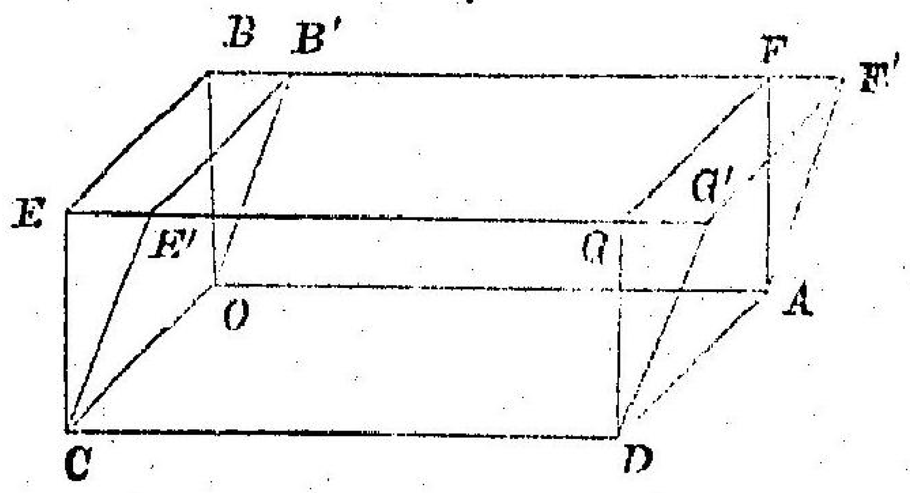
第四十九



其底面ト高サノ積ニ等シ

今直六面體 $OADCEBFG$ ヲズラス可シ即其面 $BEGF$ ヲ其平面内ニ於テ B 點ハ常ニ BF 線上ニ E 點ハ常ニ EG 線上ニ在ル樣ニ動カス可シ面ハ平面ニシテ此平面ハ四方ニ限リナク廣ガリタルモノト認スヿハ先ニ論ジタル所ナリ面ヲ其平面内ニ動カストハ此平面ヲ離レザル樣ニ動カスナリ $B'E'G'F'$ ヲ $BEGF$ ノ新位置トス然ル片ハ楔(クサビ)形ノ二體 $BEE'B'OC$ 及ビ $FGG'F'AD$ ハ其相對スル面等シキヲ以テ全ク相等シ故ニ直六面體 $OADCEBFG$ ノ面積ト之ヲズラシタル斜六面體 $OADCE'B'F'G'$ ノ面積ハ相等シ

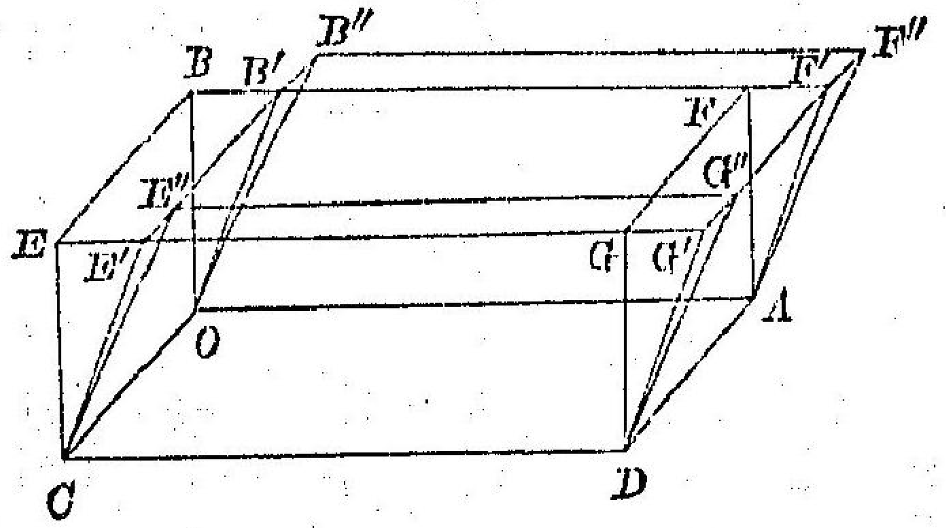
第五十 甲



譯者曰ク右ニ說述セルヿハ左ノ如クニシテ明ニ見ル可シ半紙一〆ヲ正シク積ミタル形ハ直六面體ナリ今之ヲ斜ニヅラス片ハ即之ヲズラシタルナリ而其體積ハ變ズルヿナシ

今又 $B'E'G'F'$ ヲ其平面内ニ於テ B' 點 F' 點ハ各常ニ直線 $B'E'$ $F'G'$ ノ上ニ在ル樣ニ動カシ $B''E''G''F''$ ノ位置ニ至ラシム然ル片ハ斜ナル楔形ノ二體 $B'B''F''F'AO$ 及 $E'E''G''G'DC$ ハ全ク相等シ故ニ斯ク再度ノズリニ由リテ得タル體ノ體積ハ最初ノズリニ由リテ得タル體ノ體積ニ等

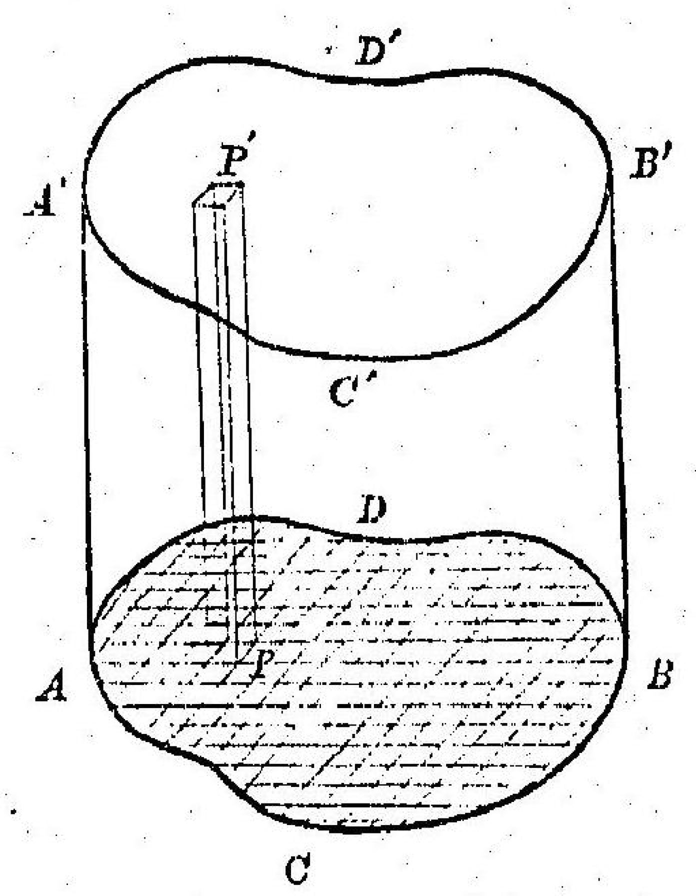
第五十 乙



シ故ニ元ノ六面體ノ體積ニ等シ吾輩ハ此ノ如キ二ツノズリニ由リテ$BEGF$面ヲ其平面内ノ何所ヘモ動カスヲ得但シ其各邊ハ常ニ元ノ位置ニ平行ナリ故ニ六面體ノ體積ハ其一面ヲ定メテ動カサズシテ之ニ對スル面ヲ其平面内ニ於テ任意自己ニ平行ニ動カ、スモ（自己ニ平行ニ動クトハ其運動中常ニ元ノ位置ニ平行ナルヲ云フ）決シテ變ズルヿ無シ故ニ平行六面體ノ體積ハ其一面ノ面積ニ同面ト之ニ平行セル面トノ直距離ヲ乘ジタル積ニ等シ何トナレバ是即之ヲズラシテ得ル所ノ直六面體ノ積ナレバナリ

是ニ由リテ以テ壔(シリンドル)ノ體積ヲ得一面積常ニ自己ニ平行ニ動キ其内ノ各點(P)其平面ニ直角ナル直線PP'上ニ動クトキハ其經過シタル「スペース」ヲ直壔(ライト、シリンドル)ト稱ス直壔ノ體積ハ之ヲ生ジタル面積ト其高(サ)トノ積ナリ何トナレバ此體積ハ數多ノ極メテ小ナル直六面體（PP'ノ如キ）ノ體積ノ和ニシテ各小六面體ノ底面Pハ極メテ小ニシテ面積$ACBD$ヲ成ス原素ナリ斜壔ハ$A'C'B'D'$面ヲ其平面内ニ於テ任意自己ニ平行ニ動カシテ得可キモノナリ斯ク動カス片ハ各小六面體ハズラサルヽノミニシテ其體積ハ變ゼズ故ニ斜壔ノ體積ハ其底面ノ面積ト其兩面ノ直距離ノ積ニ等シ

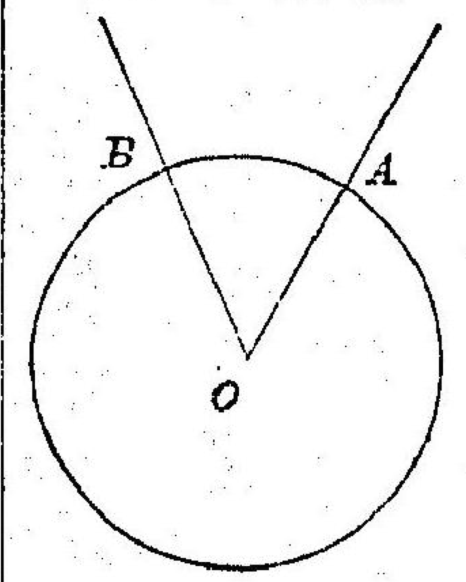
第五十一



第拾四節　角度

吾輩ハ略面積ノ量幷ニ體積ノ量ヲ論ジタリ本節ニ於テハ角ノ量ヲ論ゼントス「スペース」ノ編ニ於テ已ニ角ヲ測ルハ兩脚規ノ開キヲ以テスル丁ヲ記シタリ然レ𪜈是二ッノ角ヲ比較スルノ方法ニシテ未ダ角ノ單位ヲ定メザリシ尤モ兩脚規ノ任意ノ開キヲ取リテ以テ單位トシ他角ノ大サハ此角トノ比ニ由リテ定ムルヲ得可シ然リト雖角ヲ度ルニ當テ自然ノ理ニ由リテ單位ト定ム可キ角有リ左ニ之ヲ説ク

第五十二



AOB ヲ一ッノ角トス O ヲ中心トシテ半徑 a ヲ以テ圓ヲ畫キ此角ノ二邊ト A B ニ於テ交ラシム然レバ AOB 角ヲ二倍セバ弧 AB モ從テ二倍セラル角ヲ三倍スレバ弧モ亦三倍セラル凡テ角ノ任意ノ倍數ヲ取レバ弧モ亦同倍數ト爲ル故ニ圓ノ中心ニ於ケル角ハ其立ッ所ノ弧ニ比例ス θ θ' ヲ弧 s s' ノ上ニ立ッ二角トセバ θ ト θ' ノ比ハ s ト s' ノ比ニ等シ θ' ヲ四直角トセバ s' ハ圓ノ全周ニシテ $2\pi a$ ニ等シ故ニ

$$\frac{\theta}{\text{四直角}} = \frac{s}{2\pi a}$$

角度ノ單位ヲ定ムルニハ其周上ニ弧ヲ量ル所ノ圓ノ大サニ關ハラザルモノヲ取ルヲ最便宜ナリトス圓ノ半徑ニ等シキ弧ノ上ニ立ッ所ノ角ヲ單位トセバ即之ニ適セリ此場合ニ於テハ $s=a$ ナレバ

$$\frac{\text{單位角}}{\text{四直角}} = \frac{1}{2\pi}$$

ナリ故ニ單位角ハ四直角ノ$\frac{1}{2\pi}$即二直角ノ$\frac{1}{\pi}$即直角ノ凡ソ.636ナリ

左レバ頂點圓ノ中心ニ在リテ其圓ノ半徑ニ等シキ弧ノ上ニ立ツ所ノ角ハ直角ノ一定分數ニシテ圓ノ大小ニ係ラズ常ニ同一ノ角ナリ

此角ヲ角度ノ單位即1トスレバθ角ノ此角ニ於ケルハsノaニ於ケル如キヲ以テ

$$s = a\theta \qquad \theta = \frac{s}{a}$$

故ニ此角ヲ單位角トセバ他ノ角ハ其立ツ所ノ弧(角ノ頂點ハ中心ニ在リテ)ト半徑トノ比ヲ以テ度ル可シ然ルニ諸圓ニ於テ等角ノ立ツ所ノ弧(角ノ頂點中心ニ在リテ)ハ圓ノ半徑ニ比例ス(第九節)故ニ比$\frac{s}{a}$ハ同一ノ角ニ付テハ何如ナル圓ヲ取ルモ常ニ同ジ即右ニ說ケル所ノ角ヲ度ル法ハ圓ノ大小ニ關係セザルモノナリ是レ此法ノ貴重ナル所以ナリ此度法ヲ圓度（ソルキユラル、メジユアー）ト稱シ此單位角ヲradian（レーデヤン）ト稱ス

一ツノ角幾「レーデヤン」ナリト云フハ其頂點ヲ圓ノ中心ニ置キ其立ツ所ノ弧ト圓ノ半徑トノ比ヲ云フナリ然レバ四直角ノ圓度ハ全周ト半徑ノ比ナレバ$\frac{2\pi a}{a}$即2πニ等シ即四直角ハ2π「レーデヤン」ナリ二直角ノ圓度ハπ、一直角ノ圓度ハ$\frac{\pi}{2}$等ナリ

第拾五節　分數指數

本編ヲ終ルニ先チテ第一編ニ於テ少シク說述シタル指數

ノ事ヲ尚ホ説述セザル可カラズ

a_nハaヲn度相乘ジタル結果ヲ表ハス記號ナルヿハ已ニ説明シタリ

此定義ヨリ推ス片ハ

$$a^n \times a^p \times a^q \times a^r = a^{n+p+q+r}$$

ナルヿ明ナリ何トナレバ此方程式ノ左邊ハaヲn度自乘シタルモノニaヲp度自乘シタルモノヲ乘ジ之ニaヲq度自乘シタルモノヲ乘ジ之ニaヲr度自乘シタルモノヲ乘ズルナレバ

$(a \times a \times a \times a$ ……………… 總テn因數$)$

$\times(a \times a \times a \times a$ ……………… 總テp因數$)$

$\times(a \times a \times a \times a$ ……………… 總テq因數$)$

$\times(a \times a \times a \times a$ ……………… 總テr因數$)$

ナリ故ニ其$(a \times a \times a \times a \times a$ ……………… 總テ$n+p+q+r$因數$)$

即$a^{n+p+q+r}$ニ等シキヿ明ナリ

若シ$b^n = a$即bノn乘aニ等シケレバbヲaノn乘根ト稱ス之ヲ記號ヲ以テ表ハスヿ左ノ如シ

$$b = \sqrt[n]{a}$$

例ヘバ8ハ2ノ三乘ナレバ2ハ8ノ三乘根ナリ3ハ243ノ五乘根ナリ

吾輩ハ第一編ニ於テ言語ノ意味ヲ擴張シテ以テ大ニ利益ヲ得ルヿ有ルヲ説キタリ今a^nナル記號ノ意味ヲ擴張スル

能ハザルカヲ見ル可シa^nニ於テn若シ分數或ハ負數ナルトキハ此記號ハ意味無キモノトナルカn若シ分數或ハ負數ナレバaヲn度自乘スルト云フハ意味無キヿナリ故ニnノ正數ナル時ノa^nノ意味ハ其分數或ハ負數ナル時ニハ當ラザルナリ然ラバ此場合ニ於テハa^nハ全ク意味無キモノトセンカ

斯ノ如キ時ハ吾輩ハ本原ノ定義ノ結果ニ返リテ之ヲ考ヘザル可カラズ正數指數ノ定義ノ結果ハ

$$a^{n+p+q+r+\cdots\cdots}=a^n\times a^p\times a^q\times a^r\times\cdots\cdots$$

ナリ是ハn、p、q、r等ノ數幾許有ルモ然リ今$\frac{l}{m}$ハ一分數ニシテ$a^{\frac{l}{m}}$ナル記號ニ解釋ヲ下サンヿヲ要ス先ツ此記號ハ右ノ關係ニ適フモノナリト假定シn、p、q、r……等皆各$\frac{l}{m}$ニ等シク其數m有リトセヨ即

$$n=p=q=r\cdots\cdots=\frac{l}{m}$$

$$n+p+q+r+\cdots\cdots=m\times\frac{l}{m}=l$$

故ニ上ノ關係ニ由リテ

$$a^l=a^{\frac{l}{m}}\times a^{\frac{l}{m}}\times a^{\frac{l}{m}}\times\cdots\cdots \text{總テ}m\text{因數}$$

$$=(a^{\frac{l}{m}})^m$$

故ニ$a^{\frac{l}{m}}$トハ之ヲm乘シタルノ結果a^lニ等シキ量ナリ即前章ノ定義ニ由リテa^lノm乘根ナリ

$$a^{\frac{l}{m}}=\sqrt[m]{a^l}$$

斯ク吾輩ハ$a^{\frac{l}{m}}$ニ指數ノ本原ノ方程式ニ適ヘル意味ヲ付

シタリ

n ノ負數ナル時モ亦 a^n ニ意味ヲ付スルヿ難キニ非ラズ

$a^n \times a^p = a^{n+p}$ ナリ今 p ヲ $-n$ トセバ

$$a^n \times a^{-n} = a^{n-n} = a^0 = 1$$

故ニ

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

ト爲ル故ニ a^{-n} トハ a^n ヲ以テ乘ズレバ 1 ト爲ル量ナリト解釋スレバ指數ノ本原ノ方程式ニ適ヘリ今甲數ニ乙ヲ乘ジテ其結果 1 ト成ル片ハ甲ヲ乙ノ反數ト云フ故ニ a^{-n} ハ a^n ノ反數ナリ例ヘバ 4 ノ反數トハ何ソヤ 4 ニ $\frac{1}{4}$ ヲ乘ズレバ 1 トナル然レバ 4 ノ反數ハ $\frac{1}{4}$ ニシテ 4^{-1} トハ即 $\frac{1}{4}$ ナリ又 4 ハ 2^2 ニ等シケレバ 2^{-2} ハ 4 即 2^2 ノ反數ナリ

指數ノ論ハ數理學上ノ研究ニ於テ極メテ重要ナレ𪜈之ヲ委シク論ゼントスル片ハ本書ノ限内ニ爲シ得可キヿニ非ラズ唯次編ノ説明ヲ解スルニ足ル可キ一端ヲ此ニ掲ケタルノミ

第三編畢

第四編　位置

第壹節　總テ位置ハ有對(レラチツ)ナリ

讀者ハ必ズ「縣廳ハ何所デアリマスカ」「八幡宮ノ社ヘ行ク道ヲ教ヘテ下サレ」又ハ「何々銀行ノ商店ヘハ何方(ドウ)參リマスカ」ナドト問ハレタルヿ有ル可シ斯ク何所ト問ヘバ其所(ソコ)ト答フルモノニシテ即其廳社等ノ位置ヲ示スナリ而シテ其所トト云フ事ヲ尚精ク云ヘバ例ヘバ左ノ如キヿナルベシ「眞直ニ行キ一番目ノ横町ヲ右ヘ曲リ夫ヨリ二番目ノ横町ヲ左ヘ曲リ一町行ケバ即縣廳ナリ」

今此問答ヲ少シク精密ニ考フ可シ「縣廳ハ何所デアリマスカ」之ヲ充分ニ述ブレバ「此所(即チ問フ人ノ現在セル場所)ヨ

リ縣廳ヘ何如ニシテ至ル可キカ」ト云フ意ナリ若シ此人ニ對シテ「縣廳ハ某町ニ在リテ何々銀行ヨリ二十間程先キナリ」ト答フルモ此人某町ノ何所ニ在ルモ又銀行ノ位置モ知ラザル片ハ益無キナリ或ハ又「縣廳ハ八幡宮ノ社ヘ行ク道ノ中程ニ在リ」ト云フモ此道ノ何所ニ在ルヲ知ラザル人ニハ無用ノ答ナリ

然レ氏此二答モ固ヨリ「縣廳ハ何所ニ在ルヤ」ノ問ニ對スル答ニシテ若シ銀行ノ見ヘル場所又ハ八幡宮道ニ在リテ問フタル人ニハ實ニ適當ナル答ナリ故ニ何所ノ問ニ對シテハ問フ者ノ位置即「此所」ノ何タルニ由リテ數多ノ答有ル可キナリ「何所」ト云フハ必ズ確定シタル「此所」有リテ而シテ初メテ起ル可キ問ナリ「縣廳ハ何所ニ在ルヤ」ノ問ハ或ル已ニ知レル場所ニ對シテ何所ニ在ルヤノ意ニ外ナラザルナリ

是ニ於テ吾輩ハ本節ノ題目ニ揭ゲタル欵ヲ得即場所或ハ物ノ「何所」トハ已ニ知レル場所或ハ物ヨリ何如シテ其所ニ至ルヤヲ示シテ以テ定ムルノ外手段ナシ其「何所」トハ「此所」ニ對シテ定ムルナリ故ニ曰ク「總テ位置ハ有對ナリ」ト

縣廳ノ位置ハ町内ノ他ノ場所ニ對シテ之ヲ示シ又其町ノ位置ハ他ノ町ニ對シテ之ヲ示ス如ク總テ「スペース」中ノ物體ハ他ノ物體ニ對シテ位置ヲ定ルノミ「スペース」中地球ノ位置ヲ論ズルハ大陽トカ木星トカ又ハ其他ノ星ノ存在スルヲ思ヒ之ニ對スルニ非ザレバ更ニ意味無シ「スペース」ハ

同ジナリトハ即是ニシテ其意義ハ「スペース」ノミニテハ吾人ノ感覺シテ以テ位置ヲ定ム可キ者ナシト云フ丁ナリ「スペース」ハ恰モ白紙ノ如シ之ニ諸點ヲ畫キ以テ相互ノ區別ヲ生ジ其位置ヲ知ル可キナリ少クモ紙上ニ二點無ケレバ決シテ之ヲ辨別スル丁能ハザルナリ

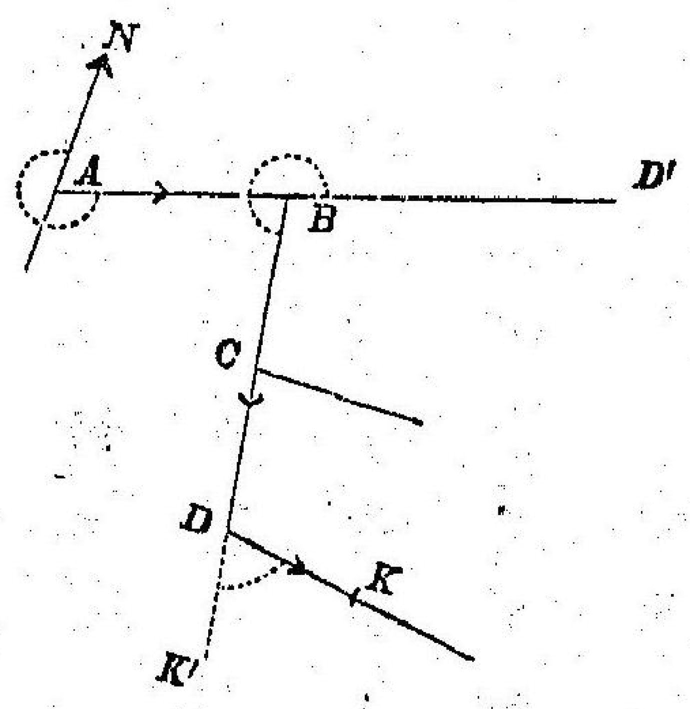
第貳節　位置ハ方向ノ定リタル歩ヲ以テ示ス丁ヲ得

已ニ「縣廳ハ何所ニ在ルカ」ノ問ヲ考究シタレバ次ニ其答「眞直ニ行キ一番目ノ横町ヲ右ヘ曲リ夫ヨリ二番目ノ横町ヲ左ヘ曲リ一町行ケバ即縣廳ナリ」ヲ考究ス可シ

先ツ「眞直ニ行ケ」トハ現在セル所ノ通街ヲ問者ノ以前ノ運

動又ハ答者ノ手ヲ以テ示セル方向ニ進行スルナリ即チ或ル一定ノ方向ニ進行セヨト云フナリ而シテ何程進行ス可キヤ即第一番目ノ右ヘ曲ル横町ニ至ルマデ此横町百間距リタルモノトセバ此答ハ或ル方向ニ百間進行セヨト云フナリ之ヲ圖ニ於テハABナル歩ヲ以テ表ハスAハ問ノ起リタル點ナリ問フタル人ハBニ於テ右ヘ曲リ夫ヨリCノ横町ヲ行キ過ギD即第二番目ノ横町ヲ左ヘ曲ル可シトナリ

第五十三



BD若シ百五十間有リトセバ即Bヨリ又或ル方向ニ百五十間進行ス可シト云フナリ而シテ

此方向ハ最初ノ方向即ABニ對シテ何如ナルカヲ定ムルニハ左ノ如クス可シ

若シBニ於テ方向ヲ變ゼズシテ百五十間進ミタレバD'ニ至リシナラン今最初ノ通街ト横町トノ交角ヲ知ル時ハBDノ方向トDノ位置ヲ知ル即Bヲ心トシテBD'ヲ此交角丈ケ廻轉セシムレバD'點ハD點ト合ス前編第拾壹節ニ説キタル面積ノ正、負、ト同様ノ約束ヲ角度ニ就テモ為ス時ハBD'ハ時計針ノ廻轉ニ反セル方向ニ$D'BD$角（二直角ヨリ大ナル角）ヲ廻轉スルナリ今此角ヲβ（希臘字ナリ「ビータ」ト讀ム）トシ此ニ新ナル符號$\{\beta\}$ヲ設ケ左ノ演算ヲ表ハサシム「進行ノ方向ヲβ角丈時計針ニ反セル方向ニ廻轉セヨ」例ヘバ

$\{0\}$ハ「眞直ニ進行セヨ」ト云フヿヲ表ハシ

$\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ハ直角ニ左ヘ曲レト云フヿヲ表ハシ

$\{\pi\}$ハ全ク反對ノ方向ニ進行セヨ即今マデ來リタル途ニ返レト云フヿヲ表ハシ

$\left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$ハ直角ニ右ヘ曲レト云フヿヲ表ハスナリ

斯ク此符號ニ由レバ左ヘ曲ル𪜈ハ括弧内ノ角ハ二直角ヨリ小ニシテ右ヘ曲ル𪜈ハ二直角ヨリ大ナリ

若シ問フタル人Dヘ往カズシテD'ヘ往クトセバ彼ハBマデ百間進ミ次デD'マデ百五十間進ムナル可シ即之ヲ表ハスニ$AB+BD'$即100間+150間ヲ以テス可シ然ルニ其實Bニ於テ曲ルナレバ之ヲ表ハス為ニ150ノ前ニ前述ノ符號

ヲ記シ實際ノ途次ハ $100+\{\beta\}150$ ヲ以テ表ハス可シ其意ハ元ノ方向ニ百間進ミテ反時計針狀ニ β 角ヲ廻轉シテ百五十間進ムト云フナリ

又 D ニ於テ左ヘ曲リ一町即六十間進行シテ縣廳ニ至ル K' ハ BD ヲ引長シタル線上ニ D ヨリ六十間距リタル點トシ DK' ヲ反時計針狀ニ $K'DK$ 角ヲ廻轉シ DK ト合セシム K ハ即縣廳ノ在ル所ナリ $K'DK$ ヲ表ハスニ γ（希臘字ナリ「ガマ」ト讀ム）ヲ以テセバ D ヨリノ途ハ $\{\gamma\}60$ ヲ以テ表ハス可シ

故ニ道ヲ問ヒタル場所ヨリ縣廳ニ至ル途次ハ

$$100+\{\beta\}150+\{\gamma\}60$$

ヲ以テ表ハス可シ但シ此ニハ一間ヲ以テ長サノ單位トシタ

ルナリ

尚是ニテモ未タ全ク街道ニ係ラズシテ途次ヲ指示シタルモノニ非ラズ何トナレバ最初ノ100間ハ道ヲ問ヒタル街道ヲ進行スルモノナレバナリ全ク此關係ヲ脱セント欲セバ一ノ定マレル方向ヲ取リ是ヨリ反時計針狀ニ廻轉シテ其街道ノ方向ト合スルニ至ル可キ角度ヲ記ス可シ例ヘバ道ヲ問フタル人磁石ヲ所持シ AN ヲ A ニ於テ其針ノ方向トセバ街道 AB ノ方向ハ北ヨリ東ヘ何度寄リタルモノトセバ定マレリ或ハ前ノ如ク反時計針狀ニ AN ヨリ西南ヲ過テ α（希臘字「アルフ、」ト讀ム）角ヲ廻轉シテ AB ト合スルトセバ最初ノ100ノ前ニ $\{\alpha\}$ ヲ記シ $\{\alpha\}100$ トシ最初北ヨリ反時計針狀ニ α 角ヲ廻

轉シタル方向ニ百間進行スルヿヲ表ハスモノトナス可シ故ニAヨリ縣廳ニ至ル途次ヲ

$$\{\alpha\}100+\{\beta\}150+\{\gamma\}60$$

ト記スル片ハ毫モ其街道ノ方向等ニ係ラズ一點Aヨリ一點Kニ達スルヲ得ル途次ヲ確然ト表ハスモノナリAニ對シテKノ位置ヲ純正ナル幾何ノ方法ニ由リテ即方、向、ノ、定、リ、タ、ル、歩、ノ連續ニ由リテ表ハスモノナリ之ヲ言語ニ譯シテ言フ片ハ左ノ如シ

一定ノ方向トα角ヲ為ス方向ニ百單位(間)ノ歩ABヲ取リ次ニBヨリABトβ角ヲ為ス方向ニ百五十單位ノ歩即BDヲ取リ終ニBDトγ角ヲ為ス方向ニ六十單位ノ歩DKヲ取ル可シ

但シ角ハ總テ時計針ノ廻轉スル方向ニ反對シタル方向ニ度ルモノトス

第三節　方向ノ定リタル歩即「ヴェクトル」ノ加法

今圖ト記號トヲ比較スレバ$\{\alpha\}100$ハ歩ABニ對ス但シ歩ABト云フハ其長サノミナラズ其方向モ亦確定シタルモノト見倣サヾル可カラス$\overline{BD}$ $\overline{DK}$モ亦然リ皆方向ノ定リタル歩ナリ

吾輩ハ先ニ記シタル途次ノ記號

$$\{\alpha\}100+\{\beta\}150+\{\gamma\}60$$

ニ代ユルニ幾何學上ノ記號

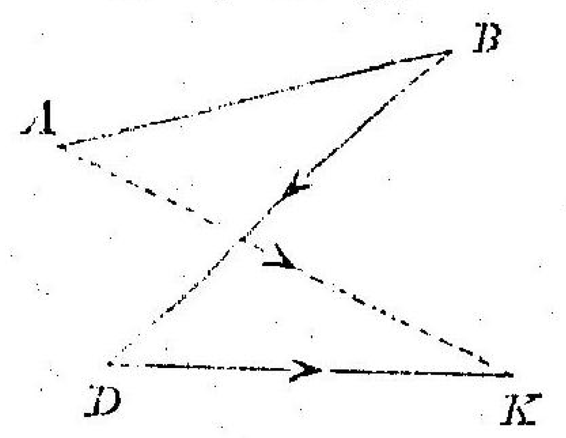
$$AB+BD+DK$$

ヲ以テセントス但シ$\overline{AB}$ $\overline{BD}$ $\overline{DK}$並ニ＋ニ此マデトハ異ナレル

意味ヲ付シテ以テ然スルヲ得ルナリ即量及加法ノ意義ヲ擴張スルナリ

$AB+BD+DK$トハ此マデノ如ク唯AB中ニ在ル長サノ單位ノ數ニBD中ニ在ル長サノ單位ノ數ヲ加ヘ其和ニDK中ニ在ル長サノ單位ノ數ヲ加フルヲ表ハスニ非ラズ一ノ確定セル方向ニ歩ABヲ爲シ次ニ其歩ノ終リタル所ヨリ又他ノ確定セル方向ニ歩BDヲ爲シ終ニ其端ヨリ又他ノ確定セル方向ニ歩DKヲ爲スヲ表ハス而シテ此三ツノ演算ニ由リテAヨリKニ達スAヨリAKノ方向ニ歩AKヲ爲スモ亦AヨリKニ達ス可シ故ニ「等シ」ナル語及其符號＝ノ意義ヲ擴

第五十四



メ二ツノ演算ノ同結果ヲ生ズルヲ表ハスモノトセバ

$$AK = AB + BD + DK$$

ト記シAKハAB、BD、DKノ和ニ等シト云フヲ得可シ

第三編ニ於テ量ヲ論ジタル時ニモ歩ヲ以テ説明シタリシガ其歩ハ唯大サヲ表ハスノミニシテ少シモ方向ニハ關係無ク之ヲ任意ノ一直線上ニ續ケテ取リ以テ之ヲ加減シタリ斯ノ如キ歩ハ或ル一定ノ割合（スケール）ニ依リテ大サヲ表ハスヲ以テ之ヲScalar（スケーラー）歩ト稱ス「スケーラー」（適當ノ譯語無シ暫ク原語ヲ存ス）トハ大サノミ有リテ方向ニ關セザルモノナリ

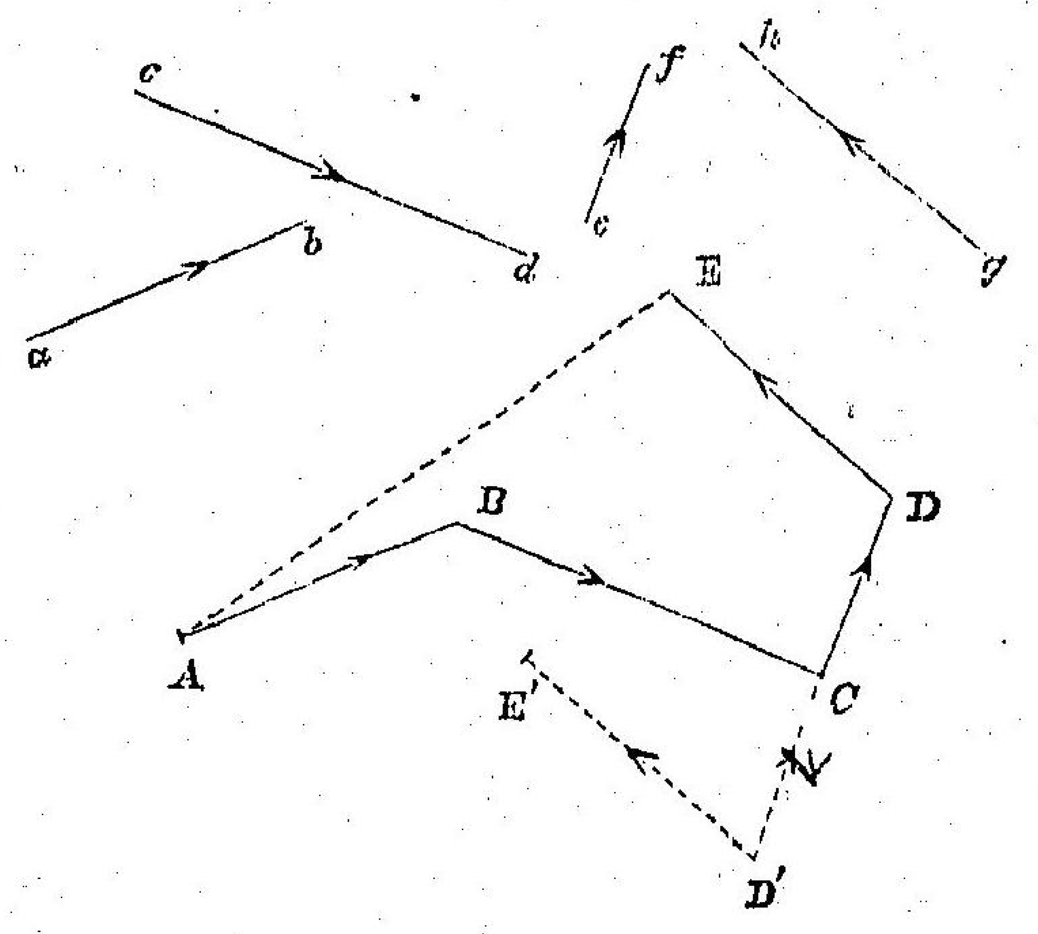
啻ニ大サノミナラズ亦方向ノ確定セル歩ヲVector（ヴェクトル）ト稱ス蓋シ「ヴェクトル」トハ「送達スル」ノ意ニシテ之ニ由リテ「スペース」

中一ノ位置ヨリ他ノ位置ニ送達スルヲ以テ斯ク稱スルナリ第五十四圖ニ於テABハ一ツノ「ヴェクトル」歩ナリ而シテ其AヨリBニ至ルモノナルヲ表ハス爲ニAヨリBノ方ヘ向ヒタル矢先(→)ヲ付ス又歩ABト云ヘバAヨリBニ至ル歩ヲ表ハシBAト云ヘバBヨリAニ至ル歩ヲ表ハス

「ヴェクトル」歩ノ加法ハ右ニ説述シタル所ニ由リテ畧明白ナル可シ數多ノ「ヴェクトル」歩ヲ加ヘントスル片ハ各自其方向ヲ保タシメ端ト端トヲ續々連接シテ之ヲ置ク可シ而シテ最注意ス可キ一項ハ一點此屈曲線ノ上ヲ動キテ一端ヨリ一端ニ至ル片ハ常ニ矢先ヲ以テ示セル方向ニ動キ得ル樣ニ連接セザル可カラザルヿナリ之ヲ言ヒ換レバ矢先ノ

向キ常ニ順ナラザル可カラザルヿナリ然ル片ハ此等ノ「ヴェクトル」歩ノ和ハ此屈曲線ノ首端ヨリ尾端ヘ引ケル一ノ「ヴェクトル」歩ナリ例ヘバ第五十五圖ニ於テab cd ef ghハ四ツノ「ヴェクトル」歩ニシテ之ヲ加フルヲ要ストセンABヲabニ平行ニ且ツ之ニ等シク引キ其端BヨリBCヲcdニ平行ニ且ツ之ニ等シク引キ又其端CヨリCDヲefニ平行ニ且ツ之ニ等シク引キ終ニDヨリDEヲghニ平行ニ且ツ之ニ等シク

第五十五



引ク可シ然ル𪜈ハ矢先ハ常ニ順次ニ首端Aヨリ尾端Eノ方ニ向ヘリ然レバ「ヴェクトル」歩AEハ右四「ヴェクトル」歩ノ和ナリ之ヲ言ヒ換レバ或ル一點ヨリ續ケテ右ノ如キ四「ヴェクトル」歩ヲ爲セバ一ノAE歩ヲ爲シタルト同一ノ點ニ達ス可シ

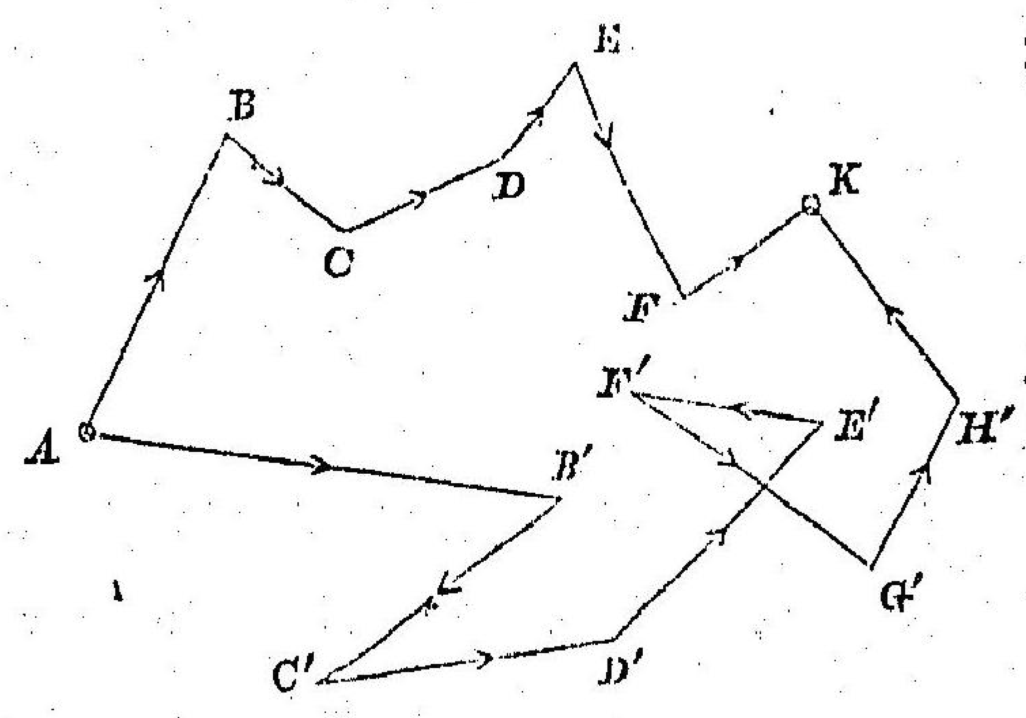
今若シ右ノ如クセズシテCニ於テCD'ヲefニ平行ニ且ツ之ニ等シク取リ又$D'E'$ヲghニ平行ニ且ツ之ニ等シク取レバCD'ニ於テハ矢先ハ逆向セリ是正シカラザルナリ

加ヘント欲スル「ヴェクトル」歩ノ方向皆同一ナレバ屈曲線ハ一直線ト成ル其加法ハ「スケーラー」歩ノ加法ト異ナルヿ無シ即「ヴェクトル」歩ヲ「スケーラー」歩ト同一ニ見做シ得可キ塲合ニ於テハ擴張シタル意義ノ加法モ尋常ノ加法ト異ナルヿ無シ

今若シA點ニ關係シテK點ノ位置ヲ「ヴェクトル」AKニ由リテ示ストセバ亦之ヲ其首端Aニ在リ尾端Kニ在ル所ノ數多ノ連接シタル「ヴェクトル」歩ニ由リテ示ス可シ(第五十六圖)即

$$AK = AB + BC + CD + DE + EF + FK$$

第五十六



前ノ縣廳ノ例ニ就テ之ヲ見ルニAヨリKニ至ル途次ハ上ニ掲ゲタルモノヽ外ニ尚ホ數多有ル可ク或ハ町内幷ニ近傍ヲ迂廻シテ此ニ至ルヿモ有ル可シ而シテ何レノ途次ニ由リテ縣廳ニ達スルモ其結果ハ「ヴェ

クトル」歩AKヲ為スト同一ナリ(但シ實際ニ於テハ眞直ニAヨリKニ至ル能ハザルヿ有ル可シ)故ニ數多ノ「ヴェクトル」歩ヨリ成ル屈曲線Aニ始リKニ終ル片ハ之ヲ成ス所ノ「ヴェクトル」歩ノ何如ニ係ラス其和ハ皆同一ナリ即

$$AB+BC+CD+DE+EF+FK=AK$$
$$=AB'+B'C'+C'D'+D'E'+E'F'+F'G'+G'H'+H'K$$

今若シ問者知ラズシテ縣廳ノ前ニ在リタリトセン(Aハ即縣廳ナリ)而シテ答者直ニ之ヲ示サズシテ町内ヲ迂廻シテ終ニ復此ニ返ル可キ途ヲ教ヘタリトセン然ル片ハ問者ハ元ノ位置ニ返リタレバ其迂廻ノ結果ハ到底零歩ヲ以テ表ハサヽル可カラズ即

$$AB+BC+CD+DE+EF+FK+KA=0 \qquad (甲)$$

之ヲ言語ニ述レバ完結セル屈曲線ノ邊ヲ成ス數「ヴェクトル」歩ノ和ハ零ナリ

$$AB+BC+CD+DE+EF+FK=AK \qquad (乙)$$

ナルヿハ前ニ述タリ(甲)(乙)二式相撞着セザルモノトセンニハ$-KA$ハAKニ等シカラザル可カラズ即

$$AK+KA=0$$

此式ノ意味ハAヨリKニ至ル歩ヲ為シ次テKヨリAニ至ル歩ヲ為セバ其結果ハ零ナリト云フニ外ナラザルナリ而シテ之ニ由リテ若シAヨリKニ至ル歩ヲ正トスレバKヨリAニ至ル歩ヲ負トセザル可カラ・ザルヿ亦明ナリ又吾輩

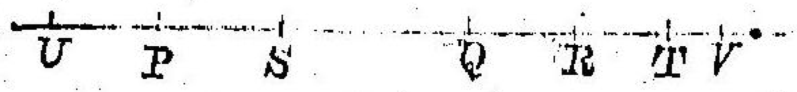
ハ之ニ由リテ「ヴェクトル」ノ減法ヲ變ジテ加法ト爲スヲ得例ヘバ $AB-DC$ ヲ以テ表ハス演算ヲ「ヴェクトル」AB ヨリ「ヴェクトル」DC ヲ減ズルヿトセバ此演算ハ（$DC+CD=0$ 式ニ由リテ）$AB+CD$ ト同一ナリ故ニ甲「ヴェクトル」ヨリ乙「ヴェクトル」ヲ減ズルニハ乙ノ方向ヲ反轉シテ之ヲ甲ニ加フ可シ

$AK+KA=0$ 式ヲ以テ表ハシタル結果ハ一直線上ニ在ル任意ノ數點ニ應用ス可シ例ヘバ P、Q、R、S、T、U、V ノ如ク一直線上ニ數點有レバ

$$PQ+QR+RS+ST+TU+UV+VP=0$$

何トナレバ P ヨリ發シ續ケテ此等ノ諸歩ヲ爲ス片ハ元ノ P 點ニ返リ即其結果零ナルヿ明白ナリ

第五十七



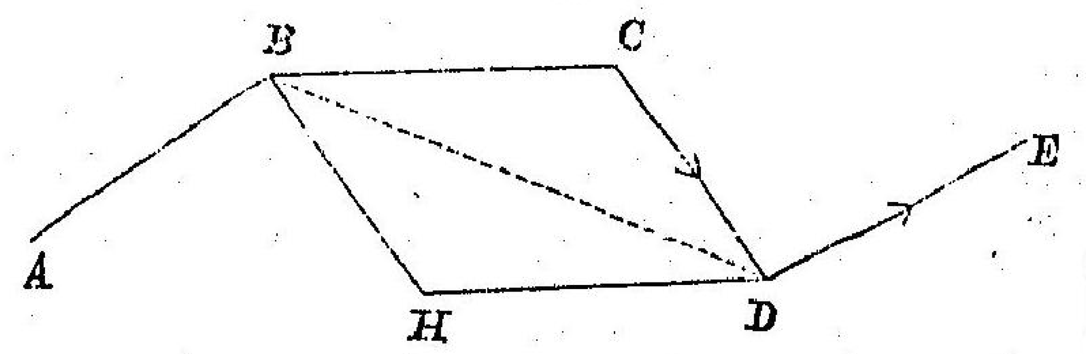
第四節　「ヴェクトル」ノ加法ハ交換定則ニ遵フ

前節ニ於テ加法ノ意義ヲ擴張シタリ本節ニ於テハ斯ク擴張シタル加法モ算術上ノ加法ト同ジク（第一編第二節）亦交換定則ニ遵フヲ證明セントス

先相隣レル二歩ノ順序ヲ換ユ可キヲ證明セン四歩 AB、BC、CD、DE ヲ第五十八圖ノ如ク加ヘタリトセヨ若シ B ニ於テ歩 BC ヲ爲サズシテ其大サ方向（ダイレクション）、矢先ノ向キ（センス）（方向トハ南北ト云フガ如ク北ヨリ南ヘ向フモ南ヨリ北ヘ向フモ同一ナリ矢先ノ向キハ其孰レヨリ孰ヘ向フヤヲ示スナリ是レ近頃幾何學者ノ定メタル重要ナル區別ナリ）CD ニ同ジキ歩 BH ヲ爲シタリトセバ次テ歩 HD ヲ爲シテ H ヨリ D ニ至ルヲ得 BD ヲ結ヒ付ケ二ノ三角形 BHD、BCD ヲ比較スルニ BH 邊ハ CD 邊ニ等シク BD 邊ハ兩形ニ通ジ HBD 角ハ BDC 角

ニ等シ（BH CD平行ナレバ）故ニ此二ツノ三角形ハ同形同大ニシテHDハBCニ等シ又BDH角トCBD角ト相等シケレバHDハBCニ平行セリ故ニ歩HDハ其大サ方向及矢先ノ向キ共ニ歩BCニ同ジ然レバ歩BHト歩CDハ同一ノ「ヴェクトル」又歩HDト歩BCハ同一ノ「ヴェクトル」ナリ之ニ由リテ

第五十八



$$BC+CD=BD=BH+HD=CD+BC$$

ヲ得即數歩ヲ加フルニ當テ相隣レル二歩ヲ交換スルモ其結果ヲ變ゼズ第一編第三節ニ述タル論法ニ由リテ相隣レル二歩ヲ交換スルヲ得バ何レノ二歩ヲモ交換スルヲ得可キヿヲ證明スルハ容易ナリ故ニ數「ヴェクトル」

ノ和ハ之ヲ加フルノ順序ニ關ラズト斷定ス可シ

「ヴェクトル」ニ關スル幾何學ノ極メテ重要ナルハ物理學的ノ量ハ多ク「ヴェクトル」ヲ以テ表ハス可キモノナルガ故ナリ吾輩ハ第五編ニ於テ速度及加速度ハ此類ノ量ナルヿヲ見ル可シ

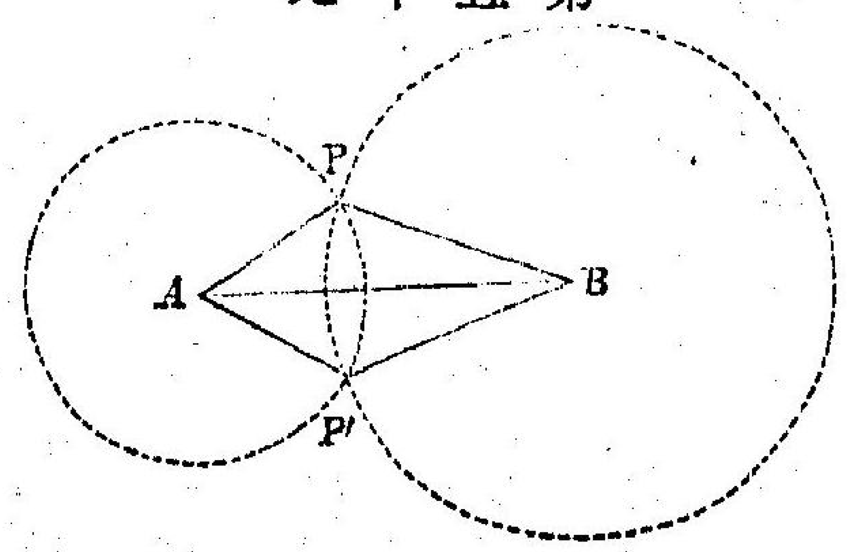
第五節　一平面上位置ヲ示ス方法

「スケーラー」量（大サノミニテ方向ニ關セザル量）ハ一直線上ニ取リタル歩ヲ以テ表ハス可キヿハ第三編第二節ニ於テ説明シタリ此場合ニ於テハ起算ノ點トスル一點ヲ定メ總テ他點ノ位置ハ定點ヨリ之ニ至ル歩ノ大サヲ以テ示ス可キナリ線ヲ稱シテ一行（ダイメンション）ノ「スペース」ト云フ一行ノ「スペース」ニ在リテハ唯一個

ノ定點有レバ之ニ對シテ以テ他點ノ位置ヲ定ムルヲ得一平面上ニ於テハ然ラズ一定點Aニ關シテ他ノ一點Pノ位置ヲ示スニハ單ニ歩APノ大サヲ知ルノミニテハ充分ナラズ又其方向ヲ知ルヲ要ス故ニ「スケーラー」歩ノ一行「スペース」ニ於ケルハ恰モ「ヴェクトル」歩ノ平面「スペース」ニ於ケルガ如シ歩APノ方向ヲ定ムルニハA點ノ外尚一定點(B)ヲ知ラザル可カラズ一點ノ位置ヲ示スニ二定點ヲ要スル「スペース」ヲ二。行。ノ「スペース」ト稱ス二行ノ「スペース」ニ於テ位置ヲ示ス方法種々有リ吾輩本編ニ於テ平面(即二行ノ「スペース」中兩方同形ナル一種ノ「スペース」)上ニ之ヲ示ス二三ノ方法ヲ掲ゲントス

(六) A、Bヲ一平面上ノ二定點トスP點ノ位置ハ此二點ヨリノ距離ニ由リテ示ス可シr、r'ヲ此二距離トス(唯其大サヲ表ハスモノニシテ即「スケーラー」ナリ)然レバA及Bヲ中心トシ各半徑r、r'ヲ以テ圓ヲ畫ケバ二圓ノ交點ハ即P點ナリ然ルニ交點二個有ルヲ以テr、r'ノ同値ニ由リテ示ス所ノ點二個有リ其一ハABヨリ上ニ一ハ下ニ在リ以テ之ヲ區別スルヲ得

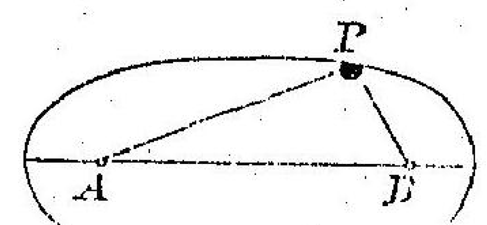
第五十九



r、r'ノ値ニ依リテハ二圓相切スルヿ有ル可シ此場合ニ於テハ唯一點ヲ得或ハ二圓全ク交ラザルヿ有ル可シ然ル𪜈ハr、r'ノ此値ニ對スル點無キナリ

若P點平面上ニ動キ其何レノ位置ニ於テモA、Bヨリノ距離r、r'常ニ同一ノ關係ヲ保ツ𬼀ハ其動キタル蹤跡ハ一ツノ曲線ヲ成ス可シ例ヘバA、Bニ於テ紙面ニ針ヲ刺シ之ニ長サlニ等シキ糸ノ兩端ヲ結ヒ付ケ鉛筆ノ尖頭Pニテ常ニ糸ノ弛マザル樣ニ引張リ紙面ヲ離レシメズシテ之ヲ動カス𬼀ハ其畫キ出ス所ノ形ハ即楕圓ナリ

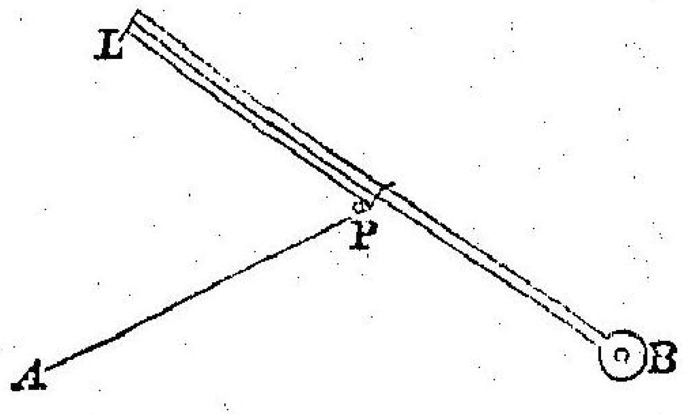
第六十



此場合ニ於テハ $r+r'=AP+PB$ ナレバP點ノ何レノ位置ニ於テモ常ニ糸ノ長サlニ等シ故ニ$r+r'=l$ハ楕圓中ノ何點ニ於テモ保ツ所ノ關係ニシテ此曲線上ノ諸點二點A、Bニ對シタル性質ヲ表ハスモノナリ

若シP點ヲAPトBPノ差常數ニ等シキ樣ニ($r-r'=l$)動カス𬼀ハP點ハ雙曲線ヲ畫ク可シP點ヲ此ノ如ク動カシムル仕掛ハ甚單易ナリ即左ノ如シ$\overline{BL}$ハ其一端Bヲ心トシテ廻轉シ得ル定規ナリ糸ノ一端ヲ定規ノ一端Lニ、一端ヲ定點Aニ刺シタル針ニ結ヒ付ケヨ今鉛筆ノ尖頭P常ニ定規ヲ離レズ又糸ノ弛マザル樣ニシテ

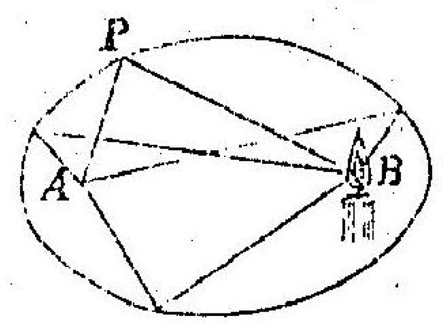
第六十一



定規ヲ廻轉セシムル𬼀ハPハ雙曲線ヲ畫ク可シ何トナレバ$LP+PA$ハ常ニ糸ノ長サニ等シ$LP+PB$ハ常ニ定規ノ長サニ等シ故ニ其差$PA-PB$ハ糸ト定規ノ長サノ差ニ等シクP點ノ何レノ位置ニ於テモ同一ナリ

A、B二點ヲ楕圓或ハ雙曲線ノ焦點(フオカス)ト稱ス其理由ハ左ノ如シ善ク磨キタル「ゼンマイ」(時計ノ)ノ如キモノヲ楕圓形ニ曲ケ一焦點Bニ熱キ體ヲ置ク片ハ其發スル所ノ光線及熱線ハ「ゼンマイ」ノ面ニ於テ反射サレ皆Aニ聚ル故ニAハ楕圓内B點ニ次テ最熱キ點ナリ蓋其反射サレテAニ聚ル所以ハ外ナラズAP及BPハPニ於テ曲線ト相等角ヲ爲ス而シテ又光線及ヒ熱線一ノ面ニ於テ反射サル丶片ハ反射ノ前後ニ面ト相等角ヲ爲スニ依リテ然ルナリ

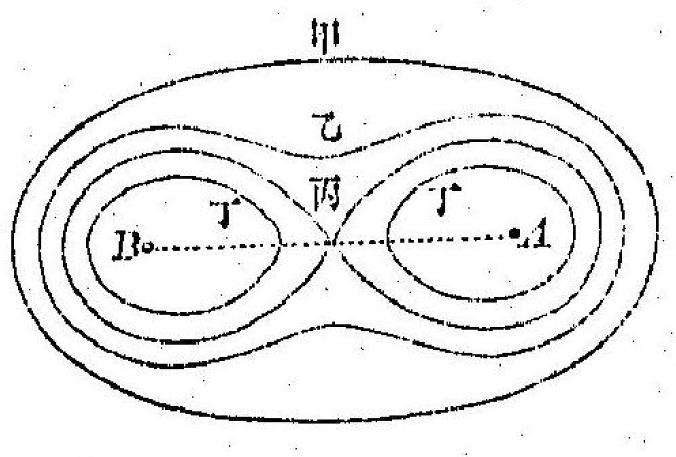
第六十二



平面上位置ヲ示ス第一方法ニ由リテ容易ニ得可キ曲線中右ニ述ベタル楕圓及雙曲線ハ最重要ナルモノト云フ可シ

今尚ホ一個ノ重要ナル曲線ヲ揭ゲントス「ジェームス、ベルヌウヰー」ノ發明シタル「レムニスケート」即是ナリ此曲線ハA及Bヨリノ距離ヲ二邊トセル矩形ノ面積常ニ一定正方形ノ面積ニ等シキ樣ニ動ク點ノ蹤跡ナリ(即チ$r \cdot r' = c^2$)若シ一定正方形ノ邊(c)ABノ半分ヨリ大ナレバ曲線ハAトBトノ間ニ交ル丁無ク其形第六十三圖甲或ハ乙ノ如シ若シABノ半分ニ等シケレバ其形ハ8字形(丙)トナル若シABノ半分ヨリ小ナレバ曲線ハ分裂シテ離隔セル二環(丁)ト成ル

第六十三



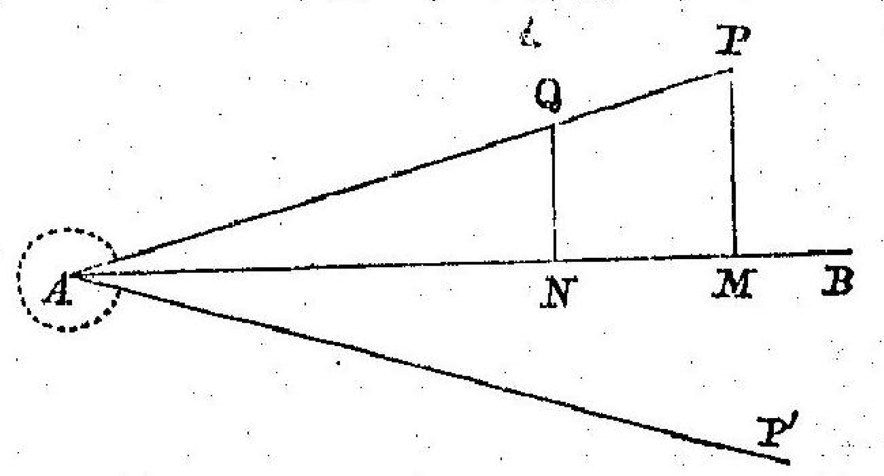
斯ノ如ク唯常數ノ大サニ由リテ種々ノ形ト成ルト雖皆同樣

ノ關係ヲ有スルモノヲ稱シテ同族(ファミリー)ノ曲線ト云フ曲線ノ族ハ物理學上吾輩ノ屢〻見ル所ナリ

第六節　極式

(地) 二點A、Bハ一直線ノ方向ヲ確定ス即ABハ是レナリ今若シAPノ長サ及BAP角ノ大サヲ知レバ之ニ由リテ以テP點ノ位置ヲ知ル可キヿ明ナリrヲAP中ニ在ル長サノ單位ノ數又θヲBAP角中ニ在ル角度ノ單位ノ數トスr、θハ圖ヨリ分數タルヿヲ得θヲ度ルニ先ニ面積ニ付テ爲シタルト同一ノ約束ヲ爲ス即一直線最初ABト同一ノ位置ニ在リAヲ中心トシテAPノ位置ニ至ルマデ反時計針狀ニ廻轉シテ描キタル角ヲθトス時計針狀ニ廻轉シテ描ケル角ハ面積ニ於ケル如ク

第六十四



負トス例ヘバABノ下ニ在ルBAP'角ハABヨリAP'マデ時計針狀ノ廻轉ニ由リテ得可キモノナリ故ニ之ヲ負トセザル可カラズ然レ𪜈直線ヲ反時計針狀ニ(圖ニ於テハ點線ヲ以テ示シタル)BAP'角ヲ廻轉セシメ以テAP'ノ位置ニ至ラシムルヿヲ得又時計針狀ノ廻轉ニ依リテABヨリAP'ニ至ルヲ得即P點ノ位置ヲ負角ニ由リテ示スヿヲ得シカノミナラズABヨリAPニ至リタル後尚ホ直線ヲ反時計針狀或ハ時計針狀ニ幾回周轉セシムルモ各周廻轉ノ後ハ常ニ復APノ位置ニ在ル可シ

故ニ一ツノ直線Aヲ中心トシテ廻轉シABヨリAPニ至ル方法四有リ

(一) 反時計針狀ニABヨリAPマデ廻轉

(二) 時計針狀ニABヨリAPマデ廻轉

(三) (一)ニ由リテAPニ達シ夫ヨリ反時計針狀或ハ時計針狀ニ任意回ノ周廻轉

(四) (二)ニ由リテAPニ達シ夫ヨリ反時計針狀或ハ時計針狀ニ任意回ノ周廻轉

平面上點ノ位置ヲ定ムル此方法ニ用ユル語左ノ如シ

直線ハABヨリ廻轉ヲ始ム此線ヲ首線ト稱スAPヲ動徑ト稱スBAP角ヲ變角ト稱スA點ヲ極ト稱スAP(長サ)及BAP角(θ)ヲ併

セテP點ノ極式ト稱ス此二者ノ大サハ即極A及首線ABニ對シテP點ノ位置ヲ示スモノナリ

第七節 三角法比

P點ヨリABヘ直角線PMヲ垂ルレバ直角三角形PAM(第六十四圖)ヲ得其諸邊ノ比率ニ左ノ如キ名稱ヲ付ス

$\frac{MP}{AP}$ 即垂邊ト斜邊ノ比ヲBAP角ノ正弦(Sine)ト稱ス

$\frac{AM}{AP}$ 即底邊ト斜邊ノ比ヲBAP角ノ餘弦(Cosine)ト稱ス

$\frac{MP}{AM}$ 即垂邊ト底邊ノ比ヲBAP角ノ正切(Tangent)ト稱ス

$\frac{AM}{MP}$ 即底邊ト垂邊ノ比ヲBAP角ノ餘切(Cotangent)ト稱ス

θヲBAP角ノ大サトセバ右ノ四比ヲ表ハス爲ニ左ノ畧記ヲ用ユ

Sin θ, Sin ハ Sine ヲ略シタルモノナリ「サイン、シータ」ト讀ムベシ

Cos θ, Cos ハ Cosine ヲ略シタルナリ「コサイン、シータ」又ハ「コス、シータ」ト讀ム可シ

Tan θ, Tan ハ Tangent ノ略ナリ「タンジェント、シータ」又ハ「タン、シータ」ト讀ム可シ或ハ之ヲ tg θ 又ハ tang θ ト略記スルヿ有リ

Cot θ, Cot ハ Cotangent ヲ略シタルナリ「コタンジェント、シータ」又ハ「コット、シータ」ト讀ム可シ或ハ之ヲ Cotg θ 又ハ Cotang θ ト略記スルヿ有リ

譯者曰ク數學上ノ式ハ到底羅馬字ニテ書セザルヲ得ザルモノナレバ余ハ此ニ原語ノ略記ヲ存シ常ニ之ヲ用ヰントス式ニ於テ Sin θ ニ代ユルニ正弦θヲ以テスル如キハ余ノ不可トスル所ナリ

今 AP 線上任意ノ一點 Q ヲ取リ AB ヘ直角ニ AN ヲ垂レル片ハ三角形 QAN PAM ハ同形ニシテ其相對邊ノ比ハ皆等シ故ニ二ツノ三角形 QAN PAM ニ於テ正弦、餘弦、正切、餘切ハ同一ナリ故ニ Sin θ Cos θ, Tan θ, Cot θ ハ AP 線上 P 點ノ位置ニ關セズ唯 BAP 角ノ大サ即 θ ニ據ルモノナリ此等ノ比ヲ三角法比ト稱ス三角法ハ純正數學ノ重要ナル一科ニシテ專ラ三角法比ノ論ナリ通常三角法比ト稱スルモノ右四比ノ外尚ホ四比有リ以前ハ之ヲ併セテ八線ト稱セリ蓋シ八線及其名稱ノ理由ハ此

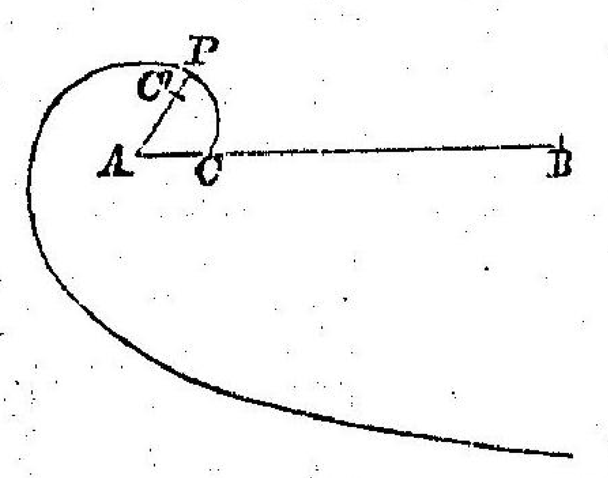
ニ揭グルヲ要セザレバ畧ス

第八節　匝線（スパイラル）

一線AP有リA點ヲ心トシテ廻轉スルP點ハAP線ノ廻轉スルト同時ニ其線上ヲ動キAヨリノ距離rハ常ニ其廻轉シタル角BAPノ大サθト一定ノ關係ヲ有ス今若シP點ニ鉛筆ノ尖頭有レバP點ノ動クニ從テ紙面ニ曲線ヲ描クコト可シ斯ノ如キ曲線ヲ總稱シテ極曲線又ハ匝線(Spiral)ト云フ匝線ノ種類頗ル多シ今此ニ其重ナルモノヽ一二ヲ揭グ

匝線中最モ人ノ善ク知ルモノヽ一ハ希臘國ノコノン（紀元前二百五十年ノ人）比ノ發見シタルモノニシテ通常之ヲアルキミーデースノ匝線ト稱ス蓋シアーキミーデース（希臘人紀元前二百年比ノ人）委シ

ク此曲線ノ性質ヲ研究シタルヲ以テナリアルキミーデース匝線トハAP線ハ不變ノ速度ヲ以テ廻轉シP點ハ其上ヲ不變ノ速度ヲ以テ動ク時ニP點ノ描ク所ノ曲線ナリ動徑最初ABノ位置ニ在リ其時鉛筆ノ尖頭ハCニ在リACノ長サヲaトス(長サノ單位ヲ一寸トセバACノ長サa寸ナリ)直線廻轉シテAPノ位置ニ至リタル時尖頭ハPニ在リBAP角ノ大サヲθトスAC'ヲACニ等シトス然ルトキハ動徑BAP角ヲ廻轉スル間ニ點ハ$C'P$ヲ經過ス而シテ直線モ點モ兩ナガラ不變ノ速度ヲ以テ動クモノナレバ同時間ニ廻轉シタル角ト經過シタル距離トノ比ハ常ニ不變ナ



第六十五

リ即CAP角ト$C'P$トノ比ハP點ノ何レノ位置ニ於テモ常ニ同一ナリ今直線角度ノ單位ヲ廻轉スル間ニ點ノ動ク距離ヲbトセン然ラバθ角ヲ廻轉スル間ニ點ノ動ク距離ハθニbヲ乗ジタルモノナルヿ明白ナリ故ニ

$$C'P = b \times \theta$$

今APヲrトセバ

$$C'P = r - a$$

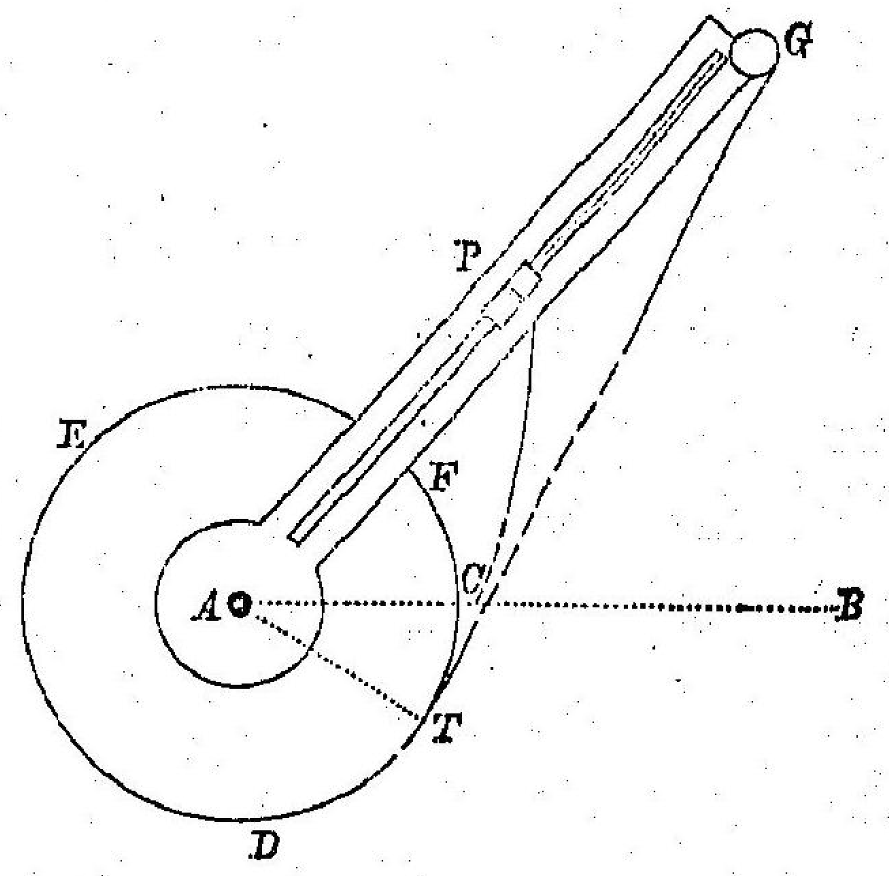
故ニ

$$r = a + b\theta$$

rトθノ此關係ヲ匝線ノ極方程式ト稱ス

左ノ簡單ナル機械ニ由リテアーキミーデースノ匝線ヲ描クヲ得DEFハ或ル撰定シタル半徑ノ圓形板ナリ其縁ニ凹線ヲ彫リタリ又圓形板ノ中心Aヲ心トシテ廻轉シ得ル定規

第六十六



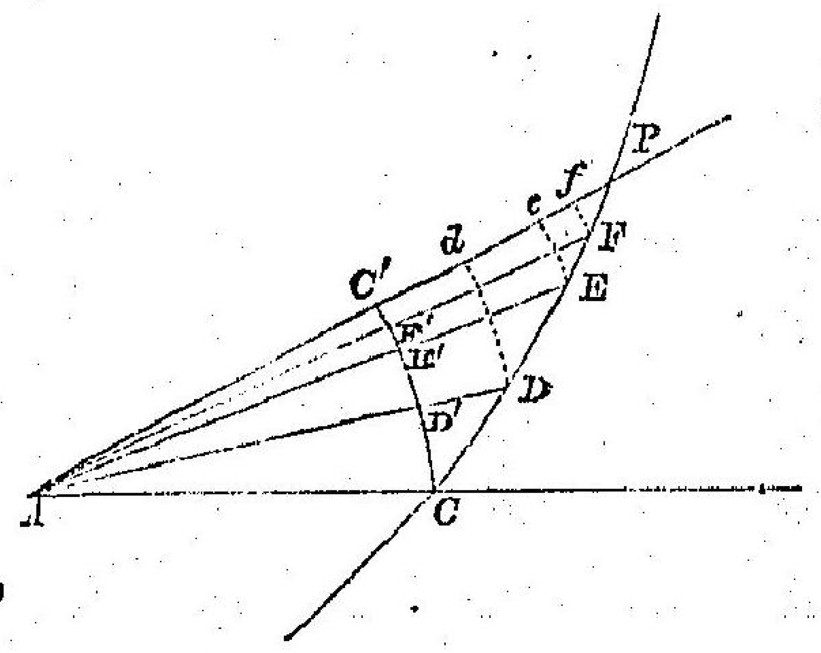
AG有リ定規ノ中央ヲ縦ニ通リタル細キ溝有リ溝ノ一端ニ小滑車G有リ此溝ヲ上下シ得ル一小片P有リ其中心ニ穴有リテ鉛筆ノ尖頭ヲ之ニ挿入シ紙面ニ曲線ヲ描クナリ糸ノ一端ヲ圓形板縁ノ凹線中ノ一點Dニ結ヒ付ケ滑車Gヲ繞リ其一端ヲ小片Pニ結ヒ付ル全「ゴム」紐ヲ以テAトPヲ結ヒ付ケレバ此紐ハ常ニPヲAノ方ヘ引クヲ以テPヨリGマデ又Gヨリ圓形板ノ凹線マデノ糸ハ決シテ弛ムヿ無シ圓形板ヲ固ク紙面ニ押シ付ケ動カヌ

様ニシテ定規ヲ反時計針狀ニ廻轉スル時ハPニ在ル鉛筆ハアーキミーデースノ匝線ヲ描ク可シ何トナレバ系ハT點ニ於テ圓形板ニ切スルヲ以テ三角形GATハ如何ニ定規ヲ廻轉スルモ常ニ同形同大ナリ故ニGTノ長ハ常ニ同シ然レバ定規ヲ最初ノ位置ABヨリAGマデ廻轉シタル時ニ系ノ長DT圓形板ニ捲キ付キタリトセバPヨリGマデノ距離ハ恰モ之ニ等シキ長ヲ減セザルヲ得ズ故ニ鉛筆ノ尖頭ハCヨリPニ至ル間ニAG線ヲDTニ等シキ長丈ケ動キタリ而シテ板ニ捲キ付キタル系ノ長DTハ圓ノ弧ナレバDAT角即之ニ等シキBAP角ニ比例スBAP角ハ定規ノ廻轉シタル角ナリ故ニP點ノGノ方ヘ動キタル距離ト定規ノ廻轉シタル角トノ比ハ

常數ナリ即P點ノ軌跡ハアーキミーデースノ匝線ナリ

此種ノ匝線ノ形有レバ吾輩ハ之ヲ用ヰテ容易ニ幾何學上屢起ル所ノ一問題ヲ解スルヲ得一角ヲ相互ニ所要ノ比ヲ為ス部分ニ分ツヿ即是ナリ其方法左ノ如シ分タントスル所ノ角ノ頂點ヲ匝線ノ極ニ置キAC APノ二動徑ヲ角ノ邊トス(第六十七圖)A極ヲ中心トシ半徑ACヲ以テ圓ノ弧ヲ畫キAPトC'ニ於テ交ルトセヨ$C'P$ヲd e fニ於テ吾輩ノCAP角ヲ分タントスルト同數ニシテ且相互ニ所要ノ比ヲ為ス部分ニ分チAヲ中心トシテ半徑Ad Ae Afヲ以テ圓ノ弧ヲ畫キ曲線トD E Fニ於テ交ラシム然ル片ハCAP角ハAD AE AFニ由リテ所要ノ部分ニ分タレタリ之ヲ證明スルヿ甚易シ動

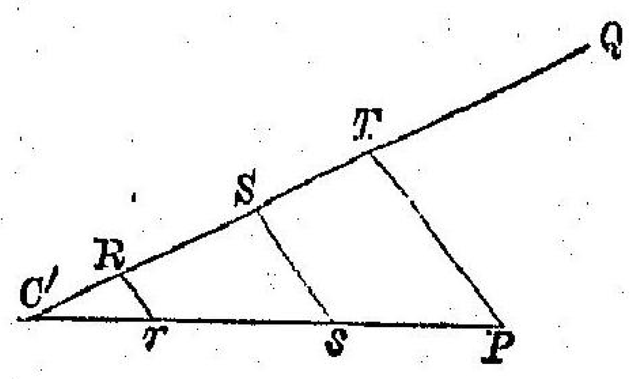
第六十七



徑 $\widehat{AD}$ $\widehat{AE}$ $\widehat{AF}$ 圓弧 CC' ト $\widehat{D'}$ $\widehat{E'}$ $\widehat{F'}$ ニ於テ交ルトセヨ然ル片ハアーキミーデースノ匝線ノ性質ニ由リテ $D'D$ $\widehat{E'E}$ $\widehat{F'F}$ $\widehat{C'P}$ ノ比ハ CAD $\widehat{CAE}$ $\widehat{CAF}$ $\widehat{CAP}$ 角ノ比ニ等シ而シテ $D'D$ ハ $C'd$ ニ $\widehat{E'E}$ ハ $C'e$ ニ $\widehat{F'F}$ ハ $C'f$ ニ等シ故ニ $C'P$ ノ諸部分ノ比ハ PAP 角ノ諸部分ノ比ニ等シ故ニ CAP 角ハ欲スル所ノ部分ニ分タレタリ故ニアーキミーデースノ匝線有レバ角ヲ分ツノ問題ヲ變シテ直線ヲ分ツノ問題トナスヲ得

直線ヲ分ツ丁ハ平行線ヲ引クヲ得バ容易ナリ例ヘバ $C'P$ ヲ相互ニ3ト5ト4ノ比ヲ為ス三部分ニ分ツヲ要スルトセン

第六十八



C' ヲ經過スル任意ノ直線 $C'Q$ ノ上ニ $C'R$ $\widehat{RS}$ $\widehat{ST}$ ヲ各三分、五分、四分ニ取ル可シ但シ便宜ニ由リ三寸、五寸、四寸又ハ三厘、五厘、四厘等ト取ルモ妨ケナシ TP ヲ結ヒ付ケ $\widehat{Rr}$ $\widehat{Ss}$ ヲ TP ニ平行ニ引キ $C'P$ ト $\widehat{r}$、$\widehat{s}$ ニ於テ交ラシム然ル片ハ $RC'r$ $\widehat{SC's}$ 及ヒ $TC'P$ ノ三ツノ三角形ハ同形ナレバ $C'P$ ハ $\widehat{r}$、$\widehat{s}$ ニ於テ相互ニ3ト5ト4ノ比ヲ為ス部分ニ分タレタルヿ第三編第五節ニ由リテ明ナリ

象牙或ハ金類ヲアーキミーデース匝線ノ形ニ切リタル摸形ハ數學器械中ニ在リテ甚有用ノモノナリ

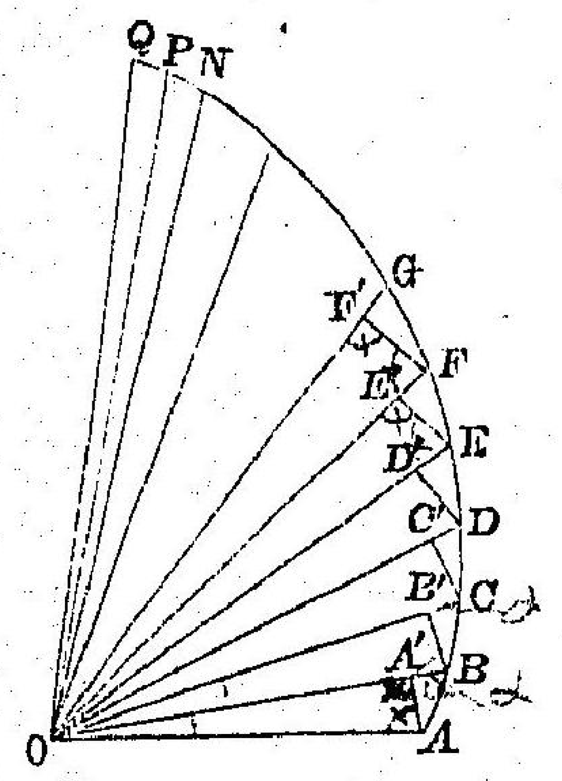
第九節　等角匝線（イクイアンギユラル、スパイラル）

次ニ論ゼントスル所ノ匝線ハデーカルト氏ノ發見シタル

モノニシテ**等角匝線**トモ又ハ**對數匝線**トモ名ク其名稱ノ理由ハ以下說ク所ニ由リテ詳ナリ

三角形BOAハOニ於テノ角甚小ニシテ二邊OA OBノ長サ大差ナキモノトスOB邊ノ上ニ(其Aニ反對セル側ニ)AOBト同形ノ三角形BOCヲ畫ケ但シOAB角トOBC角ト相等シトス又OC邊ノ上ニBOC或ハAOBト同形ノ三角形CODヲ畫キ又ODノ上ニ同形ノ三角形DOEヲ畫キ又OEノ上ニ同形ノ三角形ヲ畫キ限リ無ク斯ノ如クニセヨ吾輩ハ之ニ由リテ數多ノ同形三角形ヲ累ネタル圖形ヲ得各三角形ハOニ於テ等角ヲ有シ相隣レル二ツノ三角形ノ堺即

第六十九



通邊ハ二者ニ於テ相對應セザル邊ナリ(即相等角ニ對セザル邊ナリ)A B C D E等ハ多角形ノ頂點ヲ爲スOニ於テノ角ヲ各極メテ小ニスル時ハ此多角形ノ邊ハ尖點無ク滑ナル曲線ノ如ク見ユル可シ而シテ角ヲ小ニスルニ從テ愈曲線ニ近ヅク可シ斯クOニ於テノ角ヲ窮リ無ク小ニシタル時多角形ノ極限ナル曲線ヲ**等角匝線**(イクイアンギュラル、スパイラル)ト稱ス蓋シAB BC CD等ハ同形三角形ノ對應邊ナレバ對應邊OB OC OD等ト相等角OBA、OCB ODC等ヲ爲ス而シテOニ於テノ角極小ナレバAB BC CD等ハ曲線ノ原素ト爲ル故ニ此匝線ノ弧ハ動徑ト常ニ等角ヲ以テ交ル故ニ**等角**匝線ノ名アリ

今動徑OP(rトス)ト變角AOP(θトス)トノ關係ヲ得ン

AOB BOC COD 等ノ諸三角形ハ皆同形ナレバ其對應邊ハ比例ヲ爲ス即

$$\frac{OB}{OA}=\frac{OC}{OB}=\frac{OD}{OC}=\frac{OE}{OD}=\frac{OF}{OE}=\cdots\cdots$$

此等ノ諸比ノ値ヲμトス但シμハ「スケーラー」量ナリ然レバ

$$OB=\mu.OA \quad OC=\mu.OB \quad OD=\mu.OC\cdots\cdots\text{等}$$

即チ

$$OB=\mu.OA \quad OC=\mu^2.OA \quad OD=\mu^3.OA\cdots\cdots\text{等}$$

ONヲOニ於テ等角ヲn(或ル任意ノ數)取リタル後ノ動徑(即第$n+1$三角形ノ底邊)トスレバ

$$ON=\mu^n.OA$$

今Oニ於テノ角ヲ各單位角ノ小部分トセヨ例ヘバ其百分

ノ一或ハ千分ノ一トスルモ可ナリ假ニ之ヲ$\frac{1}{b}$トセン(但シ此ニbハ整數トス可シ)

又λ(希臘字ナリ「ラムダ」ト讀ム羅馬字ニ同ジ)ヲμノb乘ヲ表ハストセン即チ$\lambda=\mu^b$故ニμハλノb乘根ナリ即$\mu=\lambda^{1/b}$(第三編第十五節)

之ニ由リテ

$$ON=OA.\lambda^{n\times 1/b}$$

之ヲ言語ヲ以テ述レバ、

Oヲ續リテ累子タル同形三角形中第$n+1$三角形ノ底邊ハ第一三角形ノ底邊ニ或ル量λヲ(Oニ於ケル等角ト單位角トノ比ナル)$\frac{1}{b}$ノn倍自乘シタルモノヲ乘ジタルニ等シ

今直線 OP ハ第 $n+1$ 三角形ノ二邊 ON ト OQ ノ間ニ在リトセン然ル時ハ ON ハ OA ト $\frac{1}{b}$ ノ n 倍ナル角ヲ為ス OQ ハ OA ノ $\frac{1}{b}$ ノ $n+1$ 倍ナル角ヲ為ス故ニ AOP 角即 θ ノ大サハ $\frac{n}{b}$ ト $\frac{n+1}{b}$ ノ間ニ在リ OP ノ大サモ亦 ON ト OQ ノ間ナリ O ニ於テノ各角ヲ小ニスルニ従テ多角形ハ曲線ニ近クモ OP ハ常ニ此三角形ノ二邊ノ間ニ在リ θ 角ハ常ニ $\frac{n}{b}$ ト $\frac{n+1}{b}$ ノ間ニ在レバ其二者ノ孰レトノ差モ $\frac{1}{b}$ ヨリ小ナリ O ニ於テノ角ヲ窮リ無ク小ニスレバ此差 $\frac{1}{b}$ モ窮リ無ク小ニナル可シ故ニ極限ニ至レバ θ ハ $\frac{n}{b}$ ニ等シク OP ハ ON OQ ノ孰レニモ等シクナル可シ之ニ由リテ $OP=OA.\lambda^{n/b}=OA.\lambda^{\theta}$ ヲ得之ヲ言語ヲ以テ述レバ等角匝線ノ一動徑 OP 他ノ一動徑 OA ト θ 角ヲナス𪜈ハ OP ト OA ノ比ハ或ル数 λ ヲ θ 乗シタルモノニ等シ

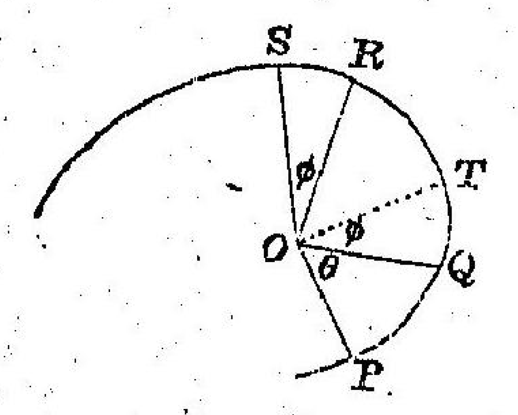
a、r ヲ OA ト OP ノ大サヲ表ハス数トセバ　$r=a\lambda^{\theta}$　之ヲ此匝線ノ極方程式トス

譯者曰ク原書ニハ此所ニ少シク誤謬有リ即 ON ヲ第 n 三角形ノ底邊トス然レ𪜈 ON ハ O ニ於テノ等角ヲ n 累子タル後ノ動徑ナリトスレバ第 $n+1$ 三角形ノ底邊ナルヿ明ナリ

又 O ニ於テノ角即 $\frac{1}{b}$ ヲ小ニスルト同時ニ ON ニ至ルマデノ三角形ノ数ヲ極メテ多クセザル可カラズ即 n ヲ極メテ大ニセザル可カラズ然ラザレバ $\frac{n}{b}$ モ極メテ小ニナリ OP ト OA ト窮リ無ク近ク可ケレバナリ原書ニ之ヲ述

へザルハ或ハ繁ヲ省ク爲ナランカ此ニ一言ヲ述べ置ク

吾輩ハ此匝線ノ考究ヨリ頗ル重要ノ結果ヲ得ントス二動徑相互ノ比ハ全ク其夾角ノ大サニ依ルナレバ一雙ノ動徑ノ比ハ之ト等角ヲ夾ム他ノ一雙ノ動徑ノ比ニ等シ又任意ノ二量p及qノ比ニ他ノ任意ノ二量r、sノ比ヲ乘ゼント欲スル時ハ左ノ如クスルヲ得p、q、r、sハ各其量ノ單位若干ヲ含有ス匝線ノ動徑ニシテ其中ニ在ル長サノ單位ハ各p、q、r、s中ニ含有スル各量ノ單位ノ數ニ等シキモノヲ見出ス可シ之ヲOP、OQ、OR、OSトセンOPトOQハθ角ヲ夾ミORトOSハϕ（希臘字ナリ「ファイ」ト讀ム）角ヲ夾ムトセン然レバ



第七十

故ニ

$$\frac{OQ}{OP}=\lambda^{\theta}\qquad\frac{OS}{OR}=\lambda^{\phi}$$

$$\frac{OQ}{OP}\times\frac{OS}{OR}=\lambda^{\theta}\times\lambda^{\phi}=\lambda^{\theta+\phi}$$

即$\theta+\phi$角ヲ夾ム一雙ノ動徑ノ比ニ同シ今QOT角ヲϕニ等シク取リOTヲ匝線ノ動徑トセバ$\frac{OT}{OP}=\lambda^{\theta+\phi}$ナリ即$OP$ト$OT$ノ比ハ與ヘラレタル二比ノ積ニ等シ故ニ數比ノ積ヲ得ント欲セバ各比ニ等シキ比ヲ爲ス數雙ノ動徑ノ夾角ヲ加ヘ其和ニ等シキ角ヲ夾ム一雙ノ動徑ノ比ハ即欲スル所ノ積ナリ斯ク吾輩ハ等角匝線ニ由リテ乘法ニ代ユルニ加法ヲ以テスルヲ得加法ハ乘法ヨリ甚易ケレバ是極メテ便利ナル事ナリ

又$\frac{OQ}{OP}\div\frac{OS}{OR}=\lambda^{\theta}\div\lambda^{\phi}=\lambda^{\theta-\phi}$ナレバ吾輩ハ又除法ニ

代ユルニ減法ヲ以テスルヲ得
等角匝線ノ極ニ在ル角ノ如ク吾輩ヲシテ加法減法ヲ以テ乘法、除法ニ代ユル丁ヲ得セシムル量ノ表ヲ名ケテ對數表(Table of Logarithms)(テーブル、オブ、ロガリスムス)ト云フ等角匝線ハ圖ニ畫ケル對數表ノ如キモノナレバ之ヲ名ケテ對數匝線(ロガリスミック、スパイラル)トモ云フ

第拾節　對數

對數匝線ニ於テ $OP = OA.\lambda^{\theta}$ ナリ故ニθ角αナル片ハOPハ$OA.\lambda^{\alpha}$ナリ今OPニ此ヨリ尚ホβ角ヲ廻轉セシムレバ(即θ角增長シテ$\alpha+\beta$トナレバ)OPハ$OA.\lambda^{\alpha+\beta}$即$OA.\lambda^{\alpha}.\lambda^{\beta}$トナル即$OP$ノ以前ノ値ニ$\lambda^{\beta}$ヲ乘ジタルモノニ等シ$\theta$角復增長シテ尚$\beta$ヲ加ヘ$\alpha+2\beta$トナレバ$OP$ハ$OA.\lambda^{\alpha}.\lambda^{2\beta}$即$OA.\lambda^{\alpha}.\lambda^{\beta}.\lambda^{\beta}$トナル即元ノ値ニ$\lambda^{\beta}$ヲ二度乘ジタルモノニ等シ斯ノ如ク$\theta$ノ等シク增加スル每ニ$OP$ハ等シキ數ヲ以テ乘ゼラル此ニ二量甲乙有リ甲ハ乙ノ等シキ增加每ニ等シク乘ゼラルル時ハ甲ハ對數狀(ロガリスミック、レート)ノ割合ヲ以テ增長スト云フ而シテ此對數狀ノ割合ハ乙ノ單位(乙角度ナレバ角度ノ單位乙長サナレバ長サノ單位等)ノ增加ニ對スル甲ノ增長ト甲ノ元値トノ比ニ由リテ之ヲ度ル

此度法ヲ吾輩等角匝線ニ應用センOB(再ビ第六十九圖ヲ用ユ)上ニOA'ヲOAニ等シク取リ$\overset{\frown}{OC}$上ニOB'ヲOBニ等シク取リ$\overset{\frown}{OD}$ノ上ニOC'ヲOCニ等シク取ル其他皆之ニ倣フ然ル片$A'B$ $B'C$ $C'D$等ハ動徑ノOAヨリOBニ至リ$\overset{\frown}{OB}$ヨリOCニ至リ$\overset{\frown}{OC}$ヨリODニ至ル等ノ間ノ增長ナリAA' $\overset{\frown}{BB'}$ $\overset{\frown}{CC'}$ $\overset{\frown}{DD'}$等ヲ結ビ付ケヨ三角形AOB $\overset{\frown}{BOC}$ $\overset{\frown}{COD}$等

ハ皆同形ナリ等邊三角形AOA'、BOB'、COC'等モ亦同形ナリ故ニ此二組ノ中相對應セル三角形ノ差ナル三角形$AA'B$、$BB'C$、$CC'D$等モ亦同形ナリ故ニ其對應邊ハ比例ヲ為ス即$A'B$、$B'C$、$C'D$等ノ相互ノ比ハ$A'A$、$B'B$、$C'C$等ノ相互ノ比ニ等シ又OA、OB、OC等ノ相互ノ比ニ等シ故ニ

$$\frac{A'B}{OA} = \frac{B'C}{OB} = \frac{C'D}{OC} = \cdots\cdots$$

$A'B$、$B'C$、$C'D$等ハ動徑ノ増長OA、OB、OC等ハ動徑ノ元値ナレバ此場合ニ於テハ増長ト元値トノ比ハ常ニ同一ナリ

今Oニ於テノ角ヲ極メテ小ニスレバAA'線ハOヲ中心トシ半徑OAヲ以テ畫キタル圓ノ弧ト實際差無カル可シ故ニ極限ニ於テハAA'ハ$OA \times \angle AOA'$ニ等シ(第三編第十四節)クシテ

A'ニ於テノ角ハ直角ナリ

三角形$AA'B$、$BB'C$、$CC'D$等ノ諸三角形ニ於テ$A'B$邊(及之ニ對應スル邊)トAA'邊(及之ニ對應スル邊)トノ比ハ皆同一ナリ之ヲ等角ABA'、BCB'、CDC'等ニ付テ見ル片ハ底邊ト垂邊トノ比ニシテ本編第七節ニ於テ餘切ト稱シタルモノナリ此等ノ等角ハ此匝線ヲ名ケタル所以ノ角ナリ其大サヲαトセン然レバ

$$\cot\alpha = \frac{A'B}{AA'} = \frac{A'B}{OA \times \angle AOA'}$$

即

$$\frac{A'B}{OA} = \angle AOA' \times \cot\alpha$$

而シテ$A'B$ハ極小角AOA'ニ對スル増長ナリ故ニ單位角ニ對スル増長ト元値ノ比即對數狀ノ割合ハ$\cot\alpha$ナリ之ヲ言ヒ換レバ等角即對數匝線ノ動徑ノ迴轉スルニ從テ其増長ス

ル對數狀ノ割合ハ之ヲ名ケタル所以ノ角ノ餘切ニ等シ
今OAヲ長サノ單位即1トセバ $OP = OA.\lambda^{\theta}$ ナルヲ以テOAヲ單位角ヲ廻轉セシムルノ結果OPハλニ等シ即λハ動徑1ヲ對數狀ノ割合 $\cot\alpha$ ヲ以テ増長シツヽ單位角ヲ廻轉セシムルノ結果ナリ
元値1ナリシ動徑單位角ヲ廻轉スル間常ニ對數狀ノ割合1ヲ以テ増長シタル所ノ結果ヲeヲ以テ表ハス對數狀ノ割合1トスルハ等角ヲ四十五度ニ取ルナリeハ一ツノ確定シタル値有リ之ヲ計算スル方法ハ此ニ掲ケザレ𪜈其値ハ凡ソ2.718ナリ之ヲ言ヒ換レバ動徑1ヲ角度1ヲ廻轉セシメ其間常ニ對數狀ノ割合1ヲ以テ増長セシムレバ其増長ハ1.718即元値ノ五分ノ八ト五分ノ九ノ間ナリ
動徑ヲ單位角ヲ廻轉セシメタル結果ハe（即1ニeヲ乘ジタルモノ）ニシテ動徑ハ角ノ等シキ増加毎ニ等シク乘ゼラルヽモノナレバ二單位角ヲ廻轉セシメタル結果ハ$1\times e\times e$即e^2ナリ三單位角ヲ廻轉セシムレバe^3ナリ概シテγ單位角（γハ整數）ヲ廻轉セシメタル結果ハe^{γ}ナリ
今マデハ單位動徑對數狀ノ割合1ヲ以テ増長スルトセリ然ルニ今對數狀ノ割合γヲ以テ増長スルトセバ割合1ヲ以テ増長シタルγ倍増長ス可シ然レバ動徑ノ對數狀ノ割合γヲ以テ増長シツヽ單位角ヲ廻轉スル結果ハ此割合ノ$\frac{1}{\gamma}$ヲγ單位角ニ廣ゲテ配分シタルニ同ジ即對數狀ノ割

合1ヲ以テ增長シγ單位角ヲ廻轉シタル結果e^{γ}ニ同ジ故ニe^{γ}ハ動徑ノ對數狀ノ割合1ヲ以テ增長シツヽγ單位角ヲ廻轉シタル結果トモ亦動徑ノ對數狀ノ割合γヲ以テ增長シツヽ單位角ヲ廻轉シタル結果トモ見做ス可キモノナリ

γ若シ分數$\frac{s}{t}$ニ等シキ時ハe^{γ}ハ何ヲ表ハスヤヲ考究セン但シs及tハ整數ナリトス（γハ即可通度分數ト稱スルモノナリ）動徑ノ對數狀ノ割合1ヲ以テ增長シツヽγ角ヲ廻轉シタル結果（未知量）ヲ假ニxトス然レバx^{t}ハ動徑ノ割合1ヲ以テ增長シツヽ各γニ等シキ角ヲt合セタル角ヲ廻轉シタル結果ナル可シ各γニ等シキ角ヲt合セタル角ハs單位角ニ等シ故ニ此結果ハ動徑ノ割合1ヲ以テ增長シツヽs單位角ヲ廻轉シタル結果即e^{s}ニ同ジ故ニ$x^{t} = e^{s}$　xハe^{s}ノt乘根ナリ即$x = e^{s/t} = e^{\gamma}$故ニe^{γ}ハγノ分數ナル時モ其整數ナル時ト同一ノ意ヲ表ハス

今$\cot\alpha$ニ等シキ可通度分數有リト假定セヨ然ルトキハ動徑1對數狀ノ割合$\cot\alpha$ヲ以テ增長シツヽ單位角ヲ廻轉スルノ結果ハe^{γ}ナリ而シテ先ニλモ亦此結果ナリトセリ故ニ

$$\lambda = e^{\gamma}$$

又動徑1對數狀ノ割合$\cot\alpha$ヲ以テ增長シツヽθ角ヲ廻轉スルノ結果ハλ^{θ}ナレバ

$$\lambda^{\theta} = e^{\gamma\theta}$$

故ニ

$$OP = OA.\lambda^\theta = OA.e^{\gamma\theta}$$

即

$$r = ae^{\gamma\theta}.$$

是即此等角匝線ノ極方程式ナリ

OA即a長サノ單位ニシテm即$\cot\alpha$モ亦1ニ等シキ匝線ヲ取レバ其式ハ$r = e^\theta$ナリ

e^θヲ稱シテθノ「エクスポ子ンシャル」ト稱シθヲγノ自然對數ト稱ス之ヲ左ノ如ク記號ヲ以テ表ハス

$$\theta = \log_e r$$

eヲ自然對數ノ基ト稱ス右ノ匝線ハ自然對數ノ圖畫ナリ

元ノ方程式$r = ae^{\gamma\theta}$ニ返リγノ値ヲ$e^\gamma = 10$ナル様ニ撰バン然ルトキハγハ動徑ノ對數狀ノ割合1ヲ以テ増長シツヽ10

トナルマデニ廻轉ス可キ角度ナリ今aヲ1トスレバ

$$r = e^{\gamma\theta} = 10^\theta$$

ヲ得此場合ニ於テハθハ10ヲ根トシタルrノ對數ニシテ之ヲ左ノ如ク記ス

$$\theta = \log_{10} r$$

此匝線ハ10ヲ基トシタル對數ノ圖畫ナリ

自然對數ハジョン「子ピヤー」スコットランドノ八ノ發明シタルモノナリ氏ハ一千六百十四年エデンボロー府出版ノ書ニ之ヲ詳記セリ10ヲ根トシタル對數ハ或ハ尋常對數ト稱ヘ實際ノ計算上極メテ便利ニシテ現今ハ極簡單ナル計算ノ外ハ之ヲ學術及應用上總テノ計算ニ於テ用ヰルナリ蓋シ其便利ナ

ル所以ハ乘法除法ニ代ユルニ之ヨリ容易ナル加法減法ヲ以テスルニ由レリ

第拾壹節　軸式

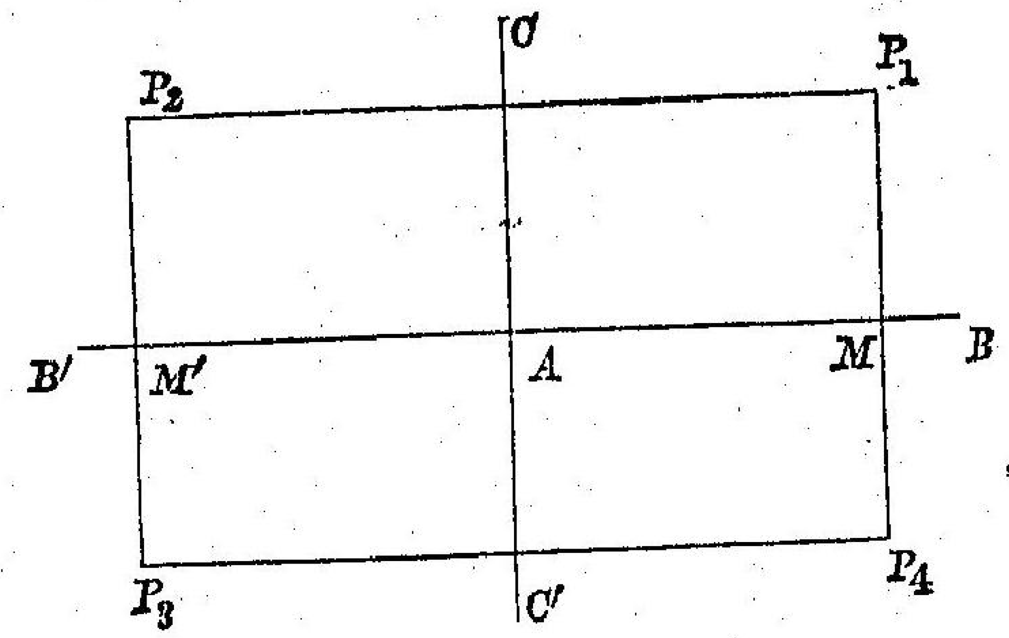
(八) 二行ノ「スペース」上點ノ位置ヲ定ムル第三法ヲ軸式ト云フ二定點A「B(第七十一圖)ヲ結付ル直線BAB'及A點ヲ過リ之ニ直角ナル一直線CAC'ヲ引ク可シ此二直線(無窮ニ引長シタル)ハ平面ヲ四部分ニ區分ス各區ヲ象限ト稱ス之ニ由リテP_1ノ位置ヲ定ムルヿ左ノ如シP_1ヨリCAニ平行ニP_1M線ヲ引キ$B'AB$トMニ於テ交ラシム然ル𪜈ハAヨリP_1ニ至ルニ先ツ$B'AB$線上ニ歩AMヲ取リ夫ヨリ左ヘ之ニ直角ニ歩MP_1ヲ為ス可シAMノ如キ歩ハAヨリBノ方ヘ或ハB'ノ方ヘ為スヲ得Bノ方ヘ為ス歩ヲ進歩トシ$+AM$ヲ以テ之ヲ表セバB'ノ方ヘ為ス同シ長サノ歩AM'ハ退歩ニシテ$-AM$ヲ以テ表ハスヲ得又本編第二節ニ於テ$\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ヲ以テ表ハシタル演算ヲ單ニ$i$ヲ以テ表ハス可シ即單位歩ノ前ニ此記號ヲ付スレバ「以前ノ歩ノ方向ニ長サノ單位ニ等シキ進、歩、ヲ為シ此歩ヲ反時計針狀ニ其首端ヲ中心トシテ直角ヲ廻轉セシメヨ」トノ意ナリ之ヲ歩MP_1ノ前ニ付シ$i.MP_1$トスレバ「M點ヨリBノ方ヘ長サMP_1ニ等シキ歩ヲ為シ此歩ヲMヲ中心トシテ反時計針狀ニ直角ヲ廻轉セシメヨ」トノ意ナリ然レバAニ對シテP_1ノ位置即歩AP_1ハ左ノ式ニ由リテ表ハスヲ得

$$AP_1 = AM + i.MP_1$$

若シ象限BAC'ニ在ルP_4ニ至ラント欲セバMヨリ進マズシテMP_4ニ等シキ退歩ヲ爲シ之ヲ反時計針狀ニ直角ヲ廻轉セシム可シ退歩ハ－ヲ付シテ之ヲ表ハス故ニ

$$AP_4 = AM - i \, . \, MP_4$$

第七十一



次ニ象限CAB'ニ在ルP_2ノ如キ點ニ至ラントスルトキハ先ツ退歩AM'ヲ爲ス可シ之ヲ$-AM'$ヲ以テ表ハス次ニM'ヨリ$M'P_2$ニ等シキ長サノ進歩ヲ爲ス可シ(進歩ナレバM'ヨリAノ方ヘノ歩ナリ)之ニ演算iヲ行ヒテ反時計針狀ニM'ヲ中心トシテ直角ヲ廻轉セシムレバP_2ニ至ル即

$$AP_2 = -AM' + i \, . \, M'P_2$$

又象限$B'AC'$ニ在ル點P_3ニ至ラント欲セバ退歩AM'ヲ爲シ尚ホ$M'P_3$ニ等シキ退歩ヲ爲シ之ヲ反時計針狀ニ直角ヲ廻轉ス可シ即

$$AP_3 = -AM' - i \, . \, M'P_3$$

今$P_1P_2P_3P_4$ヲ其中心Aニシテ其邊BAB'、CAC'ニ平行ナル矩形ノ角トセヨAMノ長サ(長サノ單位ノ數)ヲxトシMP_1ノ長サヲyトセバAニ關係シテ此四點ノ位置ハ左ノ四式ニ由リテ表ハスヲ得

$$AP_1 = x + iy \qquad AP_2 = -x + iy$$

$$AP_3 = -x - iy \qquad AP_4 = x - iy$$

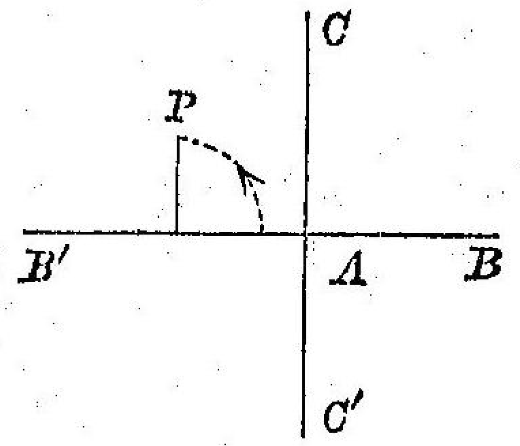
此ニx、yトハ唯數ナリ然レトモ此等ノ數ヲ步ヲ以テ表ハストキハyノ數ハxノ數ヲ取リタル直線ニ直角ナル直線上ニ取ル可キモノナリ故ニx及yノ數ヲ長サヲ以テ表ハセバ吾輩ハ之ニ由リテ點ノ位置ヲ示スヲ得

x、yヲ斯ク量トシ正負ノ別有リトセバ點ノ位置ヲx、yヲ以テ表ハス可シ即AヨリAB上ニxニ等シキ進步ヲ為シ其尾端ヨリyニ等シキ進步ヲ為シ此步ヲxノ尾端ヲ中心トシテ反時計針狀ニ直角ヲ廻轉セヨ然ルトキハ其步ノ尾端ハ即x、y二量ノ表ハス所ノ點ナリ之ヲ$x\ y$點ト稱ス若シx或ハy負ナレバ之ニ對スル步ハ負數ノ進步ナレバ即退步ナリ然レバ

象限BACニ在ルP_1點ハ$x\ y$ヲ以テ表ハシ
象限CAB'ニ在ルP_2點ハ$-x\ y$ヲ以テ表ハシ
象限$B'AC'$ニ在ルP_3點ハ$-x\ -y$ヲ以テ表ハシ
象限$C'AB$ニ在ルP_4點ハ$x\ -y$ヲ以テ表ハス

點ノ位置ヲ示ス此法ハデーカルト氏ノ初メテ用ヒタルモノナリBAB' CAC'ヲ橫軸(アクシス)縱軸ト稱シA點ヲ原點(オリジン)ト稱シ$x\ y$ヲ點ノ橫線縱線ト稱ス例ヘバ一點Pノ橫縱線$(-3、2)$ナリト云フ

第七十二



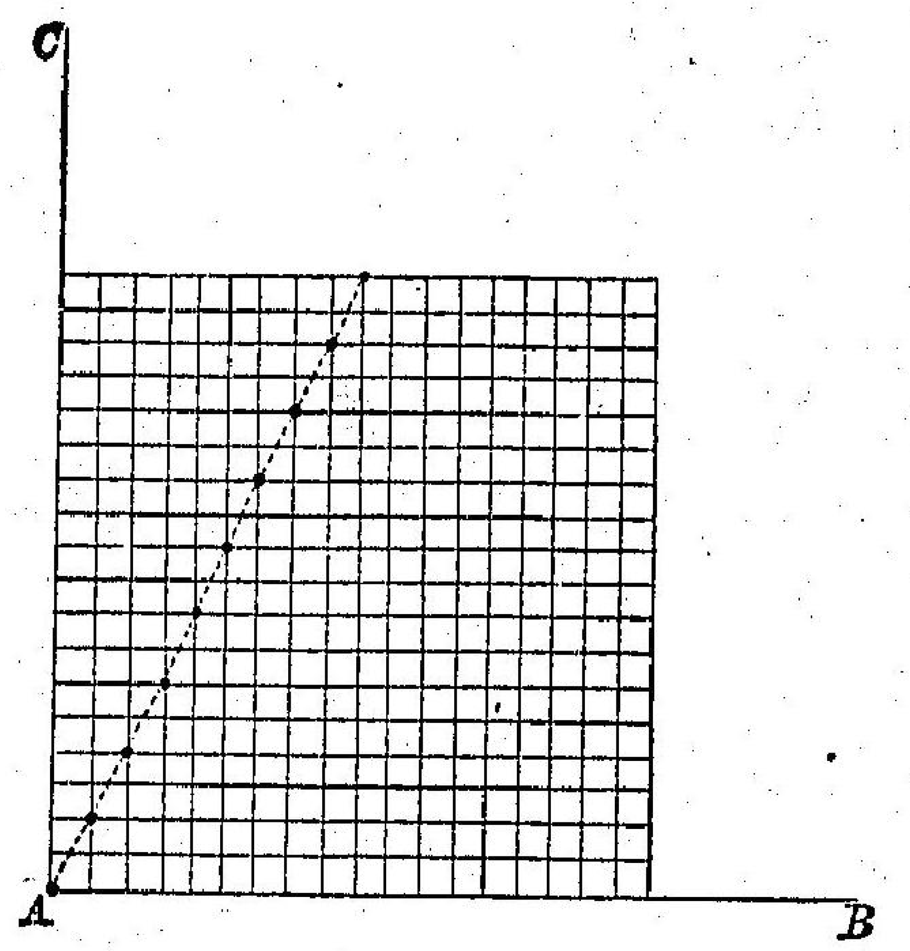
原點Aヨリ何如シテ此ニ至ルヤ

$AP = -3 + i.2$ナレバAヨリ橫軸上退步3ヲ為シ夫ヨリ進步2ヲ為シ此步ヲ反時計針狀ニ直角ヲ廻轉セシム可シ

今横線xト縱線yト確定ノ關係有リトセンxニ任意ノ値ヲ與フレバyノ値ハ之ニ由リテ定リxyノ此値ニ對スル點ヲ得xノ値ヲ變ズレバ點ノ位置モ從テ變ジxニ總テノ値ヲ與フレバ此ニ對スル諸點ハ連續シタル線ヲ爲ス斯ノ如キxyノ關係ヲ此曲線ノ軸。方。程。式。ト稱ス

例ヘバyハ常ニxノ二倍ナリ即$y=2x$ナリトセン之ニ對スル點Pニ至ル歩ハ$AP=x+i2x$ナリ今象限BACヲ兩軸ニ平行シタル直線ニ由リテ其邊長サノ單位ニ等シキ數多ノ正方形即單位方形ニ分ツ可シ然ルトキハ其横縱線右ノ關係ニ適ヘル諸點ヲ得ルヿ甚タ易シxヲ1、2、3、4等トスレバyハ2 4 6 8等ナリ故ニAB上ニ歩1ヲ取リ夫ヨリ左ヘ歩2ヲ爲シテ至ル點AB上ニ歩2ト左ヘ歩4 AB上ニ歩3ト左ヘ歩6 AB上ニ歩4ト左ヘ歩8 AB上ニ歩5ト左ヘ歩10ニテ至ル點等ノ諸點ハ皆此關係ニ適ヘリ而シテ此等ノ諸點ハ皆一直線上ニ在リ(第三編第五節)而シテAB上ニ幾許ノ歩ヲ爲スモ次テ其二倍ナル歩ヲ之ニ直角ニ爲ストキハ常ニ此直線上ノ一點ニ至ルxニ負値ヲ與フレバ此直線中第三象限$B'AC'$ニ在ル點ヲ得可シ故ニ$y=2x$ハAヲ經過スル一直線ノ方程式

第七十三



ナリ

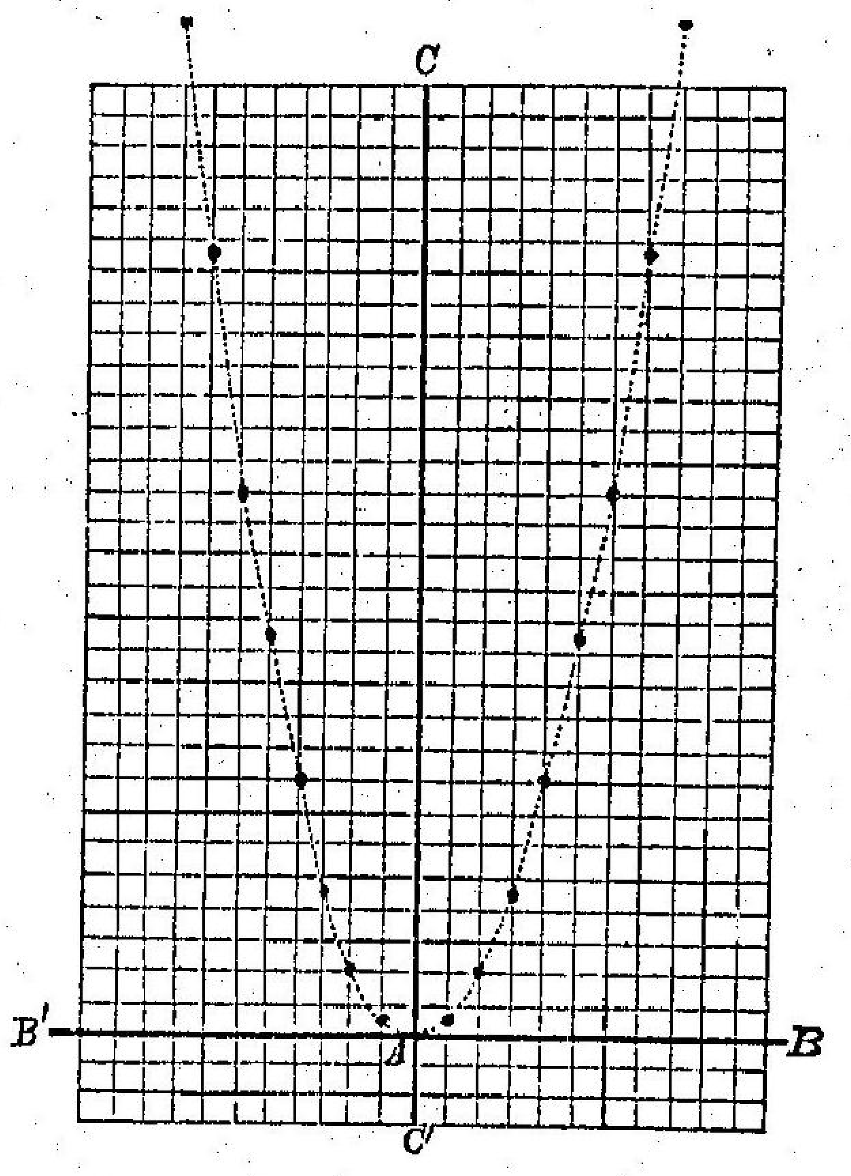
尚ホ一例ヲ取リテ之ヲ說明セン矩形ノ一邊ハy、一邊ハ長サ2ナル直線ニシテ其面積ハ常ニxノ上ニ畫ケル正方形ノ面積ニ等シト云フ此關係ヲ式ニ記スレバ $2y=x^2$ ナリAヨリ此關係ニ適ヘル諸點ニ至ル步ハ

$1+i.\frac{1}{2}$　$2+i.2$　$3+i.\frac{9}{2}$　$4+i.8$

$5+i.\frac{25}{2}$　$6+i.18$　等ナリ（xヲ1、2、3、4、5、6等トシテ得タルモノナリ）

平面上ニ前例ノ如ク單位方ヲ畫ケハ容易ニ此等ノ步ヲ爲ス可シ即第七十四圖象限BAC內ニ標シタル諸點ヲ得若シ又xニ負值-1 -2 -3 -4 -5 -6等ヲ與フルモyノ值ハ同一ナリ蓋シ$(-x)\times(-x)=x^2=(+x)\times(+x)$ナレバナリ吾輩ハ之ニ由リテ象限$B'AC$內ニ標シタル諸點ヲ得$BAB'$線ヨリ下ニハ此關係ニ適スル點有ル能ハザルナリ何トナレバxニ何如ナル值ヲ與フルモ之ヲ二乘スレバ必ズ正トナルヲ以テyハ決シテ負值ト爲ルコトナシ此關係ニ適セル諸點ハ抛物線ト稱シタル圓ノ影（第二編第八節）ナル曲線ヲ成スナリ故ニ $2y=x^2$ ハ一抛物線ノ方程式ナリ

第七十四



斯ノ如ク各象限ヲ單位方ニ分チタル紙上ニ點ヲ標シテ曲

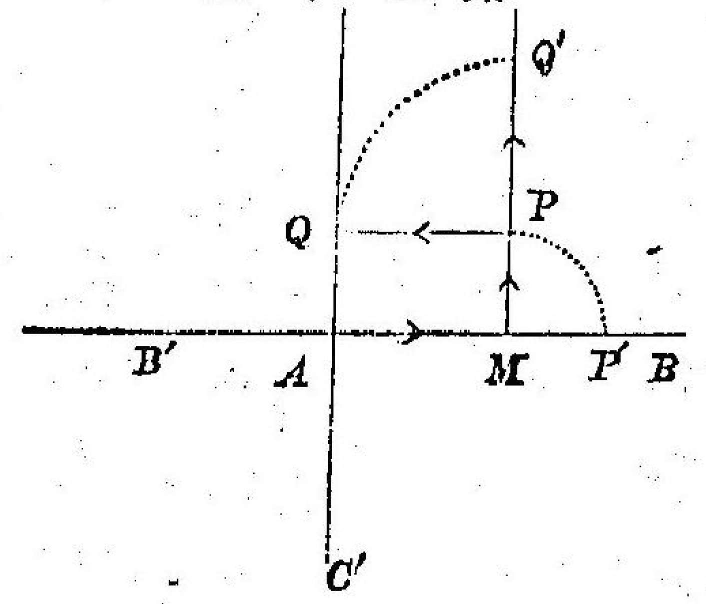
線ノ形ヲ得ル方法ハ甚有用ナルモノニシテ物理學上ノ研究ニ於テ大ニ用ユル所ナリ例ヘバx歩ハ時間ヲ表ハシy歩ハ晴雨計ノ水銀ノ高サヲ示スモノトセバ斯ク標シタル點ハ(少時間毎ニ之ヲ標セバ)曲線ノ形ヲ顯ハシ此曲線ハ其時限內晴雨計昇降ノ圖ナリ氣象圖表ニ載スルモノ即是ナリ而シテ現今ハ人ノ觀測ヲ要セズ機械ニ由リテ各瞬間時ノ昇降ヲ寫眞スル仕掛有リ

軸式ヨリシテ曲線ノ形ヲ畫クハ純正數學中甚面白キ一科ニシテ之ヲ曲線描畫法ト云フ○x、及yノ二次以上ヲ含マザル方程式ハ圓影ノ數曲線中ノ一ヲ表ハスモノナリ

第拾貳節 複數（コムプレックスナムバー）

吾輩ハ演算iノ意味ヲ今少シ精シク考ヘントスP點ヲ前ノ如ク$AM+i.MP$ヲ以テ表ハス可シ此記號ノ意ハAヨリAB線上Mマデ歩シMヨリ同線上P'マデ歩シ(但シMP'ハMPニ等シ)MP'ヲMヲ中心トシテ反時計針狀ニ直角ヲ廻轉セシム可シト云フナリ

第七十五



今MQ'ヲAP'ニ等シク取レバ$AM+i.MQ'$ハAヨリMマデ歩シMヨリAMニ直角ニ左ヘMQ'歩ヲ爲セト云フナリ然ルニ

$$MQ' = AP' = AM + MP' = MP + PQ'$$

ナレバPQ'ハAMニ等シ故ニ右ノ記號ヲ$AM+i(MP+PQ')$トシAM歩ノ次ニ之ニ直角ナル二歩ヲ續ケテ爲スモノトスルヲ得今此二歩ノ中第二

歩ヲ反時計針狀ニ直角ヲ廻轉セシメント欲セバ其前ニiヲ付ス可シ左レバ$MP+i.PQ'$ハ歩MPヲ爲シ次テ之ニ直角ニ左ヘPQ'ニ等シキ歩ヲ爲スノ意ナリ然ルニPQ'ハAMニ等シケレバ吾輩ハ之ニ由リテAC線上ニ在ル一點Qニ至ル而シテAヨリQニ至ル歩ハ單ニ　$0+i.AQ$　ト記ス可シ故ニ

$$0+i.AQ=AM+i.(MP+i.PQ)$$

$$=AM+i.MP+i.i.PQ$$

而シテ此式ニ於テ$\widehat{AQ\,AM}$ $\widehat{MP\,PQ}$ハ唯大サ(即其線中單位ノ數)ヲ表ハスモノナリ左スレバ　$AQ=MP$　$AM=PQ$　トスルヲ得

故ニ右ノ方程式ハ

$$0=AM+i.i.AM$$

即

$$-AM=i.i.AM$$

トナル是ニ由リテ之ヲ觀レバ演算iハ之ヲ二度續ケテ爲ス片ハ單ニ反轉スルニ同シ之ヲ式ニ記スレバ

$$-1=i^2$$

之ヲ言語ニ述ブレバ「一ツノ歩ヲ反時計針狀ニ直角ヲ廻轉セシメ復之ヲ反時計針狀ニ直角ヲ廻轉セシムルハ其歩ヲ反轉シタルト同一ノ結果ヲ生ズ」○今xノ二乘aニ等シケレバ之ヲaノ二乘根ト稱シ$\sqrt{a}$ト記ス然レバ$i^2=-1$ナルヲ以テ$i=\sqrt{-1}$ト記ス可シ

此記號ハ量トシテ考フル時ハ全ク意味無シ斯ノ如キ量ハ決シテ有ル能ハザルナリ何トナレバ何如ナル數ニテモ其

二乘ハ必ズ正數トナレバナリ此理由ヲ以テ或ハ$\sqrt{-1}$ヲ虛量、虛數ト稱ス然レ𪜈之ヲ演算ノ記號ト見做セバ判然タル意味有リ即單位歩進ミ之ヲ反時計針狀ニ直角ヲ廻轉セシムルノ演算ヲ表ハスモノナリ

$x+\sqrt{-1}\,y$ ノ如キ形ノ式ヲ稱シテ複數。（コムプレックス、ナムバー）ト云フ

Pヲ $AP=AM+\sqrt{-1}\,MP$ ニ由リテ示ス一點トス r、x、yヲ AP、AM、MP 中ニ在ル長サノ單位ノ數トス直角三角形 PAM ニ由リテ $r^2=x^2+y^2$ ヲ得 r ヲ複數 $x+\sqrt{-1}\,y$ ノ modulus（モデュラス）ト名ク

又 MAP 角中ニ在ル單位角ノ數ヲ θ トス然レバ

$$\sin\theta=\frac{PM}{AP}=\frac{y}{r}\qquad\cos\theta=\frac{AM}{AP}=\frac{x}{r}$$

即

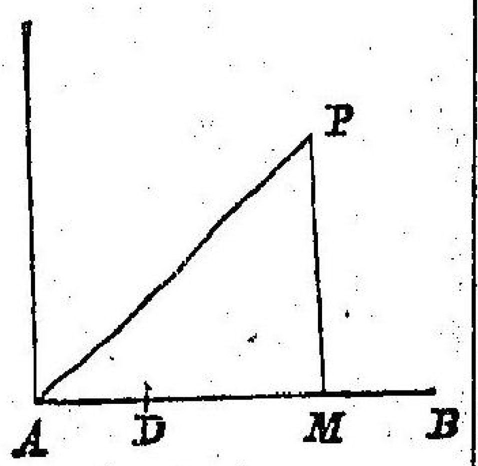
$$y=r\sin\theta\qquad x=r\cos\theta$$

θ 角ヲ複數ノ argument（アーギュメント）ト云フ此 r、θ ハ P ノ極式ナリ吾輩ハ之ニ由リテ以テ同一點ノ軸式ト極式トノ關係ヲ得即極式ハ横縱線ヲ以テ成ス複數ノ「モヂュラス」及「アーギュメント」ナリ r ハ唯數ナレバ複數 $x+\sqrt{-1}\,y$ ヲ $r(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)$ 即「モデュラス」r ト演算者（オペレートル）$\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta$ ノ積トシテ記スルヲ得此演算者ハ唯「アーギュメント」θ ニ關スルモノナリ斯ク記スレバ歩 AP 即 $r(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)$ ハ單位長ノ線ヲ AB ヨリ θ 角ヲ反時計針狀ニ廻轉セシメ之ヲ $r:1$ ノ比ニ引延シタルモノト見做スヲ得引延シハ「モデュラス」r ノ表ハス所、廻轉ハ演算者 $(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)$ ノ表ハス所ナリ AD ヲ AB 線上ニ在ル單位長トセバ

$$AP=r\cdot(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)\cdot AD$$

ト記シ複數ハ單位歩 AD ニ二ツノ演算ヲ行フヲ表ハスモノト見做スヲ得

第七十六



斯ク吾輩ハ本節ニ於テ位置ヲ示ス複數ノ思想ヨリシテ遂ニ $\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta$ ナル記號ヲ以テ表ハス一ノ新演算ヲ得タリ此記號ハ最初ノ記號 i ヲ概括シタルモノナリ何トナレバ $\sqrt{-1}$ ハ歩ヲ反時計針狀ニ直、角、ヲ廻轉セシムル演算ヲ表ハシ $\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta$ ハ任、意、角、θ、ヲ廻轉セシムルモノナレバナリ○吾輩ハ此新思想ハ極メテ重大ナル結果ヲ生ズルヲ見ル可シ

第拾三節　歩ヲ廻轉セシムル演算

今演算 $\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta$ ヲ二度續ケテ單位歩ニ行フトセヨ此記號ハ

$$(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)$$

即

$$(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)^2$$

ナリ而シテ歩ヲ θ 角ヲ廻轉シ又續ケテ θ 角ヲ廻轉セシムルハ一度ニ 2θ 角ヲ廻轉セシムルニ同ジ即演算 $(\cos 2\theta+\sqrt{-1}\sin 2\theta)$ ヲ行フニ同ジ由リテ左ノ方程式ヲ得

$$(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)^2=(\cos 2\theta+\sqrt{-1}\sin 2\theta)$$

又之ト同ジク續ケテ n 度 θ 角ヲ廻轉セシムルハ一度ニ $n\theta$ 角ヲ廻轉セシムルニ同ジ即

$$(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)^n=(\cos n\theta+\sqrt{-1}\sin n\theta)$$

此二演算ノ相等シキヲ初メテ右ノ如ク方程式ヲ以テ述ベタルハ佛人 De Moivre（ドモアーブル）氏一千七百年ニシテ之ヲ「ドモアーブル」ノ定理ト名ク（比ノ八ナリ）

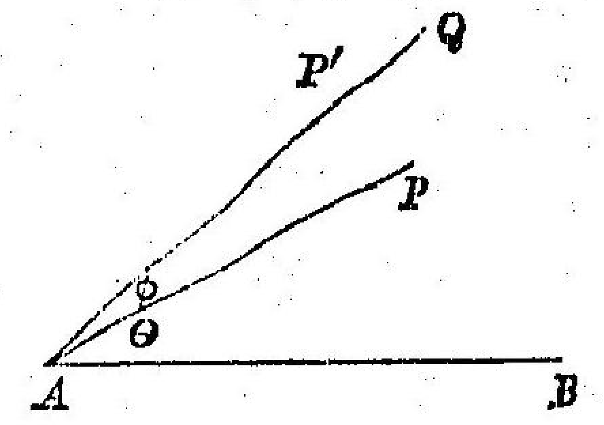
吾輩ハ今歩 AP ヲ變ジテ歩 AQ ト爲ス演算ヲ得ントス先ツ AP ヲ反時計針狀ニ A ヲ中心トシテ AQ 線ト合フマデ廻轉セシメザル可カラズ然ル片ハ P 點ハ AQ 線中ノ一點 P' 點ト合ス AP' ハ AP ニ等シ故ニ今此歩ヲ引延シテ AQ ト爲サヽル可カラズ即之ニ AQ ト AP'（或ハ AP）ノ比ナル ρ ヲ乘ゼザル可カラズ之ヲ記號ニ記セバ PAQ 角ヲ ϕ トシテ

$$(\cos\phi + \sqrt{-1}\,\sin\phi)\,AP = AP'$$

$$\rho.(\cos\phi + \sqrt{-1}\,\sin\phi).\,AP = \rho.\,AP' = AQ$$

吾輩ハ此方程式ニ種々ノ見解ヲ下スヲ得即左ノ如シ

第七十七



（甲）$\rho(\cos\phi + \sqrt{-1}\,\sin\phi)$ ハ複數ニシテ其「モデュラス」ハ ρ「アーギュメント」ハ ϕ ナリ故ニ一ツノ歩ニ複數ヲ乘ズルハ之ヲ其「アーギュメント」ニ等シキ角ヲ廻轉セシメ其「モデュラス」ヲ以テ表ハス引延シヲ行フナリ

（乙）或ハ歩 AP ヲ複數 $x + \sqrt{-1}\,y$ ト見做ス可シ r ヲ AP ノ長サ θ ヲ BAP 角トセバ $AP = r(\cos\theta + \sqrt{-1}\,\sin\theta)$ トスルヲ得 AQ モ亦複數ニシテ其長サ（$\rho.AP' = \rho r$）ハ其「モデュラス」ナリ BAQ 角即 $\theta + \phi$ ハ其「アーギュメント」ナリ故ニ右ノ方程式ハ

$$\rho(\cos\phi+\sqrt{-1}\sin\phi)\cdot r(\cos\theta+\sqrt{-1}\sin\theta)=$$
$$\rho r\cdot(\cos\overline{\theta+\phi}+\sqrt{-1}\sin\overline{\theta+\phi})$$

トス可シ而シテ此方程式ニ二様ノ解ヲ下ス可シ

第一、二複數ノ積モ亦複數ニシテ其「モデュラス」ハ二「モデュラス」ノ積、其「アーギュメント」ハ二「アーギュメント」ノ和ナリ

第二、單位歩ヲθ角ヲ廻轉セシメ之ニ引延シrヲ行ヒ又之ヲϕ角ヲ廻轉セシメ引延シρヲ行フハ單位歩ヲ$\theta+\phi$角ヲ廻轉セシメ之ニ引延シρrヲ行フニ同ジ

(丙) 吾輩ハ右ノ方程式ニ由リテ二ツノ方向ヲ定メタル歩AQ、APノ比ハ何ナルヤ即(第壹編第拾四節)$\frac{AQ}{AP}$トハ何如ナルモノヲ表ハスヤノ問ニ答フルヲ得AP、AQノ如ク大サ方向、及矢先ノ向キ定リタル歩ハ即「ヴェクトル」ナリ故ニ此問ハ二「ヴェクトル」ノ比ハ何ナルヤ即一「ヴェクトル」ヲ變ジテ他ノ「ヴェクトル」ト爲ス演算ハ何ナルヤト問フナリ答テ曰ク廻轉ト引延シトノ積ナル一演算ナリト引延シハAQノ長サ即「スケーラー」値トAPノ長サ即「スケーラー」値トノ比ニシテ方向ニ關係ナケレバ「スケーラー」演算ナリ廻轉ハAPノ方向ヲAQノ方向ニ變ズルモノニシテ紙面(AP、AQ共ニ紙面ニ在ルモノトス)ニ直角ナル直線ヲ恰モ車軸トシAPヲ其幅トシテ廻轉スルナリ故ニAPヲAQニ變ズル演算ノ一部分ハ或ル軸ヲ繞リ或ル角丈ケ反時計針狀ニ廻轉セシムルナリ廻轉ノ大サハ軸上ニ取リタル歩ヲ以テ之ヲ表ハス可シ例ヘバ6單位角ヲ廻轉セシメタルトキハ軸上ニ

長サノ單位6ヲ度リ以テ之ヲ表ハス可シ又廻轉反時計針狀ナレバ歩ヲ紙面ヨリ上ノ方ヘ度リ時計針狀ナレバ紙面ヨリ下ノ方ヘ度リ以テ廻轉ノ向キヲ表ハス可シ斯ク廻轉ハ大サ「方向」及矢先ノ向キ有ル歩即「ヴェクトル」ヲ以テ之ヲ表ハスヲ得

然レバ二「ヴェクトル」ノ比ハ一ツノ「スケーラー」ト一ツノ「ヴェクトル」ノ積ヨリ成ル演算ナリ是レソルウヰルリヤム「ハミルトン」ノQuaternion（クワテルニオン）ト名ケタルモノニシテ氏ノ有名ナル四元法ノ基ナリ

故ニ「クワテルニオン」ノ本性ハ一「ヴェクトル」歩ヲ變シテ他ノ「ヴェクトル」歩トナス演算ナリ而シテ廻轉ト引延シニ由リテ

之ヲ為スヿハ右ニ述タル所ニ由リテ詳ナラン

註「此」ニ引延シトシタルハ壓縮メヲモ併セテ稱シタルモノニシテ總テ一ノ「スケーラー」比ヲ以テ乘ズルヲ云フナリ

第拾四節　廻轉ト歩ノ對數狀ノ增長トノ關係

吾輩ハ單位半徑ノ圓ヲ取リ其半徑單位角ヲ廻轉スル間ニ何程增長スルヤヲ見ントス○吾輩ハ是マデ唯「スケーラー」增長ノミヲ論ジタレバ或ハ圓ノ半徑中心ヲ繞リテ廻轉スル時ニハ少シモ增長セズト思フモノモ有ル可シ然レ氏「ヴェクトル」ノ加法ヲ考フレバ增、長、ノ意義モ亦擴張ス可キヿ明ナリ歩 AP (第七十八圖) A ヲ繞リテ PAQ 角ヲ廻轉スル間ニ AQ ト

成リタリトセヨ然レバAQ上ニAP'ヲAPニ等シク取レバ$P'Q$ハAPノ「スケーラー」增長ナリ即其長サノ增長ナリ然レ圧APヲ「ヴェクトル」トスレバ$AQ = AP + PQ$（第四編第三節）ナレバAPヲAQト爲スニハ「ヴェクトル」PQヲ加フルヲ要ス故ニ

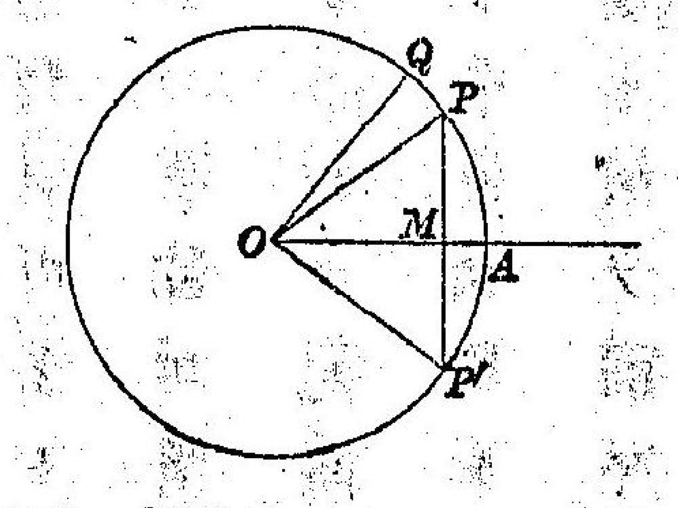
第七十八

PQハAPノ「ヴェクトル」增長ト稱ス可シPP'ヲ結ヒ付ケレバPQハPP'ト$P'Q$ノ和ニ等シ今PAP'角ヲ極メテ小ニスレバPP'ハ極限ニ於テハAPニ直角ナリ故ニ增長PQノ此部分ハ$\sqrt{-1}\,PP'$ヲ以テ表ハス可シ由リテ廻轉スル線ニ直角ナル增長ハ「スケーラー」量ノ前ニ$\sqrt{-1}$ヲ付シタルモノヲ以テ表ハス可シ」

今單位半徑ノ圓ニ付テ之ヲ考フ可シOP（第七十九圖）ハ定半

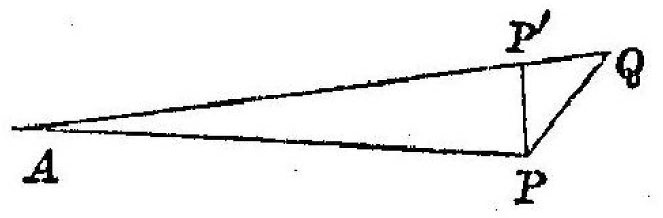
徑OAヨリθ角ヲ廻轉シタル半徑ナリOQハOPニ接近シタル動徑ノ位置ニシテPOQハ極メテ小角ナリ然レバPQハ極小弧ニシテ殆ト直線ナリ而シテPQ線ハOPニ直角ナリト見做スヲ得故ニPQヲ得ルニハOPニ直角ニ歩PQヲ爲サヾル可カラズ此歩ヲ表ハスニ$\sqrt{-1}\,PQ$ヲ以

第七十九



テス可シPQハ半徑トPOQ角ノ積（第三編第拾四節）ニシテ圓ノ半徑1ナレバPQノ長サヲ表ハス數ハPOQ角ノ大サヲ表ハス數ニ同シ即OPノ增長ハ$\sqrt{-1} \times \angle POQ$トス可シ然レバ$OP$ノ增長ハ其廻轉シタル角ニ$\sqrt{-1}$ヲ乘シタルモノナリ$OP$ハ其$O$ヲ中心トシテ廻轉スル際常ニ同シ長サナレハ等シク角ヲ

第七十八



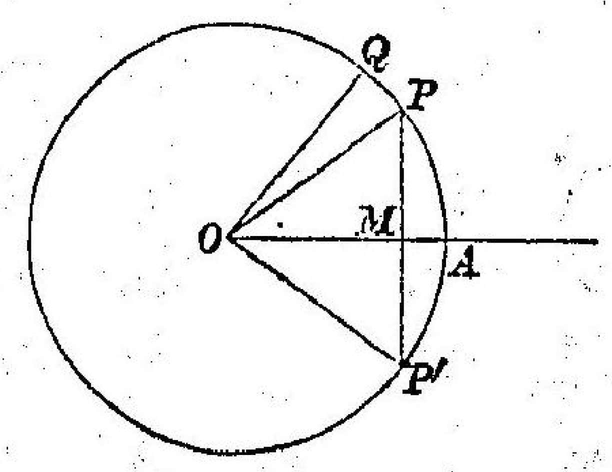
成リタリトセヨ然レバAQ上ニAP'ヲAPニ等シク取レバ$P'Q$ハAPノ「スケーラー」増長ナリ即其長サノ増長ナリ然レ圧APヲ「ヴェクトル」トスレバ

$$AQ = AP + PQ$$

(第四編第三節)ナレバAPヲAQト為スニハ「ヴェクトル」PQヲ加フルヲ要ス故ニPQハAPノ「ヴェクトル」増長ト稱ス可シPP'ヲ結ビ付ケレバPQハPP'ト$P'Q$ノ和ニ等シ今PAP'角ヲ極メテ小ニスレバPP'ハ極限ニ於テハAPニ直角ナリ故ニ増長PQノ此部分ハ$\sqrt{-1}\,PP'$ヲ以テ表ハス可シ由リテ廻轉スル線ニ直角ナル増長ハ「スケーラー」量ノ前ニ$\sqrt{-1}$ヲ付シタルモノヲ以テ表ハス可シ」

今單位半徑ノ圓ニ付テ之ヲ考フ可シOP(第七十九圖)ハ定半

第七十九



徑OAヨリθ角ヲ廻轉シタル半徑ナリOQハOPニ接近シタル動徑ノ位置ニシテPOQハ極メテ小角ナリ然レバPQハ極小弧ニシテ殆ト直線ナリ而シテPQ線ハOPニ直角ナリト見做スヲ得故ニPQヲ得ルニハOPニ直角ニ歩PQヲ為サヾル可カラズ此歩ヲ表ハスニ$\sqrt{-1}\,PQ$ヲ以テス可シPQハ半徑トPOQ角ノ積(第三編第拾四節)ニシテ圓ノ半徑1ナレバPQノ長サヲ表ハス數ハPOQ角ノ大サヲ表ハス數ニ同ジ即OPノ増長ハ$\sqrt{-1} \times \angle POQ$トス可シ然レバ$OP$ノ増長ハ其廻轉シタル角ニ$\sqrt{-1}$ヲ乘ジタルモノナリ$OP$ハ其$O$ヲ中心トシテ廻轉スル際常ニ同ジ長サナレハ等シク角ヲ

描ク間ニ等シク乘ゼラル(即常ニ1ヲ以テ乘ゼラル)故ニ對數狀ノ增長ノ定義ニ適ヘリ(本編第拾節ヲ見ヨ但シ第拾節ノ增長ハ唯長サノ增長此ニ云フ增長ハ「ヴェクトル」增長ナレバ異ナレリ讀者善ク意義ノ擴張シタルニ注意シテ見ル可シ)此時ニ於テ其單位角ニ付テノ割合ハ何程ナルヤ

此割合ハ單位角ヲ廻轉スル間ノ增長ト其元値トノ比ヲ以テ之ヲ計ル然ルニPOQ角ヲ廻轉スル間ニPQ即$\sqrt{-1} \times POQ$ナレバ單位角ヲ廻轉スル間ニハ$\frac{PQ}{POQ} = \frac{\sqrt{-1}.POQ}{POQ} = \sqrt{-1}$ナリ而シテ元値ハ1ナレバ對數狀ノ割合ハ$\sqrt{-1}$ナリ故ニOPヲ單位角ヲ廻轉セシメタル結果ハ$e^{\sqrt{-1}}$ナル記號ヲ以テ表ハスヲ得然レバ半徑ヲθ角ヲ廻轉セシメタル結果ハ$e^{\sqrt{-1}\theta}$ナリ

即

$$OP = OA.e^{\sqrt{-1}\theta}$$

ト記スルヲ得PMヲOAニ直角ニ垂レ之ヲ引長シテ再ビ圓トP′ニ於テ交ラシム然レバ$MP = MP'$ナルコト明ナリ又

$$OP = OM + \sqrt{-1}\,MP$$

$$OP' = OM - \sqrt{-1}\,MP'$$

今OP OP′ハ何レモ其長サ1ナレバ

$$\cos\theta = \frac{OM}{OP} = OM \qquad \sin\theta = \frac{MP}{OP} = MP$$

又MOP′角ハMOP角ニ等シクシテOAヨリ下ヘ度リタル角ナレバ$-\theta$トス可シ故ニ

$$OP' = OA.e^{-\sqrt{-1}\theta}$$

トセザル可カラズ故ニ右ノ諸式ニ由リテ

$$\left.\begin{aligned} e^{\sqrt{-1}\theta} &= \cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta \\ e^{-\sqrt{-1}\theta} &= \cos\theta - \sqrt{-1}\sin\theta \end{aligned}\right\}(甲)$$

ヲ得又

$$OP - OP' = 2\sqrt{-1}\,MP$$
$$OP + OP' = 2OM$$

ナレハ

$$\left.\begin{aligned} e^{\sqrt{-1}\theta} - e^{-\sqrt{-1}\theta} &= 2\sqrt{-1}\sin\theta \\ e^{\sqrt{-1}\theta} + e^{-\sqrt{-1}\theta} &= 2\cos\theta \end{aligned}\right\}(乙)$$

ヲ得

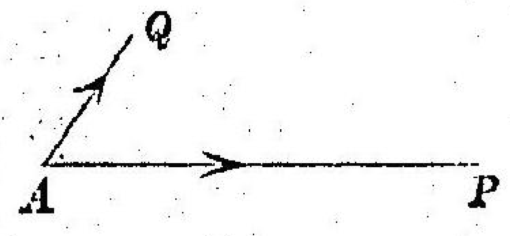
$\cos\theta$ 及 $\sin\theta$ ヲ斯ク e ヲ以テ表ハシタルハ Euler(オイラー)氏ノ發見ナリ(乙)式ノ如ク記シテ $\cos\theta$ 及 $\sin\theta$ ヲ單ニ數ノ比ト見

做ストキハ意味無キ式ナリ然レトモ(甲)式ノ如ク記シ其兩邊ヲ演算ノ記號ト見做ストキハ確定明白ナル意味有リ即其右邊 $\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta$ ハ歩ノ長サヲ變ゼズシテ θ 角ヲ廻轉セシムルナリ其左邊 $e^{\sqrt{-1}\theta}$ ハ同歩ヲ θ 角ヲ廻轉セシメ其際自己ニ直角、ニ對數狀ノ割合 $\sqrt{-1}$ ヲ以テ增長セシムルナリ而シテ此二演算ハ同一ノ結果ヲ生ズ

第拾五節　「ヴェクトル」ノ乘法

吾輩ハ「ヴェクトル」ノ加法ヲ論ジ和ハ加フルノ順序ニ關セザルコトヲ證シタリ又二「ヴェクトル」ノ比ハ何如ナル演算ヲ表ハスモノナルカヲ査シタリ此ニ於テ讀者ハ必ズ二「ヴェクトル」ノ積ハ何ヲ表ハサシム可キヤト問フナラン

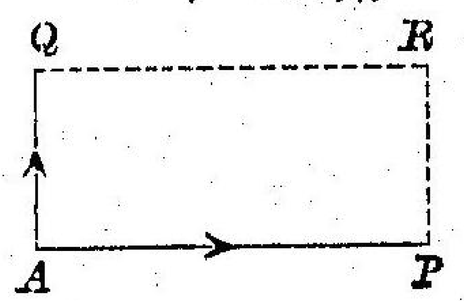
若シ二「ヴェクトル」ヲ兩ナガラ複數或ハ演算ト見做ス𪜈ハ其積モ亦一ッノ複數或ハ演算ト見做ス可キヿハ已ニ說明シタリ(第拾三節(乙)) 又二「ヴェクトル」ノ一ハ演算ヲ表ハシ一ハ位置ヲ示ス步ヲ表ハストスレバ其積ハ此步ヲ或ル角ヲ廻轉セシメ或ル比ニ引延シヲ行フヲ示スナリ(第拾三節(甲)) 然レ𪜈兩ナガラ位置ヲ示ス步ナル時ハ其積ハ何ナルカハ未ダ論ゼザル所ナリ」



第八十

AP AQ ヲ二ッノ步トセン其積 $AP.AQ$ ハ何ヲ表ハスヤ $AP \frown AQ$ 唯「スケーラー」量ナレバ其積モ亦「スケーラー」ニシテ吾輩ハ其何タルヲ解スルニ困マズ然レ𪜈 $AP \frown AQ$ 啻ニ大サノミナラズ又方向アルモノトセバ其積ノ意義ハ直ニ見ル可カラズ

若シ $AQ \frown AP$ ニ直角ナレバ(第八十一圖)吾輩ハ其積 $AP.AQ$ ヲ $AP \frown AQ$ ヲ邊トシタル矩形即 $QAPR$ ノ面積ト見做ス可キハ自然ノ理ナリ今此積ハ何如ニシテ生ジタルカヲ考フルニ步 AQ ヲ常ニ自己ニ平行ニ且其一端 A ハ常ニ步 AP 上ニ有ル樣ニ動カス𪜈ハ其一端ノ A ヨリ P ニ至ル間ニ步 AQ ハ矩形ノ面積ヲ描ク



第八十一

故ニ AP AQ 直角ヲ成ス𪜈ハ其積ヲ左ノ如ク解ス可シ

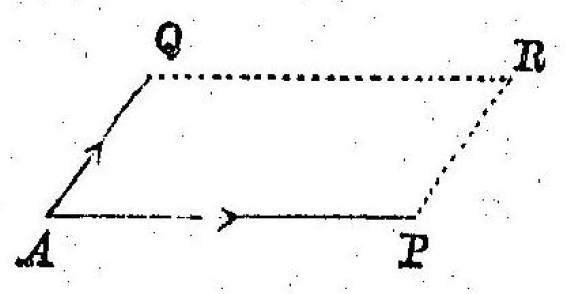
積 $AP.AQ$ ハ步 AQ ヲ其一端ハ步 AP ヲ經過スルト共ニ常ニ自己ニ平行ニ動カスヲ示シ此運動中 AQ ノ描ク所ノ面積ハ即積 $AP.AQ$ ノ値ナリ

右ノ解釋ハ AP ト AQ ト直角ナル場合ニ由リテ起リ來レルモ

ノナレ𪜈強テ其直角ナルヲ必要トスルモノニ非ラズ其角ノ何タルモ應用シテ差支無キ解釋ナリQAP角直角ナラザレバ其面積ハ矩形ニ非ラズシテ斜平行方形ナルノミ故ニ右ニ揭ゲタル解釋ハ何如ナル場合ニ於テモ二歩ノ積ニ下シテ可ナルモノナリ

然レ𪜈此ニ一ツノ困難有リ面積ハ方向有ル量ニシテ其方向ハ吾輩其周圍ヲ繞ル方法何如ニ由ル（第三編第拾壹節）面積$QAPR$ハ吾輩其周圍ヲ反時計針狀ニ繞ル片ハ正量ナリ之ヲ言ヒ換レバ積ノ第一歩ノ方向即第二歩ノ運動ノ方向ニ繞ル片ハ正量ナリ

第八十二



故ニ積$AP.AQ$ハ面積$QAPR$ヲ歩APノ方向ニ從テ取リタルモノヲ表ハスナリ積$AQ.AP$ハAPヲ常ニ自己ニ平行ニAヨリQニ至ラシメ以テ生ズル所ノ積ナレバ同ジクAQ APヲ邊トセル平行方形ノ面積ナレ𪜈之ヲ歩AQノ方向ニ從テ取リタルモノ即面積$PAQR$ナリ

面積ノ正負ニ關スル契約ニ由リテ

$$PAQR = -QAPR$$

即

$$AQ.AP = -AP.AQ$$

然レバ右ノ解釋ニ由ル片ハ二「ヴェクトル」ノ積ハ互換定則ニ遵ハズ

若シQAP角零ト成リ歩AQトAPト同一ト成ルトセバ平行方形ノ面積モ亦零ト成ル故ニ「ヴェクトル」ヲ自乘スレバ積ハ零ナ

リ即

$$AP.AP=(AP)^2=0$$

今數「ヴェクトル」歩 α β γ δ 等有リトセバ互ニ左ノ如キ關係ヲ有テリ

$$\alpha^2=0\quad\beta^2=0\quad\gamma^2=0\quad\delta^2=0\quad 等$$

$$\alpha\beta=-\beta\alpha\quad\alpha\gamma=-\gamma\alpha\quad\beta\gamma=-\gamma\beta\quad\delta\gamma=-\gamma\delta\quad 等$$

相互ニ右ノ如キ關係ヲ有スル量ハ獨乙數學者グラッスマンノ初メテ用ヰタル所ニシテ氏ハ是等ノ量ニ alternate（オルテルネート） unit（ユーニツト）ノ名稱ヲ與ヘタリ

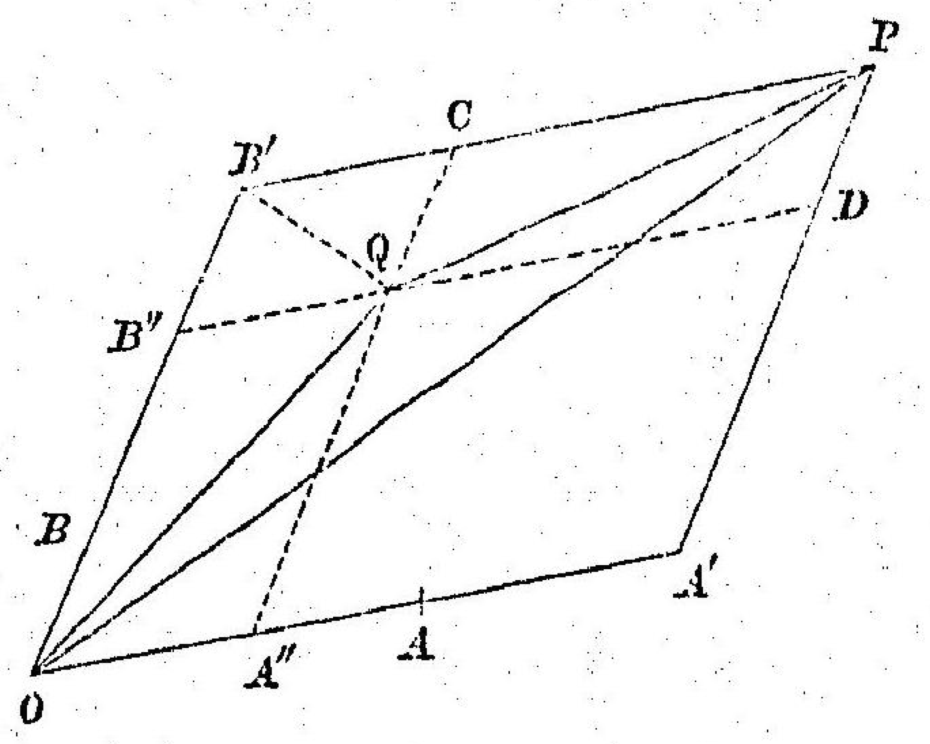
讀者ノ看ラルヽ如ク「オルテルネート」「ユーニット」ハ尋常ノ代數學ト異リタル自己特別ノ代數學有リ互換定則ハ此ニ行

ハレズ之ニ代ユルニ左ノ定則ヲ以テセザル可カラズ「積ノ正負ハ因數ノ更迭ニ從テ更迭ス」○是ニ於テ讀者ハ是マデ總テ何如ナル量ニテモ必ズ適應シ決シテ變ズ可カラザル自然ノ理ナリトシテ毫モ疑ハザリシ算術ノ規則ハ唯一小部分タル「スケーラー」量ニノミ適應ス可キモノナルヿヲ發見スルナラン此等ノ規則ハ自然ノ理ニ非ラズ唯吾輩ノ契約ニ過キズ漸々吾輩ノ用ヰル記號ノ意義ヲ擴ムルニ於テハ或ハ之ヲ擲棄テザル可カラズ

例ヘバ $2\times2=0$ 及 $2\times3=-3\times2$ ノ如キハ 2、3 ヲ唯數ト見做セバ純然タル譌言ナレ𪜈之ヲ一平面上方向ノ定リタル歩ト見做セバ眞ノ正理ナリ

今二ツノ「オルテルネート、ユーニット」α、β ヲ取リ $a\alpha + b\beta$ ハ何ヲ表ハスカヲ見シ但 a、b ハ唯「スケーラー」大サナリ若シ OA ヲ「ヴェクトル」α トセバ $a\alpha$ ハ OA ヲ OA' マデ 1 ト a ノ比ニ引延シ

第八十三



タルモノナリ又 OB 即 β ニ引延シ b ヲ行フテ OB' ヲ得 $A'P$ ヲ OB' ニ等シトスレバ「ヴェクトル」OP ハ即チ $a\alpha + b\beta$ ヲ表ハス斯ノ如キ量ヲ「オルテルネート、ナムバー」ト稱ス今同方法ニ由リテ得タル他ノ二「オルテルネート、ナムバー」$a'\alpha + b'\beta$ ヲ取リ OQ ヲ以テ之ヲ表ハスベシ此二者ヲ相乘シタル積ヲ determinant（デ、ルミナント）

ト稱ス蓋シ是ハ二ツニ限リタルニ非ラズ三ツノ「オルテルネート、ユーニット」(例ヘバ $\alpha\ \beta\ \gamma$)ヲ以テ三ツノ「オルテルネート、ナムバー」(各 $a\alpha + b\beta + c\gamma$ ノ如キ形)ヲ作リ之ヲ相乘シタルモノモ亦「デ、ルミナント」ナリ總テ「オルテルネート、ユーニット」若干ヲ以テ同數ノ「オルテルネート、ナムバー」ヲ作リ之ヲ相乘ジタルモノヲ「デ、ルミナント」ト稱ス「デ、ルミナント」ハ現今ノ數學ニ於テ甚多ク用ヰル所ナリ吾輩ハ此ニ唯二ツノ「オルテルネート、ユーニット」ヨリ成ル「デ、ルミナント」ニ付テ少シク說明セントス此等ノ「デ、ルミナント」ハ積 $OP.OQ$ ヲ以テ表ハス可シ而シテ此積ハ OP、OQ ヲ邊トセル平行方形ノ面積ニ等シ即二倍三角形 QOP ニ等シ Q ヲ過リ OB ニ平行ニ CQA''

ヲ引キ又OAニ平行ニDQB''ヲ引ク可シ然レバ $OA''=a'\alpha$
及 $OB''=b'\beta$ ナリ$B'Q$ヲ結ヒ付ケヨ然レバ二倍三角形$B'QP$
ハ平行方形$B''P$ニ等シ雙方ヘ平行方形$A'B''$ヲ加フレバ平行方
形$A'B''$及二倍三角形$B'QP$ハ合セテ平行方形$B'A'$ニ等シ即二倍三
角形$B'OP$ニ等シ而シテ$B'OP$ハ三ツノ三角形OQB'、$B'QP$及OPQノ和ニ等シ
故ニ平行方形$A'B''$ハ二倍三角形OPQト二倍三角形OQB'ヲ合セタ
ルモノニ等シ而シテ二倍三角形OQB'ハ平行方形$B'A''$ニ等シ故
ニ平行方形$A'B''$ト$B'A''$トノ差ハ二倍三角形OPQニ等シ平行方形
$A'B''$ハ平行方形ABヨリ其二邊ニ平行ニ引延シa及b'ヲ行フ
テ得タルモノナリ即面積ABノab'倍ナリ又之ト同ジク$B'A''$ハ
面積ABノba'倍ナリ面積ABハ$\alpha\beta$ナリ故ニ

$$OP.OQ = A'B'' - B'A''$$

ヲ得タルヲ變化シテ

$$(a\alpha + b\beta)(a'\alpha + b'\beta) = (ab' - ba')\alpha.\beta$$

ト記ス可シ之ヲ言語ニ述レバ「デヽルミナント」ハ二ツノ「オル
テル子ート」「ユーニツト」ヲ邊トセル平行方形ヲ $1 : ab' - ba'$ ノ
比ニ大クシタルモノニ等シ若シ $ab' - ba' = 0$ 即 $a/b = a'/b'$
ナレバ「デヽルミナント」ハ零ナルヿ明白ナリ此時ニ於テハ
PトQハOヲ過ル同一直線上ニ在リ（同形三角形ノ性質ニ由リテ）故ニ「デ
ヽルミナント」$OP.OQ$零ナルハ固ヨリ然ル可キナリ
讀者ハ三ツノ「オルテル子ート」「ユーニツト」ヲ以テ成ル「デヽルミ
ナント」ニ付テ同樣ノ性質ヲ得ルヿ難カラザル可シ但シ此

場合ニ於テハ體積ノ關係ヲ得可キナリ

吾輩ハ本節ニ於テ二ツノ「ヴェクトル」ノ積ノ正當ナル解釋ヲ得タリ其積ハ即面積ナリ故ニ又（第三編第拾壹節）二歩ヲ含メル平面ニ直角ナル「ヴェクトル」ナリ

第拾六節　二「ヴェクトル」ノ積ノ異解

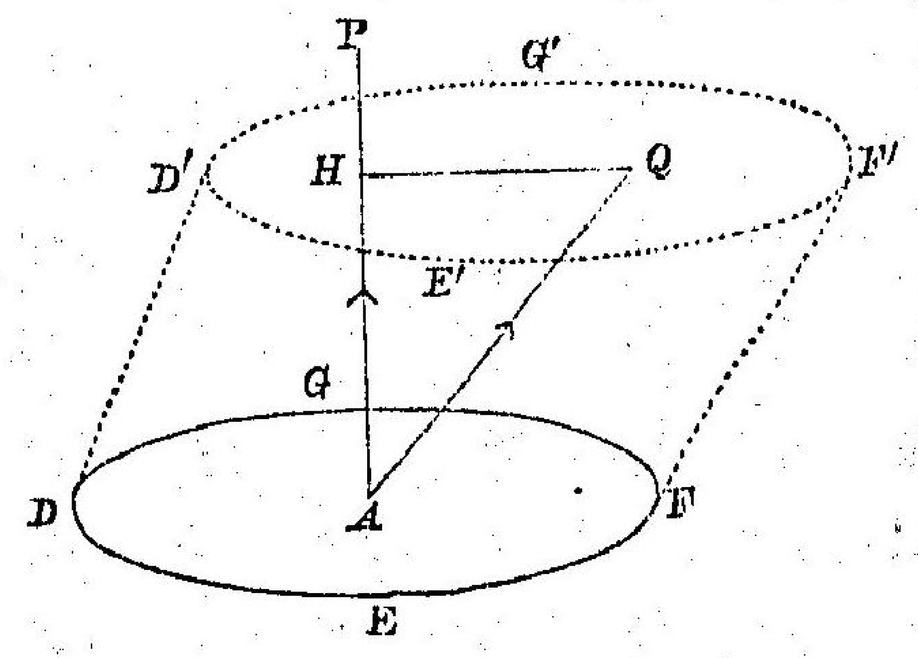
此ニ讀者ノ注意ヲ要スルコト有リ前節ノ結果ハ全ク吾輩ノ契約ヨリ生シ來レルモノナリ吾輩ハ「ヴェクトル」ノ積ハ一ツノ平行方形ノ面積ヲ表ハストノ見解ヲ下シタルニ由リテ以テ得タル所ノ斷定ナリ此契約ニ遵ヒ此見解ヲ下ス間ハ「ヴェクトル」乘法ニ付テ斷定シタル所眞正ナリ然レ𪜈原來契約ニ基ケルモノナレバ若シ之ト異レル契約ヲ為サバ異ナレ

ル結果ヲ得可シ故ニ吾輩ハ此ニ一ツノ異ナレル契約ヲ為シ其結果ノ何如ヲ討究スルハ極メテ有益ノ事ト信ス蓋先ニ云ヘル如ク精密學科ノ本源ノ公理ト稱スルモノハ普及ノ眞理ニ基ケル如ク考フルハ誤リニシテ契約ニ出タルモノナルコトヲ明白ニスレバナリ

今積 $AP.AQ$ ニ左ノ見解ヲ下ス可シ

歩 AP ハ面積 $DEFG$ ヲ表ハスモノトス此面積ハ AP ニ直角ナリ歩 AQ 常ニ自己ニ平行ニ動キ其端 A ハ面積 $DEFG$ 中ノ各點ニ至ルトセバ AQ ノ經過シタル場所ハ一ツノ斜壔ニシテ平行面 $D'F'G'\ D'E'F'G'$ ノ間ニ在リ此斜壔ノ體積ヲ積 $AP.AQ$ ノ表ハス所ナリトスルモ亦一ツノ見解ナリ斜壔ノ體積ハ底面

第八十四



ト高サ AH ノ積ナリ $r\ \rho$ ヲ $AP \frown AQ$ ノ大サト

ス（$r\ \rho$ ハ「スケーラー」量ナリ）θ ヲ PAQ 角ノ大サトス

然レバ $AH = \rho \cos\theta$ ニシテ體積

$AP \cdot AQ = r\,\rho \cos\theta$ ナリ（r ハ AP ノ大サナレバ底面積中ノ單位方ノ數ニ等シ）體積ハ大サノミニシテ方向無キモノナレバ此見解ニ由レバ二「ヴェクトル」ノ積ハ「スケーラー」量ナリ故ニ新契約ハ前節ノ契約トハ全ク異ナレル結果ヲ生ス

又 r 及 ρ ハ唯數ナレバ $r\rho = \rho r$ 故ニ $AP \cdot AQ = r \cdot \rho \cos\theta = \rho \cdot r \cos\theta = AQ \cdot AP$（斯ク記スレバ AQ ヲ ρ 單位方ノ平面積

トス）此見解ニ由レバ「ヴェクトル」ノ積ハ互換定則ニ遵フ故ニ

吾輩ハ二「ヴェクトル」ノ積ハ「ヴェクトル」ニシテ互換定則ニ遵ハザルモノトモ或ハ「スケーラー」ニシテ互換定則ニ遵フモノトモ見做スヲ得而シテ何レノ契約ヲ採ルモ以後ノ討究ニ於テ其契約ヲ守レバ差支ナシ

右二「ヴェクトル」ノ積ノ例ニ於ケル如ク異樣ノ見解ヲ下スハ精密學科ニ於テ極メテ有益ナルモノナリ各見解ニ由リテ基本ノ定則ヲ變ズルヲ要スルコト有リ異ナレル定則ニ基キテ新異ノ計算法ヲ得新異ノ計算法ハ唯基本ノ定則ニ遵フ量ニノミ行フ可キモノナリ斯ク純正數ニ係ル定則ハ量ノ理論ノ唯一ノ基本ナルカ如ク思フ者多ケレモ其實ハ僅ニ

「スケーラー」量ノミニ限リ眞正ナルモノニシテ量ノ意義ヲ擴メ之ニ方向及位置ヲ付スル片ハ決シテ眞正ナラザルモノ有リ幾何學ニ於テモ「ユークリット」ノ「スペース」ニ付テノ「ポスチュレート」ハ是ノ例ナリ故ニ或ハ舊定則ヲ變シ或ハ新定則ヲ設ケ以テ量及其記號ノ擴張シタル意義ニ適セザル可カラズ

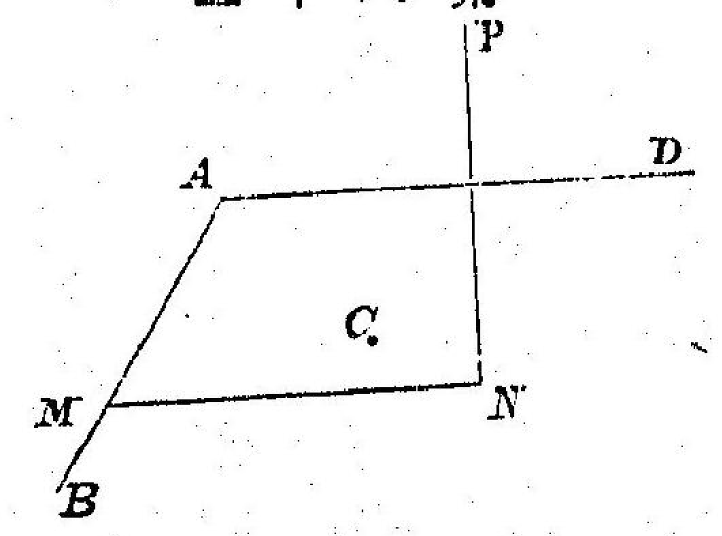
第拾七節　三行ノ「スペース」ニ於テノ位置

今マデハ唯一平面上ニ於テノ位置ノミヲ論ジタリ「スペース」中ノ點Pノ位置ヲ一定點ニ關係シテ歩APニ由リテ示スヿモ亦難カラザルナリ一平面上ニ於テハ二定點有レバ他點ノ位置ヲ定ムルヲ得ルト雖「スペース」中一點Pノ位置ヲ定ムルニハ一直線上ニ在ラザル三點ヲ要ス二點A、Bヨリノ距離ノミニテハP點ハ一ツノ圓周上ノ何點ナルヤ詳ナラズ但此圓ハ其中心AB線上ニ在リテ之ニ直角ナル平面中ニ在リP點ハ此圓周中何點ナルヤヲ知ラント欲セバ他ノ一定點Cヨリ其距離ヲ知ラザル可カラズ斯ク「スペース」中ニ於テ位置ヲ定ムルニハ同一直線上ニ在ラザル三點ヲ要ス或ハ之ニ等シキ幾何圖形ヲ要ス是ヲ以テ吾輩ノ生息スル「スペース」ヲ三行（ダイメンション）。ノ「スペース」ト稱ス

三點ハ一平面ヲ確定ス「スペース」中三定點A、B、Cヲ與フレバ此三點ヲ經過スル平面ハ確定セリ「スペース」ハ此平面ニ由リテ二分セラルP點ハ此二部分ノ一ノ内ニ在ラザルヲ得ズ吾輩ハ其一部ヲ此平面ヨリ上。又一部ヲ下。ト名ク可シ

PNヲPヨリ此平面ニ垂レタル垂線トス然レバ平面上N點ノ位置ヲ知リ又PNノ長サ及其平面ヨリ上ナルカ或ハ下ナルカヲ知レバP點ノ位置確定セリ其上下ハ左ノ契約ニ由リテ之ヲ定ムルヲ得P點上ニ在レバNPヲ正トシ下ニ在レバ負トス又N點ノ位置ハ前數節ニ説明シタル方法ノ何レニ

第八十五



由リテ定ムルモ可ナリNMヲABニ直角ニ引ケバPノ位置ヲ示スニ左ノ方法ヲ以テスルヲ得AB線上ニ歩AM（其長サxトス）ヲ取リABニ直角ニ左ヘ其平面内ニ於テ歩MN（其長サyトス）ヲ取リNヨリ平面ニ直角ニ上ヘ歩NP（其長サzトス）ヲ取レバ即P點ニ達ス歩APヲナシタルニ等シx負數ナレバAヨリ退歩ヲ為シy負數ナレバABヨリ右ニ直角ニ歩シx負數ナレバNヨリ平面ノ下ヘ歩セザル可カラズ此方法ニ由リ此契約ニ從テ以テA點ヨリ「スペース」巾何レノ點ニモ達シ得可キヿ明ナリ

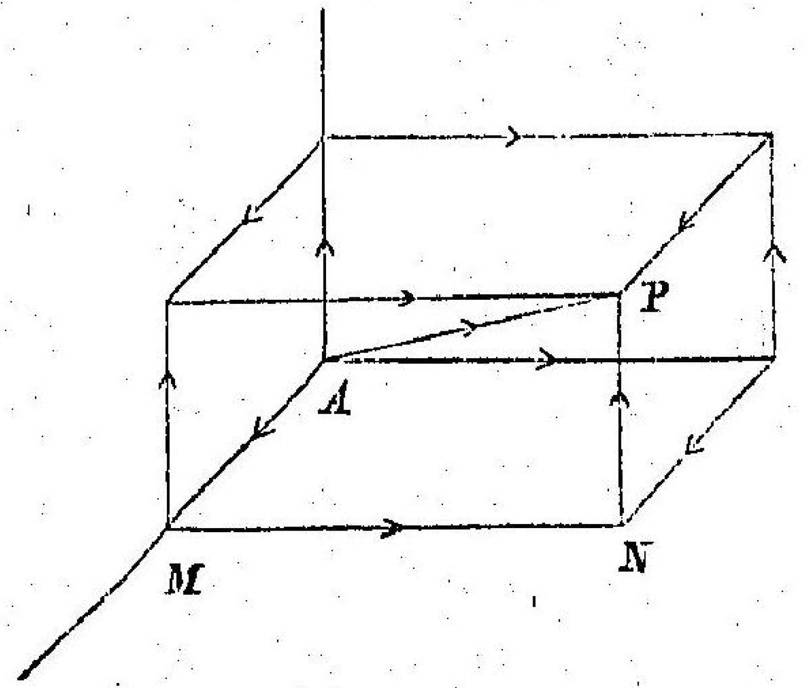
iヲAB線上單位歩jヲABニ直角ニ左ヘノ單位歩kヲ平面ABCニ直角ニ上ヘノ單位歩ヲ表ハストスレバ左ノ方程式ヲ得

$$AP = x.i + y.j + z.k$$

此式ニ於テx y zハ大サト正負ノ別有ルノミi j kハ右ノ如ク互ニ直角ナル三方向ノ單位歩ナリ

歩APハ直角六面體ノ對角線ト見做スヲ得而シテAヨリP

第八十六



ニ至ルニ三ツノ不平行緣ヲ何レノ順序ニ行クモ可ナリ之ヲ言ヒ換レバ歩 $x.i$ $y.j$ $z.k$ ノ順序ハ何レニテモ可ナリ

又「スペース」中續ケテ爲シタル數多ノ歩ノ和ハ其首端ヨリ尾端ニ至ル一歩ニ等シキヿ尚ホ平面上ノ歩ニ於ケルト同一ナリ是ヨリシテ先ニ平面上ノ歩ニ付テ得タル如キ數多ノ結果ヲ得ルヿ容易ナリ又先ニ平面ヲ小方形ニ分チテ或ル方程式ニ適スル曲線ノ形ヲ得タル如クx、y、zヲ含有スル方程式有レバ「スペース」ヲ互ニ直角ナル平面ノ三統系ニ由リテ小立

方ニ分チx及yニ任意ノ値ヲ與ヘzニ其式ニ由リテx、yノ値ニ對スル値ヲ與ヘ以テ其式ノ表ハス所ノ表面ノ形ヲ得可シ例ヘバ此ニ $az=x^2-y^2$ ナル方程式有レバ(之ヲ幾何學的ニ述ブレバzトaヲ邊トセル矩形各x及yヲ邊トセル正方形ノ差ニ等シ)Aヨリ此式ニ適ヘル點Pニ至ル歩

$$AP = x.i + y.j + \frac{x^2-y^2}{a}.k$$

x、yニ任意ノ値ヲ與ヘ此式ニ適ヘル無數ノ點ヲ得而シテ此點皆第二編第九節ノ圖ニ示シタル鞍ノ如キ表面上ニ在ル可シ故ニ右ノ方程式ヲ此表面ノ方程式ト稱ス

「スペース」中ノ歩ヲ詳論スルハ本書ノ限内ニ於テ爲シ得可キヿニ非ラズ本節ニ於テハ僅ニ其一端ヲ示シタルノミ