理學士一戸直藏著

高等天文學

東京 博文館藏版

例言

一、本書を編するに當り參考せし書多しと雖も就中左の書によれり。

Chauvenet: Spherical and Practical Astronomy. Vol. I.

Faye: Cours d'Astronomie.

Main: Practical and Spherical Astronomy.

Doolittle: Practical Astronomy.

Gruey: Lesons d'Astronomie.

Watson: Theoretical Astronomy.

Barlow and Bryan: Mathematical Astronomy.

Constan: Cours Elementaire d'Astronomie.

一、本書に於て論ずる所は數理天文學の初歩にして高等數學の補助を仰げり。されば讀者諸氏は豫め其素養あらんことを要す。

一、本書は前項の如きもの故自ら初等天文學に就きては不完全を免れず。却て屢々讀者

諸氏が初等天文學を學習せしことありと假定せり。故に未だ其修養を經ざるものは普通の天文學を一讀せられんことを望む。

一、實地天文學の諸問題は紙數の都合によりて之を省けり。依て編者若し機を得れば更に實地天文學を一部としてものせんと欲す。本書は之を待つて始めて余が目的に多少接近するものあらん。

一、本書に用ゐたる譯語の一部は我邦天文學者諸氏の撰びたるものにして、將來普ねく天文學の用語たる可きもの、他の一部は未だ譯語の一定せざるものゝ故、假りに之を採用せり。故に譯語決定の機を待ち之を削正せんことを期す。

一、本書をものするに當り勉めて誤なからんことを期せしも、時日の許さゞると、自己の學識の足らざると、經驗の乏しきとが相和して余の目的にかなはざるものあらん。幸に識者の敎を仰ぐこと切なり。

明治三十八年十二月

著者識

高等天文學目次

目次終

高等天文學

理學士一戸直藏著

緒言

天文學の定義

天文學とは天體に就きて研究する一科學なり。然らば天體とは何ぞや、そは吾等が通常目撃する大陽大陰惑星衞星彗星流星恒星等及び吾等が普通注意せざる星雲の如きもの是れなり。偖て吾等が是等の天體に就きて知らんと欲する所を考ふるに第一是等天體の視運動及び實運動に關する法則を究め更に進んで運動を起す原因を探究すること、第二是等天體の形狀大小質量等を測定すること、第三是等の理學的特性及び成分等を研究すること、第四是等天體間の關係を講究すること等は其最も大切なることとなり。其他是等の研究をなすに必要なる器械に關する種々の學說及び觀測法の如きも重要なるものとす。

天文學の論ずる所其範圍甚だ廣きを以て學者更に之を區分す。今之をあぐれば左の如し。

第一、記載的天文學。此は其名によりて知らるゝが如く天文學上の事實及び原理を秩序的に記載する一部分なり。

第二、球面天文學。此は天體を所謂天球上に運動すると見て之が運動を論ずるものにして球面三角法を天文學に應用せるものなり。

第三、實地天文學。此は天體の觀測に必要なる器械に關する學說、觀測の方法及び計算法等を論ずる一部分なり。

第四、天體力學。天體力學とは力學の原理を應用して天體運動の原因を探り更らに之が運動を說明する一部分なり。

第五、天體物理學。此は天體の性狀、理化學的狀態、溫度又は其成分等を研究する一科にして比較的近年に開展せしものなり。

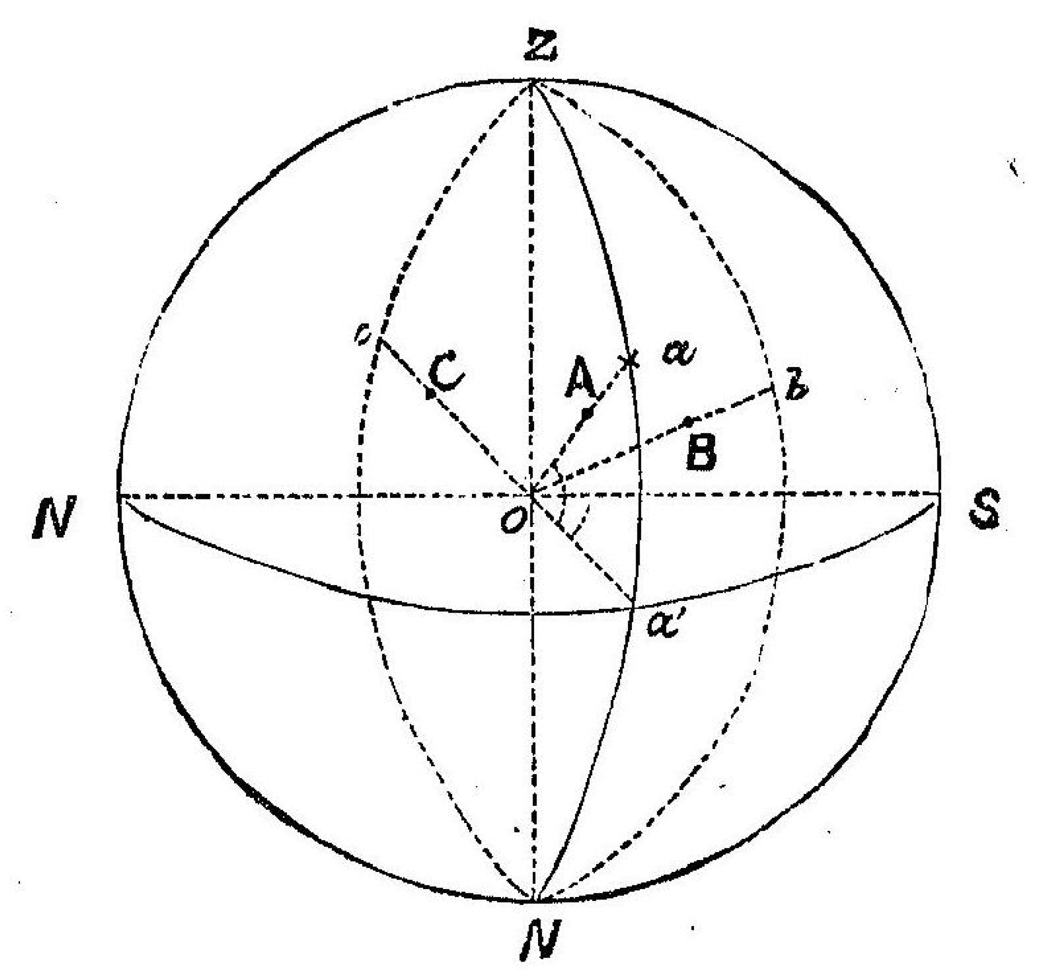
吾等が以下論ぜんと欲する所は特に是等の分類を追ふに非ずして最も自然的の方法によりて漸次天體に關する事項を記載し且つ說明せんとするにあり。

天球

第一章　星の日週視運動及び坐標

天球。晴夜天空を望み、星辰配置の狀態を注視すれば無數の星が吾等を包被せる青き天蓋の內部に存在するが如き觀を呈せん。而して此天蓋なるものは吾等の眼を中心とせる球面の一部分なり。

第一圖



星と吾等との距離が各異なるならんも只見たるのみにては何れも其距離等しく此球面上にあるものと想像せらるゝが故先づ第一に此の如き球面を假定し其面上に於てする天體の視運動を研究するを便利とす。今oを觀測者の位置とし、任意の半徑を以て球を書きABC等の位置にある星とo點とを連ぬれば此等の線は球面とa b c等にて交りa

天球の地平

b c 等はoより見たる星の方向を示さん。されば天界にある凡ての星とo點とを連ぬる時はoより見たる是等の星の方向は何れも連結線が球面を切れる點によりて定めらる可し。此の如き球を稱して天球となす。

然るに吾等は大なる地球の表面に生活するもの故天球の一半のみを望み得可く他の一半は地球の爲めに妨げられて見ることを得ず。是等兩部分の境界線はo點を通じ鉛直線に直角をなす面を畫き之が天球と會する大圓を求むれば即ち是れにして天球の地平と稱するものなり。

天頂、天底

今更にo點に於ける鉛直線を延長し天球と會せしむれば二點を得其中觀測者の頭上にあるものを天頂と云ひ、其下方にあるものを天底と云ふ。

高度

高度及方位角。 偖天球上の一星例へばaの位置を定めんと欲せば球坐標と稱する二個の量を要す。今天頂Z天底N及びaを通過する大圓の半ばを引き天球の地平を切る點をa'とし更らに天球の地平上に一定點Sを取りSa'とaa'との二弧を測れば此等は球坐標の一種にして是によりてa點の位置を知り得可し。aa'はoより星を見たる方向と地平面とのなす角aoa'に等しきものにして高度と稱せられ、Sa'はosとoa'とがo點に於て含む角Soa'に等しきものにして方位角と稱せらる。

方位角

定點Sは吾等が後に說明せんとする南なり。又高度の代に高度の餘角を用ゐ之を天頂距離と稱す。

天頂距離

星の天球に於ける視運動。 吾等は是れより星が天球上に如何なる運動をなすやを硏究せんとす。今晴夜一定時に天空の一部を望み其近傍の若干の星が如何なる配置をなせるかを記憶し置き若干時を經て再び天空を望めば以前見たる部分に是等の星を見ず稍々隔れる所に前に見たる若干の星が以前と同一の相對位置を保ちつゝ存在するを認めん。吾等は更に天球の何れの部分を取り如上の觀測をなすも星は時と共に其位置を變ずるに係らず星相互の配置に至りては常に相等しきを知る可し。此現象を更に硏究せんが爲め適當なる器械を用ひ、一時間毎に若干の星の高度と方位角とを觀測し之を記錄し置きて更に天球儀の如き球を取り其上に大圓を畫きて天球の地平を表さしめ其大圓の兩極の一を天頂となし、地平上に任意に一固定點を取り然る後漸次觀測せし高度と方位角とによりて各星の位置を球上に記し同一星につきて得たる點を連結

すれば是等の連結線は互に平行せる球の小圓なることを認め得可し。更に之を詳細に觀測するに北方にある星の畫ける小圓が次第に小さくなり北極星の畫く圓は甚だ小さく殆ど圓形をなさずして一定點の如し。されば此事實により吾等は容易に北極と各星間との距離角は視運動と關係なく常に相等しきものなるを知り得可し。北極とは其處にある星が何等の視運動を示さゞる天球の一點なり。

倘或一星が各一時間毎に占めたる位置と北極とを含む大圓の弧を畫けば相隣る兩弧の間に含まるゝ角は何れも同一にして十五度に等しきを見ん。以上の兩事實は恒星の視運動について如何なることを敎ふるか。

天球の兩極

今地球の自轉軸を延長し天球と切る點を見るに地軸は同時に天球の軸たるを知らん。されば吾等は天球の兩極を次ぎの如く定義するを得地球の兩極を連ねたる線を延長し天球との交點を求むれば其內北極の方向にあるは天球の北極にして地球の南極の側にあるものは天球上の南極なりと。茲に於て前に觀測し得たる事實を考ふるに(第一)恒星は天球の內面に固定して何れも相互の位

恒星視運動の說明

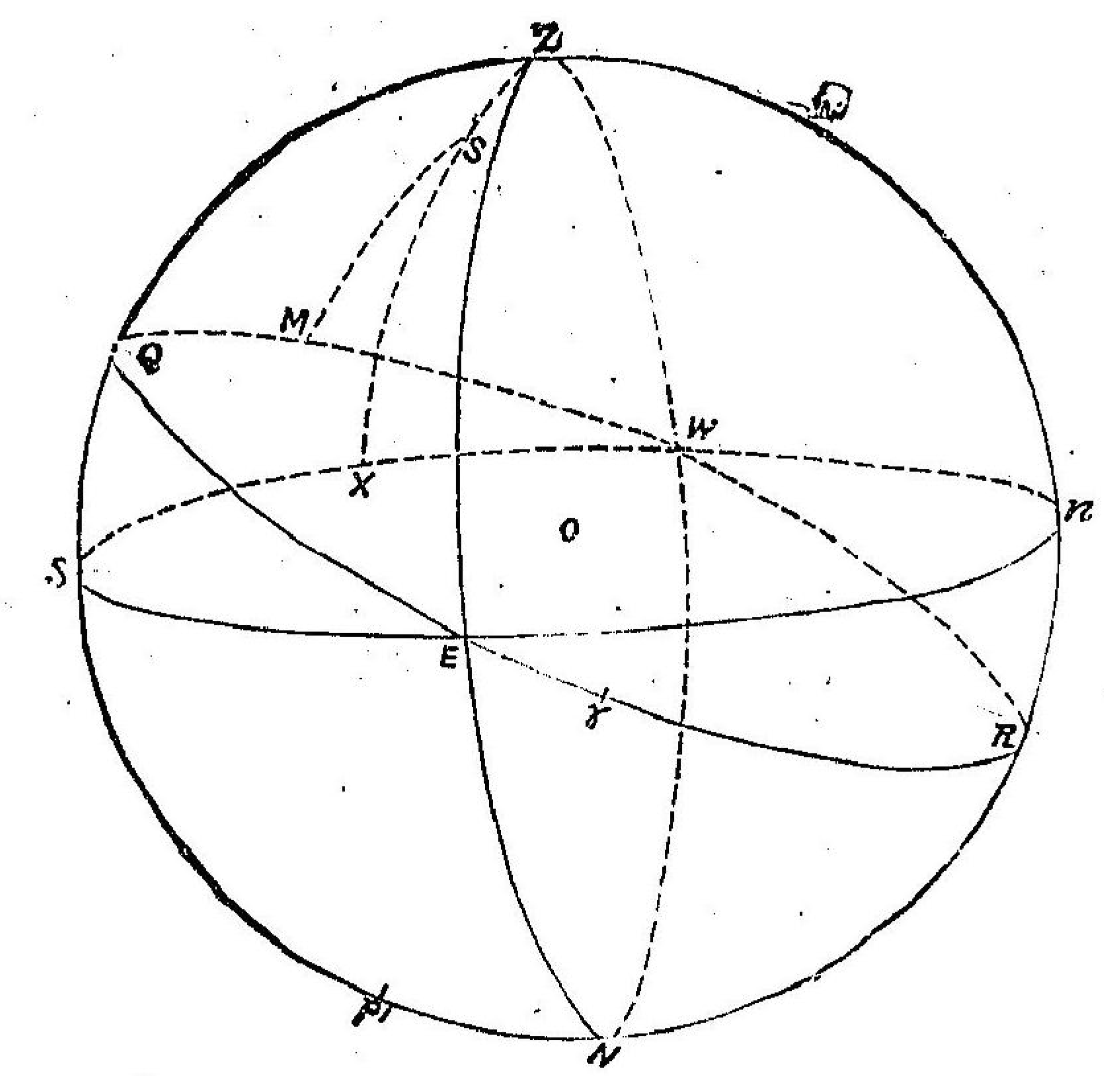
置を變ずることなく、天球自身は兩極を連ねたる軸の周りに一時間殆ど十五度の角速度を以て規則正しき廻轉をなし東より西に向ふものと解釋するも或は又(第二)天球自らは空間に固定して動かず地球が其兩極の連結線を軸として西より東に廻轉すと考ふるも決して以上の兩事實と抵觸することなし。吾等は後に至りて兩者中何れを取る可きかを研究す可きも今は簡單を旨とし第一の說明を採用せん。

北極距離、赤緯

時角及赤緯。論じて茲に至れば吾等が恒星の位置を定めんとて採用したる高度及び方位角の外更に星の位置を定むる一良法あるを知らん。既に述べたるが如く星と天球の北極との距離角は一定不變のものなり。されば天球上其兩極より九十度を去れる所に大圓を畫き之を天球の赤道と稱する時は大圓に沿ふて星より直角に赤道へ測れる距離角は前者の餘角なるを以て矢張り一定せるものなり。吾等は前者を其の北極距離と稱し、後者を赤緯と稱す。さて北極距離又は赤緯を坐標となし更に他の一を求むる爲めに天球の子午線なるものを導かん。天頂と兩極とを通過する平面を引き此平面と天球とが交る曲線を

求れば是れ即ち天球の子午線にして一個の大圓なり。今更に星と兩極とを通過する平面を引き之が天球と交る大圓を求むれば此等兩大圓のなす角度を時角と稱す是等が赤道を切る二點間の弧にて測り得可し。茲に於て吾等は星の位置を定むるに赤緯と時角とを以てするを得。但し時角は時間の經過するに從ひ變化するものにして星が子午線上に來れる時は零度夫れより

第二圖



次第に增加して三百六十度に及ぶ。圖に於てZPNは天球の子午線を表はしPは北極Zは天頂Nは天底なりとす。又QERは天球の赤道を表はしsEnは天球の地平を表はすものとすれば天球上にある星Sの位置は方位角sXと高度SX

とを以て表はし得可く或は又赤緯SMと時角QMとを以て表はすことを得可し。

東西南北

東西南北。圖に於て天球の子午線が天球の地平と交る二點をn及びsとせばPに近き點nは北と稱せられ南極P′に近きものは南と稱せらる。更にZとNとを通り子午線と直角をなす大圓ZENを引けば卯酉線と稱する者を得此線と地平との交點二個の中oにありてn點を見る人の右方にある點Eは東と呼ばれ左方にあるWは西と呼ばる。又東西南北の四點を總稱して方位主點と云ふ。

赤經

赤經及赤緯。以上記述せる坐標の外星の位置を定むる種々の方法あり。其等の內尙茲に述ぶ可きもの一種あり。時角と赤緯とを用ふる坐標にては赤緯丈は常に變化せざるものなるも時角は時々刻々變化するものなるを以て恒星の場合には更に何れも變せざる二個の坐標を用ふれは甚だ便利なることあり。されば吾等は時角に代ふるに何等か他の角を取らざる可からず。即ち第二圖に於て天球の赤道上に一定點γを求め其點よりγRMの方向に角度を測りγとMとの間に含まるゝ角を以て時角に代へ之を赤經と稱す。然る時は天體は時

と共に廻轉をなすとも吾等が星の位置を定めんとして採用せる赤道も其上の定點γも亦兩極PP'も共に天球と共同の運動をなすを以て赤緯及赤經の兩者は實に一定の値を有するものとす。赤經はγ點より前述の方向に增加し三百六十度に及ぶ。されども一般には之を度數にて表さず之を十五にて除し時間に直せしものを採用す。例へば北極星の赤經を一時二十二分赤緯を北八十八度四十六分と稱するが如し。γ點は後に說明すべき春分點を採用す。

吾等以上記せし所にて天球上にある星の位置を定むるに三種の異なる坐標を採用せり、然るに是等は何れも天球上に取れる互に關係を有せる角度なるを以て是等坐標間に何等かの關係ありて互に變更し得るや必せり。

第二章　球面三角法

是より以下論ぜんとする所球面三角法の助を求むること多ければ、吾等は特に一章を割きて球面三角法の重なる公式を求むることとせり。球面三角法とは球面三角形の三個の二面角と三邊との間の關係を論ずる數學の一部なり。球面三角形とは三個の大圓が二ツづゝ交りて作る形にして各二個の大圓のなす二面角をABCにて表はし又或一大圓が他の二によりて切られたる部分をそれ〳〵にa b cを以て表はす。而して玆に論ぜんとするものはa b c A B Cの六量が何れも二直角以下の場合に限る。

球面三角法の基本公式

球面三角法の基本公式。 球面三角法の公式は種々あれど、何れも三個の公式より類推又は變形によりて求め得可きものなり。今半徑一なる球を畫き其中心Oを通じて三個の互に直角に交るOX OY OZなる三軸を引き是等の軸に照らして球面上にある一點Cの位置を定むるものとせばCよりOY OZ二軸にて定まる面へ引ける垂線の長さx、同點よりOZ OXの面に引ける垂線y及びOX OYの平面へ引ける垂線zの三長を知れば可なり。今C點とOZ軸が球面を切る點Aとを大圓を以て結びACをbにて表はし$\angle$CAXを$180°-$Aにて表はす時はx y zは次式の如きものとなる。

$$z=\cos b,\quad x=-\sin b\cos A,\quad y=\sin b\sin A.$$

然るに更にYOの軸を廻轉軸となしXOZの面をc角丈廻らしOXがOX′の位置

に來りOAがOBの位置に來れりとすれば假定によりてABはc角に等し。今新たに得たる三軸OX′ OY OZ′に照らしてc點の坐標を求め之をx_1 y_1 z_1にて表はし更にBとCを大圓の弧にて結び之をaにて表はし∠XBCをBにて表はせば次式を得。

$$z_1=\cos a,\quad x_1=\sin a\cos B,\quad y_1=\sin a\sin B.$$

次ぎにx y zとx_1 y_1 z_1との關係を求むれば次式を得るは容易に證明するを得

$$z_1=z\cos c-x\sin c$$

$$x_1=z\sin c+x\cos c$$

$$y_1=y$$

依て上に計算し置けるx y z及びx_1 y_1 zの値を此等三式に置き換ふれば

$$\cos a=\cos c\cos b+\sin c\sin b\cos A,$$

$$\sin a\cos B=\sin c\cos b-\cos c\sin b\cos A,$$

$$\sin a\sin B=\sin b\sin A.$$

なる三式を得是れ實に球面三角法の基本公式なりとす。

類推によりて得る公式

其他の諸公式。 基本公式に於てa b c A B Cの六量を順次に轉環せば次ぎの九公式を得。

$$\begin{cases}\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A\\ \cos b=\cos c\cos a+\sin c\sin a\cos B\\ \cos c=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin a\cos B=\sin c\cos b-\cos c\sin b\cos A\\ \sin b\cos C=\sin a\cos c-\cos a\sin c\cos B\\ \sin c\cos A=\sin b\cos a-\cos b\sin a\cos C\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin a\sin B=\sin b\sin A\\ \sin b\sin C=\sin c\sin B\\ \sin c\sin A=\sin a\sin C\end{cases}$$

極三角形

今更に球面三角形ABCの極三角形を考へa b c邊の極を夫れ々々にA′ B′ C′にて表はし是等三點を大圓にて連ね此等の邊をa' b' c'にて表はすものとせよ然る時に此三角形にも上の公式を應用し得る故次ぎの式を得。

$$\cos a' = \cos b' \cos c' + \sin b' \sin c' \cos A'$$

然るに立體幾何學によりて次ぎの關係あるを知れり

$$\sin a' \cos B' = \sin c' \cos b' - \cos c' \sin b' \cos A'$$

$$\left\{\begin{array}{ll} A' = 180^\circ - a, & a' = 180^\circ - A \\ B' = 180^\circ - b, & b' = 180^\circ - B \\ C' = 180^\circ - c, & c' = 180^\circ - C \end{array}\right.$$

依て上式に是等を置き換ふれば次式あり。

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$$

$$\sin A \cos b = \cos B \sin C + \sin B \cos C \cos a$$

此等の二式に於ても亦類推によりて六個の公式となすを得可し。

三邊を知りて角を求む。是より上に求めたる公式を變化して對數計算に適する二三の公式を得めん。

對數計算に適する公式

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$

$$\therefore \quad \cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}$$

$$1 - \cos A = \frac{-\cos a + \cos(b-c)}{\sin b \sin c} = 2\sin^2\frac{A}{2}$$

$$1 + \cos A = \frac{\cos a - \cos(b+c)}{\sin b \sin c} = 2\cos^2\frac{A}{2}$$

今 $a+b+c=2s$ と置けば

$$\left\{\begin{array}{l} \sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b \sin c}} \\ \cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin s}{\sin b \sin c}} \\ \tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin(s-a)\sin s}} \end{array}\right.$$

なる三式を得三邊が知れたる場合に三個の角を計算し得可し。

三角を知りて邊を求む。同様に $\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$ なる式を變化して $A+B+C=2S$ と置けば次ぎの三式を得可し。

$$\sin\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{-\cos S \cos(S-A)}{\sin B \sin C}}$$

$$\begin{cases} \cos\dfrac{a}{2}=\sqrt{\dfrac{\cos(S-B)\cos(S-C)}{\sin B\sin C}} \\ \tan\dfrac{a}{2}=\sqrt{\dfrac{-\cos S\cos(S-A)}{\cos(S-B)\cos(S-C)}} \end{cases}$$

即ち三個の角ABCが與へられたる際$a\ b\ c$を計算し得可し。

ドランブルの公式。吾等は更に球面三角法の解に要用なるドランブル氏公式を求めんとす。

$$\sin\frac{B+C}{2}=\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\cos\frac{B}{2}$$

$$=\sqrt{\frac{\sin(s-c)\sin(s-a)}{\sin c\sin a}}\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-c)}{\sin a\sin b}}+\sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin a\sin b}}\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-b)}{\sin c\sin a}}$$

$$=\frac{\sin(s-c)+\sin(s-b)}{\sin a}\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-a)}{\sin b\sin c}}$$

$$=\frac{\cos\frac{b-c}{2}}{\cos\frac{a}{2}}\cdot\cos\frac{A}{2}$$

同様に

$$\therefore\begin{cases} \cos\dfrac{a}{2}\sin\dfrac{B+C}{2}=\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{b-c}{2} \\ \sin\dfrac{a}{2}\cos\dfrac{B-C}{2}=\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{b+c}{2} \\ \cos\dfrac{a}{2}\cos\dfrac{B+C}{2}=\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{b+c}{2} \\ \sin\dfrac{a}{2}\sin\dfrac{B-C}{2}=\cos\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{b-c}{2} \end{cases}$$

即ち四公式を得たり。

直角三角形

直角三角形。直角三角形は屢々遭遇するもの故之が公式を特に列記すれば次ぎの如し。

先づ基本公式に$A=90°$と置けば

$$\begin{cases} \cos a=\cos b\cos c \\ \sin a\cos B=\cos b\sin c \\ \sin a\sin B=\sin b \end{cases}$$

次ぎに第二にて第三を除して次ぎの公式を得

類推によりて

$$\begin{cases} \tan B = \tan b \operatorname{cosec} C \\ \tan C = \tan c \operatorname{cosec} b \end{cases}$$

第二を第一を以て除して次式あり

$$\cos B = \frac{\tan c}{\tan a}$$

類推によりて

$$\frac{\tan b}{\tan a}$$

是を變化して

$$\begin{cases} \tan c = \tan a \cos B \\ \tan b = \tan a \cos C \end{cases}$$

更に $\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$ へ $A = 90°$ と置けば

$$\cot B \cot C = \cos a$$

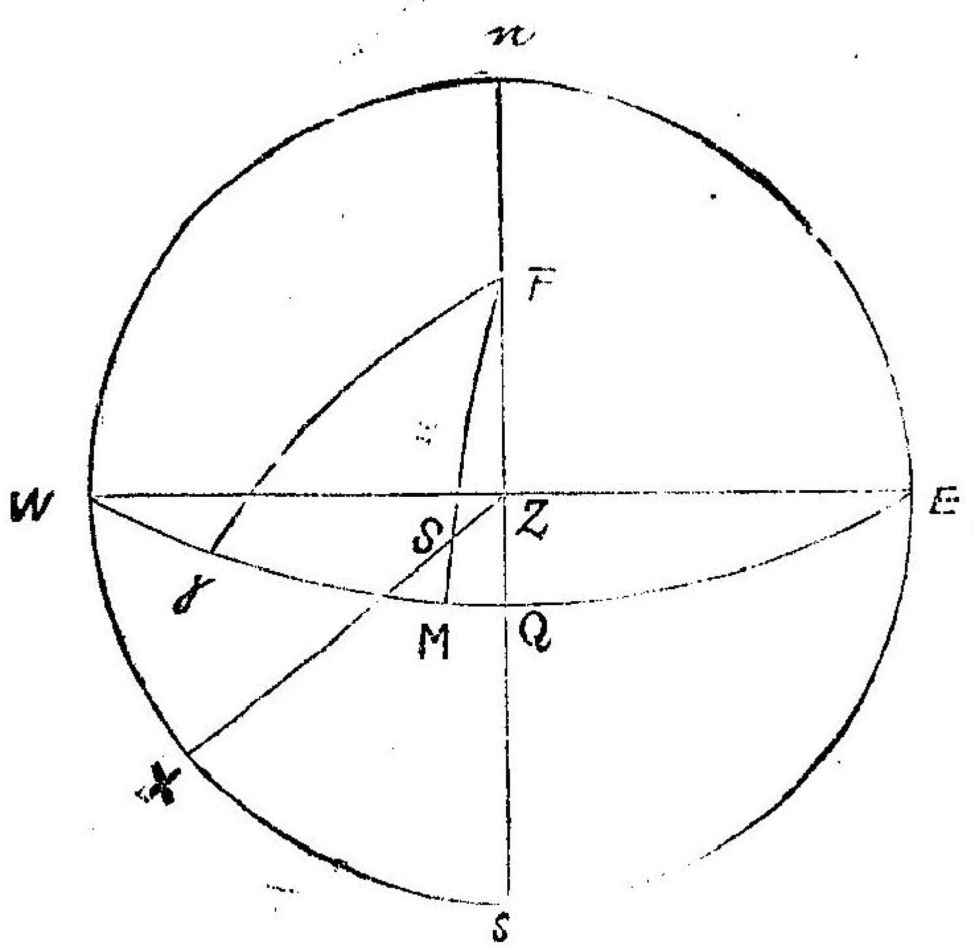
第三章　各種の坐標間の關係

高度方位角と時角赤緯との關係。 吾等は第二章に於て星の位置を定むる三種の坐標を述べ且つ是等の各種類の坐標間に何等かの關係あらんとのことを附

緯度

記せり。依て是より第一に方位角と高度とが如何にせば北極距離と時角とに變化するを得可きか或は反對に北極距離及び時角を方位角と高度とに變化するを得可き是等兩者間の關係を求めん。今第三圖に於てPを北極Zを天頂としnZsを子午線としWZEを卯酉線としEQWを赤道とすればS點にある星の高度はXS天頂距離はZSにして北極距離はPS時角はSPZ角なり。而してZPは何なるかを考ふるにZQは天頂と赤道との距離にして地球表面上に於ける觀測地の緯度に等し。然るに $PQ = nZ = 90°$ なるを以て $ZQ = nP$ 即ち緯度は天球の北極の高度に等し、依て緯度をφにて表はせば $PZ = 90° - \varphi$ なり。又普通の記號を用ひ天頂距離をζ方位角をA北極距離をp時角をtにて表はし球面三角

第三圖



形SPZに就き其要素間の關係を求むれば次ぎの式あり。

$$
(\mathrm{I})\quad\left\{\begin{aligned}
\sin p \sin t &= \sin\zeta \sin A\\
\sin p \cos t &= \cos\zeta \cos\varphi + \sin\zeta \sin\varphi \cos A\\
\cos p &= \cos\zeta \sin\varphi - \sin\zeta \cos\varphi \cos A
\end{aligned}\right.
$$

$$
(\mathrm{II})\quad\left\{\begin{aligned}
\sin\zeta \sin A &= \sin p \sin t\\
\sin\zeta \cos A &= \cos p \cos\varphi + \sin p \sin\varphi \cos t\\
\cos\zeta &= \cos p \sin\varphi + \sin p \cos\varphi \cos t
\end{aligned}\right.
$$

(I)は高度又は天頂距離と方位角とが與へられ之を北極距離又は赤緯と時角とに變化する場合に用ふる公式にして先づ第三の式によりてpを求め得可く從て第一又は第二よりtを求め得可し。(II)は反對にpとtとが與へられてζ及びAを求むるに適する公式なり。但し何れの場合もφを含むが故觀測地の緯度は豫め測定し置かざる可からず。今求め得たる公式は對數計算に適せざるが故更に計算に便なるものを求めん。

$$
\left\{\begin{aligned}
m \sin M &= \sin\zeta \cos A\\
m \cos M &= \cos\zeta
\end{aligned}\right.
\qquad
\left\{\begin{aligned}
n \sin N &= \cos p\\
n \cos N &= \sin p \cos t
\end{aligned}\right.
$$

高度方位角及北極距離時角の關係

此等の四式に適當するm M及びn Nを求め是等を利用すれば上に求めたる公式は次ぎの如く變化することを得可し。

$$
\left\{\begin{aligned}
\sin p \sin t &= \sin\zeta \sin A\\
\sin p \cos t &= m \cos(\varphi - M)\\
\cos p &= m \sin(\varphi - M)
\end{aligned}\right.
$$

$$
\left\{\begin{aligned}
\sin\zeta \sin A &= \sin p \sin t\\
\sin\zeta \cos A &= n \sin(\varphi - N)\\
\cos\zeta &= n \cos(\varphi - N)
\end{aligned}\right.
$$

時角北極距離と赤經赤緯の關係。 次ぎに赤經赤緯の坐標法と時角及び北極距離の坐標法とに就きて其關係を考へんとす。赤經とは既に述べたるが如く天球の赤道の上に取れる一定點γより東に向ひ赤道に沿うて測れる弧なり。又時角とは子午線と星の子午線との間の角を南より西へ測れるものなり。從て第三圖にてS星の時角はQMにして同じ星の赤經はγMなり。故にγQをΘに

恒星時
恒星日

て表はし赤經をαにて表せば圖より直ちに次式を得。

$$\Theta=\alpha+t$$

Θは天球上の一點γの時角と考ふ可きものにして觀測者の位置に關係するものなりとす。然るに天球は既に說明せるが如く北極と南極とを連ねたる線を軸となし東より西に等速度を以て廻轉するものなれば時角は時間と正比例して增加するものなり。從てγ點が觀測者の子午線を經過する時刻を時の紀元としγ點の時角を測れば之によりて時を計るの道を得可し。依て春分點の時角を恒星時と稱し天文學上時を計るに用ふ。偖てγ點が三百六十度の時角を畫くに要する時を一恒星日と稱し之を二十四等分したるを一時とし、一時を六十等分したるを一分とし、一分を更に六十等分したるものを一秒とす。但し恒星日及び其一部分が普通吾等が使用する太陽日及び其一部分と等しからず、一太陽日は恒星時間にて二十四時三分五十六秒.三九四に當る。恒星時を計るに用ふる器械を恒星時時計と稱す。

今恒星時々計を用ひてΘを計り赤緯をδにて表せば兩坐標法の間に次ぎの關

赤經及赤緯と時角及北極距離との關係

係あり。

$$\begin{cases}\alpha=\Theta-t\\ \delta=90^\circ-p\end{cases}\qquad\begin{cases}t=\Theta-\alpha\\ p=90^\circ-\delta\end{cases}$$

若し又高度及方位角を變化して赤經及赤緯となさんには先づ之を時角及北極距離に改算し更に玆に見出せる關係を利用して求むる坐標を得可きなり。

第四章　地球の形狀及其大さ

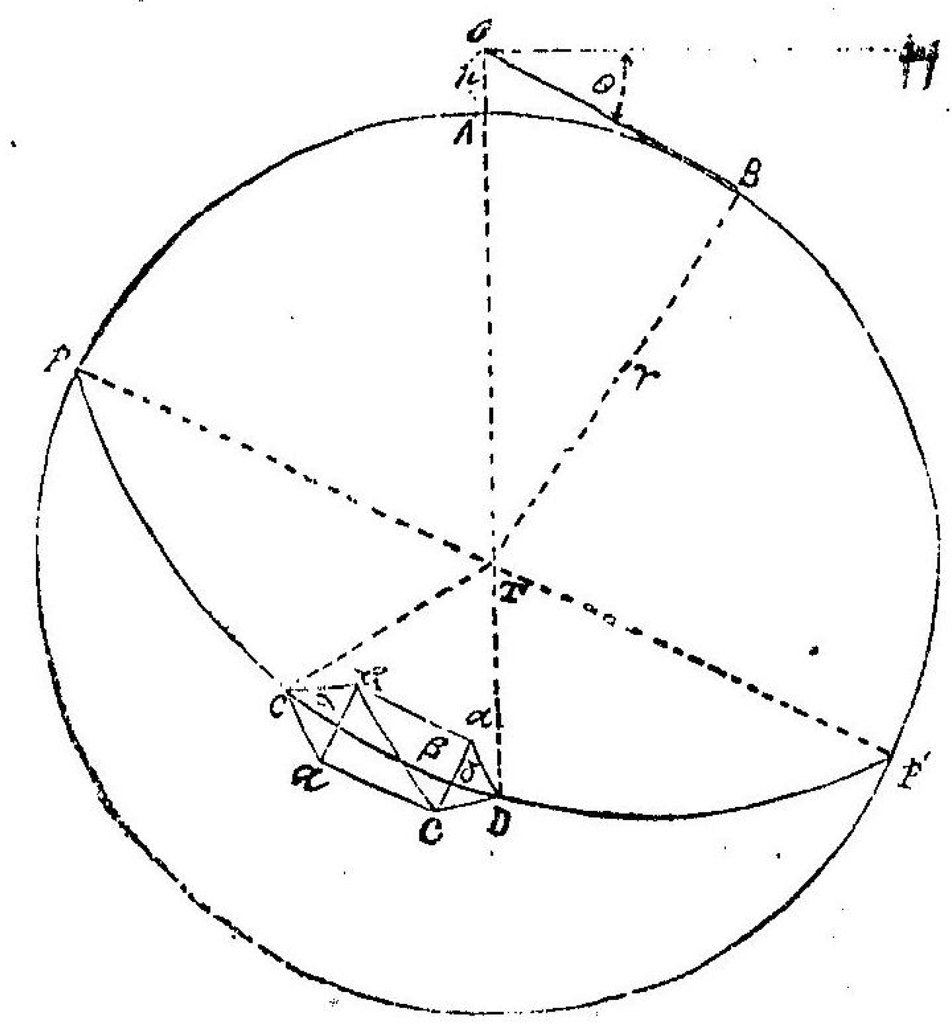
天體の運動を知らんと欲せば先づ我等が棲息する地球の如何なる者かを明かにする必要あり。依て是より地球の形狀及び其大さを研究せんと欲す。

地球が平面にあらで球形をなすとの事實は遠き希臘時代にありても既に知られたることにして紀元前八百五十年頃ホーマー海面の凸形をなせるを語り其後紀元前三百二十年頃アリストテレス種々の證據をあげて地球の球形をなせることを說明せり。されば地球の球形をなすとの事實のみを以て滿足せず早くより其直徑又は其周圍を測定せし人ありき。

地球半徑の概算法

地球半徑の近似値。今假りに地球の形が球なりとして其半徑を概算する方法を述べん。高山の頂に上り經緯儀を用ゐて地平線を望み望遠鏡の方向と水平面との角度を測り且つ豫め其山の海水面よりの高さを知れりとせば直に地球の半徑を得可し。第四圖に於てTを地心とし、oを高山の頂に於ける觀測者の目の位置としOBをoより地平線を見たる方向とし oH を地平面とし To と TB を引き To と地球表面との交點をAとし、Ao をhにて表はし HoB 角をθにて表はし地球の半徑をrにて表はせば

第四圖



$$TB = To\cos\theta,$$

$$r = (r+h)\cos\theta$$

$$r = \frac{h\cos\theta}{1-\cos\theta} = \frac{h\cos\theta}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

或人七十五米高き山にて此種の觀測をなせしにθは十五分三十秒なりしと云ふ。之等の値を上の公式に入れて計算するに地球の半徑は七千四百粁となる。此値は勿論精密なるものにあらで吾等が後にあぐる正しきものよりも殆ど七分の一大なり。されど兎に角地球半徑の大さに就き其概念を與ふるに足れり。是を以て之を觀れば地球の最高山も其高さ地球半徑の八百分の一に過ぎず。

より精密に地球の半徑を求む

より精密なる地球の半徑。是より更により精密に地球の半徑を求めん。其爲めには或子午線に沿ふて或長さの弧を測量する必要あり。今第四圖にて pC Dp' を一の子午線となし其上の二點CとDとにて其等の點の緯度を測定しφ_1及びφ_2を得たりとすれば$\varphi_1+\varphi_2$或は$\varphi_1-\varphi_2$は CT DT なる二線が地心Tにて合む角を度にて表はせるものなり。之をnにて又 BC の弧の長さをlにて表はせば

$$\frac{l}{n} = \frac{\pi r}{180}$$

故に

$$r = \frac{180l}{\pi n}$$

三角測量

玆に於て吾等はlなる長さを直接に測らざる可からず。lを測るには所謂三角測量を行はざる可からず。即ちC點より容易に見るを得可き二點a、bを取りてCabなる三角形を作り更にcを取りてabcなる三角形を作り更にdを取りてbcdなる三角形を作り又cdDなる三角形を作りてCとDとを數多の點の助けを借りて三角形の一列にて連結し先づCaなる長さを基線として其間を甚だ精確に測れば三角測量によりて順次にab bc cd dD等の長さ及びC a b c d D等の各點に於て各三角形の邊が交りてなす數多の角を求め得可し。依て更にab bc cdが子午線を切る點をα β γとし最初C點にて子午線と基線Caとの間に含まるゝ角$aC\alpha$を觀測し置けば三角形$aC\alpha$を解きて$C\alpha$と$a\alpha$及びα點に於ける角を知り得可し。從て$\alpha b\beta$なる三角形にて$\alpha c\,(ba-b\alpha)$及びα角とb角とを知れる故前と同樣に此三角形を解けば$\alpha\beta$ $b\beta$及びβ角を得。次第に此方法を繰返せば遂に$C\alpha$ $\alpha\beta$ $\beta\gamma$ γDを知り得可きを以て是等を加へてCDの長さを求め得可し。

地球の形ちは廻轉楕圓體なり。 千六百六十九年佛國の天文學者ペカルド氏はパリとアミアン間にある原野にて三角測量を行ひ一度の弧の長さを測定せしに五萬七千零六十トアスを得たり。其後千七百三十六年佛國にて二隊の學者を派遣し一隊はペリウに又他の一隊はラポニーに向はしめ同時に子午線一度の弧の長さを測定せしめたり。然るに前者は五萬六千七百五十トアス後者は五萬七千四百二十二トアスなる結果を得たり。依て是等の結果を見れば地球が球形を成さゞるが如し。恰かも良し其頃ニユートン及びフイゲンスの二氏は說をなして曰く地球が其始め流體の狀態を呈せり依て自轉の起るや遠心力の作用を受け廻轉の速度最も大なる赤道の部分が脹れ自ら旋轉楕圓體を形成せりと。偖てペカルドの得たる結果とラボニー及びペリユーにて得たる結果とを吟味するに此說の眞なるを示すものゝ如くなりき。其後諸文明國にてなせる測量は何れもニユートン等の說に一致する結果を與へたり。されば吾等は地球の形成を旋轉楕圓體と考ふるを至當とす。玆に於て地球の大さを表はすに必要なる定數は單に一個の半徑たる能はずして所謂楕圓の長短二軸を知らざる可からず。今ファイエ氏の計算せる結果を示せば次ぎの如し。

子午線一度の弧の長さ

地球の眞形狀

地球の大さ

長軸即ち赤道の半徑　六三七八、三九三粁
短軸即ち地心と極との距離　六三五六、五四九粁
子午線の長さ　四〇〇〇八、〇三二粁
赤道の長さ　四〇〇七六、六二五粁
地球の面積　五一〇〇八二〇〇〇、平方粁
地球の體積　一〇八三二六〇、立方粁

橢率

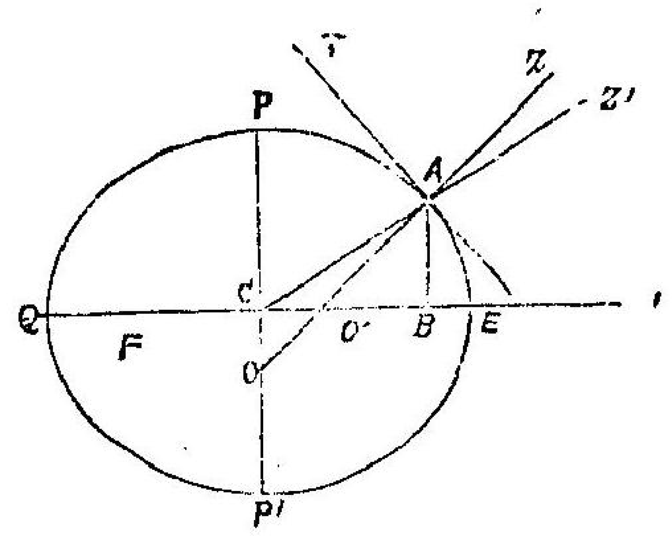
從て長短二軸の差は僅かに二十二粁弱にして之と長軸との比即ち橢率は二百九十二分の一なり。

離心率

地心緯度。第五圖にてPQP'Eを地球の一子午線なりと假定しPP'を兩極を連ねたるものとしEQを赤道の直徑とすれば其交點Cは地球の中心なり。今Fを焦點の一なりとしCE即ち長軸をaにてCP即ち短軸をbにて橢率をcにて離心率をeにて表せば

$$c=\frac{a-b}{a}=1-\frac{b}{a}$$

第五圖



$$e^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}=1-\frac{b^2}{a^2}=1-(1-c)^2$$

$$\therefore\ e=\sqrt{2c-c^2}=0.08269$$

圖に於てAを地球表面上の一點としATを此點にて子午線に切する線となし更にA點を通してATに直角なる直線AOを引けば此はA點にある觀測者の鉛直線なり。此線は觀測者が極又は赤道の上にある時を除き其他は地球の中心と觀測者の位置とを連ねたる線と一致することなし是より是等二線のなす角を計算せん。今CEをX軸CPをY軸に取りx yを以て子午線上の任意の點の坐標を表はすものとせば橢圓の式は次ぎの如し。

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

今$\angle ZOE=\varphi$, $\angle ZCE=\varphi'$と置けばφは法線とX軸との角故

$$\tan\varphi=-\frac{dx}{dy}$$

然るに ABC 三角形より

$$\tan\varphi' = \frac{y}{x}$$

更に楕圓の式を微分すれば次式を得

$$\frac{y}{x} = -\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{dx}{dy}$$

$$\therefore\quad \tan\varphi' = \frac{b^2}{a^2}\tan\varphi = (1-e^2)\tan\varphi$$

此式は $\tan x = p\tan y$ なる形を有す、然るに此形を有するものは $x-y$ を級數にて表はすことを得。

即ち

$$q = \frac{p-1}{p+1}$$ と置けば

$$x-y = q\sin 2y + \tfrac{1}{2}q^2\sin 4y + \cdots\cdots$$

從て此公式を $\varphi-\varphi'$ に應用し更に之を秒にて表はす爲め $\sin 1''$ にて除する時は次ぎの結果を得可し。

$$\varphi-\varphi' = -\frac{q}{\sin 1''}\sin 2\varphi - \frac{q^2}{2\sin 1''}\sin 4\varphi - \cdots\cdots$$

地心緯度

緯度の與へられたる地球上の一點より地心までの距離

されば上に記せる e の價を取れば

$$q = \frac{1-e^2-1}{1-e^2+1} = -\frac{e^2}{2-e^2}$$

$$-\frac{q}{\sin 1''} = 707''.59 \qquad -\frac{q^2}{2\sin 1''} = -1''.21$$

となるを以て次ぎの公式を得可し

$$\varphi' = \varphi - 707''.59\sin 2\varphi + 1''.21\sin 4\varphi - \cdots\cdots$$

φ' は地心緯度と稱するものにして φ は地理上所謂緯度と稱するものなり。されば地理學上の緯度を知れば上の公式より直ちに地心緯度を計算し得可し。

與へられたる地の地球半徑。 吾等は是より緯度の知れたる場所より地球の中心に至る距離を計算せんと欲す。第五圖にて A を緯度の與へられたる場所とすれば AC は求むる距離にして之を ρ にて表はせば

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$$

なり然るに既に記せる楕圓の式より

$$x^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = a^2$$

$$\frac{y}{x}=(1-e^2)\tan\varphi$$

を得可き故是等の二式より $x=\rho\cos\varphi'$, $y=\rho\sin\varphi'$ の値を見出せば

$$x=\frac{a\cos\varphi}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)}},\quad y=\frac{(1-e^2)a\sin\varphi}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)}}$$

故に

$$\rho=a\sqrt{\left[\frac{1-2e^2\sin^2\varphi+e^4\sin^2\varphi}{1-e^2\sin^2\varphi}\right]}$$

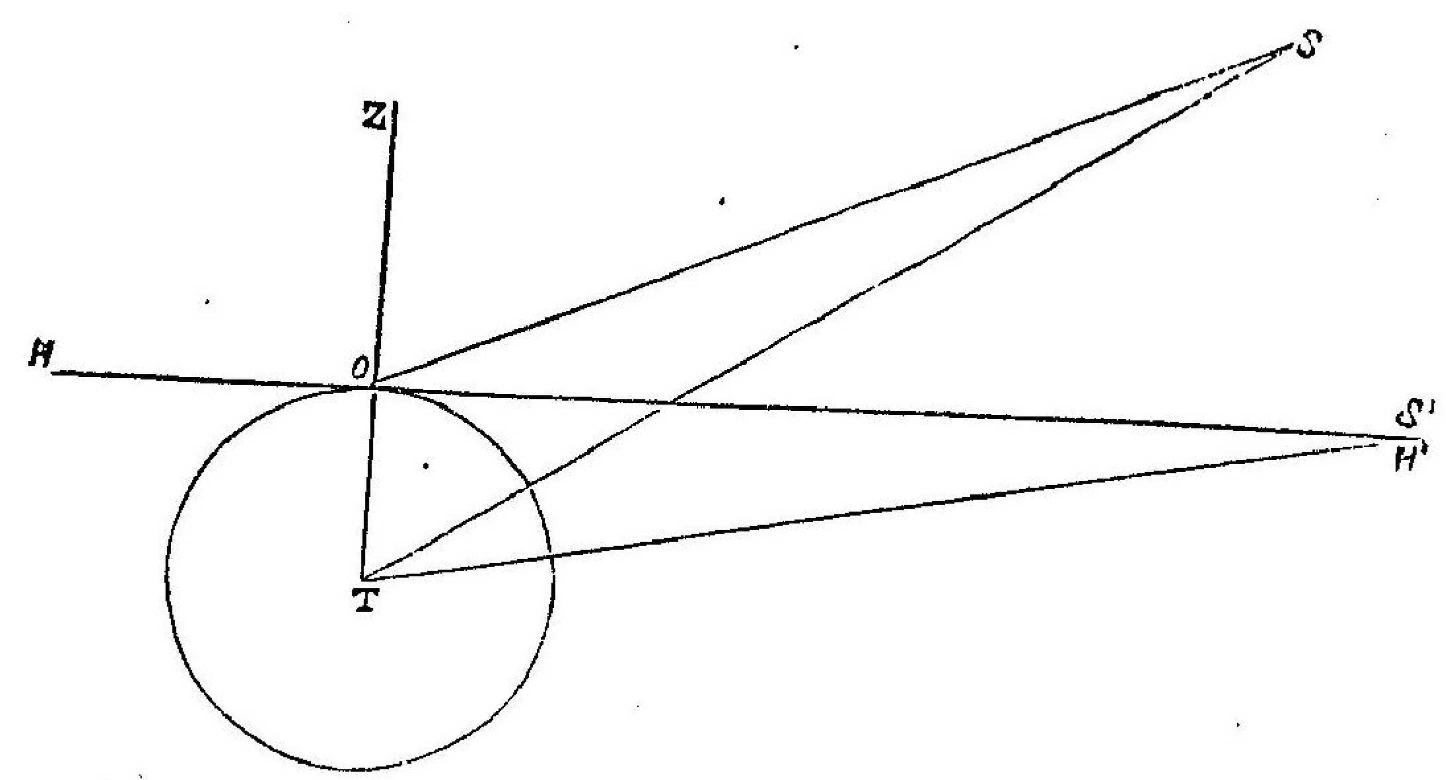
第五章　視差

視差。 第一章に於て吾等は研究の第一歩として天球をば觀測者を中心となし任意の長さを半徑として畫ける球面と云ひ天球の地平及び天球の赤道の如きも之に準じて夫れ〳〵定義を下せり。恒星の場合に於ては地球上如何なる位置より觀測せる時も常に同一の赤經赤緯を與ふるを以て天球の中心を何處に取るも決して不都合を來さず是れ實に恒星即ち通常星と稱するものが吾等を去ること甚だ遠きが故なり。然るに太陽又は月の赤經赤緯を異なる地にて同

時に觀測すれば是等の値は同一のものにあらず是れ太陽又は月などの天球が比較的に吾が地球に近きが爲めなり。從て天球の定義を幾分か變化して地球の中心を中心となし任意の半徑を以て畫ける球面を云ひ天球の地平をは地心を通過し其地の鉛直線に直角に引ける平面が天球を切る大圓とし又天球の赤道を地球の赤道面を延長せるものが天球を切る大圓なりと定義すれば地球表面上の觀測者の位置に無關係なる赤經赤緯を得可し。然るに天球の觀測は凡て地球の表面にてなされたるもの故是等の觀測より地球の中心にて觀測せるものと等しき値を求めんと欲せば所謂視差を知らざる可からず故に吾等は是より視差に關する二三の問題を研究せん。

一般に視差とは一個の定れる點を異なる兩點より見たる際表はるゝ方向の變化を云ふ。天文學にて或天體の視差と云ふは二個の異なる點より此天體の中心に引ける二直線間の方向の差なり。さればそは此天體を其處より見ると想像せる二點を天體の中心と結べる二直線が天體の中心にて含む角に等しきものなり。偖天體を望む二個の點の一が地球の表面上にあり他の一が地球の中

第六圖



心なる時は所謂吾等が單に視差と稱するものにして他の種類の視差は後に讓り茲には獨り此場合のみを考へん。

第六圖に於てTを地球の中心としOを地球表面上に於ける觀測者の位置としSにある天球をT及Oの兩點より望めば其方向はOS及びTSなり。今地球を球形のものと假定しTOなる線を引けば此線の延長はOの鉛直線なるを以て角ZOSはOより見たるSの天頂距離にして角ZTSは地球の中心より同じ星を見たる時の天頂距離なり。而して角OSTは既に述べたる定義によりて視差なり。然るに

$$\angle ZOS - \angle ZTS = \angle OST$$

なるを以て天頂距離又は高度の視差は地球の

半徑がSに於て含む角に等し。

地平視差

天體の高度は時と共に變化するもの故視差も其値を變ず今視差が最大となる場合を求むれば天體SがOより地平に見ゆる時即ちZOH'角が直角となる際なり。此時H'にて含む最大角を地平視差と稱す。

地平視差を求むること。第六圖にてOS'T角即ち地平視差をπにて表はし地心Tより天體の距離TH'をΔにて表はし地球の半徑をaにて表はせば

$$\sin\pi = \frac{a}{\Delta}$$

を得可し然るにπは月の場合を除けば甚だ小なる角故$\sin\pi = \pi$と置くを得可し故にπを角の秒數にて表はせば次式を得

$$\pi = \frac{a}{\Delta \sin 1''}$$

天頂距離に及ぼす視差の影響

天頂距離に及ぼす視差の影響。今圖にてZOSを視天頂距離と稱し之をζ'にて表はし又ZTSを地心天頂距離と稱し之をζにて表はし視差即ちOSTをpにて表はす時はOST三角形より直ちに次式を得可し。

或は

$$\frac{\sin p}{\sin \zeta'}=\frac{a}{\Delta}=\sin \pi$$

若し前項にて π を導けるが如く月の場合を除けば $\sin p = p$ と置き得るを以て

$$\sin p=\sin\pi \sin\zeta'=\sin(\zeta'-\zeta)$$

$$p=\pi \sin\zeta'=\frac{a}{\Delta \sin 1''}\sin\zeta'=\zeta'-\zeta$$

故に視天頂距離より地心天頂距離を求むる公式は次ぎの如し

$$\zeta=\zeta'-\pi \sin\zeta'=\zeta'-\frac{a}{\Delta \sin 1''}\sin\zeta'$$

視差を知りて距離を求む

天體の地平視差を知りて距離を求むること。 或天體の視差及び視天頂距離を知れば該天體と地球との距離を計算し得可し。即ち p 及び ζ' を知れば Δ を求め得可し。

$$\Delta=\frac{a}{p}\sin\zeta'$$

然れど地平視差 π を知れば一層簡單なる式を採用し得即ち

$$\Delta=\frac{a}{\pi}$$

方位角の視差

天體の方位角に視差の影響。 今地球を球形のものと假定すれば其地の子午面と地心天體及觀測地によりて決定せらるゝ平面との交りは第六圖にて OT を以て示さるゝもの故方位角は視差の影響を蒙ることなし。)

時角赤緯の視差

時角北極距離又は赤經赤緯に視差の影響。 吾等は旣に第三章に於て天頂距離と方位角とを時角及び北極距離に變更する公式を求めたり。彼公式を見るに時角も北極距離も共に天頂距離の函數なるを以て視差の影響を受くるや必せり。其他赤經赤緯も同樣に視差の影響を受く可し。されど玆には一々其等の計算を行はず。

地球の扁率を考へたる場合

地球を橢圓體と考へたる時の視差。 以上列擧せる所は地球を球形のものと假定せるものなれども地球の扁率を考ふれば一層複雜のものとなる可し。今觀測地を原點とし子午面地平面卯酉面を坐標面に取り子午面と地平面との交りを x の軸とし、東西線を y の軸とし、z 軸を鉛直線に取り、更に原點即ち觀測地より天體に至る距離を Δ' にて其の視天頂距離を ζ' にて視方位角を A' にて表はし上述の坐標軸に照せる坐標を x' y' 及 z' にて表はす時は次の關係あり。

$$x' = \Delta' \sin\zeta' \cos A'$$
$$y' = \Delta' \sin\zeta' \sin A'$$
$$z' = \Delta' \cos\zeta'$$

更に地球の中心を原點となし、上の坐標軸に平行なる軸を取り是等に照らして測れる天體の坐標を x y 及 z にて表はし、天體の地心天頂距離を ζ にて地心方位角をAにて表はす時は次の關係を得

$$x = \Delta \sin\zeta \cos A$$
$$y = \Delta \sin\zeta \sin A$$
$$z = \Delta \cos\zeta$$

今後の坐標軸に照せる觀測地の坐標を求め之を a b c にて表せば

$$a = \rho \sin(\varphi - \varphi'), \quad b = 0, \quad c = \rho \cos(\varphi - \varphi')$$

となるを以て坐標を轉換すれば次の如き式を得可し

$$x = x' + a, \quad y = y' + b, \quad z = z' + c$$

故に

$$\begin{cases} \Delta' \sin\zeta' \cos A' = \Delta \sin\zeta \cos A - \rho \sin(\varphi - \varphi') \\ \Delta' \sin\zeta' \sin A' = \Delta \sin\zeta \sin A \\ \Delta' \cos\zeta' \qquad = \Delta \cos\zeta \qquad - \rho \cos(\varphi - \varphi') \end{cases}$$

赤道地平視差

前に吾等は地平視差を考へ其際地球の半徑を定數と見たるも地球は其實廻轉橢圓體なる故地平視差は常に同一ならず。今觀測者の位置が赤道にある場合にては最大の値を得之を赤道地平視差と稱す。依て地球の長軸を單位とすれば

$$\sin\pi = \frac{1}{\Delta}$$

となる。故に $\frac{1}{\Delta}$ の代りに $\sin\pi$ を置き $\frac{\Delta'}{\Delta} = f$ とすれば下の三式を得

$$\text{(A)} \quad \begin{cases} f \sin\zeta' \cos A' = \sin\zeta \cos A - \rho \sin\pi \sin(\varphi - \varphi') \\ f \sin\zeta' \sin A' = \sin\zeta \sin A \\ f \cos\zeta' \qquad = \cos\zeta \qquad - \rho \sin\pi \cos(\varphi - \varphi') \end{cases}$$

第一の式に $\sin A$ 第二に $-\cos A$ をかけて加へたる結果と第一に $\cos A$ 第二に $\sin A$

をかけて加へたる結果とを求むれば次式あり

$$(\mathrm{B})\quad\begin{cases} f\sin\zeta'\sin(\mathrm{A}'-\mathrm{A})=\rho\sin\pi\sin(\varphi-\varphi')\sin\mathrm{A} \\ f\sin\zeta'\cos(\mathrm{A}'-\mathrm{A})=\sin\zeta-\rho\sin\pi\sin(\varphi-\varphi')\cos\mathrm{A} \end{cases}$$

故に

$$\tan(\mathrm{A}'-\mathrm{A})=\frac{\rho\sin\pi\sin(\varphi-\varphi')\sin\mathrm{A}}{\sin\zeta-\rho\sin\pi\sin(\varphi-\varphi')\cos\mathrm{A}}$$

吾等は此式によりて地心位置の與へられたる時 $\mathrm{A}'-\mathrm{A}$ を求め得可し。更に(B)の第一に $\sin\frac{1}{2}(\mathrm{A}'-\mathrm{A})$ 第二に $\cos\frac{1}{2}(\mathrm{A}'-\mathrm{A})$ を乘じて之等を加へ $\cos\frac{1}{2}(\mathrm{A}'-\mathrm{A})$ にて除する時は次式を得

$$f\sin\zeta'=\sin\zeta-\rho\sin\pi\sin(\varphi-\varphi')\frac{\cos\frac{1}{2}(\mathrm{A}'+\mathrm{A})}{\cos\frac{1}{2}(\mathrm{A}'-\mathrm{A})}$$

今

$$\tan\gamma=\tan(\varphi-\varphi')\frac{\cos\frac{1}{2}(\mathrm{A}'+\mathrm{A})}{\cos\frac{1}{2}(\mathrm{A}'-\mathrm{A})}$$

と置けば

$$(\mathrm{C})\quad\begin{cases} f\sin\zeta'=\sin\zeta-\rho\sin\pi\cos(\varphi-\varphi')\tan\gamma \\ f\cos\zeta'=\cos\zeta-\rho\sin\pi\cos(\varphi-\varphi') \end{cases}$$

(A)の第三式

此二式を前と同様に變化する時は

$$(\mathrm{D})\quad\begin{cases} f\sin(\zeta'-\zeta)=\rho\sin\pi\cos(\varphi-\varphi')\dfrac{\sin(\zeta-\gamma)}{\cos\gamma} \\ f\cos(\zeta'-\zeta)=1-\rho\sin\pi\cos(\varphi-\varphi')\dfrac{\cos(\zeta-\gamma)}{\cos\gamma} \end{cases}$$

故に

$$\tan(\zeta'-\zeta)=\frac{\rho\sin\pi\cos(\varphi-\varphi')\sin(\zeta-\gamma)}{\cos\gamma-\rho\sin\pi\cos(\varphi-\varphi')\cos(\zeta-\gamma)}$$

となるを以て天頂距離の視差を計算し得可し。若しΔ'を求めんと欲すれは(D)の第一に $\sin\frac{1}{2}(\zeta'-\zeta)$ 第二に $\cos\frac{1}{2}(\zeta'-\zeta)$ を乘じて之を加へ得たる結果を $\cos\frac{1}{2}(\zeta'-\zeta)$ にて除せば

$$f=1-\frac{\rho\sin\pi\cos(\varphi-\varphi')\cos[\frac{1}{2}(\zeta+\zeta')-\gamma]}{\cos\gamma\cos\frac{1}{2}(\zeta'-\zeta)}$$

依てΔをかくれば，を得可し

$$\Delta'=\Delta-\frac{\rho\cos(\varphi-\varphi')\cos[\frac{1}{2}(\zeta+\zeta')-\gamma]}{\cos\gamma\cos\frac{1}{2}(\zeta'-\zeta)}$$

若し視位置を觀測せる時地心位置を求めんとせは上の公式を用ふること能はず。今其際用ふ可き公式を求めん。(C)の第一に $\cos\zeta'$ 第二に $-\sin\zeta'$ をかけて之

を加ふれは

$$\text{(E)}\quad \sin(\zeta'-\zeta)=\frac{\rho\sin\pi\cos(\varphi-\varphi')\sin(\zeta'-\gamma)}{\cos\gamma}$$

然るに $\cos(\varphi-\varphi')$ 及 $\cos\gamma$ は何れも殆ど1に等しきもの故次式を用ひ得

$$\sin(\zeta'-\zeta)=\rho\sin\pi\sin(\zeta'-\gamma)$$

又 γ は小なる故 $\tan\gamma$ の式にて $\tan\gamma=\gamma$, $\tan(\varphi-\varphi')=\varphi-\varphi'$, $\frac{\cos\frac{1}{2}(A'+A)}{\cos\frac{1}{2}(A'-A)}=\cos A'$ と置けは簡單に

$$\gamma=(\varphi-\varphi')\cos A'$$

を得故に此式にて γ を求むれは上の式より $\zeta'-\zeta$ を得可し。又(A)の第一に $\sin A$ を第二に $-\cos A'$ をかけて加ふれば

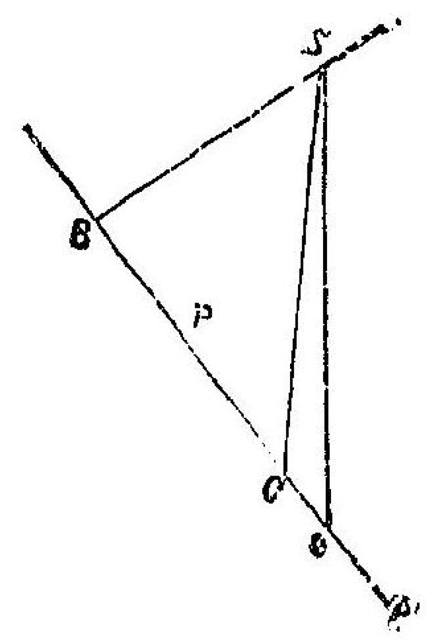
$$\text{(F)}\quad \sin(A'-A)=\frac{\rho\sin\pi\sin(\varphi-\varphi')\sin A'}{\sin\zeta}$$

を得可し依て豫め $\zeta'-\zeta$ を計算して $\zeta=\zeta'-(\zeta'-\zeta)$ を求むれば此式によりて視方位角を地心方位角となすことを得可し。

別法

別法。 上に論じたるが如く直接に地球面上の點を地心に變更する代りに間接に地心坐標と視坐標とを觀測地の鉛直線と地軸とか會合する點に直し、之によりて地心位置を視位置となす方法あり。吾等は此點をOと稱せん。定義によりO點が天球の軸上にある故Oと星とを連ねたる線は其星の等赤經線の面内にあり。從てOより見たる星の位置は赤緯のみ變化を受け赤經は地心位置と相等し。

(α) 赤緯をO點に直すこと。圖にて PP′ を地軸、C を地心、O を所觀測地の緯度を φ とすれば CO は第五圖の CO なるを以て同圖の三角形 ACO より



第七圖

O、S を星とし、

$$CO=\rho\frac{\sin(\varphi-\varphi')}{\cos\varphi}=\frac{\rho\cos\varphi'\sin\varphi-\rho\sin\varphi'\cos\varphi}{\cos\varphi}$$

故に第四章の終りの部を參考して次式を得

$$CO=\frac{ae^2\sin\varphi}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)}}$$

依て CO を ai とすれば $i=\frac{e^2\sin\varphi}{\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)}}$ あり。

今 $\Delta=SC$, $\Delta_1=SO$, $\delta=90°-PCS$, $\delta_1=90°-POS$ と置き SB を地軸に直角に引けば直

三角形 SCB, SOB より次式を得。

$$\Delta_1 \sin\delta_1 = \Delta \sin\delta + ai, \quad \Delta_1 \cos\delta_1 = \Delta \cos\delta$$

即ち Δ_1 δ_1 を決定し得可し。又是等を多少變化して

$$\begin{cases} \Delta_1 \sin(\delta_1 - \delta) = ai \cos\delta \\ \Delta_1 \cos(\delta_1 - \delta) = \Delta + ai \sin\delta \end{cases}$$

更に $f = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$, $\sin\pi = \dfrac{a}{\Delta}$ と置けば π は赤道地平視差にして次式あり

$$\begin{cases} f_1 \sin(\delta_1 - \delta) = i \sin\pi \cos\delta \\ f_1 \cos(\delta_1 - \delta) = 1 + i \sin\pi \sin\delta \end{cases}$$

故に

$$\tan(\delta_1 - \delta) = \frac{i \sin\pi \cos\delta}{1 + i \sin\pi \sin\delta}$$

依て之を級數に展開すれば三角術の公式にて

$$\delta_1 - \delta = \frac{i \sin\pi \cos\delta}{\sin 1''} - \frac{(i \sin\pi)^2 \sin 2\delta}{2 \sin 1''} + \cdots\ \cdots\cdots$$

然るに右邊の第二項は i^2 故に e^4 を含み且つ $\sin^2\pi$ を以てかけられ居る故月の場合にても尚影響を及さず、故に上式は次の如く約するを得。

$$\delta_1 - \delta = i\pi \cos\delta$$

次に Δ_1 を求むれば上にて Δ' を求めたると同一方法により

$$\Delta_1 = \Delta\left\{1 + i \sin\pi \frac{\sin\frac{1}{2}(\delta_1 + \delta)}{\cos\frac{1}{2}(\delta_1 - \delta)}\right\}$$

を得。然るに δ_1 δ の差が甚だ小なるを以て

$$\Delta_1 = \Delta(1 + i \sin\pi \sin\delta)$$

若し又 $i = \Delta \sin\varphi$ と置き A を φ の目安にて表となせば

$$\delta_1 - \delta = \Delta\pi \sin\varphi \cos\delta$$

$$\Delta_1 = \Delta(1 + \Delta \sin\pi \sin\varphi \sin\delta)$$

(b) 天頂距離を O 點に直す際の視差を求む。圖にて ZAO を觀測者 A の鉛直線とし、S を星、SB を ZO への垂線とすれば AO は第五圖の AO にして即ち法線なり。之を N にて表はせば第五圖より容易に次式を得

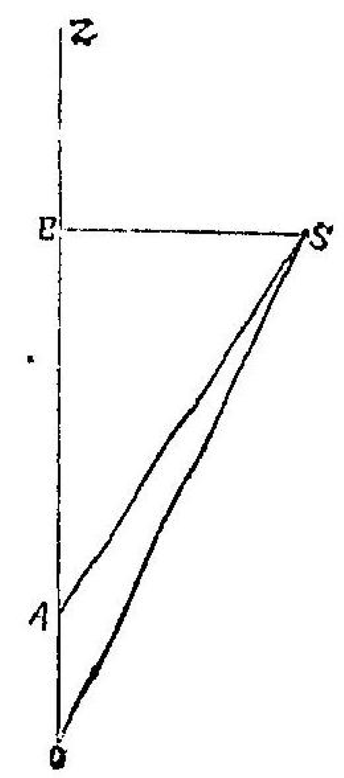
$$N = \frac{a}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2\varphi)}}$$

第四章の最後の公式にて $e^4\sin^2\varphi$ の代りに $e^4\sin^4\varphi$ を置けば ρ の近似値を得。即ち

$$\rho = a\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi)}$$

視差の計算には右の式を用ゐれば充分精密なり。偖 $a=1$ を置けば N は $1/\rho$ となる。

第八圖



今更に $\zeta_1=SOZ$, $\zeta'=SAZ$ と置けば三角形 OSB, ASB より次ぎの二式あり。

$$(a)\quad \Delta'\cos\zeta'=\Delta_1\cos\zeta_1-\frac{1}{\rho},\quad \Delta'\sin\zeta'=\Delta_1\sin\zeta_1$$

依て前と同様に $\frac{\Delta'}{\Delta_1}=f_1$, $\sin\pi_1=\frac{1}{\rho\Delta_1}$ と置けば

$$\begin{cases} f_1\cos\zeta'=\cos\zeta_1-\sin\pi_1 \\ f_1\sin\zeta'=\sin\zeta_1 \end{cases}$$

之を變化して

$$\begin{cases} f_1\sin(\zeta'-\zeta_1)=\sin\pi_1\sin\zeta_1 \\ f_1\cos(\zeta'-\zeta_1)=1-\sin\pi_1\cos\zeta_1 \end{cases}$$

$$\therefore\quad \tan(\zeta'-\zeta_1)=\frac{\sin\pi_1\sin\zeta_1}{1-\sin\pi_1\cos\zeta_1}$$

依て之を展開して

$$\zeta'-\zeta_1=\frac{\sin\pi_1\sin\zeta_1}{\sin1''}+\frac{\sin^2\pi_1\sin2\zeta_1}{2\sin1''}+\cdots\cdots$$

又 π_1 を求むるには次式によるべし

$$\sin\pi_1=\frac{1}{\rho\Delta_1}=\frac{1}{\rho\Delta(1+A\sin\pi\sin\varphi\sin\delta)}$$

或は

$$\sin\pi_1=\frac{\sin\pi}{\rho(1+A\sin\pi\sin\varphi\sin\delta)}$$

されど多くの場合には單に次の如き公式によるも可なり

$$\sin\pi_1=\frac{\sin\pi}{\rho},\quad or\quad \pi_1=\frac{\pi}{\rho}$$

今 $\pi_1-\pi$ を $\Delta\pi$ と置けば $\Delta\pi=\pi\left(\frac{1}{\rho}-1\right)$ は簡單に表となすを得故に

$$\pi_1=\pi+\Delta\pi.$$

(c) 視位置を知れる時天頂距離をOに直す爲めの視差を求む。(a) の第一に $\sin\zeta'$ を第二に $\cos\zeta'$ を乗じたるものを引けば次式あり

$$\sin(\zeta'-\zeta_1)=\frac{1}{\rho\Delta_1}\sin\zeta'$$

或は

$$\sin(\zeta'-\zeta_1)=\sin\pi_1\sin\zeta'$$

若し視高度をh'、O點に直せる高度をh_1にて表はせば上の式は次式となる。

$$\sin(h_1-h')=\sin\pi_1\cos h'$$

視差の問題は此外時角赤經緯等に及ぼす影響等尚數多あれど、本章にては之を略し、濛氣差に轉ぜん。

第六章　濛氣差

屈折の法則

光線屈折の法則。 地球は大氣を以て圍繞せらるゝもの故遠き天體より發する光線が觀測者の眼に達するまでに屈折の影響を受け多少其方向を變化するものなり。即ち觀測より得たる高度は其影響を受くるを以て眞正のものを得んとせば之に修正を加へざる可からず。吾等は之を濛氣差と稱す。濛氣差を研究するに當り先づ光線の屈折に關する一般法則を知る必要あり。光學の敎ふる所によれば(一)光線が密　を異にする二種の媒質の境界面に來る時は突然其方向を變ず、されど投射光線と投射點より引ける境界面の法線とによりて決定せらるゝ平面は又屈折光線をも含む。(二)密度の大なるものより小なる媒質へ向ふ時は概して法線より遠かり、若し粗なるものより密なるものへ向ふ時は之と反對に法線に接近す。(三)投射角の如何に關せず、其角の正弦と之に相應する屈折角の正弦との比は兩媒質の密度の一定せる間は常に定數なり。今光線が眞空よりある媒質へ進入する際如上の比を求むれば其定數を該媒質の屈折係數と稱す。從て(四)光線が一媒質より他へ進入する時投射角の正弦と屈折角の正弦との比を求むれば其は二媒質の屈折係數に反比例す。

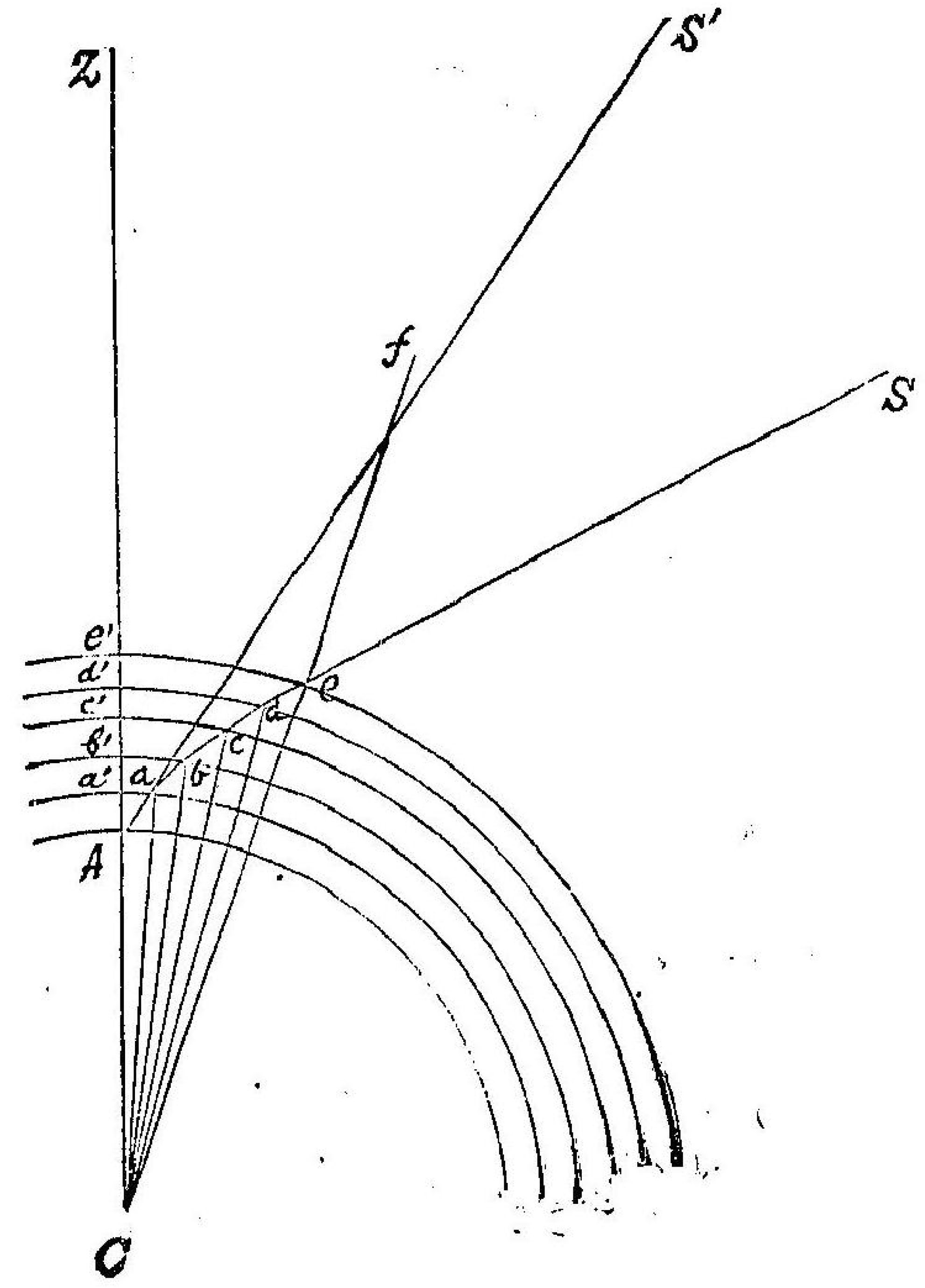
濛氣差

濛氣差。 今星の光が通過する大氣の海を考ふるに地球面上或高さに達する時は眞空となり大氣の存在を認知する能はざるならん。然るに次第に地面に接近すると共に其密度を變化し地上にて最大密度に達するを以て星の光線が大氣の上層まで一直線にて進行し來るとも是より漸次密度の大なる媒質に入るを以て光線の途は地球の方向に凹なる曲線を畫く可し。從て觀測者の星を見る方向は此曲線の終點より引ける切線の方向なり。此方向と光線が大氣に進

入する以前有せる方向との差を濛氣差と稱す。

第九圖にてSeを星より來れる光線が大氣の上層eに入るまでの方向とし夫れより次第に屈折してAに達せるものとすればAにある觀測者は其點より曲線に引ける切線$S'A$の方向に星を見る可し。今CAZをA點の鉛直線とすれば屈折の概則によりてAZとAS'とを含む平面は同時にAeなる曲線とSeとを含まざる可からず。由是觀之高度は濛氣差の影響する所となるも方位角は然らず。

第九圖



濛氣差を研究するに當り地形の形を球と考へ之を包被せる大氣が地球の中心を中心とせる無數の同心球層より成立し各層何れも一樣なる密度を有し光線が其層を通過する間は直線をなすものと考ふるも大なる誤りなし。今圖に於てCを地心としAを觀測點となしCAZを鉛直線とし同心球層の厚さを$Aa', a'b', b'c'$等とし星より來れる光線Seがe點にて大氣に入り之よりed, dc, cb等漸次方向を變化し遂にAに達せりとせよ。此際層の數が無限なりと想像せばedはecA曲線に切す可し。更にe d c等より法線Ce, Cd, Cc等を引けばSefは最初の投射角にしてCedは最初の屈折角なり。又eとAとの中間にある點例へばC點を考ふるにCcdは投射角の補角にしてCcbは屈折角なり。今c點にてiを以て投射角を　を以て屈折角をμを以てcの上層の屈折係數をμ'を以てcの下層の屈折係數を表はせば

$$\text{(A)} \qquad \frac{\sin i}{\sin j} = \frac{\mu'}{\mu}$$

更らにqにて法線Ccの長さをq'にてCbの長さを又i'にて$180° - Cbc$を表はせはCbc三角形より次式を得

$$\frac{\sin i'}{\sin f}=\frac{q}{q'}$$

故に　(B)　$q\mu\sin i=q'\mu'\sin i'=a\mu_0\sin z$

此式を見るに各層の法線屈折係數及投射角の正弦の相乘積は何れも相等しきを示す、依て定數なり。故にA點に於ける相當相乘積 $a\mu_0\sin z$ に等し。

(A)式を變化して

$$\tan\tfrac{1}{2}(i-f)=\frac{\mu'-\mu}{\mu'+\mu}\tan\tfrac{1}{2}(i+f)$$

を得依て $i-f$ を屈折角の微分と考へ $\tan\tfrac{1}{2}(i-f)=\tfrac{1}{2}dr$ とし、$\mu'-\mu=d\mu$, $\mu'+\mu=2\mu$, $\tan\tfrac{1}{2}(i+f)=\tan i$ と置けば次式あり

濛氣差の微分方程式

(C)　$dr=\dfrac{d\mu}{\mu}\tan i$

ブーゲーの研究。 此式は濛氣差の微分方程式にして之を積分すれば濛氣差を求め得可し。然るに μ と i とが共に變數なるが故 i を μ の函數に表すことを得るに非ずんば r を得ること能はず。i と μ との關係は未だ知ることを得ざるもの故次ぎの如き假定をなす。即ち屈折係數のある冪乘は法線の長さに反比例す。

$$\left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^{n+1}=\frac{a}{q}$$

故に　(D)　$\sin i=\left(\dfrac{\mu}{\mu_0}\right)^n\sin z$　(B)によりて

之を對數式となせば

$$\log\sin i=n\log\mu+\log\left(\frac{\sin z}{\mu_0{}^n}\right)$$

更に之を微分する時は次式を得

$$\frac{di}{\tan i}=n\frac{d\mu}{\mu}$$

之を(C)に用ふれは次ぎの如き簡單なるものを得

$$dr=\frac{di}{n}$$

依て之を積分すれば

$$r=\frac{i}{n}+C$$

Cは定數なり、之を決定するには大氣の上層より地球の表面に至るまで積分するを以て足れりとす。上層にありては $r=0$ なり依て其處に於て i の値を θ にて表はせば

$$0=\frac{\theta}{n}+C$$

又地球表面にて r の値は即ち求めんとする r 全部にして $i=z$ なり依て

$$r=\frac{z}{n}+C$$

故にCを消去して

$$r=\frac{z-\theta}{n}$$

θ を見出す爲め上層に於ける μ を考ふるに其處は大氣の密度零なるを以て $\mu=1$ と置くを得可し。故に之を(D)に應用すれば

$$\text{(E)}\quad \sin\theta=\frac{\sin z}{\mu_0^{\,n}}$$

されば地球表面に於ける屈折係數 μ_0 を測定し且つ適宜の n を用ふれば θ を求め得可く從て r を得可し。上の二式を單一の式にて表はせば

$$r=\frac{1}{n}\left\{z-\sin^{-1}\left(\frac{\sin z}{\mu_0^{\,n}}\right)\right\}$$

ブーゲーの式

尚一層都合良き形をなせる式を求めんとせば(E)を變化して

$$\frac{\sin z-\sin\theta}{\sin z+\sin\theta}=\frac{\mu_0^{\,n}-1}{\mu_0^{\,n}+1}$$

$$\therefore\quad \tan\tfrac{1}{2}(z-\theta)=\frac{\mu_0^{\,n}-1}{\mu_0^{\,n}+1}\tan\tfrac{1}{2}(z+\theta)$$

$$\therefore\quad \tan\frac{n}{2}r=\frac{\mu_0^{\,n}-1}{\mu_0^{\,n}+1}\tan\left(z-\frac{n}{2}r\right)$$

此式にて濛氣差の近似値を求むるには次の如くするを得

$$r=g(z-fr)$$

g と f とは觀測によりて決定す可き定數なり。ブラッドレーが氣壓二十九、六インチ氣溫五十度の時に適するものとして次ぎの値を得たり。

$$g=57''.036\qquad f=3$$

上に記せる濛氣差の理論はブーゲー氏の創めしものなるが此外ラプラース、ベッセル等の論ぜるものあり。今是等兩氏が得たる公式のみを掲げん。

ラプラースの式

ラプラースの公式。 但し $T=25.962\cos z$

$$r=2790''.16\,(0.75479-0.49042T^2)\sin z\,\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-T^2}\int_T^\infty e^{-t^2}dt$$
$$+10021''.34\sin 2z$$

ベッセルの式

ベッセルの公式。 p_0 τ_0 δ を標準氣壓標準氣溫標準密度とし、p τ δ を觀測せる氣壓氣溫密度とし、ϵ を定數とし A と λ とが殆ど一に近き數にて表より求め得るものとすればベッセルの公式は次の如し。

$$r=r_0\left(\frac{p}{p_0}\right)^A\left\{\frac{1}{1+\epsilon(\tau-\tau_0)}\right\}^\lambda$$

今更に次ぎの如く置けば

$$r_0=\alpha\tan z,\quad \frac{p}{p_0}=\beta,\quad \gamma=\frac{1}{1+\epsilon(\tau-\tau_0)}$$

公式は

$$r=\alpha\beta^A\gamma^\lambda\tan z$$

ベッセルは此公式にて表を作れる故之を用ふれば z を目安として α A λ を得氣壓を目安として β を得氣溫を目安として γ を得る故 r を簡單に計算するを得可し。

第七章　天體の視半徑

大陽月惑星等を觀れば圓形を呈するが故其中心の位置を直ちに觀測することを得ず、從て是等の高度を測らんとせば其上端又は下端の高度を測り半徑の修正を加ふ。若し又是等の子午線經過を觀測せんと欲せば先づ西端の經過を觀測し更に東端の經過を觀測して半徑の影響を去るか或は東西の一端のみを觀測して半徑の修正をなす。依て吾等は更に天體の半徑につき研究せざる可からず。

視半徑

視半徑。 今第十圖に於てTを地球の中心としAを天體の中心としOを地球表面上にある觀測者の位置とし、Oより天體に切線OB′を引き又AOを引けばAOB′角は天體の半徑が觀測者の目に於て含む角にして吾等は之を視半徑と稱するものなり。更にTAを引き又Tより天體に切線TBを引けば天體の半徑は前と同樣に地心に於てATB角を含む之を地心半徑と稱す。今Sを以て地心半徑を表はしS′を以て視半徑を表はし又Δ及Δ′を以て地心及觀測地より天體の中心

に至る距離を表はし、a にて地球の赤道半徑を、a' にて天體の半徑を表せば三角形 AOB′ 及び ATB より

$$\sin S=\frac{a'}{\Delta}$$

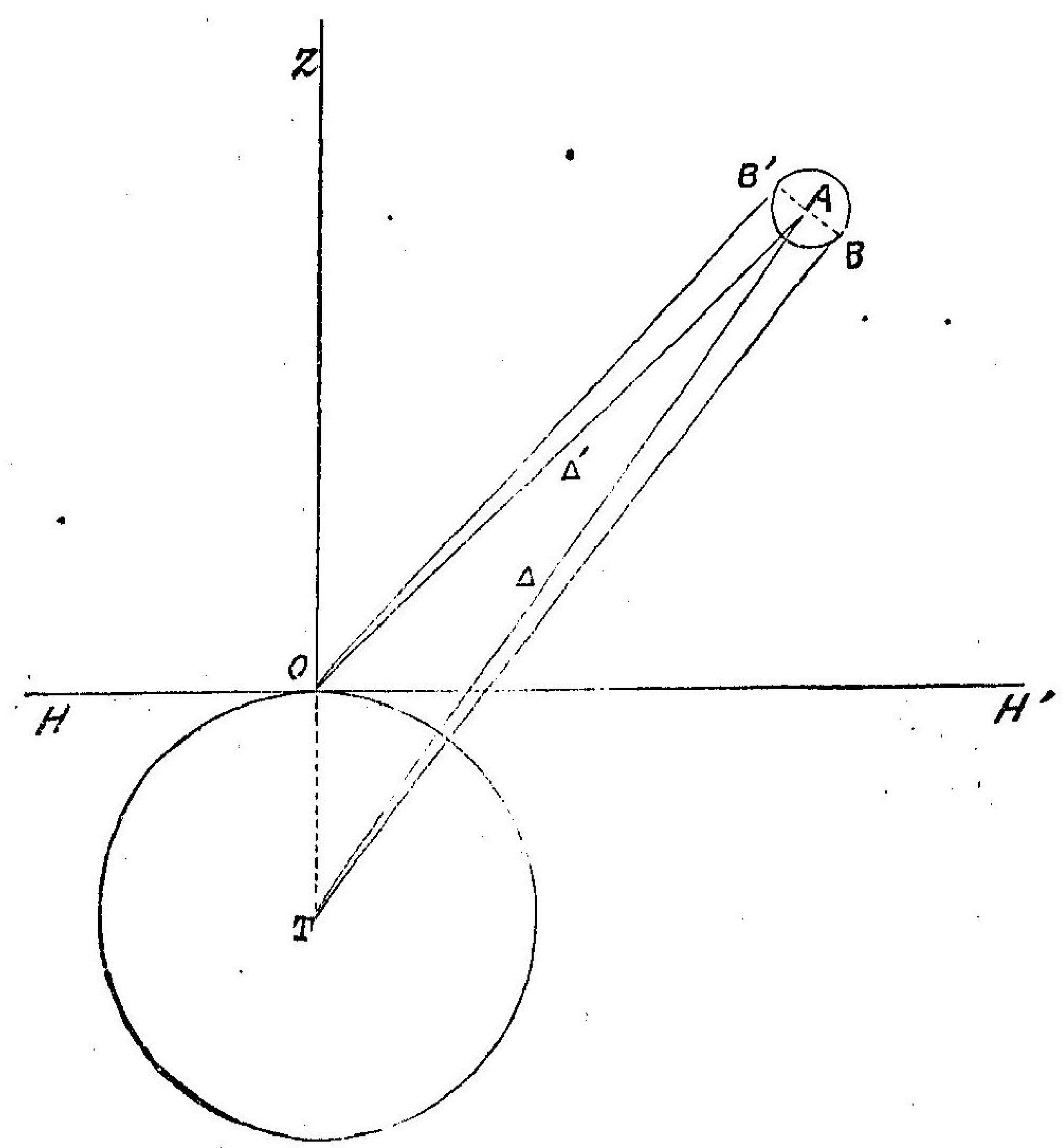
$$\sin S'=\frac{a'}{\Delta'}$$

を得然るに此天體の赤道地平視差を π にて表はせば

$$\sin\pi=\frac{a}{\Delta}$$

なるを以て次ぎの如く書くを得可し。

第十圖



$$\sin S=\frac{a'}{a}\sin\pi \qquad \sin S'=\frac{\Delta}{\Delta'}\sin S$$

多くの場合には正弦を角に置き換へ次式を用ひ得べし。

$$S=\frac{a'}{a}\pi \qquad S'=\frac{\Delta}{\Delta'}S.$$

故に

$$\frac{S'}{S}=\frac{\Delta}{\Delta'}$$

依て TOZ を引き Z を天頂の方向とすれば ZOA は天體の視天頂距離にして A′TZ は地心天頂距離なり。前者を ζ' にて後者を ζ にて表はせば三角形 TOA より

$$\frac{\Delta}{\Delta'}=\frac{\sin\zeta'}{\sin\zeta}$$

を得然るに視差 OAT を p にて表はせば次式を得

$$\frac{S'}{S}=\frac{\sin\zeta'}{\sin(\zeta'-p)}=\frac{\sin\zeta'}{-\sin p\cos\zeta'+\cos p\sin\zeta'}$$

p は通例小なるを以て $\cos p=1,\ \sin p=p\sin1''$ と置けば

$$\frac{S'}{S}=\frac{\sin\zeta'}{\sin\zeta'-p\sin1''\cos\zeta'}$$

更に視差を論ぜし時得たる $p=\pi\sin\zeta'$ を導けば次の如きものとなる

$$\frac{S'}{S}=\frac{1}{1-\pi\sin1''\cos\zeta'}$$

今此式の第二項を二項式定理によりて展開しSをかけて双方よりSを引けば

$$S'-S=S\pi\sin1''\cos\zeta'+\cdots\cdots\cdots$$

天體の視半徑を觀測せんと欲せば量日鏡を以て之を行へは極めて精密なる結果を得れども其他子午線經過を觀測するも尙之を求め得可し。今PZBを子午線とし天體の各側が子午線を經過する恒星時刻の差を $\Theta'-\Theta$ とし BSを半徑としPBSなる球面三角形を考ふれば $PS=90^\circ-\delta$, $BS=S'$, $\angle P=\frac{\Theta'-\Theta}{2}$ なる故に

$$\sin S'=\sin\frac{\Theta'-\Theta}{2}\sin\delta$$

S' 及び $\Theta'-\Theta$ が小なるが故正弦を角にて置き換へ S' を得

$$S'=15\frac{\Theta'-\Theta}{2}\sin\delta$$

月の如きは固有運動大なるが故 Θ' と Θ との差を補正せずんはある可からず。

高度の修正

高度の修正。以上數章にて高度を修正すべき種々のものを硏究せし故是等を適當に加ふれば天體の中心の地心高度又は地心天頂距離を得可し。今或天體の下端の視天頂距離 ζ_1 を觀測せりとすれば之よりS′を引きて其天體の中心の視天頂距離 ζ'' を得可し即ち

$$\zeta''=\zeta_1-S'$$

然るに天頂距離は濛氣差の影響を受くるが故濛氣差 r を加へて ζ' を得可し

$$\zeta'=\zeta_1-S'+r$$

茲に於て更に視差 p を引けば地心天頂距離 ζ を求め得可きなり。

$$\zeta=\zeta_1-S'+r-p$$

方位角にありては地球を球と假定すれば視差及び濛氣差の影響を受けざれども視半徑の影響を受く。此影響は簡單なる球面三角形の關係より $S'\operatorname{cosec}\zeta$ なるを知り得可し。

吾等は第二章に於て硏究の第一歩として天球を定義するに觀測者を中心とせる球となし其後更に地球の中心を中心とする球と改め地平赤道の如きも之に準じて修正せり。吾等が是より以後天球と稱するものは何れも後者を指すこ

とゝす。恒星の觀測に至りては其距離の大なるが爲め天球を後者に改むるも赤緯も赤經も之が爲めに變化することなし。即ち地球の半徑は星の距離に比較すれば甚だ小にして之を零と見るも差支なし故に恒星の觀測をなす場合には地球を點と見て可なり。從て恒星の高度を修正するに必要なるものは單に濛氣差のみにして視差半徑等は不必要なり。

第八章　大陽の黄道運動

大陽の視運動

大陽の視運動。 大陽は地球に棲息する人類に極めて顯著にして且つ重要なるもの故太古より之を觀測し其運動を研究せり。且つ大陽の光輝は大にして其出沒は自ら地球に明暗の差を與ふるを以て太陽の運動を利用し時間を測るは必然の結果とす。今大陽の運動を觀察するに恒星と同じく東方より昇り次第に南方に高く遂に最高に達したる後次第に西方に傾き漸く其高度を減じ遂に沒す。而かも翌朝に至れば再び東方より昇りて同一の運動を繰返へす。然れども次第に月日の經過するや同じく東方より昇ると云へども昇る時の方位角

は次第に變化す。之と同時に南天に來りて達する最大高度も次第に變化するを認む可し。從て太陽の運動は恒星の運動の如く毎日同一のものを繰返すにあらで長き時日の間次第に變化し行くものとす。倘一ヶ年間以上大陽の出沒方位及び毎日の最大高度を注意すれば是等は漸々變化するも一ヶ年を經れば再び同一の現象を繰返へすを見る即ち大陽の運動は一年を週期とするものなり。否な吾等は後に說明するが如く一年とは大陽の運動を基として人類の制定せる時の單位なり。

黄道
地方恒星時

黄道。 今子午環儀と恒星時時計とを用ゐて毎日大陽中心の子午線經過をなす時刻と其際有する高度とを測定し、豫め時計面の時刻が地方恒星時即ち吾等が天體の赤經を測るに用ふる基點γが其地の子午線を經過する時零時零分零秒を示す樣に整へ置けば此觀測によりて大陽の赤經赤緯を求め得可し。倘每日此觀測を行へば赤經も赤緯も共に變化するを認む。依て一ヶ年以上觀測を續くれば(一)赤經は一年間に二十四時間の變化を來し(二)赤緯は亦同じく一年を週期とし凡そ正二十三度半と負二十三度半との間を往復するを知り得可し。由

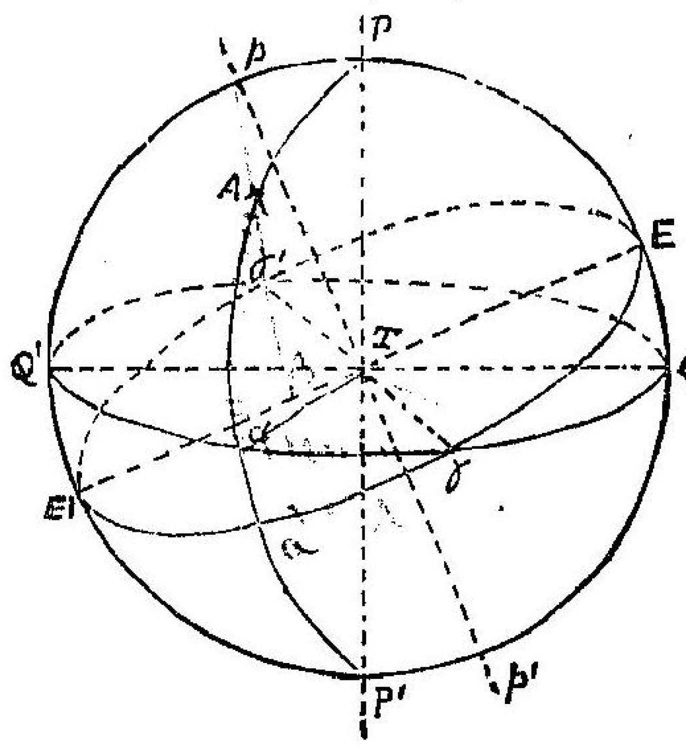
春分點　秋分點

是觀之太陽は一年間に天球上に一定の途を畫いて一週轉するものなり。此途を稱して黄道と云ふ。是より黄道と赤道との關係を求めんが爲め天球儀を取り此上に順次大陽毎日の位置を記せば是等の諸點は一個の大圓上にあり依て黄道なるものは赤道の如く天球の大圓なるを知る。然るに兩者は相一致せざる故兩者必す二點に於て相會す可し。即ち第十一圖に於てPとP′とを兩極としQ,Q′を赤道としE,E′を黄道とすれば此兩者はγ及γ′の二點に會す可し。大陽が此等の點に來る時は赤緯が零となる。今圖に於て矢の方向が天球日週運動の方向を示すものとすれば大陽はE′より次第にγ點に來りEに向ふ此の如くγ點は大陽の赤緯が負より正に向ふ點なり之を春分點と稱し實に吾等が天球の赤經を測る基點とせるものなり。γ′點は大陽の赤緯が正より負に變化する點にて之を秋分點と稱す。大陽の春分點に來るは三月二十一日頃にて秋分點に來るは九月二十三日頃なり。

夏至點　冬至點　回歸年

大陽が黄道上を次第に運行し春分點より九十度丈進めば其赤緯最大となり此點を夏至點と稱す而して此時の赤緯は實に赤道に對する黄道の傾斜を示すものにして約二十三度二十七分なり。太陽が夏至點より更に黄道上に百八十度丈進行する時は再び二十三度二十七分の赤緯を有す可し、されど前者は正の値にして後者は負の値なり。此點を冬至點と稱す。第十一圖にてTを天球の中心としγγ′を春分と秋分とを連ねたる線とすればγγ′線はTを通過す。依てTよりγγ′に直角に黄道面上に直線EE′を引き天球との交點をE及E′とすればEは夏至點にしてE′は冬至點なり。是等二點の近傍にありては赤緯の變化殆ど認められず。恰かも太陽がとまるが如き現象を呈す故に之を至點と云ふ。大陽の夏至點に達するは六月二十一日頃にして冬至點に達するは十二月二十二日頃なり。

第十一圖



大陽がγより再びγに歸へるまでに要する時を恒星日にて表はせば三百六十六日奇零二四二二二にして之を回歸年と稱す。即ち普通吾等の用ふる一年なり。

春分點の決定

黃道の要素。 黃道の位置を決定するに必要なる要素は二個にして第一はγ點第二は赤道と黃道との斜角是れなり。若しγ點が決定せられざる時は吾等が前に既に假定せるが如く時計を地方恒星時に合はすること能はず。依て之を決定する方法を講ぜん。先づ或星が子午線を經過する時刻を赤經の基點として太陽の觀測を行へば既に說明せるが如く三月二十一日近くに太陽がγを通過するが故、其前後數日間の觀測を見れば赤緯が負の値より正に變ぜるを見る。依て觀測の記錄中に赤緯が零なる時刻を見出し得ればよし、若し然らざれば記錄より相連續せる二日間の觀測中其前者は赤經α'赤緯負δ_1後の日が赤經α''赤緯正δ_2を示し其間に赤緯が負より正に變化せる所を取り補間法によりて赤緯が零となる時刻の赤經の値αをα', α'', $-\delta_1$, $+\delta_2$より得れば$-\alpha$は時計を地方恒星時に直すに加ふ可き時間なり。

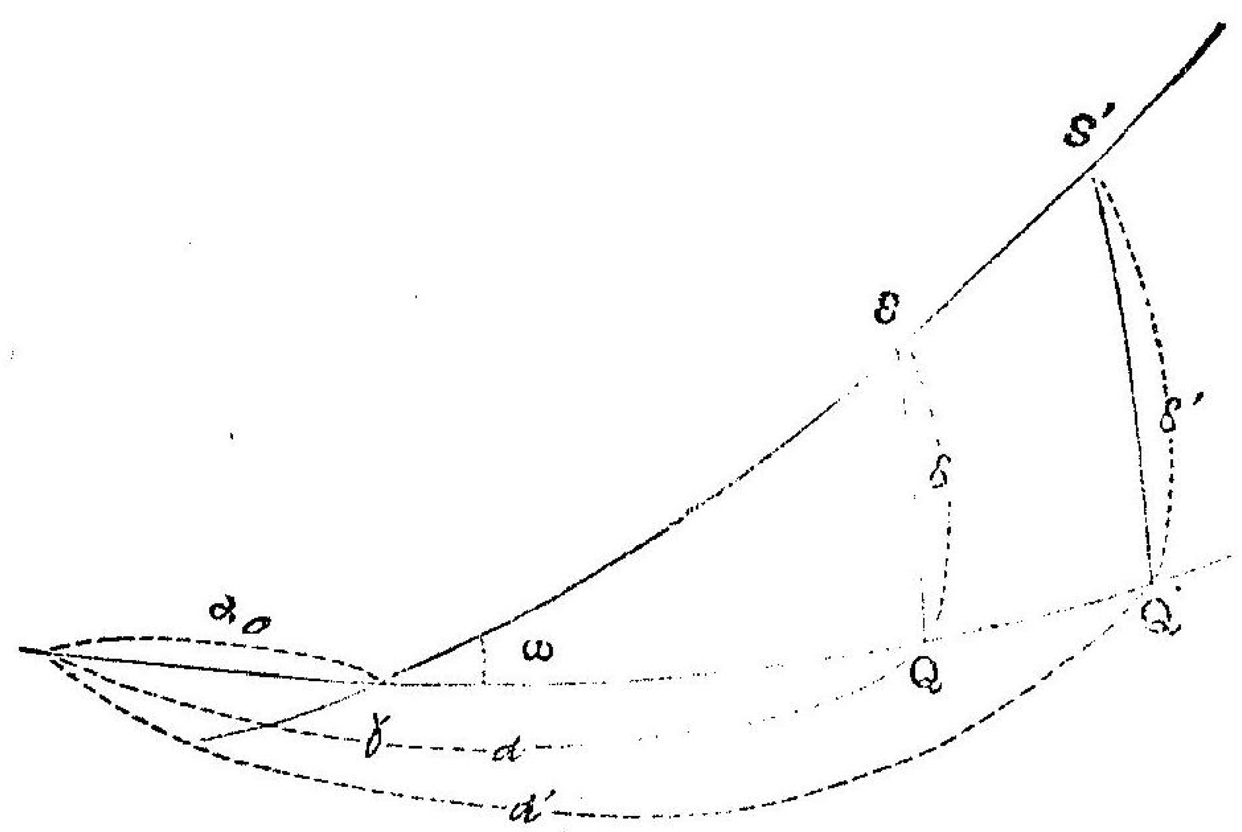
黃道の斜角

次ぎに黃道の斜角(εにて表はす)を決定せんと欲せば太陽の觀測記錄を吟味すれば夏至點に近き數日間は何れも殆ど等しき最大の赤緯を示す故其中間に位する時に示す赤緯を求むれば即ちωを得可きなり。

春分點と黃道の斜角との同時決定

上に述べたる外春分點と黃道の斜角とを同時に決定し得る方法あるを以て之を述べん。第十二圖に於て$\gamma QQ'$を赤道の一部$\gamma SS'$を黃道の一部とし其交點をγとすればωは斜角なり。今太陽がSにある時或星を標準として測定せる赤經がαにして赤緯がδを示し次ぎに太陽がS'に來れる時α' δ'なる赤經赤緯を與へたりとし更に吾等が求めんと欲するγ點の赤經をα_0とすれば圖にてSQはδ $S'Q'$はδ'を表はしQ及Q'の角が直角なるを以て球面三角形より次式を得

第十二圖



$$\begin{cases} \tan\omega\sin(\alpha-\alpha_0)=\tan\delta \\ \tan\omega\sin(\alpha'-\alpha_0)=\tan\delta' \end{cases}$$

此二式にて未知量はωとα_0なるを以て之を決定し得可し。是等を變化して

黄經、黄緯

$$\left\{\begin{aligned}\tan\delta'-\tan\delta&=2\tan\omega\sin\frac{\alpha'-\alpha}{2}\cos\left(\frac{\alpha'+\alpha}{2}-\alpha_0\right)\\ \tan\delta'+\tan\delta&=2\tan\omega\cos\frac{\alpha'-\alpha}{2}\sin\left(\frac{\alpha'+\alpha}{2}-\alpha_0\right)\end{aligned}\right.$$

$$\therefore\left\{\begin{aligned}2\tan\omega\cos\left(\frac{\alpha'+\alpha}{2}-\alpha_0\right)&=\frac{\sin(\delta'-\delta)}{\cos\delta'\cos\delta}\times\frac{1}{\sin\frac{\alpha'-\alpha}{2}}\\ 2\tan\omega\sin\left(\frac{\alpha'+\alpha}{2}-\alpha_0\right)&=\frac{\sin(\delta'+\delta)}{\cos\delta'\cos\delta}\times\frac{1}{\cos\frac{\alpha'-\alpha}{2}}\end{aligned}\right.$$

故にωとα_0とを得可し。偖SとS'とを如何に撰定すれば最も精密に是等の値を得可きかと云ふに上の二式にて$\sin\frac{\alpha'-\alpha}{2}$と$\cos\frac{\alpha'-\alpha}{2}$とが同時に大なる値を取るを要す。從てSを春分點に近くS'を夏至點に近く取ればω及α_0の値は精密に求めらる可し。

黄經及黄緯。第十一圖にてpとp'とを赤道の兩極としAを天球上にある天體の位置とし大圓PAP'とpAp'とを畫けばAの赤經はγaにして赤緯はaAなり。偖黄道を赤道の代りに標準となし、PとP'との代りにpとp'とを用ふれば矢張りAの位置を定め得可きは勿論なり。此の如くにして定めたる坐標を黄經及黄緯と稱す。圖に於てAの黄經は矢張りγ點より之を算しγよりpAp'と黄道との交點a'までの距離即ち$\gamma a'$是れなり。又黄緯は黄道よりpAp'に沿ふて測れる黄道と天體との距離Aa'なり。一般に黄經をλにて黄緯をβにて表はす。

赤經赤緯を黄經黄緯に變更する公式

是より赤經赤緯を黄經黄緯に變更する公式を求めん。今球面三角形pPAを考ふるにpPは赤道と黄道との斜角に等しきもの故ωなり、PAは赤緯の餘角、pAは黄緯の餘角、pPAは赤經に九十度を加へたるもの、PpAは黄經の餘角なるを以て

$$Pp=\omega,\ PA=90-\delta,\ pA=90-\beta,\ pPA=90+\alpha,\ PpA=90-\lambda$$

故に

$$\left\{\begin{aligned}\sin\beta&=\sin\delta\cos\omega-\cos\delta\sin\omega\sin\alpha\\ \cos\beta\sin\lambda&=\sin\delta\sin\omega+\cos\delta\cos\omega\sin\alpha\\ \cos\beta\cos\lambda&=\cos\delta\cos\alpha\end{aligned}\right.$$

$$\therefore\left\{\begin{aligned}\sin\beta&=\sin\delta\cos\omega-\cos\delta\sin\omega\sin\alpha\\ \tan\lambda&=\frac{\sin\omega\tan\delta+\cos\omega\sin\alpha}{\cos\alpha}\end{aligned}\right.$$

最後の二式にて β と λ とを α δ 及 ω の値にて求むるを得可し。太陽の場合にては太陽は常に黄道面に止まるを以て β は零なり。而して λ のみは一年に零度より三百六十度まで變化するものとす。此場合に赤經を黄經に變更せんには第十二圖にて太陽の位置をSとせば γS は黄經 γQ は赤經なるを以て球面三角形 $S\gamma Q$ より次式を得るを以て容易に α を λ に變ずるを得可し。

$$\tan\lambda = \frac{\tan\alpha}{\cos\omega}$$

黄經黄緯を赤經赤緯に變更する公式

若し夫れ黄經黄緯が與へられて赤經赤緯を求むる場合には前と同一の球面三角形より左の公式を得。

$$\left\{\begin{aligned}\sin\delta &= \cos\omega\sin\beta + \sin\omega\cos\beta\sin\lambda\\ \tan\alpha &= \frac{-\sin\omega\tan\beta + \cos\omega\sin\lambda}{\cos\lambda}\end{aligned}\right.$$

又太陽の場合にては次式を得べし。

$$\left\{\begin{aligned}\tan\alpha &= \tan\lambda\cos\omega\\ \sin\delta &= \sin\lambda\sin\omega\end{aligned}\right.$$

歲差

歲差。 古來赤經を測るに春分點を基點となせり。かくて得たる赤經は昔時不變のものと考へられしも、數多の天文學者が異なる時に觀測して作れる種々の恒星表を比較し見れば同一星の赤經赤緯が各一致せざるを見るべし。されど單に赤經赤緯のみを考ふれば直ちに之が變化の法則を發見すること能はず。依て赤經赤緯を黄經黄緯に變更し見るに直ちに之が法則を知り得可し。即ち星の黄緯は殆ど不易の値を有すれども之に反して黄經のみは時と比例し次第に增加す、而して其增加の割合は一回歸年につき五〇、二秒なり。

今其理由を考ふるに黄緯が常に不易の値を有するを以て見れば兎に角黄道面は天球上に不易の位置を占むるものならざる可からず。從て黄道の兩極も然りとす。偖黄經增加の事實より考ふれば γ 點は黄道上太陽の運動と反方向へ等速運動をなす、從て赤道の極が黄道の極と常に同一の斜角を保ち而かも前者は後者の周圍に殆ど二万五千八百年の週期を以て等速に圓運動をなすものと言へば此現象を明瞭に說明するを得。赤道の北極は現今北極星を去る一度四分の一にあれどヒッパルカスの恒星表を編せし頃には同星を去る十二度の所に

ありき。理論の示す所によれば今世紀中に北極は北極星を去る半度の所まで接近し夫れより再び遠かる可し。

此の如く春分點が黄道を逆行するを名けて歳差と稱す。

恒星年。回歸年の外恒星年と稱するものあり。此は太陽が天球上の一定點より出發し再び其點へ歸るまでに要する時を云ふ。若しγ點が天球に固定せる點ならば回歸年と恒星年とは全然等しき長さを有す可し。されど歳差の爲めγ點が五十秒以上逆行する故回歸年は幾分か恒星年よりも短し。

第九章　太陽の楕圓運動

前章に於て論ぜしことは凡て太陽を天球上に運動するものと見て種々の現象を考へたるまでなり。從て是まで屢々用ひたる黄道は實際太陽の運行する道にあらず、只太陽の運行する道即太陽の軌道によりて定められたる平面が天球と切る大圓たるのみ。吾等にして若し太陽の軌道を知らんと欲せば太陽と地球との距離を知らざる可からず。之を知らんと欲せば既に第五章に説明せる

太陽の赤道地平視差を求めざる可からず。されど今先づ太陽の軌道の形狀を知らんと欲せば種々の時に於ける比較的距離を知れば足れり。

軌道の形狀。既に第七章に論ぜる所により太陽の半徑rが地球の中心に於て含む角をSとし兩者の距離をΔにて表はせば

$$\sin S = \frac{r}{\Delta}$$

然るにSは小なる角故rを1と假定すれば

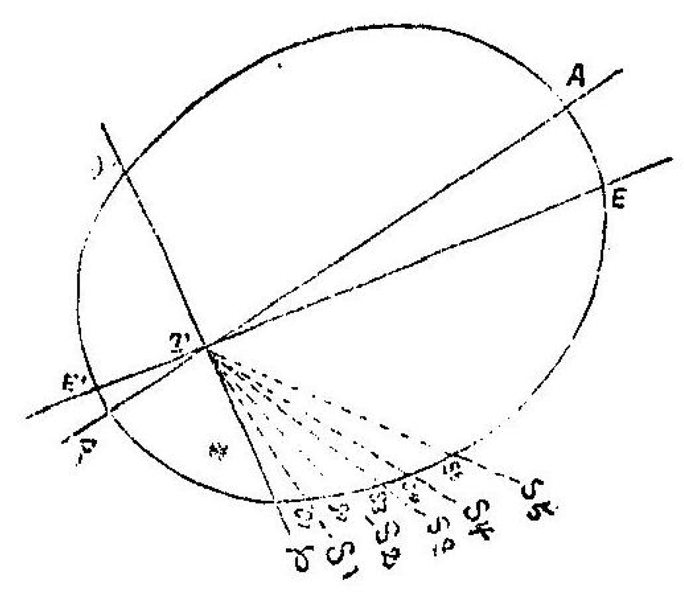
$$\Delta = \frac{r}{S\sin 1''} = \frac{1}{S\sin 1''}$$

と書くことを得可し。依て一ヶ年の間太陽の視半徑と位置とを觀測し前者は第七章によりて之を地心半徑に改算し更に一々此公式によりて毎日のΔを得可し。次きに毎日の太陽の位置即ち赤經赤緯を用ゐ前章の公式にて黄經を計算し黄經が$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$……なる時に夫れ々々に$\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3$……を得たりとせよ。然る時は次ぎの如くにして軌道の形狀を求め得可し。

第十三圖に示すが如く先づ一點Tを取りて地球の中心を表はさしめ次に之を

遠地點
近地點

貫きて γT を引き地心と春分點とを連ねたる線を表はすものとし軌道面が紙の面なりとすれば $\gamma TS_1=\lambda_1$, $\gamma TS_2=\lambda_2$, $\gamma TS_3=\lambda_3$・・・・ となる樣 TS_1, TS_2, TS_3・・・・ を引けば、吾等が觀測をなせる時の太陽の方向を得。然るに更に適當の縮尺を用ゐ TS_1, TS_2, TS_3・・・・ 線上に Δ_1 Δ_2 Δ_3 ・・ の長さに等しき Ts_1, Ts_2, Ts_3 なる長さを切り s_1 s_2 s_3・・・・ の諸點を曲線にて連結する時は該曲線は即ち太陽の軌道の形狀を示すものにして一個の楕圓なり。更に尚精細に之を見るにTは今見出せる楕圓の焦點の一に位し離心率は至て小く殆ど圓に近し。

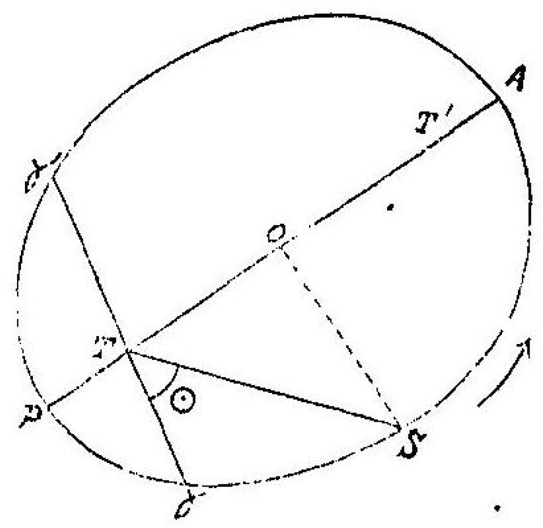


第十三圖

圖に於て PTA を長軸とし E'TE を二至線とすれば是等の二線が一致せずして十一度八分の角をなす。A點はTに最も遠き點にして之を遠地點と稱しPはTに最近の點にて近地點と稱せらる。

太陽軌道の要素。 太陽の軌道を完全に決定せんと欲せば第一長軸即ち AP の長さの二分の一、第二離心率即ち楕圓の中心OとTとの距離 OT と長軸との比、第三近地點の黃經即ち γTP 角を矢の方向に測れる度數を知る必要あり。

長軸の決定法



第十四圖

第一長軸の決定。 圖によりて AP=TA+TP 今求めんとする長軸を a にて表はせば

$$2a=TA+TP$$

依て TA, TP を知れば從て a を得。然るに TA, TP は太陽が遠地點及近地點に來れる時の距離なるを以て其時の視半徑は最小及最大ならざる可からず。今是等を夫れ〻〻に S_A, S_P にて表はせば

$$S_A=\frac{r}{TA\sin 1''} \qquad S_P=\frac{r}{TP\sin 1''}$$

故に

$$TA=\frac{r}{S_A\sin 1''} \qquad TP=\frac{r}{S_P\sin 1''}$$

量日鏡を以て直接觀測せる結果によれば

$$S_A=15'46''=946'' \qquad S_P=16'18''=978''$$

依て此値を上式に入れて計算すれば

$$2a=428.93\,r$$

を得可し。故に r 即ち太陽の半徑を知れは a を求め得可し。倚 r を知るには太陽の赤道地平視差を要す此は後に說明する方法によりて求めらるべし。今Rを地球の赤道半徑とし Δ_1 にて視差を觀測せる時の太陽と地球との距離を表はし、且つ該觀測の際現はるゝ太陽の地心半徑がSなりとすれば

$$\pi=\frac{R}{\Delta_1 \sin 1''},\qquad S=\frac{r}{\Delta_1 \sin 1''}$$

此等の二式より直ちに

$$r=\frac{S}{\pi}R$$

此式に觀測にて得たる S/π の値を置き換ふれば

$$r=109.17\,R$$

$$\therefore\quad 2a=428.93\times109.17\,R=46826.2881\,R$$

依て求むる a は地球の赤道半徑の約二万三千四百倍に當るものなり。

離心率の決定法

第二離心率の決定。 離心率は普通之を e にて表はすものにして其値は $\frac{TO}{PO}$ なり故に

$$TO=ae$$

$$\therefore\quad AT=a(1+e)\qquad PT=a(1-e)$$

然るに前節により

$$\frac{S_A}{S_P}=\frac{PT}{AP}$$

$$\frac{S_A}{S_P}=\frac{1-e}{1+e}$$

從て直ちに e を求め得可し即ち

$$e=\frac{S_P-S_A}{S_P+S_A}=\frac{1}{60.125}$$

近地點黃經の決定法

第三近地點黃經の決定。第十四圖に於て OS なる短軸を引きTとSとを連ぬれは其長さは橢圓の理により a に等しきものなり。依て日々量日鏡を以て太陽の視半徑を測定し太陽と地球との距離を求め同時に黃經を觀測せば其距離が a に等しき時の黃經を補間法によりて決定し得可し。之を⊙にて表はせば此は γTS 角に等し。倚三角形 OTS を考ふるに

近點年

然れば此式によりて STO 角を容易に見出すを得可し。從て觀測より得たる⊙

$$\cos STO=\frac{OT}{TS}=\frac{ae}{a}=e$$

と此角を加ふれば γTA を得。然るに此れに 180° を加へたるものは即ち近地點の黃經なるを以て求むるものは次式の如し

$$\text{近地點の黃經}=\odot+\cos^{-1}e+180°$$

是を計算すれば殆ど二百八十一度八分なり。若し長軸と γ 點とが恆星の間に常に同一の位置を保持するならば近地點の黃經は時と共に變化することなかるべし。然れども多年の觀測によりて長軸が一定の方向を有するものならで一回歸年に十一秒餘つゞ黃道上に順行し且つ既に說明せるが如く γ は一年に五十秒餘逆行するを以て近地點の黃經は一回歸年につき六十一秒づつ增加す。

近點年。既に述べたる二種の年の外近點年と稱するものあり。此は太陽が近地點より出發し再び近地點に歸へるまでに要する時を云ふ。今三種の年の長さを比較すれば次ぎの比例式を得

$$\text{恆星年}:\text{回歸年}:\text{近點年}=360°:360°-50''.22:360°+11''.25$$

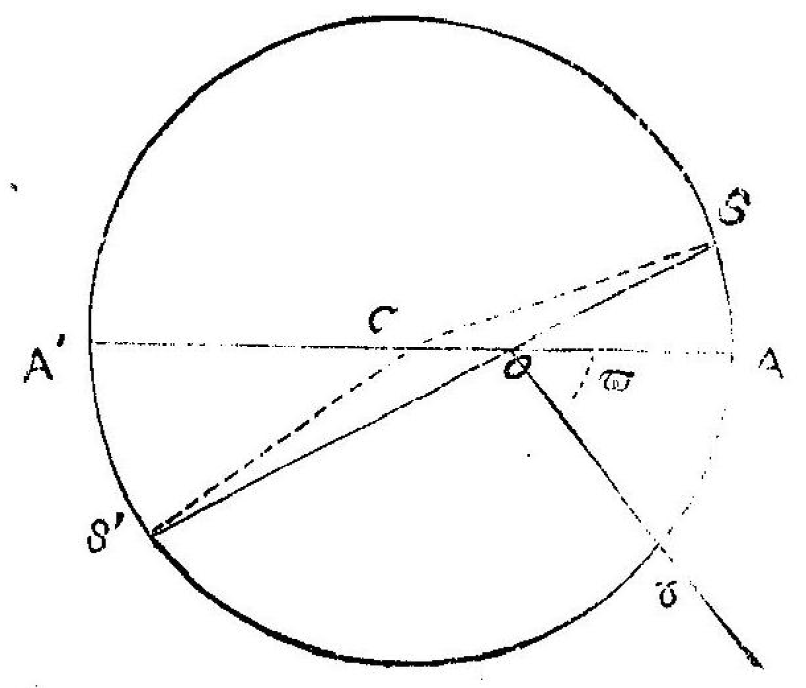
ヒッパルカスの離心說

從て回歸年は最も短く恆星年之に次ぎ近點年最も長し。

軌道上に於ける太陽の運動。既に說明せる所によりて吾等は太陽の軌道を知れり依て是より軌道上に於ける太陽の運動を研究せん。今觀測より導ける黃經と其黃經を有する時刻とを記載せる帳簿を作り一年中一恆星日につき黃經の增加する割合即ち $\frac{d\lambda}{dt}$ を求むれば或時は大に或時は小なり。されば太陽の黃經が時と正比例するものにあらざるを知る。依て昔者離心假說を案じ之を解釋せんとせし人あり。今其說く所を聞くに曰く太陽の圓形の軌道を書き等速度の運動をなす。然るに地球は該軌道の中心に存在せずして之を去る少許の所に位するが故地球と太陽との距離は變化し且つ之と同時に黃經も等速に增加すること能はずと。第十五圖に於て ASA' を太陽の圓軌道とし C を其中心 O を地球の位置とし $O\gamma$ を春分點の方向とし $AO\gamma$ 即ち近地點の黃經を ϖ にて表はし又 S を軌道上の太陽位置とし SO, SC を引けば γOS 角は太陽の黃經 λ なり。依て SOA は $\lambda-\varpi$ なり。今更に SCA を ζ にて表はし假定により太陽の軌道上に於ける速度を n とし t を太陽が γ より S に至るまでに要する時、t_0 を

rよりAに至るまでに要する時とすれば $\zeta=n(t-t_0)$ 更に $\frac{\mathrm{CO}}{\mathrm{CA}}$ を e にて表はしSOを r にて表はす時は次式を得

第十五圖



$$\left\{\begin{array}{l} r\cos(\lambda-\varpi)=a\cos\zeta-ae \\ r\sin(\lambda-\varpi)=a\sin\zeta \end{array}\right.$$

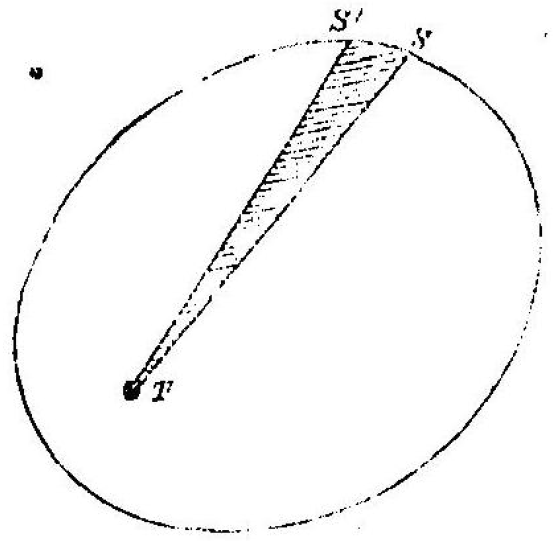
$$\therefore \left\{\begin{array}{l} \tan(\lambda-\varpi)=\dfrac{\sin\zeta}{\cos\zeta-e} \\ r=a(1-e\cos\zeta) \end{array}\right.$$

之に由りて λ と r との變化を檢査するに太陽の運動を稍々精密に說明し得る以をて此假說が紀元前百五十年頃ヒッパルカスによりて創められし以來ケプレルの時まで何等の疑を起さざりき。されど吾等が既に論じたるが如く量日鏡を以て精密に觀測したる所によれば太陽の軌道は橢圓なるを以て他に說明を求めざる可からず。ケプレル氏はタイコ、ブラヘがなせる太陽の觀測を吟味したるに太陽の黃經が一日間に增加する割合は一年中何れの時も常に距離の自乘に逆比例することを發見

ケプレルの發見

せり。今第十六圖に於てTを地心とし其周圍に畫ける橢圓を太陽の軌道としSS′を太陽が一日中に動ける軌道の一部分としTSなる動徑を引き此動徑が一日間に動くにより畫かるゝTSS′の面積を考ふるにTに於ける角が小なるを以て三角形TSS′の面積と大なる差違なし。依て

第十六圖



$$TSS' \text{の面積} = \tfrac{1}{2}TS.TS'\sin\angle T$$

而かも動徑の長さは一日中に大なる變化をなさぬ故TSとTS′とを等しきものと考ふるを得可く且つTの角が小なる故 $\sin\angle T=\angle T$ と置き得故に

$$TSS' \text{の面積} = \tfrac{1}{2}\overline{TS}^2\times\angle T$$

T角は取りも直さず黃經一日中の增加なるが故上の事實によりTSの自乘に逆比例するものなり依てKを常數とすれば

$$\angle T=\frac{K}{\overline{TS}^2}$$

從て前の式に今得たる $\angle T$ の値を入るれば

ケプレルの面積定律

$$TSS' \text{ の面積} = \tfrac{1}{2}TS^2 \times \frac{K}{TS^2} = \frac{K}{2}$$

從て太陽の動徑が一日間に畫く面積は常に等しき常數なり。されば數日間に畫かれたる面積は其日數に比例すべく或は一般に動徑の畫ける面積は之を畫くに要せる時に正比するものなり。此事實を稱してケプレルの面積定律と稱す。

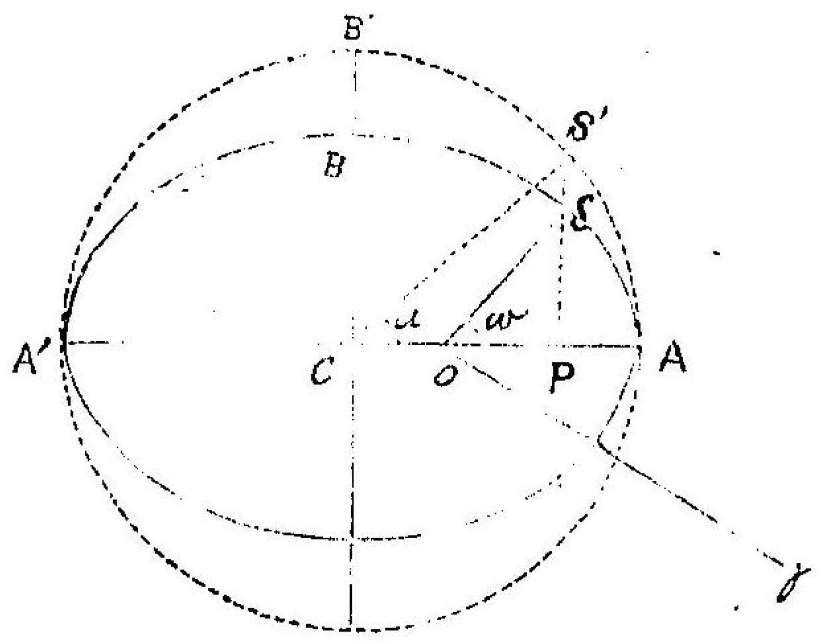
ケプレルの問題。 既に太陽の軌道を知り且つ軌道上に於ける太陽の運動の法則を認むれば或與へられたる時 t に於ける太陽の坐標を種々の常數の項にて表はすことを得可し。此ケプレルの問題とは太陽が同氏の定率に從ふて地球の周圍を繞る時に太陽の位置を求むる問題なり。偖此位置を表はすに必要なる坐標は之を極坐標法にて表はせば黄經及び地球太陽間の距離なり。前者は⊙にて後者は r にて表さるゝを普通とす。

今第十七圖にて ASA′ を太陽の軌道とし C を其中心、O を地球の位置、S を軌道上に於ける太陽の位置、Oγ を春分點の方向とすれば吾等の求むるものは

$$\odot = \angle \gamma OS, \quad r = OS$$

なり。されど⊙の代りに AS より近地點の黄經 ϖ を引ける角 AOS を用ふるも差支なし。吾等は A 點より測れる此角を眞近點距離と稱し w にて表はす。

第十七圖



圖に於て更に長徑 AA′ を直徑となし C を中心として圓を畫き S 點より AA′ に引ける垂線が圓と交る點を S′ とし CS′ を引けば AA′ と S′CA なる角を含む。之を離心近點距離と稱し u にて表はす。

然る時は太陽の坐標 r 及 w を u と常數とを以て表はすことを得可し。即ち圖に於て OP 及 SP の長さを考ふれば次ぎの二式を得

$$(A) \quad \begin{cases} r\cos w = a\cos u - ae \\ r\sin w = \sqrt{1-e^2}\, a\sin u \end{cases}$$

〔註〕後の式の導き方が一見直ちに明瞭ならざれど下の如く考ふれば容易に見るを得可し今 AA′ を軸とし AS′A′ なる圓を φ 丈廻轉し之を紙の表面

へ投影せる時丁度 ASA′ なる楕圓を得たりと想像せば

$$\cos\varphi=\frac{BC}{B'C}=\frac{a\sqrt{1-e^2}}{a}=\sqrt{1-e^2}$$

にして同時に　$\cos\varphi=\dfrac{SP}{S'P}$

$$\therefore\quad SP=S'P\cos\varphi=\sqrt{1-e^2}\,S'P$$

$$\therefore\quad r\sin w=\sqrt{1-e^2}\,a\sin u$$

從て或時 t に於ける u の値を知れば是等の二式より r と w とを計算し得可し。茲に於て吾等は t と u との關係を求めざる可からず。今太陽がAを過ぐる時を t_0 にてSを過ぐる時 t にて表はせば $t-t_0$ は太陽が AS なる道を畫くに要せし時間なり。更らにTなる量を導き之を太陽が軌道を一週するに要する時とすればケプレルの面積定律によりて

$$\frac{\text{扇形 AOS の面積}}{\text{楕圓の全面積}}=\frac{t-t_0}{T}$$

然るに楕圓の面積は $\pi a^2\sqrt{1-e^2}$ にして AOS の面積は次ぎの如くにして求め得可

し。今 OS′ を引くと考ふれば

然るに　扇形 AOS′＝扇形 ACS′−△COS′＝$\frac{1}{2}a^2u-\frac{1}{2}a^2e\sin u$

從て　扇形 AOS＝扇形 AOS′$\sqrt{1-e^2}$

〃　$=\frac{1}{2}a^2(u-e\sin u)\sqrt{1-e^2}$

故に

$$\frac{\frac{1}{2}a^2(u-e\sin u)\sqrt{1-e^2}}{\pi a^2\sqrt{1-e^2}}=\frac{t-t_0}{T}$$

即ち

$$u-e\sin u=\frac{2\pi}{T}(t-t_0)$$

$\frac{2\pi}{T}$ は太陽の平均角速度にして太陽の平均運動と稱せられ一般に n を以て表はさる。上の式にて右邊にあるものは平均近點距離と稱せられ t が與へらるれば知らるゝ量なり。之を ζ にて表はせば

$$u-e\sin u=\zeta\qquad \zeta=n(t-t_0)$$

此式を u につきて解けば O と 2π との間に只一個の根を得。依て之を(A)に入るれば r と w とを求め得可し。今更に(A)を r と w とに就きて解けば

$$\frac{r^2}{a^2}=(\cos u-e)^2+(1-e^2)\sin^2u=(1-e\cos u)^2$$

軌道の方程式

是等より u を消去すれば軌道の方程式を得即ち左の如し。

$$\therefore \left\{\begin{aligned} &\frac{r}{a}=1-e\cos u \qquad \left(\frac{r}{a}>0\right)\\ &\cos w=\frac{\cos u-e}{1-e\cos u}\end{aligned}\right.$$

$$r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos w}$$

然るに上に導ける r と w との公式は計算に不適當なるが故更に整約して次の如くにす

$$\left\{\begin{aligned} &1-\cos w=\frac{(1+e)(1-\cos u)}{1-e\cos u}\\ &1+\cos w=\frac{(1-e)(1+\cos u)}{1-e\cos u}\end{aligned}\right.$$

$$\therefore \left\{\begin{aligned} &\sqrt{\frac{r}{a}}\sin\frac{w}{2}=\sqrt{1+e}\,\sin\frac{u}{2}\\ &\sqrt{\frac{r}{a}}\cos\frac{w}{2}=\sqrt{1-e}\,\cos\frac{u}{2}\end{aligned}\right.$$

$$\tan\frac{w}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{u}{2}$$

依て t に於ける⊙及び r を常數の項にて表さんと欲せば平均近點距離 ζ を計算し次ぎに

$$u-e\sin u=\zeta$$

を解きて u を ζ との項にて表はし、此値を只今得たる公式に入るれば r 及び w を得可し。w に ϖ を加ふれば⊙となるを以て求むる量を計算し得たるものとす。

〔註〕 $u-e\sin u=\zeta$ は u の超越函數なるを以て之を解くこと困難なり。されど漸近法を用ふれば u を求め得可し。即ち此方程式にて e は一より小なるもの、u の正弦は一又は一より小なるもの故之を u にて解き

$$u=\zeta+e\sin u$$

を得。但 $e\sin u$ は小なる故之を省略すれば $u=\zeta$ となる。依て更に今得たる u を用ひて $e\sin u$ を計算し之を ζ に加ふれば一層精密なる u の値を求め得

可し。依て更に今計算せるuを再び$e\sin u$に入れ之をζに加ふればかくて得たる値は益々精密なるuとなる可し。次第に此の如くすればuは次第に正しき値に近く可し。即ち

$$u=\zeta+e\sin\{\zeta+e\sin[\zeta+e\sin(\zeta+e\sin\ldots\ldots)]\}$$

又uとvとの關係を示す式

$$\tan\frac{v}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{u}{2}$$

を變化すれば第四章にて$\varphi-\varphi'$を求めたる時と同樣に次式を得

$$v=u+e\left(1+\frac{e^2}{4}\right)\sin u+\frac{e^2}{4}\left(1+\frac{e^2}{2}\right)\sin 2u+\ldots\ldots$$

故に

$$\theta=\varpi+v=\varpi+\zeta+f(\zeta)$$

$f(\zeta)$はζの函數なり。

第十章　地球の運動及之に伴ふ諸現象

地球の自轉。 吾等はこれまで地球を不動のものと假定し第一に天球を等速運

動をなすものとして之が現象を論じ、次いで太陽か天球上を運動するものと考へ、遂に太陽は地球の周りに軌道を畫いて週轉すと論ぜり。されど地球を不動と見て他天體のみを動くと考ふるは餘りに地球を重ずる傾きあり。依て前と反對に先づ最初に地球を動くものと假定し天球を不動のものなりとすれば、觀測によりて得らるゝ事實を說明せんが爲め、第一に地球は兩極を連ぬる線を軸とし、等一の角速度を以て西より東へ自轉するものなりと言はざる可からず。地球を自轉すると見るも天球を旋轉すると見るも、現象を論ずる上には歸する所一なり。只天球が動くと言ふよりも地球を動くものと論ずる方簡單なり。

然るに物理學の進歩と共に地球が自轉するものたるを實驗的に證明し得るに至れり。即ち(一)高所より落下せる物體が鉛直線をなさずで少しく東方にふれること、(二)フーコー振子の實驗(三)廻轉儀の實驗(四)投物線のふれ(五)貿易風(六)旋風の旋轉方向等は地球が確かに自轉するものなるを證す。

地球が自轉するにも係らず恒星相互の位置の變化せざる是等の恒星の距離甚だ大にして之に比せば地球の直徑を零と考ふるも差支なきを示すものなり。

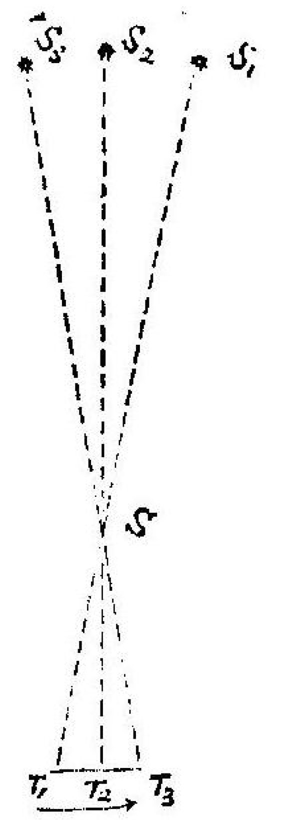
恒星日の不易

吾等が恒星日と稱するものは其實地球自轉の一週期に外ならず。されば地球自轉の速度が變化すれば從て恒星日の長さを變ず。之を理論上より言へば必然變化するものと言はざる可からず。潮汐の摩擦隕石の堆積等は其週期を永からしめんとし、反對に地熱の放散之に伴ふ地球の收縮等は之を短縮せんとするなる可し。其他地質學的の變化等も複雜なる影響を與ふ。されど實際に於ては是等の作用甚だ緩漫にして、天文學の開展以後之が變化を發見する能はざる程小なるものなり。よし假りにこれありとするも尚トレメー以後一秒の百分の一に及ぶ變化なからん。されば地球自轉の速度を殆ど不易のものと考ふるも不可なし。

地球の公轉

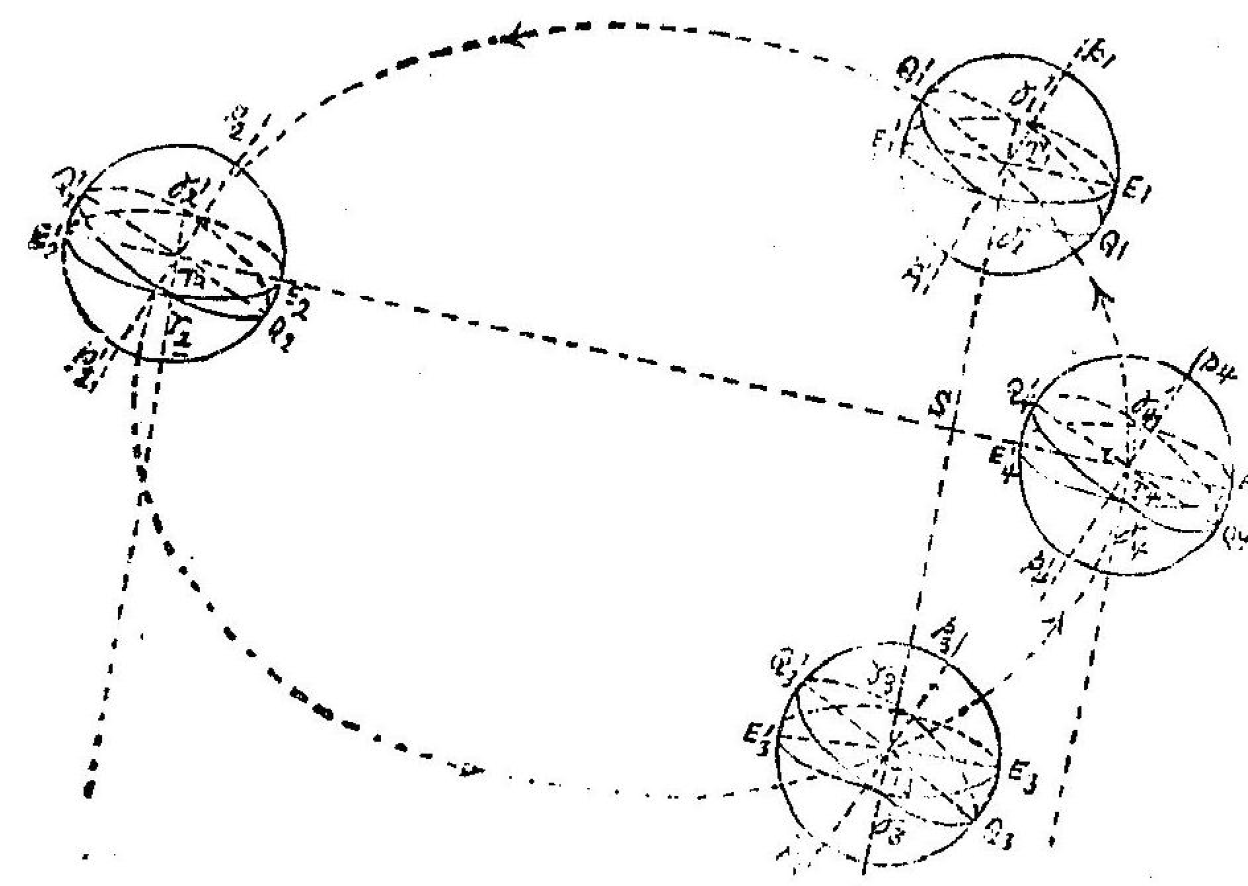
地球の公轉。太陽が一回歸年の間に地球を一周轉するものなりとの思想は永く人心を司配しつゝありしに、ガリレオの創見によりて其實太陽は動かで、地球が太陽の周圍を週轉するものなるを知るに至れり。之を地球の公轉と稱す。然れども其當時にありては未だ充分に之を說明し得ざりしが、其後種々の新事實の發見ありて遂に地球の週轉することを確かむることを得たり。就中後章に記述せんとする恒星の年週視差の發見、ロイメル氏の光行差の發見等は地球が必ず週轉せざる可からざるを示すものと云ふべし。其他今日物理學を司配するニュートンの萬有引力說によれば、後章に說明するが如く、地球の週轉は物理學上必然の結果たり。偖地球を週轉するものとし太陽を不動のものと考ふるも、これまで觀察せる事實を完全に說明することを得可し。

第十八圖



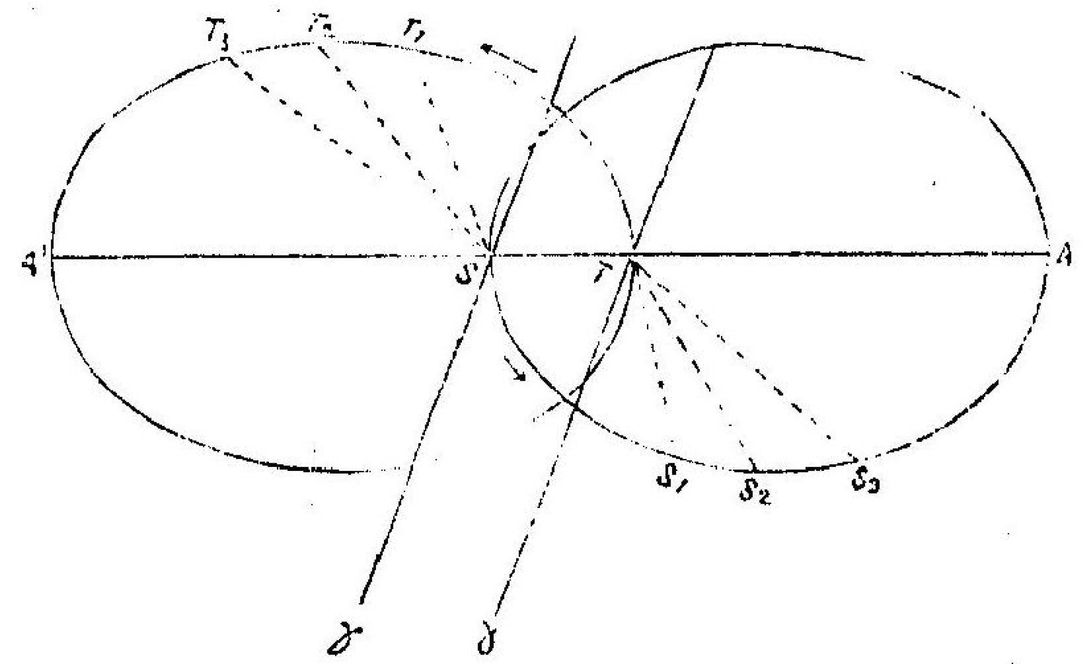
（第一）地球が太陽の周圍を繞れば之が必然の結果として地球表面にある吾等の視覺には恰かも太陽が地球の週轉と反對の方向に天球上を動く樣に映ず可し。何となれば第十八圖に於てSを太陽の位置とし地球が順次にT_1 T_2 T……なる位置へ週轉すれば地球にある人々は太陽を夫れ〳〵にT_1S, T_2S, T_3Sなる方向へ投影して見るが故、恰かも太陽が天球上S_1よりS_2 S_3へと進行するものと見るが故なり。されば地球の週轉の方向と太陽の視週轉の方向とが反對なるを明にし得可し。

第十九圖



(第二) 太陽の赤緯が一年中漸次に變化することも次ぎの如く說明するを得可し。今地球自轉の軸が常に同一の方向をさせども、其方向は地球の軌道面に直角をなさずして之と六十六度三十三分の角をなすものとすれば、第十九圖は明かに之を說明す。圖に於てSは太陽の位置にして、地球が春分の際T_1にありとし、更にT_1を中心とし小なる半徑を以て天球を書きたりと想像し、p_1p_1'は天球の軸$Q_1r_1Q_1'$は赤道$E_1r_1E_1'$は黃道なりと考ふれば、ST_1はr_1を通過するが故太陽の赤緯は零なり。偖地球が次第に週り夏至の時にTに來れりと考ふれば、此際ST_2と天球の軸とが六十六度三十三分

第二十圖



の角をなすが故太陽は正二十三度二十七分の赤緯を有すべく、更に九十度週りて秋分點に來れば再び零度の赤緯となり、又更に九十度動きて冬至點に來る時は$p_3'T_3S$の角は百十三度二十七分をなすが故太陽の赤緯は負二十三度二十七分となる。此の如く地球公轉の結果は、吾等が觀測せる事實と等しく太陽の赤緯が春分より次第に增加し夏至に至りて最大となり、是より次第に減少して秋分に零となり、益々減じて冬至の際負數にて最大となり再び增加し始め春分に零となることを示すものなり。

(第三) 次ぎにこれまで考へたる太陽の軌道を說明せん。今Sを太陽とし、Tを近日點に於ける地球とし、地球が時と共に其位置を變じ矢の方向に軌道を書きたりと想像せよ、然る時は地球にありて觀測する人には自己の運動が見られざるが爲

め、却て地球がTに固定し太陽がSより矢の方向へ動く樣見ゆるなる可し。即ち地球が軌道 TA' を畫く時は太陽は之と遠近兩點の位置を逆にせる視軌道 SA を畫く可し。

從て太陽の黄經と地球の黄經とに百八十度の差あり。例へば地球が T_1 にある時の黄經は γST_1 角にして(之を⊕にて表はす)之と相當する太陽の黄經はTより ST_1 と平行に引ける TS_1 が γT となす角なるを以て圖より直ちに次式を得べし。

$$\odot = 180^\circ + \oplus$$

是より進んで地球の運動に由りて表はるゝ二三の現象を論ぜんと欲す。されど便宜の爲め再び太陽の視運動を取りて之を述べん。

季節

季節。二分を連結せる線と二至を連結せる線とは太陽の軌道面を四分す。さて太陽が春分より夏至に至るまでに要する時を春と稱し、此間に太陽の赤經が零時より六時となり、赤緯は零度より正二十三度二十七分となる。次ぎに太陽が夏至より秋分に來る季節を夏と稱し、太陽の赤經は六時より十二時となり、赤緯は正二十三度二十七分より次第に減じて零となる。又太陽が秋分より冬至に至る季節は秋にして冬至より春分に至る季節は冬なり。秋にありては太陽の赤經は十二時より十八時に變じ、赤緯は零より負二十三度二十七分に減ず冬には十八時より二十四時となり、負二十三度二十七分より增加して零に復す。春夏秋冬を稱して四季と云ふ。

四季の長短

さて是等の四季節が時の長さを等うせず。何となれば第十三圖を見れば一目瞭然扇形 $ET\gamma'$, $ET\gamma'$, $ET\gamma'$, $ET\gamma'$ の内最大の面積を有するは $ET\gamma'$ 之に次ぐは $ET\gamma'$ 其次ぎは $ET\gamma'$ 最小のものは $ET\gamma'$ なるを知る。然るに此等の扇形は此等を畫くに要する時間に比例するを以て夏は最も長く春之に次ぎ秋は又之に次ぎ冬は最も短きものなるを知り得可し。

季節と晝夜の長短

季節と晝夜の長短。第三圖にてSを太陽とせば球面三角形 SPZ に於て

$$PS = 90^\circ - \delta,\ PZ = 90^\circ - \varphi,\ ZS = \zeta,\ \angle P = t$$

にして是等の間に次ぎの關係あり

$$\cos\zeta = \sin\delta\sin\varphi + \cos\delta\cos\varphi\cos t$$

若し$\zeta=90°$、即ち太陽が地平線にある時には次式を得。

$$\therefore\quad \cos t=\frac{\cos\zeta-\sin\delta\sin\varphi}{\cos\delta\cos\varphi}$$

$$\cos t=-\tan\delta\tan\varphi$$

今春分の日にてはδは零なるを以て觀測者が地球表面上の何處にあるも

$$\tan\delta=0,\qquad \therefore\quad \cos t=0,\qquad \therefore\quad t=6\text{時}$$

なるを以て此日は太陽の中心が地平線を昇り再び地平線に沒するまでの時間は十二時間なり從て晝と夜とは地球上何處も同一の長さを有す。次いて秋分の時を考ふるも同樣なるを以て此日も亦晝夜相等しき長さを有す。依て是等の二點を晝夜平分點略して分點と稱するなり。

次ぎに$\varphi>0°$、$\delta>0°$なる場合即ち北半球に於て春分より夏至を經て秋分に至るまでの間を考ふるにtの餘弦は常に負數なり、是れ實にtが六時間以上なるを示すものにして此間晝間は夜間よりも長し。若し北半球にて秋分より冬至を經て春分に至る間を考ふれば$\varphi>0°$、$\delta<0°$なるを以てtは常に正の値にて六時間以下なり。依て此間にありては晝短く夜長し。而してδが夏至に最大となり冬至に最小となるを以て北半球につきては次ぎの如く言ふを得可し。春分より次第に晝間の長さ增加し夏至にて最大となり、是より漸次減少し秋分に至りて平分となる。秋分より冬至に至る間にありては晝間益々減じ冬至に最短となり、是より漸次增加し春分に至りて晝夜平分に復す。

上と同樣に南半球につきて研究すれば其現象北半球と全く相反し、春分より夏至に至るまでは晝間は十二時間より次第に減じて夏至に最小となり、夏至より漸次增加して秋分に十二時間に復す。是より晝間は益々增して冬至に最大に達し、冬至より春分までは次第に減じて十二時となる。

赤道は是等兩者の分るゝ所にて$\varphi=0$,　$\therefore\ \tan\varphi=0$從て上の式より$t$が六時間となる故一年中晝夜平分たり。

今更に

$$\cos t=-\tan\delta\tan\varphi$$

の極限を考ふるに其最大價は一なり依て

$$\tan\varphi=\pm\cot\delta=\pm\tan(90°-\delta)$$

$$\therefore\ \varphi=\pm(90^\circ-\delta)$$

されば南北兩極より二十三度二十七分以內にある地にては二至の頃 $\cos t>1$ とならざるを得ず。而かも是れ不合理なるを以てそは大陽の昇ること又は降ることのなきを示すものなり。更に右式の符號を一々注意すれば北極近傍にては夏至の頃太陽が沒することなきを知る可く、南極近傍にては夏至の頃は太陽昇ることなく冬至の頃沒することなきを示す。實に兩極にありては半年晝にして半年は夜なり。

帶　寒帶

帶。今兩極より二十三度二十七分の距離を半徑として小圓を畫けば此二小圓は晝又は夜が二十四時以下なる所と以上なる所を區別するを以て之に北極圈南極圈なる名を附す。而して此等小圓內の地は晝の間にても大陽の光熱を斜に受くるを以てよし其時間長しとするも左程熱からず且つ晝夜の配置前述の如くなる故夜間は寒氣激甚なり。依て該圈以內を寒帶と云ひ且つ南北の二あり。

子午線經過の場合には $\zeta=\varphi-\delta$ なるを以て緯度二十三度二十七分の地にては

熱帶、回歸線

夏至又は冬至の時太陽の天頂に來るを見るべし。今更に赤道の兩側二十三度二十七分の所に二小圓を畫けば其間にある地は一年には必ず大陽の絕頂に來るを見る可し、從て此地帶は太陽の光熱を殆ど鉛直に受くるを以て氣候甚だ暑く殆ど季節の變化なし依て之を熱帶と稱し兩小圓を回歸線と稱す。

溫帶

赤道の南北に回歸線と極圈とに界せらるゝ各一個の帶あり。此等の地方にては四季の變化甚だ明瞭にして氣候溫和なり依て溫帶と名づく。

即ち地球の表面は氣候の狀態を示す爲め熱帶、南北兩溫帶及び南北兩寒帶の五帶に分たる。

薄明

薄明。太陽が地平線上に未だ昇らざる前暫時と太陽が沒して後暫時とが全然暗黑にあらずして多少明るし。之を薄明と稱す。若し地球に大氣なければ大陽の昇降の前後には何等の光線も吾等の眼に達せざる可し。然るに大氣の存在するが爲め太陽より發する光線の一部は之が爲めに反射せられ地球の表面にあるものを照らす。是れ實に薄明の起る理由あり。

普通人々の言ふ所によれば太陽が地平線以下十八度を越ゆれば最早や薄明な

く暗黑を表すと云ふ。今薄明の時間を計算せん。先づ太陽が地平線以下十八度の所にある時の太陽の時角をtとすれば此時 $\zeta=90^\circ+18^\circ$ なる故

$$\cos t=\frac{\cos\zeta-\sin\varphi\sin\delta}{\cos\varphi\cos\delta}=-\frac{\sin18^\circ+\sin\varphi\sin\delta}{\cos\varphi\cos\delta}$$

更に太陽が地平線にある時の時角をt'とすれば前に記せるが如く

$$\cos t'=-\tan\varphi\tan\delta$$

依て薄明の時間は $\frac{t-t'}{15}$ なるを以て次の式にて計算するを得

$$\frac{t-t'}{15}=\frac{1}{15}\cos^{-1}\left[-\tan\varphi\tan\delta\right]-\frac{1}{15}\cos^{-1}\left[-\frac{\sin18^\circ+\sin\varphi\sin\delta}{\cos\varphi\cos\delta}\right]$$

晝夜の長さにつき注意。上に晝夜の長さを計算せし場合に濛氣差の影響をも視半徑の影響をも考へざりしが、實際に於ては濛氣差の爲め太陽の中心は地平線の下三十四分の所にある時早や地平線にあるものゝ如く見ゆるのみならず太陽が十六分の視半球を有するが故中心が地平線に表るゝ以前早くも日光を見る從て晝の始まる時刻を計算せんと欲せば

$$\cos t=\frac{\cos\zeta-\sin\varphi\sin\delta}{\cos\varphi\cos\delta}$$

なる公式にてζを九十度と置かずして九十度五十分となす可し。而して又太陽の沒する時刻に至りても同樣なるが故かくして計算し得たる晝間が是等の影響を考へざる場合よりも長くなり夜間は減小す。されば分點に太陽の來れる日も其實晝夜平分にあらずとす。

第十一章　時

時を計るに恒星時を用ふれば精密なる標準を得るも、吾等日常の生活は太陽と密接なる關係を有するを以て、太陽の日週運動に基きて時を測るにあらざれば、甚しき不便を免れざる可し。然るに太陽は既に見たるが如く、毎日恒星の間を順行し其赤經は三百六十六恒星日奇零二四二二の間に零より二十四時間に增加す。依て一定の地にて太陽が其地の子午線を經過せし時刻より之に續いて再び經過する時刻までの時間即ち一眞太陽日は一恒星日よりも長し。是れ

眞太陽日

平均黄經

太陽の赤經が一恆星日中に殆ど四分時間増加するを以てなり。されば一回歸年を眞太陽日にて算ふれば三百六十五、二四二二二となるべし。

偖眞太陽日の長さを一年中種々の時に相比較すればそは一定不易のものにあらずして多少變化するものなるを認む可し。依て先づ之が原因を研究せん。眞太陽日不等の原因及時差。第九章に於て見たるが如く、太陽の黄經は時と比例して增加するゝことなし。一般に$l-a$を太陽の平均黄經と稱し之を$\odot_0$にて表せば太陽の黄經は$\odot=\odot_0+f(\zeta)$にて表はすを得るものなり而して$\odot_0$は時に比例して增加するも$f(\zeta)$は然らず。

中心差

uは第九章の終に表せるが如く

$$u=e\sin\{\zeta+\sin[\zeta+\sin(\zeta+\sin\ldots\ldots)]\}$$

なるものにして$f(\zeta)$はuの函數たり故に$f(\zeta)$はζが$0°$又は$180°$の時に零となるも其他の場合には然らず。されば眞太陽日が不等なる原因の一は$f(\zeta)$即ち一般に中心差と稱するものゝ存在より起るものなりとす。依て$f(\zeta)$を更に研究せん。若しuを上の式にてζ及びζの倍數の正弦の項にて表はし更に第九章に見出せる$f(\zeta)$の式に之を入れ之をも亦ζ及其倍數の正弦の項にて表はし其際eの三乘よりも高次のものを省略すれば次の如き式を得可し。

$$f(\zeta)=\left(2e-\frac{e^3}{4}\right)\sin\zeta+\frac{5e^2}{4}\sin2\zeta+\frac{13e^3}{12}\sin3\zeta+\ldots\ldots$$

依て中心差の變化を考ふるにζが0なる時より漸次其値を增加しζが九十度の近傍にて最大に達すべし、是れ第一項の係數が最大なるによる。之よりζが次第に增加して百八十度に至るまで減少し、此所にて零となり、之より益々減少してζが二百七十度近くになれば最小となり、更に此點より次第に增してζが三百六十度となる時零となる。依て中心差の變化を曲線にて示せば第二十二圖のAに示すが如く、一近點年に最太最小の値各〻一個を有し、太陽が近地及遠地の兩點に來る時に零となるを認む。

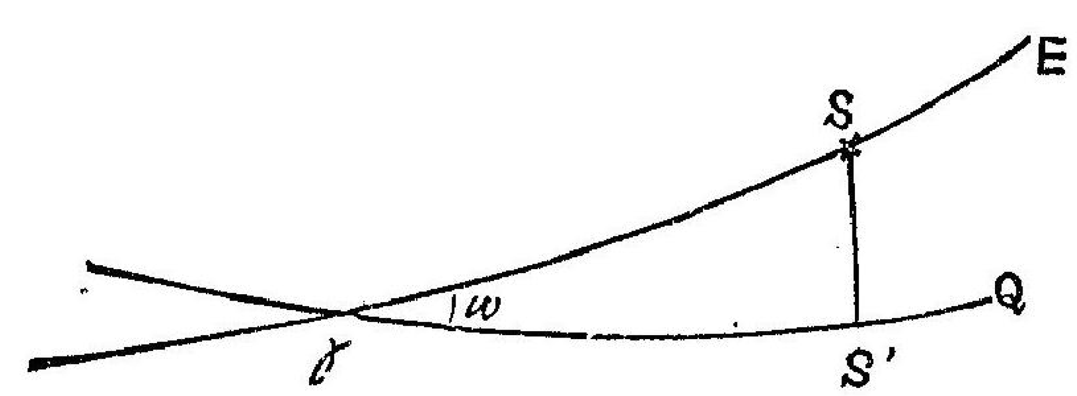
今太陽と近地點を同時に出發し、太陽と同一方向に其軌道を進む一假想天體を取り、之が軌道を一週するに要する時は太陽と等しく一近點年なるも眞太陽と異り此假想天體は時と比例して黄經を增加するものとすれば或日之が子午線

力學上の平均太陽

を經過する時刻と太陽が然する時刻との差は曲線Aより求め得可し。此の如き假想天體を力學上の平均太陽と稱す。依て若し吾等にして眞太陽の代りに力學上の平均太陽を採用し其黃經を測れば時と比例して增加するものを得可し。

然るに太陽の天球上に畫く黃道は赤道と一致せざるものなるを以てよし力學上の平均太陽が時と比例して其黃經を增加するとも其赤經に至りては然らずとす。即ち第二十一圖にて γQ を赤道、γE を黃道、S を黃道上の太陽の位置とし、Sより赤道に垂線 SS' を引けば球面三角形 $\gamma SS'$ にて γS は ⊙ $\gamma S'$ は α なるを以て次ぎの式を得

第二十一圖



$$\tan\alpha = \cos\omega \tan\odot$$

故に

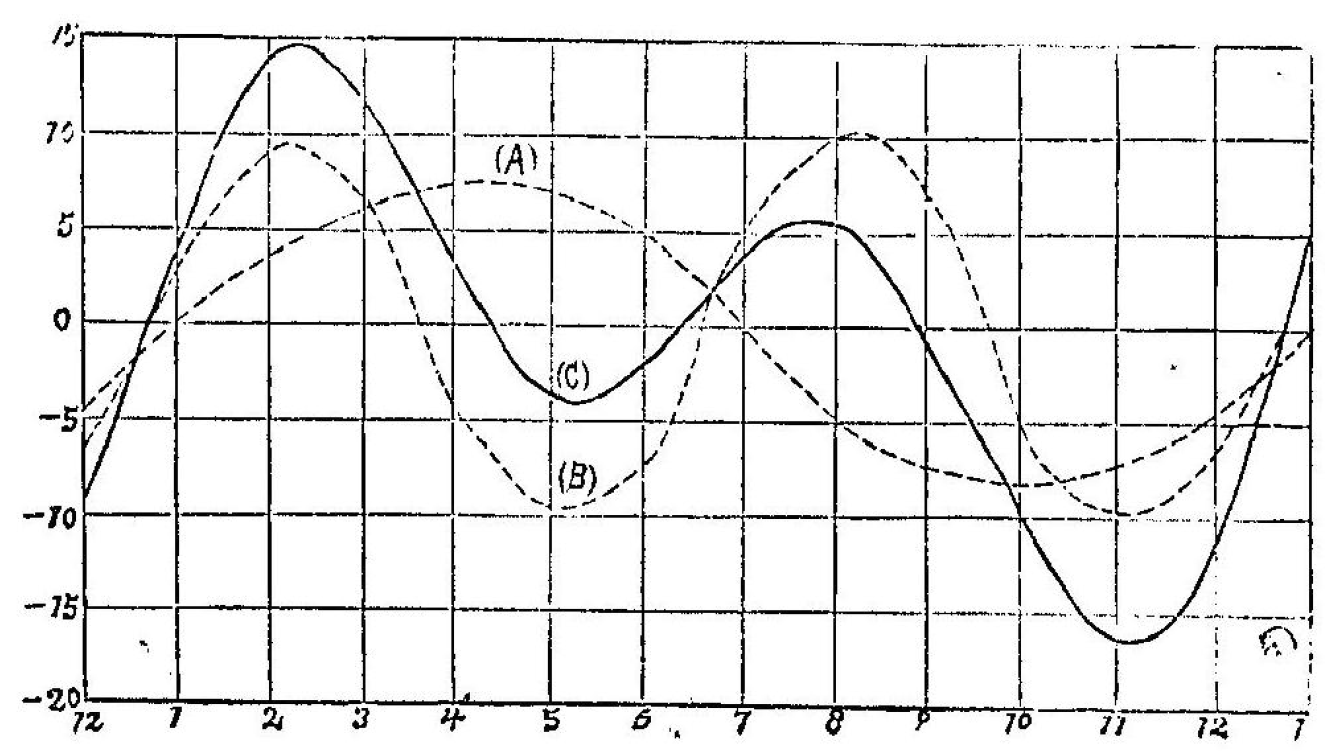
$$\alpha-\odot = -\tan^2\frac{\omega}{2}\sin 2\odot - \frac{1}{2}\tan^4\frac{\omega}{2}\sin 4\odot \cdots\cdots$$

$\alpha-\odot$ は赤道への整約と稱せられ、此式より一見直ちに明なるが如く⊙が零度の時消滅し⊙が增加すると共に次第

天文學上の平均太陽略して單に平均太陽とも言ふ

に增加し $\odot=45^\circ$ にて極大となり是より $\odot=90^\circ$ に至るまで漸次減少して再び零となり、$\odot=90^\circ$ より $\odot=135^\circ$ に至るまでは負數となりて次第に小さく遂に極小となり、是より再び增加し始めて $\odot=180^\circ$ の時零となる。更に百八十度の時より二百二十五度まで增加して極大に達し、是より減じて二百七十度に零となり、益々減じて三百十五度に再び極小に達し是より增加して三百六十度の時零となる。

第二十二圖



之を曲線にて示せば第二十二圖のBの如く一回歸年中に各々二回極大極小に達し、二分二至に於ては零となるを知る可し。

茲に於て更に所謂天文學上平均太陽と稱する第二の假想天體を考へ其天體の赤經が常に力學上の平均太陽の黃經と等しと假定すれば此

假想天體の赤經は時と比例して增加するものとなり、一年中或日に於ける天文學上の平均太陽の赤經と力學上の平均太陽の赤經との差即ち是等兩者が子午線經過をなす間時はB曲線より求め得可し。

此の如く天文學上の平均太陽の赤經は時と共に規則正しく變化するを以て此假想天體の子午線經過より翌日の經過までの時間を見ればそは一ヶ年中常に等長なり。且つ眞太陽の位置と此假想天體のとの距離が著しからざるが故吾等は之を以て眞太陽日に換ふるも甚しき不便を感ぜざるのみならず、却て時を錄するの上に大なる便益を受く。依て之を平均太陽日と稱し普ねく採用する所たり。今此長さを恒星時にて表せば次ぎの如し。

1 平均太陽日 = 1.002738 恒　星　日 = $24^{時}\ 3^{分}\ 56^{秒}.5$

又　1 恒　星　日 = 0.997270 平均太陽日 = $23^{時}\ 56^{分}\ 4^{秒}.1$

時差

然るに平均太陽なるものは單に假想上のものにして觀測し得るものにあらず。從て先づ眞太陽を觀測して眞太陽時を求め之れに修正値を加へて平均太陽時を算す。此修正値は時差と稱するものにして吾等が前に論ぜる中心差と赤道

への整約とを加へたるものなり。依て之を圖解せば第廿二圖の如くCなる曲線を得可し。即ち一ヶ年に二個の相異なる極大と二個の相異なる極小とを有す。而して此曲線を見れば一年に四度時差の消ゆる時あり。そは大凡四月十六日、六月十五日、九月一日及十二月二十五日の頃なり。又二月十一日頃には正十四分二十八秒にて最大となり、五月十四日頃には極小にて負三分四十九秒となり六月二十六日頃には再び極大となりて正六分十七秒に達し、十一月三日頃には最小となり其値負十六分二十一秒となる。

平均太陽時。平均太陽日を二十四等分せしを時、更に六十せしを分、尚更に六十せしを秒と稱すると、恒星日の場合に於けるが如し。平均太陽の時角を時分秒等にて表せるを平均太陽時と稱す。

地方平均太陽時

偖平均太陽が或地の子午線を經過する時刻を零とし、其時を一日の始となして計れる時間を天文學上其地の地方平均太陽時と稱す。

萬國普通時

若し然らずして平均太陽が英國グレニッチ天文臺の子午線を經過せし時刻を基とし之より時角を測れば此は萬國普通時なり。萬國普通時は天文學上又は航海者に行はるゝものなり。然るに一般の人々には萬國普通時は

標準時

不便甚しきもの故世界の文明國は各一個又は數個の標準時なるものを設く。そは其地方の中央部を通過する子午線を標準とし之を本初子午線と名け、平均太陽が之を經過する以前十二時の時刻を一日の始めとなし、之より十二時間經過すれば更に零時より十二時を算す。

常用時

即ち常用時は天文時よりも十二時間丈進み且つ之を二部に分ちたるものにして其前半を午前と稱し後半を午後と稱するは人々の熟知する所なり。蓋し天文學者は夜間觀測に從事するを以て觀測中に日の變化するは不便なるが如く一般人民は晝間業務を取るが故執務中日の變化するは矢張り不便を免れざるを以て天文時と常用時とが十二時の差を有するは必然の結果と言ふ可し。

曆年

曆年。時の單位として最も自然的のものは一日一月一年等なり。偖年には既に言へるが如く三種ありて各其長さを異にす、即ち

一回歸年＝$365^{\text{日}}\,5^{\text{時}}\,48^{\text{分}}\,46^{\text{秒}}$

一恒星年＝$365^{\text{日}}\,6^{\text{時}}\,9^{\text{分}}\,9^{\text{秒}}$

一近點年＝$365^{\text{日}}\,6^{\text{時}}\,13^{\text{分}}\,48^{\text{秒}}$

然るに吾等日常の用に供するには此の如く一日の分數を含むものなれば甚だ不便なり。依て曆年なるものを設く。曆年とは一日の整數倍を含み、且つ季節の循環を示す樣工夫せるものなり。上に列擧せる三種の内季節の變遷を明にするものは回歸年なり。故に古來回歸年を多少變更して一年を一日の整數倍となすことを勉む。

ユリウス曆

然るに昔時は觀測未だ進歩せず、一回歸年は三百六十五日と四分の一なりと考へられたるが故、ユリウス、シーザーはユリウス曆を制定し、一年を三百六十五日と三百六十六日との二種に分ち三百六十五日のを平年と稱し、三百六十六日のを閏年と稱せり。依て每三平年の後に一閏年を置けば曆年と回歸年との關係を保存するを得可し。故に彼れの制に從ひ歐洲各國にて西曆年號の數字が四にて除り盡すことを得る時に閏年となし來りしが、其後天文學の進歩と共に一回歸年が三百六十五、二四二二二なることを知るに至れるを以てユリウス曆に從へば曆年は次第に回歸年と相遠かり季節が漸次進むを以て羅馬法王グレゴリ第十三世はユリウス曆を修正して所謂グレゴリ曆を作れり。

グレゴリ曆

即ちユリウス曆にては百の倍數の年號を有する年は常に閏年なれども

グレゴリは之を改めて四百の倍數なる年に制限せり。從てユリウス曆にては四百年に百閏年あれどもグレゴリ曆にては九十七となる。此の如くすれば數千年間は回歸年と甚しき差を生ずることなし。我日本にて現今採用する曆法は實に之なり。

恒星時と平均太陽時との關係

恒星時と平均太陽時との關係。 前に述べたるが如く一平均太陽日は

$$\text{一平均太陽日} = \frac{366.24222}{365.24222} = 1.00273791\ \text{恒星日}$$

に當る。今右邊の數をμにて表はせば平均太陽時にて測れる時間T_mを恒星時にて表せる數T_sとなさんには簡單に次式を得。

$$T_s = \mu T_m = T_m + (\mu - 1)T_m = T_m + 0.00273791\ T_m$$

或は又反對にT_sをT_mに直さんと欲せば

$$T_m = \frac{T_s}{\mu} = T_s - \left(1 - \frac{1}{\mu}\right)T_s = T_s - 0.00273043\ T_s$$

次ぎに經度Lが與へられたる地にて地方平均太陽時を恒星時に改めんとす。今求むる恒星時をΘにて表はし太陽時をTにて表はしV_0を以てグレニッチの平均正午に於ける平均太陽の赤經とすれば直ちに次式を得可し

$$\Theta = T + (\mu - 1)(T - L) + V_0$$

若しΘが與へられてTを求めんと欲せば之をTにつきて解き次ぎの公式を得可し。

$$T = \Theta - V_0 - \left(1 - \frac{1}{\mu}\right)(\Theta - V_0 + L)$$

第十二章　惑　星(其一)

ケプレルの定律

ケプレルの三定律。 天球を見れば獨り太陽のみ恒星の間を移動するものに非ずして其外月も然りとす。されど月を後章に讓りて更に天球を注意すれば尙幾多の天體が矢張り天球を移動するを認め得可し。水星金星火星木星土星天王星海王星等は即ち之に屬するものなり。是等の天體は惑星と稱せられ是等の運動の法則はケプレルによりて發見せられたり。即ち

第一。各惑星の軌道は其焦點の一に太陽を有せる橢圓なり。

第二。各惑星の動徑は等しき時間に等しき面積を畫く。

第三。各惑星の週期の平方は是等と太陽との平均距離の立方に正比例す。

ケプレルの問題。 第二の定律は太陽の場合に説明せし所にして、之を微分方程式を以て表せば次の如きものを得可し。即ち r を動徑とし λ を黄徑とすれば

$$\tfrac{1}{2}r^2\frac{d\lambda}{dt}=\mathrm{C}$$

なり。然るにCは惑星軌道の全面積を週期Tにて除せるものに等し、故に a を軌道の長徑 e を離心率とすれば

$$\tfrac{1}{2}r^2\frac{d\lambda}{dt}=\frac{\pi a^2\sqrt{1-e^2}}{\mathrm{T}}$$

更に平均運動 n を導き $n=\frac{2\pi}{\mathrm{T}}$, $\therefore\ \mathrm{T}=\frac{2\pi}{n}$ と置けば

$$\tfrac{1}{2}r^2\frac{d\lambda}{dt}=\tfrac{1}{2}a^2\sqrt{1-e^2}.n$$

$$\therefore\quad \frac{r^2d\lambda}{a^2\sqrt{1-e^2}}=ndt$$

是れ即ち第二の定律を示す式なり。又第一によれば

$$\frac{r}{a}=\frac{1-e^2}{1+e\cos\lambda}$$

然るに

$$\therefore\quad d\lambda=\frac{a(1-e^2)}{e\sin\lambda}\,\frac{dr}{r^2}$$

$$e\sin\lambda=\sqrt{e^2-\left(\frac{a^2(1-e^2)}{r}-1\right)^2}=\frac{\sqrt{1-e^2}}{r}\sqrt{a^2e^2-(a-r)^2}$$

$$\therefore\quad \frac{rdr}{\sqrt{a^2e^2-(a-r)^2}}=a^2ndt$$

此分を積分する爲めに

$$a-r=ae\cos u$$

と置けば

$$rdr=(1-e\cos u)a^2e\sin u\,du$$

$$\therefore\quad (1-e\cos u)du=ndt$$

$$\therefore\quad u-e\sin u=n(t-t_0)$$　(t_0 は惑星が近日點に來る時なり)

是れ實に吾等が既に太陽の運動を論ぜし際得たる式にして之を u にて解けば離心近點距離 u を t と常數とにて表はすことを得可し。u を得れば r と λ とが u の函數なるを以て與へられたる時 t に於ける惑星の軌道上の位置を容易

交點

に計算するを得可し。

天球に於ける惑星の途。今惑星か天球上に畫く道を觀測するに、何れも黄道を去ること遠からざる大圓なるを以て、是等の運動を硏究するには黄徑黄緯を用ふるを便利となす。偖天球上に於ける惑星の道は黄道と二點に於て交り、其一に於ては惑星は南方より北方に進み、他の一にては北方より南方に進む。前者を昇交點と云ひ、後者を降交點と稱す。今第二十二圖は觀測者が太陽にあるものとし γE を黄道とし、NM を、軌道を天球に投影せるものとせよ、而して是等が N にて交り、更に近日點を投影せしものが π なりとすれば軌道面は $\gamma N=\theta$, $\angle MNE=\varphi$ を知れば完全に定めらる。更に軌道面上にある軌道の位置を定むるには $\gamma N+N\pi=\varpi$ を知れば宜し、ϖ は近日點の徑度と稱するものなり。之に加ふるに軌道の形は太陽の場合と同樣にて長徑 a と離心率 e とに依て決せらる可し。以上五個の常數を知れば軌道を完全に決定し得可しと雖も與へられたる時 t に惑星の占むる位置を知らんと欲せば惑星が近日點を過ぐる時刻又は $t=0$ の時の惑星の黄徑及該惑星の週期又は平均運動を知るを要す。從て惑星の運動を論ずるには七個の常數必要なり。

黄道への整約

黄道への整約。近日點の黄徑を始め、これまで經度を測るには春分より昇交點まで黄道に沿ふて測り之より惑星の軌道を天球に投影せるものに沿ふて計れり。然るに一方に於ては是等の位置を定むるに黄徑黄緯を用ふる故、是等の關係を知らざる可からず。M を惑星の位置とし M より黄道へ垂線 MQ を引き $MN=w-\theta$, $NQ=\lambda-\theta$, $MQ=\beta$ とすれば惑星の黄經は λ にして黄緯は β なり。而して

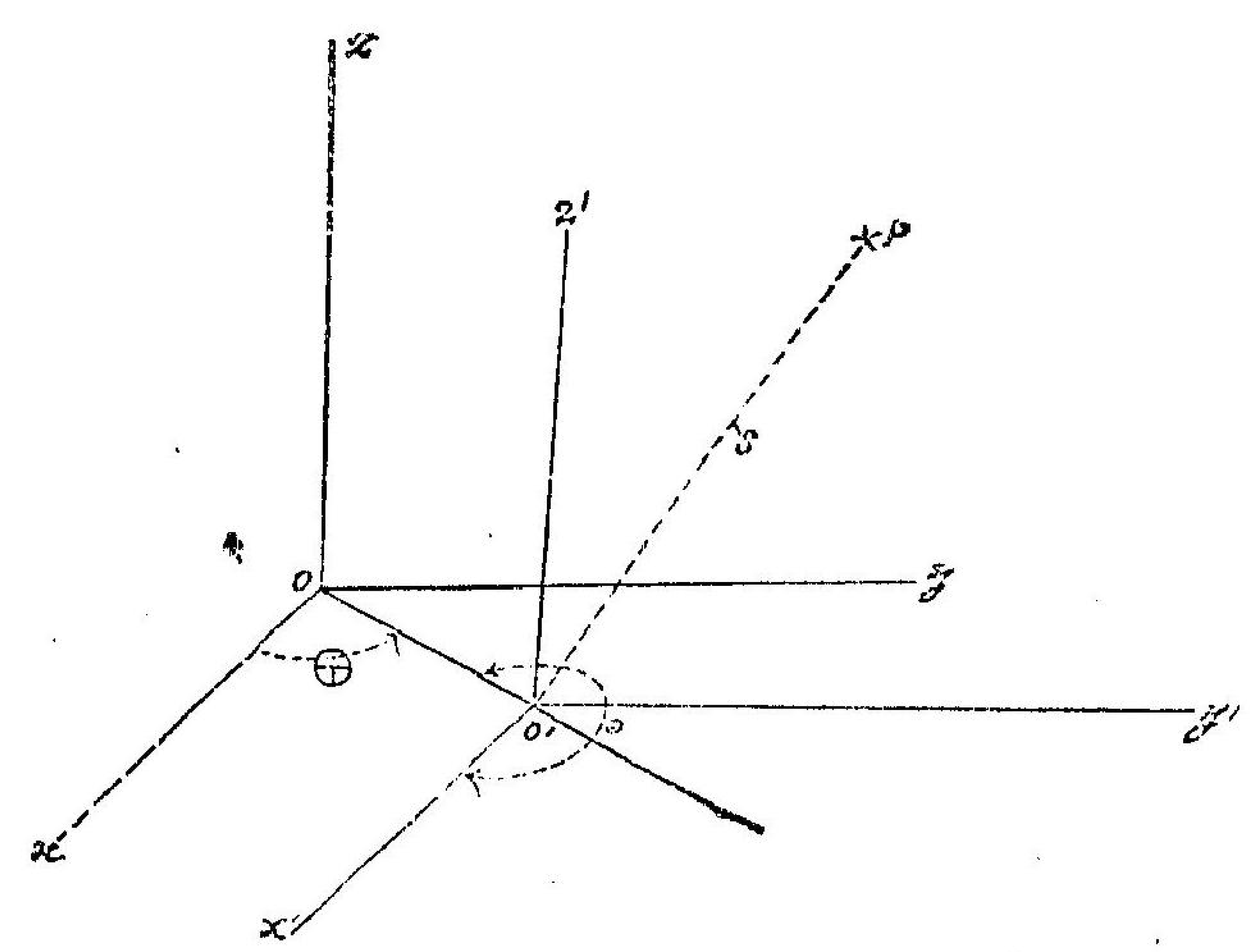
$$\begin{cases} \tan(\lambda-\theta)=\cos\varphi\tan(w-\theta) \\ \sin\beta=\sin\varphi\sin(w-\theta) \end{cases}$$

或は

$$\begin{cases} \lambda-w=-\tan^2\dfrac{\varphi}{2}\sin 2(w-\theta)+\frac{1}{2}\tan^4\dfrac{\varphi}{2}\sin 4(w-\theta)\ldots\ldots\ldots \\ \sin\beta=\sin\varphi\sin(w-\theta) \end{cases}$$

惑星を太陽より見たると地球より見たるとの關係。若し以上の七常數が測量により知られ居れば惑星の位置を豫め推算することを得可し。然るに吾等が上に論じたるは太陽を中心とせる場合なり。而かも實際にありては觀測する

第二十三圖



人類は地球にあるを故吾等が天球上に見る位置を求むる爲めには勢ひ地球を中心とせる場合と太陽を中心とせる場合との關係を知る必要あり。今上圖に於てOを太陽の中心とし、O′を地球の中心とし、Pを惑星の中心とせよ。而して先づOを原點となし、地球軌道面上に春分の方向を示す Ox 軸と之と直角に夏至の方向を示す Oy を取り更に軌道面に直角をなす Oz 軸を取り北に向ふ方向を正に取れりとし、是等三軸に照らして定めたるO′及びPの座標を (ξ, η, ζ) 及び (x, y, z) となし、更に又O′を通じて是等三軸と平行に $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ を引き之に照らしてPの位置を定むれば (x', y', z') なりとせよ然る時は

$$\left\{\begin{array}{l} x=\xi+x' \\ y=\eta+y' \\ z=\zeta+z' \end{array}\right.$$

又は

$$\left\{\begin{array}{l} x'=x-\xi \\ y'=y-\mu \\ z'=z-\zeta \end{array}\right.$$

然るに太陽より見たる場合にPの黄經を λ とし、黄緯を β とし、距離を r とし、又地球より見たる際是等が夫れ々々に λ' β' ρ なりとすれば次ぎの關係あり

$$\left\{\begin{array}{l} x=r\cos\beta\cos\lambda \\ y=r\cos\beta\sin\lambda \\ z=r\sin\beta \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x'=\rho\cos\beta'\cos\lambda' \\ y'=\rho\cos\beta'\sin\lambda' \\ z'=\rho\sin\beta' \end{array}\right.$$

又 OO′ をRにて表はし、地球の黄經を⊕にて表はせば

$$\xi=R\cos\oplus,\quad \eta=R\sin\oplus,\quad \zeta=0$$

從て

$$\text{(A)}\quad \left\{\begin{array}{l} \rho\cos\beta'\cos\lambda'=r\cos\beta\cos\lambda-R\cos\oplus \\ \rho\cos\beta'\sin\lambda'=r\cos\beta\sin\lambda-R\sin\oplus \\ \rho\sin\beta' \qquad\quad =r\sin\beta \end{array}\right.$$

(A)を多少變更すれば

$$
(\mathrm{B})\begin{cases}\rho\cos\beta'\cos(\lambda'-\oplus)=r\cos\beta\cos(\lambda-\oplus)-\mathrm{R}\\ \rho\cos\beta'\sin(\lambda'-\oplus)=r\cos\beta\sin(\lambda-\oplus)\\ \rho\sin\beta'=r\sin\beta\end{cases}
$$

或は又$\oplus$の代りに$\odot$を用ふれば $\odot=\oplus\pm180^\circ$ なるが故

$$
(\mathrm{C})\begin{cases}\rho\cos\beta'\cos(\lambda'-\odot)=r\cos\beta\cos(\lambda-\odot)+\mathrm{R}\\ \rho\cos\beta'\sin(\lambda'-\odot)=r\cos\beta\sin(\lambda-\odot)\\ \rho\sin\beta'=r\sin\beta\end{cases}
$$

(A)(B)又は(C)によりて吾等は太陽を中心とせる場合と地球を中心とせる場合との間に存する關係を知り得たり。依て豫め常數を利用し各時刻に相應する r λ 及 β を計算し置けばR$\oplus$等は既に吾等の知れる所なるが故(A)(B)又は(C)に從ひ ρ λ' β' を計算し得可し。而して又 ρ λ' β' を知る時は第八章に論ぜし公式によりて惑星の赤經及赤緯とを得可し。

惑星の離角

離角の變化。前項の計算中に現はれたる $\lambda'-\odot$ を惑星の離角と稱せられ、其變化は內惑星即ち地球軌道以內にあるものと外惑星即ち其距離が地球の距離よりも大なるものとによりて差あり。內惑星が其軌道を一週するに要する時が地球の一年よりも短きを以て地球より太陽と內惑星との比較運動を見れば惑星が太陽の周圍を正の方向に動いて見ゆ。さて $\lambda'-\odot$ が零なる場合には惑星と太陽とは同一方向に見受けらる。此の如き現象を合と稱し、二種の別あり即ち順合及び退合是なり。

順合退合

順合とは惑星が球地と太陽の反對にある場合にして退合とは太陽と地球との間に惑星の來る場合なり。偖て順合より退合に至る間及び退合より順合に歸へる途中離角が最大となることあり、此等を最大離隔と稱す。

最大離隔

外惑星の場合には之と稍趣きを異にせるものあり。即ち外惑星は其距離地球の距離よりも大なるを以て太陽の速度は惑星よりも大なり、從て吾等より太陽に對する惑星の比較運動を見れば惑星は負の方向に於てす。且つ外惑星の場合には $\lambda'-\odot$ が0より次第に變化して三百六十度に至るを以て合は只一にして而かも退合なり。$\lambda'-\odot=180^\circ$ の場合には地球が惑星と太陽との間にあり、此時には惑星は衝の位置にありと稱す。之を要するに惑星が順合又は衝の位置

衝

惑星の地心運動

にある時には地球より最も近く、反對に退合の位置にある時は最も遠し。

惑星の地心運動。既に述べたるが如く惑星も地球も共に太陽の周圍を週るものゝ故惑星の運動を地球の中心に照らし、地心を不動のものと假定して之が軌道を考ふれば甚だ複雑なるものとなる可し。

(A)にて⊕の代りに$\odot\pm180^\circ$を入るれば

$$\begin{cases}\rho\cos\beta'\cos\lambda'=r\cos\beta\cos\lambda+R\cos\odot\\ \rho\cos\beta'\sin\lambda'=r\cos\beta\sin\lambda+R\sin\odot\end{cases}$$

然るに今惑星の軌道が圓形にして何れも同一平面上にあるものと考ふれば稍簡單なるものとなり $\beta=\beta'=0$, $\lambda=w$ と考ふるを得依て $r=a$, $R=1$ と置けば上の式は次の如くに書くを得可し

$$\begin{cases}\rho\cos\lambda'=a\cos w+\cos\odot\\ \rho\sin\lambda'=a\sin w+\sin\odot\end{cases}$$

故に

$$\text{(I)}\quad\begin{cases}\tan\lambda'=\dfrac{a\sin w+\sin\odot}{a\cos w+\cos\odot}\\ \rho^2=a^2+2a\cos(\odot-w)+1\end{cases}$$

更に惑星が太陽の周圍に等速運動をなすものとし、地球從て太陽の平均運動をmとし、惑星の平均運動をnとすれば

$$\odot=mt,\quad w=nt.$$

なるを以て

$$\text{(I)}'\quad\begin{cases}\rho^2=a^2+2a\cos(m-n)t+1\\ \tan\lambda'=\dfrac{a\sin nt+\sin mt}{a\cos nt+\cos mt}\end{cases}$$

を得可し。依て之を微分すれば第一の式より

$$\text{(II)}\quad\frac{d\rho}{dt}=-\frac{1}{\rho}a(m-n)\sin(m-n)t$$

を得。更に第二式を微分すれば

$$\frac{1}{\cos^2\lambda'}\frac{d\lambda'}{dt}=\frac{\{a^2+a\cos(m-n)t\}n+\{1+a\cos(m-n)t\}m}{(a\cos nt+\cos mt)^2}$$

$$\therefore\quad\frac{d\lambda'}{dt}=\left(\frac{\cos\lambda'}{a\cos nt+\cos mt}\right)^2\{(na^2+m)+a(m+n)\cos(m-n)t\}$$

然るにケプレルの第三定律により $m^2=n^2a^3$ なるを以て次式を得

$$\text{(III)}\qquad \frac{d\lambda}{dt}=\frac{n}{r^2}\left\{a^2+a^{\frac{3}{2}}+(a+a^{\frac{5}{2}})\cos(m-n)t\right\}$$

ρの極大極小の場合には(II)の右邊が零たるべし。從て$(m-n)t=0$又は$=180°$依てρの最大値は$1+a$にして最小値は$1\sim a$なり。而して其他の値は實に是等二個の極限値の間を往來するものなり。

吾等は次ぎに(III)の式に就きて考ふる所あらんとす。今簡單の爲め左邊の量をvにて表はし、vを微分する時は$\frac{dv}{dt}$は必ず$\sin(m-n)t$なる一因數を含有するを以てv即ち地心經度變化の速度が極限の値となるには$(m-n)t=0$又は$=180°$ならざる可からず。

順行

先づ$(m-n)t=0$の場合を考ふるに$\cos(m-n)t=1$なるを以て

$$v=\frac{n}{r^2}a(1+a)(1+a^{\frac{1}{2}})$$

となる、依てvが何れの惑星につきても正の値なり、從て此場合に惑星は順行をなすものとす。然るに$(m-n)t=180°$は之と趣を異にし$\cos(m-n)t=-1$となるを以てvは次式の如く書くを得べし。

$$v=\frac{n}{r^2}a(a-1)(1-a^{\frac{1}{2}})$$

逆行

即ち內惑星外惑星の別なく何れも負の速度を有す。されば惑星は其際我等地球にある人々に逆行をなして見ゆ可し。

停止

vが時と共に變化して正より負となるを見れば必ずvが零となる時ある可し。此場合は實に惑星が天球上に停止して見ゆる時たり。而して此時刻は(III)の左邊を零と置けば見出すことを得可し。即ちtの値は

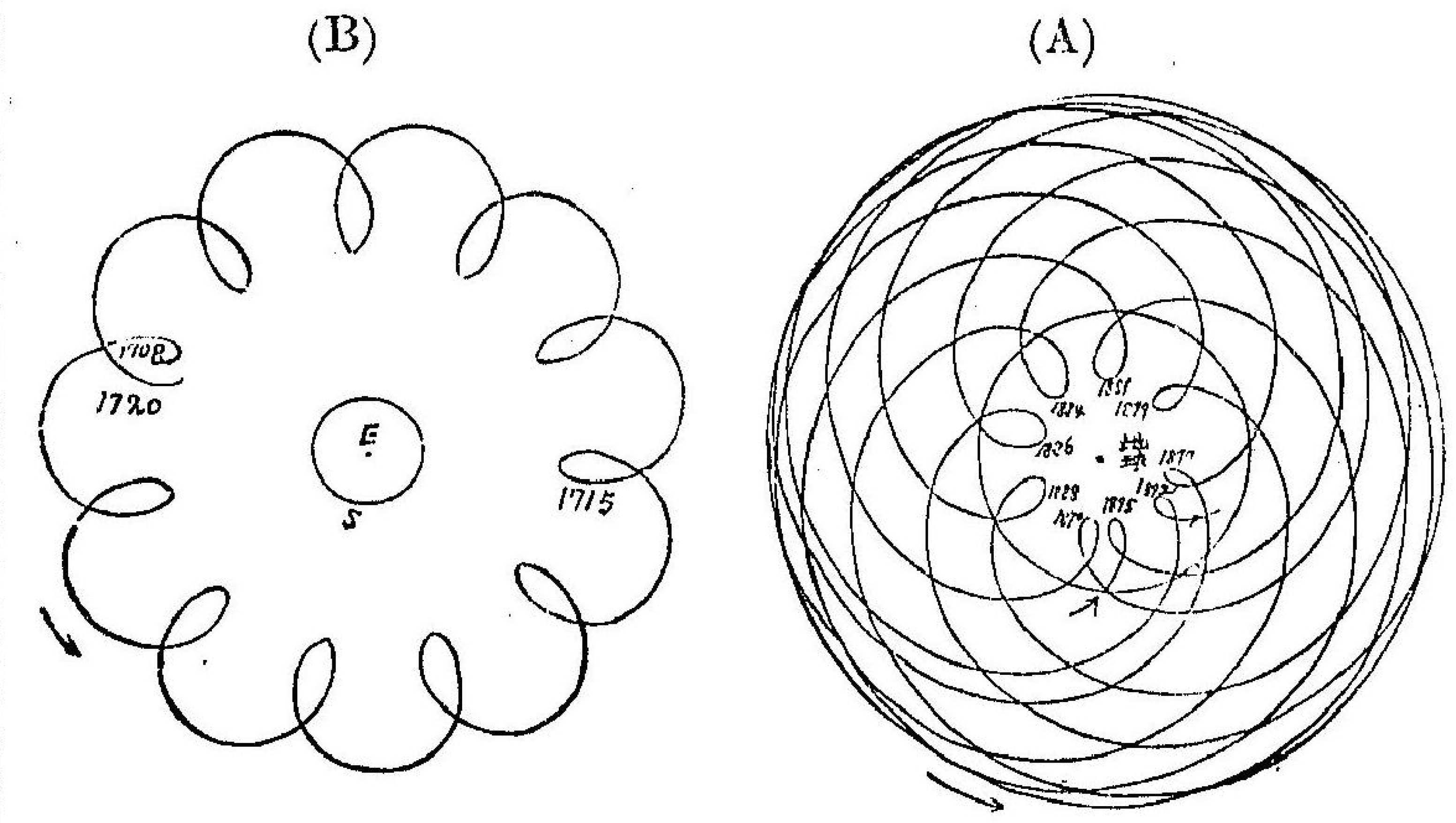
$$\cos(m-n)t=-\frac{a+a^{\frac{1}{2}}}{1+a^{\frac{3}{2}}}=-\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}-1}$$

なる條件を充たすものならざる可からず。今此條件を充たす$(m-n)t$の最小値をφとすれば$360°-\varphi$の時にも亦惑星は停止して見ゆ。尙φの値を考ふるに此角の餘弦が負量なるを以て$90°<\varphi<180°$なる關係ありとす。

偖惑星の停止の場合を考ふるに

$$0=\frac{n}{r^2}\left\{a^2+a^{\frac{3}{2}}+(a+a^{\frac{5}{2}})\cos\varphi\right\}$$

第二十四圖



を得。今(III)の各邊より此式の各邊を引けば次式を得可し。

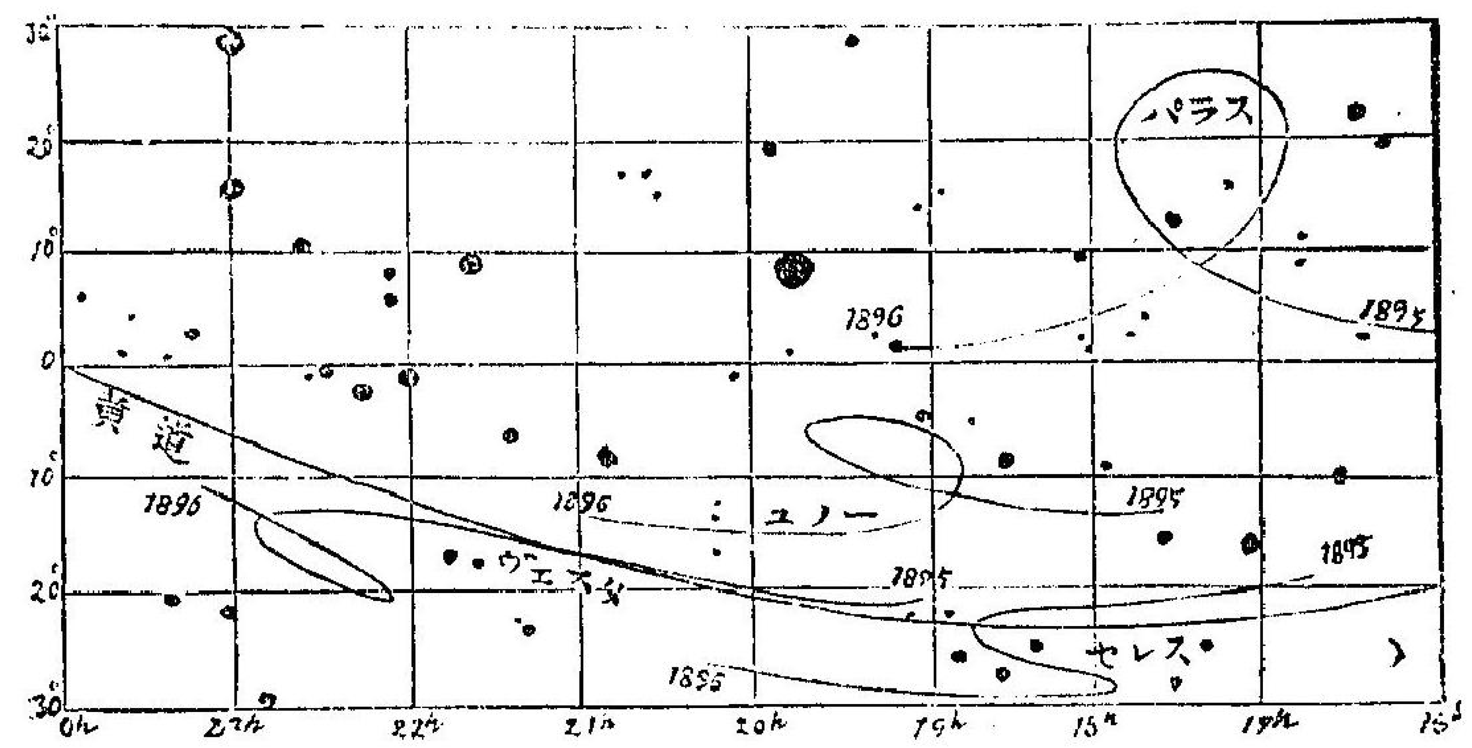
$$\text{(IV)}\quad v=\frac{n}{r^2}\left(a+a^{\frac{3}{2}}\right)\cos\{(m-n)t-\cos\varphi\}$$

依て(IV)を檢査するにφは九十度以上百八十度以上の角なるが故、$(m-n)t$がφよりも小なる間は常に負の速度を有し、て$360^\circ-\varphi$よりも大にしてφよりも小なる間は常に正の速度を有するを見る。從て惑星が逆行をなす時間をI_rとし、順行をなす時間をIとすれば

$$\mathrm{I}_r=\frac{360^\circ-2\varphi}{m\sim n},\quad \mathrm{I}_a=\frac{2\varphi}{m\sim n}$$

尙(I)によりて火星及び木星の地心の周圍に於てする運動の軌道を書けば第二十四圖の

第二十五圖



本圖は小惑星が千八百九十六年中に恒星間を進行する途を示すものなり

如きものを得可し。火星は衝の時に太陽より近きを以て地心軌道は二十四圖の(A)となり、木星は然らざる故其軌道は全然太陽軌道の外にあり。即ち(B)の如し。

余等は前に惑星は凡て黄道上に運動するものと想像せし故惑星は單に逆行及順行をなすものとなりしも其實何れも黄道と多少の角をなせる軌道上を動くもの故第二十五圖に示すが如く、甚だ複雜なる逆行の環を恒星の間に書いて運動するなり。

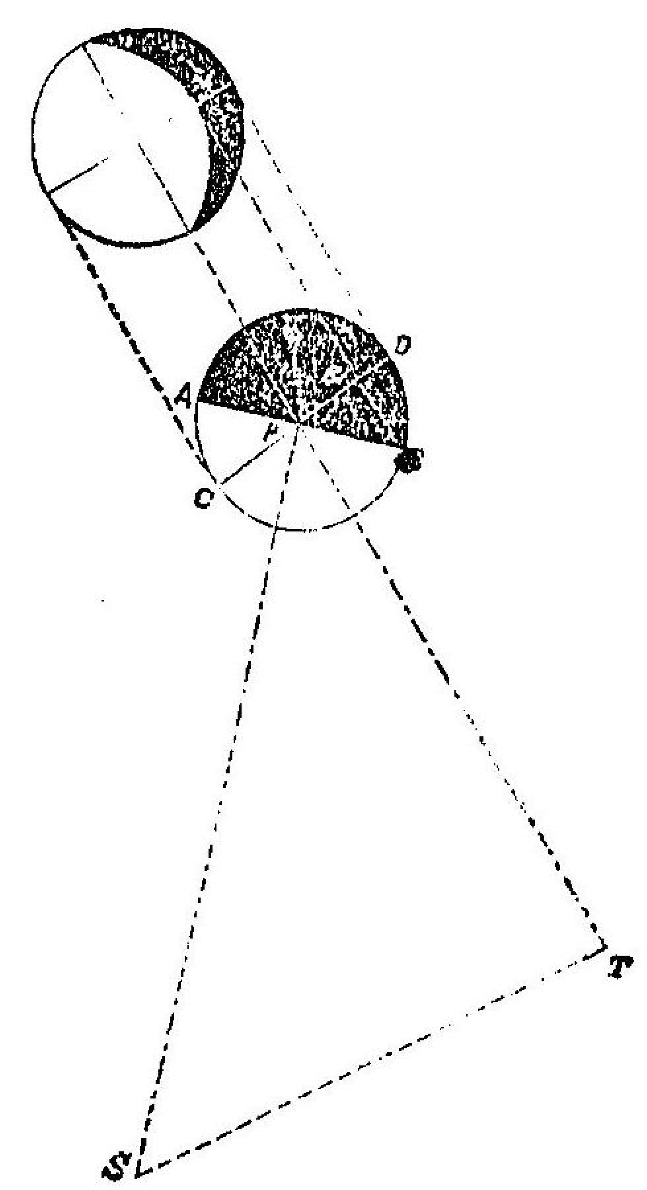
以上論ずる所によりて、吾等は惑星の運動の概畧を知れり依て、是より惑星の形

惑星の盈虚

ちの盈虚につきて一言せん。

惑星の盈虚。今Sを太陽の中心、Tを地球の中心、Pを惑星の中心と考ふれば太陽より發せる光線はSPなる方向に進みPを通じて之に直角をなす面ABは太陽によりて照さるゝ部分と然らざる部分とを界す。又同様に地球より惑星の中心を望み得る方向はPTにして地球より見ゆる部分と見えざる部分との界はPTと直角をなしPを通して畫けるCD面なり。

第二十六圖



されば此等兩面の間の角APCは惑星の盈虚を測る目安なり。然るに此角はSPT角に等しく、SPTは圖より直ちに知らるゝが如く惑星の地心經度と黄經との差即ち$\lambda'-\lambda$なり。今之をθにて表はし、又CP=aとし、BよりCDに下せる垂線がB'にて會するものと考へPB'=pとすれば

$$p=a\cos\theta$$

偕Tより望めば惑星の形ちは圖の上部に示せるが如く、明暗の境界線は橢圓となり、橢圓の長徑はa短徑は$a\cos\theta$となるを以て明暗兩部の比は次の如きものとなるべし。

$$\frac{\pi a^2+\pi a^2\cos\theta}{\pi a^2-\pi a^2\cos\theta}=\cot^2\frac{\theta}{2}$$

從てθが變化すれば明暗兩部の比も亦變化すること勿論なりとす。而かもθの變化は內惑星と外惑星とに依りて相異なり依て先づ第一に內惑星の場合を考ふるに順合の場合にはθは零にして是より次第に增加し、退合の場合には百八十度となり、是より益々增加して三百六十度となる。されば內惑星にありては滿、半、新、半、滿と漸次種々の形狀を呈すべし。されど外惑星の場合は之と異にしてθは零より漸次增加しSTPが直角となる時極大に達す。此極大値は火星にありては四十一度にして他のものは尙小なり。而してθは此極大値より再び減じて零となるを以て外惑星の形ちは滿と半との間を往來するのみにして火星の輝く部分の極小は全面の七分餘に當れり。

惑星軌道の要素

昇交點

惑星軌道の要素の決定法。是まで惑星の運動を論ずるに當り、惑星の軌道及び其上に於てする運動を決定するに至る可き要素を知れると假定せり。而して要素は既に記せるが如く七個にてありき。吾等は是より如何にして是等七個を決定し得可きかを略述せんと欲す。

第一昇交點の決定。既に說明せるが如く吾等は先づ軌道の平面を決定せざる可からず。之を決定するには二個の常數あれば足れり即ち昇交點の黃經及び黃道への傾斜是なり。今昇交點の黃經を決定せんと欲せば日々該惑星の觀測を行ひ各時刻に相當する地心黃經及び地心黃緯とを計算して之を表にせよ。倍表を檢査し$\beta'=0$なる時刻tを計算し更に其時刻に於て惑星の地心黃經λ'を求めよ。然る時は(A)によりて$\beta'=0$の時は$\beta=0$となりβ'とβとは共に正共に負の量たるを知る可し。故にtに於ける惑星の日心黃經λを求むれば吾等の求むる昇交點の黃經θと等しきものなり。即ち$\theta=\lambda$。依てλを計算すれば吾等の目的を遂し得るものとす。

今(A)を變化すれば次の二式を得ること容易なり

$$\begin{cases} \rho\, sin(\lambda'-\oplus)=r\, sin(\lambda-\oplus) \\ \rho\, sin(\lambda-\lambda')=\mathrm{R}sin(\oplus-\lambda) \end{cases}$$

是等の式を特に惑星が昇交點にある場合に應用すれば$\theta=\lambda$なるを以て

$$\frac{sin(\oplus-\lambda')}{sin(\theta-\lambda)}=\frac{r}{\mathrm{R}} \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

なる關係を得、故にrを知れば觀測に依りて得たるλ'及既知の$\oplus$及Rを用ひてθを計算し得可し。されどrは其實未だ計算し得ざるもの故、之を消去するを得策となす。即ち惑星が再び昇交點を經過する時(t_1)に上と同樣の觀測を行へば、rは前と同樣なる可きも、其他のものは變化す。依て是等を$\oplus_1$ λ_1' R_1にて表せば直ちに次式を得可し

$$\frac{sin(\oplus_1-\lambda_1')}{sin(\theta-\lambda_1')}=\frac{r}{\mathrm{R}_1} \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

故に(1)(2)よりrを消去すれば

$$\frac{sin(\theta-\lambda_1')}{sin(\theta-\lambda')}=\frac{\mathrm{R}_1 sin(\oplus_1-\lambda_1')}{\mathrm{R}sin(\oplus-\lambda')}$$

更に右邊のものを$cot\,\gamma$と置けば、多少整約して次式を得。

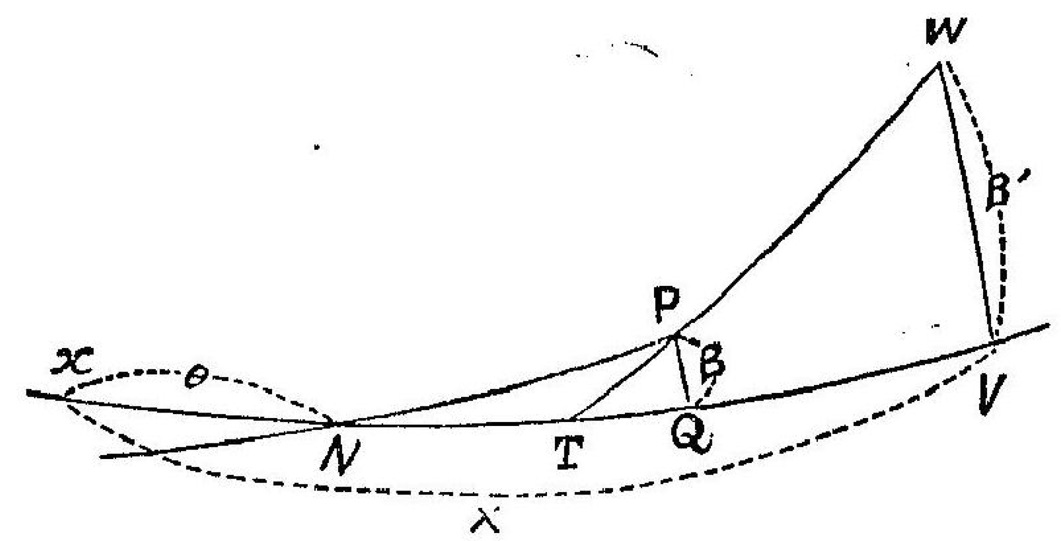
$$\tan\left(\theta-\frac{\lambda'+\lambda_1'}{2}\right)=\tan(45^\circ-\gamma)\tan\frac{\lambda'-\lambda_1'}{2}$$

茲に於て吾等は此公式又は之を展開せる式によりてθを計算することを得可し。

軌道面の傾斜

第二軌道面の傾斜。第二十七圖にてxV を黄道とし、xを春分點、Nを昇交點、Tを太陽より見たる地球の位置とし又P及Wを夫れぞれに太陽及地球より見たる天球に於ける惑星の位置とすればxN$=\theta$、然るに地球の黄經$\oplus$が丁度θに等しき場合を考ふればT點とN點とが一致してPNV角とWNV角とが同一のものとなる。而して該角は即ち求むる傾斜φなるを以て球面三角形 WNV より直ちに次式を得可し

第二十七圖



$$\tan\varphi=\frac{\tan\beta'}{\sin(\lambda'-\theta)}$$

此の如くにしてθ及びφが決定せられなば惑星の軌道上に於ける位置を計算するを得可し。即ち

軌道に於ける惑星の位置

$v=x\mathrm{N}+\mathrm{NP}$ と惑星と太陽との距離rとを得可し。圖に於て $\mathrm{TV}=\lambda'-\oplus$, $\mathrm{WV}=\beta'$ なるを以て

$$\cos\mathrm{TW}=\cos(\lambda'-\oplus)\cos\beta'$$

$$\tan\mathrm{WTV}=\frac{\tan\beta'}{\sin(\lambda'-\oplus)}$$

即ち TW 及び WTV の角を計算するを得。更に球面三角形 NPT を考ふるに、PNT はφ、$\mathrm{NT}=\oplus-\theta$にして、何れも既知のもの故、該三角形を解きて NP 及 PT を得、依てvを知り得可し。次ぎに太陽O地球O′惑星Aを結びて平面三角形を作れば、$\mathrm{OO'}=\mathrm{R}$, $\mathrm{OA}=r$, $180^\circ-\angle\mathrm{O'}=\mathrm{PT}$, $\angle\mathrm{A}=\mathrm{WT}-\mathrm{PT}$ なるを以て

$$\frac{r}{\sin\mathrm{WT}}=\frac{\mathrm{R}}{\sin(\mathrm{WT}-\mathrm{PT})}$$

故に此式よりrを計算し得可し。

其他の常數

其他の常數。前に述べたる所により惑星の赤經赤緯を觀測すれば、之を數回計算し直してr及vとを得。依て今t_1 t_2 t_3なる相異なる時刻にr_1 r_2 r_3及びv_1 v_2 v_3を得たりと假定すれば、此等は何れも橢圓の式を滿足せしむるものならざる

可からず。偖旣に記せるが如く、近日點の黃經をϖにて表せば楕圓の式は次の如く書くを得可し。

$$r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(v-\varpi)}$$

更に$p=a(1-e^2)$と置き多少整約せる後r　vにt_1　t_2　t_3なる時刻の値を入れ更ふる時は次ぎの三式を得

$$\left\{\begin{array}{l} p-r_1\cos v_1\, e\cos\varpi-r_1\sin v_1\, e\sin\varpi=r_1 \\ p-r_2\cos v_2\, e\cos\varpi-r_2\sin v_2\, e\sin\varpi=r_2 \\ p-r_3\cos v_3\, e\cos\varpi-r_3\sin v_3\, e\sin\varpi=r_3 \end{array}\right.$$

而して是等三式中に未知量三個あり即ちp, $e\sin\varpi$, $e\cos\varpi$是なり。依て聯立方程式として取扱へば是等の三量を決定することを得可し。然るに是等を計算するに當り共通分母として次ぎのデタルミナントの入り來るものあり

$$D=\begin{vmatrix} 1 & r_1\cos v_1 & r_1\sin v_1 \\ 1 & r_2\cos v_2 & r_2\sin v_2 \\ 1 & r_3\cos v_3 & r_3\sin v_3 \end{vmatrix}$$

$$=r_1r_2\sin(v_1-v_2)-r_2r_3\sin(v_2-v_3)+r_3r_1\sin(v_1-v_3)$$

然るに此は直ちに知らるゝ如く、t_1　t_2　t_3なる時に惑星の占むる位置を連ねて得たる三角形の面積の二倍に等しきを以て零にあらず。依て右の三量は必ず決定せらるゝものたり。從て$e\sin\varpi$, $e\cos\varpi$よりeとϖとを求め得可く、eを知ればpよりaを求め得可きなり。茲に於て吾等は時に關係なき五個の常數を悉く定め得たるを以て是より更に一歩を進め惑星が近日點を過ぐる時刻t_0を求めざる可からず。即ち觀測を整約して得たるt　r　vを列記せる表より$v=\varpi$となる時刻を求むる時は是れ即ち吾等が前にt_0と稱せしものなり。其他週期Tも表より求め得可きを以て平均運動nも直ちに知らる。

第十三章　惑　星(其二)

水星

水星。吾等は是より水星金星より、漸次各惑星につき記載する所あらんと欲す。先づ水星を考ふるに其太陽よりの平均距離は地球と太陽とのを單位とすれば〇、三九又軌道の離心率は殆ど$\frac{1}{5}$にして他の惑星よりも大なり其外軌道の傾斜

も大にして七度なり。而して之を地球より望めば太陽を距ること二十九度以上とならず。又此最大離角の際にはシリウスよりも小さくアルクチュラスよりも大なる星の如く肉眼に映ずるも强き望遠鏡を以て之を見れば月の如き形をなして見ゆ。其直徑は地球の直徑の三分の一强にして體積は二十分の一なり。質量は未だ精密に知られざるも殆ど十六分の一なり。從て密度は地球より大なりとす。

偖此惑星は大なる離心率を有するが故近點距離と遠點距離との間に稍々大なる差あり即ち $a(1-e)=0,31$, $a(1+e)=0,47$ 更に此惑星と地球との距離を考ふるに常に一、四七と〇、五三との間を往來す。

スキアパルリ氏の研究によれば水星は公轉の週期と等しき週期を以て一自轉をなすものなりと云ふ。即ち八十八日に一公轉及一自轉をなす。スキアパルリの後米國のロウェル氏も大なる望遠鏡を用ひて之を研究し矢張り同一の結果を得たりと云ふ。されば水星の半球丈は絕えず太陽の熱を受けて甚だ暑きに反し他の半球丈は太陽に面せざる爲め甚だしく寒さを感ず可し。されば水星の大氣は之が爲め烈しき循環をなし居るならん。

金星

金星。金星の太陽よりの平均距離は〇、七二にして離心率は甚だ小さく約 $\frac{1}{100}$ なるを以て軌道は殆ど圓形をなせり。故に太陽との距離は甚だ小なる變化をなすのみ。地球との距離は最大の時は一、七二にして最小の時は〇、二八なり。從て是等の間に殆ど六倍の差あるを以て金星の視半徑は甚だしき變化を呈するものなり。而かも其眞直徑を考ふれば殆ど地球と等しきも密度は地球のを單位とすれば〇、八なり。水星の場合と等しく之を望遠鏡を以て之を望めば月の如く盈虛をなすを認むされば是等の惑星も自ら光輝を發するものにあらで只太陽の光を反射して輝くものなるを知る。軌道の傾斜は殆ど三度半なり。金星の公轉の週期は二百二十五日なるが、スキアパルリ氏によれば自轉も亦之と同一の時を以て行はるゝと云ふ。(されど其以前シュルッテル其他の研究せし所によれば自轉の週期は二十三時二十一分なりと云ふ。金星は我地球の大氣と相似たる大氣を有するものゝ如し。

水星及び金星は內惑星なるを以て退合の際に是等が太陽の面上に投射して見

ゆることあり。此は水星經過又は金星經過と稱せらるゝものにして退合の際惑星が交點に近く存在すれば起る現象にして水星にありては屢ゝあれど金星にては甚だ稀有なる現象なり。

火星。火星は我地球の外にあるものにして其平均距離は一、五二離心率は十一分の一なり。公轉の週期は二ヶ年より幾分か少く即ち一年と三百二十二日なり。其直徑は殆ど地球の半分にて質量は十分の一なるを以て密度は地球の十分の七なり。地球と火星との最大距離は二、六六にして最小なる時は〇、三八なり。從て衝の場合に惑星の視差を觀測すればそは二十三秒に近きもの故比較的容易に之を決定するを得べし。既に火星の視差を知れば太陽の視差を求め得可し。

肉眼にて之を見れば火星は赤色を帶び容易に他の星又は他の惑星と區別せらる。之を望遠鏡にて望めば其表面に一種の斑點あるを以て之を利用して惑星自轉の週期を決定し得可し。觀測によれば該週期は二十四時三十七分なるを以て火星の一日は我地球の一日より幾分か永し。而して軌道面と赤道面とは二十五度の角をなせり。此は地球にありては二十三度二十七分に相當するものにして兩者著しく酷似せり。從て季節の關係の如きも著しく地球と類するものあり。獨り我地球と異なる點をあぐれば太陽より受くる光線が殆ど二分の一なるを以て光りと熱さとが亦二分の一なることなり。

火星は大氣を以て包圍せられ、分光器の示す所によれば水蒸氣の存在を示す。されば火星の表面には水が液體又は固體となりて存在し居るなる可し。注意深き觀測によれば我地球と等しく大陸及海に類するものあるを認む。

火星には二個の衞星あり。何れもワシントンのホール教授によりて發見せられたるものにして甚だ小なり。其外方にあるものはディモスと稱せられ火星の中心を距る一萬四千六百哩の所にありて三十時十八分にて一公轉をなす。又内部にあるはフォーボスと稱せられ五千八百哩の距離を有し七時三十九分に一公轉をなす

小惑星。火星と木星との間に殆ど無數の天體ありて惑星と等しく太陽を中心として橢圓の軌道を運行す。是れ即ち小惑星と稱せらるゝものにして始めて

此種の天體を發見せしはシシリーの天文學者ピアゼ氏なり。彼は千八百一年一月一日第七光度の星を觀測せしが、其翌夜再び之を觀測せしに其位置を變化せるを確めたり。其後六週間綿密なる注意の下に之を研究し之にセレスなる名を附せり。其後オルベルス博士第二の小惑星を發見し之にパッラスなる名を附せり。次いでハルデンク氏第三の小惑星ユノーを發見し、オルベルス又ヴェスタなる第四の小惑星を發見せり。此は最も大なる光度(六、三)を有するものなり。其後年々小惑星の新發見ありて遂に現今にては五百以上六百近くの小惑星を知るに至れり。而して是等の太陽より平均距離は大凡二、〇九より四、三〇の間にあり。從て之が週期の如きも三年より九年の間を往來するなり。離心率の如きも著しく大なるものありてエスラの離心率は〇、三八にして殆ど彗星の軌道に於けるが如し。其大さに至りては何れも甚だ小にして最も大なるものにても直徑四百八十五哩に過ぎすと云ふ。されば小惑星全體の質量を總計しても地球の質量の百十五分の一に過ぎずと稱せらる。既に知られたる小惑星の光度は九光度より十五光度の間にあり。而して是等の內には光度の變化を示

すものあり、されば其形狀の如きも球形をなさゞるものあらんとの說あり。されど是等の點につきては未だ充分なる定說なし。

エロス

是等無數の小惑星中千八百九十八年八月ウイット氏によりて發見せられたるものは其軌道が曾て見ざる特色を有せしを以て人々の注意を引くに至れり。此天體はエロスと稱せられ、軌道は火星の軌道と鎖をなし、衝の際には火星よりも地球により接近することあるを以て、太陽視差を精密に測定するに用いらる。エロスの太陽に至る平均距離は一、四六にして離心率は〇、二二なり故に最も良好なる衝の時には地球との距離僅かに〇、一三なり。

木星

木星。 木星は金星が最大の光度を有する場合よりも小なる光輝を示せども平均シリウスよりも五倍程強く輝くものにして而かも外惑星の一なるを以て金星の如く太陽の近傍にのみ存することなく衝の際には夜半の中天を彩色す。此惑星の軌道には別に特色あるを見ず其平均距離は五、二〇離心率は殆ど二十分の一なり。傾斜は小にして一度十九分なり。其光りは合の時と衝の時とに依りて大なる差あり今合、最近の衝、最遠の衝とに於ける光輝の比例數を取れは

一〇、二七、一八となる。されば衝の時の平均光輝は合の時の二倍に當る。週期は一一、八六年なり。其形狀は球形をなさで極を連ねたる直徑は赤道の直徑よりも十七分の一丈短きを以て一見直ちに扁平なるを認め得可し。而して其平均直徑は地球の殆ど十一倍に相當するを以て其體積至て大なり。即ち地球の千三百九倍にして質量の比は三一七、七なり從て其密度は甚だ小にして地球の〇、二四に相當す。

之を望遠鏡にて望めば其色合の種々なる斑紋を呈するも就中赤道に平行せる數條の線は著しきものにして小なる望遠鏡を以てするも尚帶狀をなせる大なるもの二條を見得可し。此等の斑紋は凡て然るにあらねど其大部分は一時的のものにして恐らく大氣の現象なる可し。されど若干の點は半ば永續的のものにして數年間變化なしに繼續することあり。所謂大赤色斑點は重なるものにして其色と大とを變化しつゝ今尚存在す。是等の斑點によりて自轉の週期を觀測するに斑點により其結果一致せざるも平均九時五十五分なり從て望遠鏡を以て之を望めば忽ちにして種々の變化を示す。

木星には數多の衞星あり。其中最大なる四個は千六百十年ガリレロによりて發見せられたるものにしてイオ、ユーロパ、ガニイド、カッリストは是れなり。其後千八百九十二年バーナード氏第五の衞星を發見せり。此は甚だ小にして少くとも二十インチの望遠鏡を用ひざれば見ることを得ず。然るに今年即ち千九百五年に至りてペッリン氏相續いて二個の衞星を發見せしを以て木星の衞星は今日に於ては七個となれり。此等の衞星の多數は其軌道面何れも木星の軌道面と一致するを以て木星の周圍を週轉する間に地球より見れば蝕及經過をなすことあり。ロイメル氏は千六百七十五年木星の蝕を觀測して光線の速度を發見せしは此等の衞星に關し著しき事實なり。

土星

土星。昔時にありては土星は最も遠き惑星と考へられしものにして、太陽よりの平均距離は九、五四なり。而して其離心率は〇、〇六にして木星より幾分か大なりとす。軌道面の傾斜は二度半、公轉の週期は二十九年半なり。其形狀は矢張り扁平にして其楕率は殆ど十分の一にして其平均直徑は七萬三千哩なり、されば其體積は我地球の七百六十倍なり。而かも其質量は地球の九十五倍に過

ぎざるを以て其密度甚だ小さく地球の密度の八分の一なり。從て水の七分の五なり。土星の自轉の週期は千八百七十六年ホール教授の測定によれば一時十四分なりと云ふ。是れ宛然現はれたる表面の白點によりてせるものなるが其後スタンレー、ウイリアムスの研究によりて其事實なるを證せられたり。土星の軸は其軌道面と二十七度の角をなす。

土星は其赤道面上に輪を有するを以て最も美なる惑星なり。今此輪を吟味するに三重にして何れも土星の中心を中心とせる同心圓にして甚だ薄く其最も外部に位するもの稍々光輝を放ち、次なるは最も其光り强く最も內なるものは稍々暗黑にして比較的に見易からず。其外端の直徑は十六萬八千哩にして外輪の幅は殆ど一萬哩なり而して外輪と中輪との間には千六百哩の空所ありて中輪之に次ぎ其幅一萬六千五百哩に亘り夫より直ちに內輪に連續す。內輪の幅は外輪と其大さを等うす。其厚さに至りては甚だ薄く恐らく百哩を越えざらん。輪の構造につきて多數の天文學者の一致する處によれば是等は固體又は液體よりなる連續體にあらずして無數の相分離せる微分子の集合なり。而

して其各分子は何れも單獨に一個の月として母體の周圍を週轉するものならんと云ふ。

土星は輪の外更に十個の衞星を有す。十九世紀の末頃までは其數八個なりしが千八百九十八年第九の衞星がダヴルユ、ピケリング氏によりて發見せられ今年即ち千九百五年にエー、ピケリング氏によりて第十の衞星を知るに至れり。

天王星。天王星は千七百八十一年三月ハーシール氏に發見せられたるものにして、彼は始め之を彗星として之が發見を披露せしが、其後レキセル氏の計算によりて其軌道が彗星に特有のものならて、惑星の特色を帶べるが爲め、遂に惑星の一と決せられたり。其平均距離は一九、一八にして離心率は木星のものより幾分か小なり。傾斜は甚だ小にして只四十六分なり。公轉の週期は八十四年にして自轉の週期は未だ充分に知られず。二三の學者は九時乃至十二時の週期なりと云へり。之を月なき暗夜肉眼にて之を望めば第六光度の星の如くに見え、望遠鏡を用ふれば綠色の小圓に見ゆ。其形ちは矢張り兩極扁平にて其楕率は十四分の一なり。直徑は平均三萬二千哩なるを以て其體積は地球の六十

海王星

六倍。而かも質量は一四、六倍なるを以て密度は〇、二二倍なり。

天王星は四個の衛星を有せり。而して是等の軌道は何れも殆ど圓形をなし一平面上に存す。該平面は黄道面と八十二度餘の傾斜をなし、此等の衛星は何れも海王星の如く太陽系の他天體と反對なる方面に母體を週轉す。

海王星。海王星の發見は實に近世數理天文學の最大成功の一にして、その名譽は佛のルフィリイール及び英のアダムス兩氏に歸す可きものなり。彼等は單獨に天王星の運動に表るゝ不規則を研究し、之を未だ知らざる他の惑星の影響なるべしと論斷せり。依てアダムス氏は未發見の天體が存在す可き位置を計算したる後之を實地天文學者チャルリスに報ぜり。チャルリスはエーリー氏と謀り、千八百四十五年七月二十九日よりアダムスの計算せる位置の近傍を搜索し始めたり。されど當時充分なる星圖なかりし爲め、彼れは苦心焦慮三千有餘の星を觀測し其位置を記錄して星圖を作りつゝありし時新惑星發見の報を耳にせり。其時は十月一日にして其後調査せしに既に八月四日十二日九月二十九日の三日に此惑星を觀測せしを發見したるが故他の人が之を發見せずとも今數週にて發見を公にするを得る場合にてありき。之と同時にルフィリイル氏は計算の結果を獨のガッレ氏に報ぜしにガッレ氏は當時恰もブレミッキルの作れる星圖の便を得たるが爲め、一時間を待たずして該星圖になき一星を發見せしが、そはルフィリイル氏の報ぜしが如く小なる圓形を呈せしを以て惑星ならんと想像せられ、其後二十四時を經過せざるに早くも其運動によりて惑星と決定せられたり。

海王星は現今吾等の知れる最も太陽より遠き惑星にして其平均距離三〇、〇六離心率は甚だ小にして〇、〇一以下なるを以て軌道は殆ど圓形をなせり。傾斜は一度四十七分、週轉の週期は百六十四年なり。之を望遠鏡にて望めば八九光度の間に位する小なる星にして綠色を呈す。其直徑は三萬五千哩にして其體積は地球の八十五倍に當れり。されど其質量は衛星のを合して地球の約十七倍に等しきを以て密度は〇、二〇なり。

此惑星も亦一個の衛星を有す。而かも其軌道は三十四度五十三分の傾斜をなし、天王星の衛星に於て見るが如く東より西に週轉す。

以上吾等は惑星につきて二三の要用なる點を記載し終れり。是より轉じて月の研究に移らん。

第十四章　月

月は太陽に次ぎて人々の親炙せる天體の一なり。今之を肉眼にて見れば其形狀圓くして殆ど太陽と其大さを等しうす。望遠鏡を用ふれば其表面に存する山岳及海陸分布の狀を鮮明に觀測するを得可し。

天球上に於ける月の運動

天球上に於ける月の運動。 若し月が恒星の一なりとすれば、そは恒星の間に固定せる位置を有せざる可からず。然るに數夜引續いて月を注意すれば、此天體は恒星の間を次第に西より東に向ひ移動するを認めん。從て月は恒星にあらざるを知る。然らば此は惑星なるか。若し惑星ならんか、既に觀察せるが如く彼は順行及び逆行をなし或時は停止して見えざる可からず。而かも月の天球上を運動するを見れば此等の現象を呈せずして恰かも太陽の如く常に順行をなし、殆ど二十七日と八時間を經過すれば再び同じ恒星の所に歸へるを見るべし。

白道

若し我等子午環儀を用ひ毎日月の赤經赤緯を觀測して得たる材料を太陽の場合に於てなせるが如く、天球儀上に記し各々の日、月が存在せる點を結びて曲線を畫けばそは矢張り一個の大圓にして黄道と殆ど五度九分の角をなす、之れ即ち白道と稱するものなり。黄道及白道は何れも大圓なるを以て二點にて相交る。是等の點は交點と稱せられ、其中月が南半球より北半球に移る點を昇交點と云ひ月が北半球より南半球に行く點を降交點と云ふ。是に由りて之を觀れば月は地球を中心として其周圍を週轉する一天體なるを以て地球の衞星なり。

白道の要素

白道の要素。 白道の位置を明瞭に示さんと欲せば、既に惑星の場合に考へたるが如く、春分點より昇交點に至る距離即ち昇交點の黄經と黄道に對する白道の傾斜とを知らざる可からず。第二十八圖に於て γNL は黄道を $\gamma N'L'$ は白道を表はすものとすれば是等は NN' 線にて互に相交る、此線は交點線と稱せらるゝものにして兩交點を結べる直線なり。而して γ が春分點なりと考ふれば昇交點の黄經は γN にして L にある月の黄經は L より黄道へ引ける垂線が夫れと

交點線の逆行

交る點Mとγとの距離即ちγMにして黄緯はLMなり。今昇交點の黄經をΩにて表はし、月の黄經をλにて黄緯をβにて表はし更に傾斜の角をφにて表はせば球面三角形LMNより次式を得可し

$$\tan\beta=\tan\varphi\sin(\lambda-\Omega)$$

若し$x=\cos\Omega\tan\varphi,\ y=\sin\Omega\tan\varphi$なる條件によりて決定せらるゝ$x$及$y$を用ふれば右の式は次の如く書くを得るものなり

$$x\sin\lambda-y\cos\lambda=\tan\beta\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(\mathrm{A})$$

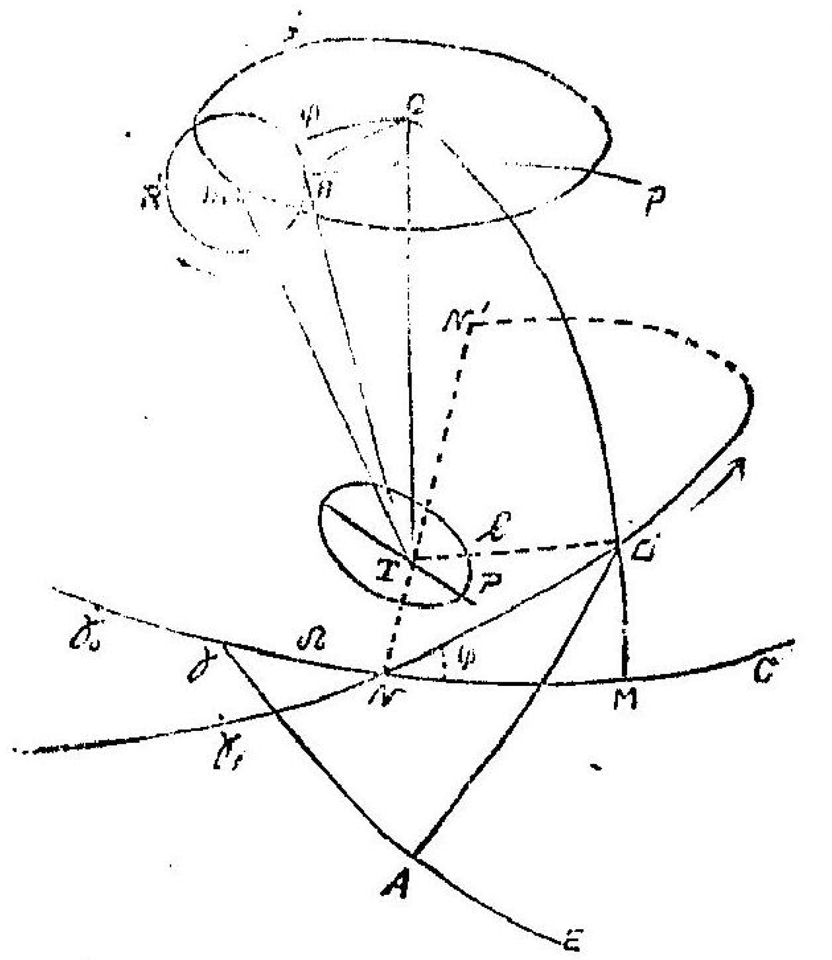
借月をn回觀測すればλ及βはn對あるを以て(A)の如き式n個を得可し。而かも此式に未知量はx yの二個のみなる故最小二乘法を用ひてx及yの最も實らしき値を求め得可し。既にx yを知ればΩ及φを決定するを得即ち

$$\Omega=\tan^{-1}\frac{y}{x},\qquad \varphi=\tan^{-1}\frac{x}{\cos\Omega}=\tan^{-1}\frac{y}{\sin\Omega}$$

然るに此公式によりて數多の相距れる時にΩ及φを計算すればφは常に殆ど五度なれどもΩ丈は時間と比例して次第に減少するを發見すべし。されば交點

線は其實黄道上を逆行するものと云ふ可し。今其速度を見るに十八年と三分の二に一廻轉をなすを以て平均一日の速度は三分十秒六三なり由て與へられたる時tのΩの値は大略$\Omega_0-190''.63t$によりて計算するを得。此現象は白道の極mが黄道の極Qの周に圓を畫き十八年三分の二にて一週轉し且つ其速度が一樣にして其方向が負なりと解するを得可し。

第二十八圖



次ぎに傾斜φは既に記せるが如く殆ど五度なれども一層精密なる觀察を行へば時間と比例して增減せざれども四度五十九分より五度十分の間を往來するを見ん。是れ月の軌道の章動と稱するものにして單に傾斜に於てのみ認むる現象にあらず。昇交點の黄經の如きも矢張り、一層精密に觀察する時は上に論ぜし變化の外一種の週期的變化あるを認む。

交點線の章動

依て是等を綜合して考ふれば交點線は二個の運動をなすものなり、第一は既に論ぜる十八年三分の二に週轉をなす等速運動にして第二は此等速運動により て決せられたる平均位置 NN′ の兩側に於てする振動是れなり。

タイコ、ブラヘは始めて此振動を發見せし人にして次ぎの如く考へたり。即ち圖にて Tm 軸の周りに九分の半徑を以て圓を畫き白道の軸が RTR′ なる圓錐體を畫く間に Tm 自身が TΩ なる軸の周に週轉するものとすれば白道の位置は觀測せる所と全然一致するを認む。而して此事實を參考し力學の補助をかりて ☊ 及 φ を計算すれば次式を得。

$$☊ = ☊_0 - (3'12'')t + (1°25'35'')\sin 2[(☊) - ⊙]$$

$$\tan\varphi = \tan(\varphi) + \frac{3}{8}\kappa \tan(\varphi)\cos 2[(☊) - ⊙]$$

此式に於て　$(☊) = ☊ - (3'12'')t$,　$(\varphi) = 5°8'47''.9$,　$\kappa = \dfrac{27.321}{365.256}$　なり。

分點月

分點月恒星月及朔望月。分點月とは月の黄經が三百六十度丈變化するに要する時間にして二七、三二一五八日なり。之を精密に求めんと欲せば月の黄經が等しく且つ其間が相隔れる兩時刻の差を求め、之を其時の間に起れる月數にて除すべし。

恒星月

朔望月

恒星月とは月が同じ恒星の位置まで歸り來る時にして分點月より幾分か小なり。即ち二七、三二一六六。次ぎに朔望月とは朔より朔又は望より望に歸へるに要する週期にして

$$\frac{2\pi}{n' - n} = 29.^{d}530589$$

なり。此式に於て n は太陽の平均運動、n' は月の平均運動なり。故に恒星月を M、朔望月を S、恒星月を Y にて表せば次ぎの關係あり。

$$\frac{1}{M} = \frac{1}{S} + \frac{1}{Y}$$

朔望月を精密に求めんと欲せば蝕を利用すべし。蓋し日蝕は朔にのみ月蝕は望にのみ起る現象なるを以て是等の蝕の中央は朔又は望の精確なる時刻を示すものなり。故に相隔る二個の日蝕又は月蝕の中央時刻を計算し是等の差を求め之を其間に起れる朔望月の數にて除す可し。

月の楕圓運動。第二十八圖にて白道上にN點より逆行の方向に $N\gamma_1=\Omega$ なる樣 γ_1 を取り、$\gamma_1L=v$, $NL=u$ と置けば前者は軌道に於ける月の經度（軌道經）と稱せられ、後者は黄緯の目安と稱せらる。而して是等の間に次ぎの關係あり

$$v=u+\Omega$$

次ぎに直三角形 NLM より $\tan NM=\tan NL\cos\varphi$ を得即ち

$$\tan(\lambda-\Omega)=\tan u\cos\varphi$$

依て觀測によりて $\varphi\,\lambda$ 及 Ω を求むれば u を計算し得可し從て v を求め得可し。月の動徑例へば Tl を r にて表はし地心視半徑を Δ_0 にて表はし、k を常數とすればr は次ぎの式にて計算するを得可きものなり。

$$r=k\frac{1}{\Delta_0}$$

v 及 r を計算すれば之等が日々其値を變化する狀態を考へ、既に太陽の場合に於てせるが如く月の軌道面上に於てする運動の法則を發見するを得ん。研究の結果によれば

第一、月は其焦點の一に地球の中心を有する楕圓を畫きて公轉す。

第二、月の動徑が畫ける扇形の面積は之を畫くに要せし時間に正比例す。されば月の場合にもケプレルの第一第二の法則が應用せらる可きものなり。楕圓運動を論ずるに必要なる要素は惑星の場合と等しく、其決定法も相似たれば之を述べず。既に常數を知れば之等を用ひて豫め月の位置を推算することを得。然るに之を觀測と比較するに計算せるものと著しき差あり。

攝動。是等の差を攝動と總稱し、其數甚だ多けれど今其中重要なるものゝみにつき一言せんとす。

近地點の運動

第一、近地點の運動。第二十八圖に於てPを近地點の位置とすればTP線は絶へず不易の方向を示すものにあらずして、其平面上を順の方向に運動し、殆ど等速を以て三千二百三十二日五七即ち約九年に一週轉をなす。

軌道經の攝動

第二、軌道經の攝動。軌道經が何等の變化を受けざれば、

$$v=\epsilon'+n't+2e'\sin\zeta'+\cdots\cdots\cdots$$

なる式を以て計算し得可きものなり。此式中 ϵ は紀元時の軌道經、n は平均運動、e' は離心率 ζ' は平均近點距離を表はすものとす。此式によりて得る v の値

と觀測より得るものとの差は別ちて三種となす可し。即ち出差、變差及年差是れなり。是等は其初め觀測者によりて之が存在を認められ、其後天體力學によりて證明せられたるものにして其公式は次ぎの如し。

出差 $=b\sin(2q-\zeta')$,　$b=1^\circ 20'$,　$q=\odot-☾$.

變差 $=c\sin 2q$,　$c=36'$

年差 $=d\sin\zeta$,　$\zeta=$太陽の平均近點距離

是等の差を計算に入るれば v は次式によりて得らる可し。

$$v=\epsilon'+nt+2e'\sin\zeta'+b\sin(2q-\zeta')+c\sin 2q+d\sin\zeta$$

出差

朔又は望の場合にては $\odot$ と☾とが相等しきか又は百八十度の差あるが故 $2q$ は零又は三百六十度なるを以て

$$v=\epsilon'+n't+(2e'-b)\sin\zeta'+d\sin\zeta$$

上弦又は下弦の場合には $q=90^\circ$ 又は $q=270^\circ$ なるを以て

$$v=\epsilon'+n't+(2e'+b)\sin\zeta'+d\sin\zeta$$

此の如く朔望の觀測と弦の時の觀測とが相異れり。然るに昔者ヒパルカスは

朔望の時にのみ觀測せし爲め $2e'-b$ を $2e'$ と考へトレミーは弦の時にのみ觀測せし故 $2e'+b$ を $2e'$ と考へたり。從て前者は離心率を餘りに小さく決定せしに反し、後者は餘りに大に決定したりしが其眞價は其中間にありしなり。

變差

變差はタイコ、ブラへの發見せるものにして彼は $q=45^\circ+n90^\circ$ の時、月を觀測せし爲め $c\sin 2q$ は極大の値三十六分を呈せし故彼は計算せる v と觀測せしものとを一致せしめんと欲せば之を加へざる可からざるを知れり。

年差

年差は出差及變差に比せば稍小なるものにして太陽の平均近點距離の正弦と共に其值を變化す。而して其發見者はケプレル氏なり。

黃緯の攝動

第三黃緯の攝動。黃緯の攝動の重なるものはタイコ、ブラへの發見せる所にして之を式にて示せば次の如し。

$$(8'48'')\sin(2q-\lambda+☊)$$

平均運動の長期差

第四平均運動の長期差。ラプラースは紀元時の軌道經も矢張り長期の攝動をなすを以て ϵ は次式の如く計算して得べきものとせり

$$\epsilon=\epsilon_0+10''.18s^2+0''.0185s^3$$

月の盈虚

此式中 ϵ_0 は千七百年一月一日の ϵ の値にして s は其時以後の世紀の數なり。從て平均軌道經(之を v_m にて表はす) $\epsilon+n't$ は次の如きものとなる。

$$v_m=\epsilon_0+n_1t+0''.0185.A^3t^3$$

但し式中 $A=\frac{1}{36524.2217}$, $n_1=n'+10''.18.A^2t$ なりとす。

n_1 は一見平均運動なるを以て平均運動は t と共に漸次增加するものと考ふるを得可し。

月の盈虚。 月が地球の周圍を公轉するや、其表面は自ら光を發せざるが爲め内惑星の場合の如く其形狀を變ず。而して其變化は月の離角即ち太陽の中心と地球の中心とを結びたる線と月の中心と地球の中心とを結べる線とがなす角と伴ふものなり。朔の時即ち離角が零なる際は新月にして之より離角の增加すると共に次第に光明部を增して九十度のときには半月となり、百八十度の時には滿月となる。離角が百八十度を越ゆれば再び光明部を減じ始め二百七十度に至れば再び半月となり、益々角が增加して三百六十度となれば再び新月に復す。

月の自轉

以上述ぶる所にて月の公轉に關する概略を知れるを以て是より自轉につきて述べん。

月の自轉。 肉眼にて之を見れば月の表面にある斑紋は常に其面上に相等しき比較的位置を保ち絶へず同一の面を吾等に示すもの丶如く他の半面は見ることを得ず。されば月は地球の周を公轉すると共に順の方向に自轉をもなし、其週期は恒星月と等しく二十七日と三分の一なる可し。今肉眼觀測を以て滿足せず、其表面にある著しき點を量日鏡又は其他の方法にて觀測し之が自轉の法則を研究すれば次ぎの三則を得。

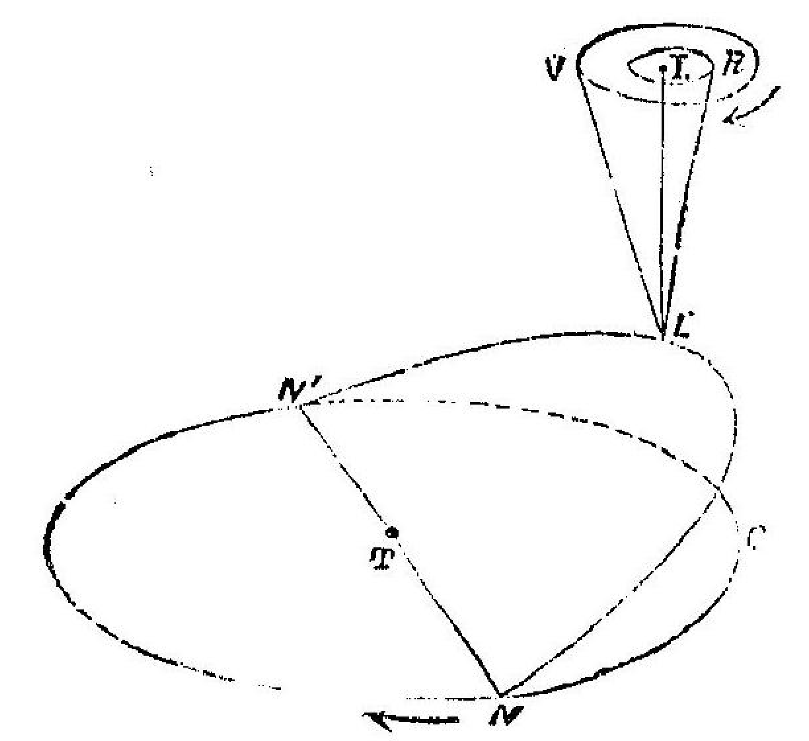
第一、月は其直徑を軸として自轉をなし其速度は一樣其週期は二十七日三二二なり。

第二、自轉軸 LR (第二十九圖)は常にLより黄道へ直角に引ける線 LI と同點より白道へ直角に引ける直線 LV とによりて定めらる丶平面内にあり。換言すればLを通過し交點線 NN' に直角なる平面内にあり。

第三、此軸は黄道の軸と一度二十八分四十五秒の角をなす。從て LV とは六

度三十七分三十三秒の角をなす。

然るに既に論ぜるが如く白道の軸LVはLIの周圍に逆の方向へ動き十八年と三分の二に圓錐形を畫くを以て月の自轉の軸LRも亦同一方向に同一速度を以て一の圓錐形を畫く可し。黄道と月の赤道との交線は常にNN'に平行にして同樣に逆行をなす。



第二十九圖

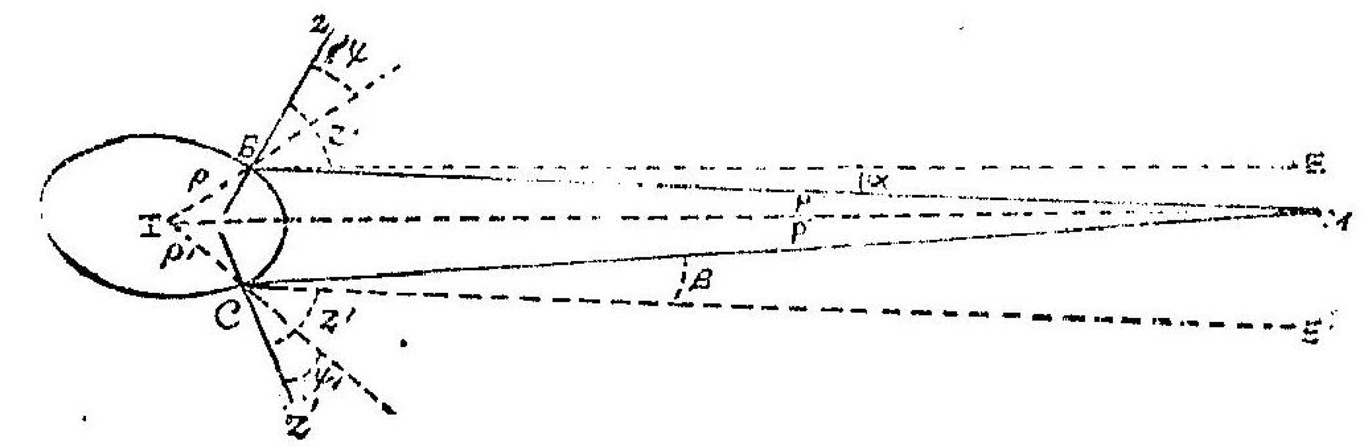
天平動。倘如何なる時に之を望むも月面上の或斑點が其面の中心に必ず見ゆる爲めには次ぎの三要件に矛盾せざるを必要とす。

第一、月の自轉軸が其軌道面に直角なること。

第二、月の自轉せる角度が常に月の中心が地球の周を公轉してなせる角度に等しかる可き事。

第三、觀測者が地球の中心にある可き事。

天平動



第三十圖

然るに是等は何れも滿足せられざるを以て月面上の點が其平均位置より振動する樣見受けらる。而かもそは凡ての斑點が一樣に振動するを以て月全部が振動する現象なり。此の如き振動を天平動と稱し其原因が上の三要件の何なるかに從ひ三個に區分す。即ち緯天平動、經天平動及日週天平動是れなり。

月の視差。月の視差を知らざれば地球と月との距離も亦月の直徑も決定し難し。依て是より視差を測定する方法を述べんとす。第三十圖に示すが如く同一子午線BCの上に其距離出來得る丈大なる二地B及Cを撰定し、月の子午線經過を觀測すれば月は兩地を同時に通過することと勿論なりとす。倘第五章の(F)なる式に於てA'を零又は百八十度とすれば A'−A も亦零又は百八十度なるを以て子午線にて觀測せる場合には方位角に視差の影響なし。從て同章

にて導ける $\tan\gamma$ は $\pm\tan(\varphi-\varphi')$ となる、従て $\gamma=\pm(\varphi-\varphi')$ を得。負の符號は月が天頂より北を經過する場合に正のは南を經過せる場合に應用す可きものとす。

今

ζ', ζ'_1 = B 及 C にて觀測せる視天頂距離

ζ, ζ_1 = B 及 C にて觀測せる地心天頂距離

ρ, ρ_1 = B 及 C の地心距離

φ, φ_1 = B 及 C にて觀測せる緯度

φ', φ'_1 = B 及 C の地心緯度

と置けば第五章の(E)より次ぎの二式を得可し。

$$\text{(B)}\quad\begin{cases}\sin(\zeta'-\zeta)=\rho\sin\pi\sin(\zeta'+\varphi-\varphi')\text{……B地}\\ \sin(\zeta'_1-\zeta_1)=\rho_1\sin\pi\sin(\zeta'_1-\varphi_1+\varphi'_1)\text{……C地}\end{cases}$$

是等に於て ζ, ζ_1 及 π が未知量にして他は何れも觀測又は計算より得らるるものなり。従て次ぎの如く α 及 β を取れば

$$\begin{cases}\rho\sin(\zeta'+\varphi-\varphi')=\alpha\\ \rho_1\sin(\zeta'_1-\varphi_1+\varphi'_1)=\beta\end{cases}$$

何れも既知の量なり。即ち(B)を變形して次式あり

$$\frac{\sin(\zeta'-\zeta)}{\sin\pi}=\alpha,\qquad\frac{\sin(\zeta'_1-\zeta_1)}{\sin\pi}=\beta$$

次ぎに $\zeta+\zeta_1=\varphi+\varphi_1$ なる關係あるを以て

$$\therefore\begin{cases}\dfrac{2}{\sin\pi}\sin\left(\dfrac{\zeta'-\zeta'_1}{2}-\dfrac{\zeta-\zeta_1}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\zeta'+\zeta'_1}{2}-\dfrac{\varphi+\varphi'}{2}\right)=\alpha-\beta\\ \dfrac{2}{\sin\pi}\sin\left(\dfrac{\zeta'+\zeta'_1}{2}-\dfrac{\varphi+\varphi'}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\zeta'-\zeta'_1}{2}-\dfrac{\zeta-\zeta_1}{2}\right)=\alpha+\beta\end{cases}$$

$$\text{(C)}\quad\begin{cases}\dfrac{2}{\sin\pi}\sin\left(\dfrac{\zeta'-\zeta'_1}{2}-\dfrac{\zeta-\zeta_1}{2}\right)=\alpha\Big/\cos\left(\dfrac{\zeta'+\zeta'_1}{2}-\dfrac{\varphi+\varphi'}{2}\right)\\ \dfrac{2}{\sin\pi}\cos\left(\dfrac{\zeta'-\zeta'_1}{2}-\dfrac{\zeta-\zeta_1}{2}\right)=\alpha+\beta\Big/\sin\left(\dfrac{\zeta'+\zeta'_1}{2}-\dfrac{\varphi+\varphi'}{2}\right)\end{cases}$$

然るに $\zeta'+\zeta'_1$ 及 $\varphi+\varphi'$ は觀測より與へらるゝもの故(C)の右邊は既知量なり。従て容易に π を求め得可し。ニューコム氏の計算によれば

$$\pi=57'2''.68$$

既に π を知れば地球の中心より月の中心に至る距離を計算すること易々たり

視半徑

即ち　　$a'=60.27\,R=238.840$ 哩

月の地心半徑。 第七章に論ぜし所によりて若し吾等は視半徑S'を六分儀又は其他の器械にて觀測し又同時に其高度或は天頂距離を觀測すれば同章に掲げたる公式によりて地心半徑Sをπとζとの函數にて表はし得可し。

觀測によりて得たる所によれば

$$S=15'34''.09$$

故に月の直徑は　$a'=0.273\,R=2163$ 哩　となる。

月は圓形にして扁率なきが如し。

第十五章　太陽

吾等は第八章に於て太陽の天體に於ける視運動を論じ、第九章に於て橢圓運動を論じたるも、之れ單に吾等の住居せる地球の運動を論じたるのみにして、太陽自身の運動に就きては未だ何等の知れる所なし。いざ吾等は之より太陽系の主太陽其者に關する種々の事實を考へん。

恒星の固有運動

太陽の空間に於ける運動。 天空に輝ける無數の恒星は絶へず其比較的位置を固持するを以て恒星と稱せられたるものなれど、天文學上の器械が次第に改良せられ、之れが觀測法も次第に熟達するに從ひ、多くの星が多少比較的位置を變化するを認むるに至れり。恒星の此運動は固有運動と稱せられ、今日までに發見せられたる最大の固有運動を有する星は千八百九十八年カプテーン氏によりて知られたるものにして一年に八、七秒丈其位置を變ず。此の如く大なる固有運動を呈するものは甚だ少きも、小なる運動を示すものにありては其數甚だ多し。今恒星の固有運動なるものの何故に現はれ來るやを考ふるに、蓋し二個の原因あらん。第一は星自身が宇宙間を運動するが爲めに起るものにして、眞に恒星の固有運動と稱す可きものなり。第二は太陽が吾等を率ゐて宇宙を運動するが爲めに、恒星が固有運動をなすが如く見ゆるものなり。思ふに吾等の觀測によりて得たる固有運動なるものは是等兩者の和ならんか。

偖恒星は我太陽系を包被して凡ての方向に見え、其距離の如きも種々なる可く所謂第一原因に起源せる固有運動は是等無數の星辰に就きて之を考ふれば或

向點
向點の決定法

は右に或は左に或は前に或は後に動き、何れの方向に於てするもの多數を占むると考ふ可き理由なし。方向のみならず大さに至りても何れの方向に於てするを大なりと思ひ難し。されば天空に存在する無數の星辰の眞固有運動を總和すれば互に消し合ひて恐らく零とならん。然るに第二原因によれる者は一定の法則の下に現はるゝもの故觀測して得たる固有運動より第一原因の者を除き去れば太陽の固有運動に起因せるもの丈を餘す可し。太陽系が果して宇宙を運動するならば此方法によりて少くとも何れの方向に進行するかを決定するを得可し。天體上の一點夫れに向ふて太陽の進む所を太陽の向點と稱す。

太陽の向點の決定法。 太陽の運動によりて起る恒星の運動の方向は必ず其星と向點とを通過する大圓上に存せざる可からず。今向點をOにて表はし、該點の赤經赤緯を求めんと欲す。若し大なる固有運動を有する星若干を取り、是等が其内に運動する大圓を天球儀上に畫けば、下の條件が滿足せられたる場合に限り何れも一點Oに會す可し。條件とは何ぞ、即ち觀測に誤りなく恒星が所謂眞の固有運動を有せざる場合是れなり。然るに實際にありては觀測に誤差も

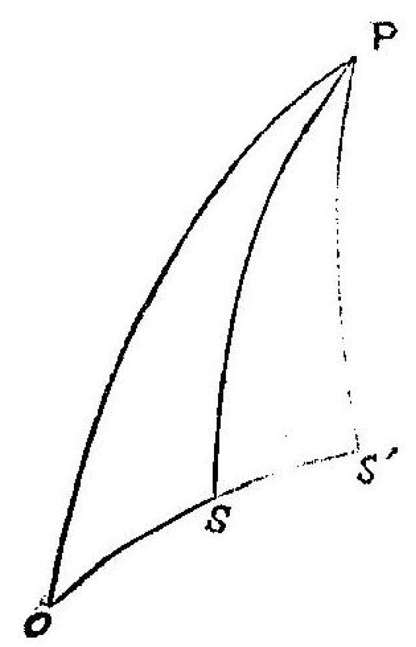
あらん、又恒星自らも運動をなし居るならん。從て凡ての大圓は一點に會することなく若干の點に於て會す可し。されど是等の諸點の所謂重心を求むれば蓋然法の理によりて向點たる可し。故に先づ向點の概畧位置を求めんと欲せば全然作圖法によりて求めらるゝなり。

今かくて得たる向點の赤經はA赤緯はDなりとせよ。吾等は進んでAとDとの修正値ΔAとΔDとを求めんと欲す。第三十一圖に於てPを天球の極とし、Sを恒星とし、OSS′が此恒星が太陽の運動によりて其内に運動する樣に見ゆる大圓の一部なりとし、PSS′角をχにて表はせよ。χは通例北より東に測るものなり。若しSの赤經、赤緯をα、δとしSOをλにて表はせば球面三角形POSより次式を得

$$(A)\quad\left\{\begin{aligned}&\sin\lambda\sin\chi=\sin(\alpha-A)\cos D\\&\sin\lambda\cos\chi=\cos(\alpha-A)\cos D\sin\delta-\sin D\cos\delta\end{aligned}\right.$$

即ち是等二式より各星につき各λとχとを求め得可し。偖χはAとDとが何等の修正を要せざる時

第三十一圖



にのみ星の進む道と等經線とのなす觀測値に等しかる可し。依て今更にχ'を此觀測値とし、ρを星の固有運動、$\Delta\alpha$を赤經丈の固有運動、$\Delta\delta$を赤緯丈の固有運動とすれば次式あり

(B) $\begin{cases} \rho\sin\chi' = \Delta\alpha\cos\delta \\ \rho\cos\chi' = \Delta\delta \end{cases}$

若しχとχ'とが一致せざれば其差$\chi'-\chi$はＡＤの修正値$\Delta A, \Delta D$の函數と考ふるを得可し。然るに(A)を微分すれば

(C) $\Delta\chi.\sin\lambda = (\chi'-\chi)\sin\lambda = \left(\frac{\cos(\alpha-A)\cos\delta\sin D - \sin\delta\cos D}{\sin\lambda}\right)\cos D\Delta A + \frac{\sin(\alpha-A)\cos\delta}{\sin\lambda}\Delta D$

を得可し。依て

$$\begin{cases} n = (\chi-\chi')\sin\lambda \\ a = \frac{\cos(\alpha-A)\cos\delta\sin D - \sin\delta\cos D}{\sin\lambda} \\ b = \frac{\sin(\alpha-A)\cos\delta}{\sin\lambda} \end{cases}$$

と置けば是等は何れも計算又は觀測によりて知ることを得る量なるを以て(C)は次の如く書かれ二個の未知量$\Delta A\cos D$及びΔDの一次方程式なり。

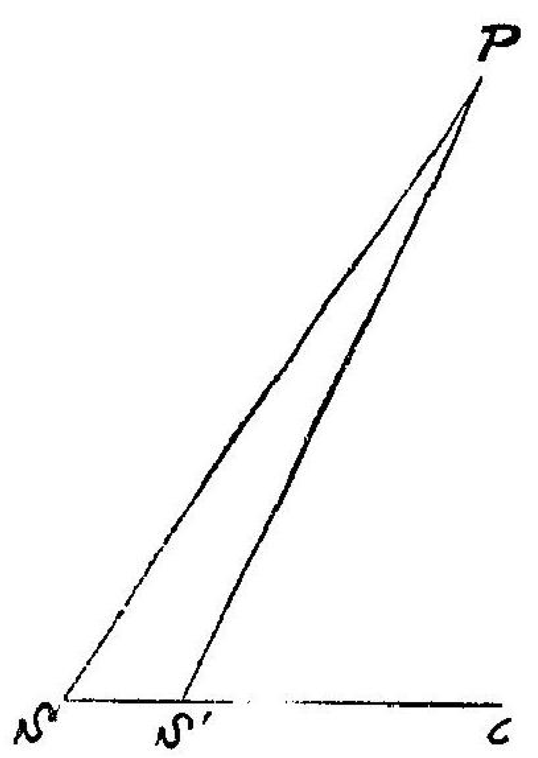
(D) $a\Delta A\cos D + b\Delta D + n = 0$

各の星が(D)の式各一を與ふるを以て最小二乘法によりて最も眞實らしきΔAとΔDとを求め得可し。從てＯ點の赤經赤緯を求め得可し。

ニューコム氏の決定せる所によればＡＤの値左の如し。

$A = 277°.5 \qquad D = 35°$

宇宙に於ける太陽の運動の速度。



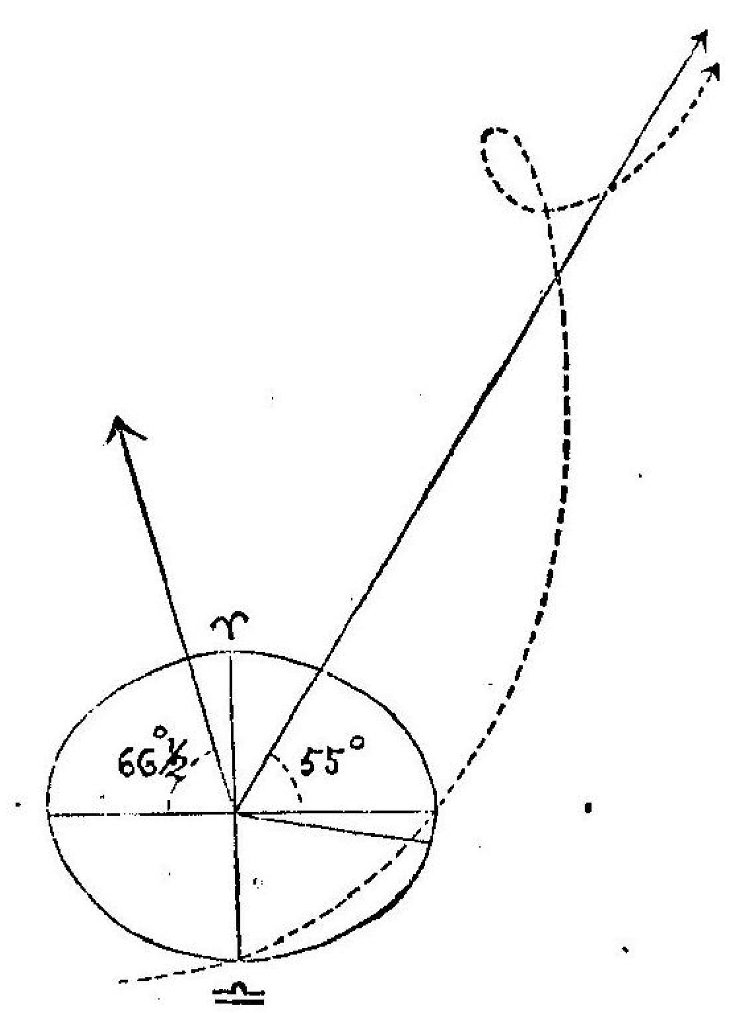
第三十二圖

を求めんと欲せば恒星の年週視差換言すれば其距離を知らざる可からず。若し向點を知り、更に固有運動を有する星の距離を知れば太陽の速度は甚だ簡單に計算せらる可し。即ち今第三十二圖にてＳを太陽の最初の位置、ＳＯを運動の方向Ｓ'を或時t例へば一世紀後の太陽の位置、Ｐを恒星の位置とすれば

太陽の速度

觀測によりてPの角を得可く、PSは與へられたるもの、PS'も亦殆どPSに等しく兩者を等しと考ふるを得る故三角形PSS'は二等邊と考へられ、而かも一邊と頂角とを與へらるゝ故底邊SS'を求め得可し。然るに實際に於ては星の年週視差の知れたるもの其數甚だ少きを以て之に依りて精確なる値を求め難きは勿論なりとす。彼の分光器にて視線の方向に於ける速度よりも此速度を研究し得可く既に一秒間につき十一哩なりとの測定あれど未だ容易に信じ難し。此の如く太陽は空間を運動するを以て、之に伴ふて地球の中心の運動は甚だ複雜なるものとなり、第三十三圖に示すが如く、空間に螺線狀の途を書く可し。

第三十三圖

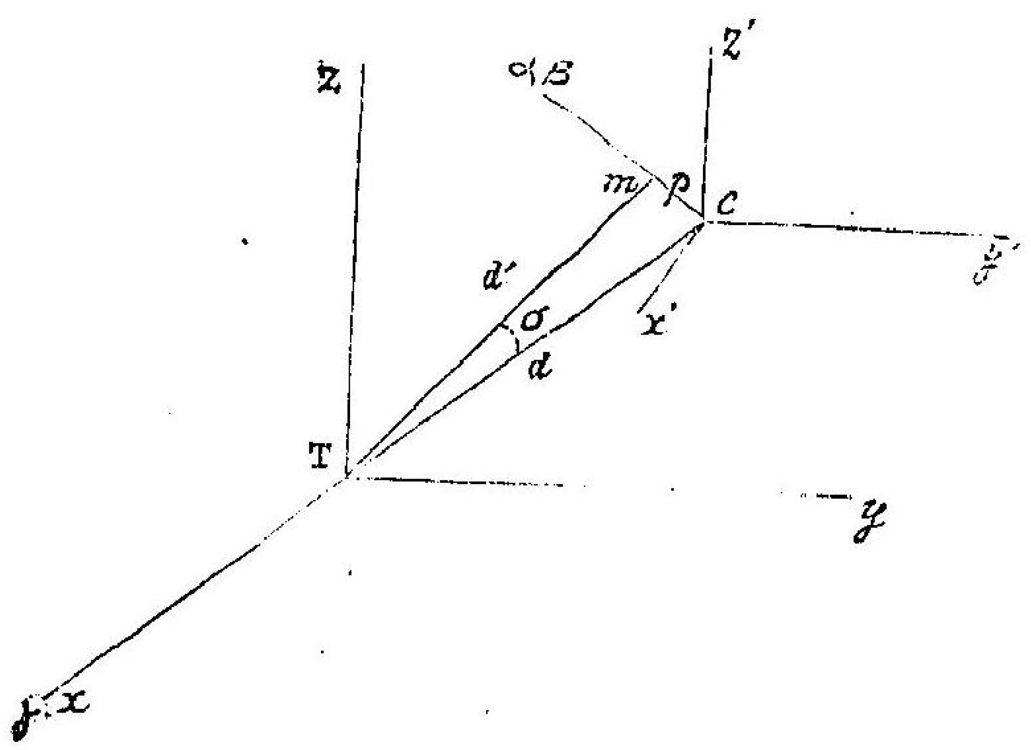


太陽の自轉。太陽の面を日々注意すれば時として黒き斑點を示すことあり。倚之を注視するに何れも東端より西方へ必ず同一方向に太陽面上を經過し去るを見る。此種の斑點に關

太陽の自轉

しては未だ知られざる點多けれども、兎に角之を研究せし結果之に依りて太陽の自轉を證することを得たり。依て吾等は玆に斑點の運動より自轉の常數を、計算する方法を論ぜんとす。但し此は單に太陽のみならず他の球體に應用し得可きものなり。即ち月及惑星等の自轉係數は此方法にて求めらる可し。

第三十四圖



Tを地球の中心として、直角に交る三軸を引きTxを春分點の方向へ、Tyを赤道上赤經が九十度の點へTzを北極の方向へ引きたるものとせよ。又Cは自轉を研究せんとする天體の中心とし、TCをdとし、ADをCの赤經赤緯とし、更にmを天體の表面に現はれたる斑點の位置とし、Tよりの距離をd'其赤經緯をA'D'とし又Cより上の三軸に平行に引けるCx', Cy', Cz'に照せるmの極坐標を$\rho\ \alpha\ \beta$にて表はせば$\alpha\ \beta$は斑點の日心赤經赤緯なり。

今

$$\Delta=\frac{\rho}{d},\quad \partial A=A'-A,\quad \partial D=D'-D,\quad \partial d=d'-d$$

と置けば何れも觀測によりて求むるを得可きものなり。

然るにTCmの坐標間には

$$(1)\quad \begin{cases} \rho\cos\beta\cos\alpha=d'\cos D'\cos A'-d\cos D\cos A \\ \rho\cos\beta\sin\alpha=d'\cos D'\sin A'-d\cos D\sin A \\ \rho\sin\beta\qquad=d'\sin D'\qquad-d\sin D \end{cases}$$

若し(1)にd' A' D'の代りに$d+\partial d$, $A+\partial A$, $D+\partial D$を置き更へ、第一階級の微分のみを考ふれば次ぎの式となる。

$$(2)\quad \begin{cases} \rho\cos\beta\cos\alpha=\cos D\cos A\partial d-d\sin D\cos A\,\partial D-d\cos D\sin A\partial A \\ \rho\cos\beta\sin\alpha=\cos D\sin A\partial d-d\sin D\sin A\,\partial D+d\cos D\cos A\partial A \\ \rho\sin\beta\qquad=\sin D\,\partial d\qquad+d\cos D\,\partial D. \end{cases}$$

(2)の各式を自乘して之を加ふれば

$$\rho^2=\overline{\partial d}^2+d^2\,\overline{\partial D}^2+d^2\,\overline{\partial A}^2\cos^2 D$$

更にmTC角をσにて表はし$\epsilon=\frac{\sigma}{\Delta}=\frac{d\sigma}{\rho}$と置けば

$$\rho^2=\overline{\partial d}^2+d^2\sigma^2=\overline{\partial d}^2+\rho^2\epsilon^2$$

$$(3)\quad \therefore\ \frac{\partial d}{\rho}=(1-\epsilon^2)^{\frac{1}{2}}=1-\frac{\epsilon^2}{2}-\frac{1}{1.2}\left(\frac{\epsilon^2}{2}\right)^2-\frac{1.3}{2.3}\left(\frac{\epsilon^2}{2}\right)^3-\frac{1.3.5}{2.3.4}\left(\frac{\epsilon^2}{2}\right)^4-\ldots\ldots$$

依て(3)を參考し(2)を變化しϵ^2までを計算に取れば次ぎの如きものを得

$$(4)\quad \begin{cases} \cos\alpha\cos\beta=\cos A\cos D\left[1-\frac{1}{\Delta}(\tan D.\partial D+\tan A.\partial A)-\frac{\epsilon^2}{2}\right] \\ \sin\alpha\cos\beta=\sin A\cos D\left[1-\frac{1}{\Delta}(\tan D.\partial D-\cot A.\partial A)-\frac{\epsilon^2}{2}\right] \\ \sin\beta=\qquad\sin D\left[1+\frac{1}{\Delta}\cot D.\partial D-\frac{\epsilon^2}{2}\right] \end{cases}$$

自轉の係數を求むる法

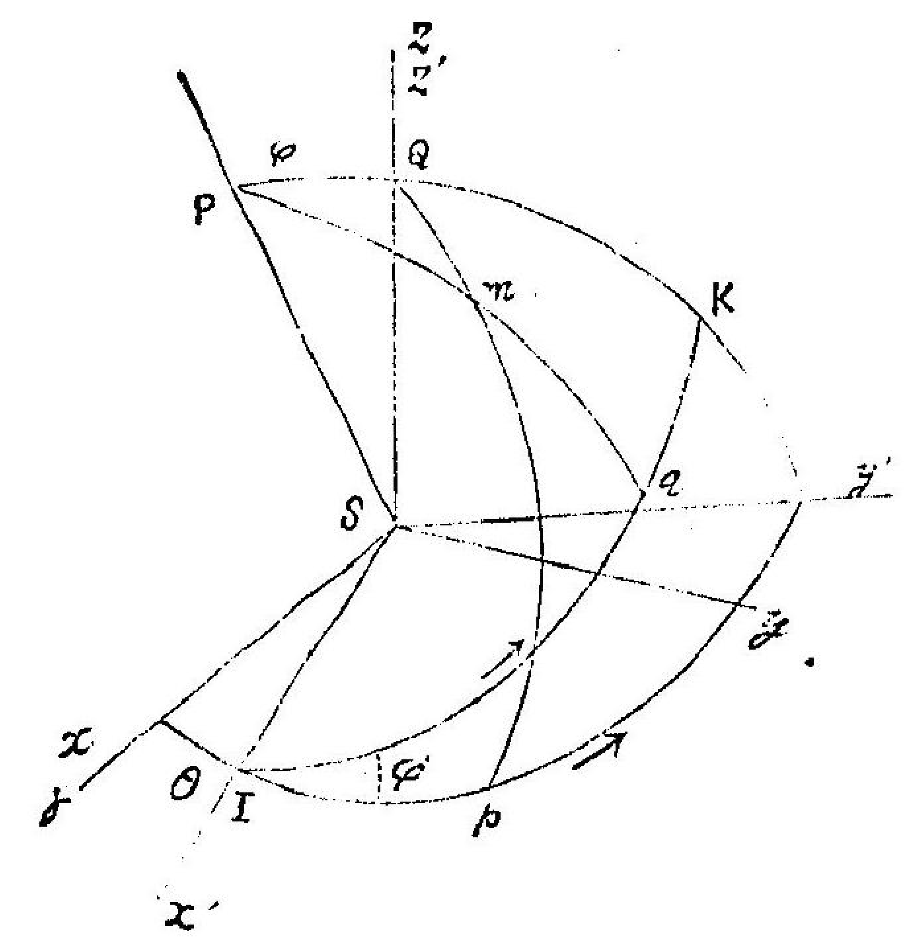
(4)を見るに右邊に含まるゝものは何れも觀測より與へらるゝものなれば之によりてα βを計算するを得可し。α βを知れば之を更に黄經黄緯に換算するを得、次法によりて太陽の赤道の位置及廻轉の週期等を決定し得可し。

今三十五圖に於てSを太陽の中心とし、Sx, Sy, Szなる三軸をそれ〳〵に春分點の方向、黄道上に黄經九十度の點、及黄道の極へ向けて之を引き、SPを太陽の自轉軸とし、更にmをtなる時に於ける一斑點の位置とすれば日心黄經はツ日

心黄緯は mp なり。前者を矢張り α にて後者を β にて表はす。P を太陽赤道の極、IK を赤道とすれば赤道の位置を決定するには $nI=\theta$, $PQ=\varphi$ を知らざる可からず。

更に m 點の位置を太陽の赤道に照して定めんとせば $As=Iq$, $Ds=mq$ を知る必要あり。但し As は順の方向即ち矢の方向に測り Ds は m 點が IK の北又は南なるに從ひ正又は負となる。

第三十五圖



今上述の軸系が Sz の周に θ 丈廻轉せるものと考へ三軸が Sx', Sy', Sz' の位置に來れりとし舊の軸系に照せる m 點の坐標を a b c にて新軸系に照せる同點の坐標を a' b' c' にて表はせば

$$(5)\quad \begin{cases} a=\cos\beta\cos\alpha \\ b=\cos\beta\sin\alpha \\ c=\sin\beta \end{cases} \qquad \begin{cases} a'=\ \ a\cos\theta+b\sin\theta \\ b'=-a\sin\theta+b\cos\theta \\ c'=c \end{cases}$$

然るに Sm を SP に投影すればそは a' b' c' の投影の代數和に等し依て

$$\sin Ds=-b'\sin\varphi+c'\cos\varphi$$
$$=a\sin\theta\sin\varphi-b\cos\theta\sin\varphi+\cos$$

故に $x=\tan\varphi\sin\theta$, $y=\tan\varphi\cos\theta$, $z=\dfrac{\sin Ds}{\cos\varphi}$ と置けば

$$z=ax-by+c$$

此式に於て x y z が未知量なれど、a b c は上の式(5)によりて計算し得可きものなり。今同一の斑點を種々の異なる時 t_1 t_2 t_3 …… 等に於て觀測すれば

$$(6)\quad \begin{cases} z=a_1x-b_1y+c_1 \\ z=a_2x-b_2y+c \\ z=a_3x-b_3y+c_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

なる一群の式を得。依て之を最小二乘法にて解けば x y z を決定し得可く從て θ φ 及 Ds を知る。玆に於て太陽の赤道の位置が知られ同時に觀測せる斑

點のDsも知る所となる。依て更に自轉の週期Tを計算する方法に移らんとす。

球面三角形PQmを考ふるに次式あり

$$\frac{\sin \mathrm{P}}{\sin \mathrm{Q}}=\frac{\sin \mathrm{Q}m}{\sin \mathrm{P}m}$$

$$i.e.\quad \frac{\cos \mathrm{A}s}{\cos(\alpha-\theta)}=\frac{\cos \beta}{\cos \mathrm{D}s}$$

此式は　なる時に於けるAsの値を計算せしむ。依て$t_1\ t_2\ t_3$‥‥等の時刻に相當するAsを計算し、$\mathrm{A}s_1$, $\mathrm{A}s_2$, $\mathrm{A}s_3$‥‥等にて之を表はせば是等は時と共に増加し

$$\frac{\mathrm{A}s_2-\mathrm{A}s_1}{t_2-t_1}=\frac{\mathrm{A}s_3-\mathrm{A}s_2}{t_3-t_2}=\cdots\cdots=\frac{360^\circ}{\mathrm{T}}$$

なる關係あり。即ちTを求むるを得。觀測によれば

$$\theta=80^\circ 45',\quad \varphi=7^\circ 19',\quad \mathrm{T}=25^{\mathrm{d}}.35$$

斑點の固有運動

斑點の固有運動。古來斑點の觀測次第に進み、種々のDsを有する斑點につきてTを求めしに是等は相一致することなく、Dsと共に變化するを知れり。依て太陽は地球又は火星の如く其表面上の諸點が同時に廻轉運動をなさゞるを知る。カッリングトンの研究によれば斑點一日の速度は

$$865'-165'\times \sin^{\frac{7}{4}}\mathrm{D}s$$

又フヮイエは

$$862-186'\times \sin^{2}\mathrm{D}s$$

と論ぜり。

太陽の形狀及大さ

太陽の形狀及大さ。太陽は其形圓形に見え、其視直徑は平均三十二分四秒なり。然るに太陽の視差は八、八秒なるを以て太陽の直徑は地球直徑の一百九倍半に當り八十六萬六千五百哩なり。從て其體積は地球の百三十萬倍なり。又地球の質量と太陽の質量とを比較するに後者は前者の殆ど三十三萬二千倍に相當するを見る。從て太陽を構造する物質の平均密度は地球のを單位とすれば〇、二五五な　。

第十六章　食

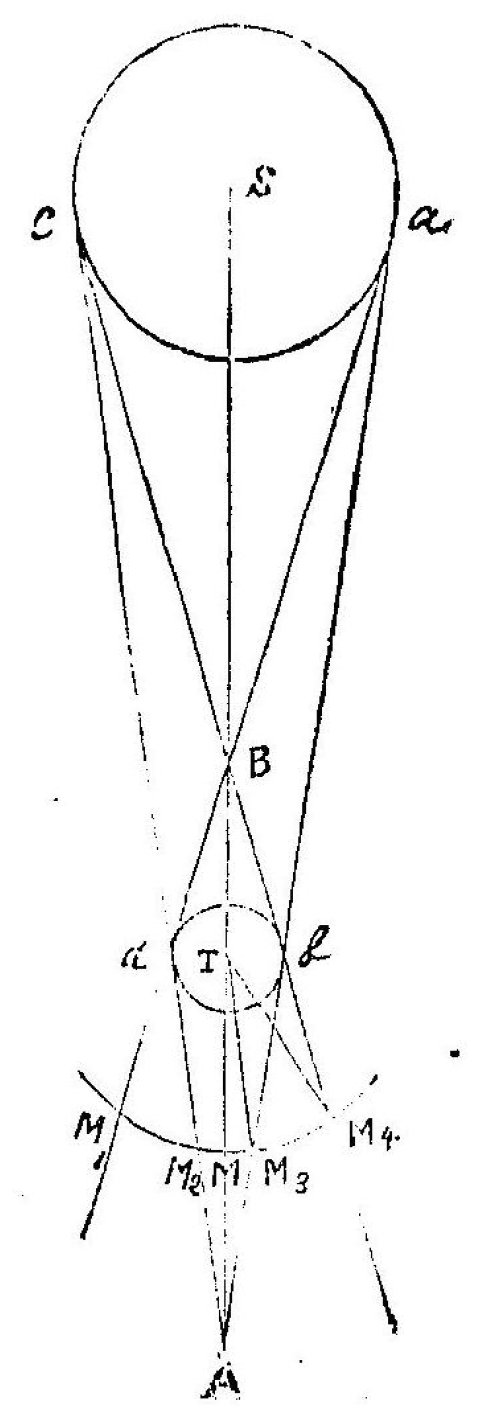
若し月が黄道上を運動するものならんか、月は朔の時必ず太陽と地球との間に來りて日食の現象を呈す可く、望の場合には地球が月と太陽との間に入り來り是等と一直線をなすを以て月食の現象を呈すべし。よし實際の場合に於ける

月食

が如く黄道と白道とが一致せざるも朔望の際月が恰かも其軌道の交點の何れかを經過しつゝあれば矢張り日食又は月食を呈す。從て食の有無は一に朔望の際、月が交點より何程の距離を有するかに依りて決せらるべく、其食分及食時の長短も之によりて定まるものとす。

月食。 第三十六圖に於て ac を太陽とし bd を地球とし、是等兩者に共通に切する圓錐形を畫けは其の圓錐形の頂點が太陽の中心Sと地球の中心Tとを結べるST內にあるものとSTの延長部にあるものとの二あり。倘月が M_1M_4 なる軌道上に運動し、望の際黄道に著しく接近し此等の圓錐內に入る時には必ず食ありとす。

第三十六圖



今圓錐 aAc 部には太陽の光線が全然入込まざるを以て月が M_2 より M_3 に向ひて進む間に月全部が此內に入れば食は皆既にして只一部分のみが此圓錐以內に入り込めば分食を生ず。若し月が圓錐の一部分 M_1dbM_4 より bAd を除ける部分に入り込めば只幾分か其光を失ふ。此部分は半影と稱せられ、bAd なる部分即ち本影と區別す。

されば月食の食分及食時の長短等は第一月が影に入る際有する黄道との距離第二月の距離に於ける影の幅を角度にて測れるもの即ち M_3TM 角又は M_4TM 角に關係するものなり。今後者を決定せんが爲め、S s を以て觀測の際の太陽及月の視半徑を表はし π 及 P を以て觀測の際に於ける地平視差を表はすものとすれば

$$\left\{\begin{array}{l}\angle M_3TM = TM_3b - TAb = TM_3b - STa + Tab = P - S + \pi \\ \angle M_4TM = TBM_4 + TM_4B = TM_4B + STa + BaT = P + S + \pi\end{array}\right.$$

又本影の長さ即ち TA は次式より求めらる。但しRは地球の半徑。

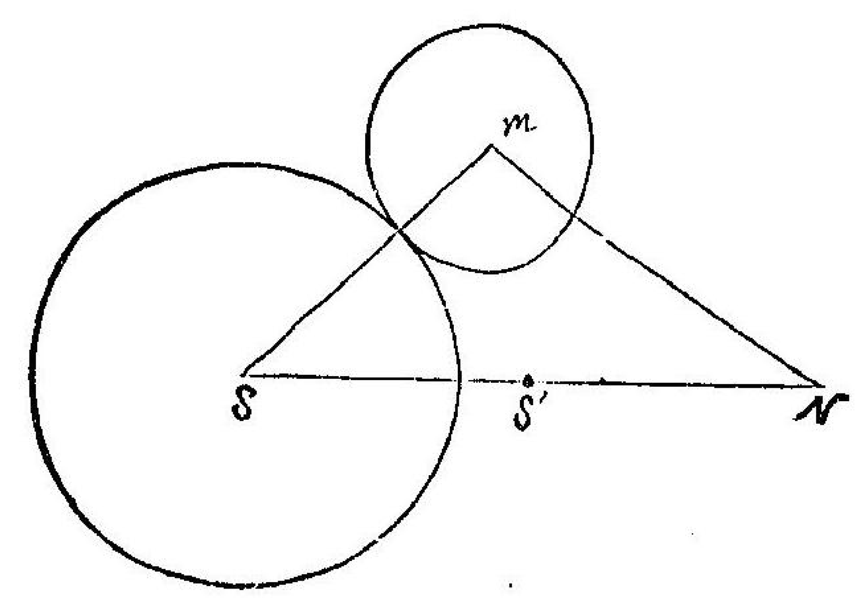
$$TA = \frac{R}{\sin bAT} = \frac{R}{\sin(aTS - Tab)} = \frac{R}{\sin(S-\pi)}$$

倘PS及 π の最小の値は夫れ々々に　53′56″.0,　15′46″.0,　8″.8　にして

月食の黄道界限

是等の最大なる時の値は夫れ々々に $61'22''.0$, $16'18''.2$, $9''.1$ なり。從て其平均の値は夫れ々々に $57'14''.0$, $16'\,2''.0$, $8''.9$ なり。山是觀之、月の距離に於ける本影の半徑の最小値は $37'46''.6$ 最大は $45'45''.1$ 而して其平均値は $41'20''.9$ にして半影にありては夫れ々々に $69'50''.8$, $77'49''.3$ 及 $73'24''.9$ なりとす。 TA の長さは

$$TA=\frac{R}{\sin 15'53''.1}=\frac{R}{953.1\times\sin 1''}=216.4\times R$$
$$=3.6\times(\text{地珠と月との平均距離})$$



第三十七圖

未來の食を豫言するに當り、不必要なる計算の勞を省き、獨り太陽及月の位置と是等の運動とを見て食の存在し得可きか如何を判定する方法あればそは甚だ望しきものなり。偖月食の存在する爲めには既に述べたるが如く望の際月が其交點の一に充分接近せんことを要す。然れば吾等が第一に研究す可き問題は月と交點との距離の界限なりとす。圖に於てNを交點とし mN を白道 SN を黄道とし、月が恰かもNを通過しつゝある時影の中心が S' にありとし、其後若干時を經過せる後月が白道上を Nm 丈進みて其中心が m に至り同時に影心がSに移れる時月の圓と影の圓とが a に於て相接したりとせよ。然る時は Sa 及 ma の最大値は $45'45''.1$ 及 $16'45''.0$ なるを以て $Sm=62'30''.1=3750''.1$ なり。又Nの角は其平均値を取れば五度九分なる故

$$SN=\frac{3750''.1}{\sin 5°9'}=41777''=11°36'17''$$

SNは食の存在す可き影心と交點との距離の極數にして所謂月食の黄道界限と稱せらるゝものなり。次ぎに mN と SS' との比は月及太陽の平均一時間の運動に比例するを以て SS' 及 NS' を計算すれば $SS'=52'\,6''$, $NS'=10°44'11''$ を得。

玆に於て吾等は或望の時月食の出現す可きか如何を判定せんとせば月が交點に來れる時刻に太陽の有する黄經を計算し、之と交點の黄經の差を求めよ若し之が $10°44'11''$ を越えず之より少なれば大體月食の現象を見る可し。

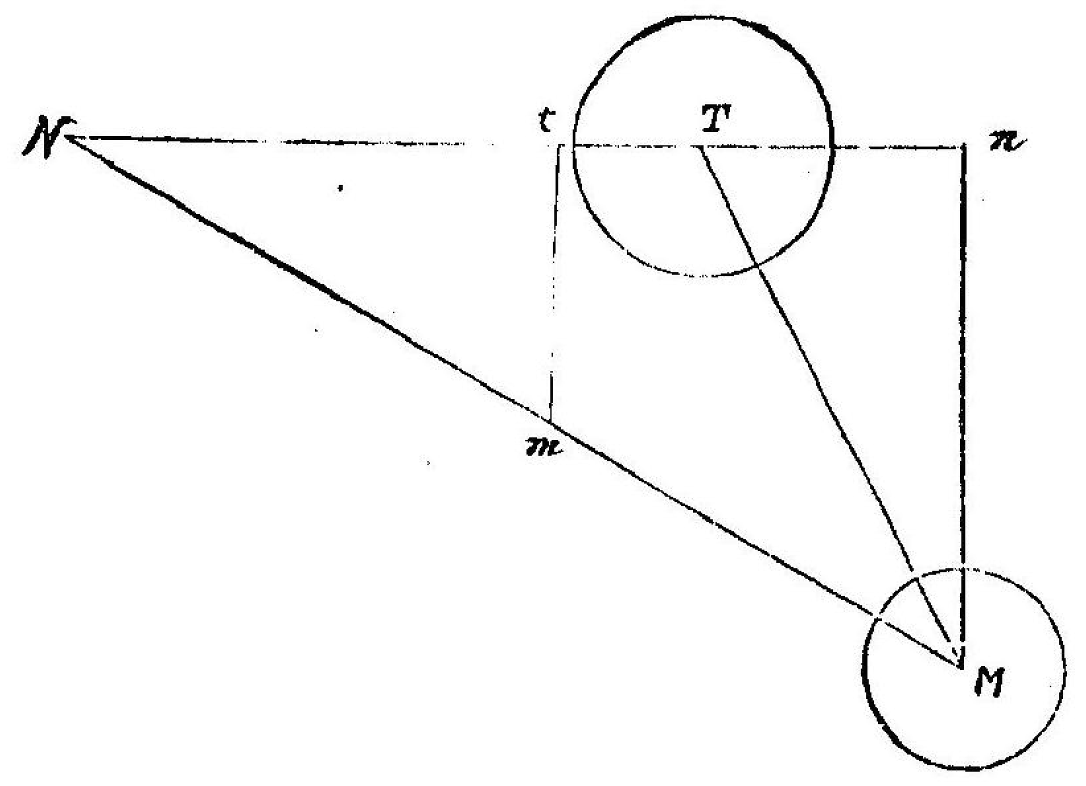
是より吾等は月食の時刻、食分及食の繼續時間等を計算する方法に移らんとす。第三十八圖にて Nn を黄道の一部 MN を白道の一部、t 及 m は望の際影心及月

月食の計算

心の存在する位置、T及Mは望よりτ時間丈以前の位置なりとす。更に望の際月の赤緯をλにて其一時間の變化をgにて表はし、又m及nを以て月と影心との一時間の運動を表はし、cを以て望の前τ時間に月心と影心との距離TMを示せば $tT=n\tau$, $tm=m\tau$, $Tn=(m-n)\tau$, $Mn=\lambda+g\tau$ なるを以て

$$(\lambda+g\tau)^2+(m-n)^2\tau^2=c^2$$

第三十八圖



今 $m-n=m'$ と置けばm'は太陽及月の黄經の一時間の關係運動を示すものにして前の式は $(\lambda+g\tau)^2+m'^2\tau^2=c^2$ となる。今更に $\tan\theta=\frac{g}{m'}$ と置けば次ぎの如く書くを得可し。

$$g^2\tau^2+2\lambda g\sin^2\theta.\tau=(c^2-\lambda^2)\sin^2\theta$$

之をτにつきて解けば次ぎの如し

$$\tau=\frac{1}{g}\left(-\lambda\sin^2\theta\pm\sqrt{c^2-\lambda^2\cos^2\theta}.\sin\theta\right)$$

食分

即ち玆に現はれたる二重符號は月がcなる値によりて定まる食分に入る時と其食分より出づる時とを與ふるものなり。若し今cに種々の値を入れて一々τを計算すれば之に相當する種々の食分の現るゝ時刻を計算し得可し。上の式によりて與へらるゝτを$\tau'\tau''$にて表はせば是等は$c^2-\lambda^2\cos^2\theta=0$の時に相等しきものとなる。即ち$c=\lambda\cos\theta$の時は$c$が最小の場合にして$\tau$は食の中央の時刻なり。

若し

$$c=半影の半徑\pm(月の視半徑)=P+S+\pi\pm s$$

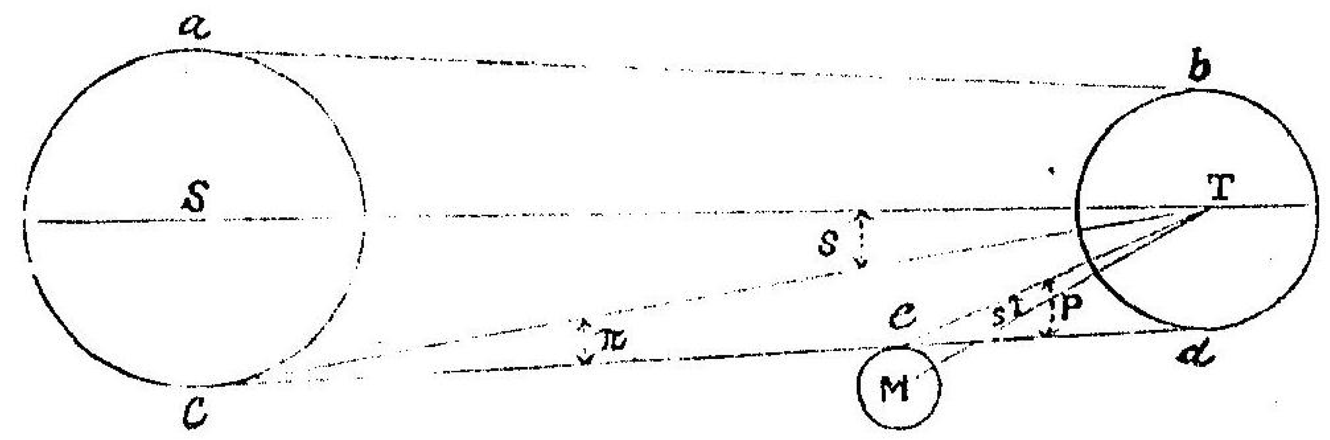
と置けば月食の始めと終りの時刻及び月が全く半影に入込める時刻と其狀態を去る時刻とを得可く、若し又 $c=P-S+\pi\pm s$ と置けば本影の時に於ける是等の時刻を得ん。

次ぎに食分は食の中央に暗黒となる月の直徑の部分によりて決定せらるべし。從て $\lambda\cos\theta$ が食の中央に於ける月心と影心との距離なる故、そは

$$(月の視半徑)-(\lambda\cos\theta-影の半徑)=s-S+P+\pi-\lambda\cos\theta$$

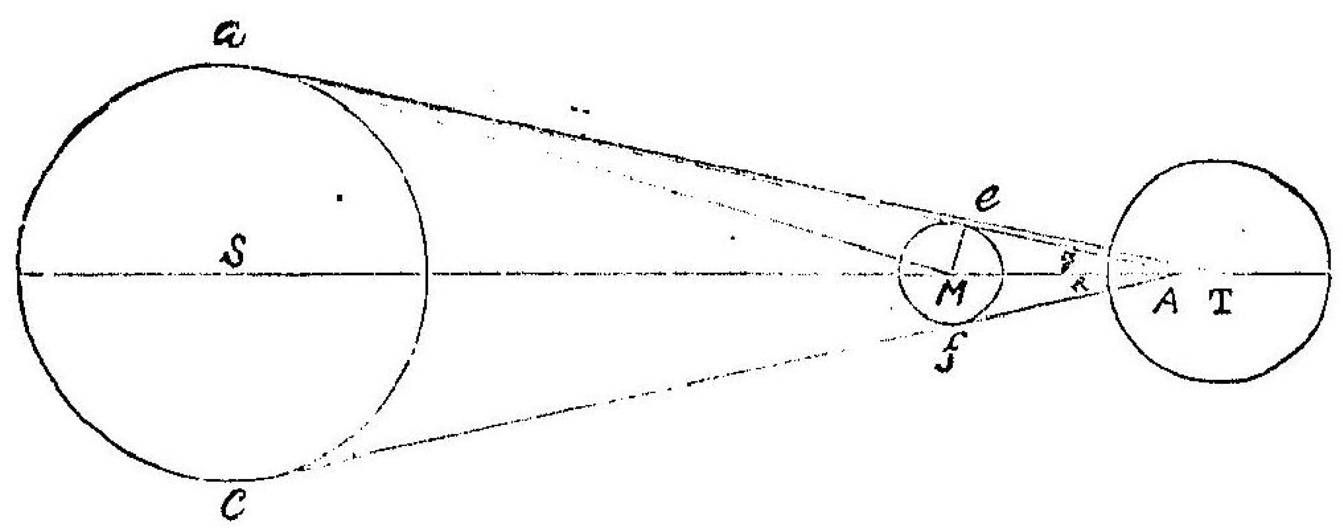
に等し。

第三十九圖



日食。日食は第三十六圖に於て地球の位置と太陽の位置とを交換せし時に起り、且つ月食と全然相類せる現象にして月食の場合に導ける公式の多數は此際にも應用し得可きものなり。然れども日食にては獨り其大體を知るに止らずして地球面上何れの部分に日食ありや其他ある特別なる地に現はるゝ食の計算等をなす必要あるを以て前と異なる議論をなさゞる可からず。今前の場合の如くに $(abdc)$ を太陽及地球を包被する圓錐形とし、M を月が丁度該圓錐内に進入せんとする時刻に於て月の中心とすれば此時刻は日蝕の始めにして該時刻以後には其光り一部分丈妨げらる可し。今圖にて T より太陽と月とに切線 Tc, Te を引き TM を連結せよ。然る時は食の始めに地心より見たる太陽と月との角距離は STM にして前と同一符號

第四十圖



を用ふれば

$$\angle STM = STc + cTe + eTM = STc + Ted - Tce + eTM$$

$$\therefore \quad \angle STM = S + P - \pi + s$$

又月の距離に於て上の圓錐を切り其切斷面を地心より見たる視半徑は

$$\angle STe = STc + cTe = S + P - \pi$$

次ぎに月の影の長さを計算せん。先づ第四十圖に於てSMTを同一直線上にある太陽月及地球の中心とし aAc を太陽及月を包被する圓錐形としAを其頂點と考ふればAは地球表面の內部にあるか或は表面に近き所にあるは地球より太陽と月とが殆ど同一の視角を有するによりて知らる。今 MA を求むれば

$$MA = \frac{Me}{\sin MAa} = \frac{(\text{月の半徑})}{\sin(SMa - Mae)} = \frac{R \times 0.2729}{\sin(SMa - Mae)}$$

然るに　$\angle SMa \doteqdot \frac{Aa}{Ma} \times \angle SAa \doteqdot \frac{ST}{MS} \times \angle SAa \doteqdot \frac{ST}{MS} S$

又、　$\angle Mae \doteqdot \frac{Me}{Ma} = \frac{R \times 0.2729}{Ma} \doteqdot \frac{SA}{MS} \cdot \frac{R \times 0.2729}{SA} \doteqdot \frac{ST}{MS} \times \pi \times 0.2729$

故に　$\angle MAa = \frac{ST}{MS}(S - \pi \times 0.2729) = \frac{\frac{1}{\pi}}{\frac{1}{\pi} - \frac{1}{P}}(S - \pi \times 0.2729) = \frac{P}{P - \pi}(S - \pi \times 0.2729)$

今之を θ にて表はせば影の長さは次ぎの如し

$$MA = \frac{R \times 0.2729}{\sin\theta}$$

然るに θ は小なる角故 $\sin\theta \doteqdot \theta$ 從て

$$MA = \frac{R \times (P - \pi) \times 0.2729}{P \times (S - \pi \times 0.2729) \times \sin 1''} = \frac{R \times \left(1 - \frac{\pi}{P}\right) \times 0.2729}{(S - \pi \times 0.2729) \times \sin 1''}$$

$$\therefore \quad MA \doteqdot \frac{R \times 0.2729}{S \times \sin 1''}\left\{1 - \frac{\pi}{P} + \frac{\pi \times 0.2729}{S}\right\}$$

依てSの最大値Pの最小値即ち $978'', 3236''$ を用ひ、π の値を $9''.0$ とすればMAの最小なる値を得。又Sの最小値Pの最大値即ち $946'', 3682''$ を用ふればMAの最大値を得可し。即ち次の如し。

(MAの最小値)＝(地球の半徑)×57.54＝57.54R

(MAの最大値)＝(地球の半徑)×59.60＝59.60R

金環食

偖地球と月との距離を見るに56Rより64Rの間を變化するを以てAが時としては地球に達せず又時としては深く地中に入ることあり。若し前なる場合には地球に達せず……觀測者がMAの延長が地球表面を切る點に近く居を占むれば金環食を見る可し。之に反してAが圖に於て見る如く地球の内部にある時は圓錐形は地球面より圓形の部分 gh を切り其内にある人々は太陽の光線を全く見ず。是れ即ち皆既食なり。

皆既食

或一地方に於ける日食の推算

或地に於ける日食の推算。　先づ第一に計算す可きものは與へられたる時に於て月の視時角と視赤緯とを其地心時角地心赤緯との項によりて表はすことなり。今 φ' を其地の地心緯度、α を恒星時 t に於ける月心の地心赤經とし、$h = t - \alpha$、Δ を地心北極距離、r を地球と月との距離(但しRを單位として) ρ を觀測地の地

球半徑を表はすものとせよ。而して更に xy を赤道に取り x 軸を子午線と赤道との交れる線として南方を正に取り、y 軸は之と直角をなし西方が正なりとし、z 軸は地球の軸に平行にして北極の方向が正なるものと考へ、是等の軸系に照らして月の座標を求め更に是等三軸と平行にして觀測地を基點とせる x' y' z' の軸系を導き h' Δ' を月の視時角及視北極距離とし r' を月と觀測者との距離とすれば

$$\begin{cases} x = r\sin\Delta\cos h, \\ y = r\sin\Delta\sin h, \\ z = r\cos\Delta. \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = r'\sin\Delta'\cos h', \\ y' = r'\sin\Delta'\sin h', \\ z' = r'\cos\Delta'. \end{cases} \qquad \begin{cases} x - x' = \rho\cos\varphi', \\ y - y' = 0, \\ z - z' = \rho\sin\varphi'. \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} r'\sin\Delta'\cos h' = r\sin\Delta\cos h - \rho\cos\varphi' \\ r'\sin\Delta'\sin h' = r\sin\Delta\sin h \\ r\cos\Delta' \qquad = r\cos\Delta \qquad -\rho\sin\varphi' \end{cases}$$

P は月の地平視差なるを以て $r = 1/\sin P$

$$\therefore \begin{cases} \cos h' = \cot h - \dfrac{\rho\sin P}{\sin\Delta\sin h}\cot\varphi', \\ \cot\Delta' = \sin h'\left\{\dfrac{\dfrac{\cos\Delta}{\sin P} - \rho\sin\varphi'}{\dfrac{\sin\Delta\sin h}{\sin P}}\right\} = \left(1 - \dfrac{\rho\sin P\sin\ '}{\cos\Delta}\right)\dfrac{\sin h'}{\sin h}\cot\Delta \end{cases}$$

或は

$$\cot h - \cot h' = \frac{\rho\sin P\cdot\cos\varphi'}{\sin\Delta\sin h}, \text{..........} (1)$$

$$\frac{\cot\Delta}{\sin h} - \frac{\cot\Delta'}{\sin h'} = \frac{\rho\sin P\sin\varphi'}{\sin\Delta\sin h} \text{..........} (2)、$$

是等の式は ρ P Δ h φ' の項にて h' 及 Δ' を計算せしむ。されど是等は七桁の對數表を要するを以て寧ろ $\delta h = h' - h$, $\delta\Delta = \Delta' - \Delta$ の式を用ふる方便利ならん。

(1) に $\sin h'\sin h$ を乘じて

$$\sin(h' - h) = \sin\delta h = \frac{\rho\sin P\cos\varphi'}{\sin\Delta}\sin h'$$

$$= \frac{\rho\sin P\cos\varphi'}{\sin\Delta}\{\sin h\cos\delta h + \cos h\sin\delta h\} \text{..........} (3)$$

$$\therefore \tan\delta h = \frac{\rho\sin P\cos\varphi'}{\sin\Delta}\{\sin h + \cos h\tan\delta h\}$$