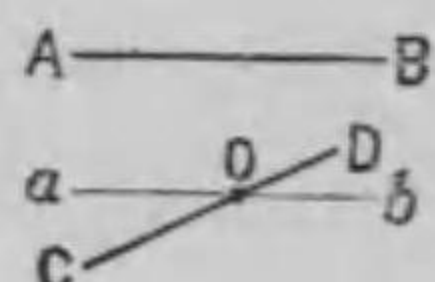


系 (1) 一直線ニ平行ナル一平面上ノ一點ヲ過リ其直線ニ平行ナル直線ハ、其平面上ニ在リ。

系 (2) 空間ノ二直線ノ一ツヲ含ミ他ニ平行ナル平面ハ唯一ツナリ。

[證明] 此二直線ヲ AB, CD トス。然ルトキ AB 及ビ CD 上ノ點 O ヲ含ム平面上ニ於テ ab//AB トシ、又 CD, ab ヲ含ム平面ヲ P トセバ P ハ平行二線中ノ ab ヲ含ミ AB ヲ含マザルユエ AB//P ナリ。



次ニ CD 上ノ點及ビ AB ヲ含ム平面ト CD ヲ含ミ AB ニ平行ナル平面トノ交線ハ CD 上ノ點ヲ過リ ab ニ平行ナルヲ以テ、此交線ハ P 面上ニ在リ。故ニ題意ノ平面ハ P ノ他ニ無シ。

系 (3) 一點ヲ過リ、空間ノ二直線ニ平行ナル平面ハ唯一ツアリ。

[證明] 一點ヲ O、此二直線ヲ AB, CD トス。然ルトキ

(八高)

O 及ビ AB ヲ含ム平面上ニ於テ ab//AB トシ、

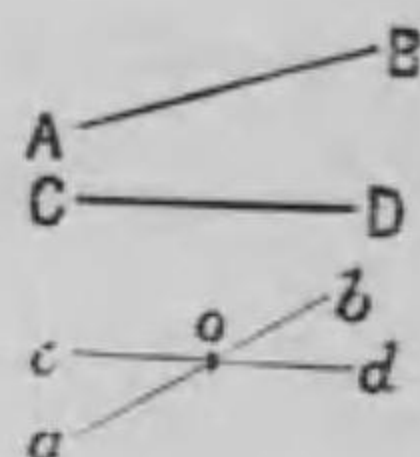
又 O 及ビ CD ヲ含ム平面上ニ於テ cd//CD トセバ

ab, cd ヲ含ム平面ハ AB, CD ニ平行ナリ [系(2)]

次ニ面 ABO, CDO 上ニ於テ O ヲ過リ夫々 AB, CD

ニ平行ナル直線ハ夫々 ab, cd ノミナルヲ以テ、O ヲ過

リ AB 及ビ CD ニ平行ナル平面ハ ab, cd ヲ含ム平面ノ他ニ無シ。



定理 (3) 一直線ニ平行ナル二平面ノ交線ハ、其直線ニ平行ナリ。

[證明] 面 P // AB // 面 Q、P, Q ノ交線ヲ CD トス。

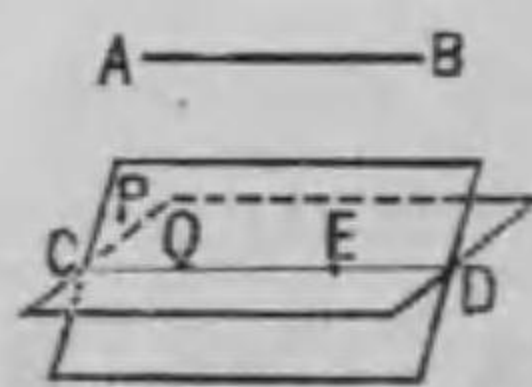
然ルトキ CD 上ニ點 E ヲ取レバ AB 及ビ E ヲ含

ム平面ト P 及ビ Q トノ交線ハ各々 AB ニ平行ス。

然ルニ E ヲ過リ AB ニ平行ナル直線ハ只一ツナル

ユエ、此二交線ハ一致シ且ツ P, Q ノ上ニ在ルユエ

CD ナリ。∴ CD//AB。



定理 (4) 平行二直線ノ一ツニ交ル一平面ハ他ニモ交ル。

[證明] AB//CD, AB ト P 面トノ交點ヲ B トス。

然ルトキ CD ガ P ニ含マルルトセバ、平行二線

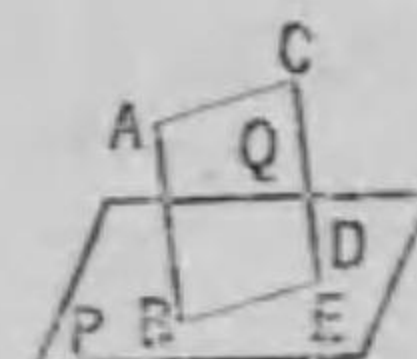
AB, CD ヲ含ム平面 Q ト P トハ三點 C, D, B

ヲ共有スル故一致ス、從テ Q 上ノ AB ハ P ニ

含マル、之レ假設ニ背ク。又 CD//P トセバ CD

ヲ含ム Q ト P トノ交線ナル BE//CD、依テ Q 上ニ於テ BA, BE ハ共ニ CD ニ平行

ナリ、之レ不合理ナリ。然レバ CD ハ P ニ含マレズ又平行ナラザルヲ以テ、相交ル。



定理 (5) 一平面上ニ在ラザル二角ハ、二邊ガ夫々平行シ且ツ同方向ナルトキハ相等シク、異方向ナルトキハ補角ヲナス。

[證明] 先ツ同方向ニ AB//DE, AC//DF トス。

然ルトキ AB=DE ニ取レバ AB≅DE ナルヲ以テ

ADEB ハ平行四邊形ニシテ AD≅BE。

又 AC=DF ニ取レバ前ト同様ニ AD≅CF。

隨テ BE≅CF ナルユエ CFEB ハ平行四邊形ニシ

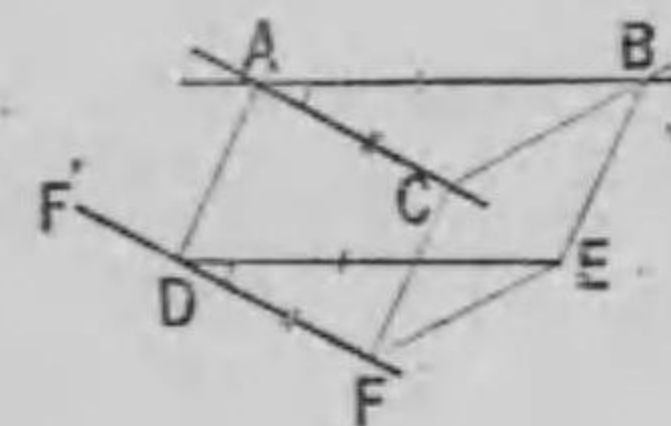
テ BC=EF。故ニ三邊ガ夫々相等シキヲ以テ

△ABC≅△DEF, ∴ ∠BAC=∠EDF。

次ニ異方向ニ平行ナルトキ、即チ FD ノ延長上ニ F' 點ヲ取レバ AB//DE, AC//DF'

トナル。今 F'DE ト EDF トハ補角ニシテ EDF=∠BAC ナリ、∴ F'DE ト ∠BAC ト

ハ補角ナリ。



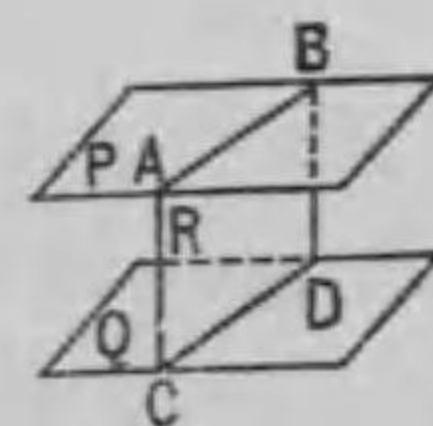
定理 (6) 平行二平面ニ第三ノ平面ガ交レバ、其交線ハ平行ス。

[證明] P面 // Q面、此各々ト R 面トノ交線ヲ

AB, CD トス。然ルトキハ P//Q ナルユエ其面

上ノ直線 AB, CD ハ交ハラズ且ツ此二線ハ一平

面 R ノ上ニ在リ。∴ AB//CD。



系 (1) 平行二直線が平行二平面ニ截ラルル部分ハ相等シ.

(海兵)

系 (2) 二直線が平行ナル三平面ニ截ラルルトキハ, 其對應部分ハ比例ス. (海兵, 各醫, 東商)

[證明] 二直線ト P面 // Q面 // R面トノ交點ヲ

夫々 A, E, B 及ビ C, F, D トス.

然ルトキ ADヲ結ビ Q面トノ交點ヲ Gトセ

面 ABD ト二面 Q, R トノ交線 EG//BD.

同様ニ GF//AC ナルコトヲ證シ得.

故ニ $\triangle ABD$ 及ビ $\triangle ADC$ ニ於テ

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AG}{GD} = \frac{CF}{FD}, \therefore \frac{AE}{EB} = \frac{CF}{FD}$$

次ニ AB, CD ガ一平面上ニ在ルトキハ AC//EF//BD トナリ, 平面幾何學定理ニ於テ已ニ其眞ナルヲ知ル.

定理 (7) (i) 平行二平面ノ一ツニ交ル直線ハ, 他ニモ交ル.

(ii) 平行二平面ノ一ツニ交ル平面ハ, 他ニモ交ル.

[證明] (i) P面 // Q面, ABトPトノ交點ヲ Aトス. 然ルトキ ABガQニ含

マルルトセバ P, Qハ共ニ A點ヲ共有スルニ

モ相交ル, 之レ假設ニ背ク. 又 AB//Qトセバ

ABヲ含ム平面 Rトノ交線ナル AC//EF, 依テ

R上ニ於テ AC, ABハ共ニ EFニ平行ナリ.

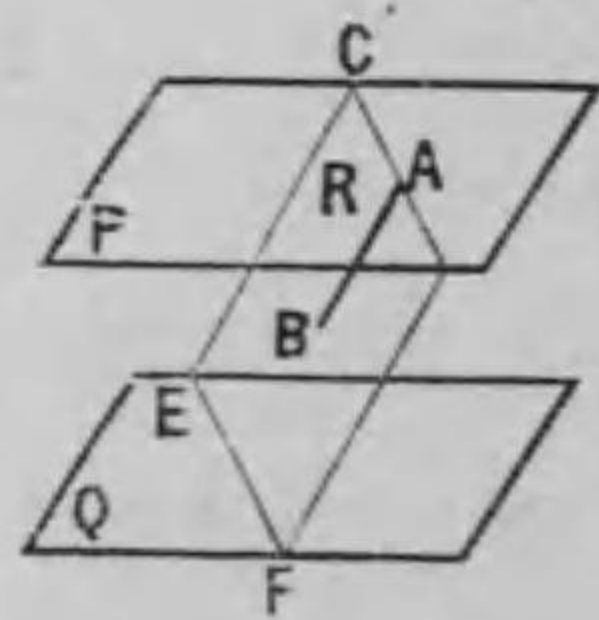
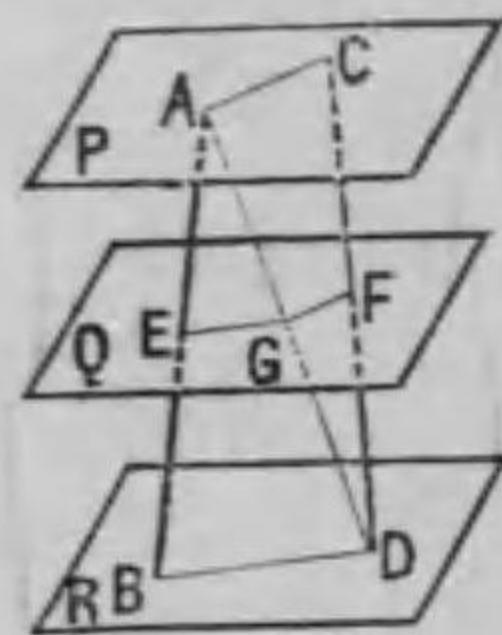
之レ不合理ナリ. 然レバ ABハQニ含マレ

ズ又平行ナラザルヲ以テ, 相交ル.

(ii) P面 // Q面, P面トR面トノ交線ヲ

ACトス. 然ルトキ R上ニ於テ ACト交ル

直線 ABヲ引ケバ ABハQト交ル(i). 故ニ ABヲ含ムR面ハQ面ト交ル.



系 (1) 二平面ガ第三ノ平面ニ平行ナレバ, 互ニ平行ナリ.

系 (2) 一平面外ノ一點ヲ過リ其面ニ平行ナル平面ハ唯一ツアリ.

[定理(1)ノ系(4)及ビ上ノ(ii)ニ依ル].

8. 三平面ノ位置ノ關係

(1) 三ツガ互ニ平行ナルトキ. (2) 三ツガ一致スルトキ.

(3) 二ツガ平行シ, 第三ガ之ニ平行セザルトキ.

(4) 三ツガ夫々平行ナラズシテ,

(i) 二ツ宛ノ交リガ平行ナルトキ.

(ii) 二ツ宛ノ交リガ一致スル, 即チ一直線ニ於テ會スルトキ.

(iii) 二ツ宛ノ交リガ相交ル, 即チ一點ニ於テ會スルトキ.

問題 及 ビ 解答

1. 一平面上ニ在ラザル四直線ノ爲ス四邊形ノ相隣レル邊ノ中點

ヲ結ビ付クレバ平行四邊形ヲ爲ス.

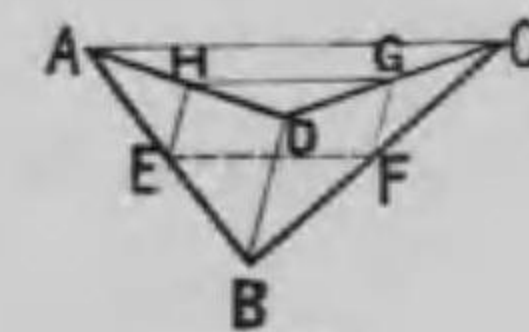
[此四邊形ヲゴウシ四邊形ト云フ]

[證明] 此四邊形 ABCDノ各邊ノ中點ヲ順次ニ E, F

G, Hトス. 然ルトキハ $\triangle ABD$ ニ於テ $HE \parallel \frac{1}{2}BD$

又 $\triangle BCD$ ニ於テ $GF \parallel \frac{1}{2}BD$. 故ニ $HE \parallel GF$

ナルヲ以テ EFGHハ平行四邊形ナリ.



注意 之ニ由テ, ゴウシ四邊形ノ相對スル邊ノ中點ノ連結線 EG, FHハ互ニ二等分ス, ナ知ル.

2. (a) 一平面上ニ在ラザル三直線 AB, BC, CDノ各中點 E, F, Gニテ成レル平面ハ BD及ビ ACニ平行ナリ. [定理(2)ニ依ル]

(b) 相交ル二平面ノ交線ニ平行ナル直線ヲ含ム平面ト前ノ二平面トノ交線ハ前ノ交線ニ平行ナリ. [同上]

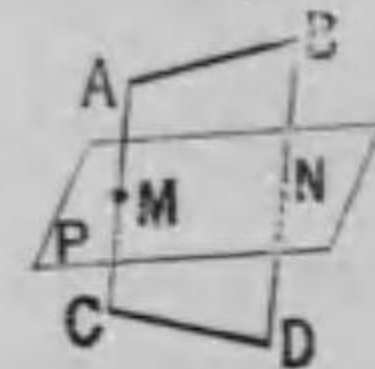
3. 氣泡水準器ニテ一平面ガ水平ナリヤ否ヤヲ決定スルニハ、其水準器ヲ互ニ平行ナラザルニツノ位置ニ置キテ試験スレバ可ナリ、其理由如何。

[證明] 水準器ノ位置ハ常ニ靜水ノ表面即チ平面ニ平行ス、而シテ一平面上ニ在リテ互ニ平行セザル位置ハ之ヲ延長スレバ必ズ相交ル。故ニ一平面上ニ在リテ相交ルニツノ水準器ノ位置ガ何レモ靜水ノ表面即チ一平面ニ平行ナルヲ以テ、此ニツノ位置ヲ含ム平面ハ靜水ノ表面ニ平行ス。

4. (a) 空間ノ二直線ノ共通垂線ノ中點ヲ過リ其各々ニ平行スル平面ハ、各線上ノ任意ノ點ヲ結ブ直線ヲ二等分ス。

(b) 一點ヨリ引ケル諸直線ガ平行ニ二平面ニ截ラルル對應部分ハ比例ス。

[證明] (a) 空間ノ二直線 AB, CD ノ共通垂線 AC ノ中點ヲ過リ此各々ニ平行ナル平面ヲ P トス。然ルトキ AB, CD ハ何レモ P ニ平行ナルユエ、此二直線ノ一ツ宛ヲ含ミ P ニ平行ナル二平面ヲ作り得ベシ。而シテ平行三平面ニ二直線ガ截ラルル對應部分ハ比例スルヲ以テ、BD ト P トノ交點ヲ N トセバ



$BN : ND = AM : MC = 1, \therefore BN = ND.$

(b) ハ平行三平面ニ二直線ガ截ラルル對應部分ハ比例ス、ニ依ル。

5. 空間ノ二直線 AB, CD ニ平行ナル平面ト AC, AD 及ビ BD, BC トノ交點ヲ順次ニ E, F, G, H トセバ EFGH ハ平行四邊形ナリ。又此對角線ノ交點ハ AB, CD ノ中點ノ連結線 MN 上ニ在リ。

[證明] AB // 面 EFGH ナルユエ此面ト面 CAB トノ交線 EH // AB. 同様ニ FG // AB, 從テ EH // FG. 同様ニ EF // HG. 故ニ對邊ガ夫々平行ナル EFGH ハ平行四邊形ナリ。次ニ NA, NM ト面 EFGH トノ交點ヲ夫々 K, O トセバ KO // AB, 從テ KO // EH.

而シテ K ハ EF 上ニ在リテ EF // CD

ナルユエ $EK : KF = CN : ND = 1,$

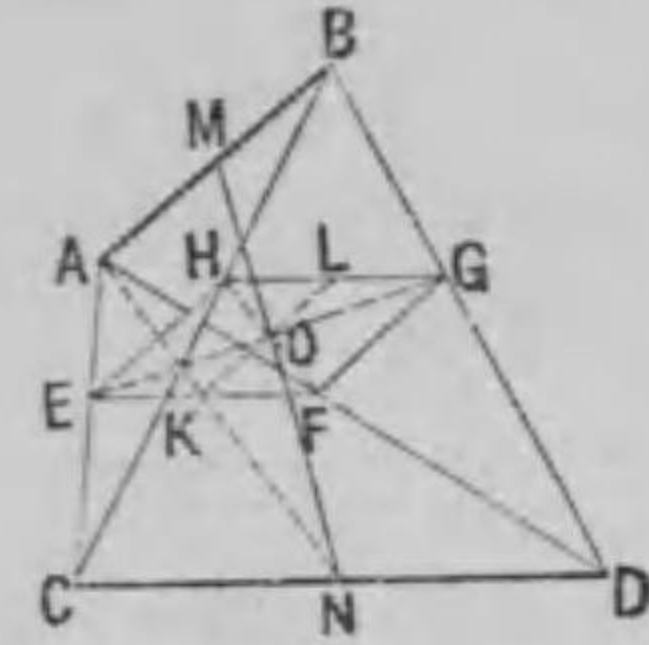
故ニ $EK = KF.$ 又 $KO // EH$ ナルユエ

KO ハ HF ヲ二等分ス。同様ニ O ト EH

ノ中點トヲ結ブ直線ハ HF ヲ二等分ス。

故ニ O ハ HF ノ中點ナリ、即チ MN

ハ HF, EG ノ交點 O ヲ過ル。



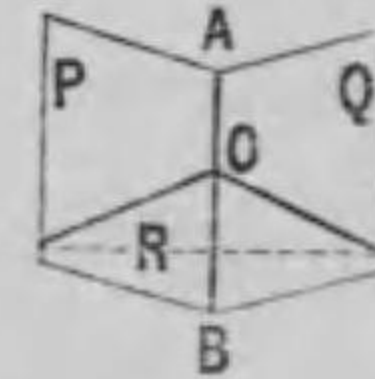
6. 三平面ノ交リハ一般ニ一點ナリ。又其特別ナル場合ハ如何。

[證明] 三平面ヲ P, Q, R トス。然ルトキ P, Q ノ交

リハ一般ニ一線ナリ、之ヲ AB トス。AB ト R トノ

交點 O ハ P, Q, R ニ共通ノ點ナリ。

故ニ互ニ相交ル三平面ハ一般ニ一點ニ於テ相交ル。



[8條ノ(4)ノ(iii)ノ場合ナリ]

次ニ特別ノ場合ハ二ツ宛ノ交リガ平行スルトキ、及ビ二ツ宛ノ交リガ一致スル即チ三平面ガ一線ニ於テ相會スルトキナリ。

7. 二平面ヅツノ交線ガ互ニ平行ナル三平面ハ空間ヲ幾ツノ部分ニ分ツカ。

[解] 相交ル二平面ハ空間ヲ四ツノ部分ニ分ツコト明カナリ、而シテ二平面ヅツノ交線ガ互ニ平行スルトキハ第三ノ平面ハ前ノ二面ノ交線ニ平行ナルヲ以テ第三ノ平面ハ前ノ四ツノ部分ノ中三ツヲ通過ス、故ニ此場合ノ三平面ハ空間ヲ七ツニ分ツ。

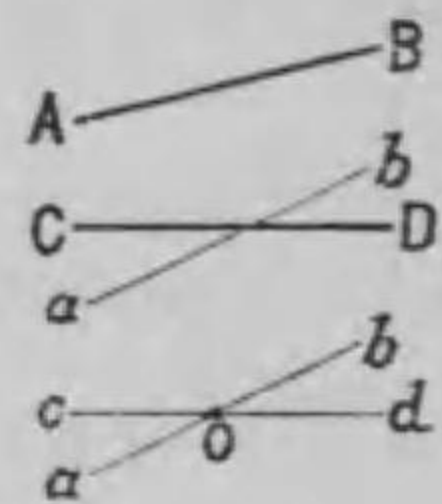
第 三 章

平行ナラザル直線及ビ平面

9. 定義

定義 (1) 空間ノ二直線ノ爲ス角 トハ一點ヲ過リ其二線ニ夫々平行スルカ或ハ一線ニ一致シ他線ニ平行スル二直線ノ爲ス角ヲ云フ。

例ヘバ空間ノ二直線 AB, CD ノ爲ス角トハ O 點ヲ過リ AB, CD ニ夫々平行スル二直線 ab, cd 或ハ CD ト之ニ交リ AB ニ平行スル直線 ab トノ爲ス角ヲ云フ。

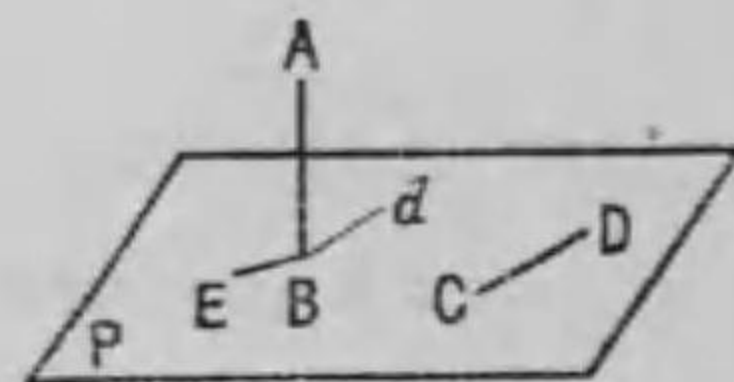


而シテ其角ガ直角ナルトキハ二直線ハ互ニ垂線ナリト云フ。

定義 (2) 一直線ガ一平面ニ交ルトキハ、其交點ヲ其直線ノ足ト云フ。

定義 (3) 一直線ガ一平面上ノ任意ノ直線ニ垂線ナルトキハ、其直線ハ平面ニ垂線或ハ垂直ナリト云ヒ、其平面ハ直線ニ垂直ナリト云フ。

例ヘバ AB ガ P 面上ノ任意ノ直線 CD 或ハ BE ニ垂線ナルトキハ AB ト P トハ互ニ垂直ナリ。



故ニ AB ト CD トノ互ニ垂線ナルコトヲ證明スルニハ、P 面上ニ於テ垂線ノ足 B ヲ過リ CD ニ平行ニ引ケル直線 Bd ト AB トガ互ニ垂線ナルコトヲ證明スレバ可ナリ。

定義 (4) 一直線ガ一平面ニ垂直ナラザルトキハ、其直線ト平面トハ互ニ斜ナリト云フ。

定義 (5) 一點ト一平面トノ距離 トハ其點ヨリ平面ニ至ル垂線ノ長サヲ云フ。

定義 (6) 平行スル一直線ト一平面トノ距離 トハ其直線上ノ點ト平面トノ距離ヲ云フ。

定義 (7) 平行二平面ノ距離 トハ其共通垂線ノ二面ニ截ラルル部分ノ長サヲ云フ。

10. 重要定理

定理 (1) 二直線ニ垂線ナル一直線ハ、其二線ヲ含ム平面ニ垂線ナリ。 (北島, 海兵)

[證明] (i) 一直線ガ二直線ニ其交點ニ於テ垂線ナルトキ。

OA ⊥ OC ⊥ OB トシ、OA ト OB トノ決定

スル平面ヲ P トス。然レトキ P 面上ニ

任意ノ直線 OD ヲ引キ直線 AB トノ交點

ヲ D トシ、CO ヲ引長シテ OC' = CO トス。

然レバ OA, OB ハ OC ノ垂直二等分線

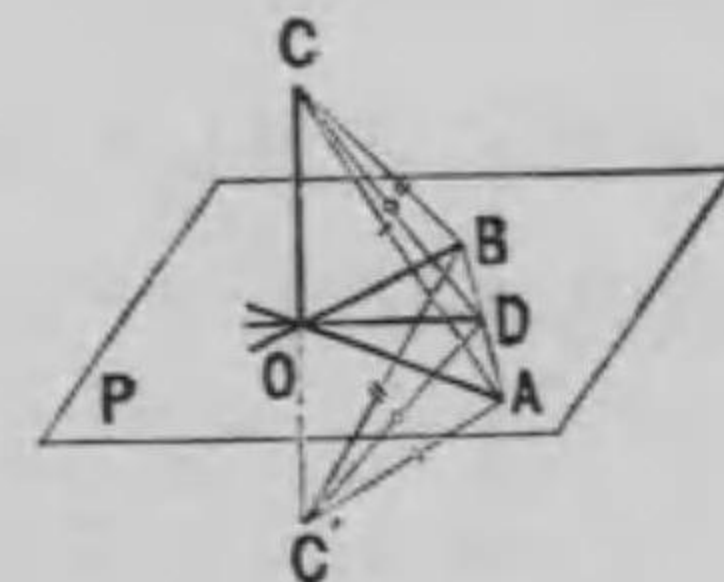
ナルニエ AC = AC', BC = BC'.

∴ ΔABC ≅ ΔABC', ∠CAB = ∠C'AB,

∴ ΔDAC ≅ ΔDAC', DC = DC'. 然ルニ OC = OC', OD ⊥ CC'. ∴ OC ⊥ P 面。

(ii) 一直線ガ二直線ニ交ラズシテ垂線ナルトキ。

此場合ニハ其二直線ノ平面 P 上ニ於テ CO ノ足 O ヲ過リテ前ノ二直線ニ夫々平行線 OA, OB ヲ引ケバ CO ⊥ P ナリ [(i)]. 故ニ CO ハ其二線ヲ含ム平面ニ垂線ナリ。



系 (1) 一直線ノ上或ハ外ノ一點ヲ過リ其直線ニ垂直ナル平面ハ夫々唯一ツノミ。 [其點ヨリ直線ニ垂線ヲ引キテ考ヘヨ]

系 (2) 一平面ノ上或ハ外ノ一點ヨリ其平面ヘノ垂線ハ夫々唯一ツノミ。

系 (3) 斜線ハ平面上ニ於テ其足ヲ過ル唯一ツノ直線ニ垂線ナリ。

系 (4) 一點ニ於テ互ニ直角ニ交ル三直線ノ一ツハ他ノ二ツヲ含ム平面ニ垂線ナリ。

定理 (2) 一平面外ノ一點ヨリ之ニ引ケル諸直線ノ中,

- (i) 垂線ハ最短ナリ.
- (ii) 垂線ト等角ヲ爲ス斜線ハ相等シ.
- (iii) 垂線ト大角ヲ爲ス斜線ハ他ヨリモ大ナリ.

此各々ノ逆ハ眞ナリ.

又 (iv) 垂線ノ足ヨリ等距離ニ足ヲ有スル斜線ハ相等シ.

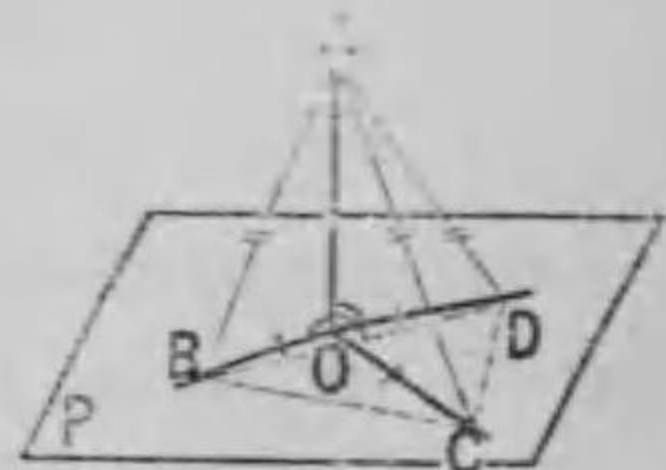
(v) 垂線ノ足ヨリ大距離ニ足ヲ有スル斜線ハ, 他ヨリモ大ナリ.

此各々ノ逆ハ眞ナリ.

系. 一直線ガ一平面上ノ三直線ト等角ヲナストキハ, 其直線ハ其面ニ垂線ナリ.

〔證明〕 一直線 AO ガ P 面上ノ三直線 OB, OC, OD ト等角ヲナストス. 然ルトキ
 $OB=OC=OD$ ニ取レバ二邊ト其夾角ノ等シキ $\triangle AOB \equiv \triangle AOC \equiv \triangle AOD$,
 \therefore 斜線 $AB=AC=AD$.

若シ AO ガ P 面ニ垂線ナラズトセバ垂線 AO' ナ引ケバ其足 O' ハ等斜線ノ足ナル三點 B, C, D ヨリ等距離ナリ. 然ルニ P 面上ニ於テ此三點ヨリ等距離ナル點ハ $\triangle BCD$ ノ外心即チ一點ニ限ル. $\therefore AO \perp P$ 面.



注意 一直線ハ一平面上ノ二直線ト直角ニアラザル等角ヲナスモ垂線トナラズ.

定理 (3) (i) 一平面ヘノ垂線上ノ一點ト其足ヨリ平面上ノ直線ヘノ垂線ノ足トノ連結線ハ, 前ノ直線ニ垂線ナリ.

即チ $AO \perp P$ 面, $OB \perp CD$ ナラバ $AB \perp CD$ ナリ.

逆ニ, (ii) $AO \perp P$ 面, $AB \perp CD$ ナラバ $OB \perp CD$ ナリ.
 $AB \perp CD, OB \perp CD$ ナラバ $AO \perp P$ 面 ナリ.

〔之ヲ三垂線定理ト云フ, 其應用ハ廣大ナリ〕

〔證明〕 (i) $BC=BD$ ニ取レバ BO ハ共通, 此二邊ノ夾角 $\widehat{OBC}=\widehat{OBD}=\widehat{R}$ ナルユエ

$$\triangle OBC \equiv \triangle OBD, \therefore OC=OD.$$

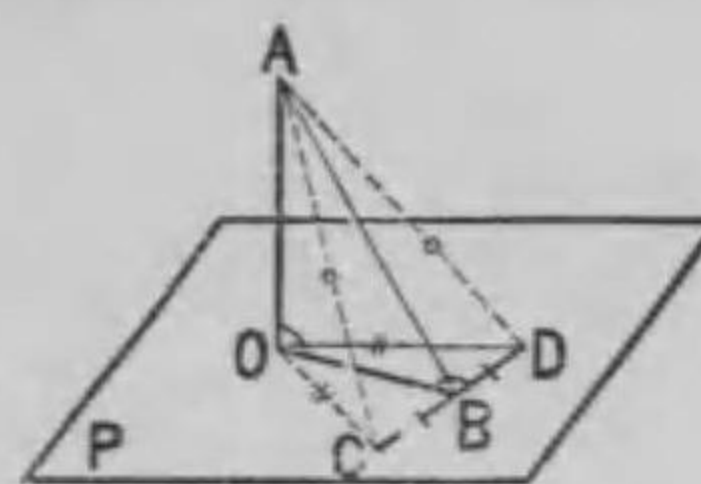
$$\text{同様ニ } \triangle AOC \equiv \triangle AOD, \therefore AC=AD.$$

$$\text{而シテ } BC=BD, \therefore AB \perp CD.$$

別證. $AO \perp P$ ナルユエ $CD \perp AO$, 又 $CD \perp BO$.

$$\therefore CD \perp \text{面 } AOB, \therefore CD \perp BA.$$

(ii) ハ (i) ノ逆順ニ過ギズ.



定理 (4) (i) 一直線ニ垂直ナル二平面ハ平行ナリ. (陸士)

逆ニ, (ii) 平行二平面ノ一ツニ垂直ナル直線ハ, 他ニモ垂直ナリ.

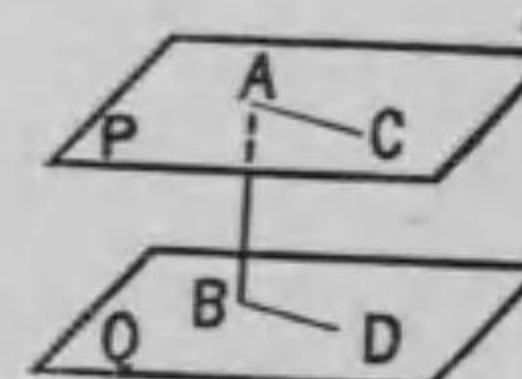
〔證明〕 (i) $AB \perp P$ 面, $AB \perp Q$ 面 トス. 然ルトキ若シ P, Q ガ相交ルトセバ其交線上ノ一點 E ヨリ AB ニ二垂線 EA, EB ナ得, 之レ不合理ナリ. 故ニ P, Q ハ交ラザルユエ一致セザレバ平行ナリ.

(ii) $P \text{ 面} // Q \text{ 面}$, $AB \perp P$ 面 トス.

然ルトキ Q 面上ニ B 點ヲ過ル任意ノ直線 BD ナ引ケバ, 面 DBA ト平行二面 P, Q トノ交線ナル $AC // BD$.

而シテ $AB \perp P$ 面. 故ニ 面 DBAC ニ於テ $\widehat{DEA}=\widehat{BAC}=\widehat{R}$.

$$\therefore AB \perp Q \text{ 面}.$$



定理 (5) (i) 平行二線ノ一ツニ垂直ナル平面ハ, 他ニモ垂直ナリ.

逆ニ, (ii) 一平面ヘノ二垂線ハ平行ナリ.

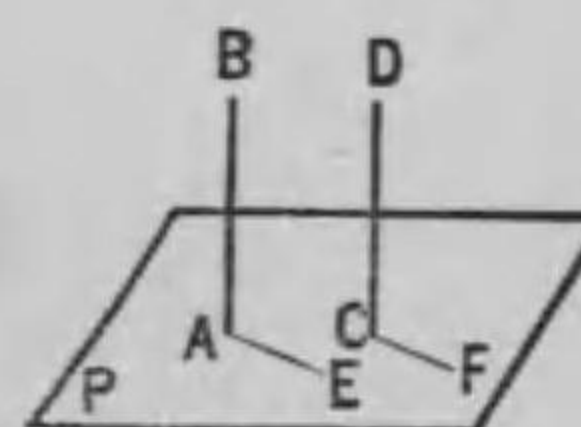
〔證明〕 (i) $AB // CD$, $AB \perp P$ 面, AB, CD ト P 面

トノ交點ヲ A, C トス. 然ルトキ P 面上ニ

於テ任意ノ直線 CF ナ引キ, 之ニ平行線 AE ナ

引ケバ $CF // AE, DC // BA$ ナルユエ $\widehat{DCF}=\widehat{BAE}$.

然ルニ $\widehat{BAE}=\widehat{R}$, 從テ $\widehat{DCF}=\widehat{R}$, $\therefore DC \perp \text{面 } P$.



(ii) $BA \perp P$ 面, $DC \perp P$ 面トス. 然ルトキ若シ DC が BA ニ平行ナラズトセバ, BA ニ平行線 DC' ヲ引ケバ $BA \perp P$ 面 ナルユエ $DC' \perp P$ 面, 即チ D 點ヨリ P 面ニ二垂線 DC, DC' アリ, 之レ不合理ナリ. $\therefore AB \parallel CD$.

系 (1) 平行二直線ノ夫々ニ垂直ナル二平面ハ平行ナリ.

[略證] 上ノ (i) 及ビ (4) ノ (i) ニ依ル.

系 (2) 平行二平面ノ夫々ヘノ二垂線ハ互ニ平行ナリ.

[略證] (4) ノ (ii) 及ビ上ノ (ii) ニ依ル.

問題及ビ解答

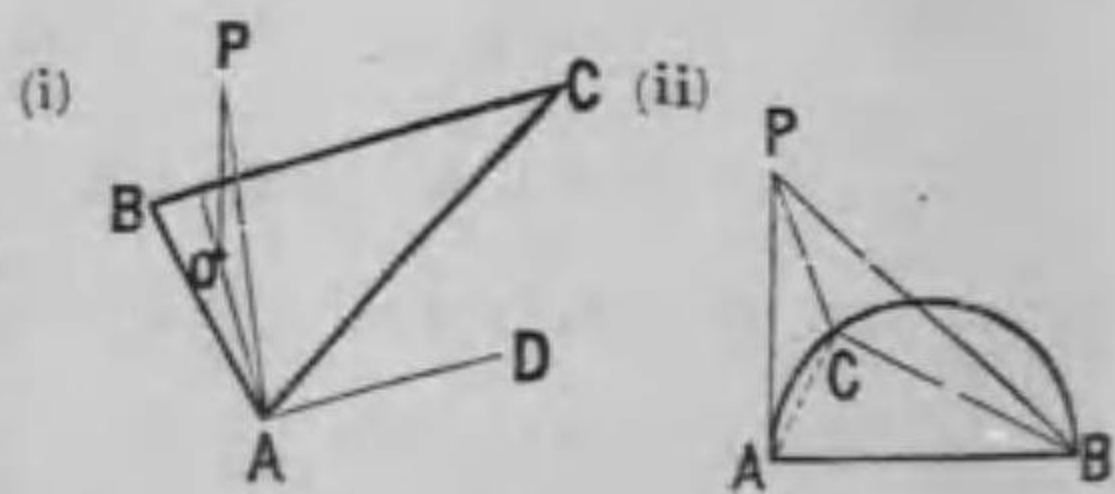
1. 一點ヲ過ル三直線ノ各々が他ノ一直線ニ垂線ナルトキハ前ノ三直線ハ一平面上ニ在リ.

[證明] 三直線 OA, OB, OC ノ各々が直線 OD ニ垂線ナリトス. 然ルトキハ OD ハ面 AOB ニ垂線ナリ. 今若シ OC が面 AOB 上ニ在ラズトセバ 面 DOC , 面 AOB ノ交線 OC' ト OC トハ 面 DOC 上ニ在リテ共ニ OD ニ垂線ナリ, 之レ不合理ナリ. \therefore 故ニ題言ノ如シ.

2. (a) $\triangle ABC$ ノ垂心 O ヨリ其面ニ垂線 OP ヲ引ケバ, PA ハ A ヲ過リ BC ニ平行ナル直線 AD ニ垂線ナリ. (山崎, 大工)

(b) 直径 AB ナル半圓周上ノ點ヲ C トシ, A ヨリ圓ノ平面ヘ垂線 AP ヲ立テ之レヲ弦 BC ニ等シクセバ, $\triangle PCB \equiv \triangle PAB$ ナリ. (專檢)

[證明] (a) O ハ $\triangle ABC$ ノ垂心ナルユエ $AO \perp BC$. $AD \parallel BC$ ナル故 AD ハ面 ABC 上ニ在リ, 從テ $OA \perp AD$. 又 $OP \perp$ 面 ABC . 故ニ三垂線定理ニ依テ $PA \perp AD$.



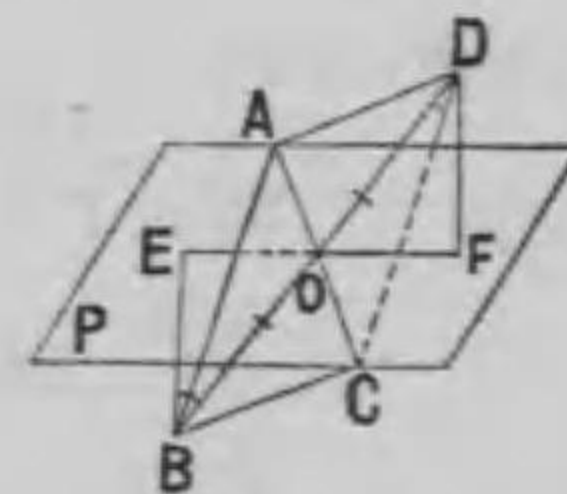
(b) 半圓周角 $C = \hat{R}$ 即チ $AC \perp BC$. 又 $PA \perp$ 面 ABC . 故ニ三垂線定理ニ依テ $PC \perp BC$. 故ニ斜邊ト一邊トが夫々相等シキ $\triangle PAB \equiv \triangle PCB$.

3. 直 $\triangle ABC$ ノ各角頂ヨリ等距離ナル點 X ト 斜邊 BC ノ中點 E トノ連結線 XE ハ, 其三角形ノ面ニ垂線ナリ.

[證明] 上圖ヲ用フ. 直三角形ノ斜邊ノ中點 E ハ各角頂 A, B, C ヨリ等距離ナリ, 即チ $EA = EB = EC$, XE ハ共通, 又 $XA = XB = XC$ [假設] 即チ三邊が夫々相等シキユエ $\triangle XEA \equiv \triangle XEB \equiv \triangle XEC$, $\therefore \hat{XEA} = \hat{XEB} = \hat{XEC}$. $\therefore XE \perp$ 面 ABC .

4. 平行四邊形 $ABCD$ ノ一對角線 AC ヲ含ム平面 P 上ニ他ノ對角線 BD ノ兩端ヨリ引ケル 垂線 BE, DF ハ相等シ.

[證明] P 面ヘノ垂線 $BE \parallel DF$ ナルユエ此二線ハ一平面上ニ在リ, 而シテ此面上ニ在ル直線 BD ハ AC ニ O ニ於テ二等分セラル. 故ニ $\hat{EBO} = \hat{FDO}$, 斜邊 $BO = DO$ ナルユエ 直 $\triangle BEO \equiv \triangle DFO$, $\therefore BE = DF$.



5. 相交ル二平面 P, Q 外ニ二點 A, B アリ. A ヨリ P, Q ヘノ垂線ノ和ガ B ヨリ P, Q ヘノ垂線ノ和ニ等シケレバ, 直線 AB 上ノ點 C ヨリ P, Q ヘノ垂線ノ和モ亦タ之ニ等シ. (各高)

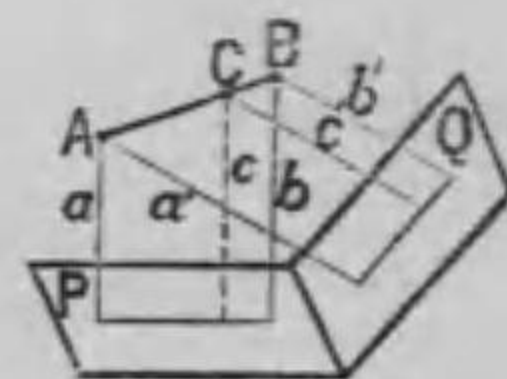
[證明] A, B, C ヨリ P, Q ヘノ垂線ヲ夫々 $a, a'; b, b'; c, c'$ トス. 然レバ P, Q ヘノ垂線 a, b, c 及ビ a', b', c' ハ夫々平行シテ一平面上ニ在リ. 今 $AC : CB = m : n$ トスレバ平面幾何學定理ニ依リテ

$$\begin{aligned} (m+n)c &= na + mb \\ \text{及ビ } (m+n)c' &= na' + mb' \end{aligned} \quad \Bigg\} +$$

$$\therefore (m+n)(c+c') = n(a+a') + m(b+b')$$

$$\begin{aligned} \text{然ルニ } a+a' &= b+b' \text{ ナリ.} \\ \therefore (m+n)(c+c') &= (n+m)(a+a') \\ &= (n+m)(b+b') \quad \therefore c+c' = a+a' = b+b'. \end{aligned}$$

注意 本題ハ單ニ $a \parallel b \parallel c, a' \parallel b' \parallel c'$ トスルモ合理ナリ.



第四章

二平面

11. 定義及ビ記法

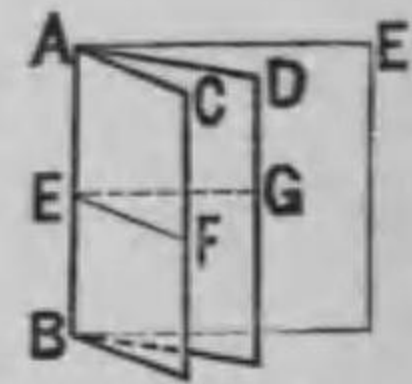
定義 (1) 相交ル二平面ガ其交線ニテ終ルトキ、其二平面ハ平面角ヲ爲スト云フ。而シテ、此等ノ平面ヲ二面角ノ面ト云ヒ、其交線ヲ稜ト云フ。

注意 單ニ二面角ト云ハ劣二面角ヲ指スモノトス。

記法 二面角ヲ表ハスニハ、各面上ノ一點宛ヲ取り其間ニ稜上ノ二點ヲ挿ム。又唯一ツノ二面角ハ其稜上ノ二點ヲ以テス。

例ヘバ二平面CAB, DABノ交線ガ AB ナルトキハ、二面角 CABD ト記ス。

又二面角ガ唯一ツナルトキハ、二面角 AB ト記ス。



定義 (2) 二面角ノ稜上ノ一點ヨリ稜ニ垂直ニ各面上ニ引ケル二直線ノ爲ス角ヲ二面角ノ平面角ト云フ。

例ヘバ面CAB, 面DABニ於テ $EF \perp AB$ 及ビ $EG \perp AB$ ナラバ、二面角 AB ノ平面角ハ \hat{FEG} ナリ。

而シテ、平面角ガ直角ナルトキハ之ヲ直二面角ト云ヒ、其二面ハ互ニ垂直ナリト云フ。

二面角ノ大サヲ度ルニハ、其平面角ノ大サヲ以テス。

故ニ二面角ガ相等シキコトハ、其平面角ノ相等シキコトヲ證明セバ可ナリ。

又二平面ノ互ニ垂直ナルコトハ、其平面角ノ直角ナルコトヲ證明セバ可ナリ。

定義 (3) 二ツノ二面角ガ共通ノ一稜ト共通ノ一平面トヲ有スルトキハ、其二ツヲ互ニ隣二面角或ハ接二面角ト云フ。

例ヘバ上圖ニ於テ二面角 DABC, EABD ハ互ニ隣二面角ナリ。

定義 (4) 一ツノ二面角ト其各面ノ延長ニテ成レル二面角トハ互ニ對頂二面角ナリト云フ。

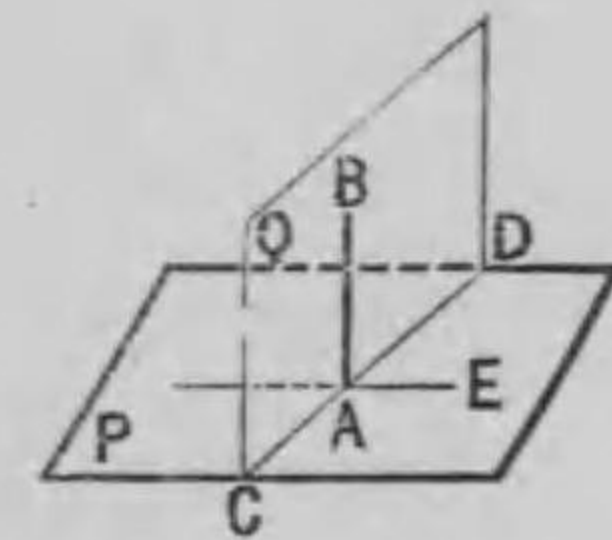
定義 (5) 二平面ニ第三平面ガ交ルトキノ二面角ノ關係名稱ハ、平面幾何學ニ準ジテ内二面角、外二面角、錯二面角、同位二面角ト稱ス。

12. 重要定理

定理 (1) 一平面ヘノ一垂線ヲ含ム諸平面ハ、其面ニ垂直ナリ。

(東工, 海兵)

[證明] $AB \perp P$ 面、其足ヲ A トス。然ルトキ AB ヲ含ム任意ノ平面 Q ト P トノ交線ヲ CD トシ、P 面上ニ於テ $AE \perp CD$ トセバ $BA \perp P$ 面 ナルユエ $\hat{BAE} = \hat{R}$ ナリ。而シテ \hat{BAE} ハ P, Q ノ二面角ノ平面角ナリ。 $\therefore P \perp Q$ 。



系 (1) 一平面ニ平行或ハ斜メナル一直線ヲ含ミ其面ニ垂直ナル平面ハ唯一ツアリ。 [線ノ一端ヨリ面ニ垂線ヲ引キテ考ヘヨ]

系 (2) 一點ヨリ相交ル二面ヘ夫々垂線ヲ引ケバ此二垂線ヲ含ム平面ハ、其二面ノ交線ニ垂直ナリ。

系 (3) 相交ル二平面ハ隣二面角ガ相等シケレバ、互ニ垂直ナリ。

注意 之ヲ二平面ノ垂直ノ定義トスルコトヲ得。

逆ニ、隣二面角ガ各々直角ナラバ、外ノ二面ハ一平面トナル。

定理 (2) 垂直二平面ノ一ツノ上ニ在リテ且ツ交線ニ垂直ナル直線ハ他ノ面ニ垂直ナリ。

[證明] 上圖ヲ用フ。 $Q \perp P$ 。 (P 上ノ BA) \perp (交線 CD) トス。然ルトキ P 上ニ於テ $AE \perp CD$ トセバ \hat{BAE} ハ垂直二面 Q, P ノ二面角ノ平面角トナルユエ \hat{R} ナリ。從テ BA ハ P 上ノ二線 CD, AE ニ垂線ナルユエ $BA \perp P$ 。

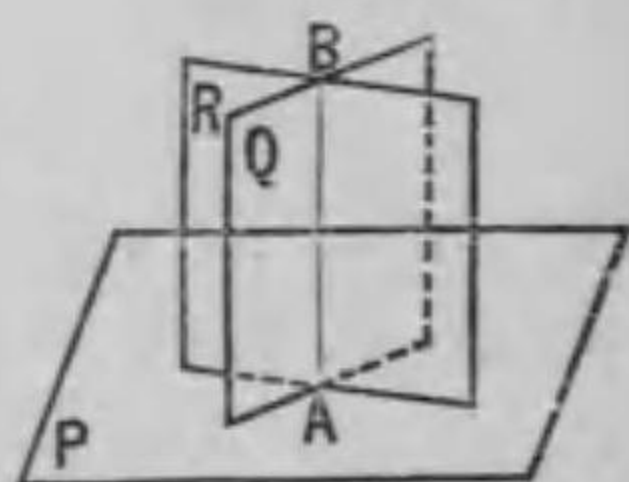
系 (1) 垂直二平面ノ交線上ノ一點ヨリ一面ニ引ケル垂線ハ、他ノ面上ニ在リ。

系 (2) 垂直二平面ノ一面上ノ一點ヨリ他ノ面ニ引ケル垂線ハ、前ノ面上ニ在リ。

定理 (3) 一平面ニ垂直ナル二平面ノ交線ハ、前ノ平面ニ垂直ナリ。

(水講)

[證明] P 面ニ垂直ナル二面ヲ Q, R トシ、其交線ヲ AB トス。然ルトキ若シ AB ガ P ニ垂線ナラズトセバ B ヨリ P 面ニ垂線 BA' ヲ引ケバ BA' ハ Q, R ノ各々ノ上ニ在リ [(2) ノ系 (2)]。故ニ BA' ハ交線ニ外ナラズ、 $\therefore BA \perp P$ 。

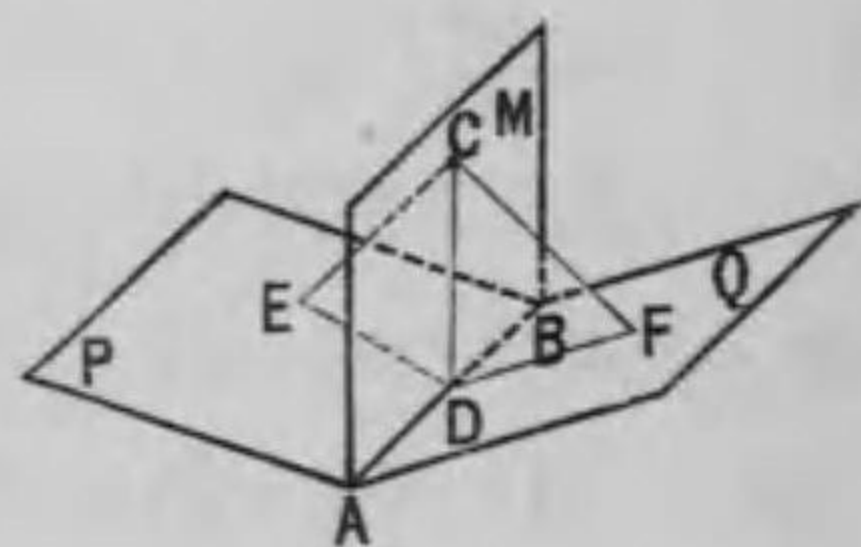


系. 三平面ノ各々ガ何レモ他ノ二ツニ垂直ナレバ、其三ツノ交線ハ互ニ垂線ナリ。

定理 (4) 二面角ノ二等分面上ノ點ハ、其二面ヨリ等距離ナリ。

[證明] 二面 PABQ ノ二等分面ヲ M トス。

然レバ M 面上ノ點 C ヨリ P, Q へノ垂線 CE, CF ヲ含ム平面 CEF ハ P, Q ニ垂直ナリ、從テ其交線 AB ニ垂直ナリ。其交點ヲ D トセバ AB ハ DE, DC, DF ニ垂直ナリ。



故ニ相等シキ二面角ノ平面角ナル $\hat{CDE} = \hat{CDF}$ 。從テ直 $\triangle CDE \cong$ 直 $\triangle CDF$ 。
 $\therefore CE = CF$ 。

系. 二ツノ二面角ノ二面ガ夫々互ニ垂直ナルトキハ、相對スル平面角ハ互ニ補角ヲ爲ス。

定理 (5) 二平面ガ交レバ、對頂二面角ハ相等シ。

定理 (6) 二ツノ二面角ハ其二平面ガ夫々平行シ且ツ同方向ナルトキハ相等シク、異方向ナルトキハ補角ヲ爲ス。

定理 (7) 平行二平面ニ第三平面ガ交レバ、錯二面角ハ相等シ、同位二面角ハ相等シ、同傍内二面角ハ補角ヲ爲ス。

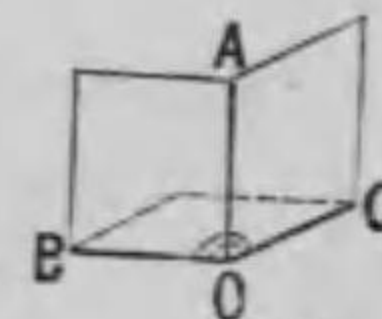
逆ニ、二平面ニ第三平面ガ交リテ、錯二面角ガ相等シキカ、同位二面角ガ相等シキカ、同傍内二面角ガ補角ヲ爲ストキハ、最初ノ二平面ハ平行ス。

問 題 及 ビ 解 答

1. 一點ニ於テ互ニ直角ニ交ル三直線中ノ二ツ宛ヲ含ム三平面ハ互ニ垂直ナリ。

[證明] 互ニ垂直ナル三直線ヲ OA, OB, OC トス。

然ルトキハ AO ハ BO, OC ニ垂線ナルエエ $AO \perp$ 面 BOC。從テ AO ヲ含ム面 AOB, AOC ハ何レモ面 BOC ニ垂直ナリ。同様ニ 面 AOB ハ 面 AOC ニ垂直ナリ。



故ニ此三平面ハ互ニ垂直ナリ。

2. 一點ヨリ相交ル二平面へ夫々垂線ヲ引ケバ、其足ノ連結線ハ二面ノ交線ニ垂線ナリ。

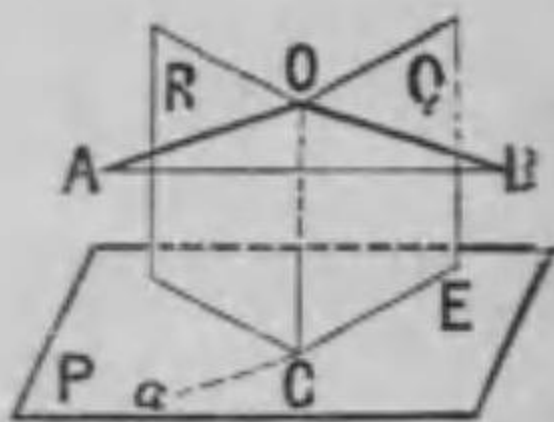
[證明] 二平面 P, Q へノ垂線 CE, CF ヲ含ム平面 CEF ハ P, Q ノ雙方ニ垂直ナルヲ以テ其交線 AB ニ垂直ナリ、故ニ AB ハ之ニ垂直ナル平面 CEF 上ノ直線 EF ニ垂線ナリ。

3. 二平面ノ交線ニ垂直ナル平面ハ、其二面ニ垂直ナリ。

[證明] 二平面 P, Q ノ交線 AB ニ垂直ナル平面ヲ R トス。然レバ R へノ垂線 AB ヲ含ム平面 P, Q ハ共ニ R ニ垂直ナリ、即チ R ハ P, Q ニ垂直ナリ。

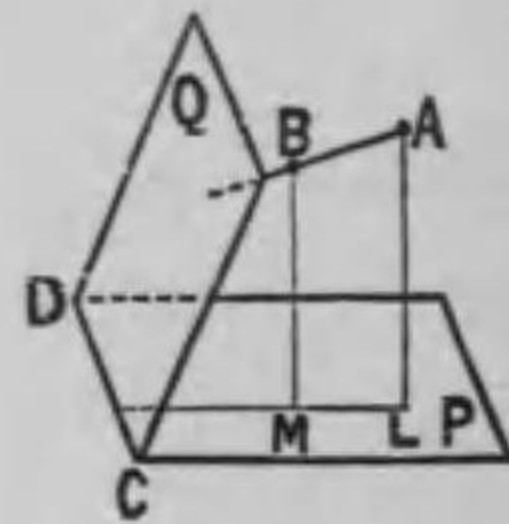
4. 平面 P 二平行ナル二直線 OA, OB 二夫々垂直ナル二平面 Q, R ノ交線 OC ハ P 面ニ垂線ナリ. (水講)

[證明] 面 Q, R へノ垂線 OA, OB ナ含ム平面 AOB ハ Q, R ノ雙方ニ垂直ナルヲ以テ, 其交線 OC ニ垂直ナリ. 而シテ OA, OB ハ共ニ P 面ニ平行ナルユエ面 AOB//P 面. 故ニ此平行二面中ノ面 AOB ニ垂直ナル直線 OC ハ亦タ P 面ニ垂線ナリ.



5. 二點 A, B ヨリ平面 P へ垂線 AL, BM ヲ引キ, 又直線 AB ニ垂直ナル平面 Q ヲ作ルトキハ, P, Q ノ交線 CD ハ LM ニ垂線ナリ. (七高)

[證明] P 面へノ垂線 AL//BM ナルユエ此二線ハ一平面上ニ在リ. 而シテ P, Q へノ垂線 AL, AB ナ含ム平面 ABML ハ P, Q ノ雙方ニ垂直ナリ. 從テ此面ハ P, Q ノ交線 CD ニ垂直ナリ. 故ニ CD ハ之ニ垂直ナル平面 ABML 上ノ直線 LM ニ垂線ナリ.



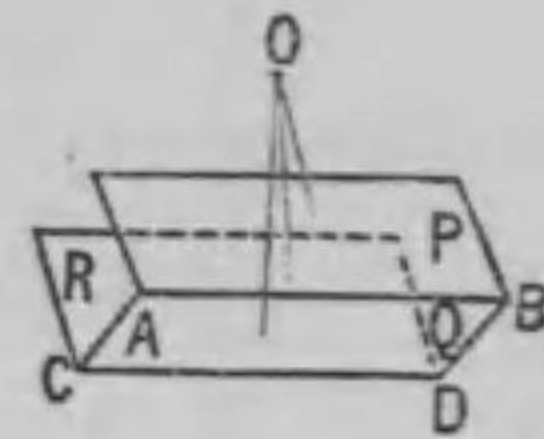
6. 平面 P 二平行セル直線 AO ニ垂直ナル平面 Q ハ, P 面ニ垂直ナリ.

[證明] 4 題ノ圖ヲ用フ. Q ト P トノ交線 CE ニ垂線 OC ナ引キ, 面 AOC ト P トノ交線 Ca ナ引ケバ AO//P ナルユエ AO//Ca. 而シテ AO ⊥ Q ナルユエ AO ⊥ OC. ∴ OC ⊥ Ca, 又 OC ⊥ CE. 故ニ OC ハ Ca, CE ナ含ム P 面ニ垂線ナリ. 故ニ P へノ垂線 OC ナ含ム Q ハ P 面ニ垂直ナリ.

7. 數多ノ平面ノ交線ガ互ニ平行ナルトキハ, 此等ノ面外ノ一點ヨリ其各面へ引ケル垂線ハ一平面上ニ在リ.

[證明] 平面 P, Q, R, ……ノ交線ヲ順次ニ AB, CD, EF, ……トシ, 又一點ヲ O トス. 然ルトキ O ヲ過リ交線 AB ニ垂直ナル平面ハ一ツアリ唯, 之ヲ M トスバレ

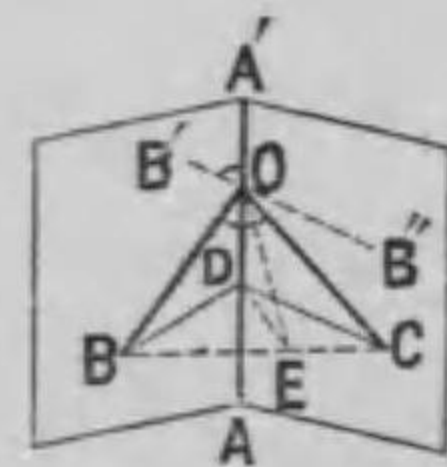
AB//CD//…ナルユエ M ハ亦タ CD, ……ニ垂直ナリ. 而シテ交線 AB, CD, ……ニ垂直ナル平面 M ハ 其ノ各面 P, Q, R, ……ニ垂直ナリ. 故ニ M 面上ノ O 點ヨリ之ニ垂直ナル各面 P, Q, R, ……へ引ケル垂線ハ皆一平面上ニ在リ.



8. 相異レル平面上ニ在ル角 AOB, AOC ガ相等シキトキハ, 其二平面ノ爲ス二面角ノ二等分面ハ平面 BOC ニ垂直ナリ. (北農)

[證明] AO 上ノ點 D ヲ過リ AO ニ垂直ナル平面ヲ作リ OB, OC トノ交點ヲ夫々 B', C' トセバ BD, CD ハ共ニ AO ニ垂線ナルヲ以テ,

\hat{BDC} ハ二面角 BAOC ノ平面角ナリ. 而シテ \hat{BDC} ノ二等分線ト BC トノ交點ヲ E トセバ $\hat{ODE} \equiv \hat{R}$ ナルユエ面 ODE ハ二面角 BAOC ナ二等分ス. 然ルトキ $\triangle ODB, \triangle ODC$ ハ $\hat{DOB} = \hat{DOC}, \hat{ODB} = \hat{R} = \hat{ODC}, OD$ ハ共通ナルユエ全等ナリ, 故ニ $BD = CD$. 依テ \hat{BDC} ノ二等分線 $DE \perp BC$. 又 $OD \perp$ 面 BDC ナル故ニ三垂線定理ニ依テ $OE \perp BC$. 故ニ $BC \perp$ 面 ODE. ∴ BC ナ含ム面 OBC ⊥ 面 ODE.



9. 垂直二平面ノ交線上ノ一點ヨリ各面上ニ其交線ト半直角ヲ爲シテ引ケル二直線ノ爲ス角ハ直角ノ三分ノ二ニ等シキカ, 若シクハ其補角ニ等シ. (海機)

[略解] 前題ト同様ニ交線 OA ニ垂直平面ヲ作レバ直 $\triangle ODB \equiv \triangle ODC, OD = BD = DC$. 從テ直 $\triangle BDC \equiv \triangle ODB \equiv \triangle ODC$ [二面角ノ平面角 $\hat{BDC} = \hat{R}$], ∴ $OB = OC = BC$ 即チ OBC ハ正三角形ナルヲ以テ $\hat{BOC} = \frac{2}{3}\hat{R}$. 次ニ $B'O A' = \frac{1}{2}\hat{R}$ トシ B'O ノ延長上ニ B'' 點ヲ取レバ前ト同様ニ $B''OC = \frac{2}{3}\hat{R}$ ナリ, 故ニ $B'OC$ ハ $B''OC$ 即チ $\frac{2}{3}\hat{R}$ ノ補角ナリ.

第五章

多面角

13. 定義及記法

定義 (1) 三ツ以上ノ平面ガ一點ニ會シ空間ヲ二部ニ分ツトキハ、此等ノ面ハ多面角或ハ立體角ヲ爲スト云フ。

而シテ、其點ヲ頂點、二面ノ交線ヲ稜、二稜間ノ平面ヲ面、二稜ノ爲ス角ヲ平面角或ハ面角ト云フ。

多面角ハ其面ノ數ニ從ヒ、之ヲ三面角、四面角、等ト云フ。

三面角ハ各面角或ハ各二面角ガ直角ナルトキハ、之ヲ直三面角ト云フ。

多面角ヲ各稜ニ交ル一平面ニテ截リテ生ズル所ノ多角形ヲ截リ口ト云ヒ、其凸ナルトキハ多面角ヲ凸ナリト云フ。

注意 單ニ多面角ト云ヘバ凸多面角ヲ指スモノトス。

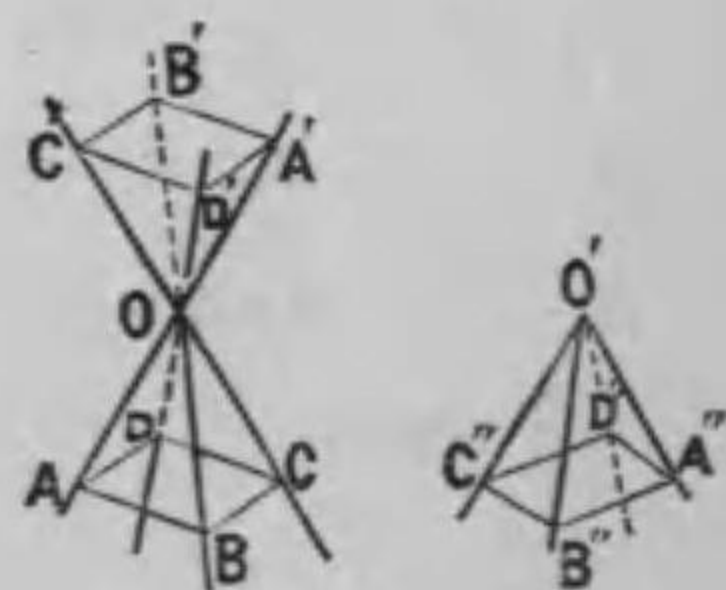
記法 次圖ノ多面角ヲ四面角 $O-ABCD$ 或ハ四面角 O ト記ス。

定義 (2) 一ツノ多面角ト其各稜ノ延長ニテ成レル多面角トハ互ニ對頂多面角ナリト云フ。

定義 (3) 二ツノ多面角ハ各平面角及ビ各二面角ガ逆順ニ相等シキトキハ、互ニ對稱多面角ナリト云フ。

從テ對頂多面角ハ對稱ニシテ相等シキモ全等ナラザルコト明カナリ。

故ニ二ツノ多面角ノ全等ナルコトヲ證明スルニハ、各平面角及ビ各二面角ガ同順ニシテ且ツ相等キコトヲ證明セザルベカラズ。



14. 重要定理

定理 (1) 三面角ノ二ツノ面角ノ和ハ、他ノ一面角ヨリモ大ナリ。

(海機、京醫、陸教、海兵)

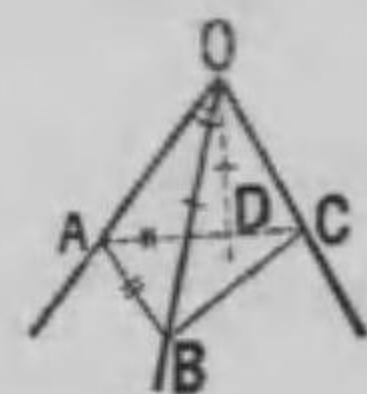
[證明] 三面角ヲ $O-ABC$ トス。

(i) $\hat{AOB} \geq \hat{AOC}$ ナルトキハ此定理ハ其眞ナルコト明カナリ。

(ii) $\hat{AOB} < \hat{AOC}$ ナルトキハ \hat{AOC} 内ニ \hat{AOB} ニ等シク \hat{AOD} ヲ取り OD ト AC トノ交點ヲ D トシ、 $OB=OD$ トモバ二邊ト其夾角ノ等シキ $\triangle AOB \equiv \triangle AOD$, $\therefore AB=AD$.

然ルニ $\triangle ABC$ ニ於テ、 $AB+BC > AC=AD+DC$. $\therefore BC > DC$.

然レバ $\triangle BOC, \triangle DOC$ ハ $OB=OD, OC$ ハ共通、 $BC > DC$ ナルユエ $\hat{BOC} > \hat{DOC}$. 又作圖ニ依リ $\hat{AOB} = \hat{AOD}$. 相加ヘテ $\hat{AOB} + \hat{BOC} > \hat{AOD} + \hat{DOC} = \hat{AOC}$.



系. 三面角ノ二ツノ面角ノ差ハ、他ノ一面角ヨリモ小ナリ。

定理 (2) 凸多面角ノ面角ノ和ハ四直角ヨリモ小ナリ。

(高等)

[證明] 凸多面角ヲ $O-ABCDE$ トス。然ルトキハ截

リ口 $ABCDE$ ハ凸多角形ナリ。其内ニ一點 O' ヲ取

リ之ト各角頂トヲ結ベバ三面角 A ニ於テ

$$\hat{OAE} + \hat{OAB} > \hat{EAB}$$

同様ニ $\hat{OEA} + \hat{OEB} > \hat{AEB}$

$$\dots\dots\dots$$

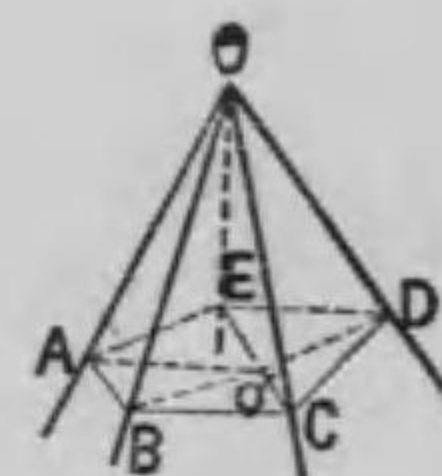
$$\dots\dots\dots$$

之ヲ邊々相加フレバ O, O' ヲ夫々頂點トスル三角形ニ於テ

O ノ周圍ノ三角形ノ底角ノ和 $>$ O' ノ周圍ノ三角形ノ底角ノ和

然ルニ O ノ周圍ノ三角形ノ各角ノ和 $= O'$ ノ周圍ノ三角形ノ各角ノ和

\therefore 此差即チ、 O ヲ角頂トスル角ノ和 $<$ O' ヲ角頂トスル角ノ和 $= 4R$.



問 題 及 ビ 解 答

1. 三面角 O-ABC = 於テ $\hat{A}BC + \hat{B}CO + \hat{C}OA + \hat{O}AB < 4R$ ナリ.

[證明] 三面角ノ一ツノ面角ハ他ノ二ツノ面角ノ和ヨリモ小ナルユエ

$$\begin{aligned} & \hat{A}BC + \hat{B}CO + \hat{C}OA + \hat{O}AB \quad \text{ハ} \\ & (\hat{O}BA + \hat{O}BC) + (\hat{A}CB + \hat{O}CA) + (\hat{B}OC + \hat{B}OA) + (\hat{C}AO + \hat{C}AB) \quad \text{ヨリモ小ナリ.} \\ & \text{而シテ此十二ノ角ノ和ハ四ツノ三角形ノ内角ノ和ナルユエ } 3R \text{ ナリ.} \\ & \therefore \hat{A}BC + \hat{B}CO + \hat{C}OA + \hat{O}AB < 4R. \end{aligned}$$

2. 三面角 O-ABC 内ニ一點 X ヲ取レバ次ノ證如何.

(a) $\hat{A}OX + \hat{B}OX + \hat{C}OX > \frac{1}{2}(\hat{A}OB + \hat{B}OC + \hat{C}OA).$

(b) $\hat{A}OX + \hat{B}OX < \hat{A}OC + \hat{B}OC.$

(c) $\hat{A}OX + \hat{B}OX + \hat{C}OX < \hat{A}OB + \hat{B}OC + \hat{C}OA.$

[證明] (a) $\left. \begin{aligned} \hat{A}OX + \hat{B}OX &> \hat{A}OB \\ \hat{B}OX + \hat{C}OX &> \hat{B}OC \\ \hat{C}OX + \hat{A}OX &> \hat{C}OA \end{aligned} \right\} +$

$\therefore \hat{A}OX + \hat{B}OX + \hat{C}OX > \frac{1}{2}(\hat{A}OB + \hat{B}OC + \hat{C}OA).$

(b) OAX 面 ト BOC 面 トノ交線ヲ OE

トセバ $\hat{A}OC + \hat{C}OE > \hat{A}OE$

$\hat{B}OE + \hat{E}OX > \hat{B}OX$

而シテ $\hat{C}OE + \hat{B}OE = \hat{B}OC$

及ビ $\hat{A}OE - \hat{E}OX = \hat{A}OX$

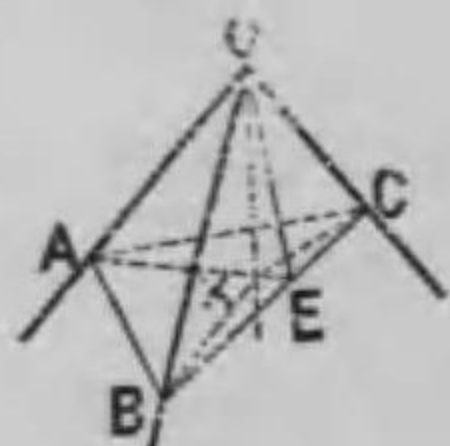
$\therefore \hat{A}OC + \hat{B}OC > \hat{A}OX + \hat{B}OX$

(c) (b) = 依テ $\hat{A}OX + \hat{B}OX < \hat{A}OC + \hat{B}OC$

$\hat{B}OX + \hat{C}OX < \hat{B}OA + \hat{C}OA$

$\hat{C}OX + \hat{A}OX < \hat{C}OB + \hat{A}OB$

之ヲ邊々相加ヘテ 2 除セバ $\hat{A}OX + \hat{B}OX + \hat{C}OX < \hat{A}OB + \hat{B}OC + \hat{C}OA.$



3. $\triangle ABC =$ 内接 $\triangle DEF$ ヲ畫キ, 其面外ノ一點 O ヲ共通ノ頂點トスル二ツノ三面角 O-ABC, O-DEF ヲ作レバ, 外三面角ノ面角ノ和ハ内三面角ノ面角ノ和ヨリモ大ナリ.

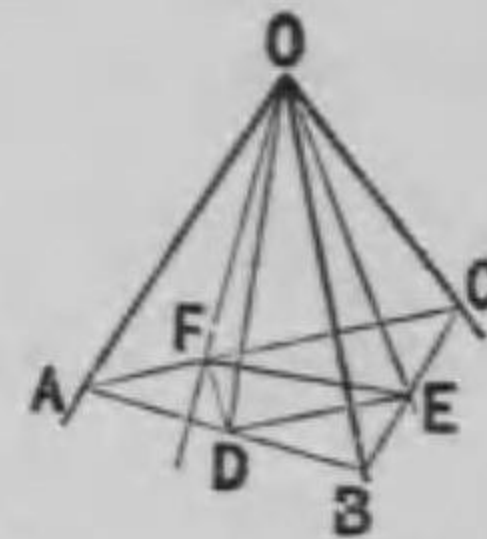
[證明] $\hat{A}OF + \hat{A}OD > \hat{F}OD$

$\hat{C}OF + \hat{C}OE > \hat{E}OF$

及ビ $\hat{B}OD + \hat{B}OE > \hat{D}OE$

$\therefore \hat{A}OF + \hat{C}OF + \hat{A}OD + \hat{B}OD + \hat{C}OE + \hat{B}OE$

即チ $\hat{A}OC + \hat{A}OB + \hat{B}OC > \hat{F}OD + \hat{E}OD + \hat{E}OF.$



4. 三面角 O-ABC = 於テ $AB=OC, BC=OA, CA=OB$ トスルトキハ, O, A, B, C ヲ角頂トスル三ツノ面角ノ和ハ何レモ二直角ナリ.

[證明] 先ヅ O ヲ頂點トスル三面角ニ於テ $AB=OC, CA=OB, BC=OA$ ハ共通ナルヲ以テ

$\triangle ABC \cong \triangle OBC, \hat{B}AC = \hat{B}OC.$ 同様ニ $\hat{A}CB = \hat{A}OB$ 及ビ $\hat{A}BC = \hat{A}OC.$

$\therefore \hat{A}OB + \hat{A}OC + \hat{B}OC = \hat{A}CB + \hat{A}BC + \hat{B}AC = 2R.$

其他ニ就テモ同様ニ證明スルコトナリ.

5. 三面角 O-ABC = 於テ次ノ證如何.

(a) 面角 $\hat{A}OB = \hat{B}OC$ ナラバ, 之ニ對スル二面角 $\hat{C} = \hat{A}$ ナリ.

(b) 面角 $\hat{A}OB < \hat{B}OC$ ナラバ, 之ニ對スル二面角 $\hat{C} < \hat{A}$ ナリ.

[證明] $BD \perp$ 面 $OA, DA \perp$ 面 $OC, DC \perp$ 面 OB トセバ三

垂線定理ニ依テ $BA \perp OA, BC \perp OC$ ナルユエ

$\hat{B}AD, \hat{B}CD$ ハ二面角 OA, OC ナリ.

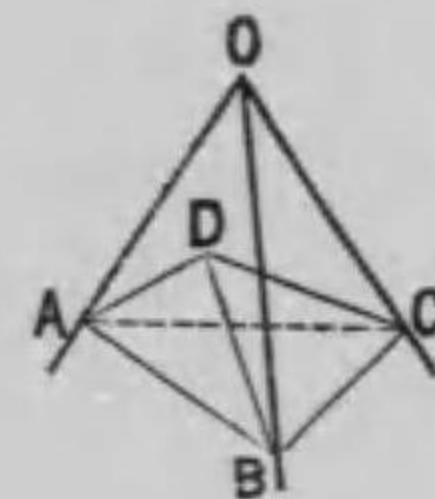
(a) 直 $\triangle ABO, BCO$ ハ $\hat{A}OB = \hat{B}OC$ [假設],

斜邊 OB ハ共通ナルユエ全等ニシテ $AB=BC.$

從テ直 $\triangle ABD \cong \triangle BCD, \therefore \hat{B}AD = \hat{B}CD.$

(b) 直 $\triangle AOB, BOC$ ニ於テ $\hat{A}OB < \hat{B}OC$ [假設], 斜邊 OB ハ共通ナルユエ $AB < BC.$ 從テ直 $\triangle ABD, BCD$ ニ於テ BD ハ共通, 斜邊 $AB < BC$ ナルユエ

$AD < CD.$ CD 上ニ $DA' = DA$ トセバ $\triangle BA'D \cong \triangle BAD, \hat{B}A'D = \hat{B}AD.$ 又外角 $\hat{B}A'D > \hat{B}CD \therefore \hat{B}AD > \hat{B}CD.$



6. 二面角 $O-ABC$ に於テ次ノ證如何.

(a) 二面角 $OC=OA$ ナラバ, 之ニ對スル面角 $AOB=BOC$ ナリ.

(b) 二面角 $OC<OA$ ナラバ, 之ニ對スル面角 $AOB<BOC$ ナリ.

[證明] 前題ノ逆ナルユエ, 前題ノ證ヲ逆順ニスベシ.

7. 三面角ノ一ツノ二面角ガ直角ナルトキ [直三面角], 一稜ニ垂直ナル平面ニテノ截リ口ハ直三角形ナリ.

[證明] 次圖ヲ用フ. 三面角 $O-ABC$ に於テ二面角 OB チ直角トス. 然ルトキ截リ口ガ稜 OB ニ垂直ナルトキハ $\widehat{ABC}=\widehat{R}$ ナルコト明カナリ.

次ニ截リ口ガ稜 OA ニ垂直ナルトキハ $OA \perp$ 面 ABC ナルユエ 面 $OAB \perp$ 面 ABC . 然ルニ 面 $OAB \perp$ 面 OBC [假設]. 故ニ二面 ABC, OBC ノ交線ナルユエ $BC \perp$ 面 OAB .
 $\therefore BC$ ハ面 OAB 上ノ直線 BA ニ垂直ナリ, 即チ $\widehat{ABC}=\widehat{R}$.

8. (a) 三面角ノ各々ノ二面角ガ直角ナルトキ [直三面角], 其角頂ヨリ截リ口ヘ引ケル垂線ノ足ハ截リ口ノ垂心ナリ. (各高)

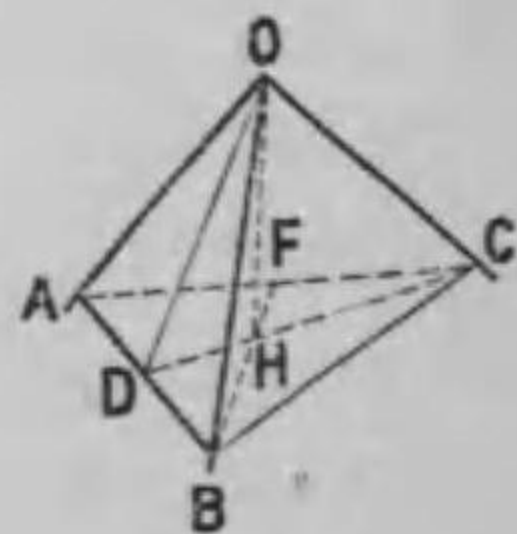
(b) 又角頂ヨリ截リ口ノ各邊ヘ引ケル垂線ノ足ヲ結ビ付クレバ, 截リ口ノ垂足三角形ナリ.

(c) 又此三面角ノ截リ口ハ常ニ銳角三角形ナリ.

(d) 三面角 $O-ABC$ ノ截リ口 ABC ノ垂心ヲ H トスレバ, $\triangle ABO$ ハ $\triangle ABC$ ト ABH トノ比例中項ナリ.

[證明] 直三面角 $O-ABC$ ノ截リ口 ABC へ O ヨリ引ケル垂線ノ足ヲ H トス. 然ルトキ CH, BH ノ延長ト AB, AC トノ交點ヲ D, F トス.

(a) 面 AOB, ABC へノ垂線 CO, OH チ含ム 面 OCD ハ前ノ二面ニ垂直ナリ. 故ニ AB ハ 面 OCD ニ垂直線, 從テ $AB \perp CD$. 同様ニ $BF \perp AC$. $\therefore H$ ハ $\triangle ABC$ ノ垂心ナリ.



(b) $CO \perp$ 面 AOB ナルユエ $CO \perp AB$, 依テ $OD \perp AB$ トセバ $AB \perp$ 面 ODC , $\therefore AB \perp CD$. 同様ニ $BF \perp AC, AE \perp BC$ チ證シ得.

(c) $OD \perp AB$ トセバ $\widehat{AOB}=\widehat{R}$ ナルユエ D 點ハ AB 上ニ在リテ $CD \perp AB$. 同様ニ F 點ハ AC 上ニ在リテ $BF \perp AC$. 故ニ CD, BF ノ交點 H ハ $\triangle ABC$ 内ニアルユエ ABC ハ銳角三角形ナリ.

(d) AB ハ之ニ垂直ナル CD, CO チ含ム平面 ODC ノ直線 OD ニ垂直ナリ. 故ニ同底ナル $\triangle ABC : \triangle ABO = CD : OD$ 及ビ $\triangle ABO : \triangle ABH = OD : DH$. 然ルニ $CO \perp$ 面 AOB ナルユエ $\widehat{COD}=\widehat{R}$ ニシテ $OH \perp CD$ ナルユエ $\triangle COD \sim \triangle ODH$, 故ニ $CD : OD = OD : DH$.

$$\therefore \triangle ABC : \triangle ABO = \triangle ABO : \triangle ABH.$$

9. 三面角 $O-ABC$ ノ各平面角ガ皆ナ直角ナルトキ [直三面角], 任意ノ一點 X ヨリ OA, OB, OC ニ夫々垂線 XP, XQ, XR ヲ引ケバ $\overline{OX}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2 + \overline{OR}^2$ ナリ. (海機)

[證明] $XD \perp$ 面 BOC トセバ $XD \perp OB$, 且ツ $XQ \perp OB$ ナルユエ $OB \perp$ 面 XDQ . 從テ $OB \perp DQ$. 同様ニ $OC \perp DR$. 而シテ $\widehat{BOC}=\widehat{R}$. 故ニ $DQOR$ ハ矩形ニシテ對邊 $DQ=OR$.

又 $AO \perp$ 面 $BOC \perp XD$ ナルユエ $PO \parallel XD$ ニシテ $\widehat{XDO}=\widehat{POD}=\widehat{R}=\widehat{XPO}$. 故ニ $XDOP$ ハ矩形ニシテ $XO=PD$.

$$\therefore \overline{OX}^2 = \overline{PD}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{OD}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2 + \overline{QD}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2 + \overline{OR}^2.$$

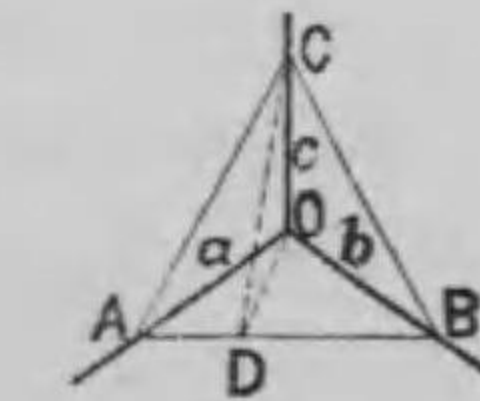
10. 直三面角 $O-ABC$ に於テ $OA=a, OB=b, OC=c$ トスレバ次ノ證如何,

$$\text{截リ口 } ABC \text{ ノ面積} = \frac{1}{2} \sqrt{(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)}.$$

[證明] 假設ニ依リ $CO \perp AO \perp BO \perp CO$ ナルユエ $CO \perp$ 面 AOB , 從テ $CO \perp AB$. 依テ $CD \perp AB$ トセバ三垂線定理ニ依リ $OD \perp AB$. 故ニ $OD \cdot AB = 2\triangle AOB = ab$.

$$\therefore 2\triangle ABC = CD \cdot AB = \sqrt{OD^2 + c^2} \times AB$$

$$= \sqrt{\frac{a^2b^2}{AB^2} + c^2} \times AB = \sqrt{a^2b^2 + c^2} \frac{AB}{AB} = \sqrt{a^2b^2 + c^2(a^2 + b^2)}.$$



11. 三面角 $O-ABC$ 内ノ一點 S ヨリ各面上ニ引ケル垂線 SD, SE, SF ヲ各稜トスル三面角 $S-DEF$ ヲ作レバ, 其一方ノ二面角ハ他ノ面角ト補角ヲ爲ス.

[證明] $O-ABC$ ト $S-DEF$ トノ交線ヲ DA, DB, EB, EC, FA, FC トス.

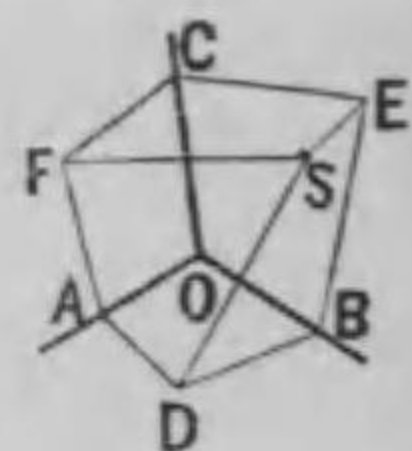
然ルトキハ 面 AOB , 面 AOC ヘノ垂線 SD, SF ナ含
 \triangle 平面 $SDAF$ ハ其二面ニ垂直ナリ, 從テ其交線 OA
 ニ垂線ナリ. 故ニ $DA \perp OA \perp AF$.

故ニ \widehat{DAF} ハ 面 AOB ト 面 AOC トノ爲ス二面角
 ナリ. 而シテ四邊形 $SDAF$ ニ於テ $\widehat{SDA} = \widehat{R} = \widehat{SFA}$.

$$\therefore \widehat{DSF} + \widehat{DAF} = 2\widehat{R}$$

其他 $O-ABC$ ノ二面角ハ $S-DEF$ ノ面角ト補角ヲナス.

同様ニ $S-DEF$ ノ二面角ハ $O-ABC$ ノ面角ト補角ヲナスコトヲ證シ得.



12. 三面角ノ各二面角ノ和ハ二直角ヨリハ大ナルモ六直角ヨリ
 ハ小ナリ.

[證明] 上圖ヲ用フ. 二面角 OA + 面角 $FSD = 2\widehat{R}$
 二面角 OB + 面角 $DSE = 2\widehat{R}$
 二面角 OC + 面角 $ESF = 2\widehat{R}$

故ニ此和即チ三面角 $O-ABC$ ノ二面角ノ和ニ三面角 $S-DEF$ ノ面角ヲ加ヘタルモ
 ノハ $6\widehat{R}$ ナリ. 然ルニ三面角 $S-DEF$ ノ面角ノ和ハ $4\widehat{R}$ ヨリモ小ナリ.

$\therefore O-ABC$ ノ二面角ノ和ハ $2\widehat{R}$ ヨリハ大ナリ, 又 $6\widehat{R}$ ヨリハ小ナルコト明カナリ.

第 六 章

軌 跡

15. 軌跡ニ就テハ已ニ緒論ニ述ベタルガ如ク, 平面幾何學
 ノ第一編第二章ヲ必ズ再讀スルヲ要ス.

立體幾何學ニハ點ノ軌跡ノ外ニ線ノ軌跡アレドモ只其異ナル所ハ
 點ト云フ代リニ線ト云フニ過ギズ. 而シテ點ノ軌跡ハ線或ハ面ト
 ナリ, 又線ノ軌跡ハ線或ハ面トナルナリ.

16. 軌跡ノ重要定理

軌跡 (1) 二定點ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ヲ求メヨ.

[解] 先ヅ二定點 A, B ヨリ等距離ナル任意ノ點ヲ C トシ, $CM \perp AB$ トセバ $AM = MB$.

$\therefore C$ ハ AB ノ中點 M ヨリ AB ヘノ任意ノ垂
 線 MC ナ含 \triangle 平面, 即チ AB ノ垂直二等分面 P ノ
 上ニ在リ.

次ニ P 面上ニ任意ノ點 C ヲ取リ CM ヲ結ベバ
 三邊ノ相等シキ $\triangle CAM \equiv \triangle CBM$, $CA = CB$.

$\therefore P$ 面上ノ點ハ A, B ヨリ等距離ナリ.

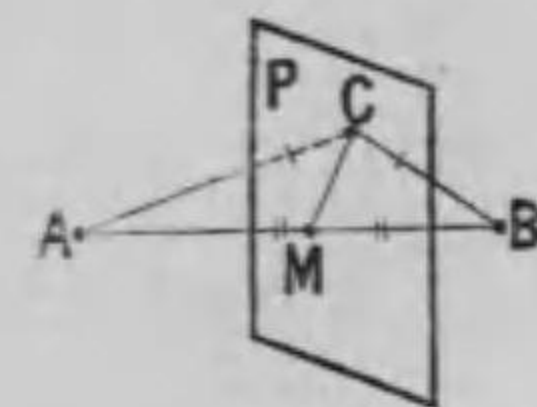
\therefore 所要ノ軌跡ハ二定點 A, B ノ連結線 AB ノ垂直二等分面 P ナリ.

注意 A, B ヨリノ距離ノ比ガ $m:n$ ナル點ノ軌跡ハ AB ナ $m:n$ ニ内分及ビ外分ス
 ル點ヲ過リ AB ニ垂直ナル平面ナリ. 之レ本題ノ一般ノ場合ナリ.

以下ノ等距離ノ場合モ之ニ準ズ. 但シ此等ハ參考ニ供スルノミ.

軌跡 (2) (i) 一直線上ニ在ラザル三點ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ヲ
 求メヨ.

(ii) 一圓周ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ヲ求メヨ.



〔解〕 (i) 一直線上ニ在ラザル三點ヲ A, B, C トス。然ルトキ先ヅ此平面 ABC 上ニ於テ A, B, C ヨリ等距離ナル點即チ外心 O ヲ求ムレバ之レ極限點ナリ。サテ軌跡上ノ任意ノ點即チ共通點ヲ M トセバ $MA=MB=MC$ ニシテ又 $OA=OB=OC$ ナルユエ $\triangle MOA \equiv \triangle MOB \equiv \triangle MOC$, 從テ $\hat{MOA} = \hat{MOB} = \hat{MOC}$ ナルユエ $MO \perp$ 面 ABC.

\therefore M ハ定點 O ヲ過リ 面 ABC ニ垂直ナル直線 MOM' 上ニ在リ。

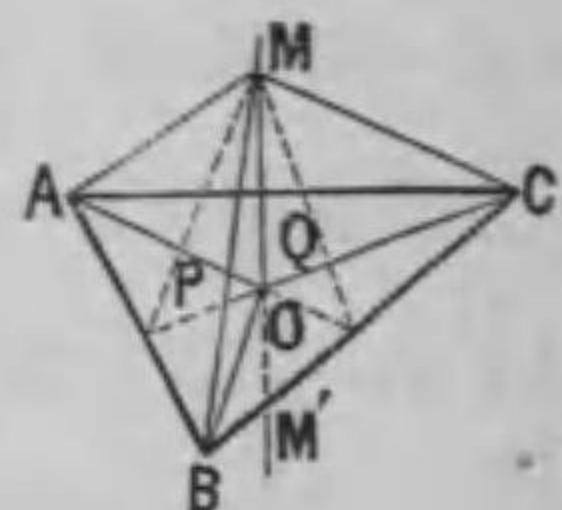
逆ニ, MO 上ニ任意ノ點 M ヲ取レバ $MO \perp$ 面 ABC

ニシテ $OA=OB=OC$ ナルユエ $MA=MB=MC$.

\therefore MOM' 上ノ點ハ A, B, C ヨリ等距離ナリ。

\therefore 所要ノ軌跡ハ三點ニテ成レル三角形ノ外心ヲ過リ

其面ニ垂直ナル一直接線ナリ。



〔別解〕 二點 A, B ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ハ直線 AB ノ垂直二等分面 P ナリ。

又二點 B, C ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ハ直線 BC ノ垂直二等分面 Q ナリ。

而シテ相交ル二線 AB, BC ニ夫々垂直ナル二面 P, Q ハ相交ル, 且ツ $P \perp ABC$ 及ビ $Q \perp ABC$ ナルユエ P, Q ノ交線 $MO \perp ABC$ ナリ。

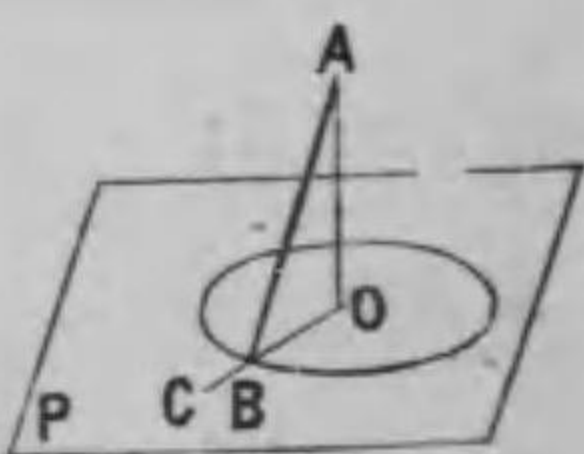
次ニ MO 上ノ凡テノ點ハ三點 A, B, C ヨリ等距離ナルガ故ニ MO ト 面 ABC トノ交點 O ハ A, B, C ヨリ等距離ナリ, 即チ O ハ $\triangle ABC$ ノ外心ナリ。

\therefore 所要ノ軌跡ハ三點ニテ成レル三角形ノ外心ヨリ其面ヘノ垂線ナリ。

注意 本題ハ, 三角形ノ各角頂ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ヲ求メヨ, ト換言シ得。

軌跡 (3) 平面外ノ一點ヨリ其面ニ引ケル定長斜線ノ足ノ軌跡ヲ求メヨ。

〔略解〕 A 點ヨリ P 面ニ垂線 AO ヲ引キ, P 面上ニ直線 OC ヲ引キ, 面 AOC 上ニ於テ A ヲ中心トシ定長ヲ半徑トシテ OC ヲ B ニテ截レバ, P 面上ニ於テ O ヲ中心トシ OB ヲ半徑トスル圓周ハ所要ノ軌跡ナリ。



軌跡 (4) 平面上ノ定點ヲ過リ其面上ニ引ケル直線ニ, 其面外ノ定點ヨリ引ケル垂線ノ足ノ軌跡ヲ求メヨ。 (東商, 各高)

〔解〕 P 面上ノ定點ヲ B, 其面外ノ定點ヲ A トス。

今軌跡上ノ一點ヲ C トセバ $AC \perp BC$.

$AO \perp P$ トセバ三垂線定理ニ依リテ

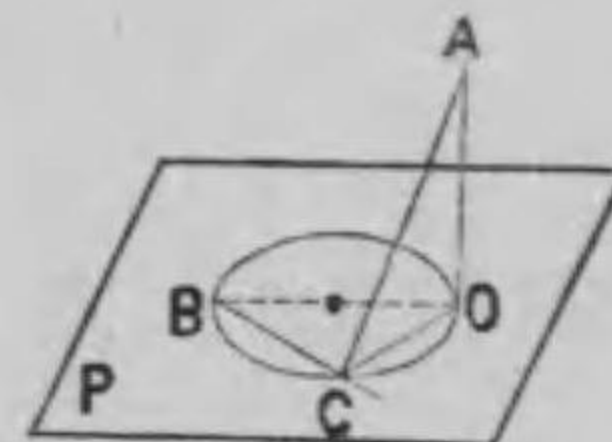
$OC \perp BC$ 即チ $\hat{BCO} = \hat{R}$ ナリ。

\therefore C ハ P 上ノ直徑 OB 圓ノ周上ニ在リ。

逆ニ, 此圓 OB ノ周上ニ點 C ヲ取レバ

$\hat{BCO} = \hat{R}$ 即チ $BC \perp OC$, 而シテ $AO \perp P$ ナルユエ $AO \perp OC$. 故ニ三垂線ノ定理ニ依リテ $AC \perp BC$. \therefore 此圓 OB ノ周上ノ C 點ハ $BC \perp AC$ ナル點ナリ。

\therefore 所要ノ軌跡ハ面外ノ定點ヨリ面ヘノ垂線ノ足ト面上ノ定點トノ連結線ヲ直徑トシ其面上ニ畫ケル圓周ナリ。



軌跡 (5) (i) 平行二定直線ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ヲ求メヨ。

(ii) 相交ル二定直線ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ヲ求メヨ。

〔解〕 (ii) 相交ル二直線 AB, CD ノ交點ヲ O トシ, 又其二線ノ平面ヲ P トス。

今軌跡上ノ一點ヲ M トシ, $MK \perp AB$,

$ML \perp CD$, $MN \perp P$ 且ツ N ハ \hat{BOD} 内

ニ在リトセバ $MK=ML$, 從テ $NK=NL$.

又三垂線定理ニヨリ $KN \perp OB$, $LN \perp OD$.

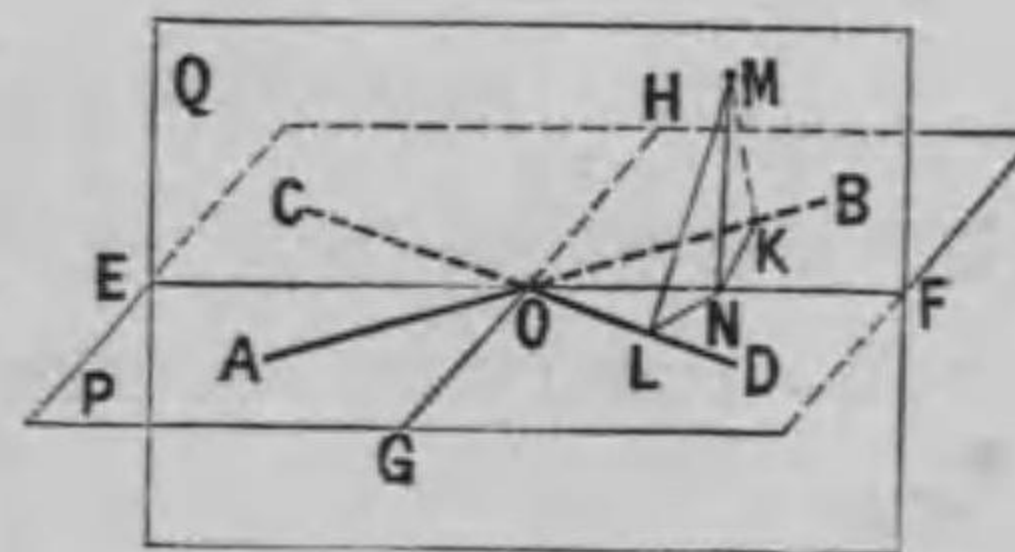
故ニ N 點ハ \hat{BOD} ノ二邊ヨリ等距離

ナルユエ其角ノ二等分線 EF 上ニ在リ。

而シテ P へノ垂線 MN ヲ含ム平面 Q ハ P ニ垂直ナリ。

\therefore M 點ハ EF ヲ含ミ P ニ垂直ナル平面 Q 上ニ在リ。

逆ニ, Q 面上ニ點 M ヲ取リ $MN \perp EF$ トセバ MN ハ Q 面上ニ在リ, 從テ $MN \perp P$. 又 $NK \perp AB$, $NL \perp CD$ トセバ $NK=NL$ 且ツ三垂線定理ニ依テ $MK \perp AB$,

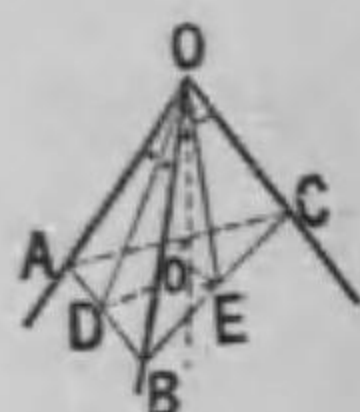


ML ⊥ CD. 從テ 直△MKN ≡ △MNL. ∴ MK = ML 即チ Q 面上ノ點ハ AB, CD ヨリ等距離ナリ.

∴ \widehat{BOD} ノ二等分線 EF ヲ含ミ P = 垂直ナル平面ハ所要ノ軌跡ナリ.
 同様ニ \widehat{BOC} ノ二等分線 GH ヲ含ミ P = 垂直ナル平面ハ所要ノ軌跡ナリ.
 ∴ 所要ノ軌跡ハ交角ノ二等分線ノツヲ含ミ且ツ元ノ二線ノ平面ニ垂直ナル二平面ナリ.

系. 三面角ノ三稜ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ヲ求メヨ. (高等)

[解] 三面角ヲ O-ABC トス. 二稜 OA, OB ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ハ面角 AOB ノ二等分線 OD ヲ含ミ面 AOB = 垂直ナル平面 P ナリ. 又二稜 OB, OC ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ハ面角 BOC ノ二等分線 OE ヲ含ミ面 BOC = 垂直ナル平面 Q ナリ. 故ニ P, Q ノ交線 OO' ハ三稜 OA, OB, OC ヨリ等距離ナリ. 從テ二稜 OA, OC ヨリ等距離ナル點ノ軌跡即チ面角 COA ノ二等分線ヲ含ミ其面ニ垂直ナル平面 R モ亦タ OO' ヲ過ル.
 ∴ 所要ノ軌跡ハ各々ノ面角ヲ二等分シ且ツ其面ニ垂直ナル三平面ノ交リナル一直線ナリ.



注意 60 頁ノ 1 題ハ本題ノ換言ナリ.

軌跡 (6) (i) 平行二平面ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ヲ求メヨ.

(ii) 二面角ノ各面ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ヲ求メヨ.

[解] (ii) 22 頁ノ下圖ヲ用フ. 二面角ヲ PABQ トス. 先ヅ軌跡上ニ點 C ヲ取レバ P, Q へノ垂線 CE, CF ヲ含ム平面 ECF ハ P, Q = 垂直ナリ, 從テ其交線 AB = 垂直ナリ, 其交點ヲ D トセバ AB ハ DE, DC, DF = 垂直ニシテ CE = CF, CD ハ共通, $\widehat{E} = \widehat{R} = \widehat{F}$ ナルユエ $\triangle ECD \equiv \triangle FCD$, $\widehat{EDC} = \widehat{FDC}$ 即チ CD ハ二面角ノ平面角 EDF ヲ二等分ス. ∴ C ハ二面角ノ二等分面 M ノ上ニ在リ.

次ニ M 面上ニ點 C ヲ取レバ P, Q へノ垂線 CE = CF.

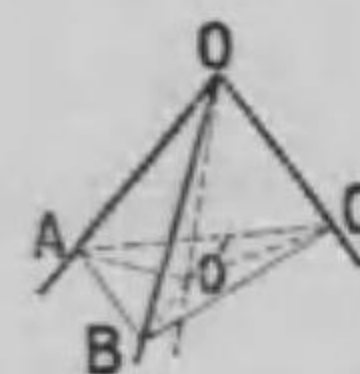
[22 頁定理 (4) ノ證ヲ用フ.]

∴ 所要ノ軌跡ハ二面角ノ二等分面ナリ.

系 (1) 相交ル二平面ノ各面ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ハ, 其二ツノ隣二面角ノ各二等分面ニシテ互ニ直交ス.

系 (2) 三面角ノ各面ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ヲ求メヨ.

[解] 三面角ヲ O-ABC トス. 二面 COA, BOA ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ハ其二面角 OA ノ二等分面 P ナリ. 又二面 BOA, BOC ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ハ其二面角 OB ノ二等分面 Q ナリ. 故ニ二面 P, Q ノ交線 OO' ハ三面 COA, AOB, BOC ヨリ等距離ナリ. 從テ二面 BOC, COA ヨリ等距離ナル點ノ軌跡即チ二面角 OC ノ二等分面 R モ亦タ OO' ヲ過ル.



∴ 所要ノ軌跡ハ各二面角ヲ二等分スル三平面ノ交リナル一直線ナリ.

注意 60 頁ノ 2 題ハ本題ノ換言ナリ.

問 題 及 ビ 解 答

1. 一定平面上ニ於テ其外ノ二定點ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ヲ求メヨ. (高等)

[解] 定平面ヲ Q, 其外ノ二定點ヲ A, B トス. 然ルトキ A, B ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ハ直線 AB ノ垂直二等分面 P ナリ, 故ニ A, B ヨリ等距離ニシテ Q 上ニ在ル點ハ二面 P, Q ノ交線 CD ナリ.

逆ニ, 此交線 CD 上ノ點ハ P 上ニ在ルユエ A, B ヨリ等距離ニシテ亦タ Q 上ニ在リ.

∴ 所要ノ軌跡ハ二定點ノ連結線ノ垂直二等分面ト定平面トノ交線ナリ.

2. 一定圓アリ, 其平面外ノ一定點ト圓周上ノ點トヲ結ブ直線ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ. (東工)

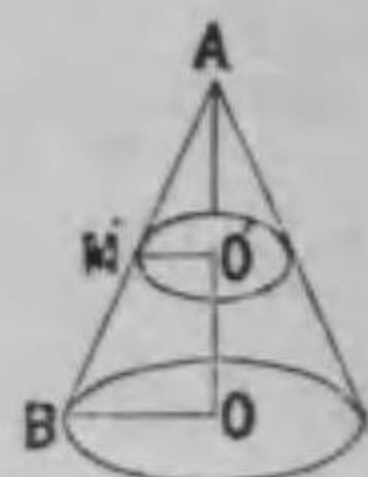
[解] 定圓ノ中心ヲ O トシ, 其平面外ノ定點ヲ A トス. 今 O 圓ノ周上ニ任意ノ點 B ヲ取リ AO, AB ノ中點ヲ夫々 O', M トセバ $\triangle AOB$ ニ於テ $O'M \perp OB$ ナルユエ

ABノ中點MハAOノ中點O'ヲ中心トシ元圓ノ半徑ノ半ヲ半徑トシ元圓ニ平行スル一圓周上ニ在リ。

逆ニ、此圓周上ニM點ヲ取リAMノ延長上ニB點ヲ取
 $\vee MB=AM$ トスレバ $\triangle AOB$ ニ於テ $BO \leq 2MO'$ ナルユエ
 B點ハ元圓ノ周上ニ在リ。

\therefore 所要ノ軌跡ハAOノ中點ヲ中心トシ元圓ノ半徑ノ半ヲ
 半徑トシ元圓ニ平行スル一圓周ナリ。

注意 平面幾何學 104 頁 3 ノ (a) ヲ参考セヨ。

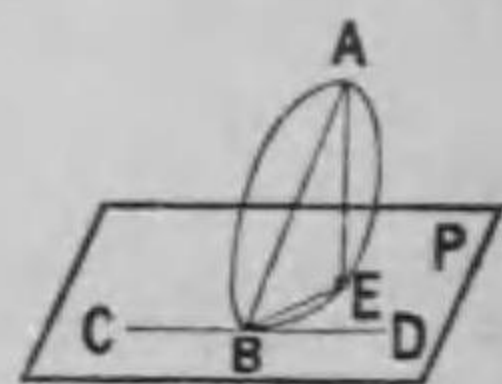


3. 一定直線ヲ含ム平面上へ其外ノ一定點ヨリ引ケル垂線ノ足ノ軌跡ヲ求メヨ。

[解] 定直線ヲCDトシ、其外ノ定點ヲAトス。然ルトキAヨリCDニ垂線ABヲ引キ、CDヲ含ム任意ノ平面Pへ垂線AEヲ引ケバ三垂線定理ニ依テ $EB \perp CD$ 。從テ $CD \perp$ 面 AEB 。故ニE點ハAヨリCDヘノ垂線ABヲ含ムCDヘノ垂直面上ニ於テABヲ直徑トスル一圓ノ周上ニ在リ。

逆ニ、此圓周上ニE點ヲ取リBEヲ結ベバ \widehat{BEA} ハ \widehat{R} 即チ $AE \perp BE$ 。又面 $AEB \perp CD$ ナルユエ $AE \perp CD$ 。從テAEハBE、CDヲ含ム平面ニ垂直ナリ。

\therefore 所要ノ軌跡ハAヨリCDヘノ垂線ABヲ含ム平面即チCDヘノ垂直平面上ニ於テABヲ直徑トスル一圓周ナリ。

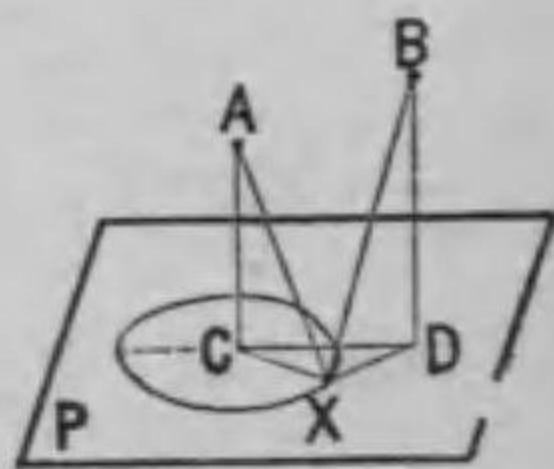


4. 一定平面外ノ二定點ヨリ其面上ノ一點ニ引ケル二直線ガ其面ト等角ヲ爲スベキ其點ノ軌跡ヲ求メヨ。

(東工)

[解] 定平面ヲP、其外ノ二定點ヲA、Bトス。然ルトキ軌跡上ニX點ヲ取リAX、BXノP面上ニ於ケル正射影ヲCX、DXトセバ $\triangle ACX$ ト $\triangle BXD$ トハ $\widehat{AXC} = \widehat{BXD}$ 及 $\widehat{C} = \widehat{R} = \widehat{D}$ ナルユエ相似ニシテ $XC : XD = AC : BD =$ 一定ナリ。

故ニX點ハCDヲ $AC : BD$ ニ内分及ビ外分ス



ル點ノ連結線ヲ直徑トシテP面上ニ畫ケル一圓ノ周上ニ在リ。

逆ニ、此圓周上ニX點ヲ取レバ $\triangle AXC$ ト $\triangle BXD$ トハ $\widehat{C} = \widehat{R} = \widehat{D}$ 且ツ又 $AC : CX = BD : XD$ ナルユエ相似ニシテ $\widehat{AXC} = \widehat{BXD}$ ナリ。

\therefore 所要ノ軌跡ハ二定點ヨリ其面へ引ケル垂線ノ足ノ距離ヲ二垂線ノ長サノ比ニ内分及ビ外分スル點ノ連結線ヲ直徑トシテ其面上ニ畫ケル一圓ノ周ナリ。

注意 平面幾何學 265 頁 6 ノ (a) ヲ参考セヨ。

5. 空間ノ二定直線ノ一ツニ平行シ他ノ一ツニ交ル直線ノ軌跡ヲ求メヨ。

[略解] 所要ノ軌跡ハ一直線ヲ含ム他ノ直線ニ平行ナル一平面ナリ。

6. 空間ノ二定直線上ニ夫々各端ヲ有スル直線ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ。

[解] 此二直線AB、CDノ共通垂線ACノ中點ヲEトシ、又AD、BCノ中點ヲ夫々F、Gトセバ $\triangle ACD$ 、 $\triangle ABC$ ニ於テ $EF \parallel CD$ 、 $EG \parallel AB$ ナルユエEF、EGヲ含ム平面PハAB、CDニ平行ス。

故ニAB、CD上ニ各端ヲ有スル直線ノ中點ハAB、CDノ共通垂線ノ中點Eヲ過リAB、CDニ平行スル一平面上ニ在リ。

逆ニ、AB、CD上ノ任意ノ點B、Dノ連結線トP面トノ交點ヲHトシ、AB、CDヲ含ムPニ平行ナル平面Q、Rヲ作

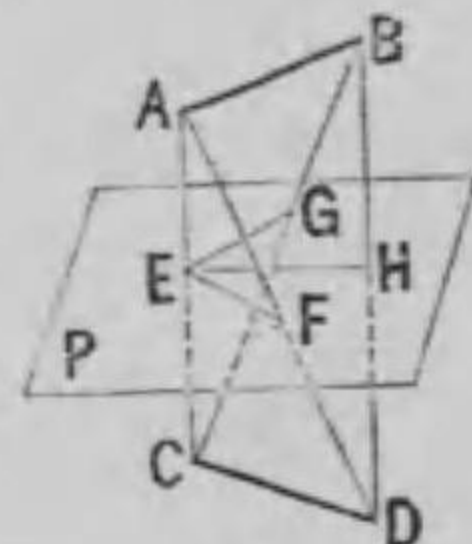
レバ $Q \parallel P \parallel R$ ナルユエ $BH : HD = AE : EC = 1$ 、故ニHハBDノ中點ナリ。

\therefore 所要ノ軌跡ハ二定直線ノ共通垂線ノ中點ヲ過リ其各々ニ平行スル一平面ナリ。

注意 此直線ヲ $m : n$ ニ分ツ點ノ軌跡ハACヲEニ於テ $AE : EC = m : n$ ニ取レバ可ナリ。

7. 一平面上ニ在ラザル平行三直線ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ヲ求メヨ。

[略解] 此三線ヲ $AB \parallel CD \parallel EF$ トセバ、所要ノ軌跡ハAB、CDノ距離ノ垂直二等分面トAB、EFノ距離ノ垂直二等分面トノ交線ナリ。



8. 三角形ノ各邊ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ヲ求メヨ.

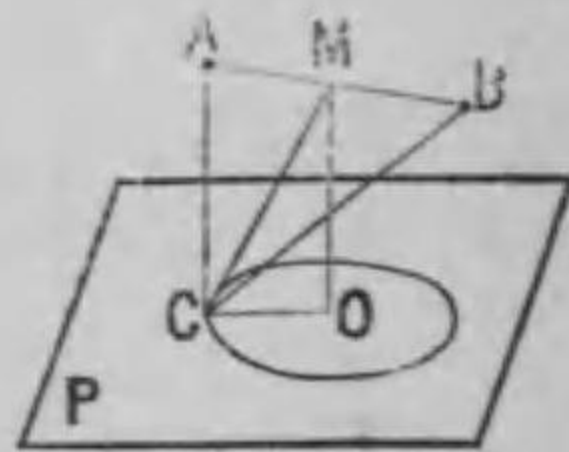
[略解] 所要ノ軌跡ハ三角形ノ内心ヲ過リ其面ニ垂直ナル直線ナリ [36 頁ノ系ノ解ニ
 倣フ]

9. 二定點及ビ二定平面ヨリ夫々等距離ナル點ノ軌跡ヲ求メヨ. (名工)

[略解] 所要ノ軌跡ハ二定點ノ連結線ノ垂直二等分面ト二定平面ノ二面角ノ二等分面或
 ハ二定平面ノ距離ノ垂直二等分面トノ交リナリ.

10. 定平面 P 外ノ二定點 A, B ヨリ P 面上ノ一點ニ至ル距離ノ
 平方ノ和ヲ a^2 ニ等シカラシムベキ其點ノ軌跡ヲ求メヨ. (名工)

[解] 今軌跡上ノ一點ヲ C トシ, AB ノ中點ヲ M トセバ
 $2(CM^2 + BM^2) = CA^2 + CB^2 = a^2$ ナルユエ $CM^2 = (\frac{1}{2}a^2 - BM^2)$ 即チ定長ナリ. 又 M 點ト P 面トノ距離 MO
 モ定長ナルヲ以テ $OC^2 = (CM^2 - MO^2)$ ハ定長ナリ.
 故ニ C 點ハ O ヲ中心トシ OC ヲ半徑トスル一圓ノ周
 上ニ在リ.



逆ニ, 此圓周上ノ點ハ要件ニ適スルコトヲ證明シ得ベシ.

∴ 所要ノ軌跡ハ二定點ノ連結線 AB ノ中點 M ヨリ P 面ヘノ垂線ノ足 O ヲ中心ト
 シ定長 $\sqrt{(\frac{1}{2}a^2 - BM^2 - MO^2)}$ ヲ直徑トシテ P 面上ニ畫ケル一圓ノ周ナリ.

11. 二定點 A, B ヨリ一點ニ至ル距離上ノ平方ノ差ヲ a^2 ニ等シ
 カラシムベキ其點ノ軌跡ヲ求メヨ.

[略解] 所要ノ軌跡ハ直線 AB 上ニ於テ $AC^2 - CB^2 = a^2$ ナルベキ, C 點ヲ取り, 此點ヲ
 過リ AB ニ垂直ナル一平面ナリ.

第七 章

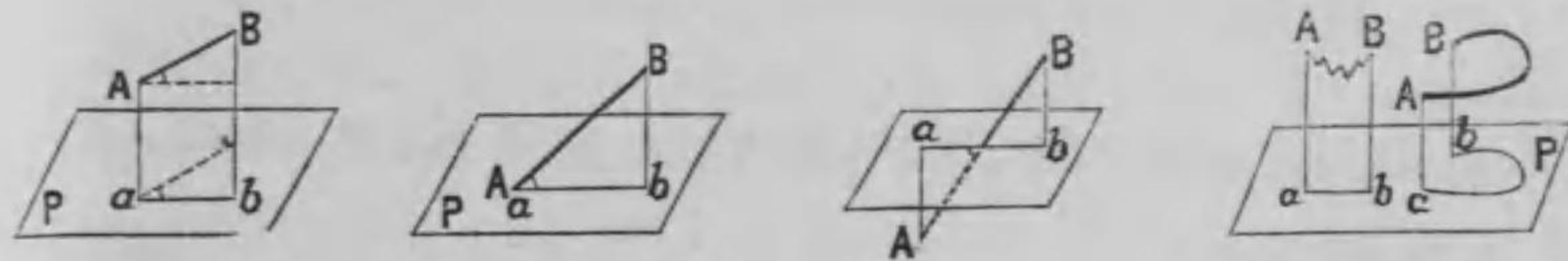
正 射 影

17. 正射影 ノ定義ハ平面幾何學ニ準ズ, 即チ

定義 (1) 一點ノ一平面ニ於ケル正射影 トハ其點ヨリ其面ニ下セ
 ル垂線ノ足ヲ云フ.

定義 (2) 一線ノ一平面ニ於ケル正射影 トハ其線上ノ點ノ平面ニ
 於ケル正射影ノ軌跡ヲ云フ.

例ヘバ次圖ノ如ク, 線 AB ノ面 P ニ於ケル正射影ハ線 ab 或ハ Ab ナリ.



注意 直線ガ平面ニ於ケル正射影ハ其直線ガ其面ニ垂線ナルトキハ極小ニシテ, 平行ナ
 ルトキハ極大ナルコトヲ知り得ベシ.

定義 (3) 一直線ガ一平面ト爲ス角 トハ其直線ノ面上ニ於ケル正
 射影ト直線トノ爲ス銳角ヲ云フ.

上圖ヲ熟視スベシ.

18. 重要定理

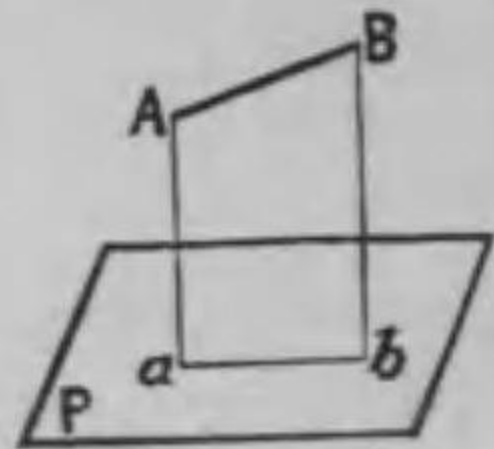
定理 (1) 一直線ノ一平面ニ於ケル正射影ハ一直線ナリ.

[證明] 直線 AB 上ノ二點 A, B ノ P 面上ニ於ケル正射影ヲ a, b トス.

今 AB ガ P 面ニ含マレトキハ, 其正射影ハ AB 自身ニシテ一直線ナルコト明カ
 ナリ.

又 AB ガ P 面ニ垂直ナルトキハ, 其正射影ハ一點トナルコト明カナリ.

其他ノ場合ニ付テ、 Aa, Bb ハ共ニ P 面ニ垂直ナルヲ以テ平行ス、此二線ノ平面 Q ト P トノ交線ハ一直線 ab ナリ。サテ AB 上ノ任意ノ點 C ノ正射影ヲ c トセバ Cc ハ Q 面上ニ在リテ又 P 面上ニ在ルユエ其交線 ab 上ニ在リ。次ニ交線 ab 上ノ任意ノ點 e ヨリ P 面ニ垂線 cC ナ引ケバ cC ハ P 面ニ垂直ナル Q 面上ニ在リテ aA ニ平行スルユエ AB ト交ル、其交點ヲ C トセバ c ハ C ノ P 面ヘノ正射影ナリ。



∴ 直線 AB ノ P 面上ニ於ケル正射影ハ AB 上ノ二點 A, B ノ P 面上ニ於ケル正射影 a, b ナ連結セル直線 ab ナリ。

系. 一平面ニ平行ナル直線ノ其面ニ於ケル正射影ハ、元ノ直線ニ平行ナリ。

[證明] AB/P 面ナルユエ AB, ab ハ交ラズ且ツ $AabB$ ハ一平面ナレバナリ。

定理 (2) (i) 斜線ガ其正射影ト爲ス銳角ハ、平面上他ノ直線ト爲ス銳角ヨリモ小ナリ。 (海兵)

(ii) 平面上正射影ト相等シキ銳角ヲ爲ス直線ガ斜線ト爲ス銳角ハ相等シ。

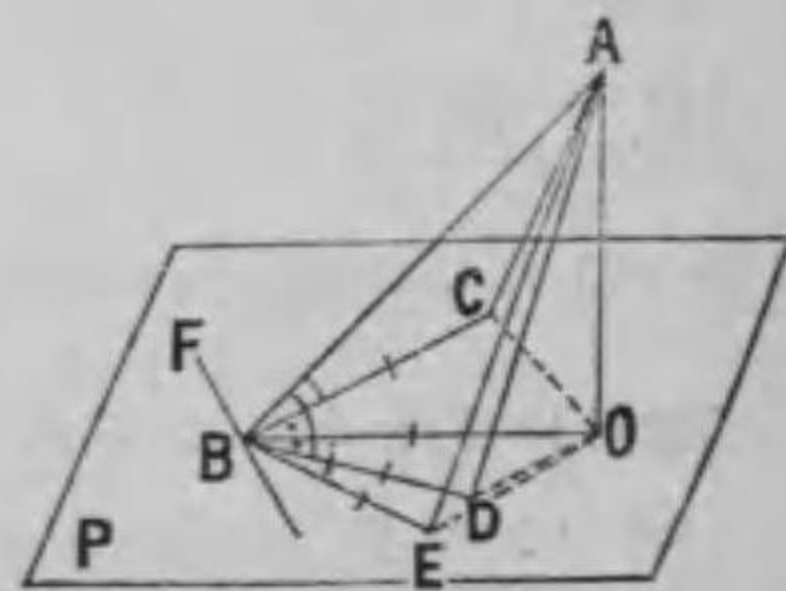
(iii) 平面上正射影ト大ナル銳角ヲ爲ス直線ガ斜線ト爲ス銳角ハ他ヨリモ大ナリ。

(iv) 斜線ハ平面上其足ヲ過リ正射影ニ垂線ナル直線ニ垂線ナリ。

[證明] 斜線 AB ノ P 面ヘノ正射影ヲ BO トス。

(i) P 面上ニ任意ノ直線 BC ナ引キ BO ニ等シクセバ、 AB ハ共通、斜線 $AC > AO$ ナルユエ $\triangle ABC, \triangle ABO$ ニ於テ $\hat{A}BC > \hat{A}BO$ 。

(ii) $\hat{O}BC = \hat{O}BD$ ナルトキ $BC = BD$ トセバ $OC = OD$, 從テ $AC = AD$, ∴ $\triangle ABC \equiv \triangle ABD, \hat{A}BC = \hat{A}BD$ 。



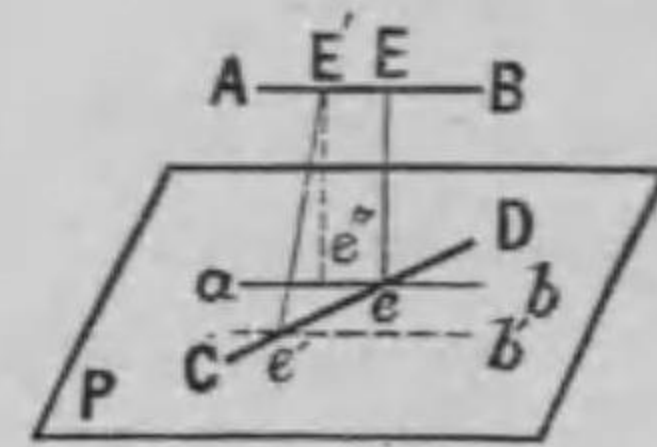
(iii) $\hat{O}BE > \hat{O}BD$ ナルトキ $BD = BE$ トセバ $OE > OD$, 從テ $AE > AD$, 故ニ $\triangle ABE, \triangle ABD$ ニ於テ $\hat{A}BE > \hat{A}BD$ 。

(iv) $AO \perp P, OB \perp FB$ ナルトキハ三垂線定理ニ依テ $AB \perp FB$ 。

定理 (3) 空間ノ二直線ヘノ共通垂線ハ只一ツアリ、而シテ此垂線ハ此二線間ノ最短距離ナリ。

[證明] 空間ノ二直線ヲ AB, CD トス。 CD ナ含ミ

AB ニ平行ナル平面ハ只一ツナリ、之ヲ P トシ其上ニ AB ノ正射影ヲ ab トセバ、 ab ハ AB ニ平行ナルユエ CD ニ平行ナラズ、故ニ ab, CD ノ交點ヲ e トセバ e ハ AB 上ノ或點ノ正射影ナリ。其點ヲ



E トセバ Ee ハ P 面ニ垂線ナルユエ CD 及ビ ab ニ垂線ナリ、從テ ab ニ平行ナル AB ニモ垂線ナリ、即チ Ee ハ AB, CD ノ双方ニ垂線ナリ。

次ニ Ee ノ他ニ AB, CD ヘノ共通垂線 $E'e'$ アリトセバ、 $E'e'$ ハ AB ト e' ナ含ム平面ト P トノ交線 $e'b'$ ニ垂線ニシテ又 CD ニ垂線ナルヲ以テ P 面ニ垂線ナリ。故ニ e' ハ E' ノ正射影ニシテ亦タ ab 上ニ在リ。

故ニ e' ハ CD, ab ノ双方ノ上ニ在ルヲ以テ其交點 e ニ一致シ $e'E'$ ハ eE ニ一致セザルベカラズ、即チ AB, CD ヘノ共通垂線ハ Ee ノ只一ツノミナリ。

次ニ $E'e'' \perp ab$ トセバ $E'e'' \leq Ee$ 且ツ $E'e'' \perp P$ ナルヲ以テ $E'e' > E'e'' = Ee$, 即チ Ee ハ AB, CD 間ノ最短距離ナリ。

系. 此距離 Ee ハ AB, CD ノ一ツ宛ヲ含ム平行二平面ノ距離ニ等シ。

問題 及 ビ 解答

1. 直線 AB ノ平面 P ノ上ニ投ジタル正射影ト直角ヲ爲シ且ツ其平面 P ノ中ニ在ル任意ノ直線ハ直線 AB ト直角ヲ爲ス。 (東師)

[略解] 三垂線定理ノ換言ニ過ギズ。

2. (a) 平行二直線が一平面ト爲ス角ハ相等シ.

(b) 相等シク且ツ平行ナル二直線が一平面上ニ投ズル正射影ハ、亦タ相等シク且ツ平行ナリ. (海機)

(c) 一ツノ圓ト之ニ平行セル他ノ平面上ニ於ケル其正射影トハ全ク相等シ. (高等)

[證明] (a) 略解 AB//CD ノ P 面上ニ於ケル正射影 ab, cd ヲ取リ $\triangle Eab \equiv \triangle Fed$ ヲ證スレバ可ナリ.

(b) AB \cong CD ガ P 面ニ於ケル正射影ヲ ab, cd トス. 然ルトキハ AB//CD ニシテ P 面ヘノ垂線 Aa//Cc ナルユエ 面BAa//面DCc.

\therefore 此平行二面ト P 面トノ交線 ab//cd.

次ニ面 BAa, DCc ニ於テ aE//AB, cF//CD トセ

バ AE 及ビ CF ハ平行四邊形ニシテ aE=AB=CD=cF. 又 AB//CD ガ P 面ト爲ス $\hat{Eab} = \hat{Fed}$. 故ニ斜邊ト一銳角ヲ等シキ 直 $\triangle Eab \equiv \triangle Fed$. $\therefore ab=cd$.

若シ面 BAa, DCc ガ重ナルトキハ ab, cd ハ重ナルモ亦タ相等シキコト明カナリ.

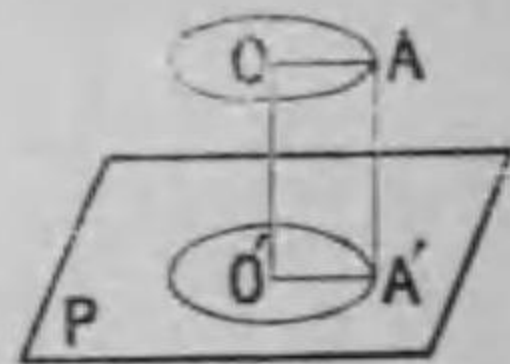
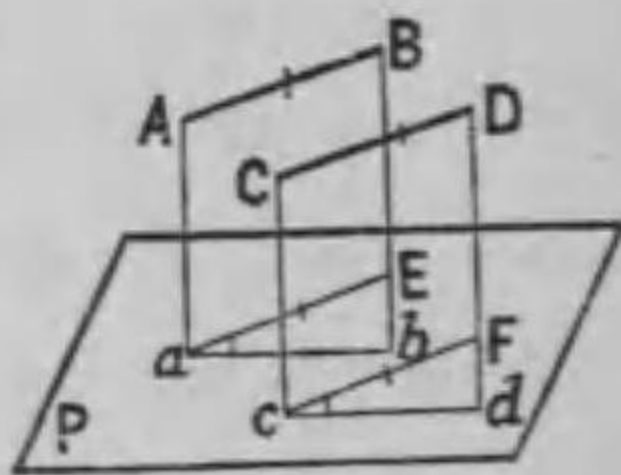
(c) 圓心ヲ O, 半徑ヲ r トシ, 又平面 P//圓 O トス. 然ルトキ O 及ビ圓周上ノ點 A ノ P 面ニ於ケル正射影ヲ O', A' トセバ P 面ニ垂線ナル OO'//AA', 從テ此二線ノ平面ト平行二面即チ O 圓及ビ P トノ交線ナル OA//O'A'.

依テ OAA'O' ハ平行四邊形ニシテ OA=O'A'. 故ニ A 點ノ P 面上ニ於ケル正射影ハ P 面上ニ於テ O' ヲ中心トシ O'A' 即チ元圓ノ半徑ト等半徑ノ圓周上ニ在リ.

逆ニ, 此圓周上ノ點ハ O 圓周上ノ之ニ對應スル點ノ正射影ナルコトヲ證シ得 [41 頁定理 (1) ニ依リ].

\therefore 此圓 O ノ P 面上ニ於ケル正射影ハ亦タ圓 O' ニシテ元圓ト全ク相等シ.

3. 數多ノ點ヨリ一平面ニ下セル正射影ガ皆ナ一直線上ニ在レバ, 此諸點ハ一ツノ平面上ニ在リ.

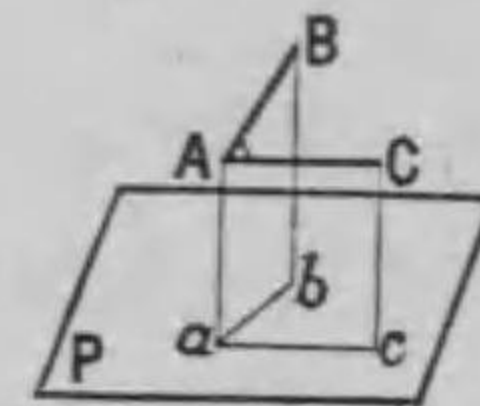


[證明] A, B, C, 等ノ諸點ヨリ平面 P ニ下セル正射影 a, b, c, 等ガ一直線上ニ在レバ Aa, Bb, Cc, 等ハ何レモ P 面ニ垂直ナルユエ P 面上ノ一直線上ノ點 a, b, c, 等ヲ過リテ P 面ニ垂直ナル一ツノ平面上ニアリ.

4. 直角ノ一邊ガ一平面ニ平行スルトキハ, 其角ノ其面上ニ於ケル正射影モ亦タ直角ナリ. (東工)

[證明] 直角 BAC ノ一邊 AC//P 面, 又 \hat{BAC} ノ P 面上ニ於ケル正射影ヲ bac トス. 然ルトキハ CA ハ AB, Aa ニ垂線ナルユエ 面BAab ニ垂線ナリ.

而シテ ca//CA ナルユエ ca モ面 BAab ニ垂線ナリ, 從テ ca ハ其面上ノ直線 ba ニ垂線ナリ即チ $\hat{bac} = \hat{R}$.



5. 一直線ガ一平面ニ於ケル正射影ガ元ノ長サノ半分ナルトキハ, 其直線ト平面トノ爲ス角ハ如何.

[證明] 平面 P ニ於ケル直線 AB ノ正射影ヲ ab トシ, 且ツ $ab = \frac{1}{2} AB$ トス. 然

ルトキ Aa ニ垂線 BC ヲ引ケバ $BC = ab = \frac{1}{2} AB$.

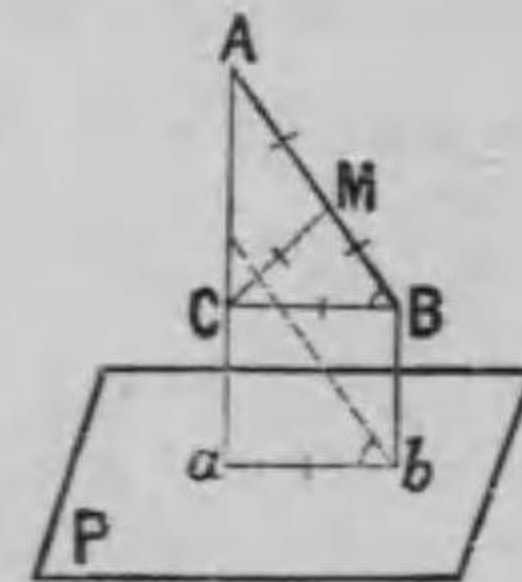
又 AB ノ中點ヲ M トセバ M ハ三點 A, B, C ヨリ

等距離ナリ. 故ニ MBC ハ正三角形ニシテ

$\hat{ABC} = \frac{2}{3} \hat{R} = 60^\circ$ ナリ. 而シテ此角ハ AB ト P ト

ノ爲ス角ニ等シキコト明カナリ.

\therefore 所要ノ角ハ $\frac{2}{3} \hat{R} = 60^\circ$ ナリ.

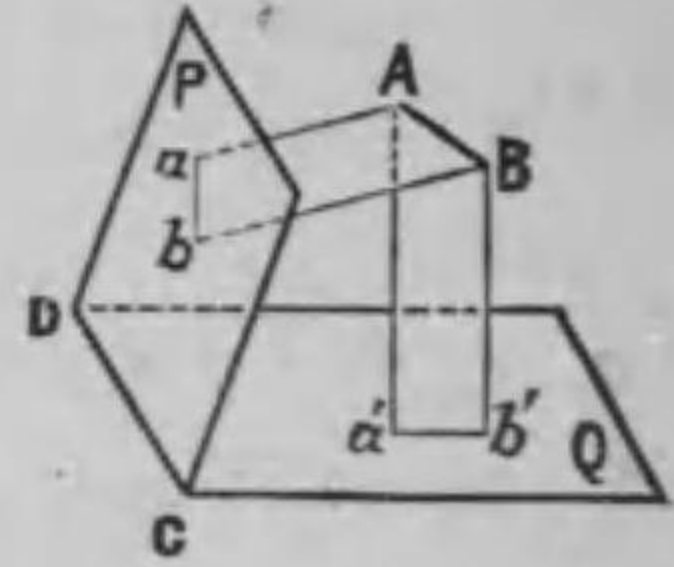


6. 相交ノ二平面ノ一ツニ垂線ナル直線ノ他ノ面上ニ於ケル正射影ハ, 其二面ノ交線ニ垂線ナリ. (三高)

注意 本題ハ 24 頁ノ 5 題ト同題ナリ.

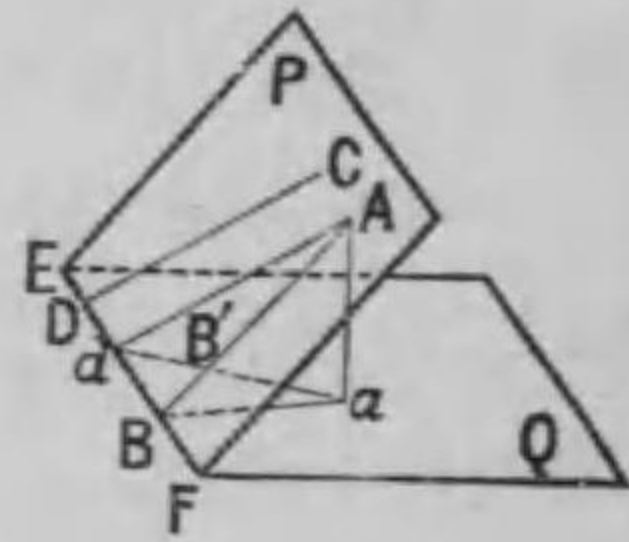
7. 一線ノ相交ル二平面上ニ於ケル正射影ガ何レモ直線ニシテ且ツ一平面上ニ在ラザルトキハ, 元ノ線ハ一直線ナリ.

[證明] 面 P, Q ノ交線ヲ CD トシ, 此二面上ニ於ケル線 AB ノ正射影ヲ夫々直線 ab, a'b' トス. 然ルトキハ AB 上ノ各點ハ其正射影 ab, a'b' 上ニ在リ. 同様に AB 上ノ各點ハ平面 a'b'B 上ニ在リ. 而シテ ab ト a'b' トハ一平面上ニ在ラザルユエ此二平面ハ一致スルコトナクシテ必ズ相交ル. 故ニ AB ハ其二面ノ交線ニ外ナラズ, 即チ AB ハ一直線ナリ.



8. 相交ル二平面ノ一ツノ上ニ在リテ其交線ヘノ垂線ガ他ノ面ト爲ス角ハ, 交線ヘノ斜線ガ他ノ面ト爲ス角ヨリモ大ナリ.

[證明] 二平面 P, Q ノ交線ヲ EF トシ, P 上ニ於テ EF へノ垂線ヲ AB, 斜線ヲ CD トス. 然ルトキ Ad//CD トセバ 斜線 Ad > AB. 而シテ Aa ⊥ Q トセバ ad > aB, 依テ ad 上ニ於テ aB' = aB トセバ △AB'a ≡ △ABa ニシテ AB'a = ABa. 又 △AB'd ニ於テ外角 AB'a > AdB'. ∴ ABa = Ada. 然ルニ Aa ⊥ Q ナルユエ da, Ba ハ夫々 Ad, AB ノ正射影ナリ. 故ニ AB 及ビ Ad 即チ CD ガ Q ト爲ス角ニ於テ ABa > Ada.



第 八 章 作 圖 題

19. 作圖題ニ就テ ハ已ニ緒論ニ述ベタルガ如ク, 平面幾何學ノ第一編第三章ヲ必ズ再讀スルヲ要ス.

平面幾何學ニ於テハ作圖題ハ定規トこゑばすトヲ用ヒテ實際ニ紙面上ニ其圖形ヲ畫キタリ.

然レドモ立體幾何學ニ於テ論ズル圖形ハ一般ニ空間内ニ在ルヲ以テ或要件ニ適スル圖形ヲ紙面上ニ實際ニ畫クコトハ不可能ナリ.

故ニ立體幾何學ニ於ケル作圖ノ命題ハ, 次條ニ掲グル事項及ビ位置ノ決定セル平面内ニ於テハ平面幾何學ノ作圖題ハ常ニ解キ得ルモノトス.

20. 作圖ノ公法 トシテ次ノ諸條項ヲ許容ス.

(1) 一直線及ビ其線外ノ一點ヲ含ム平面ヲ畫クコト.

從テ 一直線上ニ在ラザル三點ヲ含ム平面, 相交ル二直線ヲ含ム平面, 平行二直線ヲ含ム平面, ヲ畫クコト.

(2) 一平面ト或直線又ハ或平面トノ交リヲ定ムルコト.

從テ 三ツノ角ヲ平面角トスル三面角ヲ畫クコト.

(3) 任意ノ點ヲ中心トシ任意ノ半徑ヲ以テ球面ヲ畫クコト.

(4) 任意ノ高サト任意ノ半徑トヲ以テ直圓錐ヲ畫クコト.

(5) 任意ノ高サト任意ノ半徑トヲ以テ直圓錐ヲ畫クコト.

附言 上ニ掲ゲタル五箇ノ作圖ノ公法ノ中 (3) 乃至 (5) ニ就テハ異議ヲ唱フル學者尠ナカラザルガ故ニ通例ハ (1), (2) ノミ採用ス.

21. 基本ノ作圖題

作圖題 (1) 次ノ條件ニ適スルモノヲ作レ,

- (i) 一與點ヲ過リ一與平面ニ平行スル平面,
- (ii) 一與平面ニ平行ナル一與直線ヲ含ミ其面ニ平行スル平面. [(i)ハ7頁系(4), (ii)ハ6頁定理(1)]
- (iii) 空間ノ二與直線ノ一ツヲ含ミ他ニ平行スル平面. 又其一ツ宛ヲ含ミ互ニ平行スル二平面. [8頁系(2)]
- (iv) 一與點ヲ過リ, 其點ヲ過ラザル空間ノ二與直線ニ平行スル平面. [8頁系(3)]
- (v) 空間ノ二與直線ヨリ等距離ナル平面. [之レ共通垂線ノ垂直二等分面ナリ]

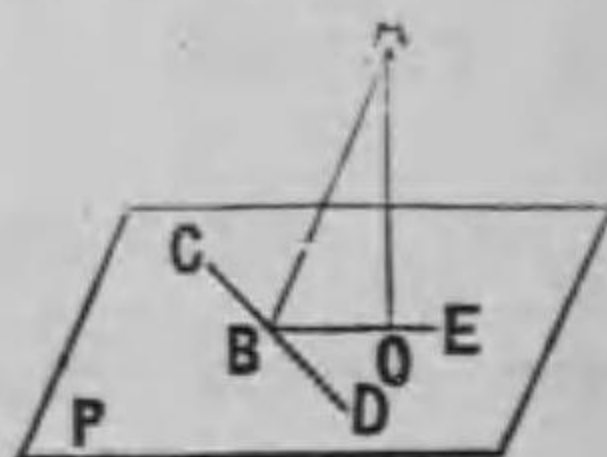
作圖題 (2) 一與點ヨリ一與平面ニ垂線ヲ引ケ.

第一. 與點 A ガ與平面 P 外ニ在ルトキ. (海兵)

〔解析〕 先ヅ解キ得タリ, 即チ $AO \perp P$ 面トス. 然ルトキハ P 面上ノ任意ノ直線 CD ニ垂線 OB ナリケバ三垂線定理ニ依テ $AB \perp CD$ トナル. 依テ次ノ作圖ヲ得.

〔作圖〕 先ヅ P 面上ニ任意ノ直線 CD ナリキ,

而シテ面 ACD 上ニ於テ $AB \perp CD$ トシ, 又 P 面上ニ於テ $BE \perp CD$ トシ, 次ニ面 ABE 上ニ於テ $AO \perp BE$ トバセ $AO \perp P$ 面ナリ.



〔證明〕 作圖ニ依リ CD ハ BA, BE ノ雙方ニ垂線ナルユエ $CD \perp$ 面 ABE, 従テ $CD \perp AO$. $\therefore AO \perp P$ 面. [三垂線定理ノ(ii)]

第二. 與點 O ガ與平面 P 上ニ在ルトキ.

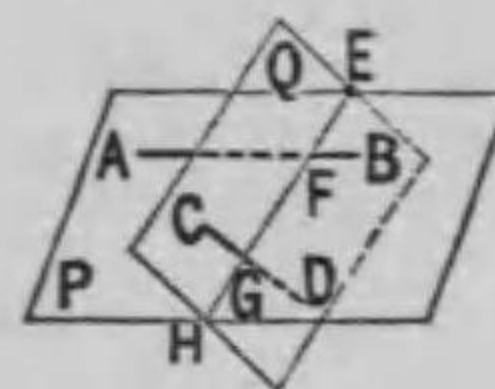
〔作圖〕 與平面 P 外ノ任意ノ點 A' ヨリ P 面ニ垂線 A'O' ナリキ [∵ 第一], 而シテ P 面上ノ與點 O ト A'O' トノ平面上ニ於テ O'A' ニ平行線 OA ナリケバ, OA ハ所要ノ垂線ナリ.

〔證明〕 $O'A' \parallel OA, O'A' \perp P$ 面. $\therefore OA \perp P$ 面.

- 作圖題 (3) (i) 一與點ヲ過リ與平行二直線ニ平行スル直線ヲ引ケ.
- (ii) 一與點ヲ過リ相交ル與二平面ニ平行スル直線ヲ引ケ.

作圖題 (4) 一與點ヲ過リ, 其點ヲ過ラザル空間ノ二與直線ニ相交ル直線ヲ引ケ. (高等, 東師)

〔解析〕 先ヅ解キ得タリ, 即チ與點 E ナ過ル直線ト與直線 AB, CD トノ交點ヲ夫々 F, G トス. 然ルトキハ直線 EFG ハ E ナ過リ AB ニ交ルユエ E ト AB トノ平面 P 上ニ在リ. 同様ニ直線 EFG ハ E ト CD トノ平面 Q 上ニ在リ.



依テ次ノ作圖ヲ得.

〔作圖〕 E, AB 及ビ E, CD ニテ決定スル二平面 P, Q ノ交線 EH ナリケバ可ナリ.

〔證明〕 解析ニ依リテ明カナリ.

〔吟味〕 本題ガ成立スル爲メニ必要ニシテ且ツ充分ナル要件ハ AB, CD ガ何レモ P, Q ノ交線 EH ニ平行セザルコトナリ. 而シテ上ノ如ク只一ツノ解アリ. 何トナレバ P 及ビ Q 上ニ於テ EF ハ AB 及ビ CD ト交リ且ツ E ナ過ル二面ノ交線ハ只一ツナルガ故ナリ.

其他ノ場合ニハ解無シ.

作圖題 (5) 空間ノ二與直線ニ共通垂線ヲ引ケ. (高等, 臨教, 北農)

〔作圖〕 二與直線ヲ AB, CD トス. CD ナ含ミ AB ニ平行ナル平面 P ナ作り, P 上ニ AB' ノ正射影 ab ナリキ, 之ト CD トノ交點 e ヨリ AB ニ垂線 eE ナリケバ之レ所要ノ共通垂線ナリ.

〔證明〕 43 頁定理 (3) ニ在リ.

作圖題 (6) (i) 一與點ヲ過リ一與直線ニ垂直ナル平面ヲ作レ.

(ii) 一與直線ヲ含ミ一與平面ニ垂直ナル平面ヲ作レ.

〔(i)ハ15頁系(1), (ii)ハ21頁系(1)〕

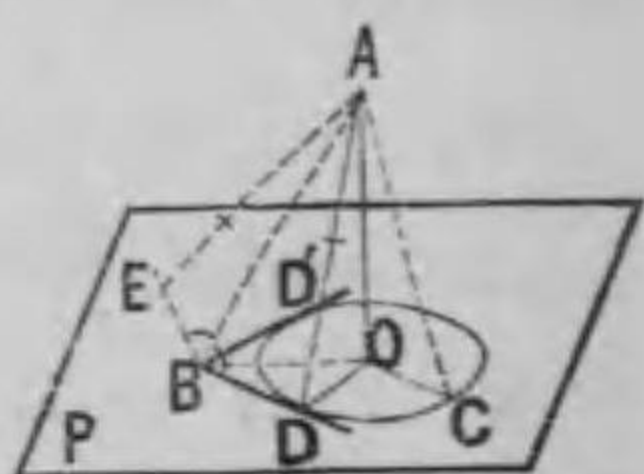
作圖題 (7) (i) 一與平面上ノ一與點ヨリ其面上ニ直線ヲ引キ, 其面外ノ一與點ヨリノ距離ヲ與長ニ等シカラシメヨ.

(ii) 一與平面ヘノ一與斜線ノ足ヲ過リ其面上ニ直線ヲ引キ斜線ト爲ス角ヲ與角ニ等シカラシメヨ.

〔解〕 (i) (解析) 先ヅ解キ得タリ, 卽チ P 面上ニ其上ノ點 B ヨリ引ケル直線 BD ニ P 面外ノ點 A ヨリノ垂線 AD ヲ與長 l ニ等シトス.

然ルトキ $AO \perp P$ トセバ三垂線定理ニ依テ $OD \perp BD$.

依テ AD ハ與長ニシテ AO ハ定長ナルユエ OD ハ定長トナル. 故ニ BD ハ O 圓ヘノ切線ナリ. 仍テ次ノ作圖ヲ得.



〔作圖〕 P 面上ニ其外ノ與點 A ヨリ與長 l ニ等シキ斜線ノ足ノ軌跡 O 圓ヲ畫キ, 之ニ切線 BD, BD' ヲ引ケバ可ナリ.

〔證明〕 D 點ハ A 點ヨリ P 面ヘノ l ニ等シキ斜線ノ足ノ軌跡上ニ在ルユエ $AD = l$

次ニ BD ハ O 圓ヘノ切線ナルユエ $OD \perp BD$ 且ツ $AO \perp P$ ナルユエ三垂線定理ニ依テ $AD \perp BD$. 同様ニ $AD' = l$ 且ツ $AD' \perp BD$ ナルコトヲ證シ得.

〔吟味〕 本題ガ成立スル爲メニ必要ニシテ且ツ充分ナル要件ハ $l \geq AO$ ニシテ且ツ B 點ガ O 圓ノ内ニ在ラザルコトナリ.

(ii) 〔作圖〕 與斜線 AB ナ含ム任意ノ平面上ニ於テ \widehat{ABE} ヲ與角 α ニ等シク且ツ $AE \perp BE$ トシ, 次ニ與平面 P 上ニ定長 AE ニ等シキ斜線ノ足ノ軌跡 O 圓ヲ畫キ, 之ニ B ヨリ切線 BD 及ビ BD' ヲ引ケバ此二切線ハ所要ノモノナリ.

〔證明〕 三垂線定理ニ依テ $AD \perp BD$, 故ニ斜邊ト一邊トガ相等シキ直 $\triangle ADB \equiv \triangle ABE$,
 $\therefore \widehat{ABD} = \widehat{ABE} = \alpha$. 同様ニ $\widehat{ABD'} = \widehat{ABE}$ ヲ證シ得.

〔吟味〕 本題ハ α ガ斜線 AB ト P 面トノ爲ス角ヨリモ小ナラザレバ常ニ成立ス

作圖題 (8) 與二面角ヲ二等分セヨ.

〔作圖〕 二面 PABQ ノ稜 AB 上ノ點 D ヨリ各面上ニ稜ニ垂線 DE, DF ヲ引キ, 次ニ \widehat{EDF} ノ二等分線 DC' ト AB トヲ含ム平面ヲ作レバ, 之レ所要ノモノナリ.

〔證明〕 22頁 定理(4) ニ在リ.

作圖題 (9) 一與斜線ヲ含ミ一與平面ト與角ニ等シキ角ヲ爲ス平面ヲ作レ.

〔作圖〕 前頁ノ圖ヲ用フ. 與平面 P ヘノ斜線ヲ AB, 與角ヲ α トス. 然ルトキ $AO \perp P$, P 上ニ直線 OC ヲ引キ面 COA 上ニ於テ $\widehat{CAO} = (\widehat{R} - \alpha)$ ニ作リ, P 面上ニ於テ O ナ中心トシ OC ナ半径トスル圓ニ切線 BD ヲ引キ切點ヲ D トセバ AB, AD ナ含ム平面ハ所要ノモノナリ.

若シ $\alpha > \widehat{R}$ ナルトキハ $\widehat{CAO} = (\alpha - \widehat{R})$ トスルノミ其他ハ上ト同様ナリ.

〔證明〕 作圖ニ依テ $AO \perp P$, $OD \perp BD$ ナルユエ三垂線定理ニ依リ $AD \perp BD$, 從テ \widehat{ADO} ハ ABD 面ト P 面トノ爲ス二面角ノ平面角ナリ. 又作圖ニ依テ明カニ $\widehat{ADO} = \widehat{ACO} = \widehat{R} - \widehat{CAO} = \widehat{R} - (\widehat{R} - \alpha) = \alpha$ 卽チ $\widehat{ADO} = \alpha$.

〔吟味〕 $\alpha < \widehat{R}$ 及ビ $\alpha > \widehat{R}$ ナルトキハ各々二ツノ解アリ. 又 $\alpha = \widehat{R}$ ナルトキハ只一ツノ解アリ.

問 題 及 ビ 解 答

1. (a) 一與直線上ニ其外ノ二與點ヨリ等距離ナル點ヲ求メヨ.

(b) 一與直線ヲ含ミ其外ノ二與點ヨリ等距離ナル平面ヲ作レ.

〔略解〕 (a) 二與點 A, B ノ連結線ノ垂直二等分面 P ト與直線 CD トノ交點 E ハ所要ノ點ナリ. 若シ P ト CD トガ交ラザレバ解無シ.

(b) 與直線 CD ナ含ミ AB ニ平行スル平面及ビ與直線 CD ナ含ミ AB ノ中點ヲ過ル平面ハ何レモ所要ノモノナリ.

若シ此平面ガ AB ナ含ムトキハ, 平面ノ場合トナルモ合理ナリ.

2. (a) 一與平面上ニ其外ノ一直線上ニ在ラザル三與點ヨリ等距離ナル點ヲ求メヨ.

(b) 一直線上ニ在ラザル三與點ヨリノ距離ガ與長ニ等シキ點ヲ求メヨ.

[解] (a) 三與點 A, B, C ニテ成レル三角形ノ外心 O ヨリ 面 ABC ニ垂直ナル直線 XO

ヲ引ケバ、之ト與平面 P トノ交點 E ハ所要ノ點ナリ.
何トナレバ OX ハ A, B, C ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ナルユエ OX 上ノ E 點ハ A, B, C ヨリ等距離ニシテ且ツ P 面上ニ在ルガ故ナリ.

若シ XO ガ P ト交ラザレバ解無シ.

(b) 三與點 A, B, C ニテ成レル三角形ノ外心 O ヨリ 面 ABC ニ垂直ナル直線 XOX' ヲ引キ、次ニ面 AXX' 上ニ於テ A ヲ中心トシ與長 l ヲ半径トシテ XX' ヲ D, D' ニテ截レバ、此二點ハ所要ノモノナリ.

何トナレバ $\triangle DOA \equiv \triangle DOB \equiv \triangle DOC \equiv \triangle D'OA \equiv \triangle D'OB \equiv \triangle D'OC$ 且ツ $AD = l$ ナレバナリ.

3. 其凡テハ一平面上ニ在ラズシテ何レノ三ツモ一直線上ニ在ラザル四與點ヨリ等距離ナル點ヲ求メヨ.

[略解] 此四與點ヲ A, B, C, D トセバ $\triangle ABC$ ノ外心 O ヨリ 面 ABC ニ垂直ナル直線ト A, D ノ連結直線ノ垂直二等分面 P トノ交點 E ハ所要ノ點ナリ.

若シ XO ガ P ト交ラザレバ解無シ.

4. (a) 一與直線上ニ之ヲ含マザル一與平面ヨリノ距離ガ與長ニ等シキ點ヲ求メヨ.

(b) 一與平面上ノ一直線上ニ在ラザル三與點ヨリ等距離ニシテ且ツ其平面ヨリノ距離ガ與長ニ等シキ點ヲ求メヨ. (臨教)

[略解] (a) 與平面 P 上ノ任意ノ點ヨリ其面ニ垂線 EF ヲ引キ且ツ與長 l ニ等シクシ、F 點ヲ過リ P ニ平行ナル平面 Q ヲ作レバ與直線 AB ト Q 面トノ交點ハ所要ノ點ナリ.

(b) 上ノ如ク Q 面ヲ作り、又三與點 A, B, C ニテ成レル三角形ノ外心 O ヨリ其面 P へノ垂線 OX ヲ引ケバ、Q 面ト OX トノ交點 E ハ所要ノ點ナリ.

5. 一與點ヲ過リ、其點ヲ過ラズシテ一平面上ニ在ラザル一與直線ト一與圓周トニ交ル直線ヲ引ケ.

[略解] 與點 E ト與直線 AB トヲ含ム平面 P ヲ作り、此面ト與圓周トノ交點ヲ C, D トセバ CE, DE ハ所要ノ直線ナリ.

注意 本題ハ 49 頁ノ作圖題 (4) ノ直線 CD ガ圓周トナリタル場合ナリ.

6. (a) 空間ノ二與直線ト交リ且ツ他ノ與直線ニ平行スル直線ヲ引ケ、但シ三與直線ハ何レノ二ツモ平行ナラズ. (新醫、永講)

(b) 空間ノ二與直線ト交リ且ツ其一ツト與角ヲ爲ス直線ヲ引ケ.

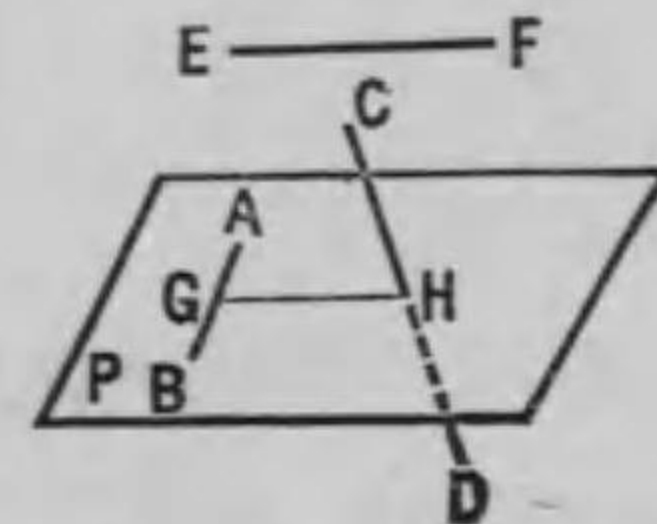
(c) 空間ノ二與直線ト交リ且ツ與平面ニ平行スル直線ヲ引ケ、但シ二與直線ハ何レモ與平面ニ平行ナラズ.

[解] (a) 與二直線ヲ AB, CD トシ、第三ノ與直線ヲ EF トス.

[解析] 先ツ解キ得タリ、即チ GH ヲ所要ノ直線トセバ $GH \parallel EF$ ナルユエ AB, GH ヲ含ム平面 P ハ EF ニ平行ス. 故ニ GH ト CD トノ交點ハ CD ト P トノ交點ナリ.

仍テ次ノ作圖ヲ得.

[作圖] AB ヲ含ム EF ニ平行平面 P ヲ作り CD トノ交點 H ヨリ EF ニ平行線 HG ヲ引ケバ之レ所要ノモノナリ.



[證明] 作圖ニ依リ H ハ P 上ニ在リテ $P \parallel EF$ ナルユ

エ GH ハ P 上ニ在リ. 又假設ニ依リ AB ハ EF ニ平行ナラザルユエ GH ニ平行ナラズ. 故ニ GH ハ AB ト交ル.

故ニ GH ハ AB, CD ト交リ且ツ EF ニ平行ス.

(吟味) 本題ハ CD ガ P ト交レバ一般ニ一ツノ解アリ.

(b) ハ (a) ニ於ケル EF ヲ AB ト與角ヲ爲ス直線ナラシムルニ過ギズ.

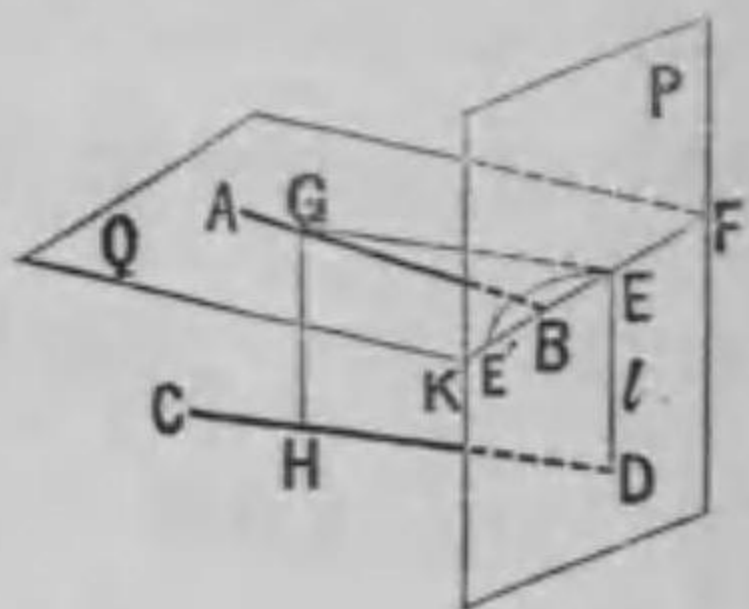
(c) ハ (a) ノ解中 EF ヲ平面ト換言スルニ過ギズ.

7. 空間ノ二與直線ニ挿マレ與長ニシテ且ツ與平面ニ平行ナル直線ヲ引ケ、但シ二與直線ト與平面トハ平行ナラズ。

[解] 二與直線ヲ AB, CD トシ、與平面ヲ P トシ、與長ヲ l トス。

[解析] 先ツ解キ得タリ、即チ GH ヲ所要ノ直線ト

ス。然ルトキ G ヨリ CD ニ平行線 GE ヲ引ケバ P ト交ル其交點ヲ E トス。今 AB ト P トノ交點ヲ B トセバ EB ハ AB ヲ含ミ CD ニ平行ナル平面 Q ト P トノ交線ナルコト明カナリ。又 CD ト P トノ交點ヲ D トセバ GH // P ナルユエ ED // GH 故ニ GHDE ハ平行四邊形ニシテ ED = l



[作圖] AB ヲ含ミ CD ニ平行ナル平面 Q ヲ作り P 面トノ交線ヲ FK トシ、P 上ニ於テ CD ト P トノ交點 D ヲ中心トシ l ヲ半徑トシテ FK ヲ E, E' ニテ截レ。而シテ E, E' ヨリ CD ニ平行線ヲ引キ AB トノ交點ヲ G, G' トシ、次ニ CD ノ上ニ適當ニ D ヨリ EG 及ビ E'G' ニ等シク DH, DH' ヲ取レバ二直線 GH, G'H' ハ所要ノモノナリ。

[證明] 作圖ニ依リ CD ニ平行ナル EG ト AB トハ Q 上ニ在リテ一致セズ又平行セザルヲ以テ相交ル、而シテ GH ≅ ED ナルユエ GHDE ハ平行四邊形ニシテ GH = DE = l ナリ。

[吟味] 本題ガ成立スル爲メニ必要ニシテ且ツ充分ナル要件ハ、D ヨリ FK へノ垂線ヲ h トセバ l ≧ h ナルコトナリ。

8. 一與點ヨリ相交ル二與平面ノ一ツニ直線ヲ引キ、他ノ面ニ平行ニシテ且ツ與長ニ等シカラシメヨ。

[略解] 前圖ヲ用フ。與點ヲ H トシ、與平面ヲ Q トシ、他ノ與平面ヲ P トス。

然ルトキ H ヲ過リ Q 面ニ平行線 HD ヲ引キ P 面トノ交點ヲ D トシ、D ヲ中心トシ與長 l ノ半徑ヲ以テ Q, P ノ交線 FK ヲ E, E' ニテ截リ、次ニ H ヨリ DE, DE' ニ平行ニ引ケル直線ト Q トノ交點ヲ G, G' トセバ GH, G'H' ハ所要ノ直線ナリ。

9. 空間ノ二與直線ノ一ツヨリノ距離ガ與長ニ等シキ點ヲ他ノ一ツノ上ニ求メヨ。

[略解] 又前圖ヲ用フ。與直線 CD ニ垂直ナル平面 P ヲ作り、又與直線 AB ヲ含ミ CD ニ平行ナル平面 Q ヲ作り、P ト Q トノ交線ヲ FK トス。以下前題ニ同シ。

10. 與點 A ヨリ與直線 BC 及ビ之ニ平行セル與平面 P ニ交ル直線ヲ引キ、其直線及ビ平面ニ截ラル、部分ヲ與長ニ等シカラシメヨ。

[略解] A, BC ヲ含ム平面 Q ヲ作り P トノ交線ヲ EF トシ、BC ト EF トノ間ニ與長 l ニ等シキ直線ヲ引キ、A ヨリ之ニ平行線ヲ行ケバ之レ所要ノモノナリ。若シ Q ガ P ニ平行スルトキハ解無シ。

11. (a) 與平面 P 上ニ、其上ノ與直線 EF ニ平行シ且ツ其外ノ與點 A ヨリノ距離ガ與長 l ニ等シカルベキ直線ヲ引ケ。

(b) 與平面 P 上ニ、其外ノ二與點 A, B ヨリノ距離ガ夫々 l, m ニ等シカルベキ直線ヲ引ケ。

[略解] (a) P 面上ニ A ヨリ l ニ等シキ斜線ノ足ノ軌跡 O 圓ヲ畫キ、次ニ O ヨリ EF へノ垂線ト O 圓トノ交點 B, B' ヨリ P 上ニ於テ O 圓ニ二切線ヲ引ケバ之レ所要ノモノナリ。

(b) P 面上ニ A, B ヨリ夫々 l, m ニ等シキ斜線ノ足ノ軌跡 A' 圓, B' 圓ヲ畫ケバ、此二圓ノ共通切線ハ所要ノ直線ナリ。 [50 頁ノ (7) ヲ参考セヨ] 本題ハ AA' ≧ l, m ≧ BB' 且ツ二圓 A', B' ガ共通切線ヲ有スルトキハ常ニ成立ス。

12. 與點 A ヲ過リ平面ヲ畫キ、與直線 BC ヨリノ距離ヲ與長 l ニ等シカラシメヨ。

[略解] A ヲ過リ BC ニ垂直ナル平面 P ヲ作り BC トノ交點ヲ D トシ、P 面上ニ於テ D ヲ中心トシ l ヲ半徑トスル圓ヲ畫キ、之ニ切線 AE, AE' ヲ引ケバ此一ツ宛ヲ含ミ BC ニ平行ニ作レル二平面ハ所要ノモノナリ。

13. 一與平面上ニ其上ノ一與點ヲ過リ其面外ノ一與直線ニ垂線ヲ引ケ。

[略解] 與平面 P 上ニ於テ其上ノ與點 A ヲ過リ P 面外ノ與直線 BC ノ正射影 bc ニ垂線 AD ヲ引ケバ、之レ所要ノ直線ナリ。何トナレバ Bb ⊥ P ナルユエ Bb ⊥ AD ニシテ又 bc ⊥ AD ナルユエ面 Bbc ⊥ AD, 故ニ AD ⊥ BC ナリ。

14. 與二面角内ノ一與點ヲ過リ各面ニ終ル直線ヲ引キ, 其與點ニ於テ二等分ナラシメヨ.

[略解] 與點 A ヨリ其一面 P ニ垂線 AH ヲ引キ HA ヲ延長シテ AH' = HA トシ, H' ヲ過リ他ノ面 Q ニ垂直線 R ヲ作レバ, 其交線 EF 上ノ凡テノ點ト A トヲ結ブ直線ハ皆ナ所要ノモノナリ.

15. 與直二面角ヲ三等分スル平面ヲ作レ.

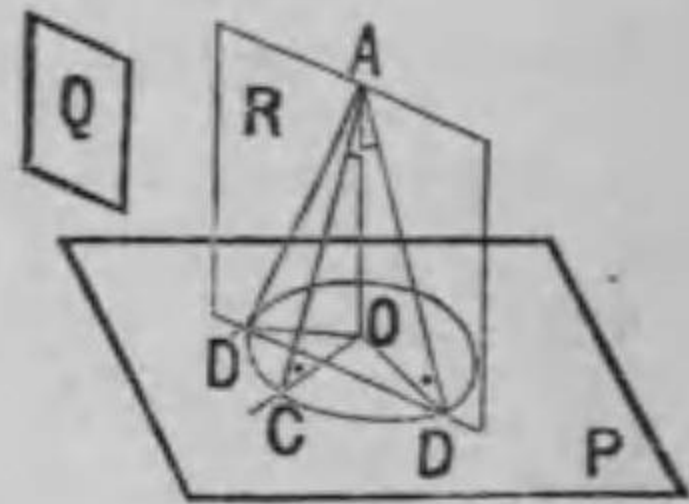
[略解] 與二面角ノ平面 P, Q ノ平面角 EDF ヲ三等分スル直線 DG, DH ヲ引ケバ, 與二面角ノ稜 AB ト DG 及ビ AB ト DH ヲ含ム二平面ハ所要ノモノナリ.

16. 一與平面上ニ其外ノ二與點及ビ二與平面ヨリ夫々等距離ナル點ヲ求メヨ.

[略解] 二與點 A, B ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ヲ一與平面 R 上ニ求メ, 又與二平面 P, Q ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ヲ R 面ニ求ムレバ, 其二ツノ軌跡ノ交リハ所要ノモノナリ.

17. 與點 A ヨリ與平面 Q ニ平行シ他ノ與平面 P ト與角 α ト等角ヲ爲ス直線ヲ引ケ.

[解] AO ⊥ P トシ, P 面上ニ任意ノ直線 OC ヲ引キ, 面 OAC 上ニ於テ $\widehat{OAC} = \alpha$ 作り, P 面上ニ O ヲ中心トシ OC ヲ半径トスル圓ヲ畫キ, 次ニ A 點ヲ過リ Q 面ニ平行スル平面 R ヲ作レバ R 面ト圓 OC トノ交點 D, D' ト A トヲ結ブ直線 AD, AD' ハ所要ノ直線ナリ.



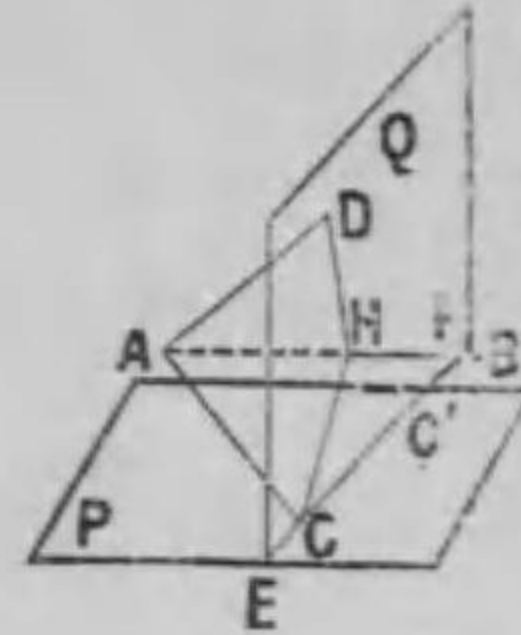
何トナレバ OD = OC ナルユエ $\triangle AOD \equiv \triangle AOC$, $\widehat{ADO} = \widehat{ACO} = \widehat{R} - \widehat{OAC} = \widehat{R} - (\widehat{R} - \alpha) = \alpha$. 又 R 面 // Q 面ナルコト AD // Q 面ナリ. AD' ニ付テモ同様ニ證明シ得.

若シ $\alpha > \widehat{R}$ ナルトキハ $\widehat{OAC} = \alpha - \widehat{R}$ トスルノミ其他ハ上ト全ク同様ナリ.

本題ハ R 面ガ圓 OC ト交點ヲ有スレバ常ニ成立ス.

18. 平面 P ニ平行ナル直線 AB 上ノ A 點ヨリ P 面ニ直線 AC ヲ引キ, 與長 l ニ等シク且ツ \widehat{CAB} ヲ與角 α ニ等シカラシメヨ.

[解] AB ヲ含ム平面上ニ於テ $\widehat{BAD} = \alpha$ 且ツ AD = l トシ D ヲ過リ P 面ニ垂直面 Q ヲ作り其交線ヲ EF トシ, 次ニ面 AEF 上ニ於テ EF 上ニ AC = AD = AC' ナル様ニ C, C' ヲ取レバ AC, AC' ハ所要ノ直線ナリ.



何トナレバ AB ト Q 面トノ交點ヲ H トスレバ HC, HD ハ何レモ AH ニ垂線ナルユエ 直 $\triangle ACH \equiv \triangle ADH$, $\widehat{CAH} = \widehat{DAH} = \alpha$ 且ツ AD = l ナリ.

AC' ニ付テモ同様ニ證明シ得.

本題ハ A ヨリ EF へノ垂線 $h \leq l$ ナルトキハ常ニ成立ス.

19. \widehat{AOB} ノ頂點 O ヨリ直線ヲ引キ, 其角ノ二邊ト等角ヲ爲シ且ツ角ノ平面ト與角 α ヲ爲サシメヨ.

[略解] \widehat{AOB} ノ二等分線 OE ヲ過リ 面 AOB ニ垂直面ヲ作り, 其面上ニ於テ OE ト α ヲ爲ス直線 OC ヲ引ケバ, 之レ所要ノモノナリ.

20. 與點 A ヲ過リ與直線 EF ニ平行スル平面ヲ作り, 與平面 P トノ爲ス角ヲ與角 α ニ等シカラシメヨ.

[略解] A ヲ過リ EF ニ平行線 AB ヲ引キ, 次ニ 51 頁ノ作圖題 (9) ニ倣フベシ.

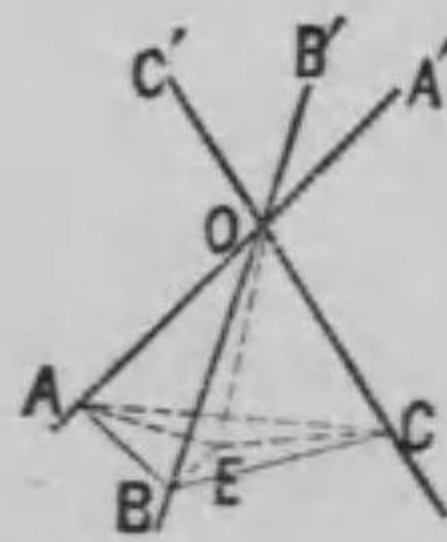
21. 一平面上ニ在ラズシテ一點ニ於テ相交ル三直線ト等角ヲ爲ス直線ヲ引ケ.

[解] 此三線 AA', BB', CC' ノ交點ヲ O トシ, OA = OB = OC ニ取り $\triangle ABC$ ノ外心ヲ E トセバ, 直線 OE ハ所要ノ一ツナリ.

何トナレバ三邊ガ夫々相等シキ $\triangle OEA \equiv \triangle OEB \equiv \triangle OEC$ ナルユエ $\widehat{EOA} = \widehat{EOB} = \widehat{EOC}$ ナリ.

同様ニ O ヲ頂點トスル他ノ三ツノ三面角内ニ各々一 直線ノアルコトヲ證明シ得.

注意 三面角ノ各稜ト等角ヲ爲ス直線ヲ引ケ, ト云フ題ハ 上ノ一場合ナリ.



22. 與三面角へノ距離ガ與長ニ等シキ點ヲ求メヨ.

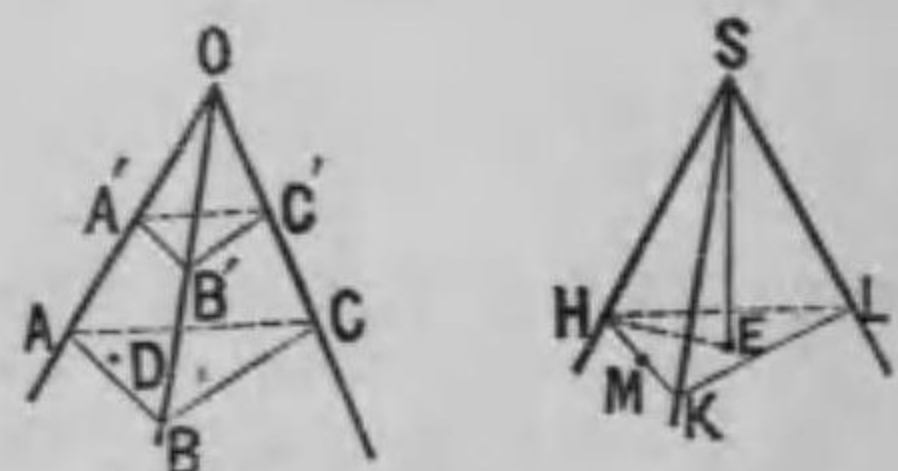
〔略解〕 三面角 $O-ABC$ ノ各面ヨリ等距離ナル點ノ軌跡 OO' ヲ求メ [37 頁ノ系 (2)]. 次ニ OO' 上ニ 面 AOB ヨリノ距離ガ與長 l ニ等シキ點ヲ求ム [52 頁ノ (4) 題ノ (a)] レバ之レ所要ノ點ナリ.

23. (a) 一與點ヲ過リ與三面角ノ各稜ヲ等シク截ルベキ截平面ヲ作レ.

(b) 與三面角ト全等ナル三面角ヲ作レ.

〔解〕 (a) 與三面角 $O-ABC$ ニ於テ $OA'=OB'=OC'$ ニ取り, 次ニ與點 D ヲ過リ 面 $A'B'C'$ ニ平行平面ヲ作レバ可ナリ. 何トナレバ此截リ口ヲ ABC トセバ 面 AOB ニ於テ $A'B'//AB$ ナルユエ $OA:OB=OA':OB'=1$, 故ニ $OA=OB$. 同様ニ $OB=OC$ ヲ證シ得ベシ.

(b) 與三面角 O ノ各稜ヲ等シク截ル 所ノ截リ口 ABC ヲ作り, 之ト全等ナル $\triangle HKL$ ヲ作り其外心 E ヨリ其面ニ垂線 ES ヲ引キ, 次ニ 面 HES 上ニ於テ $HS=AO$ ニ取レバ $S-HKL$ ハ所要ノモ



ノナリ. 何トナレバ E ハ H, K, L ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ニシテ $\triangle ABC \equiv \triangle HKL$ ナルユエ $\triangle SHK \equiv \triangle OAB, \triangle SKL \equiv \triangle OBC, \triangle SLH \equiv \triangle OCA$, 從テ面角 $\widehat{HSK} = \widehat{AOB}, \widehat{KSL} = \widehat{BOC}, \widehat{LSH} = \widehat{COA}$ 即チ各二面角ガ夫々同順ニ等シキユエ 三面角 $S-HKL \equiv$ 三面角 $O-ABC$ ナリ.

24. 與直三面角ヲ一平面ニテ截リ, 其截リ口ヲ與三角形ト全等ナラシメヨ.

〔略解〕 上圖ヲ用フ. 與 $\triangle HKL$ ノ垂心 E ヲ求メ, $ES \perp$ 面 HKL トシ, HK ノ中點ヲ M トシ 面 MES 上ニ於テ M ヲ中心トシ MK ト等半徑ヲ以テ ES ヲ S ニテ截レ. 次ニ與直三面角 O ノ各稜上ニ於テ $OA=SH, OB=SK, OC=SL$ ニ取レバ $\triangle ABC$ ハ所要ノ截リ口ナリ. 何トナレバ $SK \perp$ 面 $HKL, EM \perp HK$ ナルユエ三垂線定理ニ依テ $SM \perp HK$, 而シテ M ハ H, K, S ヨリ等距離ナルユエ $\widehat{HSK} = \widehat{R}$. 同様ニ $\widehat{KSL} = \widehat{R} = \widehat{KSH}$ ヲ證シ得.

然レバ 直三面角 $S-HKL \equiv$ 直三面角 $O-ABC$. $\therefore \triangle HKL \equiv \triangle ABC$.

25. (a) 與四面角ヲ一平面ニテ截リ, 其截リ口ヲ平行四邊形ナラシメヨ.

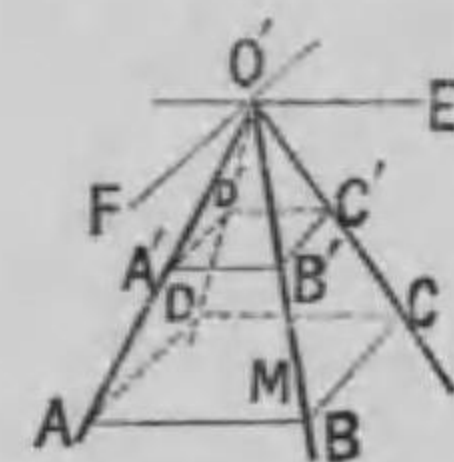
(陸士, 高等)

(b) 又其截面ヲシテ一與點ヲ過ラシメヨ.

(c) 又其截リ口ノ平行四邊形ノ一邊ヲ與長ニ等シカラシメヨ.

〔解〕 (a) (解析) 先ヅ解キ得タリ, 即チ四面角 $O-ABCD$ ノ截リ口 $ABCD$ ヲ平行四邊形トシ之ヲ P トセバ, 平行二線 AB, CD ノ一ツ宛ヲ含ム平面 ABO, DCO ノ交リナル $OE//P$ ナリ. 同様ニ 面 ADO, BCO ノ交リナル $OF//P$ ナリ. 從テ 面 $EOF//P$ 面.

(作圖) 面 AOB, COD ノ交線 OE ト 面 AOD, BCO ノ交線 OF トヲ含ム平面 EOF ニ平行スル平面ヲ作レバ之レ所要ノモノナリ.



〔證明〕 其截リ口ヲ $ABCD$ トスレバ $OE//P$ ナルユエ $AB//OE//CD$ ニシテ, 又 $OF//P$ ナルユエ $AD//OF//BC$, 故ニ對邊ガ夫々平行ナルユエ $ABCD$ ハ平行四邊形ナリ.

(b) 與點 M ヲ過リ 面 EOF ニ平行平面ヲ作レバ可ナリ.

(c) ハ先ヅ (a) ノ如ク 面 EOF ニ平行ナル截リ口 $A'B'C'D'$ ヲ作レ. 次ニ OB' 上ニ於テ 與長 $a: A'B'=OB':OB$ ナル様ニ B 點ヲ取りテ, B ヲ過リ 面 $A'B'C'D'$ ニ平行ナル截リ口 $ABCD$ ヲ作レバ之レ所要ノモノナリ. 何トナレバ (a) ト同様ニ $ABCD$ ハ平行四邊形ニシテ, 又 $\triangle ABO$ ニ於テ $A'B'//AB$ ナルユエ $OB':OB = A'B':AB = A'B':a$, 故ニ $AB=a$ ナレバナリ.

續 第一章 乃至 第八章

特 種 問 題

22. 三平面會一直線 ナル次ノ 1 乃至 4 及ビ 5 ハ三面角ノ性質トシテ重要ナルモノナリ。

問 題 及 ビ 解 答

1. 三面角ノ各々ノ平面角ノ二等分線ヲ含ミ夫々其面ニ垂直ナル三平面ハ一直線ニ於テ相會ス。

注意 之レ 36 頁ノ系, 即チ三面角ノ各稜ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ヲ求メヨ, ノ換言ナリ。

2. 三面角ノ各々ノ二面角ヲ二等分スル三平面ハ一直線ニ於テ相會ス。

(東工)

注意 本題ハ 37 頁ノ系 (2), 即チ三面角ノ各面ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ヲ求メヨ, ノ換言ナリ。

3. 三面角ノ各々ノ稜ヲ過リ夫々其對面ニ垂直ナル三平面ハ一直線ニ於テ相會ス。

[證明] 三面角 $O-ABC$ ノ稜 OA, OB ヲ過リ夫々對面ニ垂直ナル二平面 AOD, COF ノ交線ヲ OH トシ, H ヲ過リ OH ニ垂直ナル截リ口 ABC ヲ作レバ 面 AOD ハ 面 ABC, BOC ノ双方ニ垂直ナルユエ亦々其交線 BC ニ垂直ナリ。故ニ $AD \perp BC$ 。

同様ニ $CF \perp AB$ 。故ニ H 點ハ $\triangle ABC$ ノ重心ナリ。

從テ $BH \perp AC$ 且ツ $OH \perp$ 面 ABC ナルユエ三垂線定理ニ依テ $OE \perp AC$, 故ニ $AC \perp$ 面 BEO , \therefore 面 $ACO \perp$ 面 BEO 。故ニ此三平面 AOD, COF, BOE ハ一直線 OH ニ於テ相交ル。

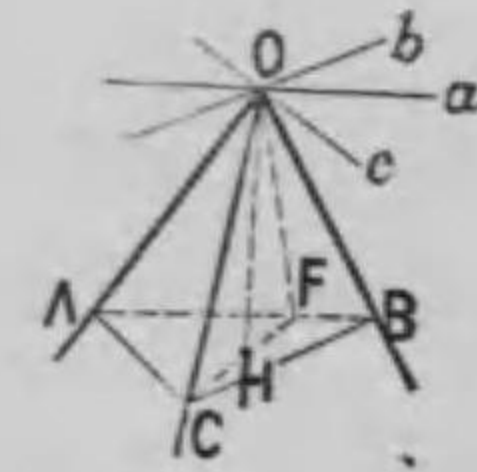


4. 三面角ノ各々ノ稜ト夫々其對面ノ平面角ノ二等分線トヲ含ム三平面ハ一直線ニ於テ相交ル。

[證明] 前圖ヲ用フ。三面角 $O-ABC$ ニ於テ $OA=OB=OC$ トシ, $\widehat{BOC}, \widehat{AOB}$ ノ二等分線ト BC, AB トノ交點ヲ D, F トセバ D, F ハ夫々 BC, AB ノ中點ナルユエ AD, CF ノ交點 H ハ $\triangle ABC$ ノ重心ナリ。從テ BH ノ延長ト AC トノ交點 E ハ AC ノ中點ニシテ $OA=OC$ ナルユエ OE ハ \widehat{AOC} ヲ二等分ス。故ニ 面 AOD, COF, BOE ハ何レモ直線 OH ヲ過ル即チ一直線 OH ニ於テ相會ス。

5. 三面角ノ頂點ヨリ各々ノ平面内ニ於テ夫々其對稜ニ垂直ナル三直線ハ同一ノ平面上ニ在リ。

[證明] 三面角 $O-ABC$ ノ各々ノ稜ヲ過リ夫々其對面ニ垂直ナル三平面ノ交線ヲ OH [3 題] トス。然レバ O ヲ過リ 面 OCH ハノ垂線ハ此面ニ垂直ナル 面 OAB ニ含マレルヲ以テ 面 OAB 上ニ 對稜 OC ニ垂直ナル直線 Oa ハ 面 OCH ニ垂線ナリ, 從テ $Oa \perp OH$ 。同様ニ 面 OBC, OCA 上ニ夫々對稜 OA, OB ニ垂線 Ob, Oc ヲ引ケバ Ob, Oc ハ何レモ OH ニ垂線ナリ。故ニ Oa, Ob, Oc ハ何レモ O ヲ過リ OH ニ垂線ナルヲ以テ一平面上ニ在リ。



23. 極大 及 ビ 極小 平面幾何學 77 頁ヲ參考スベシ。

問 題 及 ビ 解 答

1. 一平面ヘノ斜線ガ其足ヲ過リテ其面上ニ引ケル直線ト爲ス銳角ノ中, 其正射影ト爲ス角ガ最小ナリ。 [42 頁ノ定理 (2)ノ(i)ノ換言]

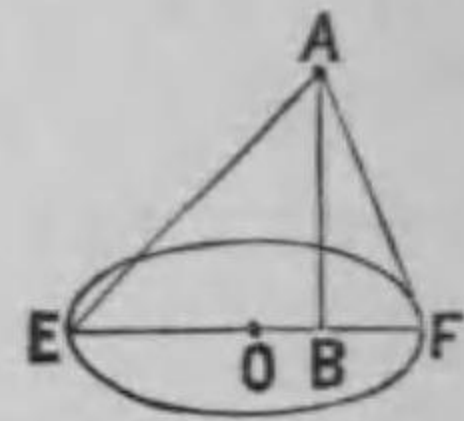
2. 相交ル二平面ノ一ツノ上ニ在リテ且ツ交線ニ交ル直線ガ他ノ面ト爲ス角ノ中, 交線ヘノ垂線ガ他ノ面ト爲ス角ガ最大ナリ。

[46 頁ノ 8 題ノ換言]

3. 一ツノ圓 P アリ, 其平面外ノ一點ヨリ此圓周ニ至ル最長及ビ最短ナル直線ヲ引ケ. (各醫)

[解] 與點 A ヨリ與圓 O ノ平面ヘ垂線 AB ヲ引キ, OB ノ延長ト O 圓周トノ交點ヲ E, F トセバ AE, AF ハ所要ノ直線ナリ.

[證明] 今 E ヲ O ノ B ト反對ノ側ニ在リトスレバ B ヨリ此圓周ニ引ケル諸直線ノ中ニ於テ BE ハ最長ニシテ BF ハ最短ナリ [平幾].



故ニ垂線ノ足ヲ距ルコト最長ナル斜線 AE ハ最長ニシテ, 其足ヲ距ルコト最短ナル斜線 AF ハ最短ナリ.

本題ハ A 點ノ O 圓平面ヘノ正射影ガ圓心 O ト合セザルトキハ常ニ成立ス.

4. (a) 定平面 P 及ビ其同傍ニ二定點 A, B アリ. 此 P 上ニ一點 C ヲ求メテ AC+BC ヲ最小ナラシメヨ. (六高, 大工)

(b) 又 A, B ガ P ノ兩傍ニ在ルトキ AC~BC ヲ最大ナラシメヨ.

[解] (a) A ヨリ P ニ垂線 AE ヲ引キ, 之ヲ延長シテ EA'=EA トシ BA' ト P トノ交點ヲ C トセバ, 之レ所要ノ點ナリ. 何トナレバ P 上ニ任意ノ點 C' ヲ取レバ P ハ AA' ノ垂直二等分面ナルユエ AC=A'C', AC'=A'C'. 故ニ $\triangle BC'A'$ ニ於テ

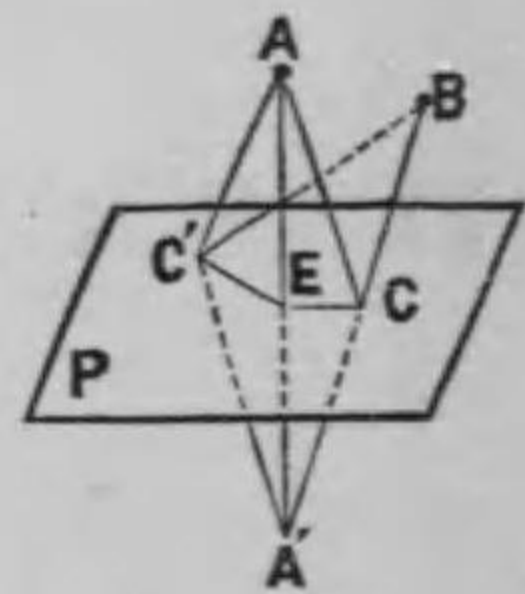
$$BA' = BC + A'C < BC' + A'C'$$

即チ $BC + AC < BC' + AC'$.

(b) 上ト同様ニ作圖セバ, A ガ B ヨリモ P ヲ距ルコト大ナルトキハ $\triangle C'A'B$ ニ於テ $A'B = A'C - BC > A'C' - BC'$ 即チ $AC - BC > AC' - BC'$.

又 A ガ B ヨリモ P ヲ距ルコト小ナルトキハ上ト同様ニ $BC - AC > BC' - AC'$.

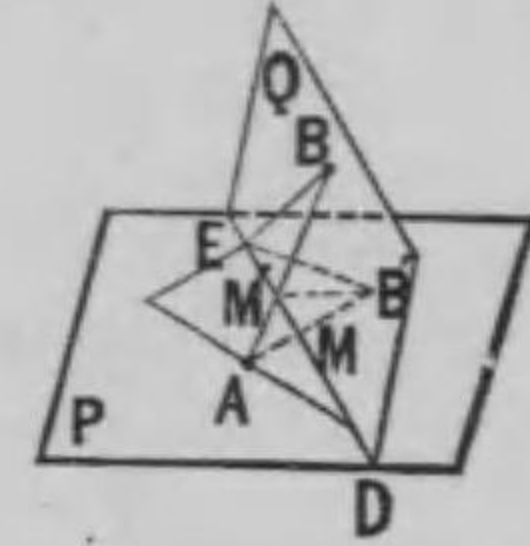
$$\therefore AC \sim BC > BC' \sim AC'$$



5. (a) 相交ル二平面 P, Q ノ上ニ夫々點 A, B アリ. 此二面ノ交線 CD 上ニ一點 M ヲ求メテ AM+BM ヲ最小ナラシメヨ.

(b) 又 AM~BM ヲ最大ナラシメヨ.

[解] (a) $BE \perp CD$, P 上ニ於テ CD ノ A ト反對ノ側ニ $EB' \perp CD$ 且ツ $EB' = BE$ ニ取レバ, AB' ト CD トノ交點 M ハ所要ノ點ナリ. 何トナレバ CD 上ニ點 M' ヲ取レバ直 $\triangle BEM' \cong B'EM'$, 從テ $BM' = B'M'$. 又直 $\triangle BEM \cong B'EM$, 從テ $BM = B'M$.



故ニ $\triangle AB'M'$ ニ於テ $AB' = AM + B'M < AM' + B'M'$ 即チ $AM + BM < AM' + BM'$.

(b) EB' ヲ CD ノ A ト同シ側ニ取レバ其他ハ上ト同様ナリ.

第 二 編

多 面 體

總 論

1. 定義

(1) 多面體 トハ數多ノ平面ニテ圍マレタル立體ヲ云フ。

多面體ヲ形成スルニハ少ナクモ四面ヲ要ス [公理的]、

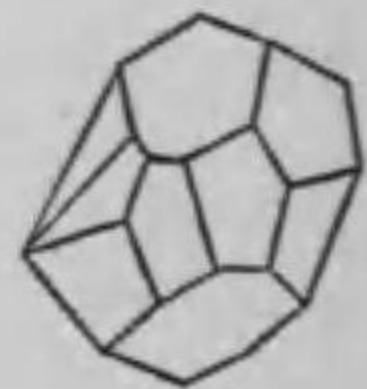
多面體ハ其面ノ數ニ依リテ四面體、五面體、六面體、等ト云フ。

而シテ、其面、面ノ交線及ビ面ノ爲ス立體角

ノ頂點ヲ夫々多面體ノ面、稜及ビ頂點ト云フ。

多面體ノ對角線 トハ同一面上ニ在ラザ

ル二角頂ノ連結線ヲ云フ。



(2) 凸多面體 トハ何レノ面ヲ延長スルモ其體內ニ入ラザルモノ

ヲ云フ。然ラザルモノヲ凹多面體ト云フ。

注意 本書ニ於テハ凸多面體ノミヲ論ズ、從テ單ニ多面體ト云ヘバ

凸多面體ヲ指スモノトス。

(3) 立體ノ體積 トハ其面ニテ圍マレタル空間ノ大サヲ云フ。

體積ノ單位 ハ線單位ヲ一稜トスル立方體ト定ム。

等積 トハニツ以上ノ立體ノ體積ガ相等シキモノヲ云フ。

2. 定理

(1) 多面體ニ於テ 面數ヲ F 、頂點數ヲ V 、稜數ヲ E トセバ

$$F + V = E + 2 \quad \text{ナリ。} \quad (\text{オイラー定理})$$

[證明] 先ヅ一面ヲ取り之ニ順次ニ各面ヲ附ケ加ヘテ多面體ヲ形成スルモノト假定スレ

バ 一面ノトキハ $E_1 = V_1$ ナルコト明カナリ。

之ニ第二ノ面ヲ附ケ加フレバ、此面ハ最初ノ面ト一稜及ビ二頂點ヲ共有スルユエ

$$\text{二面ノトキハ} \quad E_2 = V_2 + 1.$$

又之ニ第三ノ面ヲ附ケ加フレバ、此面ハ前ノ二面ト二稜及ビ三頂點ヲ共有スルユエ

$$E_3 = V_3 + 2.$$

逐テ斯クノ如ク一面ヲ附ケ加フル毎ニ稜ノ數ハ頂點ノ數ヨリ一ツ宛増加シ、

$$F-1 \text{面ノトキハ} \quad E_{F-1} = V_{F-1} + F - 2.$$

而シテ最後ノ一面ハ之ヲ附ケ加フルモ之ガ爲メニ稜及ビ頂點ノ數ハ増加セズ。

故ニ F 面ノトキハ $E = V + F - 2.$

$$\therefore E + 2 = V + F.$$

餘話 オイラー氏ハ西曆 1795 年頃ノ瑞西ノ人ニシテ近世ノ大數學者ノ一人ナリ。

(2) 多面體ノ各面ガ皆ナ m 角形ニシテ、又各立體角ガ皆ナ n 面角

ナルトキハ $mF = nV = 2E$ ナリ。

[證明] 多面體ヲ形成スル多角形ノ各邊ハニツツハ相合シテ一稜トナルガ故ニ各面ノ邊

ノ數ノ和ハ稜ノ數ノ二倍ニ等シ、即チ $mF = 2E.$

又各立體角ハ n 面角ナルガ故ニ立體角ノ頂點ノ數ノ n 倍ハ稜ノ數ノ二倍ニ等シ、即

$$\text{チ} \quad nV = 2E. \quad \therefore mF = nV = 2E.$$

3. 多面體ノ種類 ハ無限ニ存在スルモノナレドモ、立體

幾何ニ於テハ次ノ (1) 乃至 (4) 及ビ是等ヨリ誘導セラレルモノノミ

ニ就テ講究スルヲ通例トス。

(1) 正多面體. (2) 角堦. (3) 角錐. (4) 相似多面體.

第一章 正多面體

4. 定義及ビ定理

定義 正多面體 トハ各面ガ全等ナル正多角形ニシテ且ツ各角ガ相等シキ多面體ヲ云フ。

定理 正多面體ハ只五種アルノミナリ。 (東師, 陸士)

〔證明〕 先ツ多面角ノ成立ヲ確定シ, 次ニ面數ヲ確定セントス。

- (1) 一ツノ多面角ヲ形成スルニハ三ツ以上ノ平面角ガ頂點ニ於テ出會フコトヲ要ス。而シテ一ツノ頂點ニ於ケル平面角ノ和ハ四直角ヨリモ小ナリ。〔27頁(2)〕。然ルニ正六邊形ノ一角ハ $\frac{4}{3}\hat{R}$ ナルユエ之ヲ三ツ取レバ $4\hat{R}$ トナリ, 七邊以上ノ正多角形ナレバ其一角ヲ三ツ取レバ何レモ $4\hat{R}$ ヨリモ大トナル。

故ニ 正多面體ノ面ハ正三角形或ハ正方形或ハ正五邊形ノ内ニ限ル。

同様ニ六ツ以上ノ正三角形或ハ四ツ以上ノ正方形或ハ四ツ以上ノ正五邊形ハ多面角ヲ形成スルコト能ハズ。

∴ 正多面體ハ其多面角ヲ形成スル面ガ次ノ (i) 乃至 (v) ノ他ニ無シ, 即チ

(i) 三ツノ正三角形, (ii) 三ツノ正方形, (iii) 四ツノ正三角形,

(iv) 三ツノ正五邊形, (v) 五ツノ正三角形。

- (2) 65頁ノ定理 $F+V=E+2$ 及ビ $mF=nV=2E$ ヨリ

(i) $m=3, n=3$ ナルトキハ $F=4$.

(ii) $m=4, n=3$ ナルトキハ $F=6$.

(iii) $m=3, n=4$ ナルトキハ $F=8$.

(iv) $m=5, n=3$ ナルトキハ $F=12$.

(v) $m=3, n=5$ ナルトキハ $F=20$.

- (3) 故ニ 四ツノ正三角形ヲ面トスル正四面體,
六ツノ正方形ヲ面トスル正六面體,
八ツノ正三角形ヲ面トスル正八面體,
十二ノ正五邊形ヲ面トスル正十二面體,
二十ノ正三角形ヲ面トスル正二十面體, ニ限ル。

餘話 正多面體ハびたごらす派ノ學者ハ既ニ之ヲ知リシト雖モ, ぶらと1氏〔西曆紀元前388年頃ノ希臘ノ哲學兼幾何學者〕ノ學校ニ於テ特ニ之ヲ研究セシヲ以テ後世之ヲぶらと1體ト呼ブニ至レリ。

問題及ビ解答

1. 正多面體ニ於テ次ノ關係ヲ證明セヨ,

$$(a) \frac{1}{F} = \frac{m}{2} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} \right), \quad (b) \frac{1}{V} = \frac{n}{2} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} \right).$$

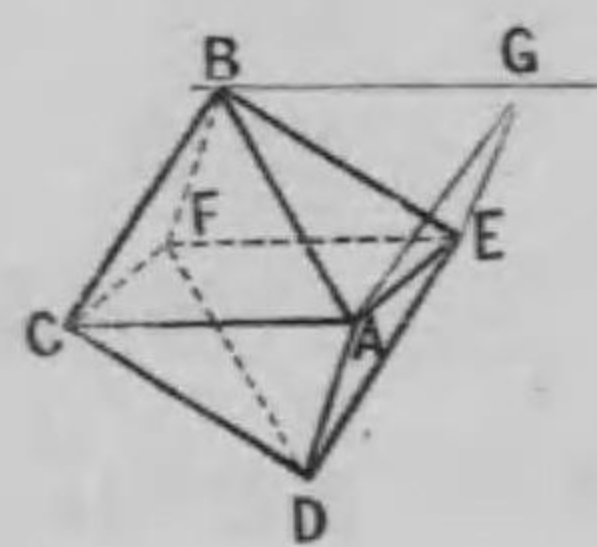
$$(c) \frac{1}{E} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2}. \quad \text{〔證明ハ65頁ノ二定理ニ依ル〕}$$

2. 正四面體ト正八面體トノ二面角ハ互ニ補角ヲナス。

〔證明〕 正八面體ヲ ABCDEF トシ, BG ⊥ CA トシ, GA, GE ヲ結ベ。然レトキハ正八面體ノ面ABCハ正三角形ナルエユ, 之ト全等ナル

△ABGハ正三角形ナリ。

同様ニ四面體GBAEハ各面ガ正三角形ナルユエ正四面體ナリ。而シテ共通ノ稜ABニ於ケル二面角ノ面ABC, ABGハ同一平面ナリ。故ニ此二ツノ二面角ハ互ニ補角ヲナス。



第二章 角 塙

5. 定義 及 ビ 記法

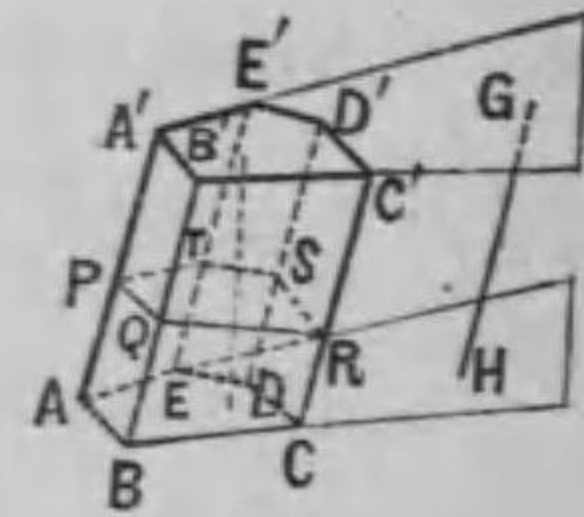
定義 (1) 角塙或ハ角柱 トハ同一ノ直線ニ平行セル數多ノ平面ト此直線ニ交ハル平行二平面トニテ圍マレタル多面體ヲ云フ。

而シテ、其同一直線ニ平行セル各面ヲ**傍面**或ハ側面ト云ヒ、各傍面ノ和ヲ**傍面積**ト云ヒ、二傍面ノ交線ヲ**傍稜**ト云フ。

又其同一直線ニ交ハル二面ヲ**底面**或ハ端面ト云ヒ、二底面ノ距離ヲ**高サ**ト云フ。

記法 右圖ノ如キ角塙ハ之ヲ

角塙ABCDE-A' ト記ス。



角塙ハ底面ノ邊數ニ依リテ三角塙、四角塙、五角塙、等ト云フ。

定義 (2) 直角塙 トハ角塙ノ傍稜ガ底面ニ垂直ナルモノ、

正角塙 トハ直角塙ノ底面ガ正多角形ナルモノヲ云フ。

斜角塙 トハ角塙ノ傍稜ガ底面ニ斜メナルモノヲ云フ。

例ヘバ上圖ノ如シ。

定義 (3) 直截リ口 トハ角塙ノ傍稜ニ垂直ナル平面ニテノ截リ口ヲ云フ。

定義 (4) 斜截頭角塙 トハ角塙ヲ其各傍稜ニ交リ且ツ底面ニ平行セザル平面ニテ截リタル各部分ヲ云フ。

記法 ハ角塙ト同様ニ斜截頭角塙 ABCDE-P ト記ス。

定義 (5) 平行六面體 トハ四角塙ノ底面ガ平行四邊形ナルモノヲ云フ。其相對スル二面ヲ底面ト見做スコトヲ得。

又相對スル頂點ノ連結線ヲ**對角線**ト云フ。

直平行六面體 トハ平行六面體ノ傍稜ガ底面ニ垂直ナルモノヲ云フ。

矩形六面體 トハ直平行六面體ノ各面ガ矩形ナルモノヲ云フ。

正六面體或ハ立方體 トハ矩形六面體ノ各面ガ正方形ナルモノヲ云フ。一稜 AB ナル立方體ノ體積ハ AB^3 ト記ス。

6. 重要定理

定理 (1) 角塙ノ傍面ハ各々平行四邊形ナリ。

又其兩底面ナル多角形ハ全等ナリ。

[證明] 前頁ノ圖ヲ用フ。直線 GH ニ平行ナル二面 A'E, A'B ノ交線ナル A'A//GH。同様ニ B'B//GH。故ニ A'A//B'B。而シテ此ノ二線ノナス一平面 A'B ト平行二平面 A'C, AC トノ交線 A'B//AB。∴ A'B ハ平行四邊形ナリ。他ノ面ニ付テモ同様ニ證明シ得。

次ニ前問ニ依リ A'B' ≅ AB, B'C' ≅ BC, …… 且ツ此等ハ夫々同方向ナルユエ $\hat{A}' = \hat{A}, \hat{B}' = \hat{B}, \dots$ ∴ A'B'C'D'E' ≅ ABCDE。

定理 (2) 角塙ヲ其底面ニ出會ハザル平行二平面ニテノ截リ口ハ全等ナル多角形ナリ。

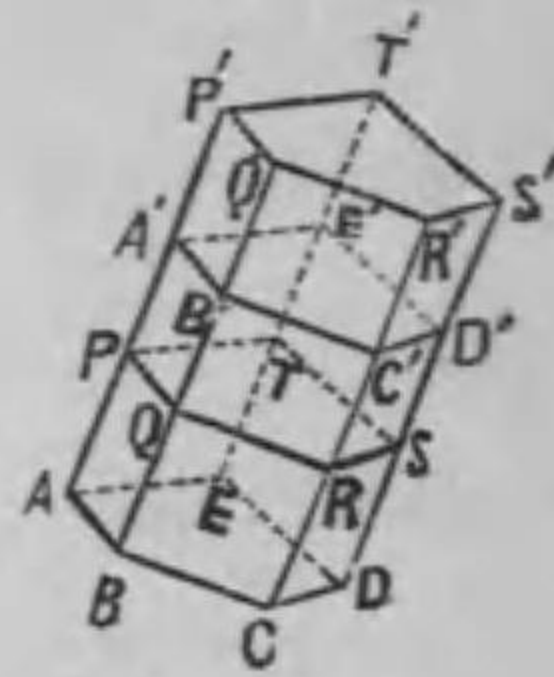
定理 (3) 角塙ノ傍面積ハ直截リ口ノ周ト一傍稜トノ積ニ等シ。

[證明] 前頁ノ圖ヲ用フ。角塙 ABCDE-A' ノ直截リ口ヲ PQRST トセバ 面 A'B = A'A.PQ, 面 B'C = B'B.QR, …… 然ルニ A'A = B'B = …… ナルユエ 傍面積 = 面 A'B + 面 B'C + …… = A'A.PQ + B'B.QR + …… = A'A (PQ + QR + ……)

系. 直角塙ノ傍面積ハ底面ノ周ト高サトノ積ニ等シ。

定理 (4) 斜角埽ハ其直截リ口ヲ底面トシ傍稜ヲ高サトスル直角埽ト等積ナリ.

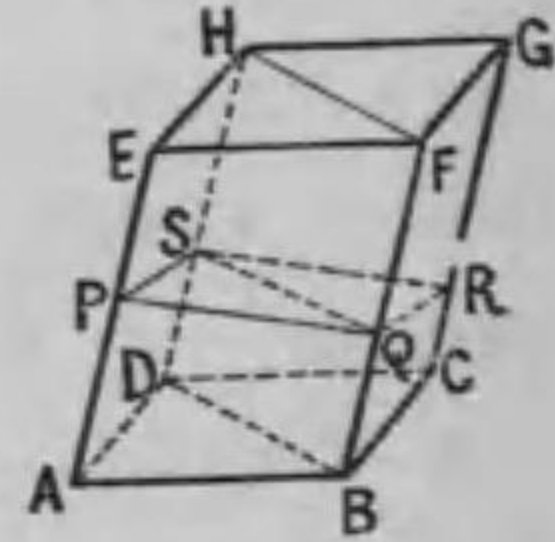
〔證明〕 斜角埽 ABCDE-A' ノ直截リ口 PQRST ナ底面トシ、高サ PP'=AA' ナル直角埽 PQRST-P' ナ作レ。然ルトキ多面體 AS ナ多面體 A'S' ノ上ニ多角形 PQRST ガ P'Q'R'S'T' ニ重ナル様ニ置ケバ此二面ニ垂直ナル AP, BQ,.....ハ夫々 A'P', B'Q',.....ニ重ナリ、且ツ AA'=PP', BB'=QQ'.....ナルユエ體 AS ハ全ク體 A'S' ニ重ナル、即チ ABCDE-P ≡ A'B'C'D'E'-P'。此双方ニ多面體 PD' ナ加フレバ ABCDE-A' = PQRST-P'。



系. 全等底面, 等高ナル直角埽ハ等積ナリ. [重ネ合セテ證明ス]

定理 (5) 平行六面體ノ相對スル二稜ヲ含ム平面ハ其體ヲ二等分ス.

〔證明〕 平行六面體 ABCD-E ノ直截リ口ヲ PQRS トス。對稜 HD, FB ナ含ム平面ハ元體ヲ二ツノ三角埽, (ABD-E), (DBC-H) ニ分ツ。而シテ ABD-E = 底面 PQS, 高サ AE ナル直角埽, DBC-H = 底面 SQR, 高サ AE ナル直角埽。然ルニ底面 PQS ≡ SQR ナルユエ此二ツノ直角埽ハ等積ナリ。 ∴ ABD-E = DBC-H。



注意 此二ツノ三角埽ハ對稱ニシテ相等シキモ全等ナラズ。

定理 (6) 矩形六面體ノ體積ハ一角頂ニ會セル三稜ノ乘積ニ等シ.

〔證明〕 矩形六面體 ABCD-E ニ於テ AB, AD, AE ナ夫々線單位ノ a 倍, b 倍, c 倍トス。然ルトキ AB, AD, AE ナ夫々 a 箇, b 箇, c 箇ニ等分シ各分點ヲ過リテ各稜ニ垂直ナル平面ヲ作レバ元體ハ一稜ガ線單位ナル立方體 abc 箇ニ分ケル。 ∴ ABCD-E ノ體積ハ體積單位ノ abc 倍ナリ。

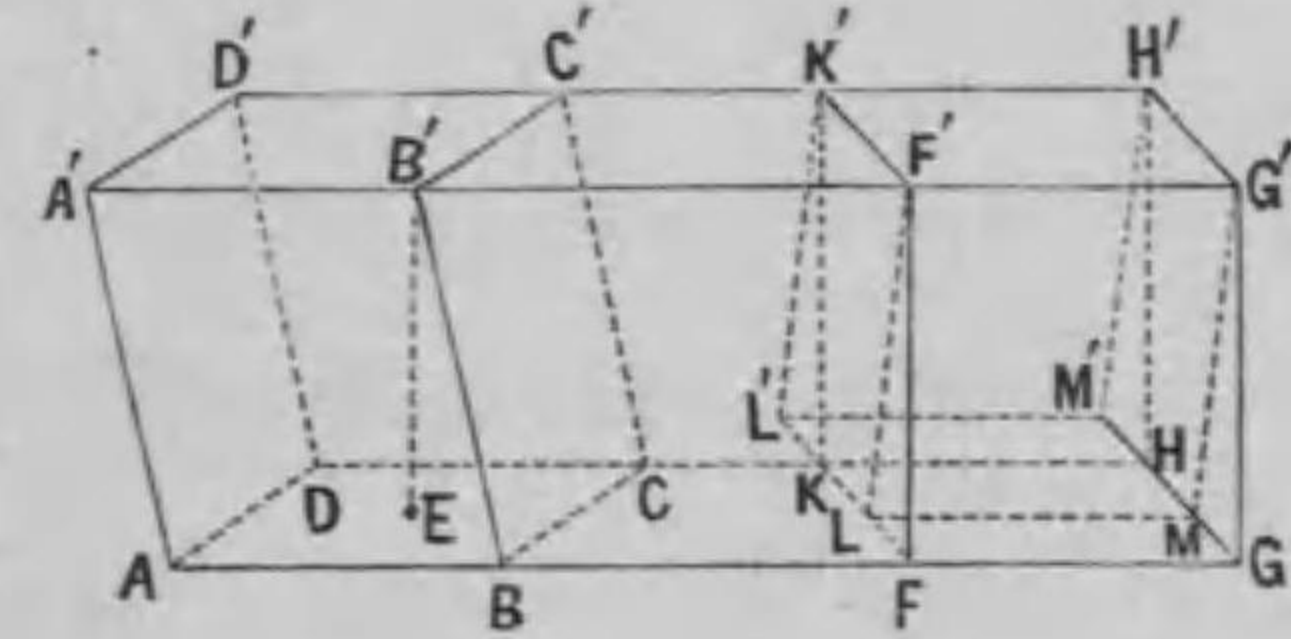
此定理ハ、矩形六面體ノ體積ハ底面ト高サトノ乘積ニ等シ、ト換言シ得ベシ。

系 (1) 立方體ノ體積ハ一稜ノ三乗ニ等シ.

系 (2) 等底, 等高ナル矩形六面體ハ等積ナリ.

定理 (7) 平行六面體ノ體積ハ底面ト高サトノ乘積ニ等シ.

〔證明〕 平行六面體 ABCD-A' ナ P トシ、高サヲ B'E トス。然ルトキ一稜 AB ノ引長上ニ FG=AB ニ取り、F, G ナ過リ FG ニ垂直ナル二平面ヲ作り、之ト二傍面 AB', DC' 及ビ兩底面ノ引長トニテ直平行六面體 FF'K'K-G ヲ形成シ之ヲ Q トセバ P 體ノ一傍面 AA'D'D ナ其底面ト見做ストキハ FF'K'K' ハ其直截リ口ニ當ル。 ∴ P 體=Q 體。



又 F', K' ナ過リ F'K' ニ垂直ナル二平面ヲ作り、之ト四平面 FK', GH', FH, F'H' トニテ矩形六面體 LMG'F'-L' ヲ形成シ之ヲ R トセバ Q 體ノ一傍面 FG' ナ其底面ト見做ストキハ LF'G'M' ハ其直截リ口ニ當ル。 ∴ Q 體=R 體。 ∴ P 體=R 體。 然ルニ矩形六面體 R=LMM'L'/F'L' ニシテ、底面 LMM'L' = F'G'H'K' = FGHK = ABCD 且ツ 高サ F'L' = B'E ナルユエ 平行六面體 P = ABCD.B'E。

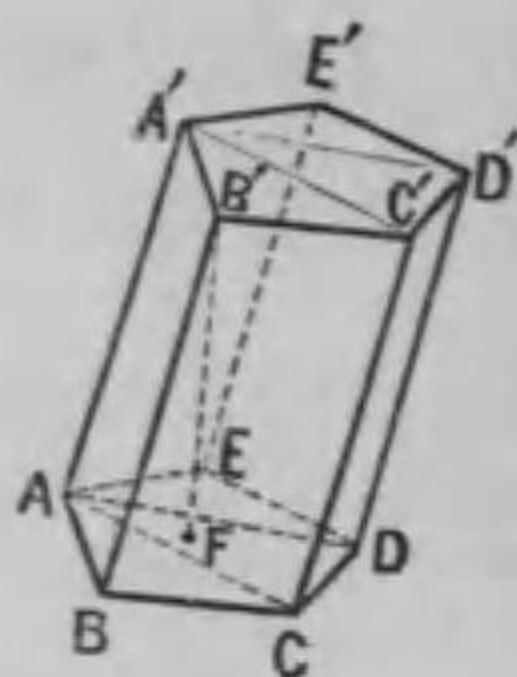
定理 (8) 角埽ノ體積ハ底面ト高サトノ乘積ニ等シ.

〔證明〕 第一 三角埽ノ場合。 上圖ノ左方ヲ用フ。 三角埽 (ABC-A') ノ高サヲ B'E トス。 AA', CC' ナ含ミ對面ニ平行スル二平面ヲ作り、之ト二底面ノ引長トニテ平行六面體 ABCD-A' ヲ形成スルトキハ $ABC-A' = \frac{1}{2} (ABCD-A') = \frac{1}{2} \square AC.B'E = \triangle ABC.B'E$

第二 一般ノ角嚮ノ場合

多角嚮 $ABCDE-A'$ ノ高サヲ $B'F$ トス。然ルトキ底面ニ其一角頂ヨリ對角線 AC , AD ヲ引キ此等ノ各々ト AA' トヲ含ム平面ヲ作レバ元體ハ三角嚮ニ分タル。故ニ $(ABCDE-A')$

$$\begin{aligned} &= (ABC-A') + (ACD-A') + (ADE-A') \\ &= \triangle ABC \cdot B'F + \triangle ACD \cdot B'F + \triangle ADE \cdot B'F \\ &= (\triangle ABC + \triangle ACD + \triangle ADE) \cdot B'F \\ &= ABCDE \cdot B'F. \end{aligned}$$



系 (1) 等底, 等高ナル角嚮ハ等積ナリ。

逆ニ, 等積ナル角嚮ハ等底或ハ等高ナレバ, 等高或ハ等底ナリ。

系 (2) 等底或ハ等高ナル角嚮ハ高サ或ハ底ニ比例ス。

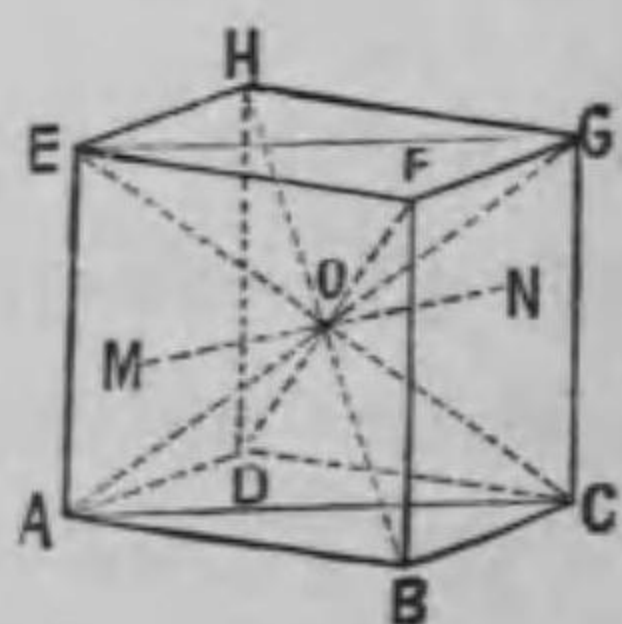
問 題 及 ビ 解 答

1. (a) 平行六面體 $ABCD-E$ ノ四ツノ對角線 EC, GA, HB, FD ハ一點 (重心又ハ中心) ニ於テ相交リ且ツ互ニ二等分ス。 (各醫)

(b) 其交點ヲ過リ對面ニ終ル直線ハ皆其點ニ於テ二等分セラル。

(c) 平行六面體ノ對稜ノ中點ヲ連結セル六直線ハ一點ニ於テ相交リ且ツ互ニ二等分ス。

[證明] (a) $EA \parallel FB \parallel GC$ ナルユエ $EACG$ ハ平行四邊形ニシテ其對角線 EC, GA ハ O ニ於テ互ニ二等分セラル。同様ニ $EBCH$ ノ對角線 EC, HB モ亦タ互ニ二等分セラル。然ルニ EC ノ中點ハ只一ツノ O ナルユエ HB モ亦タ O ニ於テ二等分セラル。



同様ニ $\square HDBF$ ニ於テ FD モ亦タ O ニ於テ二等分セラル。故ニ題言ノ如シ。

(b) O ヲ過リ任意ノ對面ニ終ル任意ノ直線 MN ヲ引ケバ 面 $EMCN$ ト 面 AH, BG トノ交線 $EM \parallel CN$ 且ツ $EO = OC$ ニシテ $\triangle EMO \equiv \triangle CON$, $\therefore MO = ON$.

(c) 次圖ヲ用フ。平行六面體ノ對面ハ夫々平行シ且ツ全等ナル平行四邊形ナリ, 故ニ $PR \left(\angle \frac{1}{2} EB \angle \frac{1}{2} HC \right) \parallel SQ$ ナルヲ以テ $PRQS$ ハ平行四邊形ニシテ其對角線 PQ, RS ハ O ニ於テ互ニ二等分セラル。同様ニ $\square RTSU$ ノ對角線 RS, TU モ亦タ互ニ二等分セラル。然ルニ RS ノ中點ハ只一ツノミナルユエ TU ノ中點モ亦タ O ナリ。同様ニ他ノ三雙ノ對稜ノ中點ノ連結線モ亦タ皆 O ニ於テ二等分セラルルコトヲ證明シ得。故ニ題言ノ如シ。

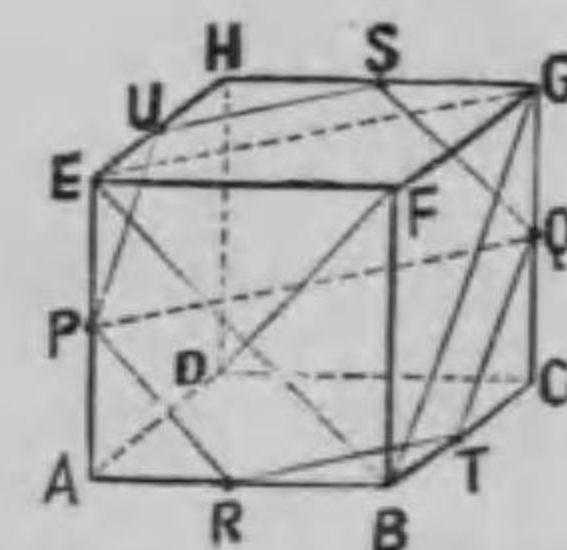
注意 此交點ハ中心ナリ, 故ニ四對角線ト此六直線トハ中心ニ於テ互ニ二等分セラル。

2. (a) 立方體 $(ABCD-EFGH)$ ニ於テ, 三ツノ角頂 B, E, G , ヲ含ム平面ハ對角線 DF ニ垂直ナリ。 (專檢)

(b) 立方體ノ兩對角頂ヲ過ラザル六稜ノ各中點ハ正六角形ノ各角頂ナリ。

[證明] (a) 正方形 HF ノ對角線 $HF \perp EG$. 又 $DH \perp$ 面 HF ナルユエ $DH \perp EG$, $\therefore EG \perp$ 面 DFH , 從テ $DF \perp EG$. 同様ニ $DF \perp BE$. $\therefore DF \perp$ 面 BEG .

(b) 立方體 $(ABCD-EFGH)$ ノ兩對角頂 D, F ヲ過ラザル對稜ノ中點ヲ夫々 P, Q, R, S, T, U トス。然ルトキハ $US \parallel EG \parallel PQ$ ナルユエ $PUSQ$ ハ一平面上ニ在リ。同様ニ $USQT$ モ亦タ一平面上ニ在リ。然ルニ此二平面ハ三點 U, S, Q ヲ共有スルユエ一致ス, 即チ T ハ前ノ平面上ニ在リ。同様ニ R モ亦タ前ノ平面上ニ在リ。故ニ $PUSQTR$ ハ一平面上ニ在リテ, 且ツ此各邊ハ相等シキ正方形ノ對角線ノ半分ヅツナルユエ相等シ。

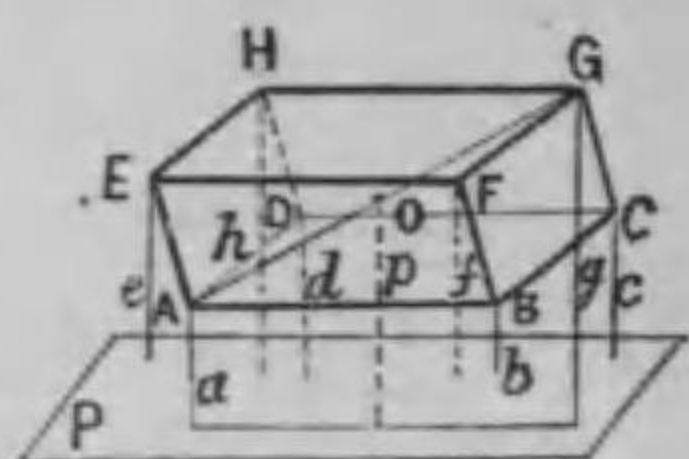


次ニ梯形 $PUSQ \equiv USQT \equiv QTRP$ ナルユエ $PUSQTR$ ノ各角ハ相等シ。

$\therefore PUSQTR$ ハ一平面上ニ在リテ, 各邊ガ相等シク且ツ各角ガ相等シキユエ正六角形ナリ。

3. 平行六面體ノ中心ト此體ヲ截ラザル平面トノ距離ハ、各角頂ト其面トノ距離ノ相加平均ニ等シ。

[證明] 平行六面體(ABCD-EFGH)ノ中心ヲOトモベ、P面ヘノ垂線 al/g , AGノ正射影ハ一直線ニシテ $AO=OG$ ナルユエ $2p=a+g$. 同様ニ $2p=b+h$, $2p=c+e$ 及ビ $2p=d+f$.
 $\therefore 8p=a+b+c+d+e+f+g+h$



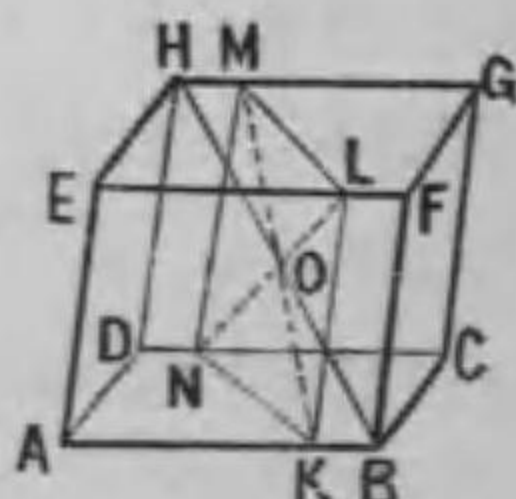
4. N 角塔ニ於テハ (a) 稜ノ總數 = $3n$.
 (b) 面角ノ總和 = $8(n-1)\hat{R}$. (c) 二面角ノ總和 = $4(n-1)\hat{R}$.

[證明] (b) N 角塔ノ傍面ハ n 箇アリテ各々平行四邊形ナルユエ、其面角ノ和 = $4n\hat{R}$. 又二底面ノ内角ノ和 = $2(2n\hat{R}-4\hat{R})$. \therefore 總和 = $4n\hat{R}-8\hat{R}+4n\hat{R}=8(n-1)\hat{R}$.
 (c) 角塔ノ二底面ハ平行ナルユエ之ト一傍面トノ爲スニツノ二面角ノ和ハ各々 $2\hat{R}$ ナリ. 故ニ此等ノ二面角ノ和 = $2n\hat{R}$.
 又直截リ口ヲ作ルトキハ、傍面ノ爲スニ二面角ノ和ハ其截リ口ナル n 邊形ノ内角ノ和即チ $2n\hat{R}-4\hat{R}$ ナリ. \therefore 二面角ノ總和 = $2n\hat{R}+2n\hat{R}-4\hat{R}=4(n-1)\hat{R}$.

5. (a) 平行六面體ノ對面ニ交ル平面ニテノ截リ口ハ平行四邊形ナリ.

(b) 平行六面體ノ對角線ノ交點ヲ過リ對面ニ交ル平面ハ其體ヲ二等分ス.

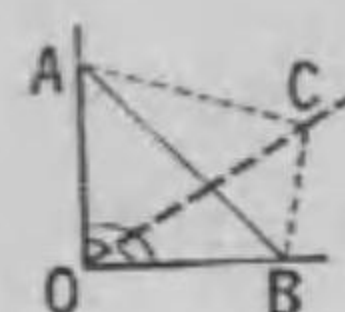
[證明] (b) 截リ口 KLMN ハ平行四邊形ニシテ其對角線 MKモ對角線ノ中點Oヲ過ルユエ $HM=KB$. 同様ニ $EL=CN$. 故ニ $HMLE=KBCN$ 及ビ $ADNK=GFLM$. \therefore 角塔(AKND-E), (GMLF-C)ハ其各面、各面角、各二面角ガ夫々相等シキユエ等積ナリ即チ面 KLMN ハ ABCD-Eヲ二等分ス.



6. 矩形六面體ノ一角頂ノ三稜ヲ過ル平面ノ截リ口ハ銳角三角形ナリ.

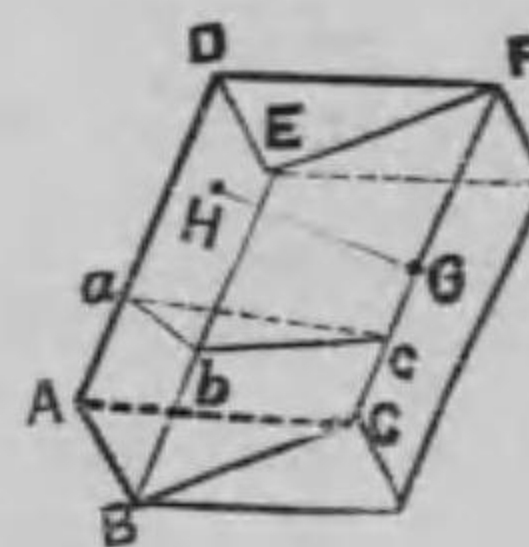
[證明] 30頁ノ8題ノ(c)ト同様ナリ.

[別證] 其角頂ヲOトシ、截リ口ヲABCトス. 然レバ OA, OB, OC ハ互ニ垂線ナルユエピタゴラス定理ニ依テ $\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2$, $\overline{BC}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2$ 及ビ $\overline{AC}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OC}^2$ ナリ. 故ニ $\triangle ABC$ ハ何レノ二邊ノ平方ノ和モ他ノ一邊ノ平方ヨリモ大ナルヲ以テ、平面幾何學定理ニ依テ各邊ノ對角ハ銳角ナリ、即チ ABCハ銳角三角形ナリ.



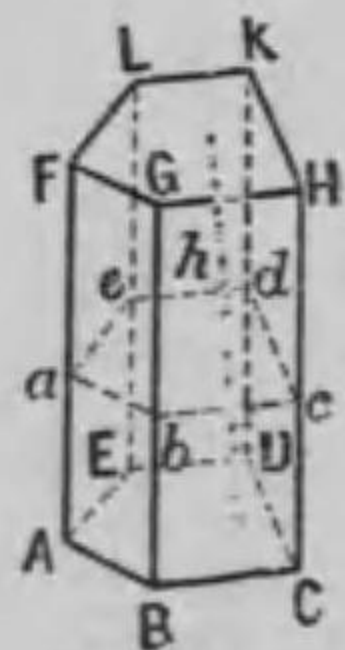
7. (a) 三角塔ノ二傍面ノ和ハ他ノ傍面ヨリモ大ナリ.
 (b) 三角塔ノ體積ハ一傍稜ト其對面トノ積ノ半ニ等シ.
 (c) 角塔ノ直截リ口ハ他ノ截リ口ヨリモ小ナリ.

[證明] (a) 三角塔ABC-Dノ直截リ口ヲ abc トモベ $\square AE + \square BF = AD \cdot ab + BE \cdot bc = AD(ab+bc)$ 及ビ $\square AF = AD \cdot ac$. 然ルニ $ab+bc > ac$ ナルユエ $\square AE + \square BF > \square AF$. 同様ニ何レノ二面ノ和モ他ノ面ヨリ大ナルコトヲ證シ得.



(b) ABC-Dノ傍稜CFヨリ其對面ヘノ高サヲGHトス. 然ルトキ平行六面體DABE-Fヲ形成スレバ $ABC-D = \frac{1}{2}(DABE-F) = \frac{1}{2}DABE \cdot GH$.

(c) 角塔ABCDE-Fノ直截リ口ヲ $abcde$ トシ、他ノ截リ口ヲABCDEトシ、高サヲhトス. 然レバ $ABCDE-F = abcde \cdot h$. $AF = ABCDE \cdot h$, 然ルニ $AF > h$. $\therefore abcde < ABCDE$.



8. 角嚮ノ底面ガ (a) 正三角形, (b) 正方形, (c) 正六角形,
(d) 正八角形, 其ノ一邊ヲ a , 高ヲ h , 體積ヲ V トセバ次ノ證如何.

(a) $V = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 h$. (b) $a^2 h$. (c) $\frac{3\sqrt{3}}{2} a^2 h$. (d) $2(\sqrt{2}+1)a^2 h$.

[證明] 角嚮ノ體積ハ底面ト高サトノ乘積ニ等シ, 故ニ

(a) 底面積 $= \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$ (平幾), $\therefore V = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 h$.

(c) 正六角形ハ其各邊ヲ一邊トセル六ツノ正三角形ニ分チ得ベシ, 故ニ (a) ニ依テ

$V = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \times 6 h = \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2 h$.

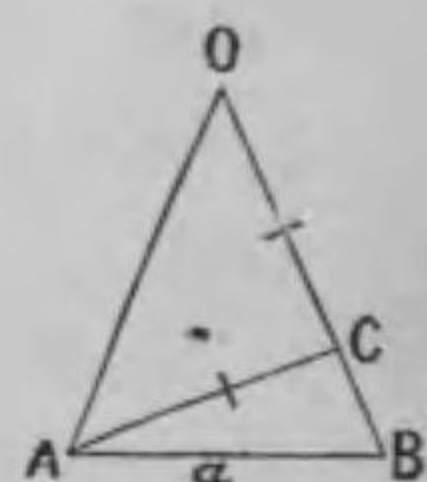
(d) 正八角形ハ其各邊ヲ一邊トセル八ツノ二等邊三角形ニ分チ得. 而シテ一邊ニ對スル中心角ハ $4R \div 8 = \frac{1}{2}R$ ナリ. 故ニ其一ツノ三角形ヲ OAB トシ, $AC \perp OB$ トセバ明カニ $AC=OC$ ナリ. 而シテピタゴラス定理ニ依リテ $OA^2 = AC^2 + OC^2 = 2AC^2$ 及ビ $AB^2 = AC^2 + BC^2 = AC^2 + (OB-OC)^2 = AC^2 + OB^2 - 2OB \cdot OC + OC^2$ ナリ.

サテ $AC=OC=x$, $OA=OB=y$ トセバ上式ハ夫々 $y^2 = 2x^2$ 及ビ $a^2 = x^2 + y^2 - 2xy + x^2 = 2x^2 + y^2 - 2xy$.

之ヲ解キ $x = \frac{a}{\sqrt{2(2-\sqrt{2})}}$, $y = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2(2-\sqrt{2})}}$

$\therefore \triangle OAB = \frac{1}{2}xy = \frac{\sqrt{2}+1}{4} a^2$ トナル.

$\therefore V = \frac{\sqrt{2}+1}{4} a^2 \times 8h = 2(\sqrt{2}+1)a^2 h$.



9. (a) 平行六面體ノ四ツノ對角線ノ平方ノ和ハ, 其各稜ノ平方ノ和ニ等シ.

或ハ 一角頂ニ會スル三稜ノ平方ノ和ノ四倍ニ等シ.

(b) 矩形六面體ノ一對角線ノ平方ハ一角頂ニ會スル三稜ノ平方ノ和ニ等シ. 又各對角線ハ相等シ.

(c) 立方體ノ一對角線ノ平方ハ一邊ノ平方ノ三倍ニ等シ.

[證明] 72 頁ノ下圖ヲ用フ.

(a) 平行四邊形ノ兩對角線ノ平方ノ和ハ各邊ノ平方ノ和ニ等シ (平幾)

$$\begin{aligned} \therefore EC^2 + GA^2 + HB^2 + FD^2 &= EA^2 + AC^2 + CG^2 + GE^2 + HD^2 + DB^2 + BF^2 + FH^2 \\ &= EA^2 + CG^2 + HD^2 + BF^2 + (AC^2 + DB^2) + (EG^2 + FH^2) \\ &= EA^2 + CG^2 + HD^2 + BF^2 + AB^2 + EC^2 + CD^2 + DA^2 + EF^2 + FG^2 + GH^2 + HE^2 \end{aligned}$$

次ニ 稜ハ夫々四ツツ等シキニエ, 上ノ結果ハ $4(AE^2 + AB^2 + AD^2)$ トナル.

(b) 矩形六面體ニ於テハ $EA \perp$ 面 DB , 又 面 DB ハ矩形ナリ.

$\therefore EC^2 = AE^2 + AC^2 = AE^2 + AD^2 + DC^2 = AE^2 + AD^2 + AB^2$.

10. 四角嚮ノ各稜ノ平方ノ和ハ, 各對角線ノ平方ノ和ト其二交點ノ連結線ノ平方ノ八倍トノ差ニ等シ.

[證明] 四角嚮 $ABCD-EFGH$ ノ對角線 EC, GA 及ビ FD, HB ノ交點ヲ O, O' トス.

然ルトキ $\square AG$ ノ對邊 AC, EG 及ビ對角線 EO' ノ中點

K, M, O ハ一直線上ニ在リテ $OK \leq \frac{1}{2}AE$. 同様ニ

$O'L \leq \frac{1}{2}HD$. 而シテ $AE \leq HD$, 故ニ $\square OKLO'$ ノ對

邊 $OO' = KL = MN$.

$\square AG$ ニ於テ $EC^2 + GA^2 = AE^2 + EG^2 + GC^2 + AC^2$,

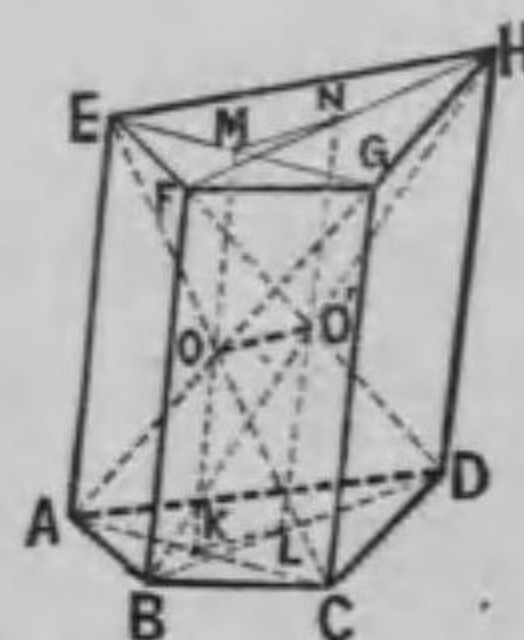
$\square BH$,, $FD^2 + HB^2 = BF^2 + FH^2 + HD^2 + BD^2$.

$\therefore EC^2 + GA^2 + FD^2 + HB^2 = AE^2 + GC^2 + BF^2 + HD^2 + (AC^2 + BD^2) + (EG^2 + FH^2)$

然ルニ $ABCD$ ニ於テ $AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 + 4OO'^2$ [$KL=OO'$] (平幾)

$EFGH$ ニ於テ $EG^2 + FH^2 = EF^2 + FG^2 + GH^2 + EH^2 + 4OO'^2$ [$MN=OO'$] (,,)

$\therefore EC^2 + GA^2 + FD^2 + HB^2 - 8OO'^2 = AE^2 + BF^2 + CG^2 + DH^2 + AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 + EF^2 + FG^2 + GH^2 + EH^2$.



第 三 章

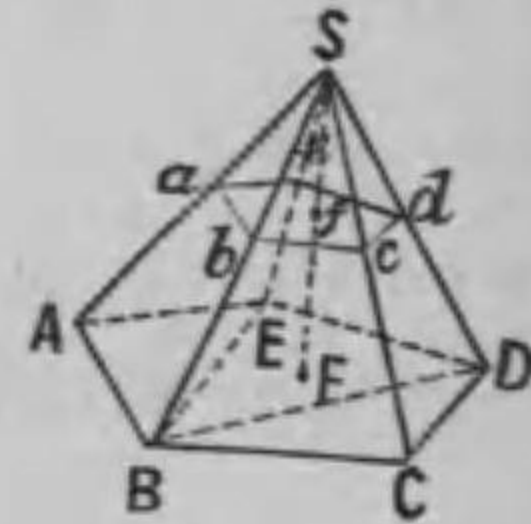
角 錐

7. 定義 及 ビ 記法

定義 (1) 角錐 トハ多角形ト其各邊ヲ底邊トシ其面外ノ一點ヲ共通頂トセル三角形トニテ圍マレタル多面體ヲ云フ。

而シテ、其三角形ノ各面ヲ傍面或ハ側面ト云ヒ、各傍面ノ和ヲ傍面積ト云ヒ、二傍面ノ交線ヲ傍稜ト云フ。

又其多角形ヲ底面ト云ヒ、其一點ヲ頂點ト云フ。頂點ト底面トノ距離ヲ高サト云フ。



記法 右圖ノ如キ角錐ハ之ヲ角錐

S-ABCDE ト記ス。

角錐ハ底面ノ邊數ニ依リテ三角錐、四角錐、五角錐、等ト云フ。

三角錐ハ特ニ之ヲ四面體ト云ヒ、何レノ面ヲモ底ト見做シ得。

定義 (2) 正角錐 トハ角錐ノ底面ガ正多角形ニシテ高サガ其中心ヲ過ルモノヲ云フ。其高サヲ軸トモ云フ。

又頂點ト底ノ一邊トノ距離ヲ斜高或ハ傍高ト云フ。

定義 (3) 平截頭角錐或ハ角錐臺 トハ角錐ノ底面ト之ニ平行ナル平面ニテノ截リ口トノ間ノ部分ヲ云フ。

其平行二面ヲ各々底面ト云ヒ、其距離ヲ高サト云フ。

又二底面ノ對應セル二邊ノ距離ヲ斜高ト云フ。

記法 ハ角錐ト同様ナリ。

8. 重要定理

定理 (1) 角錐ヲ底面ニ平行ナル平面ニテ截ルトキハ

(i) 傍稜ト高サトハ比例ニ分タル。

(ii) 截リ口ト底面トハ相似ナリ。

〔證明〕 前頁ノ圖ヲ用フ。角錐 S-ABCDE ノ高サヲ SF トシ、底面ニ平行ナル截リ口ヲ abcd トシ、高サト此面トノ交點ヲ f トス。然ルトキハ

(i) 面 AC//面 ac ト 面 SAB トノ交線 AB//ab ナルユエ Sa : aA = Sb : bB,

同様ニ Sb : bB = Sc : cC, 等。 ∴ Sa : aA = Sb : bB = Sc : cC = ……

次ニ AF, af ナ結ベバ AF//af ナルユエ Sa : aA = Sf : fF.

∴ Sa : aA = …… = Sf : fF.

(ii) 前問ノ證ト同様ニ AB//ab, BC//bc, …… 且ツ此等ハ夫々同方向ナルユエ $\hat{A}BC = \hat{a}bc, \hat{B}CD = \hat{b}cd, \dots$

次ニ SB : AB = Sb : ab ナルユエ SB : Sb = AB : ab, 同様ニ SB : Sb = BC : bc, 等

∴ AB : ab = BC : bc = ……

即チ 同邊數ニシテ、對應角ガ相等シク、對應邊ガ比例スルユエ $ABCDE \sim abcd.$

系 (1) 角錐ノ底面ニ平行ナル平面ニテノ截リ口ノ面積ハ頂點ヨリ此等ノ面ニ至ル距離ノ二乗ニ比例ス。

〔證明〕 二截面ヲ abcd, ABCDE トシ、頂點ト此等ノ面トノ距離ヲ夫々 Sf, SF トス。

然ルトキハ $abcd \sim ABCDE$ 且ツ $ab : AB = Sa : SA = Sf : SF$ ナルユエ

$abcd : ABCDE = ab^2 : AB^2 = S_f^2 : S_F^2$

系 (2) 等高ナル角錐ヲ頂點ヨリ等距離ニ且ツ底面ニ平行ナル平面ニテ截ルトキハ、其截リ口ノ面積ハ底面積ニ比例ス。

系 (3) 等底、等高ナル角錐ヲ頂點ヨリ等距離ニ且ツ底面ニ平行ナル平面ニテ截ルトキハ、其截リ口ハ等積ナリ。

定理 (2) 等底, 等高ナル角錐ハ等積ナリ.

(水講)

[證明] 三角錐 S-ABC ト四角錐 S'-DEFG ニ於テ 底面 ABC=DEFG 及ビ高サ

SH=S'H' トス. 然ルトキ若シ此二ツノ角錐ガ等積ナラズトセバ

(S-ABC) > (S'-DEFG) トシ, 其差ヲ底面ハ ABC ニシテ高サハ XH ナル角錐トセヨ.

高サ SH, S'H' ナ各々

XH ヨリ小ナル同數ノ相

等シキ部分ニ分チ, 各分點

ヲ過リ底面ニ平行ナル平

面ヲ畫ケバ對應スル截リ

口ハ夫々等積ナリ.

今各截リ口及ビ元ノ底

面ヲ底面トシ, 高サノ各分ニ等シキ高サノ角錐ヲ上圖ノ如ク作ルトキハ此等ノ對應ス

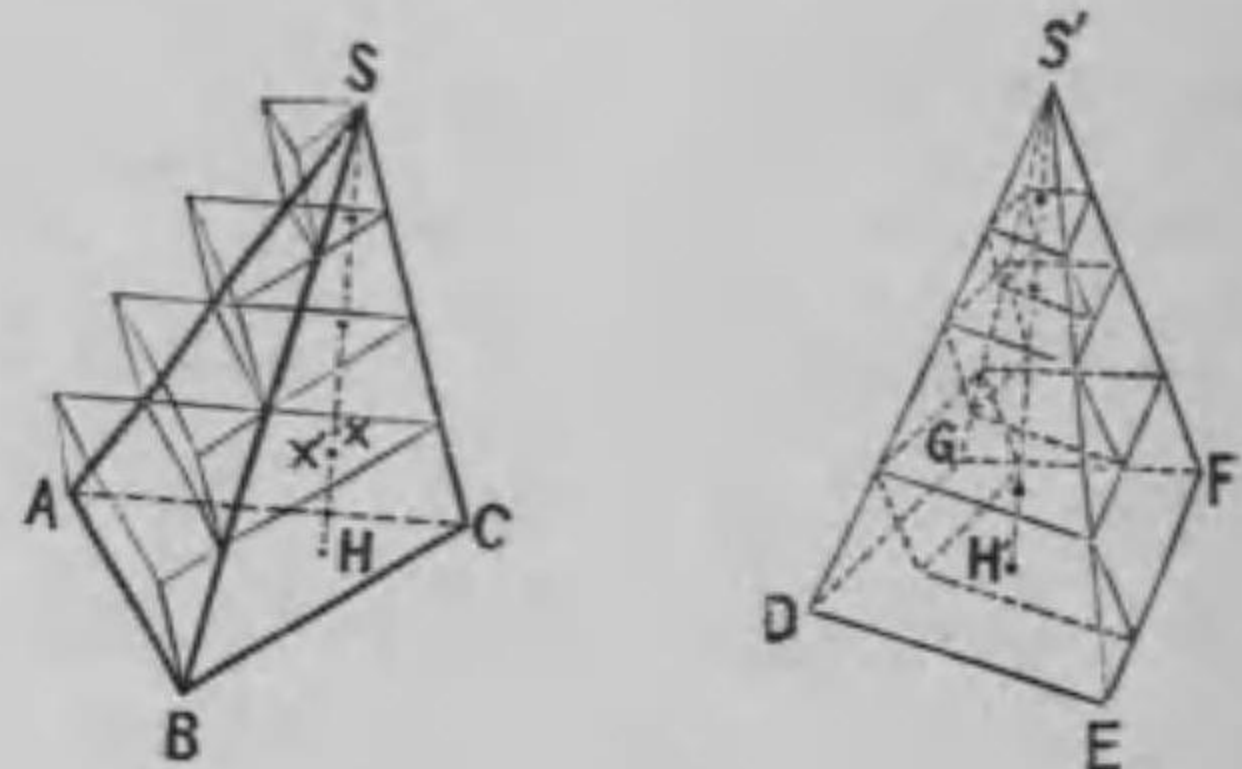
ル角錐ハ夫々等底, 等高ナルユエ等積ナリ.

故ニ (S-ABC) 及ビ (S'-DEFG) ニ屬スル角錐ノ和ヲ夫々 σ, σ' トスレバ

$\sigma - \sigma' =$ 角錐 (ABC, X'H) 又 $\sigma > (S-ABC)$ 及ビ $\sigma' < (S'-DEFG)$ ナル故

$\sigma - \sigma' > (S-ABC) - (S'-DEFG) =$ 角錐 (ABC, XH). \therefore ABC, X'H > ABC, XH.

X'H > XH 之レ假設ニ背ク, 故ニ (S-ABC) = (S'-DEFG).



定理 (3) 角錐ノ體積ハ底面ト高サトノ乘積ノ三分ノ一ニ等シ.

[證明] 第一 三角錐ノ場合.

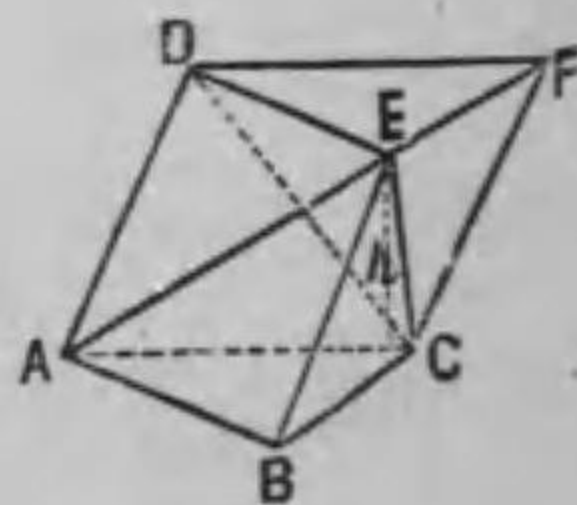
三角錐 (S-ABC) ナ之ト同底 ABC, 同高 h

ナル三角錐ニ完成スレバ

E-ABC = C-DEF (等底, 同高)

\therefore C-DEF = E-CDA.

\therefore E-ABC = $\frac{1}{3}$ (ABC-D) = $\frac{1}{3}$ Δ ABC.h



第二 一般ノ角錐ノ場合.

多角錐 S-ABCDE ノ高サヲ SF トス. 底面ニ

BE, BD ナ引キ 平面 SBE, SBD ナ作レバ

S-ABCDE

= (S-BCD) + (S-BDE) + (S-BEA)

= $\frac{1}{3}$ Δ BCD . SF + $\frac{1}{3}$ Δ BDE . SF + $\frac{1}{3}$ Δ BEA . SF

= $\frac{1}{3}$ ABCDE . SF.



系 (1) 三角錐ハ之ヲ等積ナル三ツノ三角錐ニ分ツコトヲ得.

[略解] 本定理第一ノ場合ヲ見ヨ.

(山商, 七高, 東師, 仙醫)

系 (2) 三角錐ハ之ト等底, 等高ナル三角錐ノ三分ノ一ナリ. (陸經)

系 (3) 等積ナル角錐ハ等底或ハ等高ナレバ, 等高或ハ等底ナリ.

系 (4) 等底或ハ等高ナル角錐ノ體積ハ高サ或ハ底ニ比例ス.

注意 多面體ノ體積ヲ測ルニハ, 之ヲ數多ノ角錐ニ分チテ各々ノ體積ヲ測リ, 以テ之ヲ合計スルヲ通例トス.

定理 (4) 平截頭角錐ノ體積ハ兩底面ト其比例中項トノ和ニ高サヲ乘ジタル積ノ三分ノ一ニ等シ.

[證明] 上圖ヲ用フ. 平截頭角錐 ABCDE-a ノ高サ fF ナ h トシ, 而シテ底面 ABCDE, abcde ナ夫々 β, β' トスレバ其比例中項ハ $\sqrt{\beta\beta'}$ ナリ. 次ニ截頭部ヲ完成シ其高サ Sf ナエトセバ 角錐 S-ABCDE ノ高サ SF = h+x ナリ.

サテ $\beta \propto \beta'$ ナルユエ $\frac{\beta}{\beta'} = \left(\frac{AB}{ab}\right)^2 = \left(\frac{SA}{Sa}\right)^2 = \left(\frac{SF}{Sf}\right)^2 = \left(\frac{h+x}{x}\right)^2, \therefore \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta'}} = \frac{h+x}{x}$

之ヨリ $x = \frac{h\sqrt{\beta'}}{\sqrt{\beta}-\sqrt{\beta'}} \Rightarrow$ 得.

\therefore ABCDE-a = (S-ABCDE) - (S-abcde) = $\frac{1}{3}\beta(h+x) - \frac{1}{3}\beta'x$

= $\frac{1}{3}\beta h + \frac{1}{3}(\beta-\beta')x = \frac{1}{3}\beta h + \frac{1}{3}(\beta-\beta') \cdot \frac{h\sqrt{\beta'}}{\sqrt{\beta}-\sqrt{\beta'}}$

= $\frac{1}{3}h\{\beta + (\sqrt{\beta} + \sqrt{\beta'})\sqrt{\beta'}\} = \frac{1}{3}h\{\beta + \sqrt{\beta\beta'} + \beta'\}.$

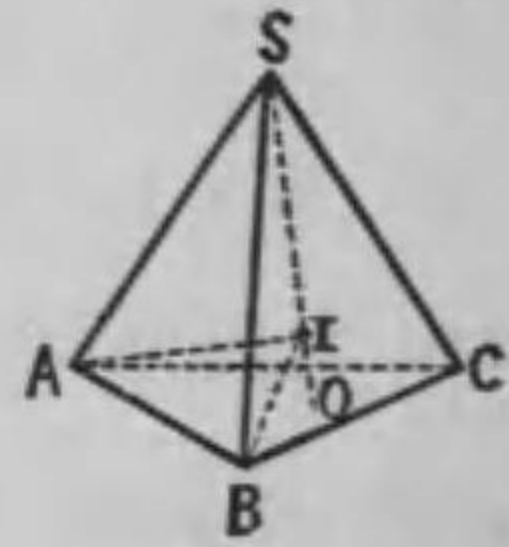
定理 (5) 正角錐ノ傍面積ハ底周ノ半ト斜高トノ乘積ニ等シ。又、平截頭正角錐ノ傍面積ハ兩底周ノ和半ト斜高トノ乘積ニ等シ。

9. 定理ニ準ズル問題

第一 四面體 (即チ三角錐) ノ性質 [三面角ノ性質ヲ参考セヨ]

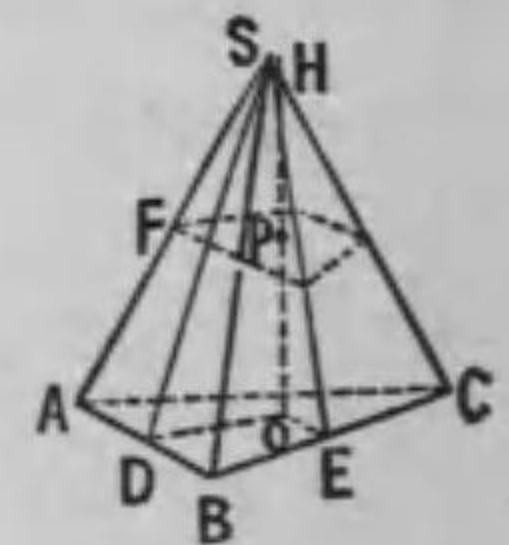
(1) 四面體ノ各二面角ヲ二等分スル六平面ハ各面ヨリ等距離ナル一點 (内心) ニ於テ相交ル。

[證明] 四面體 $S-ABC$ ノ三面角 S ノ二面角 SA, SB, SC ノ各二等分面ハ一直線 SO ニ於テ相交リ且ツ SO ハ三面角 S ノ各面ヨリ等距離ナリ。 [60 頁ノ2]
 次ニ二面角 AB ノ二等分面ト SO トノ交點ヲ I トセバ I ハ四面體ノ各面ヨリ等距離ナリ。
 故ニ二面角 BC, CA ノ二等分面モ亦タ I ヲ過ル。故ニ題言ノ如シ。



(2) 四面體ノ各稜ノ中點ヲ過リ夫々其稜ニ垂直ナル六平面ハ一點 (外心) ニ於テ相交ル。

[證明] 四面體 $S-ABC$ ノ稜 AB, BC ノ中點 D, E ヲ過リ夫々其稜ニ垂直ナル二面ノ交線ヲ OH トセバ之レ A ト B 及ビ B ト C ヨリ等距離ニ在ル點ノ軌跡ノ交リナルユエ A, B, C ヨリ等距離ナリ。
 次ニ SA ノ中點 F ヲ過リ SA ニ垂直ナル平面ト OH トノ交點ヲ P トセバ之レ S, A, B, C ヨリ等距離ニ在リ。
 ∴ 稜 SB, SC, AC ノ中點ヲ過リ夫々其稜ニ垂直ナル平面モ亦タ P ヲ過ル。



注意 本題ハ、四面體ノ各面ノ外心ヨリ夫々其面ニ立ツル四垂線ハ一點ニ於テ相交ルト換言シ得ベシ。其證ハ 122 頁ノ定理 (3) ヲ見ヨ。

(3) 四面體ノ各角頂ト其對面ノ重心トヲ結ビタル四直線ハ一點 (重心) ニ於テ相交ル。 (新證)

[證明] 四面體 $S-ABC$ ノ底面及ビ傍面ノ重心ヲ順次ニ E, F, H, K トス。然レトキ CE, SF ノ引長ハ何レモ AB ノ中點 D ヲ過ル。而シテ $CD:ED=3:1=SD:FD$ ナルユエ $EF \parallel CS$ 。 SE ト CF トノ交點ヲ G トセバ $\triangle SGC \sim \triangle EGF$ ナルユエ $\frac{SG}{GE} = \frac{CG}{GF} = \frac{SC}{EF} = \frac{CD}{DE} = \frac{3}{1}$ 即チ SE, CF ハ其各々ヲ $3:1$ ニ内分スル點 G ニ於テ相交ル。

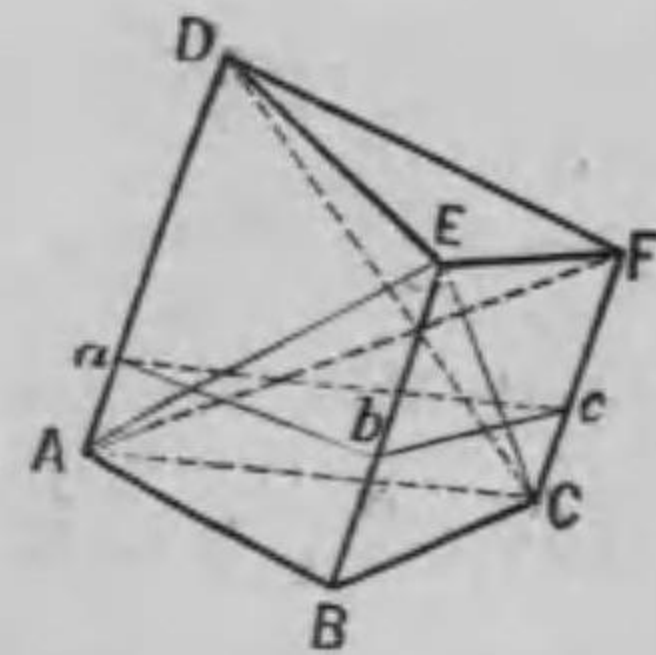


同様ニ AH, BK モ亦タ SE ト其各々ヲ $3:1$ ニ内分スル點ニ於テ相交ルコトヲ證シ得。然ルニ SE ヲ $3:1$ ニ内分スル點 G ハ只一ツナリ。
 ∴ SE, AH, BK, CF ハ其各々ヲ $3:1$ ニ内分スル點 G ニ於テ相交ル。

第二 斜截頭三角錐

斜截頭三角錐ハ其底面ヲ底面トシ斜截頭ノ各角頂ヲ頂點トスル三箇ノ三角錐ノ和ニ等シ。

[證明] 斜截頭三角錐 $ABC-DEF$ ヲ平面 DEC, AEF ニテ截ルトキハ三箇ノ錐體 $(E-ABC), (E-CAD), (E-CDF)$ ヲ得。然ルニ $(E-CAD) = (B-CAD)$ [同底, 等高] $= (D-ABC)$ 。
 又 $(E-CDF) = (E-CAF)$ [等底, 等高] $= (B-CAF)$ [同底, 等高] $= (F-ABC)$ 。
 ∴ $(ABC-DEF) = (E-ABC) + (D-ABC) + (F-ABC)$ 。



系. 斜截頭三角錐ノ體積ハ其直截リ口ト傍稜ノ和トノ乘積ノ三分ノ一ナリ。

〔證明〕 前圖ヲ用フ。直截リ口ヲ abc トス。然ルトキハ、角錐ノ體積ハ直截リ口ト一傍稜トノ乘積ニ等シク；角錐ノ體積ハ之ト同底、同高ナル角錐ノ三分ノ一ナリ；故ニ

$$\begin{aligned} (ABC-DEF) &= (D-ABC) + (E-ABC) + (F-ABC) \quad \text{〔本定理〕} \\ &= \frac{1}{3} \triangle abc \cdot DA + \frac{1}{3} \triangle abc \cdot EB + \frac{1}{3} \triangle abc \cdot FC \\ &= \frac{1}{3} \triangle abc (DA + EB + FC). \end{aligned}$$

問 題 及 ビ 解 答

1. (a) 四面體ノ對稜ガ夫々等シケレバ、一角頂ノ三ツノ面角ノ和ハ二直角ニ等シ。

(b) 三角錐ノ各角頂ニ於ケル三ツノ面角ノ和ガ各々二直角ナルトキハ、傍面ハ全等ナリ。

〔證明〕 (a) 各面ハ三邊ガ夫々相等シキユエ全等ナリ。從テ一角頂 S ニ於ケル三ツノ面角ノ和ハ底面 ABC ノ内角ノ和即チ二直角ニ等シ。

(b) 三角錐 $(S-ABC)$ ノ稜 SA, SB ヲ引長シテ $SA=AD, SB=BE$ トシ、面 DSE 上ニ於テ $\hat{BAF} = \hat{CAB}, \hat{ABF} = \hat{CBA}$ ニ作レバ $\triangle AFB \equiv \triangle ACB$, $\therefore AF=AC$, 及 $\hat{AFB} = \hat{ACB}$. 而シテ $\hat{DAF} + \hat{BAF} + \hat{SAB} = 2\hat{R} = \hat{SAC} + \hat{CAB} + \hat{SAB}$ 〔假設〕 ナルユエ $\hat{DAF} = \hat{SAC}$, 故ニ二邊ト其夾角ノ等シキ $\triangle DAF \equiv \triangle SAC$, $\therefore \hat{AFD} = \hat{SCA}$.

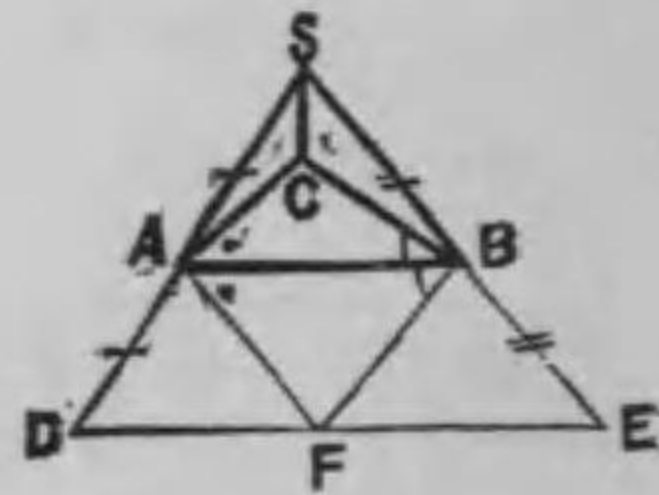
同様ニ $\hat{BFE} = \hat{SCB}$ ヲ證シ得ベシ。

$$\therefore \hat{AFD} + \hat{AFB} + \hat{BFE} = \hat{SCA} + \hat{ACB} + \hat{SCB} = 2\hat{R}$$

ナルユエ DFE ハ一直線ナリ。

而シテ A, B ハ SD, SE ノ中點ナルヲ以テ

$$\triangle SAB \equiv \triangle AFB \equiv \triangle ADF \equiv \triangle BFE, \quad \therefore \triangle SAB \equiv \triangle ACB \equiv \triangle SCA \equiv \triangle SCB.$$



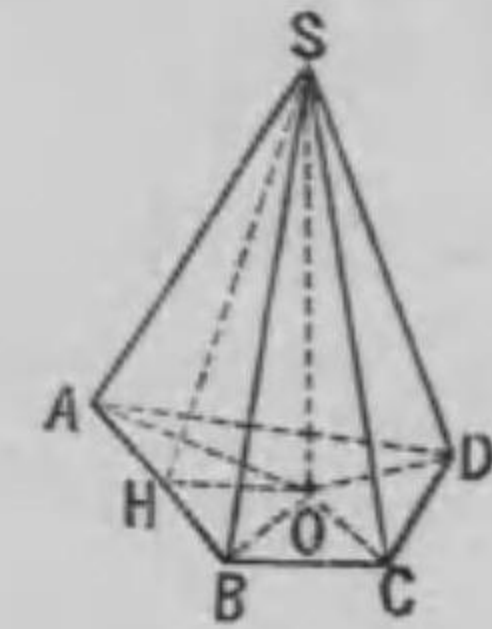
2. (a) 角錐ノ傍面積ハ其底面積ヨリモ大ナリ。

(b) 四面體ノ三面ノ和ハ、他ノ一面ヨリモ大ナリ。 (各高)

〔證明〕 (a) $S-ABCD$ ニ於テ $SO \perp ABCD$ トス。

底面ハ O ヲ各角頂ニ結ベバ傍面ト同數ノ三角形ニ分タル。而シテ $OH \perp AB$ トセバ三垂線定理ニ依テ $SH \perp AB$. 又直 $\triangle SOH$ ニ於テ斜邊 $SH > OH$. $\therefore \triangle SAB > \triangle OAB$. 同様ニ $\triangle SBC > \triangle OBC$, $\triangle SCD > \triangle OCD$, $\triangle SDA > \triangle ODA$ 之ヲ邊々相加ヘテ 傍面積 $>$ 底面積。

(b) ハ (a) ト同様ナリ。



3. (a) $\triangle ABC$ ノ各角頂ヨリ之ヲ截ラザル平面 P へノ垂線ノ相加平均ハ、元形ノ重心 O ヲリ其面へノ垂線ニ等シ。

(b) 四面體 $(S-ABC)$ ノ各角頂ヨリ之ヲ截ラザル平面 P へノ垂線ノ相加平均ハ、元體ノ重心 G ヲリ其面へノ垂線ニ等シ。

〔證明〕 (a) AO ノ引長ハ BC ノ中點 E ヲ過ル。 $A, O,$

E ヲリ P 面へノ垂線 $a//o//e$ ナルユエ此三線ハ一平面上ニ在リ。而シテ $AO:OE=2:1$ ナルユエ $1 \cdot a + 2 \cdot e = (1+2)o$ 〔平幾〕。又 $BE=EC$ ナルユエ $b+c=2 \cdot e$.

$$\therefore a+b+c=3 \cdot o.$$

(b) SG ノ引長ハ面 ABC ノ重心 O ヲ過ル。 S, G, O

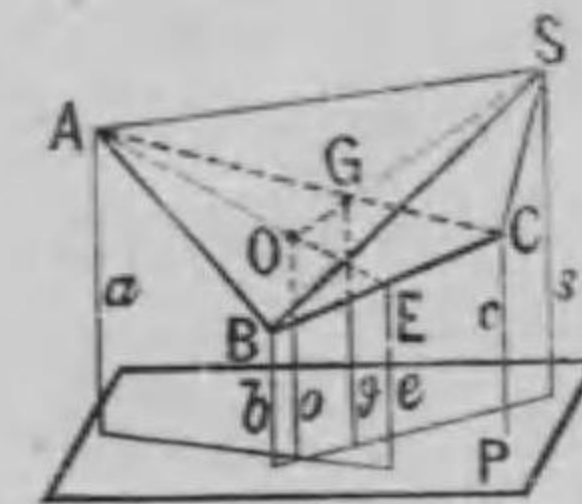
ヨリ P 面へノ垂線 $s//g//o$ ナルユエ此三線ハ一平面上ニ在リ。而シテ $SG:GO=3:1$

〔83頁(3)] ナルユエ

$1 \cdot s + 3 \cdot o = (1+3)g$ 〔平幾〕。然ルニ $3 \cdot o = a+b+c$ [(a)], 之ヲ前式ニ代用スレバ

$$s+a+b+c=4g, \quad \therefore g = \frac{1}{4}(s+a+b+c).$$

注意 74頁3題ト對照セヨ。



4. (a) 四面體ノ一角頂ニ會スル三稜ノ各々ト夫々其對稜ノ中點トヲ含ム三平面ハ同一ノ直線ニ於テ相交ル。

(b) 四面體ノ一ツノ二面角ノ二等分面ハ其對稜ヲ其二面ノ面積ノ比ニ分ツ。

(陸士, 專檢)

[證明] (a) 四面體 $S-ABC$ ニ於テ SA, SC ト夫々其對稜ノ中點 E, D トヲ含ム二平面 SAE, SCD ノ交線ハ AE, CD ノ交點 G ト S トノ連結線ナリ。

然ルニ G ハ $\triangle ABC$ ノ重心ナルユエ BG ノ引長ハ CA ノ中點 F ヲ過ル。故ニ面 SBF モ SG ヲ過ル。

\therefore 面 SAE, SCD, SBF ハ SG ニ於テ相交ル。

(b) 四面體 $S-ABC$ ノ二面角 SA ノ二等分面ト其對稜 BC トノ交點ヲ D トスレバ

$$(A-SBD) : (A-SDC) = \triangle SBD : \triangle SDC \text{ [同高]}$$

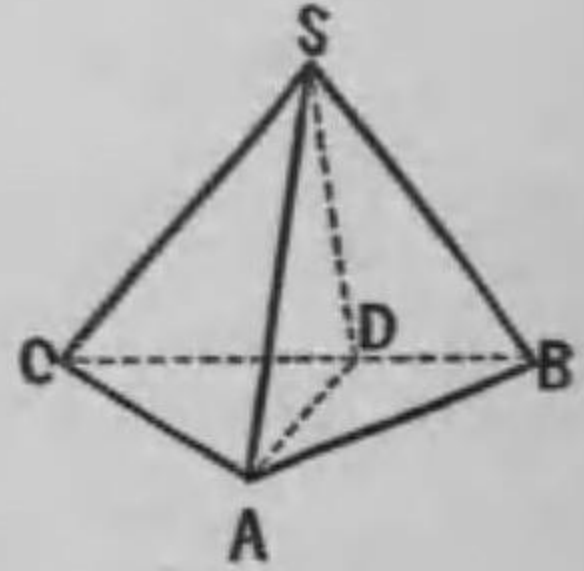
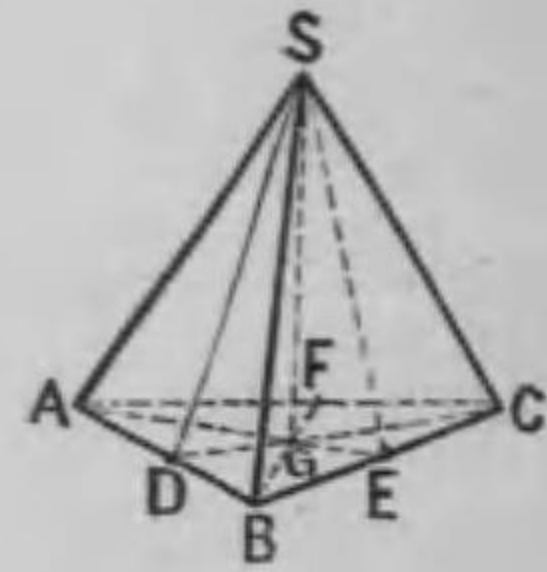
$$= BD : DC \text{ [同高]}.$$

$$\text{又 } (A-SBD) : (A-SDC) \text{ 即 } (D-SAB) : (D-SAC)$$

$$= \triangle SAB : \triangle SAC \text{ [同高]}.$$

$$\therefore BD : DC = \triangle SAB : \triangle SAC.$$

他ノ二面角ニ付テモ之ト同様ニ證明シ得。故ニ題言ノ如シ。



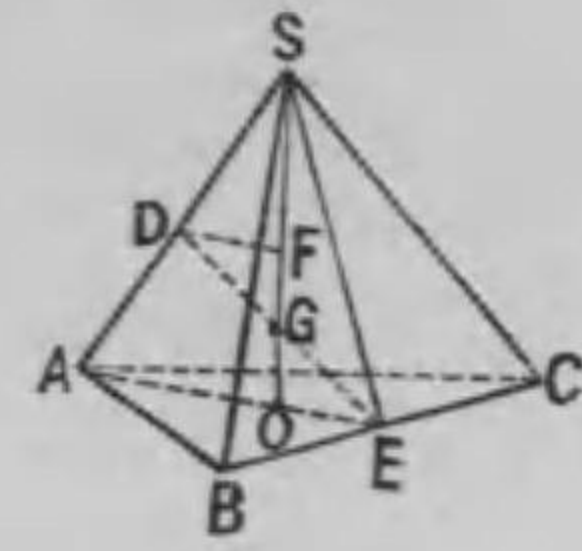
5. (a) 四面體ノ一雙ノ對稜ノ中點ノ連結線ハ其重心ニ於テ二等分セラル。

(b) 四面體ノ對稜ノ中點ヲ結ブ三直線ハ一點ニ於テ相交リ且ツ互ニ二等分セラル。 [此交點ハ重心ナリ] (東師, 海機)

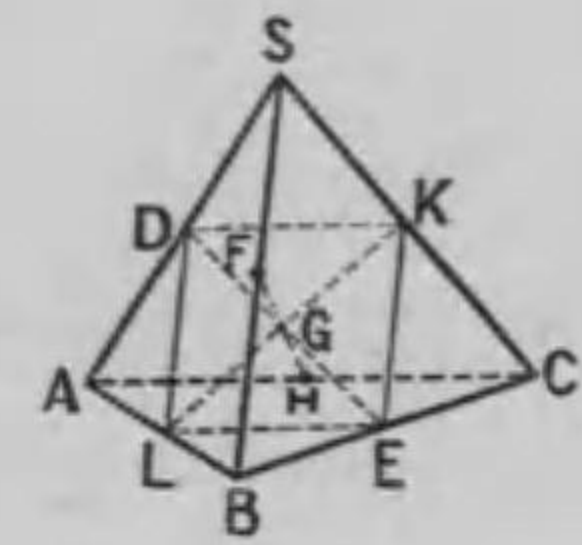
(c) 若シ其三直線ガ互ニ垂直ナルトキハ, 各面ハ全等ナリ。

(d) 四面體ノ一稜ト其對稜ノ中點トヲ含ム六平面ハ一點ニ於テ相交ル。 [此交點モ重心ナリ]

[證明] (a) 四面體 $S-ABC$ ノ稜 SA, BC ノ中點ヲ夫々 D, E トシ, 面 ABC ノ重心ヲ O トス。然ルトキ面 SAE 上ニ於テ SO ト DE トノ交點ヲ G トシ, $DF \parallel AE$ トセバ $SD=DA$ ナルユエ $SF=FO$ 。又 $DF \leq \frac{1}{2}AO = OE$ ナルユエ $FG=GO$ 。故ニ $SG=SF+FG=3GO$ 即チ G ハ重心ナリ。



(b) 四面體 $S-ABC$ ノ各稜ノ中點 D, E, F, H, K, L トセバ $DK \leq \frac{1}{2}AC \leq LE$ ナルユエ $DKEL$ ハ平行四邊形ニシテ DE, KL ハ G ニ於テ互ニ二等分ス。同様ニ DE, FH モ亦々互ニ二等分ス。然ルニ DE ノ中點 G ハ只一ツナリ。



$\therefore DE, KL, FH$ ハ G ニ於テ互ニ二等分ス。

(c) 上圖ヲ用フ。 $LG=GK$ [(b)] 且ツ $DG \perp LK$ [假設] ナルユエ $DL=DK$, 此二倍ヅツナル $SB=AC$ 。同様ニ $SA=BC, SC=AB$ ヲ證シ得。

\therefore 面 ABC, SAB, SBC, SCA ハ三邊ガ夫々相等シキユエ全等ナリ。

(d) 上圖ヲ用フ。稜 SA ト其對稜ノ中點 E トヲ含ム平面 SAE ハ對稜ノ中點ノ連結線 DE ヲ含ム。同様ニ他ノ稜ト其對稜ノ中點トヲ含ム平面ハ FH, KL ヲ含ム。然ルニ DE, FH, KL ハ一點 G ニ於テ相交ル [(b)]。故ニ題言ノ如シ。

6. (a) 四面體ヲ一雙ノ對稜ニ平行セル平面ニテ截ルトキハ, 其截リ口ハ平行四邊形ナリ。

(b) 若シ又對稜ガ垂直ナルトキハ, 截リ口ハ矩形ナリ。

(c) 若シ又對稜ガ相等シキトキハ, 截リ口ノ周ハ一定ナリ。

[證明] 上圖ヲ用フ。

(長商)

(a) 對稜 SB, AC ニ平行ナル截リ口ヲ $DLEK$ トス。然レバ $SB \parallel$ 面 $DLEK$ ナルユエ 面 SAB ト 面 $DLEK$ トノ交線 $DL \parallel SB$ 。同様ニ $KE \parallel SB$ 。 $\therefore DL \parallel KE$ 。同様ニ $DK \parallel LE$ 。 \therefore 對邊ガ夫々平行ナルユエ $DLEK$ ハ平行四邊形ナリ。

(b) $SB \perp AC$ ナルトキハ夫々之ニ平行ナル $DL \perp DK$ 即チ $\hat{L}DK = \hat{R}$ ナルトキ
以テ $\square DLEK$ ハ矩形ナリ。

(c) $\triangle SAB$ ニ於テ $DL // SB$ ナルユエ $SA : AD = SB : DL$

又 $\triangle SAC$ ニ於テ $DK // AC$ ナルユエ $SA : SD = AC : DK$ 且ツ $SB = AC$
故ニ $SA : AD + SD = SB : DL + DK$, 然ルニ $AD + SD = SA$. $\therefore DL + DK = SB$.
 $\therefore \square DLEK$ ノ周 $= 2(DL + DK) = 2SB$ 或ハ $2AC$ 即チ一定ナリ。

7. 四面體 $(S-ABC)$ ノ底面 ABC ニ平行ナル截面 abc ヲ作り, 其
截面ノ各邊ノ中點 G, H, K ト底面ノ對角頂 C, A, B トヲ結ブ三直
線 GC, HA, KB ハ一點ニ於テ相會ス。 (專檢)

[證明] $KH \leq \frac{1}{2}ab \leq \frac{1}{4}AB$ ナルユエ $KABH$ ハ一

平面上ニ在リテ AH, BK ハ相交ル, 其交點ヲ P

トスレバ $\triangle PAB \sim \triangle PHK$ ナルユエ

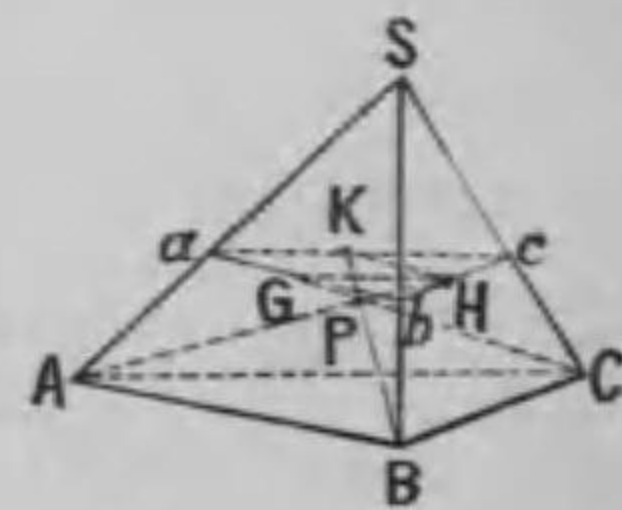
$PA : PH = AB : HK = PB : PK$ 即チ AH, BK ハ

P ニ於テ $AB : HK$ ニ内分セラル。

同様ニ AH, CG ハ其交點 P' ニ於テ $AC : GH$ ニ内分セラル。

然ルニ $\triangle ABC \sim \triangle abc$ ナルユエ $AB : HK = 4 : 1 = AC : GH$. 而シテ AH ナ同ジ比
ニ内分スル點ハ只一ツナリ。

$\therefore P'$ ハ P ト一致ス, 即チ AH, BK, CG ハ其各々ヲ $4 : 1$ ニ内分スル點 P ニ於
テ相會ス。



8. (a) 四面體 $S-ABC$ ノ對稜 SA, BC ノ中點 D, E ヲ過ル截面
ト SB, AC トノ交點ヲ F, H トセバ DE ハ截面 $DFEH$ ヲ二等分ス。

(b) 四面體ノ一雙ノ對稜ノ中點ノ連結線ヲ含ム平面ハ其體ヲ
二等分ス。

[證明] (a) BC ニ平行線 SK ヲ引キ EF ノ引長トノ交點ヲ K トス。又 KD, EH ノ
各引長ノ交點ヲ L トス。然レバ $SK //$ 面 ABC ナルユエ 面 KSA, ABC ノ交線ナル
 $AL // SK // BC$.

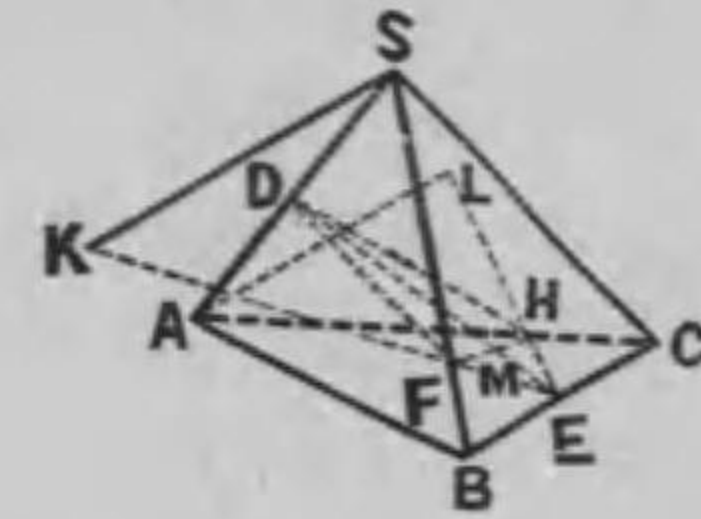
故ニ $AL = SK, KD = DL, EF : FK (= BE : SK = EC : AL) = EH : HL$ ナルユエ
 $FH // KS$ 且ツ D ハ KL ノ中點ナルヲ以テ FH ハ DE ニ二等分セラル, 其點ヲ M
トセバ等底, 等高ナル $\triangle DFM = \triangle DMH, \triangle EFM = \triangle EMH$, 之ヲ邊々相加フレバ
 $\triangle FDE = \triangle HDE$ 即チ DE ハ截面 $DFEH$ ヲ二等分ス。

(b) 四面體 $S-ABC$ ノ對稜ノ中點ノ連結線 DE
ヲ含ム截面ヲ $DFEH$ トス。 BD, CD, CF ヲ結ベバ
 $\triangle BDA = \triangle BDS$ ナルユエ $C-BDS = C-BDA$ 即チ

$$D-ABC = \frac{1}{2}(S-ABC).$$

然ルニ B, C ヨリ截面 $DFEH$ へノ垂線ハ相等シク且ツ $\triangle DEF = \triangle DEH$ [(a)] ナ
ルユエ $(B-DEF) = (C-DEH)$. 此双方ニ $D-ABEH$ ヲ加フレバ

$$DHEF - B = (D-ABC) = \frac{1}{2}(S-ABC).$$

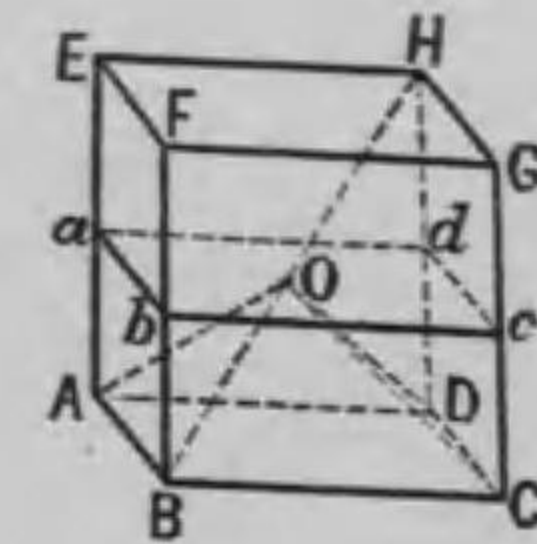


9. 平行六面體ノ一面ヲ底面トシ對角線ノ交點ヲ頂點トスル角錐
ハ元體ノ六分ノ一ナリ。

[證明] $ABCD-E$ ノ對角線ノ交點 O ヲ過リ底ニ平
行ナル截平面 $abcd$ ヲ作ルトキハ

$$ABCD - a = \frac{1}{2}(ABCD - E).$$

$$O-ABCD = \frac{1}{3}(ABCD - a) = \frac{1}{6}(ABCD - E).$$



10. (a) 四面體ノ二雙ノ對稜ガ夫々互ニ垂直ナルトキハ, 殘リノ
一雙ノ對稜モ亦々互ニ垂直ナリ。

(b) 四面體ノ對稜ガ夫々互ニ垂直ナルトキハ, 各角頂ヨリ夫
々對面ニ引ケル四垂線ハ一點ニ於テ相會ス。

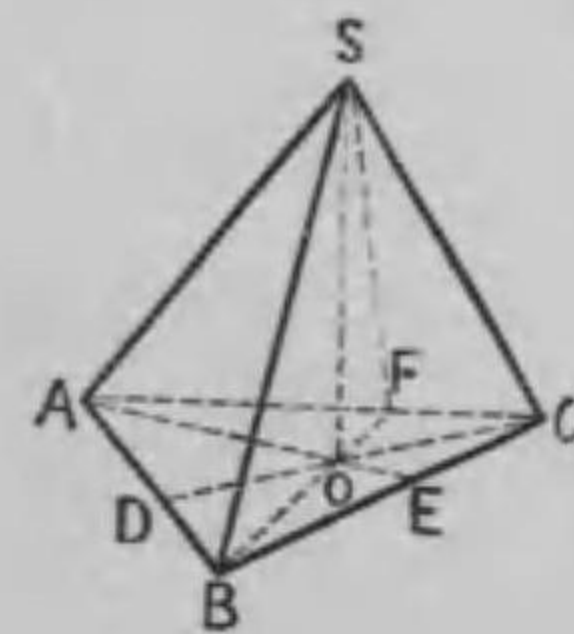
[證明] (a) $S-ABC$ ニ於テ $SA \perp BC, SC \perp AB$ トス。

$SO \perp$ 面 ABC トセバ $BC \perp SO \perp AB$ ナルユエ

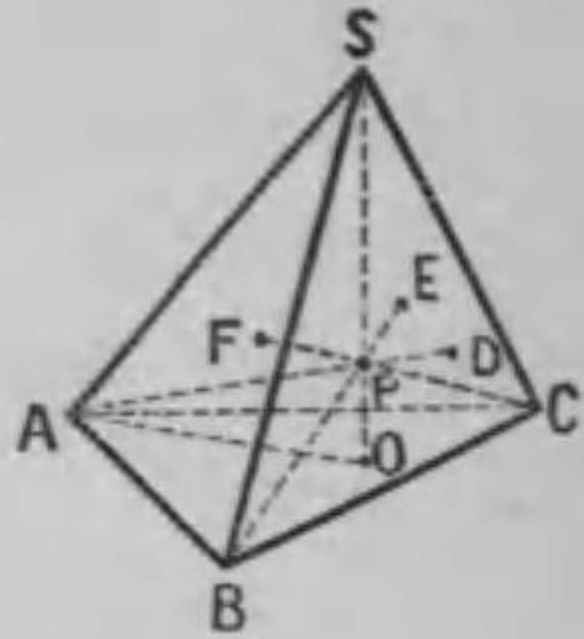
$BC \perp$ 面 $SAO, AB \perp SCO$.

$\therefore AE \perp BC, CD \perp AB$ ナルユエ O ハ $\triangle ABC$ ノ
垂心ナリ。故ニ $BO \perp AC, SO \perp AC$.

$\therefore AC \perp$ 面 $SBO, \therefore AC \perp SB$.



(b) S-ABC に於テ對稜ヲ夫々互ニ垂直トシ、又各角頂ヨリ對面ヘノ垂線ヲ SO, AD, BE, CF トス。然レバ $SO \perp ABC$, $AD \perp SBC$ ナルユエ SO, AD ハ SA ヲ含ミ BC ニ垂直ナル面 SAO 上ニ在リ。而シテ SO, AD ハ BC 即チ SA 及ビ SC 即チ AB ニ夫々垂線ナルユエ交ラズ、即チ相交ル、其交點ヲ P トス。同様ニ BE ハ亦タ SO, AD ノ各々ト交ル、然ルニ BE ハ SC ニ垂直ナル面 SBE 上ニ在ルユエ面 SAO 上ニ在ラズ。故ニ BE ハ面 SAO 上ノ SO, AD ノ各々ト交ルヲ以テ其交點 P ヲ過ル。同様ニ CF モ亦タ P ヲ過ル。



11. (a) 四面體ノ各稜ノ平方ノ和ハ、對稜ノ中點ヲ結ビタル三直線ノ平方ノ和ノ四倍ナリ。

(b) 若シ對稜ガ夫々互ニ垂直ナルトキハ、對稜ノ平方ノ和ハ互ニ相等シ。

[證明] 87 頁ノ下圖ヲ用フ。

(a) $\square DLEK$ に於テ $DL^2 + LE^2 + EK^2 + DK^2$ 即チ $2DL^2 + 2DK^2 = DE^2 + KL^2$ 而シテ $2DL = SB, 2DK = AC$. $\therefore SB^2 + AC^2 = 4DL^2 + 4DK^2 = 2(DE^2 + KL^2)$.

同様ニ $SA^2 + BC^2 = 2(FH^2 + KL^2)$ 及ビ $SC^2 + AB^2 = 2(DE^2 + FH^2)$.

此三式ヲ邊々相加フレバ $SA^2 + SB^2 + SC^2 + AB^2 + BC^2 + AC^2 = 4(DE^2 + FH^2 + KL^2)$.

(b) $SB \perp AC$ ナルトキハ夫々之ニ平行ナル $DL \perp DK$ 即チ $\hat{LDK} = \hat{R}$ ナルヲ以テ、 $\square DLEK$ ハ矩形ニシテ對角線 $DE = KL$. 同様ニ $FH = KL$. $\therefore DE = KL = FH$.

故ニ (a) ニ依テ $SB^2 + AC^2 = SA^2 + BC^2 = SC^2 + AB^2$.

12. (a) 正四面體ノ頂點ヨリ對面ヘ引ケル垂線ノ足ハ其面ノ垂心 (即チ内心, 外心, 重心) ナリ。

(b) 正四面體ノ對稜ハ夫々互ニ垂直ナリ。 (五高)

(c) 正四面體ノ高サハ、其足ヨリ他ノ面ヘ引ケル垂線ノ三倍ニ等シ。 (專檢, 高等)

(d) 正四面體ノ高サノ平方ハ、一稜ノ平方ノ三分ノ二ニ等シ。 (海兵, 海經, 山商)

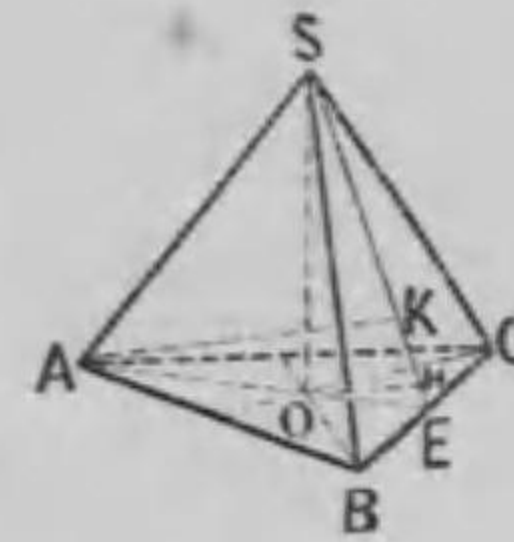
(e) 正四面體ノ一稜ヲ a トセバ 體積ハ $\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$ ナリ。

(水講, 專檢, 海機)

(f) 正四面體ノ體内ノ一點ヨリ各面ヘ下セル垂線ノ和ハ、其高サニ等シ。 (仙工)

[證明] 正四面體ヲ SABC トス。

(a) $AB = BC = CA$ [假設] ナルユエ $SO \perp$ 面 ABC トセバ $OA = OB = OC$. 即チ O ハ $\triangle ABC$ ノ外心ナリ。而シテ正三角形ノ垂心, 重心, 内心, 外心ハ一致ス。故ニ O ハ面 ABC ノ垂心ナリ。



(b) (a) ニ依リ O ハ $\triangle ABC$ ノ垂心ナルユエ $BO \perp AC$, 又 $SO \perp$ 面 ABC. 故ニ三垂線定理ニ依リ $SB \perp AC$. 同様ニ $SA \perp BC, SC \perp AB$ ヲ證シ得。

(c) $AK \perp$ 面 SBC トセバ K ハ $\triangle SBC$ ノ垂心 [(a)] ナルユエ S ヨリ BC へノ垂線 AE 上ニ在リ。而シテ面 SBC へノ垂線 AK ヲ含ム面 AKE \perp 面 SBC. 次ニ $OH \perp$ 面 SBC トスレバ OH ハ面 SBC へノ垂直面 AKE 上ニ在リ。故ニ AK, OH ハ面 AKE 上ニ在リテ面 SBC ニ垂線ナルユエ平行ナリ。 $\therefore AK : OH = AE : OE = 3 : 1$ [O ハ $\triangle ABC$ ノ垂心即チ重心], 故ニ $AK = 3.OH$. 而シテ SABC ハ正四面體ナルユエ $AK = SO$. $\therefore SO = 3.OH$.

(d) (a) ニ依リ O ハ $\triangle ABC$ ノ垂心即チ重心ナルユエ $AO^2 = \left(\frac{2}{3}AE\right)^2 = \frac{4}{9}AE^2$ ナリ。又 $AE^2 = AB^2 - BE^2 = AB^2 - \left(\frac{1}{2}AB\right)^2 = \frac{3}{4}AB^2$.

$$\therefore AO^2 = \frac{4}{9} \times \frac{3}{4} AB^2 = \frac{1}{3} AB^2.$$

而シテ SO ハ體ノ高サナルユエ $SO^2 = SA^2 - AO^2 = AB^2 - \frac{1}{3}AB^2 = \frac{2}{3}AB^2$.

注意 底面ハ正三角形ニシテ頂點ノ各面角ガ直角ナルトキハ $3.SO^2 = SA^2$ ナリ。

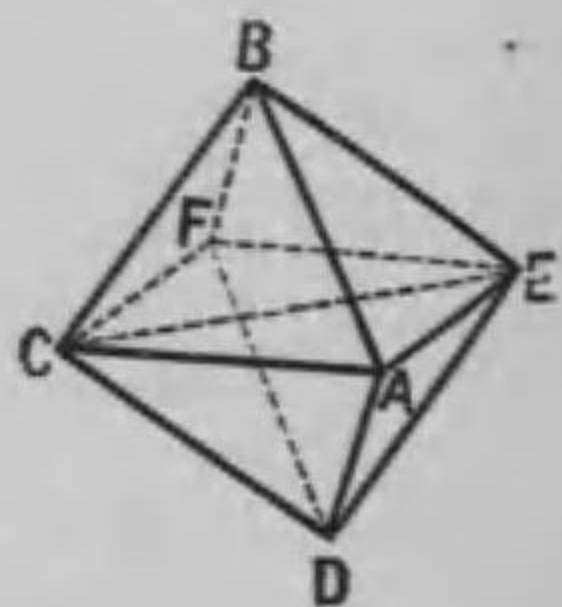
(e) (d) ヨリ高サ SO ヲ得。又底面ハ正三角形ニシテ其面積ハ $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ ナリ。下略。

(f) 各面ノ面積ヲ A トシ、高サヲ h トセバ 體積 $= \frac{1}{3}A \cdot h$
 而シテ元體ノ體內ノ一點 O ナ頂點トシ各面ヲ底面トスル四ツノ三角錐ニ分テ得ベシ、
 其高サヲ夫々 a, b, c, d トセバ 此等ノ體積ノ和 $= \frac{1}{3}A(a+b+c+d)$.
 $\therefore \frac{1}{3}A \cdot h = \frac{1}{3}A(a+b+c+d), \therefore a+b+c+d=h$.

13. 正八面體ニ於テ一稜ヲ a トシ次ノ各々ヲ證セ、

(a) 一對角線 $= a\sqrt{2}$. (b) 體積 $= \frac{\sqrt{2}}{3}a^3$.

[證明] (a) 正八面體 $ABCDEF$ ニ於テ $BCDE$ ハ各
 邊ガ夫々平行シ且ツ相等シク亦々各角モ相等シキ
 ニエ正方形ナリ。故ニ一稜ヲ a トセバ一對角線
 $CE = \sqrt{BC^2 + BE^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.



(b) 正八面體 $ABCDEF$ ナ面 $BCDE$ ニテ截
 レバ四角錐 $(A-BCDE)$, $(F-BCDE)$ ハ其高サガ對
 角線 AF ノ半ニシテ底ガ同一ナルニエ等積ナリ。故ニ此各々ノ體積ハ
 $\frac{1}{3}a^2 \times a\sqrt{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{6}a^3$. \therefore 元體ノ體積 $= \frac{\sqrt{2}}{6}a^3 \times 2 = \frac{\sqrt{2}}{3}a^3$.

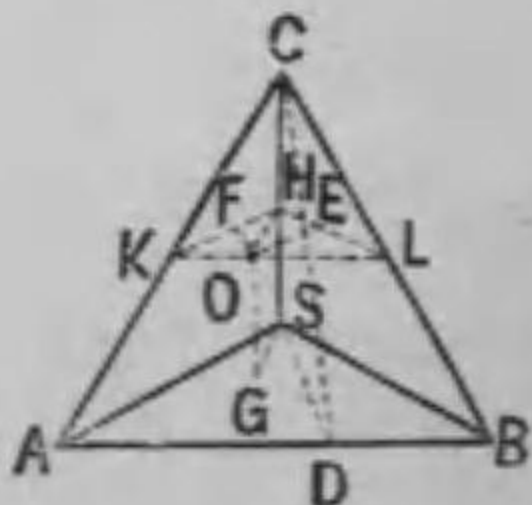
14. (a) 四面體 $(S-ABC)$ ノ底ガ正三角形ニシテ頂點 S ノ面角
 ガ各々直角ナルトキハ、底内ノ一點 O ヨリ他ノ面ニ引ケル垂線ノ和
 即チ $OE+OF+OG$ ハ頂點ニ於ケル一稜 CS ニ等シ。

(b) 四面體 $(S-ABC)$ ノ頂點 S ノ面角ガ各々直角ナルトキ

ハ、 $\triangle SCA^2 + \triangle SBC^2 + \triangle SAB^2 = \triangle ABC^2$ ナリ。

[證明] (a) 斜邊ト一邊トノ等シキ $\triangle ASC \equiv \triangle BSC$,
 同様ニ亦々 $\equiv \triangle ASB$. $\therefore AS=BS=CS$.

次ニ面 OEF ト CS, CA, CB ノ交點ヲ H, K, L ト
 セバ $CH \perp$ 面 HKL . 故ニ面 $HKL // SAB$, 從テ
 $HK // SA, HL // SB$ 且ツ $SA=SB$ ナルニエ $HK=HL$.
 $\therefore OE+OF=KH$ [平幾].



然ルニ $\triangle ASC$ ハ $\hat{S}=\hat{R}, AS=SC, AS // KH, \therefore KH=CH$.

又面 SAB ニノ垂線 $HS // OG$. 此二線ノナス平面ト平行平面 HKL, SAB トノ
 交線ナル $HO // SG$. 故ニ $HOGS$ ハ矩形ニシテ $OG=HS$.

$\therefore OE+OF+OG=CH+HS=CS$.

(b) $SD \perp AB$ トセバ $\hat{ASB}=\hat{R}$ ナルニエ $\overline{SA^2}=\overline{AD} \cdot \overline{AB}, \overline{SB^2}=\overline{DB} \cdot \overline{AB}$ 及ビ
 $\overline{SD^2}=\overline{AD} \cdot \overline{DB}, \therefore \overline{SA^2} \cdot \overline{SB^2}=\overline{AB^2} \cdot \overline{AD} \cdot \overline{DB}=\overline{AB^2} \cdot \overline{SD^2}$. 而シテ $AS \perp CS \perp SB$
 即チ $CS \perp$ 面 ASB 且ツ $SD \perp AB$ ナルニエ三垂線定理ニ依テ $CD \perp AB$.

$$\therefore \overline{AB^2} \cdot \overline{CD^2} = \overline{AB^2} (\overline{SD^2} + \overline{SC^2}) = \overline{AB^2} \cdot \overline{SD^2} + (\overline{SA^2} + \overline{SB^2}) \overline{SC^2}$$

$$= \overline{AB^2} \cdot \overline{SD^2} + \overline{SA^2} \cdot \overline{SC^2} + \overline{SB^2} \cdot \overline{SC^2}$$

$\therefore 4\overline{ABC^2} = 4(\overline{SAB^2} + \overline{SCA^2} + \overline{SBC^2})$, 此兩邊ヲ 4 除セバ證ヲ得.

15. (a) 四面體 $ABCD$ ノ各角頂ヨリ對面ニ下セル垂線ヲ夫々 a, b, c, d トシ、又體內ノ點 O ヨリ前ト同順ノ面ニ下セル垂線ヲ夫々 a', b', c', d' トセバ $\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{c'}{c} + \frac{d'}{d} = 1$ ナリ。

(b) 四面體 $ABCD$ ノ體內ニ點 O ヲ取リ AO, BO, CO, DO ノ引長ト對面トノ交點ヲ夫々 A', B', C', D' トセバ

$$\frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} + \frac{OD'}{DD'} = 1 \text{ ナリ.}$$

[證明] (a) 四面體 $ABCD$ ノ體內ノ點 O ナ頂點トシ各面ヲ底トスル四ツノ角錐ニ分テ得.

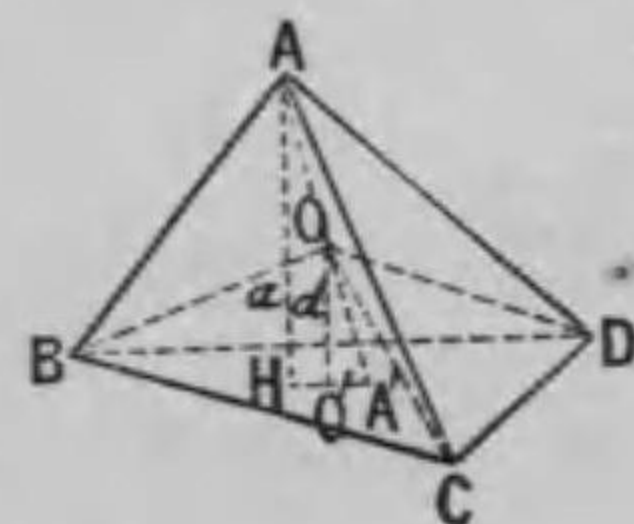
今 A, O ヨリ底 BCD ニ垂線 AH, OO' ナ引ケバ

$\frac{OO'}{AH}$ 即チ $\frac{a'}{a} = \frac{O-BCD}{A-BCD}$ [同底].

同様ニ $\frac{b'}{b} = \frac{O-ACD}{B-ACD} = \frac{O-ACD}{A-BCD}$

$\frac{c'}{c} = \frac{O-ABD}{C-ABD}$ 及ビ $\frac{d'}{d} = \frac{O-ABC}{A-BCD}$

$$\therefore \frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{c'}{c} + \frac{d'}{d} = \frac{O-BCD}{A-BCD} + \frac{O-ACD}{A-BCD} + \frac{O-ABD}{A-BCD} + \frac{O-ABC}{A-BCD} = \frac{A-BCD}{A-BCD} = 1.$$



(b) H, O', A' 一直線上ニ在ルユエ $\frac{OA'}{AA'} = \frac{OO'}{AH}$ 即チ $\frac{a'}{a}$.
 同様ニ $\frac{OB'}{BB'} = \frac{b'}{b}, \frac{OC'}{CC'} = \frac{c'}{c}, \frac{OD'}{DD'} = \frac{d'}{d}$ ナリ.
 $\therefore \frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} + \frac{OD'}{DD'} = \frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{c'}{c} + \frac{d'}{d} = 1$ [(a)].

16. (a) 斜截頭三角錐ノ體積ハ、底面ト截頭面ノ重心ヨリ底ニ下セル垂線トノ乘積ニ等シ.

(b) 平行六面體ノ斜截頭體ノ體積ハ、底面ト截頭面ノ兩對角線ノ交點ヨリ底ニ下セル垂線トノ乘積ニ等シ.

【證明】 83 頁ノ下圖ヲ見ヨ.

(a) 斜截頭面 DEF ノ各角頂及ビ重心 G ヨリ底面 ABC へノ垂線ヲ d, e, f 及ビ g トセバ 體積 $= \frac{1}{3} \triangle ABC (d+e+f)$ [83 頁ノ第二] $= g \triangle ABC$ [85 頁 3 題].

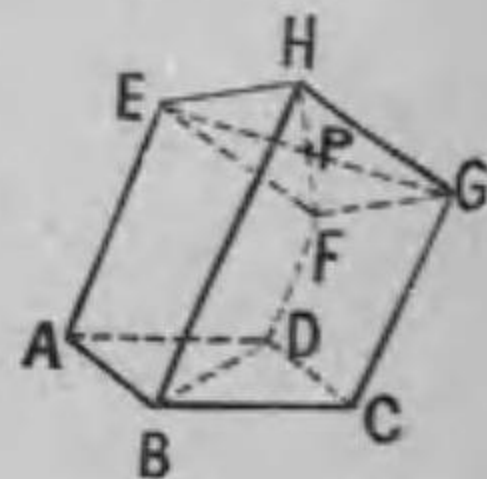
(b) 斜截頭面ノ各角頂及ビ對角線ノ交點ヨリ底面へノ垂線ヲ e, f, g, h 及ビ p トス. 而シテ元體ヲ平面 HBDF ニテニツノ斜截頭三角錐

ニ分テバ $ABD-E = \frac{1}{3} \triangle ABD \times (e+f+h)$

$BCD-F = \frac{1}{3} \triangle BDC \times (f+g+h)$

H 上 $\triangle ABD = \triangle BDC$ 及ビ $h+f = 2p = e+g$,

$\therefore ABCD-E = \frac{1}{3} \triangle ABD \times 6p = ABCD \cdot p$.



17. 平截頭矩形錐體 (ABCD-EFGH) ノ高ヲ h トシ、兩底面ヲ過ル直截リ口ヲ作り BC, AD 及ビ FG, EH トノ交リヲ PQ, SR トスレバ

體積 $= \frac{1}{6} h \times \{RS \times (2FG + BC) + PQ \times (2BC + FG)\}$ ナリ.

【證明】 面 AC // 面 EG ナルユエ PQ // SR, 從テ $\triangle PRS = \frac{1}{2} h SR$ 及ビ $\triangle PQR = \frac{1}{2} h PQ$ ナリ. 而シテ元體ヲ平面 EBCH ニテ截レバニツノ斜截頭三角錐 (FBE-G), (ABE-D) ニ分テレ, $\triangle PRS, \triangle PQR$ ハ其直截リ口ニ當ル.

故ニ $(FBE-G) = \frac{1}{3} \triangle PRS \times (FG + EH + BC)$

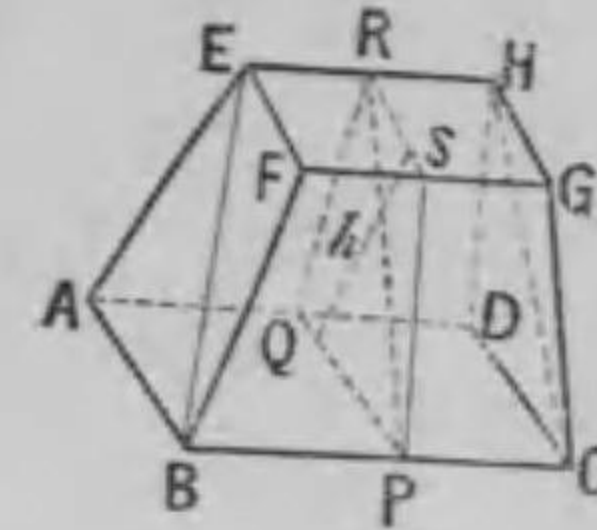
[83 頁ノ第二ノ系]

$= \frac{1}{6} SR \times h \times (2FG + BC)$.

同様ニ $(ABE-D) = \frac{1}{6} PQ \times h \times (FG + 2BC)$.

$\therefore (ABCD-EFGH) = (FBE-G) + (ABE-D)$

$= \frac{h}{6} \times \{SR \times (2FG + BC) + PQ \times (FG + 2BC)\}$.



注意 本題ノ立體ハ直方臺トモ云フ. 上式ハ土、砂ノ堆積ヲ求ムル公式ニ用ヒラル. 而シテ $SR=0$ ナルトキハ斜截頭三角錐 (楔形臺) トナリテ, 體積 $= \frac{1}{6} h \times PQ (FG + 2BC)$ トナル. 之レ建築物ノ屋根又ハ彈丸ノ積ニ重ネ等ニ用ラル.

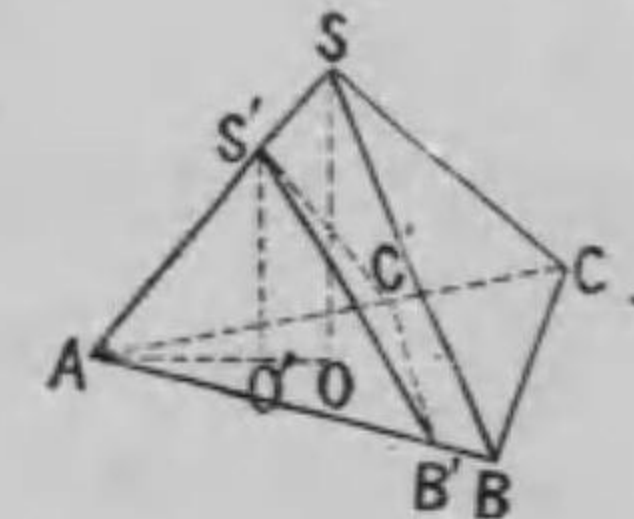
18. ニツノ四面體ガ一雙ノ全等ナル三面角ヲ有スルトキハ、其體積ハ其角ノ三稜ノ乘積ニ比例ス.

【證明】 四面體 (S-ABC), (S'-A'B'C') ニ於テ三面角 A ヲ全等トシ; S', B', C' ヲ夫々 AS, AB, AC 上ニ在リトス. 然ルトキ $SO \perp$ 面 $ABC \perp S'O'$

トセバ $\frac{S-ABC}{S'-A'B'C'} = \frac{\triangle ABC \times SO}{\triangle A'B'C' \times S'O'} = \frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} \times \frac{SO}{S'O'}$

然ルニ $\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \frac{AB \times AC}{A'B' \times A'C'}$ 及ビ $\frac{SO}{S'O'} = \frac{AS}{A'S'}$

$\therefore \frac{S-ABC}{S'-A'B'C'} = \frac{AB \times AC \times AS}{A'B' \times A'C' \times A'S'}$



19. 一點 O ニ關スル對稱角錐 (O-ABCD), (O-A'B'C'D') ハ全等ナリヤ又等積ナリヤ.

【解】 26 頁ノ圖ヲ用フ. AA', BB' 等ハ O ニ於テ二等分セラレ且ツ其夾角ハ相等シキユエ各面ハ逆順ニ相等シク, 從テ各面角ハ逆順ニ等シキユエ各立體角ハ逆順ニ相等シ. 故ニ此兩角錐ハ等積ナルモ全等ナラズ.

第 四 章

相 似 多 面 體

10. 定義 及 ビ 定理

定義 二ツノ多面體 ハ面數ガ相等シク、一ツノ各面ガ夫々他各面ト相似ニシテ相似ノ位置ニアリ、且ツ各對應多面角ガ夫々全等ナルトキハ相似ナリト云フ。

注意 面數ノ相等シキニツノ正多面體ハ相似ナルコト明カナリ。

定理 (1) 相似多面體ノ對應二稜ハ比例ス。

[證明] 相似多面體ヲ P, P' トシ、其對應面 A, A' ノ對應二稜ヲ夫々 a, a' 及ビ b, b' トセバ A ∽ A' ナルユエ a : a' = b : b'。其他ニ付テモ同様ニ證明シ得。

定理 (2) 相似多面體ノ對應面ノ面積ハ其對應稜ノ二乗ニ比例ス。

從テ 全面積ハ對應稜ノ二乗ニ比例ス。

[證明] 相似多面體ヲ P, P' トシ、其對應面 A, A' ノ對應稜ヲ a, a' トセバ A ∽ A' ナルユエ A : A' = a² : a'²。其他ニ付テモ同様ニ證明シ得。

次ニ P, P' ノ對應面ヲ夫々 A, A'; B, B'; C, C'; トシ、其對應稜ヲ夫々 a, a'; b, b'; c, c'; トスレバ A ∽ A', B ∽ B', C ∽ C', ナルユエ

$$\frac{a^2}{a'^2} = \frac{b^2}{b'^2} = \frac{c^2}{c'^2} = \dots = \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \dots = \frac{A+B+C+\dots}{A'+B'+C'+\dots}$$

定理 (3) 相似多面體ノ體積ハ對應稜ノ三乗ニ比例ス。

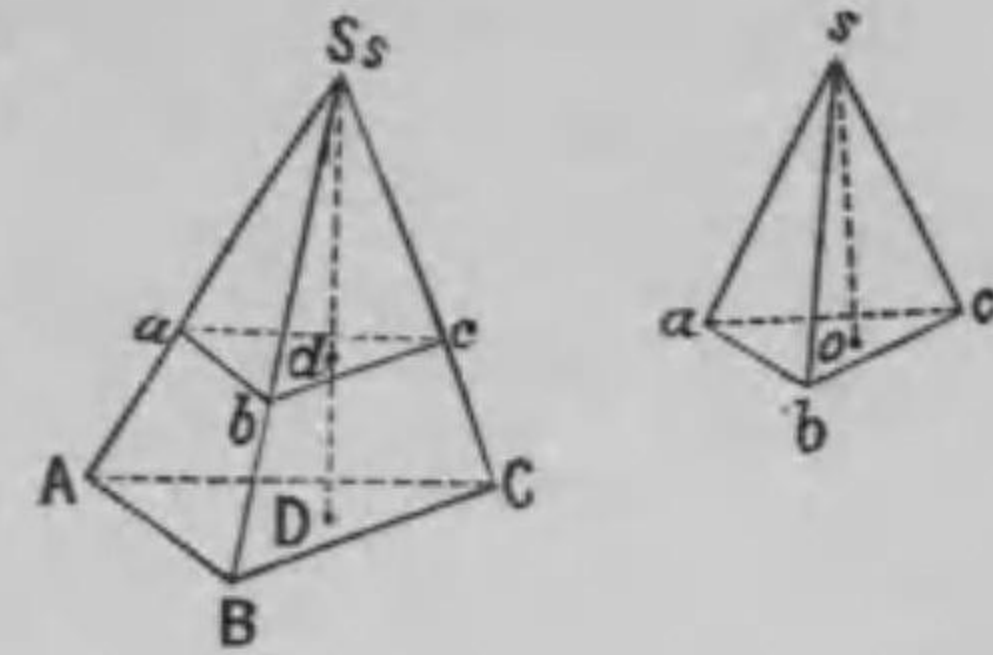
[證明] 第一 相似四面體ノ場合。

相似四面體 (S-ABC), (s-abc) ノ高サヲ夫々 SD, sd トス。今 s-abc ヲ S-ABC ノ上ニ對應三面角 S, s ガ一致スル様ニ重ヌレバ 面 ABC, abc ハ何レモ面 SAB ト等シキニ面角ヲ作ルユエ 面 abc // 面 ABC。abc へノ垂線 sd ハ ABC ノ垂線 SD ニ重ナル。

從テ $\triangle ABC \sim \triangle abc$ 。故ニ $\frac{\triangle ABC}{\triangle abc} = \frac{AB^2}{ab^2}$ 。

又 $\frac{SD}{sd} = \frac{SB}{sb} = \frac{AB}{ab}$ 。

$$\begin{aligned} \therefore \frac{S-ABC}{s-abc} &= \frac{\triangle ABC \cdot SD}{\triangle abc \cdot sd} = \frac{\triangle ABC}{\triangle abc} \times \frac{SD}{sd} \\ &= \frac{AB^2}{ab^2} \times \frac{AB}{ab} = \frac{AB^3}{ab^3} \end{aligned}$$



第二 相似多面體ノ場合。

二箇ノ相似多面體ハ之ヲ同數ニシテ且ツ同順ナル相似四面體ニ分テ得ベシ。

然ルニ此等ノ内ノ對應四面體ノ體積ノ比ハ其對應稜ノ三乗比ニ等シク、又元體ノ對應稜ハ比例ス。故ニ對應四面體ノ對應稜ノ比ハ元體ノ對應稜ノ比ニ等シ。故ニ對應四面體ノ體積ノ比ハ元體ノ對應稜ノ三乗比ニ等シ。

∴ 對應四面體ノ和即チ元體ノ體積ハ其對應稜ノ三乗ニ比例ス。

系. 相似多面體ノ體積ハ其高サノ三乗ニ比例ス。

問 題 及 ビ 解 答

1. (a) 四面體ヲ其一面ニ平行セル平面ニテ截リテ生ズル四面體ハ元體ニ相似ナリ。

(b) 錐角ヲ其底ニ平行セル平面ニテ截リテ生ゼル角錐ハ、元體ニ相似ナリ。

[證明] (a) 上圖ヲ用フ。四面體 SABC ヲ面 ABC ニ平行セル平面ニテノ截リ口ヲ abc トス。然ルトキハ兩四面體 SABC, Sabc ハ各面ガ夫々相似ニシテ相似ノ位置ニアリ、且ツ對應三面角ガ夫々全等ナルユエ相似ナリ。

2. 角錐ヲ高サノ中點ヲ過リ底面ニ平行スル平面ニテ截レバ、

(a) 其上部ト下部トノ傍面積ノ比ハ 1:3 ナリ。

(b) 其上部ト下部トノ體積ノ比ハ 1:7 ナリ。

【證明】 前頁ノ圖ヲ用フ。角錐(S-ABC)ヲ其高サ SD ノ中點 d ヲ過リ底 ABC ニ平行スル平面ニテノ截リ口ヲ abc トス。然ルトキハ

(a) $(s-abc) \sim (S-ABC)$ [1題] ナルユエ此等ノ傍面積ヲ夫々 F', F トスレバ $F':F = sd^2:SD^2$ [定理(2)] = 1:4, $\therefore F':F-F' = 1:3$.

(b) $(s-abc) \sim (S-ABC)$ ナルユエ, 此等ノ體積ヲ夫々 V', V トスレバ $V':V = sd^3:SD^3$ [定理(3)ノ系] = 1:8, $\therefore V':V-V' = 1:7$.

3. 二ツノ相似多面體ヲ相似ノ位置ニ且ツ對應面ガ夫々平行ナル様ニ置クトキハ, 對應角頂ノ連結線ハ一點ニ於テ相會ス。

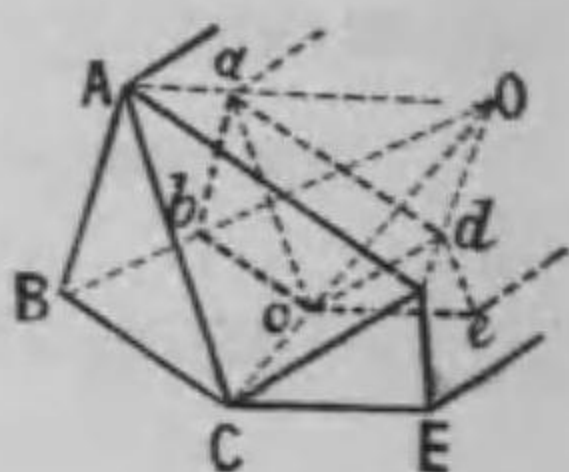
【證明】 相似多面體 ABCDE....., abcde.....ニ於テ Aa, Bb ノ引長ノ交點ヲ O トセ

ヨ。然レバ AB//ab ナルユエ AB:ab=BO:bo.

次ニ Bb, Cc ノ引長ノ交點ヲ O' トセバ前ト同様ニ BC:bc=BO':bo'.

然ルニ AB:ab=BC:bc ナルユエ Bb ヲ同シ比ニ外分スル點 O, O' ハ一致ス, 即チ Cc ノ引長ハ O ヲ過ル。

同様ニ Dd, 等ノ引長モ皆 O ヲ過ル。



第五章 作圖題

11. 第二編即チ多面體ノ作圖題ハ特ニ基本トスベキモノ無シ, 依テ第一編第八章〔47頁乃至51頁〕ヲ參考スベシ。

問題及ビ解答

1. 正四面體ニ内接スル正四面體ヲ作レ。

【解】 正四面體 ABCD ニ於テ面 BCD ニ垂線 AO ヲ引キ, AO ノ垂直二等分面ト稜 AB, AC, AD トノ交點ヲ E, F, G トセバ, 四面體 O EFG ハ所要ノモノナリ。

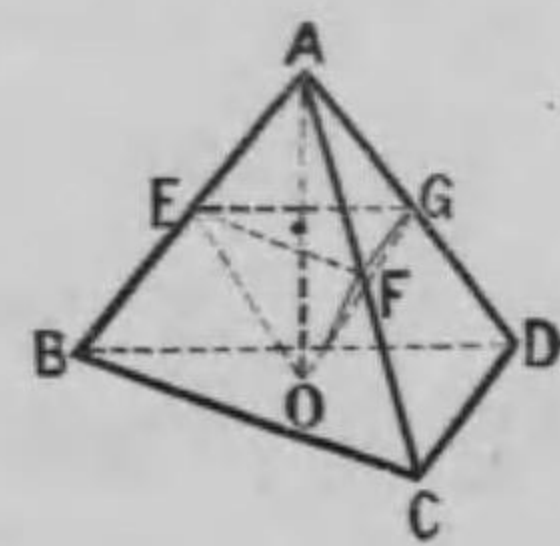
何トナレバ AO ニ垂直ナル面 BCD // 面 EFG, 從テ $\triangle BCD \sim \triangle EFG$, $\therefore EF=FG=GE$.

又 O ハ $\triangle BCD$ ノ垂心即チ外心ニシテ $AO \perp$ 面 EFG ナルユエ $AE=AF=AG=OG=OF=OE$. 故ニ O EFG

ハ各稜ガ相等シク, 從テ各面ハ全等ナル正三角形ナルユエ正四面體ナリ。

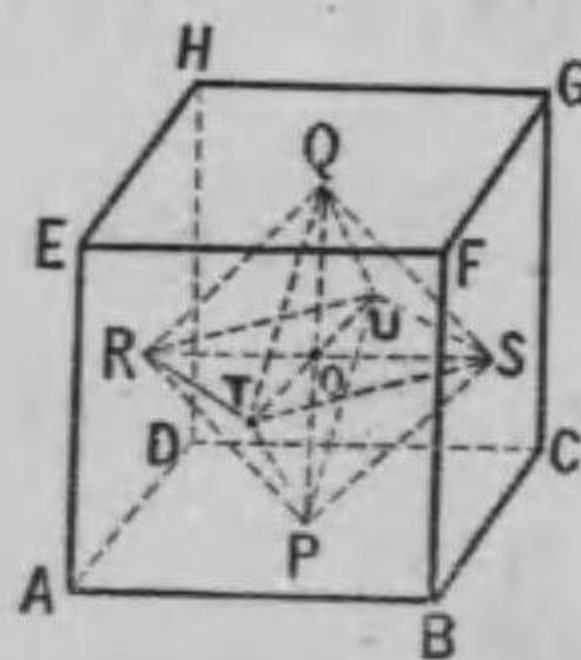
【別略解】 各面ノ外心即チ垂心ヲ各角頂トスル四面體モ亦タ所要ノモノナリ。

〔83頁(3)〕



2. 正六面體ニ内接スル正八面體ヲ作レ。

【解】 正六面體 (ABCD-EFGH) ノ對角線ノ交點 O ヲ過リ各稜ニ平行スル三直線ガ對面ニ交ル點 P, Q, R, S, T, U ハ所要ノ正八面體ノ各角頂ナリ。何トナレバ PQ, RS, TU ハ相等シク且ツ互ニ垂直ニ二等分スルユエ PRQS, PTQU ハ全等ナル正方形ナリ。故ニ相隣ル三點ニテ成レル各面ハ全等ナル正三角形ナリ, 從テ此等ノ四面宛ニテ成レル各角頂ノ立體角ハ相等シクナリ。



3. 正八面體 = 内接スル正六面體ヲ作レ.

[作圖] 正八面體 ABCDEF ノ各面ノ中心 (即チ重心) G, H, K, L, M, N, P, Q ハ所要ノ正六面體ノ各角頂ナリ.

[證明] 正△ABC ≡ △BCF ナルユエ GH ≧ $\frac{1}{3}$ AF.

同様ニ MN ≧ LK ≧ QP ≧ $\frac{1}{3}$ AF.

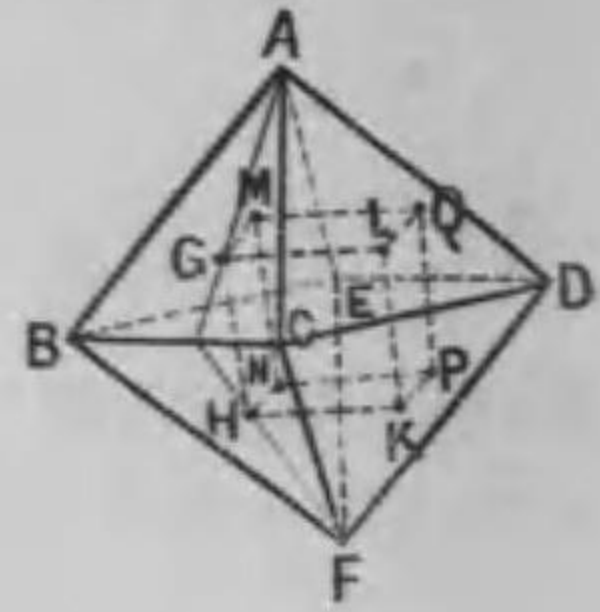
∴ GH ≧ MN ≧ LK ≧ QP ≧ $\frac{1}{3}$ AF.

同様ニ HK ≧ NP ≧ GL ≧ MQ ≧ $\frac{1}{3}$ BD.

及ビ GM ≧ HN ≧ KP ≧ LQ ≧ $\frac{1}{3}$ CE.

而シテ AF, BD, CE ハ相等シク且ツ互ニ直交ス.

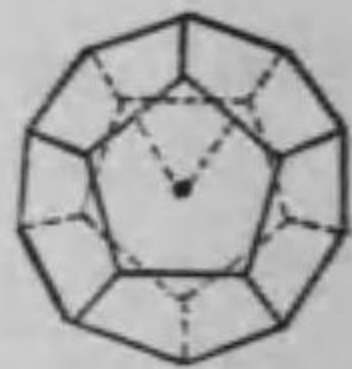
故ニ (GHKL-MNPQ) ハ各稜ガ相等シク且ツ三稜ヅツ互ニ直交スルユエ, 各面ハ全等ナル正方形ニシテ, 且ツ三面ヅツ互ニ直交ス即チ各立體角ハ相等シキユエ正六面體ナリ.



4. 正十二面體 = 内接スル正二十面體ヲ作レ.

[解] 正十二面體ノ各面ノ中心ハ所要ノ正二十面體ノ各角頂ナリ.

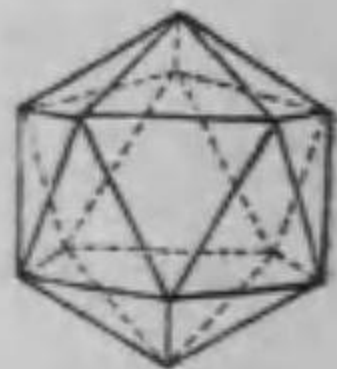
何トナレバ正十二面體ノ立體角ハ何レモ全等ナル正五角形ノ三面角ナルユエ, 其角ノ各面ノ中心ハ正三角形ヲナシ何レモ全等ナリ. 而シテ此等ノ正三角形ハ立體角ト同數即チ二十箇アリテ, 且ツ各面ノ中心ニ五箇ヅツ相會シテ立體角ヲナスユエ此等ノ立體角モ相等シキユエナリ.



5. 正二十面體 = 内接スル正十二面體ヲ作レ.

[解] 正二十面體ノ各面ノ中心ハ所要ノ正十二面體ノ各角頂ナリ.

[證明] ハ前題ニ準ズ.

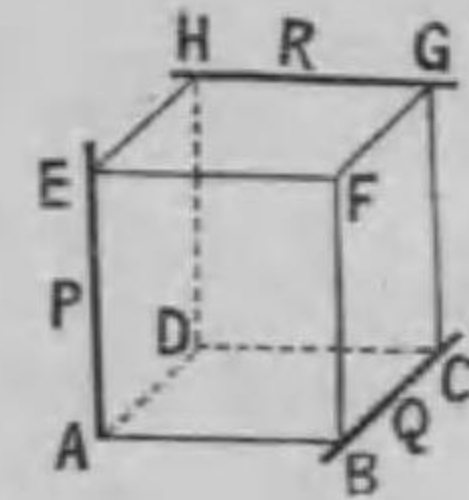


6. ニツヅツ同一平面上ニ在ラザル三定直線 P, Q, R アリ, 之ヲ三稜ニ重ネテ平行六面體ヲ作レ.

[解] P ヲ含ミ Q, R ニ夫々平行ナル二平面 ED, EB ヲ作レ, 又 Q, R ノ各々ヲ含ミ前ト同様ニ作圖シテ多面體 (ABCD-EFGH) ヲ作レバ可ナリ.

何トナレバ R ハ之ニ平行ナル面 EB ト之ヲ含ム面 HF トノ交線 EF ニ平行ナリ. 同様ニ P // HD.

∴ 面 AEF // 面 DHG. 同様ニ他ノ對面モ夫々平行ナレバナリ.



7. 次ノ條件ニ適スル平面ニテ平行六面體ヲ二等分セヨ.

(a) 對角線ノ交點ヲ過ル. (b) 定直線 L ヲ含ム.

(c) 定直線 L ト直交スル. (d) 定平面 P ニ平行スル.

[略解] (a) 74 頁ノ 5 題ノ (b) ニ依ル.

(b) 對角線ノ交點 O ト定直線 L トヲ含ム平面ニテ截レバ可ナリ.

(c) 對角線ノ交點 O ヲ含ミ定直線 L ニ垂直ナル平面ニテ截レバ可ナリ.

(d) 對角線ノ交點 O ヲ含ミ定平面 P ニ平行スル平面ニテ截レバ可ナリ. 證ハ同上.

8. 立方體ヲ一平面ニテ截リ, 其截リ口ヲ正六角形ナラシメヨ.

[解] ハ 73 頁ノ 2 題ノ (b) ニ依ル.

(大工)

9. 四面體ノ各角頂ヨリ等距離ナル一點ヲ求メヨ.

(大工)

[解] ハ 82 頁ノ (2) ニ依ル.

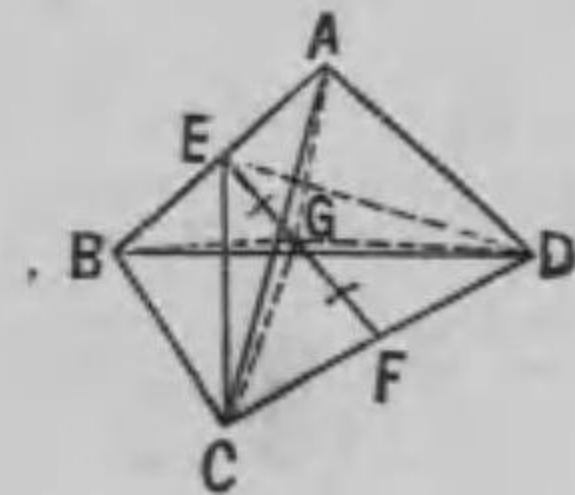
10. 四面體 ABCD 内ニ一點ヲ求メテ, 此點ト稜トヲ含ム平面ニテ元體ヲ四等分セヨ.

[解] 對稜 AB, CD ノ中點ノ連結線 EF ノ中點 G ハ所要ノ點ナリ. 何トナレバ (D-ECA) = (D-ECB) = $\frac{1}{2}$ (D-ABC)

即チ (A-ECD) = (B-ECD) = $\frac{1}{2}$ (A-BCD),

而シテ GF = $\frac{1}{2}$ EF ナルユエ △GCD = $\frac{1}{2}$ △ECD ナリ.

∴ (A-GCD) = $\frac{1}{2}$ (A-ECD) = $\frac{1}{4}$ (A-BCD) 即チ (G-ACD) = $\frac{1}{4}$ (A-BCD).



同様ニ $(G-ABD)=(G-BCD)=(G-ABC)=\frac{1}{4}(A-BCD)$ ナ證シ得.

11. 次ノ條件ニ適スル平面ニテ四面體ヲ二等分セヨ.

- (a) 一定點ヲ過ル.
- (b) 定直線ニ平行或ハ直交スル.
- (c) 定平面ニ平行或ハ直交スル.

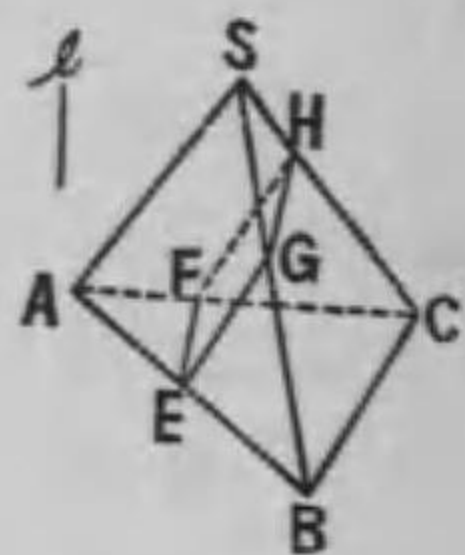
[略解] 前題ノ圖ヲ用フ. 四面體 ABCD ノ對邊 AB, CD ノ中點ノ連結線ヲ EF トス.

(a) EF ト定點 O トヲ含ム平面ハ所要ノモノナリ. [88頁ノ8題ノ(b)]

(b), (c) EF ナ含ミ定直線 L 或ハ定平面 P ニ平行或ハ直交スル平面ハ所要ノモノナリ. [同上]

12. 四面體 (S-ABC) ヲ一平面ニテ截リ, 其截リ口ヲシテ定長 l ニ等シキ對邊ヲ有スル平行四邊形ナラシメヨ.

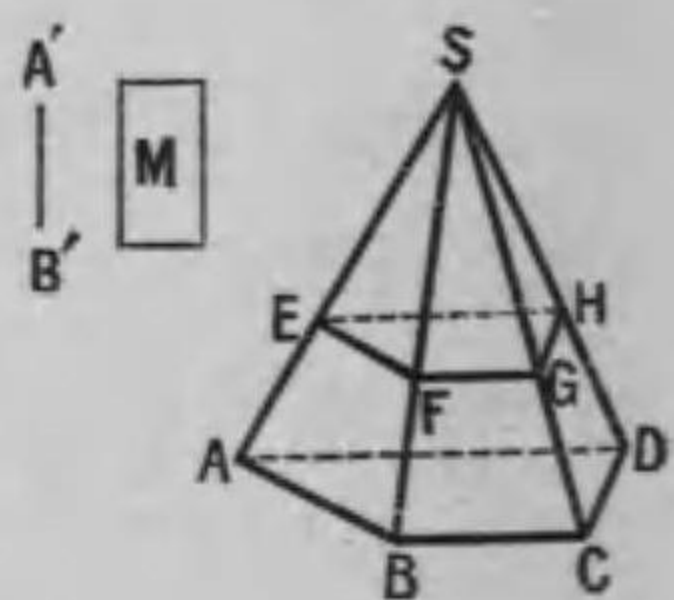
[解] \hat{BAC}, \hat{BSC} ノ各二邊間ニ l ニ等シク且ツ BC ニ平行スル直線 EF, GH ナ引ケ [平幾] バ EFGH ハ所要ノモノナリ.



13. 角錐 (S-ABCD) ヲ底面ニ平行スル平面ニテ截リ, 其截リ口ヲ與面積 M ニ等シカラシメヨ.

[解] 底面 ABCD ニ相似ニシテ且ツ與面積ニ等シキ四邊形 A'B'C'D' ナ作り, 而シテ \hat{ASB} ノ二邊間ニ AB ノ對應邊 A'B' ニ等シク且ツ AB ニ平行スル直線 EF ナ引キ, 次ニ EF ナ含ミ底ニ平行スル平面ニテ截レバ可ナリ.

何トナレバ $EFGH \sim ABCD \sim A'B'C'D'$ 且ツ $EF=A'B'$ ナルユエ $EFGH=A'B'C'D'=M$ ナリ.



14. 角錐 (S-ABCD) ヲ底面ニ平行スル平面ニテ截リテ,

- (a) 其截リ口ノ面積: 底面積 = $m:n$ ナラシメヨ.

(b) 上部ノ傍面積: 下部ノ傍面積 = $m:n$ ナラシメヨ.

[解] (a) 稜 SA ヲ O ニ於テ $SO:SA=m:n$ ニ内分シ, $OM \perp SA$ トシ, 面 SAM 上ニ於テ SA ヲ直径トスル半圓ヲ畫キ OM トノ交點ヲ M トシ, SA 上ニ $SE=SM$ ニ取リ, E ナ含ミ底面ニ平行スル平面ニテ截レバ可ナリ.

何トナレバ, 截リ口ハ底面ニ相似ナルユエ

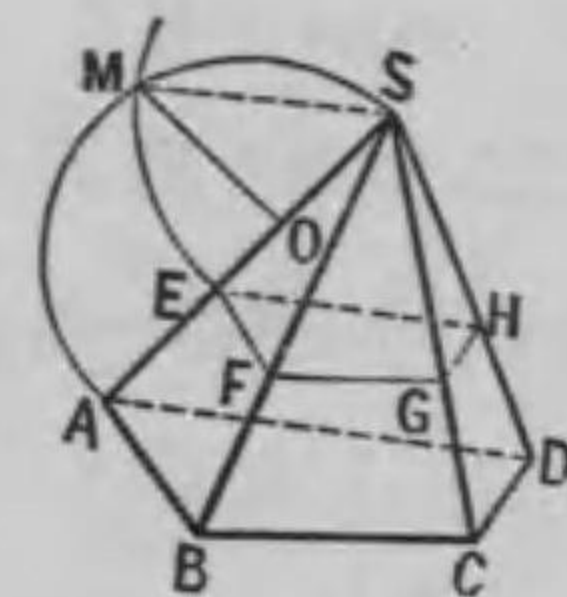
$$\frac{EFGH}{ABCD} = \frac{EF^2}{AB^2} = \frac{SE^2}{SA^2} \quad [\triangle SEF \sim \triangle SAB]$$

$$= \frac{SM^2}{SA^2} = \frac{SO \cdot SA}{SA^2} = \frac{SO}{SA} = \frac{m}{n}$$

(b) 稜 SA ヲ O ニ於テ $SO:OA=m:n$ ニ内分シ, 以下ハ (a) ト同様ニセバ可ナリ.

何トナレバ $(S-EFGH) \sim (S-ABCD)$ ナルユエ, 此等ノ傍面積ヲ夫々 β', β トスレバ $\beta':\beta = SE^2:SA^2 = SM^2:SA^2 = SO:SA$, $\therefore \beta':\beta = SO:OA = m:n$.

注意 (a) $m=1, n=2$; (b) $m=n$ トシテ見ヨ.



15. 角錐 (S-ABCD) ヲ底面ニ平行スル平面ニテ截リテ生ジタル角錐ト元體トノ體積ノ比ヲ與比 $m:n$ ニ等シカラシメヨ.

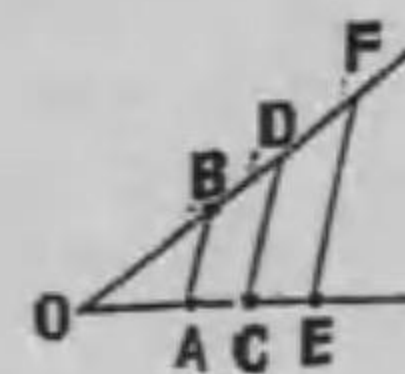
[解] 上圖ヲ用フ. 稜 SA ヲ E ニ於テ $SE:SA=m:n$ ニ内分シ, 即チ SA 上ニ於テ $SE = \frac{m}{n} SA$ ニ取リ, E ナ過リ底面ニ平行ナル平面ニテ截レバ可ナリ.

何トナレバ截リ口ト底面トハ平行ナルユエ $(S-EFGH) \sim (S-ABCD)$ ナリ, 故ニ此等ノ體積ヲ夫々 V', V トセバ $V':V = SE^3:SA^3 = m:n$.

注意 $m=1, n=2$ トセバ $V' = \frac{1}{8}V$ トナル.

16. 已知ノ二立方體ニ比例スル二直線ヲ求メヨ.

[解] \hat{O} ノ二邊上ニ二立方體ノ各一稜ニ等シク OA, OB ナ取り, 次ニ右圖ノ如ク $OC=OB$ ニ取り $CD \parallel AB$ トシ, 又次ニ $OE=OD$ ニ取り $EF \parallel CD$ トセバ OA, OF ハ所要ノ二直線ナリ.



$$\therefore \frac{OB^3}{OA^3} = \frac{OB}{OA} \cdot \frac{OD}{OC} \cdot \frac{OF}{OE} = \frac{OF}{OA}$$

續 第一章 乃至 第五章

特 種 問 題

12. 直線或ハ平面ノ會一點 此種ノ問題ヲ證明スルニハ、先ヅ第一ト第二トノ會スルコト、次ニ第二ト第三トノ會スルコトヲ斷定スレバ、以下ハ之ト同様ナリ。

第一 直線會一點問題

1. 平行六面體ノ四ツノ對角線ハ一點(中心)ニ於テ相會シ且ツ互ニ二等分セラル。 [72頁ノ1題重出]

2. 平行六面體ノ對稜ノ中點ヲ連結セル六直線ハ一點(中心)ニ於テ相會シ且ツ互ニ二等分セラル。 [73頁ノ2題參考]

3. 四面體ノ對稜ノ中點ヲ結ブ三直線ハ一點(重心)ニ於テ相會シ且ツ互ニ二等分セラル。 [86頁ノ5題(b)重出]

4. 四面體ノ各角頂ト其對面ノ重心トヲ結ブ四直線ハ一點(重心)ニ於テ相會シ且ツ互ニ3:1ニ分タル。 [83頁ノ(3)重出]

5. 四面體ノ底面ニ平行ナル截リ口ノ各邊ノ中點ト底面ノ其ノ對角頂トヲ結ブ三直線ハ一點ニ於テ相會シ且ツ互ニ4:1ニ分タル。 [88頁ノ7題重出]

6. 四面體ノ對稜ガ夫々互ニ垂直ナルトキハ、各角頂ヨリ夫々對面ヘ引ケル四垂線ハ一點ニ於テ相會ス。 [89頁10題(b)重出]

7. 二ツノ相似多面體ヲ相似ノ位置ニ且ツ對應面ガ夫々平行ナル様ニ置クトキハ、對應角頂ノ連結線ハ一點ニ於テ相會ス。 [98頁]

第二 平面會一點問題

1. 平行六面體ノ對稜ヲ含ム六平面ハ一點ニ於テ相會ス。

[略證] 其二平面ハ一雙ノ對角線ノ中點ヲ結ブ直線ニ於テ相交ル、而シテ此等ノ四直線

ハ元體ノ對角線ノ交點ニ於テ互ニ二等分セラルガ故ナリ。

2. 四面體ノ各二面角ヲ二等分スル六平面ハ各面ヨリ等距離ナル一點(内心)ニ於テ相會ス。 [82頁(1)重出]

3. 四面體ノ各稜ノ中點ヲ過リ夫々其稜ニ垂直ナル六平面ハ一點(外心)ニ於テ相會ス。 [同上(2)重出]

4. 四面體ノ一稜ト其對稜ノ中點トヲ含ム六平面ハ一點(重心)ニ於テ相會ス。 [86頁5題(d)重出]

13. 常數問題ニ付テハ平面幾何學75頁ヲ再讀スルヲ要ス。

問 題 及 ビ 解 答

1. 平行六面體ノ各角頂ヨリ其體ヲ過ラザル一平面ヘ下セル六垂線ノ和ハ一定ナリ。 [74頁3題重出]

2. 四面體ノ各角頂ヨリ其體ヲ過ラザル一平面ヘ下セル四垂線ノ和ハ一定ナリ。 [85頁3題(b)重出]

3. 四面體ノ對稜ガ夫々相等シキトキハ、對稜ノ一雙ニ平行ナル平面ニテノ截リ口ハ平行四邊形ニシテ其周ハ一定ナリ。 [87頁6題(a),(c)重出]

4. 正四面體ノ體內ノ一點ヨリ各面ヘ下セル四垂線ノ和ハ一定ナリ。 [91頁12題(f)重出]

5. (a) 四面體 ABCD ノ各角頂ヨリ對面ヘ下セル垂線ヲ夫々 a, b, c, d トシ、又體內ノ點 O ヨリ前ト同順ノ面ニ下セル垂線ヲ夫々 a', b', c', d' トセバ $\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} + \frac{c'}{c} + \frac{d'}{d}$ ハ常數ナリ。 [93頁15題重出]

(b) 又其體內ニ點 O ヲ取リ AO, BO, CO, DO ノ引長ト對面トノ交點ヲ夫々 A', B', C', D' トセバ $\frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OC'}{CC'} + \frac{OD'}{DD'}$ ハ常數ナリ。

6. 空間ニ二ツノ無限與直線 $XY, X'Y'$ アリ; 此等ノ上ニ夫々定長 AB, CD ヲ取レバ A, B, C, D ヲ頂點トスル四面體ノ體積ハ一定ナリ.

(東工)

[證] AB, CD ヲ夫々 $A'B', C'D'$ ノ位置ニ變ズレバ $\triangle CAB = \triangle CA'B'$ [等底, 同高] 且ツ此二面ハ一平面上ニ在ルユエ,

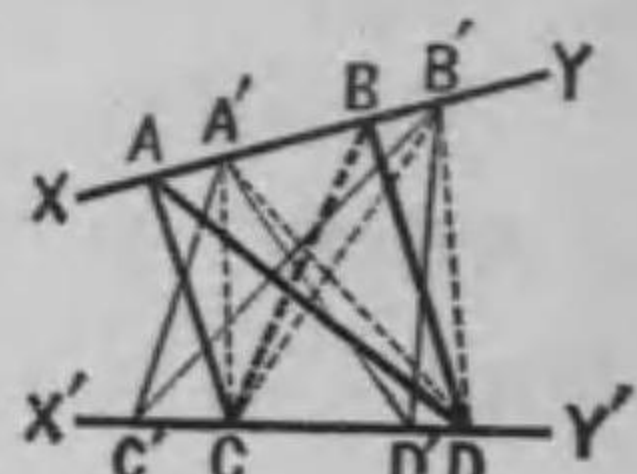
四面體 $(D-CAB) = (D-CA'B')$ [等底, 同高]

即チ $(A-BCD) = (A'-B'CD)$

同様ニ $(A'-B'CD) = (A'-B'C'D')$

\therefore 四面體 $(A-BCD) = (A'-B'C'D')$

即チ AB, CD カ夫々 $XY, X'Y'$ 上ニ於テ其位置ヲ變ズルモ A, B, C, D ヲ頂點トスル四面體ノ體積ハ不變ナリ.



14. 極大 及ビ 極小

61頁第23條ヲ見ヨ.

問 題 及 ビ 解 答

1. 角嚮ヲ一平面ニテ截リ, 其截リ口ヲ最小ナラシメヨ.

[解] 直截リ口ハ所要ノモノナリ. 證明ハ 75 頁ノ 7 題 ノ (c) ニ在リ.

2. 四面體ヲ其一双ノ對稜ニ平行ナル平面ニテ截リ, 其截リ口ヲ最大ナラシメヨ.

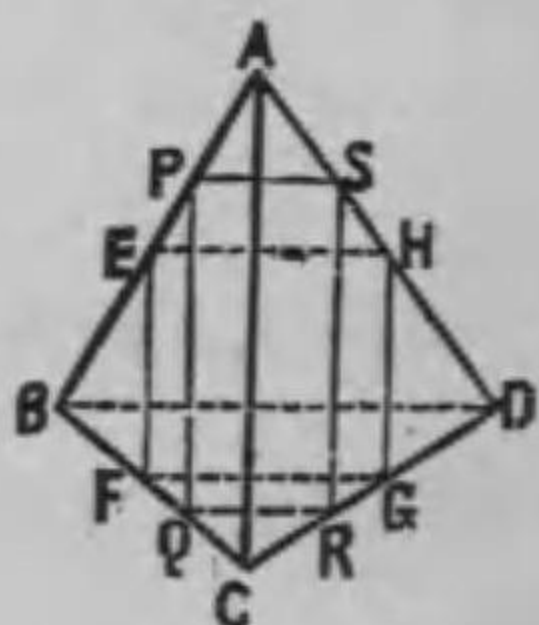
[解] 四面體 $ABCD$ ヲ對稜 AC, BD ノ他ノ各稜ノ中點ヲ過ル截リ口 $EFGH$ ハ所要ノモノナリ. 何トナレバ此截リ口ハ對邊ガ夫々 AC, BD

ニ平行ナルユエ平行四邊形ナリ, 又 AC, BD ニ平行スル任意ノ截リ口モ平行四邊形ナリ. 而シテ此兩形ハ二隣

邊ガ同方向ニ夫々平行ナルユエ等角ナリ. \therefore 故ニ

$$\frac{\square EG}{\square PR} = \frac{EF \cdot EH}{PQ \cdot PS} \text{ [平幾]} = \frac{EF}{PQ} \cdot \frac{EH}{PS} = \frac{BE}{BP} \cdot \frac{AE}{AP}$$

然ルニ $AE = BE, \therefore BE \cdot AE > BP \cdot PA$ ナリ.



3 正四面體ノ一双ノ對稜ノ最短距離ハ, 一稜ノ上ノ正方形ノ半ニ等シ.

[證明] 正四面體ヲ $ABCD$ トシ, 稜 AD ヲ含ミ對稜

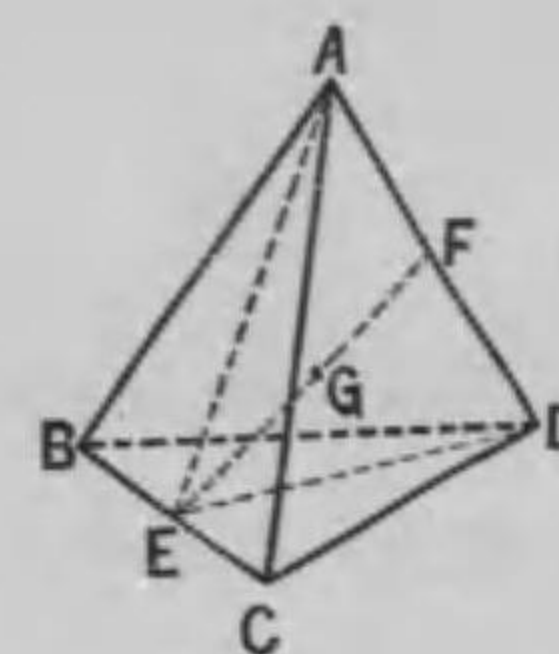
BC ニ垂直面 ADE ヲ作り, $EF \perp AD$ トスレバ EF

ハ AD, BC ノ共通垂線ニシテ且ツ其最短距離ナリ

[43 頁定理 (3)]. 而シテ正 $\triangle ABC$ ニ於テ $AE \perp BC$

ナルユエ $BE = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AB$. 從テ $AE = ED$

且ツ $EF \perp AD$ ナルユエ $AF = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}AB$.



$$\therefore EF^2 = AE^2 - AF^2 = (AB^2 - BE^2) - AF^2 = AB^2 - \frac{1}{4}AB^2 - \frac{1}{4}AB^2 = \frac{1}{2}AB^2,$$

$$\therefore EF = \frac{1}{\sqrt{2}}AB = \frac{\sqrt{2}}{2}AB.$$

4. 四面體ノ内ニ一點ヲ求メテ, 其點ト各角頂トノ距離ノ平方ノ和ヲ最小ナラシメヨ.

[解] 四面體ヲ $ABCD$ トシ, 對稜 BC, AD ノ中點ノ連結線 EF ノ中點 G ヲ求ムレバ

可ナリ. 何トナレバ $\overline{GA}^2 + \overline{GD}^2 = 2(\overline{AF}^2 + \overline{GF}^2)$ 及ビ $\overline{GB}^2 + \overline{GC}^2 = 2(\overline{BE}^2 + \overline{GE}^2)$ ナ

ルユエ $\overline{GA}^2 + \overline{GB}^2 + \overline{GC}^2 + \overline{GD}^2 = 2(\overline{DF}^2 + \overline{BE}^2 + 2\overline{GE}^2) = \frac{1}{2}(\overline{AD}^2 + \overline{BC}^2) + 4\overline{GE}^2$ ナリ.

今 體内ニ他ノ點 G' ヲ取レバ上ト同様ニ

$$\overline{G'A}^2 + \overline{G'B}^2 + \overline{G'C}^2 + \overline{G'D}^2 = \frac{1}{2}(\overline{AD}^2 + \overline{BC}^2) + 2(\overline{G'E}^2 + \overline{G'F}^2) \text{ ヲ得.}$$

然ルニ G' 點ハ EF 上ニ在ルト否トニ關ハラズ. $4\overline{GE}^2 < 2(\overline{G'E}^2 + \overline{G'F}^2)$

$$\therefore \overline{GA}^2 + \overline{GB}^2 + \overline{GC}^2 + \overline{GD}^2 < \overline{G'A}^2 + \overline{G'B}^2 + \overline{G'C}^2 + \overline{G'D}^2.$$

第 三 編

旋 轉 體

1. 旋轉體 トハ面ヲ旋轉シテ生ジタル立體ヲ云フ。其ノ種類ハ無限ニ存在スルモノナレドモ、立體幾何學ニ於テハ直圓壙、直圓錐、球及ビ此等ヨリ誘導セラルルモノノミニ付テ講究スルヲ通例トス。

第 一 章

直 圓 壙

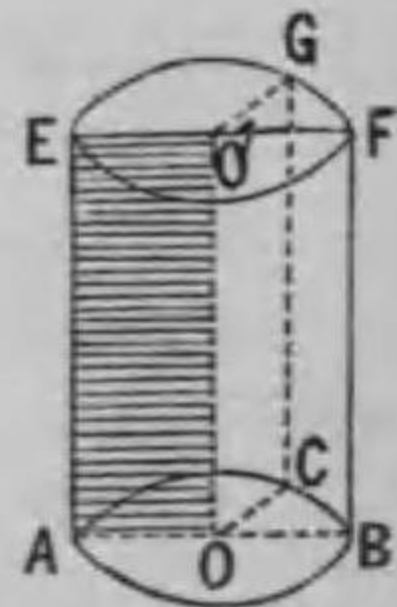
2. 定義 及 ビ 記法

定義 (1) 直圓壙或ハ直圓柱 トハ矩形ヲ其一邊ヲ軸トシテ一回旋轉シテ生ジタル體ヲ云フ。

而シテ其邊及ビ其長サヲ直圓壙ノ軸及ビ高サト云フ。

軸ノ對邊ヲ母線ト云ヒ、其邊ガ生ゼシ表面ヲ曲面或ハ傍面ト云フ。又軸ニ直交セル二邊ヲ底半徑ト云ヒ、其二邊ガ生ゼシ表面ヲ底面或ハ端面ト云フ。

記法 ハ角壙ト同様ニ右圖ヲバ直圓壙 (ABC-E) ト記ス。



定義 (2) 直圓壙ト其一母線ノミニテ出會フ平面ヲ切平面ト云フ。

定義 (3) 平截頭直圓壙 トハ直圓壙ヲ其底面ニ平行セル平面ニ截リタル各部ヲ云フ。

定義 (4) 相似直圓壙 トハ相似ナル矩形ヲ其對應邊ヲ軸トシテ夫々一回旋轉シテ生ジタル諸體ヲ云フ。

注意 直圓壙ハ直角壙ニ對應スル事項多シ、兩者ヲ對照スベシ。

3. 重要定理

定理 (1) 直圓壙ノ兩底面ハ全等ナル圓ナリ。

[證明] 何トナレバ、兩底面ハ軸ニ垂線ナル二邊ノ軌跡ナルユエ平行ナル二圓面ニシテ其半徑ハ矩形ノ對邊即チ等長ナルガ故ナリ。

定理 (2) (i) 直圓壙ノ軸ヲ含ム平面ニテノ截リ口ハ矩形ナリ。

(ii) 又其ノ軸ニ平行ナル平面ニテノ截リ口ハ矩形ナリ。

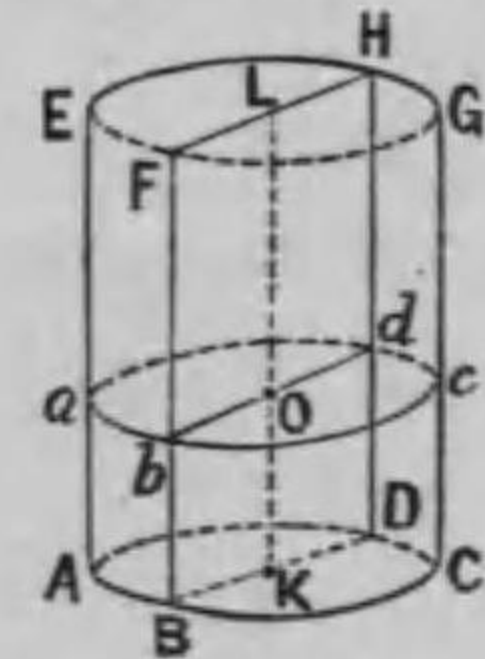
(iii) 又其ノ軸ニ垂直ナル平面ニテノ截リ口ハ底面ト全等ナリ。

注意 若シ底ニ斜メナル平面ニテ截ルトキハ、其截リ口ハ橢圓トナリテ、本書ノ範圍ヲ超越ス。

[證明] (i) 直圓壙 (ABCD-EFGH) ノ軸ニ平行ナル平面ニテ、截口ヲ BFHD トス。

然ルトキハ KLFB ハ廻轉スル矩形ニシテ KL ハ軸ナルユエ BF ハ一母線ナリ。同様ニ HD モ母線ナリ。故ニ $BF \cong KL \cong DH$ 且ツ $KL \perp$ 面 AC ナルユエ $BF \perp BD$ 。故ニ BH ハ矩形ナリ。

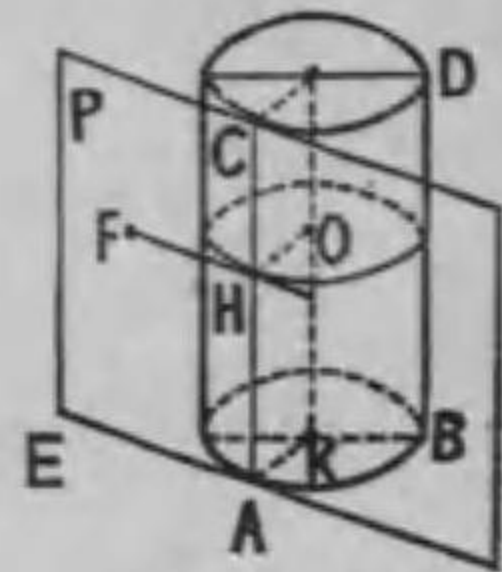
(iii) 軸 KL ト之ニ垂直ナル截リ口 ac トノ交點ヲ O トシ、又截リ口上ノ任意ノ點 b ヲ過ル母線 BbF ヲ引ケ。然レバ KL ニ垂直ナル面 ac//面 AC ナルユエ $Ob \parallel KB$ 。又 $OK \parallel bB$ 且ツ $OK \perp KB$ 。故ニ BbOK ハ矩形ナリ。從テ $Ob = KB$ 即チ底半徑。故ニ截リ口上ノ點ハ皆ナ O ヲリ底半徑ニ等シキ距離ニアルユエ截リ口ハ底面ト全等ナル圓ナリ。



系. 直圓壙ノ傍面上ノ點ハ皆ナ軸ヨリ等距離ナリ。

定理 (3) 直圓錐ノ一母線ト其母線ノ端ニ於ケル底面ノ切線トヲ含ム平面ハ切平面ナリ。

[證明] 直圓錐 (AB-C) ノ母線 AC ト A ニ於ケル底面ノ切線 AE トヲ含ム平面ヲ P トシ、底面ノ中心ヲ K トス。然レトキ P 面上ニ於テ AC 外ノ點 F ヲ過リ底面ニ平行ナル平面ニテ截リ AC トノ交點ヲ H トシ、截リ口ノ中心ヲ O トセバ AE//HF, AK//HO ナルユエ $\widehat{FHO} = \widehat{EAK} = \widehat{R}$ ナリ、從テ



FH ハ截リ口ノ切線ナリ。故ニ P 面上ニ於ケル AC 外ノ點ハ皆ナ直圓錐ノ曲面ト出會ハザルユエ P ハ切平面ナリ。

系 (1) 直圓錐ノ切平面上ノ直線ト母線トノ交點ハ唯一ツナリ。

系 (2) 直圓錐ノ切平面ハ母線ト軸トヲ含ム平面ニ垂直ナリ。

定理 (4) (i) 直圓錐ノ曲面積ハ底周ト高サトノ積ニ等シ。

(ii) 又其ノ全面積ハ底周ニ高サト底半徑トノ和ヲ乘ジタル積ニ等シ。

(iii) 又其ノ體積ハ底面積ト高サトノ積ニ等シ。

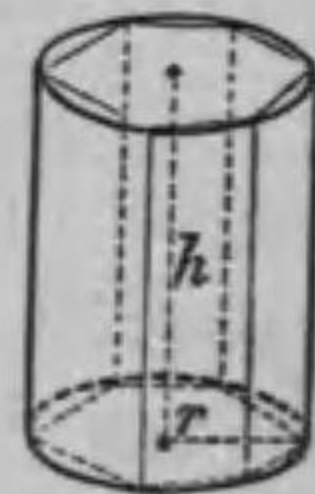
[證明] 直圓錐ノ底面ニ内接正 n 邊形ヲ畫キ、其各邊ヲ含ミ夫々軸ニ平行ナル平面ニテノ截リ口ハ何レモ全等ナル矩形ニシテ、其二面ヅツノ交線ハ母線ナリ。依テ此等ノ面ト兩底面ト正 n 邊形トニテ形成セル立體ハ内接直角正角錐ナルコト明カナリ。サテ今 n ヲ無究ニ多クシタルトキノ極限ニ於テ底周ハ殆ンド底圓周ナリ。

故ニ 底半徑ヲ r 、高サヲ h 、曲面積ヲ s 、全面積ヲ T 、體積ヲ V トセバ角錐ノ定理ニ依リテ

(i) $S = 2\pi r \cdot h$ [69 頁ノ (3)]

(ii) $T = 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2 = 2\pi r(h+r)$

(iii) $V = \pi r^2 \cdot h$ [71 頁ノ (8)]



系. 二ツノ直圓錐ノ曲面積ハ其底半徑ト高トノ乘積ニ比例ス. 又其ノ體積ハ其底半徑ノ二乗ト高サトノ乘積ニ比例ス.

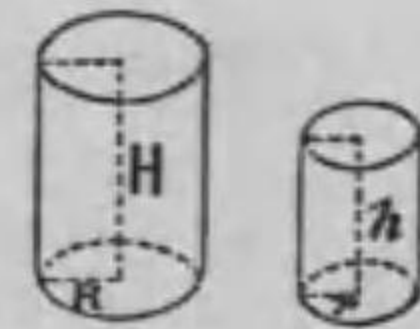
[證明] 次圖ヲ用フ. 曲面積及ビ體積ヲ夫々 S, s 及ビ V, v トスレバ

$$\frac{S}{s} = \frac{2\pi R \cdot H}{2\pi r \cdot h} = \frac{R \cdot H}{r \cdot h} \quad \text{及ビ} \quad \frac{V}{v} = \frac{\pi R^2 \cdot H}{\pi r^2 \cdot h} = \frac{R^2 \cdot H}{r^2 \cdot h}$$

定理 (5) (i) 相似直圓錐ノ曲面積ハ其高サノ二乗或ハ底半徑ノ二乗ニ比例ス. 又其ノ全面積モ亦タ然リ。

(ii) 又其ノ體積ハ其高サノ三乗或ハ底半徑ノ三乗ニ比例ス。

[證明] 二ツノ相似直圓錐ノ夫々底半徑ヲ R, r ; 高サヲ H, h ; 曲面積ヲ S, s ; 全面積ヲ T, t ; 體積ヲ V, v トセヨ. 然レバ兩體ヲ生セシ二ツノ矩形ハ相似ナルヲ以テ、



$$\frac{H}{h} = \frac{R}{r} = \frac{H+R}{h+r}, \quad \text{故ニ}$$

(i) $\frac{S}{s} = \frac{2\pi RH}{2\pi rh} = \frac{R}{r} \cdot \frac{H}{h} = \frac{H^2}{h^2}$ 或ハ $= \frac{R^2}{r^2}$

又 $\frac{T}{t} = \frac{2\pi R(H+R)}{2\pi r(h+r)} = \frac{R}{r} \cdot \frac{H+R}{h+r} = \frac{H^2}{h^2}$ 或ハ $= \frac{R^2}{r^2}$

(ii) $\frac{V}{v} = \frac{\pi R^2 H}{\pi r^2 h} = \frac{R^2}{r^2} \cdot \frac{H}{h} = \frac{H^3}{h^3}$ 或ハ $= \frac{R^3}{r^3}$

問題 及 ビ 解 答

1. 定位置ノ有限直線ヨリ定距離ニ在ル點ノ軌跡如何。

[略解] 此直線ヲ軸トシ定距離ヲ定半徑トスル直圓錐ノ曲面上ノ點ハ定距離ニ等シク、逆ニ、其軸ヨリ定距離ニアル點ハ皆ナ其直圓錐ノ曲面上ニ在ルコトヲ證セ。

2. 矩形ヲ二隣邊ヲ夫々軸トシテ旋轉シテ生ジタル二ツノ直圓錐ノ體積ハ、其軸ニ逆比例ス。

[證明] 矩形ノ二隣邊ヲ夫々 a, b トシ、之ヲ夫々軸トセルニツノ直圓壩ノ體積ヲ V, V' トセバ $V:V'=\pi b^2:a^2;\pi a^2:b^2=a:b$.

3. (a) 曲面積ガ相等シキニツノ直圓壩ノ體積ハ其底半徑ニ比例ス.

(b) 等積ナルニツノ直圓壩ノ曲面積ハ其底半徑ニ逆比例ス.

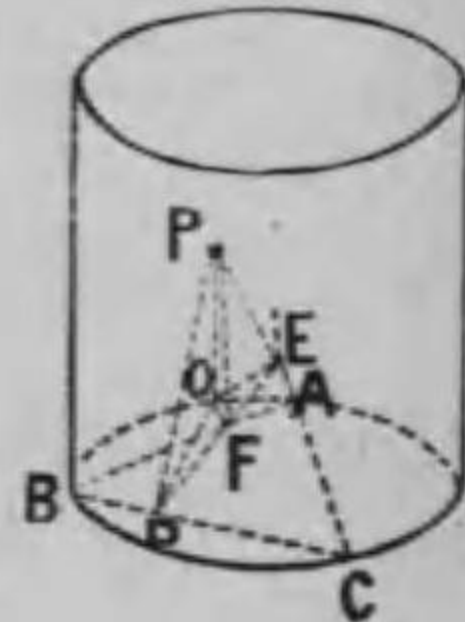
[證明] ニツノ直圓壩ニ於テ、底半徑ヲ R, r ; 高サヲ H, h ; 曲面積ヲ S, s ; 體積ヲ V, v トスレバ

$$(a) \frac{V}{v} = \frac{\pi R^2 \cdot H}{\pi r^2 \cdot h} = \frac{2\pi R H \cdot R}{2\pi r h \cdot r} = \frac{R}{r} \quad [2\pi R \cdot H = 2\pi r \cdot h \text{ (假設)}].$$

$$(b) \frac{S}{s} = \frac{2\pi R \cdot H}{2\pi r \cdot h} = \frac{V \div R}{v \div r} = \frac{V}{v} \cdot \frac{r}{R} = \frac{r}{R} \quad [V=v \text{ (假設)}].$$

4. 直圓壩ノ曲面上ノ一點ヨリ底圓ノ内接三角形ノ各邊ニ下セル三垂線ノ足ハ一直線上ニ在リ.

[證明] 直圓壩ノ曲面上ノ一點 P ヨリ底面ノ内接三角形 ABC ノ邊 BC, CA, AB へ垂線 PD, PE, PF ヲ引ケ. 然ルトキ P 點ヨリ底面ニ垂線 PO ヲ引ケバ三垂線定理ニ依リテ、 $DO \perp EC, EO \perp AC, FO \perp AB$. 而シテ PO ハ底面ニ垂線ナルユエ O ハ底圓ノ周上ニ在リ. 故ニ P ヨリ $\triangle ABC$ ノ各邊ヘ引ケル垂線ノ足 D, E, F ハ亦タ $\triangle ABC$ ノ外接圓ノ周上ノ點 O ヨリ各邊ヘ引ケル垂線ノ足ナルヲ以テ三垂線定理ニ依リ D, E, F ハ一直線上ニ在リ.



注意 本題ハ平面幾何學ノ三垂線定理ヲ擴張シタルモノナリ.

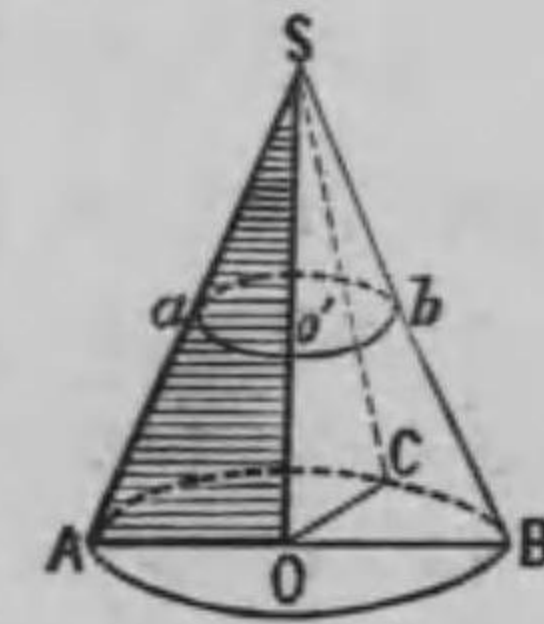
第二章 直圓錐

4. 定義 及 ビ 記法

定義 (1) 直圓錐 トハ直三角形ヲ其直角ノ一邊ヲ軸トシテ一回旋轉シテ生ジタル體ヲ云フ.

而シテ其邊及ビ其長サヲ直圓錐ノ軸及ビ高サト云フ.

斜邊ヲ母線或ハ斜高ト云ヒ、其邊ガ生ゼシ表面ヲ曲面或ハ傍面ト云フ. 又直角ニ隣ル他ノ邊ヲ底半徑ト云ヒ、其邊ガ生ゼシ表面ヲ底面ト云フ. 又軸ト斜邊トノ交點ヲ頂點ト云フ. 又軸ヲ含ム平面ニテノ截リ口ノ頂角ヲ直圓錐ノ頂角ト云フ.



記法 ハ角錐ト同様ニ右圖ヲバ直圓錐 $(S-ABC)$ ト記ス.

定義 (2) 直圓錐ト其一母線ノミニテ出會フ平面ヲ切平面ト云フ.

定義 (3) 平截頭直圓錐或ハ直圓錐臺 トハ直圓錐ノ底面ト之ニ平行ナル平面ニテノ截リ口トノ間ノ部分ヲ云フ.

其平行二面ヲ各々底面ト云ヒ、其距離ヲ高サト云フ.

又斜高ノ平行二面間ニアル部分ヲ其斜高ト云フ.

定義 (4) 相似直圓錐 トハ相似ナル直三角形ヲ其對應邊ヲ軸トシテ夫々一回旋轉シテ生ジタル諸體ヲ云フ.

注意 直圓錐ハ直角錐ニ對應スル事項多シ、兩者ヲ對照スベシ.

5. 重要定理

定理 (1) 直圓錐ヲ一平面ニテ截ルトキハ、其面ノ位置ニ從テ次ノ場合ヲ得、即チ

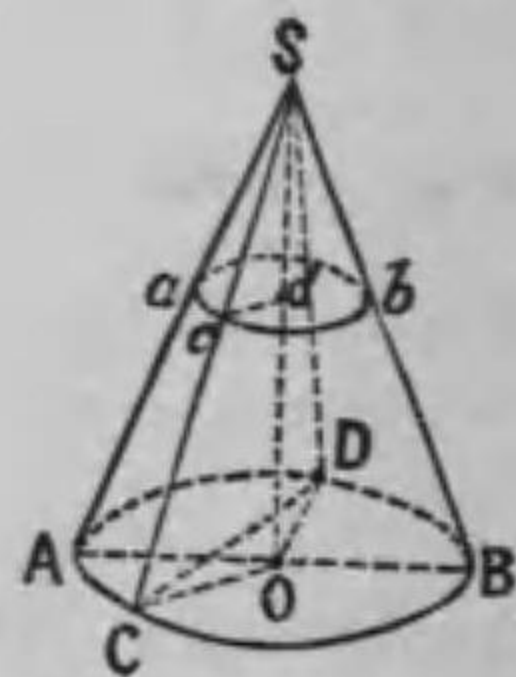
- (i) 其面ガ頂點ヲ過リ曲面ニ會セザレバ、截リ口ハ一點ナリ。
- (ii) 其面ガ頂點ヲ過リ曲面ヲ截レバ、截リ口ハ二等邊三角形ナリ。

又其面ガ軸ヲ含ムモ亦タ然リ。

(iii) 其面ガ頂點ヲ過ラズ軸ト直交スルトキハ、截リ口ハ圓ナリ。

[證明] (ii) 直圓錐 (S-AB) ノ頂點ヲ過ル曲面ノ截リ口ヲ SCD トセヨ。然ルトキ底面ノ中心 O ヲ C, D ニ結ベバ底半徑 OC=OD, SO=共通, 其夾角 $\widehat{SOC}=\widehat{SOD}$ ナルユエ $\triangle SOC \equiv \triangle SOD$. $\therefore SC=SD$.

(iii) 其截リ口 ab 軸 SO トノ交點ヲ o' トシ、又截リ口上ノ任意ノ母線 SoC ヲ引ケ。然レバ SO ニ垂直ナル面 $ab \parallel$ 面 AB, 從テ $\triangle SCO$ ニ於テ $so' \parallel CO$ ナルユエ $so' : CO = So' : SO$, 即チ截リ口上ノ點 o' ヨリノ距離ト底半徑トノ比ハ常ニ定比 $So' : SO$ ニ等シ。故ニ截リ口上ノ點ハ皆ナ o' ヨリ等距離ナルユエ截リ口ハ中心 o ナル圓ナリ。



注意 直圓錐ノ平面ニテノ截リ口ハ尙ホ上ノ他ニアリ。今其名稱ヲ次ニ示サン。

- (iv) 其面ガ底面ニ平行セズシテ各母線ヲ截ルトキハ、截リ口ヲ橢圓ト云フ。
- (v) 其面ガ二ツノ母線ニ平行ナルトキハ、截リ口ヲ拋物線ト云フ。
- (vi) 頂點ノ兩傍ニ在ル對稱直圓錐ヲ軸ニ平行ナル一平面ニテ截ルトキハ截リ口ヲ雙曲線ト云フ。

以上ノ截リ口ヲ總稱シテ圓錐曲線ト云ヒ、解析幾何學ニ於テ講究スベキモノナリ。

定理 (2) 直圓錐ノ一母線ト其母線ノ端ニ於ケル底面ノ切線トヲ含ム平面ハ切平面ナリ。

[證明] ハ110頁ノ(3)ト全ク同様ナリ。

系 (1) 直圓錐ノ切平面上ノ直線ト母線トノ交點ハ只一ツナリ。

系 (2) 直圓錐ノ切平面ハ母線ト軸トヲ含ム平面ニ垂直ナリ。

定理 (3) (i) 直圓錐ノ曲面積ハ底周ノ半ト斜高トノ乘積ニ等シ。

(ii) 又其全面積ハ底周ノ半ニ斜高ト底半徑トノ和ヲ乘ジタル積ニ等シ。

(iii) 又其ノ體積ハ底面積ト高サトノ乘積ノ三分ノ一ニ等シ。

[證明] 直圓錐ノ底面ニ内接正 n 邊形ヲ畫ケバ、其各邊ト頂點トヲ過ル平面ニテノ截リ口ハ何レモ全等ナル二等邊三角形ニシテ、其二面ツノ交線ハ母線ナリ。依テ此等ノ面ト底面ノ正 n 邊形トニテ形成セル立體ハ内接正角錐ナルコト明カナリ。

サテ今 n ヲ無究ニ多クシタルトキノ極限ニ於テ底周ハ殆ンド底圓周ナリ。

故ニ底半徑ヲ r, 高サ SO ヲ h, 斜高 SA ヲ l, 曲面積ヲ S, 全面積ヲ T, 體積ヲ V トセバ
角錐ノ定理ニ依リテ

$$(i) S = \frac{1}{2} \cdot 2\pi r \cdot l = \pi r l.$$

$$(ii) T = \pi r l + \pi r^2 = \pi r(l+r). \quad [82 \text{ 頁 (5)}].$$

$$(iii) V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h. \quad [80 \text{ 頁 (3)}]$$



系. 二ツノ直圓錐ノ曲面積ハ其底半徑ト斜高トノ乘積ニ比例ス。又

其體積ハ其底半徑ノ二乗ト高サトノ乘積ニ比例ス。

[證明] 二ツノ直圓錐ニ於テ、底半徑ヲ R, r; 高サヲ H, h; 斜高ヲ L, l; 曲面積ヲ S, s; 體積ヲ V, v トスレバ

$$\frac{S}{s} = \frac{\pi R \cdot L}{\pi r \cdot l} = \frac{R \cdot L}{r \cdot l} \quad \text{及ビ} \quad \frac{V}{v} = \frac{\frac{1}{3} \pi R^2 \cdot H}{\frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h} = \frac{R^2 \cdot H}{r^2 \cdot h}.$$

定理 (4) (i) 平截頭直圓錐ノ曲面積ハ兩底周ノ和半ト斜高トノ乘積ニ等シ。

(ii) 又其ノ體積ハ兩底面ト其比例中項トノ和ニ高ヲ乘シタル積ノ三分ノ一ニ等シ。 (陸士)

[略證] 前圖ヲ用フ。高ヲ Oo' ナ h' , 斜高 Aa' ナ l' , 半徑 ao' ナ r' , 曲面積ヲ S' , 體積ヲ V トセバ (i) $S' = \frac{1}{2}(2\pi r + 2\pi r')l' = \pi l'(r+r')$. [82 頁 (5)]

又高ヲ Oo' ノ中點 M ナ過リ底面ニ平行スル平面ニテノ截リ口ノ半徑ヲ MN トセバ $MN = \frac{1}{2}(r+r')$ ナルヲ以テ $S' = \pi l' \cdot MN$ トナル。 (魯醫)

$$(ii) V = \frac{1}{3}h' \{ \pi r^2 + \pi r'^2 + \sqrt{\pi r^2 \cdot \pi r'^2} \}$$

$$= \frac{1}{3}h' \pi (r^2 + r'^2 + rr')$$

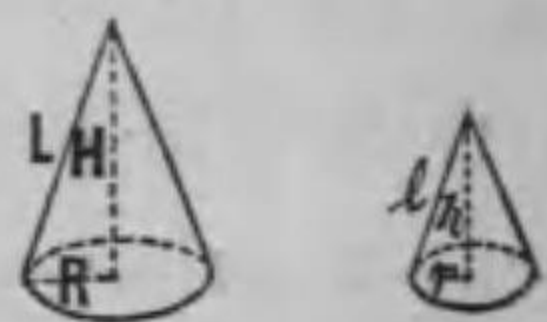
(81 頁ノ定理(4))

定理 (5) (i) 相似直圓錐ノ曲面積ハ其高サノ二乗或ハ斜高ノ二乗或ハ底半徑ノ二乗ニ比例ス。 (陸士)

又其全面積モ亦タ然リ。

(ii) 又其ノ體積ハ其高サノ三乗或ハ底半徑ノ三乗ニ比例ス。 (東農, 陸士)

[證明] ニツノ相似直圓錐ノ夫々高サヲ H, h ; 斜高ヲ L, l ; 底半徑ヲ R, r ; 曲面積ヲ S, s ; 全面積ヲ T, t ; 體積ヲ V, v トセヨ。然レバ兩體ヲ生ゼシニツノ直三角形ハ相似ナルヲ以テ,



$$\frac{H}{h} = \frac{R}{r} = \frac{L}{l} = \frac{H+R}{h+r} = \frac{L+R}{l+r}$$

$$\therefore (i) \frac{S}{s} = \frac{\pi RL}{\pi rl} = \frac{R}{r} \cdot \frac{L}{l} = \frac{R^2}{r^2} \text{ 或ハ } \frac{L^2}{l^2} \text{ 或ハ } \frac{H^2}{h^2}$$

$$\text{又 } \frac{T}{t} = \frac{\pi R(L+R)}{\pi r(l+r)} = \frac{R}{r} \cdot \frac{L+R}{l+r} = \frac{R^2}{r^2} \text{ 或ハ } \frac{L^2}{l^2} \text{ 或ハ } \frac{H^2}{h^2}$$

$$(ii) \frac{V}{v} = \frac{\pi R^2 H}{\pi r^2 h} = \frac{R^2}{r^2} \cdot \frac{H}{h} = \frac{R^3}{r^3} \text{ 或ハ } \frac{L^3}{l^3} \text{ 或ハ } \frac{H^3}{h^3}$$

問 題 及 ビ 解 答

1. (a) 直圓錐ノ斜高ガ底半徑ニ等シケレバ, 其曲面積ハ底面積ニ等シ。

又高サガ底半徑ニ等シケレバ, 曲面積ト底面積ノ比ハ $\sqrt{2}:1$ ナリ。

(b) 直圓錐ノ全面積ハ底面積ノ二倍ヨリモ大ナリ。

[證明] 直圓錐ノ高サヲ SO , 斜高ヲ SA トセヨ。然ルトキハ

(a) 曲面積 $= \pi \cdot OA \cdot SA = \pi \cdot OA \cdot OA$ [假設] $= \pi \cdot \overline{OA}^2$ 即チ底面積。

又 曲面積 : 底面積 $= \pi \cdot OA \cdot SA : \pi \cdot \overline{OA}^2 = SA : OA = \sqrt{2} \cdot OA : OA = \sqrt{2} : 1$.

(b) $\widehat{SOA} = \widehat{R}$ ナルユエ $SA > OA$, 故ニ $\pi SA \cdot OA > \pi \overline{OA}^2$.

$\therefore \pi SA \cdot OA + \pi \overline{OA}^2 > 2\pi \overline{OA}^2$ 即チ題言ノ如シ。

2. 直圓錐ヲ底面ニ平行ナル平面ニテ截リテ生ゼシ直圓錐ハ, 元體ニ相似ナリ。

[證明] 此兩體ハ其軸及ビ底半徑ガ旋轉ニ要セシ直三角形ノ相當邊ナルガ故ナリ。

3. 直圓錐ヲ其軸ノ中點ヲ過リ底面ニ平行スル平面ニテ截レバ,

(a) 其上部ト下部トノ曲面積ノ比ハ $1:3$ ナリ。

(b) 其上部ト下部トノ體積ノ比ハ $1:7$ ナリ。 (新醫)

[證明] (a) 97 頁ノ 2 題ト全ク同様ナリ。

4. (a) 直三角形 ABC ニ於テ直角頂 A ヨリ斜邊 BC ニ垂線 AD ヲ引ケバ, 邊 AB, AC, BC ヲ夫々軸トシテ元形ヲ一回ヅツ旋轉シタル體ノ體積ハ $\frac{1}{3}\pi \overline{AC}^2 \cdot AB, \frac{1}{3}\pi \overline{AB}^2 \cdot AC, \frac{1}{3}\pi \overline{AD}^2 \cdot BC$ ナリ。

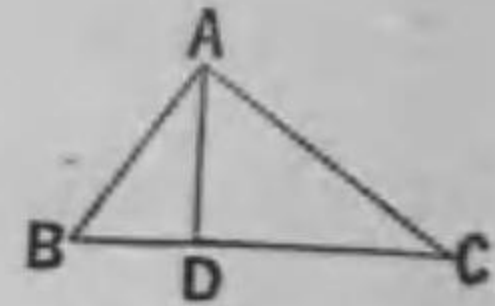
(第三ノ海機)

(b) 正三角形ヲ其一邊 a ヲ軸トシテ一回旋轉シタル體ノ體積ハ $\frac{1}{4}\pi a^3$ ナリ。

[證明] (a) 第三 BC ヲ軸シタル體ノ體積ハ BD, DC ヲ軸トシ

AD ヲ底半徑トセルニツノ直圓錐ノ和ナリ,

$$\therefore \text{此體積} = \frac{1}{3}\pi \overline{AD}^2 \cdot BD + \frac{1}{3}\pi \overline{AD}^2 \cdot CD = \frac{1}{3}\pi \overline{AD}^2 \cdot BC.$$



(b) 正三角形 ABC ニ於テ 高サ AD = $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ ナルヲ以テ, (a) ノ第三ト同様ニ

$$\text{體積} = \frac{1}{3}\pi \overline{AD}^2 \cdot BC = \frac{1}{3}\pi \times \frac{3}{4}a^2 \times a = \frac{1}{4}\pi a^3.$$

5. 三角形 ABC ノ邊 AB ヲ軸トシテ元形ヲ一回旋轉シタル體積ハ, 一角頂 A ヨリノ高サ AD ト底邊 BC ノ生ビシ曲面積トノ乘積ノ三分ノ一ニ等シ.

(陸主)

[證明] CE ⊥ AB トセバ AE ± EB = AB ナルユエ前題ト同様ニ

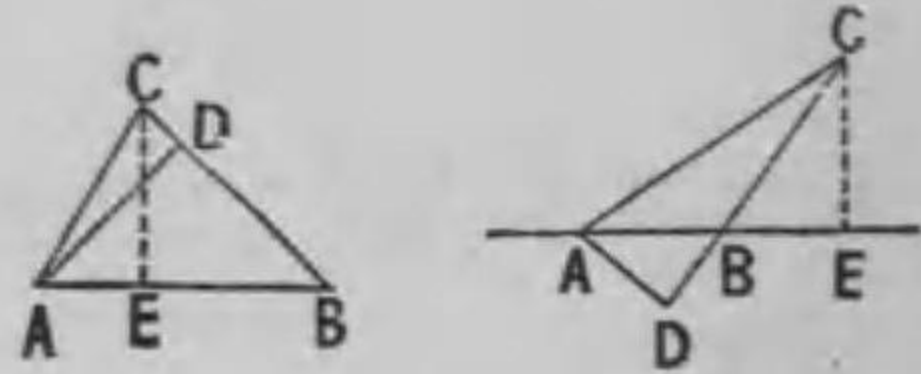
AB ヲ軸トシテ元形ヲ旋轉シタル體

$$= \frac{1}{3}\pi \cdot \overline{CE}^2 \cdot (AE \pm EB)$$

$$= \frac{1}{3}\pi \cdot \overline{CE}^2 \cdot AB \quad (\overline{CE} \cdot AB = \frac{1}{2}\Delta ABC)$$

$$= \frac{1}{3}\pi \cdot \overline{CE} \cdot BC \cdot AD \quad (= BC \cdot AD)$$

$$= \frac{1}{3}\text{曲面積} BC \times AD.$$



6. 平行四邊形 ABCD ヲ其二隣邊 AB, BC ヲ夫々軸トシテ一回ヅツ旋轉シテ生ジタル體ノ體積ハ其軸ニ逆比例ス.

[證明] AB, DC = 垂線 CE, AF ヲ引キ, 之ニ平行線 BG ヲ引キ DC ノ引長トノ交點ヲ G トシ, 又 DA 及ビ其引張ニ垂線 CK, BH ヲ引ケバ明カニ $\triangle ADF \equiv \triangle BCG$ 及ビ $\triangle CKD \equiv \triangle BHA$ ナルヲ以テ,

軸 AB ノ旋轉體 V = 軸 AB, 底半徑 BG ノ直圓錐,

軸 BC " v = 軸 BC, 底半徑 BH "

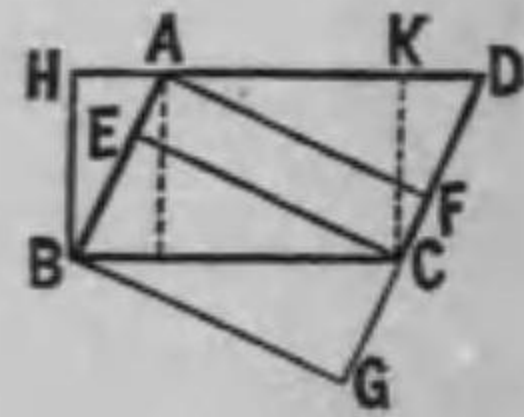
而シテ $\triangle ABH \sim \triangle CBG$ ナルユエ $\frac{BH}{AB} = \frac{BG}{BC}$

$$\therefore \frac{V}{v} = \frac{\pi \overline{BG}^2 \cdot AB}{\pi \overline{BH}^2 \cdot BC} = \frac{BG}{BH} = \frac{BC}{AB}$$

[別證] V = (軸 AE, 底半徑 CE ノ直圓錐) + (軸 BE, 底半徑 CE ノ直圓錐) × 2

及ビ v = (軸 AK, 底半徑 CK ") + (軸 DK, 底半徑 CK ") × 2 トスル

モ可ナリ.



7. (a) 梯形 ABCD ニ於テ底 AB > 底 DC 且ツ DE ⊥ AB ⊥ CF トス. 然ルトキハ AB, DC ヲ夫々軸トシテ元形ヲ一回ヅツ旋轉シタル體ノ體積ハ $\frac{1}{3}\pi \overline{DE}^2 (AB + 2 \cdot CD)$ 及ビ $\frac{1}{3}\pi \overline{DE}^2 (2 \cdot AB + CD)$ ナリ.

(b) 上ノ圖形 AFCD ヲ AF, CD ヲ夫々軸トシテ一回ヅツ旋轉シタル體ノ體積ハ $\frac{1}{3}\pi \overline{DE}^2 (AF + 2 \cdot CD)$ 及ビ $\frac{1}{3}\pi \overline{DE}^2 (2 \cdot AF + CD)$ ナリ.

又 CF ヲ軸トシタルトキノ體積ハ $\frac{1}{3}\pi \overline{DE}^2 (DC^2 + AF^2 + DC \cdot AF)$ ナリ.

[證明] (a) AB ヲ軸トシテ元形ヲ旋轉シタル體

= (軸 EF, 底半徑 DE ノ直圓錐)

+ (軸 AE, 底半徑 DE ノ直圓錐)

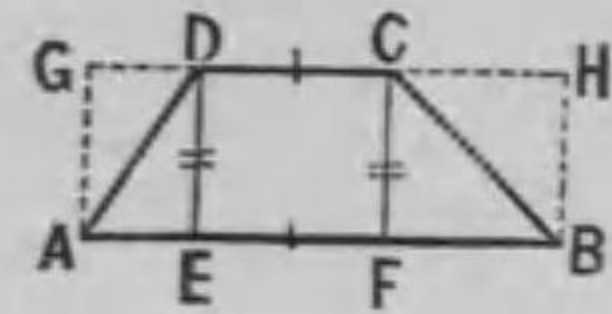
+ (軸 FB, 底半徑 FC ノ直圓錐)

$$= \pi \overline{DE}^2 \cdot EF + \frac{1}{3}\pi \overline{DE}^2 \cdot AE + \frac{1}{3}\pi \overline{FC}^2 \cdot FB = \frac{1}{3}\pi \overline{DE}^2 (3 \cdot EF + AE + EB)$$

$$= \frac{1}{3}\pi \overline{DE}^2 (AB + 2 \cdot EF) = \frac{1}{3}\pi \overline{DE}^2 (AB + 2 \cdot CD).$$

之ト同法ニ依リテ 次問ヲ證明シ得ベシ.

(b) 前問ハ (a) ニ倣フ. 次問ハ平截頭直圓錐ナリ.



8. 正六邊形ヲ其一邊ヲ軸トシテ一回旋轉シタル體ノ體積ハ $\frac{9}{2}\pi a^3$ ナリ, 但シ a ハ一邊ノ長サナリ.

[證明] AE, BD ト FC トノ交點ヲ G, H トシ, 又 F ヨリ AE ニ平行線ヲ引キ DE ノ引

長トノ交點ヲ K トス. 然ルトキハ $\widehat{GFE} = \frac{1}{2}\widehat{F} = \frac{2}{3}\widehat{R}$ ナルユエ $FG = \frac{1}{2}FE = \frac{1}{2}a$.

$GE = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ ナリ, 從テ

$$\triangle FGE \equiv \triangle EKF \equiv \triangle FGA \equiv \triangle CHB \equiv \triangle CHD,$$

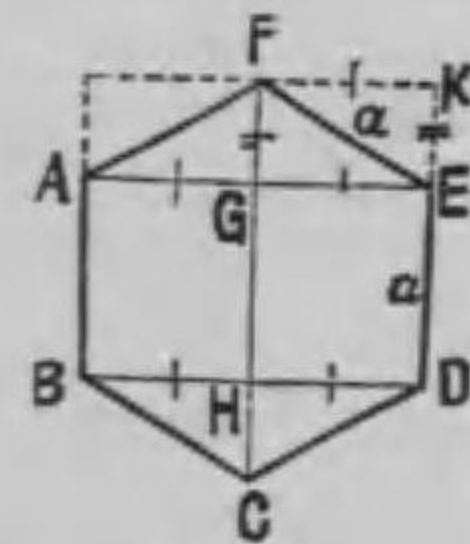
$$KE = FG = \frac{1}{2}a, \quad BD = AE = \sqrt{3}a \quad \text{及ビ}$$

$$KD = KE + ED = \frac{1}{2}a + a = \frac{3}{2}a \quad \text{ナリ.}$$

\therefore DE ヲ軸トシテ元形ヲ旋轉シタル體

= 軸 KD, 底半徑 BD ノ直圓錐

$$= \pi \overline{BD}^2 \cdot KD = \pi \times 3a^2 \times \frac{3}{2}a = \frac{9}{2}\pi a^3.$$



[別證] 此體積=(軸EDノ直圓錐)+(軸KEノ平截頭直圓錐FAEK)×2
 -(軸EKノ直圓錐)×2

$$= \pi \overline{AE}^2 \cdot ED + \frac{1}{3} GF \cdot \pi (\overline{EG}^2 + \overline{AE}^2 + EG \cdot AE) \times 2 - \frac{1}{3} \pi \overline{GE}^2 \cdot GF \times 2$$

$$= \pi \times 3a^2 \cdot a + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} a \pi \left(\frac{3}{4} a^2 + 3a^2 + \frac{\sqrt{3}}{2} a \cdot \sqrt{3} \cdot a \right) \times 2 - \frac{2}{3} \pi \times \frac{3}{4} a^2 \times \frac{1}{2} a$$

$$= 3\pi a^3 + \frac{1}{3} \pi a^3 \left(\frac{3}{4} + 3 + \frac{3}{2} \right) - \frac{1}{4} \pi a^3 = \frac{9}{2} \pi a^3.$$

9. 底半徑ト軸トガ共ニ a ナル直圓錐ト直圓錐トノ曲面積ノ比ハ $\sqrt{2}:1$ ナリ.

[證明] 直圓錐ノ曲面積 $S=2\pi a^2 \cdot \sqrt{2}$ 又直圓錐ノ斜高ハ二等邊三角形ノ斜邊ナルユエ $\sqrt{2} \cdot a$ ナリ, 故ニ 直圓錐ノ曲面積 $s=\pi a \cdot \sqrt{2} a = \sqrt{2} \pi a^2$.
 $\therefore S:s=2\pi a^2:\sqrt{2} \pi a^2=2:\sqrt{2}=\sqrt{2}:1.$

10. 平截頭直圓錐ノ斜高ガ兩底半徑ノ和ニ等シキトキハ,

- (a) 其高サハ兩底直徑ノ比例中項ナリ.
- (b) 又其ノ體積ハ全面積ト高サトノ乘積ノ六分ノ一ナリ.

[證明] (a) 平截頭直圓錐ノ軸 MN ナ含ム平面ニテノ截リ

口ヲ $ABDC$ トセバ $AC=AM+CN=BD$ (假設).

又 $DE \perp AB$, CE ト MN トノ交點ヲ F トセバ

$ME=CN$. 故ニ $CF=FE$, $FM=\frac{1}{2}MN$,

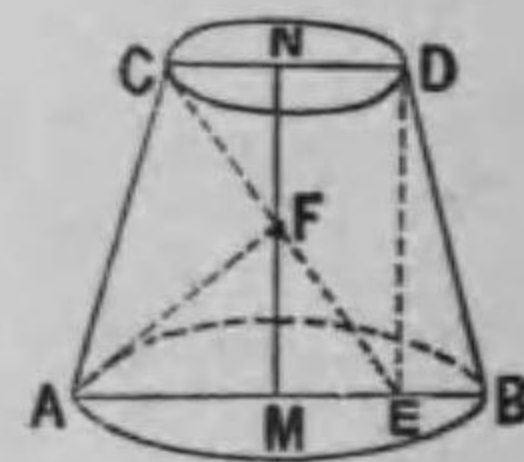
$AE=AM+ME=AM+CN=AC$, $\therefore AF \perp CE$,

$FM \perp AE$, $\therefore AM:MF=MF:ME$ 即チ $2AM:MN=MN:2CN$.

(b) $AM=R$, $CN=r$; $MN=h$, $AC=L$ トスレバ

$$\text{體積} = \frac{1}{3} \pi h (R^2 + Rr + r^2) = \frac{1}{6} \pi h (2R^2 + 2Rr + 2r^2) = \frac{1}{6} \pi h [(R+r)^2 + R^2 + r^2]$$

$$= \frac{1}{6} h \times (\text{全面積}).$$



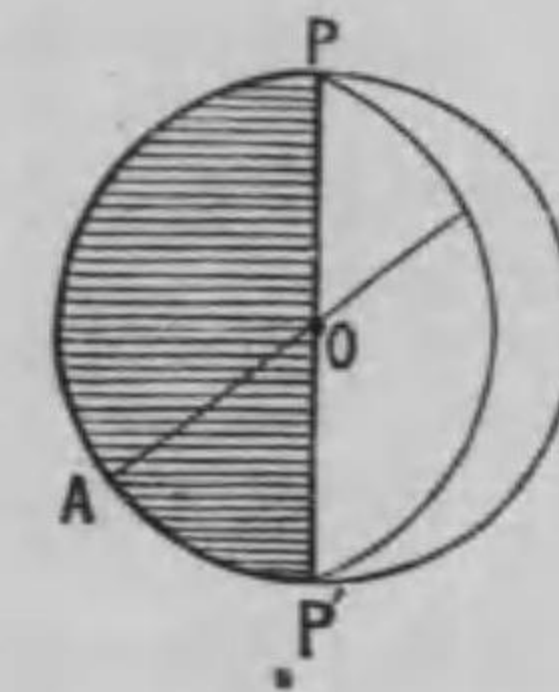
第三章 球

6. 定義

(1) 球 トハ半圓ヲ其直徑ヲ軸トシテ一回旋轉シテ生ジタル體ヲ云フ. 而シテ其中心ヲ球ノ中心或ハ球心ト云フ.

又其半圓周ガ生ゼシ表面ヲ球面ト云フ.

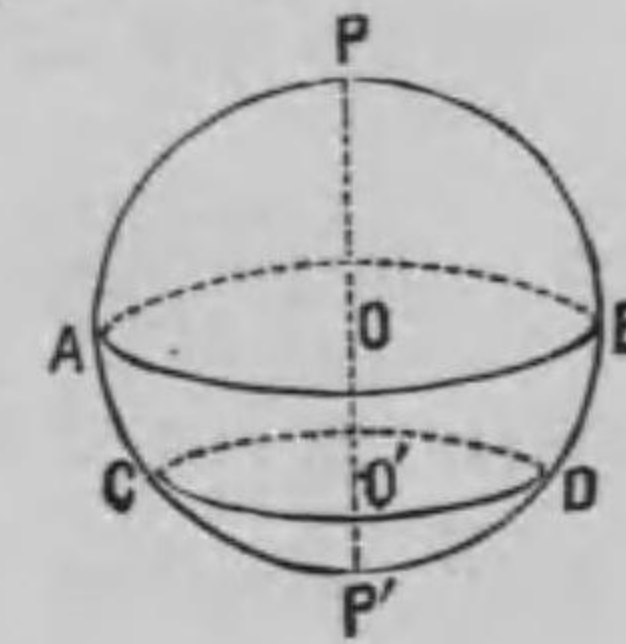
球心ヨリ球面ニ終ル直線ヲ球ノ半徑ト云ヒ, 球心ヲ過リ双方球面ニ終ル直線ヲ球ノ直徑ト云フ, 從テ 直徑=2半徑.
 直徑ノ兩端ノ二點ヲ對點ト云フ.



(2) 大圓 トハ球心ヲ過ル平面ニテノ截リ口ヲ云フ.

小圓 トハ其他ノ平面ニテノ截リ口ヲ

云フ. 而シテ此等ノ圓ノ平面ニ垂直ナル直徑ヲ其圓ノ軸ト云ヒ, 軸ノ兩端ヲ其圓ノ極ト云フ.



(3) 半球 トハ球ガ大圓ニ分タレタル各部ヲ云フ.

分球 トハ球ガ小圓ニ分タレタル各部ヲ云フ.

而シテ此等ノ圓面ヲ底ト云ヒ, 軸ノ部分ヲ高サト云ヒ, 球面ノ部分ヲ曲面ト云フ.

球帶 トハ球ガ平行二平面ニ截ラレタル其二面間ノ部分ヲ云フ. 其二圓面ヲ底ト云ヒ, 二圓面ノ距離ヲ高サト云ヒ, 球面ノ部分ヲ曲面ト云フ.

扇球 トハ旋轉半圓ノ扇形ニテ生ジタル球ノ部分ヲ云フ。

(4) 球面ト唯一点ノミニ於テ出會フ無限直線ヲ切線ト云ヒ、其點ヲ切點ト云フ。

又球面ト唯一点ノミニ於テ出會フ平面ヲ切平面ト云ヒ、其點ヲ切點ト云フ。

(5) 二球ガ唯一点ノミニテ出會フトキハ相切スト云ヒ、而シテ各々ガ全ク他ノ外ニ在リテ切スルトキハ外切スト云ヒ、一ツガ全ク他ノ内ニ在リテ切スルトキハ内切スト云フ。

又二球ノ各々其一部分ガ他ノ内ニ在ルトキハ相交ルト云ヒ、球面ノ出會フ所ヲ交リト云フ。

注意 球ハ圓ニ對應スル事項多シ、兩者ヲ對照スベシ。

而シテニツ以上ノ球ハ其中心或ハ半徑ヲ以テ表ハスコトアリ。

7. 重要定理

定理 (1) 球ノ凡テノ半徑ハ相等シ、從テ凡テノ直徑ハ相等シ。

系 (1) 球心ハ唯一ツニ限ル。

系 (2) 球心ハ球面ノ對稱中心ナリ。

[證明] 何トナレバ球心ハ凡テノ直徑ノ中心ナルガ故ナリ。

定理 (2) 球心ヨリ一点ニ至ル距離ハ、其點ガ球ノ内、上、外ニ在ルニ從テ、半徑ヨリモ小、等、大ナリ。此逆ハ眞ナリ。

系 一定點ヨリ定距離ニ在ル點ノ軌跡ハ、其點ヲ球心トシ其距離ヲ半徑トスル一球面ナリ。

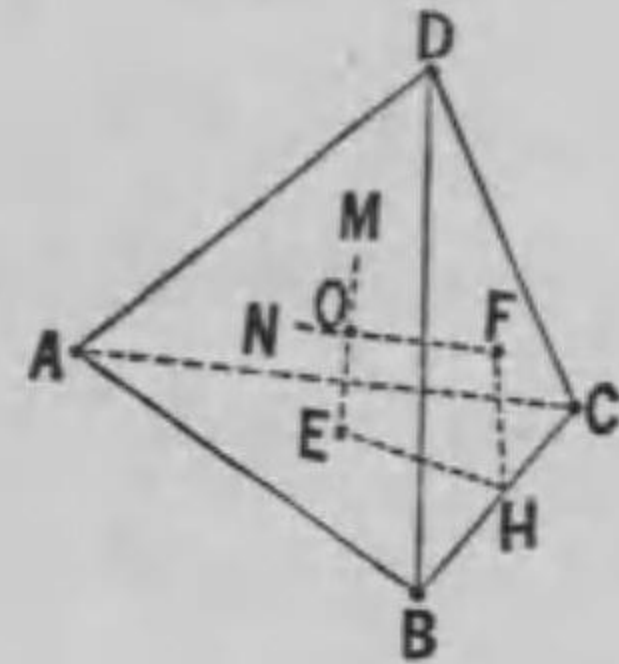
注意 此系ハ球面ノ定義トスルコトヲ得、然ルトキハ其一定點ヲ球心ト云ヒ、定距離ヲ球半徑ト云ヒ、球面ニテ圓マレタル體ヲ球ト云フ。

定理 (3) 同一平面上ニ在ラザル四點ヲ過ル球ハ唯一ツニ限ル。

(海經, 熊工)

[證明] 此四點ニテ四面體 DABC ヲ作り、面 ABC 及ビ面 BCD ノ外心ヲ夫々 E 及ビ F トシ、又 BC ノ中點ヲ H トセヨ。然レバ BC へノ垂線 EH, FH ナ含ム面 EHF ハ BC へノ垂線ナリ。從テ此面ハ面 ABC, BCD ノ双方ニ垂直ナリ。故ニ面 ABC, BCD へノ夫々垂線 EM, FN ハ其二面ニ夫々垂直ナル面 EHF ニ含マル。而シテ EM, FN ハ EHF ノ二邊ニ夫々垂線ナルユエ相交ル。

然ルニ其交點 O ハ面 ABC ノ三點 A, B, C ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ト面 BCD ノ三點 B, C, D ヨリ等距離ナル點ノ軌跡トノ交點ナルユエ四點 A, B, C, D ヨリ等距離ナリ。故ニ此四點ハ O ナ中心トシ OA ナ半徑トスル球面上ニ在リ。次ニ四點 A, B, C, D ナ過ル球ノ中心ハ A, B, C 及ビ B, C, D ヨリ夫々等距離ナル點ノ軌跡ナル二直線 EM, FN ノ各々ノ上ニ在リ。然ルニ二直線ノ交點ハ只一ツナルユエ此球心ハ O ノ他ニ無シ。

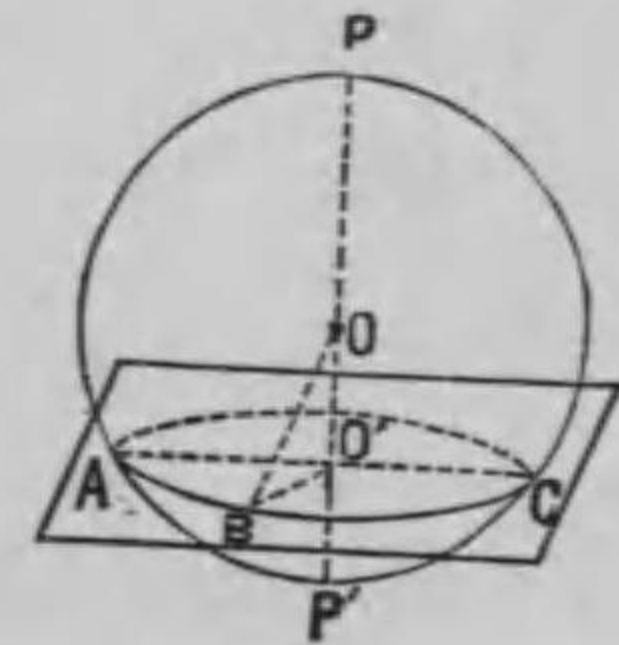


系 一点ヨリ球面へ引ケル等直線ガ四ツ以上アレバ、其一点ハ球心ナリ。

定理 (4) 球ノ平面ニテノ截リ口ハ圓ナリ。

(海兵)

[證明] 球 O ノ截リ口ヲ ABC トス。然ルトキ球心 O ヨリ面 ABC へ垂線 OO' ナ引キ、截リ口上ノ任意ノ三點ヲ A, B, C トセバ、球ノ半徑ヲ斜邊トシ OO' ナ一邊トセル $\triangle OAO' \cong \triangle OBO' \cong \triangle OCO'$ 、 $\therefore O'A = O'B = O'C$ ナルヲ以テ截リ口 ABC ハ圓ナリ。



系 (1) 球心ヨリ小圓ノ面ニ引ケル垂線ノ足ハ小圓ノ中心ナリ。

又此逆ハ眞ナリ。

系 (2) 球心ト小圓トノ距離ノ大、等、小ニ從テ小圓ハ小、等、大ナリ。

又此逆ハ眞ナリ。

系 (3) (a) 大圓ハ球面ノ對稱面ナリ。

(b) 凡テノ大圓ハ相等シ。

(c) 相交ルニツノ大圓ハ各他ヲ二等分ス。

(d) (i) 一ツノ大圓ハ球及ビ球面ヲ二等分ス。

(ii) 直交セルニツノ大圓ハ球及ビ球面ヲ四等分ス。

(e) 球面上對點ナラザル二點ヲ過ル大圓ハ只一ツニ限ル。

(f) 一直線ガ球面ニ交ル點ハ二ツヨリモ多カラズ。(仙工)

〔證明〕 (a) 略證 大圓ニ垂直ニシテ双方球面ニ終ル諸直線ガ皆大圓ニテ二等分セラ
ルルコトヲ證セ。

(b) 何トナレバ各大圓ノ直徑ハ皆ナ球ノ直徑ニシテ相等シキガ故ナリ。

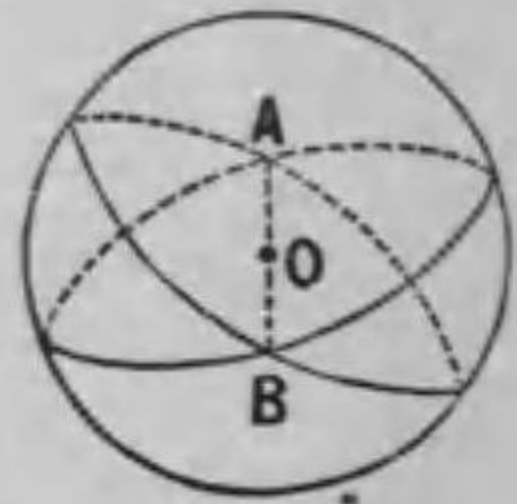
(c) ニツノ大圓ナル平面ノ交線 AB ハ直線ニシテ
A, B ハ球面上ニ在リ。又此二面ハ球心 O ヲ過ル。故ニ
AB ハ O ヲ過ルヲ以テ AOB ハ各圓ノ直徑ナリ。

故ニ 題言ノ如シ。

(d) (i) 大圓ニ截ラレシ兩部ヲ全ク相重メ且ツ其
曲面ヲ其底ノ同傍ニ在ル様ニ置ケバ、其兩曲面ハ全ク相合ス、故ニ兩部分ハ全ク相合
ス。故ニ題言ノ如シ。(ii) ハ之ニ倣ヘ

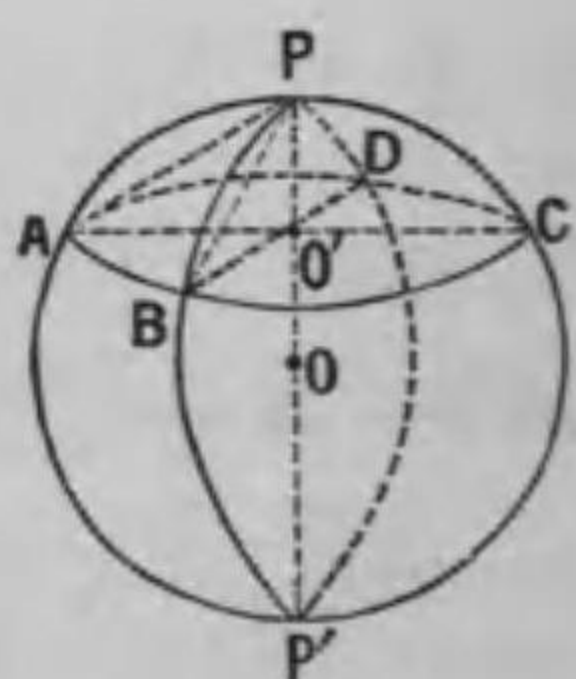
(e) 其二點ト球心トハ一直線上ニ在ラザルユエ一平面即チ一ツノ大圓ヲ決定ス。

(f) 何トナレバ、此直線ハ之ト球心トノ決定スル平面ニテノ截リ口即チ大圓ノ
周トニツヨリ多クノ點ニ於テ出會フコト無キガ故ナリ。



定理 (5) 球ノ截圓ノ極ヨリ其圓周上ノ點
ニ至ル距離ハ相等シ。

〔證明〕 其圓ノ中心ヲ O' トシ、其極ヲ P, P' トスレバ
POP' ハ其圓ノ面ニ垂直ナリ。依テ其圓ノ周上ニ任
意ノ點 A, B, ……ヲ取レバ O'A=O'B=……、其夾角
 $\widehat{PO'A}=\widehat{PO'B}=\dots=\widehat{R}$ ナルユエ PA=PB=……
同様ニ P'A=P'B=……ヲ證明シ得。



系 (1) 又此等ノ大圓ノ弧ハ相等シ。

〔證明〕 何トナレバ相等シキ大圓ノ等弦ノ對弧ナルガ故ナリ。

系 (2) 同ジ極ヲ有スル圓ノ平面ハ平行ナリ。

〔證明〕 何トナレバ此等ノ平面ハ何レモ兩極ノ連結線即チ一ツノ直徑ニ垂直ナルガ故
ナリ。

系 (3) 球ノ截圓ノ極ヲ過ル大圓ハ其圓ヲ垂直ニ二等分ス。

〔證明〕 前頁ノ下圖ヲ用フ。截圓 AC ノ中心ヲ O' トシ又其極ヲ P, P' トス。然ルトキ
ハ POP' ⊥ 面 AC ナルユエ PP' ハ含ム大圓ノ面 PBP' ⊥ 面 ABC。

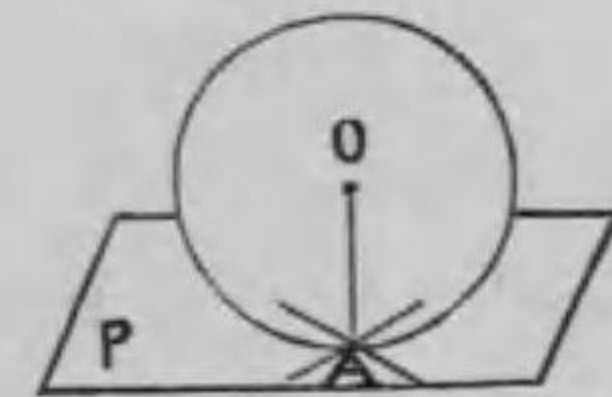
次ニ此圓面ト大圓面トノ交線ヲ BD トセバ、BD ハ PP' ニ交ハルユエ其交點ハ O' ナ
リ。故ニ BO'D ハ此圓ノ直徑ナルユエ、此圓ハ PP' ハ含ム大圓ニ二等分セラル。

定理 (6) 球ノ半徑ノ一端ニ於テ、其半徑ヘノ垂線ハ球ノ切線ナリ。
又此逆ハ眞ナリ。

球ノ半徑ノ一端ニ於テ、其半徑ヘノ垂直面ハ球ノ切平面ナリ。

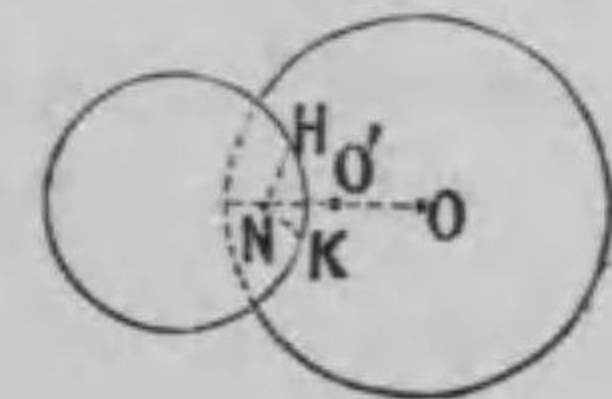
又此逆ハ眞ナリ。

〔證明〕 球 O ノ球面上ノ點ヲ A トシ、OA ニ垂直
ナル平面ヲ P トセヨ。然レバ OA ⊥ P 面ナルユエ、
O ヨリ P 面上 A ノ他ノ點ヘ引ケル直線ハ皆ナ半徑。
OA ヨリ大ナリ。故ニ P 面上 A ノ他ノ點ハ球面外ニ
在リ、即チ P 面ハ球面ト只一點ノミニ出會フユエ
切平面ナリ。



定理 (7) 二球ノ交リハ圓周ナリ；而シテ其圓面ハ中心線ニ垂直ニ
シテ、其圓心ハ中心線上ニ在リ。(東商)

〔證明〕 二球 O, O' ノ交リ上ニ任意ノ二點 H, K ヲ
取レバ △OHO' ≡ △OKO'。從テ HN ⊥ OO' トセ
バ △O'HN ≡ △OKN ナルユエ HN=KN 且ツ
KN ⊥ OO' (即チ OO')。故ニ交リハ中心 N ナル圓ニ
シテ OO' ニ垂直ナル面 HNK ナリ。



定理 (8) 二球ノ半径ヲ夫々 r, r' ($r > r'$) トシ、中心距ヲ d トセバ

(i) 二球ガ外ニ離ルルトキハ $d > r + r'$ ナリ。

(ii) 二球ガ外切スルトキハ $d = r + r'$ ナリ。

(iii) 二球ガ相交ルトキハ $r + r' > d > r - r'$ ナリ。

(iv) 二球ガ内切スルトキハ $d = r - r'$ ナリ。

(v) 二球ガ内ニ離ルルトキハ $d < r - r'$ ナリ。

又此各々ノ逆ハ真ナリ。

定理 (9) 球ノ面積ハ其直径ト大圓ノ周トノ乗積ニ等シ。 (陸士)

或ハ 大圓ノ面積ノ四倍ニ等シ。

[證明] 半圓ノ直径ヲ EF トシ中心ヲ O トス。半圓周上ノ二點 A, B ヨリ EF ニ垂線

Aa, Bb ナ引キ、 ab ナ軸シテ平面 $ABba$ ナ一圓ヲ旋轉スレバ AB

ヲ斜高トスル平截頭直圓錐ヲ生ジ、其曲面積 $= AB \cdot \pi(Aa + Bb)$ 。

次ニ AB ノ中點 M ヨリ ab ニ垂線 Mm ナ引キ、 Bb ニ垂線 AC

ナ引ケバ等角ナル直 $\triangle ABC \sim$ 直 $\triangle MOm$ ナルユエ

$AB : AC = MO : Mm$ 即 $AB : ab = MO : \frac{1}{2}(Aa + Bb)$

故ニ $AB(Aa + Bb) = 2MO \cdot ab$ 。

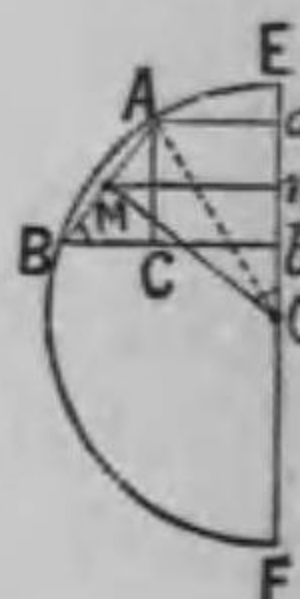
\therefore 平截頭直圓錐 AB ノ曲面積 $= 2MO \cdot \pi \cdot ab$ 。

サテ、半圓周 EAF ナ n 等分シ其分點ヲ順次ニ結ビ直径 EF ナ軸トシテ其半圓ヲ旋轉スレバ、此等ノ弦ノ旋轉體ノ和ハ半圓ニ内接スル正多角形ノ半ノ旋轉體ナリ。今 n ナ漸々大ナラシムルニ從ヒ内接正多角形ノ半ノ周ハ漸々半圓周ニ近ヅキ、其極限ニ於テ殆ソド半圓周トナル。從テ實際ニ旋轉體ノ表面ハ殆ソド球面トナリ、又 OM ノ如キ垂線ハ半径トナリ、又弦 AB 、等ノ正射影 ab 、等ノ和ハ直径 EF トナル。

\therefore 半径ヲ r トセバ 球ノ面積 $= 2r\pi \times 2r$ 即チ 大圓ノ周ト直径トノ乗積

$= 4\pi r^2$ 即チ 大圓ノ面積ノ四倍。

系 (1) 球帶 AB ノ曲面積 $= 2r\pi \times ab$ 即チ 大圓ノ周ト高サトノ乗積。



系 (2) 分球 AE ノ曲面積 $= 2r\pi \times Ea$ 即チ 大圓ノ周ト高サトノ乗積。

或ハ $= EF \times \pi \times Ea = \pi \times (\overline{AE})^2$ 。

扇球 OAE ノ曲面積 $=$ (分球 AE ノ曲面積) $+$ (直圓錐 OAA ノ曲面積)

$= 2r\pi \cdot Ea + \pi \cdot Aa \cdot r$ ($OA = r$)

$= \pi r(2 \cdot Ea + Aa)$ 。

定理 (10) 球ノ體積ハ其球面積ト半径トノ乗積ノ三分ノ一ナリ。

(陸士)

[證明] 先ヅ球 O ノ大圓 ABC ノ極ヲ PP' トス、此大圓ニ平行ナル數多ノ小圓ヲ畫キ、又 PP' ナ過ル數多ノ大圓ヲ畫ケバ球面ハ圓弧ヲ邊トセル四角形及ビ三角形ニ分タル。從テ球ハ此等ノ曲面ヲ底面トシ O ナ共通頂點トスル數多ノ錐體ノ和ナリ。

今大圓 ABC ニ平行ナル小圓及ビ PP' ナ過ル

大圓ノ數ヲ無限ニ多クシタルトキノ極限ニ於テ

ハ錐體ノ底ナル曲面ハ殆ソド平面トナリ、又高

サハ球ノ半径トナル。

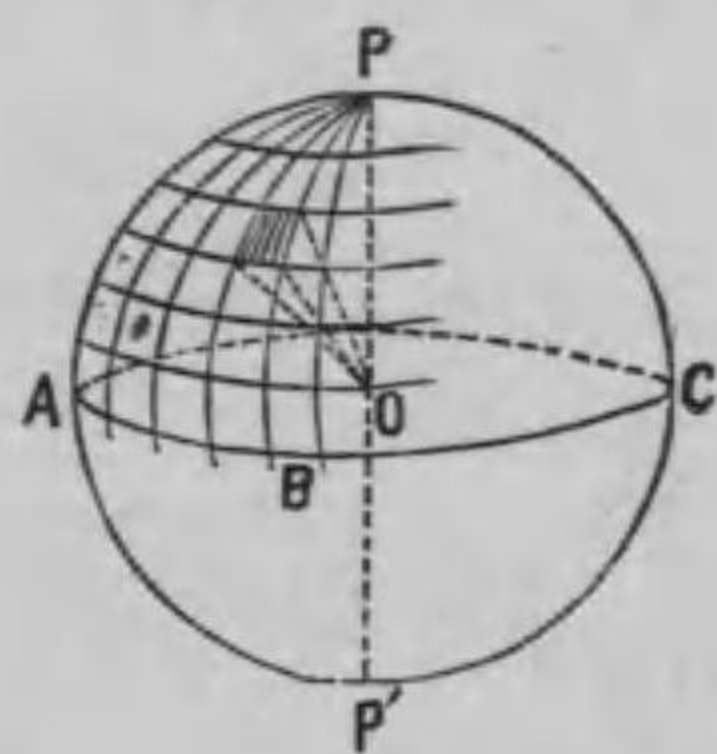
故ニ此等ノ底面ヲ $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$ トシ、

又球ノ半径ヲ r トシ、 $2r = d$ トスレバ

球ノ體積 $= \frac{1}{3}(S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n) \cdot r$

$= \frac{1}{3} 4\pi r^2 \cdot r$ 即チ題言ノ如シ

$= \frac{4}{3} \pi r^3$ 或ハ $= \frac{1}{6} \pi d^3$ (d ハ直径 $2r$)。



系 (1) 前頁ノ圖ニ於ケル、球帶 AB ノ體積 $= \frac{1}{3} \cdot 2r\pi \cdot ab \cdot ab = \frac{2}{3} \pi r \cdot \overline{ab}^2$ 。

注意 或ハ之ヲ $\frac{1}{2} \pi(Aa^2 + Bb^2)ab + \frac{1}{6} \pi ab^3$ トスルコトヲ得レドモ其證ハ複雑ナリ。

系 (2) 前頁ノ圖ニ於ケル、分球 AE ノ體積 $= \frac{1}{3} \cdot 2r\pi \cdot Ea \cdot Ea$ 。

$= \frac{2}{3} \pi r \cdot \overline{Ea}^2$ 。

注意 或ハ之ヲ $\frac{1}{2} \pi Aa^2 \cdot Ea + \frac{1}{6} \pi Ea^3$ トスルコトヲ得レドモ其證ハ複雑ナリ。

系 (3) 前々頁ノ圖ニ於ケル、扇球AEノ體積 = $\frac{1}{3} \cdot 2r\pi \cdot Ea \cdot r$
 $= \frac{2}{3} \pi r^2 \cdot Ea.$

注意 或ハ此體積 = (分球 AE ノ體積) + (直圓錐 OAa ノ體積)
 $= \frac{2}{3} \pi r \cdot \overline{Ea}^2 + \frac{1}{3} \cdot \pi \overline{Aa}^2 \cdot aO = \frac{1}{3} \pi (2r \cdot \overline{Ea}^2 + \overline{Aa}^2 \cdot aO).$

餘話 西洋ニテ球ノ體積ノ公式ヲ初メニ證定シタルハあるきめてす氏 (西曆第一世紀ノ希臘人) ニシテ、又我邦ニテハ關孝和氏 (平面幾何 162 頁ヲ見ヨ) が $\frac{1}{6} \pi$ ヲ積率トシテ算定シタリ。

- 定理 (11) (1) 二球ノ面積ハ其半徑ノ二乗或ハ直徑ノ二乗ニ比例ス。
 (2) 又其ノ體積ハ其半徑ノ三乗或ハ直徑ノ三乗ニ比例ス。
 系. 同球或ハ等球ニ於ケル、球帶或ハ分球ノ曲面積ハ高サニ比例ス。
 又其ノ體積ハ高サノ二乗ニ比例ス。

問 題 及 ビ 解 答

1. 球 O ノ球面上ノ一點 P ヲ過ル凡テノ大圓ノ周ハ亦タ P 點ノ對點 P' ヲ過ル。

[證明] 大圓ハ球心ヲ過ルユエ、P ヲ過ル凡テノ大圓ハ直線 POP' ヲ含ム。而シテ PO=OP' ナルユエ P' ハ O ヲ中心トシ OP ヲ半徑トスル圓ノ周上ニ在リ、即チ P ヲ過ル大圓ノ周ハ亦タ P' ヲ過ル。

2. 相切スル二ツノ球ハ其切點ニ於テ同一ノ切平面ヲ有ス。

[證明] 二ツノ球 O, O' ノ外切點或ハ内切點ヲ E トセヨ。然レバ E ハ中心線 OO' 或ハ其引長上ニ在ルユエ E ヲ過リ OO' ニ垂直ナル平面 P ハ亦タ OO' ニ垂直ナリ。而シテ球面上ノ一點ニ於テ其點ヲ過ル半徑ニ垂直ナル平面ハ其球ノ切平面ナリ。故ニ P ハ二ツノ球ニ共通ナル切平面ナリ。

3. 定球 O ニ定點 A ヨリ割線 ABC ヲ引ケバ AB, AC ハ一定ナリ。

[證明] 直線 ABC ト球心 O トヲ過ル平面ハ球ト大圓ニ於テ交リ、此圓ノ半徑ハ球ノ半徑ナリ。故ニ球ノ半徑ヲ r トセバ AB, AC = r^2 ~ OA^2 ナルコトハ平面幾何學定理ニ依テ明カナリ。然ルニ r, OA ハ一定ナルユエ r^2 ~ OA^2 ハ一定ナリ、從テ AB, AC ハ一定ナリ。

4. (a) 定直線ニ直角ニ對スル點ノ軌跡ハ、其直線ヲ直徑トスル球面ナリ。 (名工)

(b) 定平面上ニ在リテ其外ノ定直線ニ直角ニ對スル點ノ軌跡ヲ求メヨ。

[解] (a) 此球面上ノ任意ノ點 C ト直徑 AB トヲ含ム平面ニテノ球ノ截リ口ハ大圓ニシテ ACB ハ其半圓ナルユエ $\widehat{ACB} = \widehat{R}$ ナリ。次ニ此球面ノ内或ハ外ノ點 C ト AB トヲ含ム平面ニテノ球ノ截リ口ノ半圓上ニ於テ \widehat{ACB} ハ半圓ノ角即チ直角ヨリモ大或ハ小ナリ。∴ 直線 AB ニ直角ニ對スル點ノ軌跡ハ AB ヲ直徑トスル球面ナリ。

(b) 略解 所要ノ軌跡ハ定直線ヲ直徑トスル球面ト定平面トノ交リナル圓ノ周ナリ。

吟味 本題ハ定直線 AB ノ中點 O ヨリ定平面ヘノ垂線 h < AO ナルトキ成立ス。

5. (a) 定直線ヲ含ム平面ニテ定球ヲ截リテ生ズル圓ノ中心ノ軌跡ヲ求メヨ。

(b) 定點ヲ過ル平面ニテ定球ヲ截リテ生ズル圓ノ中心ノ軌跡ヲ求メヨ。

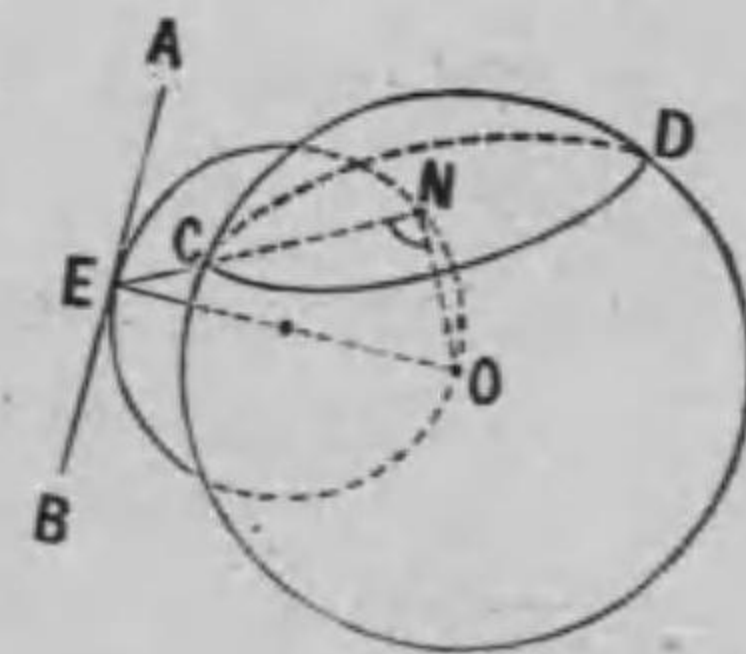
[解] (a) 定直線ヲ AB トシ、定球ノ中心ヲ O トシ、AB ヲ含ム平面ニテノ截リ口圓ノ中心ヲ N トセバ、ON ⊥ 面 CD。又 OE ⊥ AB トシ、OE ヲ含ム AB ニ垂直ナル平面ヲ P トセバ P 面ト CD 面トノ交線 NE ⊥ ON。

∴ N ハ OE ヲ直徑トシタル球面ノ球 O ノ内ニ在ル部分ノ上ニ在リ。

逆ニ 此上ニ任意ノ點 N ヲ取レバ ON ⊥ EN、P 面 ⊥ 面 CD ナルユエ ON ⊥ 面 CD。

∴ N 點ハ AB ヲ含ム截リ口ノ圓心ナリ。

∴ 所要ノ軌跡ハ球心ヨリ定直線ニ至ル垂線ヲ直徑トスル球面ノ元球内ニ在ル部分ナリ。



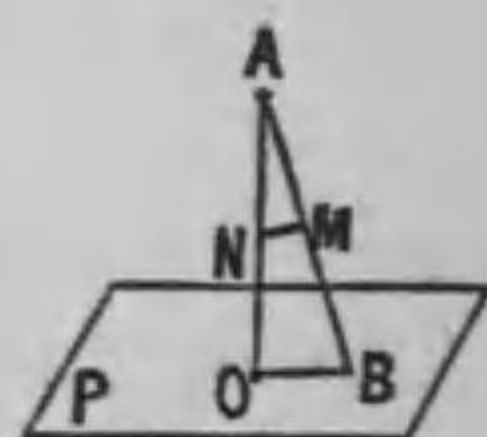
注意 直線 AB が球 O に交ルベし OE が球 O の全ク内ニ在ルユエ、此場合ニハ OE が直徑トスル球面ノ全面ガ所要ノ軌跡ナリ。

(b) 略解 點 E ト球心 O トヲ結ブ直線ヲ直徑トスル球面或ハ其部分ナリ。

6. 平面 P 外ノ定點 A ヨリ其面ニ引ケル直線 AB 上ニ點 M ヲ取リ AB・AM ガ一定ナルベキ M 點ノ軌跡ヲ求メヨ。

[解] 面 P に垂線 AO ヲ下シ、其上ニ點 N ヲ取リテ

AO・AN = AB・AM ナラシムレバ O, N, M, B ハ一圓ノ周上ニ在リテ $\hat{AMN} = \hat{O} = \hat{R}$ ナルヲ以テ點 M ハ AN ヲ直徑トスル球面上ニ在リ。



逆ニ 此球面上ニ點 M ヲ取リ AM ノ引長ト面 P

ノ交點ヲ B トセバ $\hat{AMN} = \hat{R}$ ナルユエ AM ノ引長ト面 P トノ交點ヲ B トセバ AB・AM = AO・AN 即チ一定ナリ。

∴ 所要ノ軌跡ハ AN ヲ直徑トスル球面ナリ。

7. 二點 A, B ヨリ夫々 a, b ナル距離ニ在ル點ノ軌跡如何。

[解] 點 A ヨリ a ナル距離ニ在ル點ノ軌跡ハ A ヲ中心トシ a ヲ半徑トスル球面ニシテ、點 B ヨリ b ナル距離ニ在ル點ノ軌跡ハ B ヲ中心トシ b ヲ半徑トスル球面ナリ。故ニ 二點 A, B ヨリ夫々 a, b ナル距離ニ在ル點ハ此二ツノ球面ノ交リナル圓周上ニ在リ。

逆ニ此圓周上ノ點ハ A, B ヨリ夫々 a, b ナル距離ニ在ルコト明カナリ。

∴ 所要ノ軌跡ハ夫々 A, B ヲ中心トシ a, b ヲ半徑トスル二ツノ球面ノ交リナル一圓周ナリ。

吟味 本題ガ成立スル爲メニ必要ニシテ且ツ充分ナル條件ハ $a+b > AB > a-b$ ナルコトナリ。尙ホ 126 頁 (8) ヲ見ルベシ。

8. 二定點 A, B ヨリノ距離ノ比ガ定比 $m:n$ ニ等シキ點 P ノ軌跡ハ、直線 AB ヲ $m:n$ ニ内分 及ビ外分スル點 P, Q ノ連結線 PQ ヲ直徑トスル一球面ナリ。

[略解] 平面幾何學 16 頁 (3) ヲ參考スベシ。

9. 二定點 A, B ヨリ一點 C ニ至ル距離ノ平方ノ和ガ一定ナルトキ C 點ノ軌跡ヲ求メヨ。

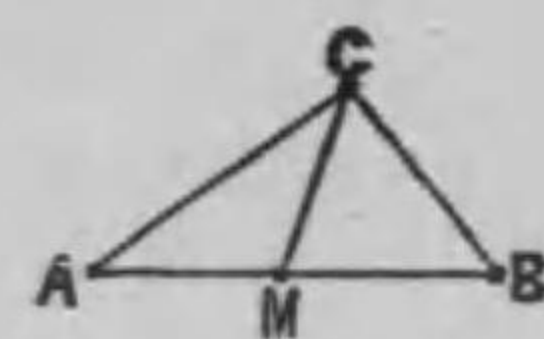
[解] AB ノ中點ヲ M トセバ平面幾何學定理ニ依テ

$\overline{CA}^2 + \overline{CB}^2 = 2\overline{CM}^2 + 2\overline{AM}^2$ ナリ。然ルニ假設ニ依テ

$\overline{CA}^2 + \overline{CB}^2$ ハ一定ニシテ \overline{AM}^2 モ一定ナルヲ以テ、

CM モ亦一定ナリ。 ∴ C 點ノ軌跡ハ M ヲ中

心トシ一定セル距離 MC ヲ半徑トスル球面ナリ。



10. (a) 定點 P ヨリ定球 O ニ切線 PA ヲ引ケバ、切點 A 及ビ切線 PA ノ軌跡ハ圓周 及ビ直圓錐ノ曲面ナリ。

(b) 三面角ニ内切スル球ノ中心ノ軌跡ハ、各二面角ノ二等分面ノ交線ナリ。

11. 地球ノ半徑ヲ r トシ、地上ヨリノ高サヲ h トスレバ

(a) 其所ニ於ケル視界半徑ハ $\sqrt{h(2r+h)}$ ナリ。

(b) 又其所ニ於ケル視界面ハ $\frac{2\pi r^2 h}{r+h}$ ナリ。

定義 地球ヲ球 O ト見做ストキ一點 P ヨリノ切線 PA ヲ視界半徑ト云ヒ、又切點 A ノ軌跡ナル圓 AB ヲ視界ト云ヒ、視界ノ P 點ノ側ノ分球ノ曲面ヲ視界面ト云フ。

[解] 平面 APO ノ大圓ト PO トノ交點ヲ C, D トセバ

$$(a) \overline{PA}^2 = \overline{OP}^2 - \overline{OA}^2 \quad [OA \perp PA]$$

$$= (r+h)^2 - r^2 = h(2r+h).$$

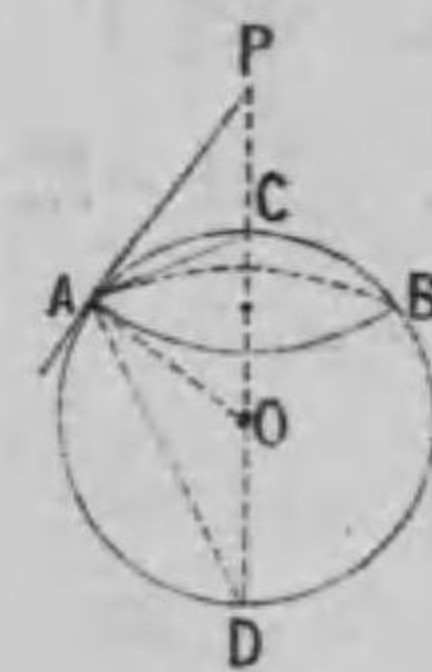
$$(b) \triangle PAC \sim \triangle PDA \quad \text{ナルユエ} \quad \frac{AC}{PA} = \frac{AD}{DP},$$

$$\text{從テ} \quad \frac{\overline{AC}^2}{\overline{PA}^2} = \frac{\overline{AD}^2}{\overline{DP}^2} = \frac{\overline{CD} - \overline{AC}}{\overline{DP}} = \frac{-\overline{CD}}{\overline{PA}^2 + \overline{DP}^2}$$

$$\therefore \overline{AC}^2 = \frac{\overline{PA}^2 \cdot \overline{CD}}{\overline{PA}^2 + \overline{DP}^2} = \frac{PC \cdot PD \cdot \overline{CD}}{PC \cdot PD + \overline{DP}^2}$$

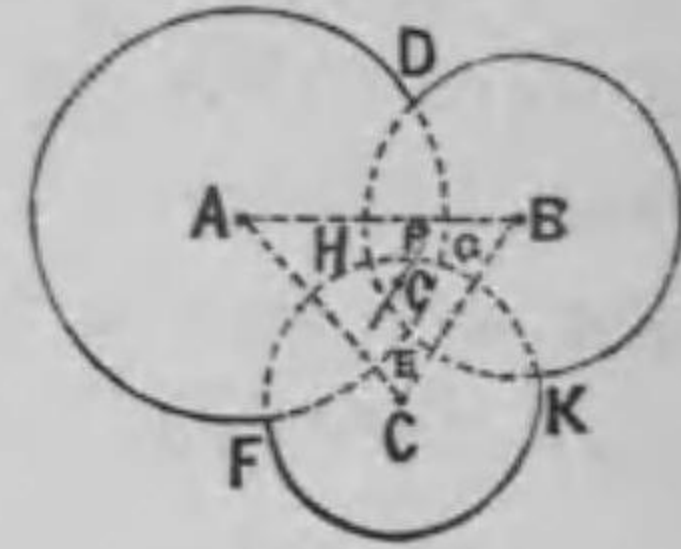
$$= \frac{PC \cdot \overline{CD}}{PC + DP} = \frac{h(2r)^2}{h+2r+h} = \frac{2r^2 h}{r+h},$$

$$\therefore \text{分球 CAB ノ曲面積即チ視界面} = \pi \cdot \overline{AC}^2 = \frac{2\pi r^2 h}{r+h}.$$



12. 互ニ相交ル三球ノ二ツ宛ノ交リナル三圓ノ平面ハ、三球心ヲ含ム一平面ニ垂直ナル一直線ニ於テ相交ル。

[證明] 三ツノ球ノ中心ヲ夫々 A, B, C トシ、二ツ宛ノ交リナル圓ヲ夫々 DE, FG, HK トス。然ルトキハ中心線 AB ⊥ 圓面 DE ナルユエ、AB ヲ含ム面 ABC ⊥ 圓面 DE。



同様ニ 面 ABC ハ 圓面 FG, HK ノ各々ニ垂直ナリ。故ニ 面 ABC ニ垂直ナル二圓面 DE, FG ノ交線 (OP トス) ハ 其面ニ垂直ナリ。而シテ圓面 HK モ亦面 ABC ニ垂直ニシテ且ツ二圓面 DE, FG ノ各々ト交ルユエ其交線 OP ヲ過ル。故ニ題言ノ如シ。

13. (a) 一定點 P ヨリ二定球 A, B へ引ケル二切線 PE, PF ガ相等シカルベキ P 點ノ軌跡ハ、AB ヲ其二分ノ差ガ兩半徑ノ平方ノ差ニ等シキ様ニ内分スル點 C ヲ過リ AB ニ垂直ナル一平面ナリ。

定義 此一平面ヲ二球ノ根軸ト云ヒ、又其二球ヲ同軸球ト云フ。

(b) 三球ノ各二球ノ根軸ハ一直線ニ於テ相交ル。

[解] ハ平面幾何學 215 頁ノ 8 題ニ準ズ。

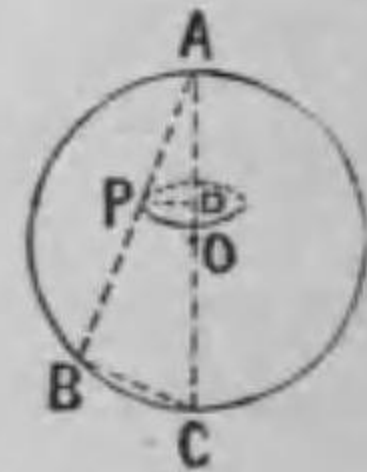
注意 前題ハ本題ノ三球ガ相交ル一場合ニシテ、其 OP ハ (b) ノ一直線ナリ。

14. 定球 O ノ球面上ノ定點 A ヲ過ル直線ト球面トノ交點ヲ B トシ、AB 上ニ點 P ヲ取り AP·AB ヲ一定ナラシムベキ P 點ノ軌跡ヲ求メヨ。

(東工)

[解] 直徑 AC 上ニ D 點ヲ取り AP·AB = AD·AC ナラシムレバ、PBCD ハ一圓周上ニ在リ、從テ $\hat{ADP} = \hat{B} = \hat{R}$ ナルユエ P 點ハ直徑 AC ニ垂直ナル圓ノ周上ニ在リ。

逆ニ 此圓ノ周上ニ點 P ヲ取り AP ノ引長ト球面トノ交點ヲ B トセバ、 $\hat{B} = \hat{R} = \hat{ADP}$ ナルユエ PBCD ハ一圓周上ニ在リ、故ニ AP·AB = AD·AC 即チ一定ナリ



15. 球面上ノ二定點ヨリ等距離ナル點ノ軌跡ヲ求メヨ。

[略解] 二定點 A, B ヲ夫々中心トシ弧 AB ノ半ヨリモ大ナル半徑ヲ以テ、二小圓ヲ畫キ、其交點ヲ C, D トセバ C, D ヲ過ル大圓ノ周ハ所要ノ軌跡ナリ。

16. 一稜 a ナル正四面體ニ内接及ビ外接スル球ノ半徑ヲ夫々 r 及ビ R トセバ $r = \frac{\sqrt{6}}{4}a$ 及ビ $R = \frac{\sqrt{6}}{12}a$ ナリ。

[證明] 正四面體ノ各角頂ヨリ其對面ヘノ垂線ハ一點ニ於テ相交リ且ツ互ニ 4:1 ニ分タル; 故ニ其垂線ヲ h トセバ $3h^2 = 2a^2$ 且ツ垂線ノ交點ハ内切及ビ外接スル球ノ中心ニ當リ是ヨリ各面ヘノ距離ハ内切球ノ半徑ニシテ頂點マテノ距離ハ外接球ノ半徑ナリ。

$$\therefore r = \frac{3}{4}h = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}a = \frac{\sqrt{6}}{4}a \quad \text{及ビ} \quad R = \frac{1}{4}h = \frac{1}{4} \times \sqrt{\frac{2}{3}}a = \frac{\sqrt{6}}{12}a$$

17. (a) 球ノ體積ト其外切立方體ノ體積トノ比ハ $\pi:6$ ナリ。

(b) 球ノ體積ト其内接立方體ノ體積トノ比ハ $\sqrt{3}\pi:2$ ナリ。

[略證] (a) 外切立方體ノ一稜 a ハ其球ノ直徑 2r ニ等シ。

(b) 内接立方體ノ一對角線ハ $\sqrt{3}a$ [a ハ立方體ノ一稜トス] ニシテ球ノ直徑 2r ニ等シ。

18. 同ジ球ニ外切セル多面體ノ體積ハ其外面積ニ比例ス。

[證明] 球ニ外切セル多面體ハ其各面ヲ底面トシ球心ヲ共通頂點トスル數多ノ角錐ニ分子得ベク、而シテ此等ノ高サハ何レモ球ノ半徑ナルユエ相等シ。

故ニ 其一ツノ多面體ノ體積 = (外面積) $\times \frac{1}{3}r$ ナリ。 故ニ題言ノ如シ。

19. (a) 球ノ面積ハ其外切直圓錐ノ全面積ノ三分ノ二ナリ。

(b) 半球ト直圓錐トガ同底及ビ同軸ヲ有スルトキハ、半球ハ直圓錐ニ二等分セラレ。

[證明] (a) 外切直圓錐ノ高サ及ビ底半徑ハ球ノ直徑及ビ半徑ニ等シキコト明カナリ、故ニ球ノ半徑ヲ r トセバ 直圓錐ノ全面積 = $2\pi r \cdot 2r + 2\pi r^2 = 6\pi r^2$ 。

$$\therefore \text{球ノ面積} = 4\pi r^2 = \frac{2}{3} \times 6\pi r^2 = \frac{2}{3} \times (\text{直圓錐ノ全面積}).$$

餘話 此 (a) モあるきめず氏ノ發見ニ係ルト云フ (128 頁ヲ見ヨ)

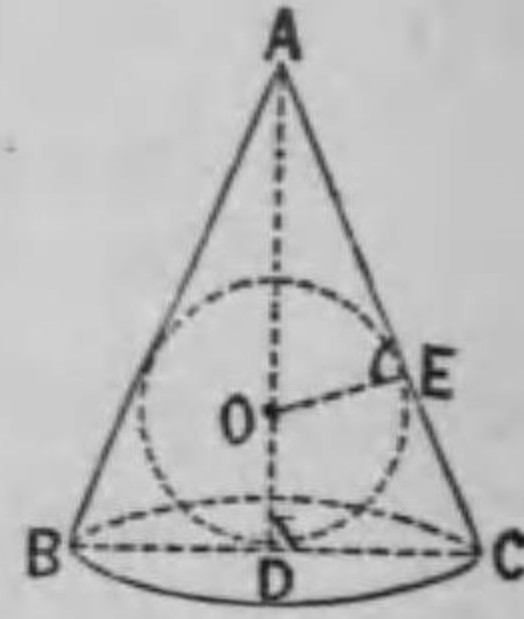
(b) 球ノ半徑ヲトセバ 半球ノ體積 $= \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{2}{3} \pi r^3$ ニシテ、
 之ニ 內接スル直圓錐ノ體積 $= \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot r = \frac{1}{3} \pi r^3$ ナリ。
 故ニ 直圓錐ノ體積ハ半球ノ半ナリ、即チ半球ハ內接直圓錐ニ二分セラレ。

20. 球ノ直徑ニ等シキ高サ及ビ其底面ニ等シキ底面ヲ有スル直圓錐及ビ直圓壩アリ、其直圓錐ト球ト直圓壩トノ體積ノ比ハ 1:2:3 ナリ。

[略證] 直圓錐:球:(直圓壩) $= \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot 2r : \frac{4}{3} \pi r^3 : \pi r^2 \cdot 2r = 1:2:3$.

21. 球ニ外切スル直圓錐ノ高サガ球ノ直徑ノ二倍ナルトキハ、直圓錐ノ全面積ト體積トハ夫々球ノ面積ト體積トノ二倍ナリ。(陸士)

[證明] 球 O ノ外切直圓錐ヲ ABC トシ、頂點 A ヨリ底面ニ垂線 AD ヲ下セバ AD ハ球心 O ヲ過リ D ノ切點ナルコト明カナリ。又直圓錐ノ母線 AC ガ球面ニ切スル點ヲ E トセバ等角ナル直△ADC ∽ 直△AEO ナルユエ AC:CD=AO:OE=3:OE:OE (假設)=3:1 ナリ。



故ニ AC=3.CD. 而シテ $\overline{AC}^2 - \overline{CD}^2 = \overline{AD}^2$ 即チ $8.\overline{CD}^2 = 16.\overline{OD}^2$ 即チ $\overline{CD}^2 = 2.\overline{OD}^2$ ナリ。

故ニ 直圓錐ノ全面積 $= \pi.CD.AC + \pi.\overline{CD}^2 = \pi.CD \times 3.CD + \pi.\overline{CD}^2 = 4\pi.\overline{CD}^2 = 8\pi.\overline{OD}^2$,

又 球ノ面積 $= 4\pi.\overline{OD}^2$ ナリ、 ∴ 此直圓錐ノ全面積ハ球ノ面積ノ二倍ナリ。

次ニ 直圓錐ノ體積 $= \frac{1}{3} \pi.\overline{CD}^2.AD = \frac{1}{3} \pi(2.\overline{OD}^2)(4.O\overline{D}) = \frac{8}{3} \pi.\overline{OD}^3$,

又 球ノ體積 $= \frac{4}{3} \pi.\overline{OD}^3$ ナリ、 ∴ 此直圓錐ノ體積ハ球ノ體積ノ二倍ナリ。

22. (a) (i) 球ニ內接セル等邊直圓壩ト等邊直圓錐トアリ。其ノ直圓壩ノ全面積ハ球ノ面積ト直圓錐ノ全面積トノ比例中項ナリ。

(ii) 又其ノ體積ニ就テモ亦タ然リ。

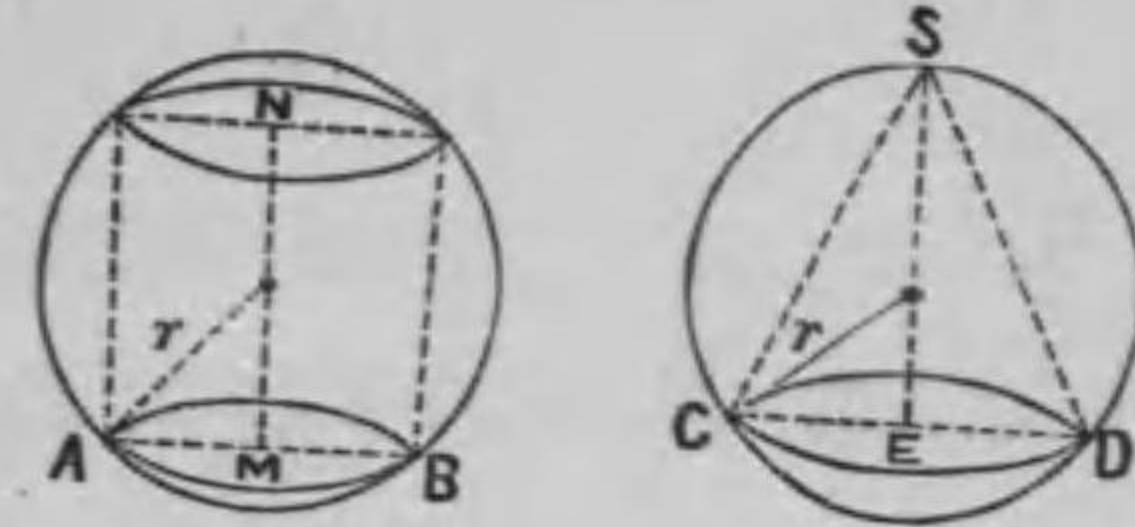
定義 等邊直圓壩トハ底ノ直徑ガ高サニ等シキモノ、又等邊直圓錐トハ底ノ直徑ガ斜高ニ等シキモノヲ云フ。

(b) 上ノ內接ヲ外切トスルモ亦タ同定理アリ。

[證明] (a) 球ノ半徑ヲトス。今球ヲ軸ト底ノ直徑トヲ含ム平面ニテ截ルトキハ、直圓壩ノ底ノ直徑 AB ハ大圓ノ內接

正方形ノ一邊 $\sqrt{2}.r$ ニシテ 直圓錐ノ底ノ直徑 CD ハ大圓ノ內接正三角形ノ一邊ハ $\sqrt{3}.r$ ニシテ且ツ其高サ

$SE = \frac{\sqrt{3}}{2} CD = \frac{3}{2} r$ ナルコトハ平面幾



何學ニ依テ明カナリ。故ニ

(i) 直圓壩、球、直圓錐ノ各面積ヲ夫々 S, S', S'' トスレバ

$$S = 2\pi.AM.MN + \pi.AM^2 \times 2 = \pi.AB^2 + \pi.\frac{1}{2}.AB^2 = \frac{3}{2} \pi.AB^2 = \frac{3}{2} \pi \times 2r^2 = 3\pi r^2.$$

又 $S' = 4\pi r^2$.

$$S'' = \pi.CE.SC + \pi.CE^2 = \frac{1}{2} \pi.CD^2 + \frac{1}{4} \pi.CD^2 = \frac{3}{4} \pi.CD^2 = \frac{9}{4} \pi r^2.$$

$$\therefore S^2 = 9\pi^2 r^4 = (4\pi r^2) \left(\frac{9}{4} \pi r^2 \right) = S'.S'' \text{ 即チ題旨ノ如シ.}$$

(ii) 直圓壩、球、直圓錐ノ各體積ヲ夫々 V, V', V'' トスレバ

$$V = \pi.AM^2.MN = \frac{1}{4} \pi.AB^3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi r^3. \quad V' = \frac{4}{3} \pi r^3 \text{ 及ビ}$$

$$V'' = \frac{1}{3} \pi.CE^2.SE = \frac{1}{12} \pi.CD^3. \quad SE = \frac{1}{12} \pi.3r^3. \quad \frac{3}{2} r = \frac{3}{8} \pi r^3.$$

$$\therefore V^2 = \frac{1}{2} \pi^2 r^6 = \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right) \left(\frac{3}{8} \pi r^3 \right) = V'.V'' \text{ 即チ題旨ノ如シ.}$$

(b) 球ノ半徑ヲトセバ、其外切等邊直圓壩ノ一邊ハ $2r$ ニシテ、

又 其外切等邊直圓錐ノ一邊ハ其內切等邊直圓錐ノ一邊ノ 2 倍ナリ。以下ハ (a) = 倣フ。

第 四 章

作 圖 題

8. 第三編即チ旋轉體ノ作圖題モ亦タ特ニ基本トスベキモノ無シ。依テ第一編ノ第八章〔47頁乃至51頁〕ヲ參考スベシ。

問 題 及 ビ 解 答

1. (a) 直圓壺ヲ底ニ平行スル平面ニテ截リ、其二部分ノ曲面積或ハ體積ノ比ヲ $m:n$ ナラシメヨ。

(b) 直圓壺ヲ底ニ平行スル平面ニテ截リ、其二部分ノ曲面積ノ比例中項ヲシテ底面ト等積ナラシメヨ。

〔略解〕 (b) 軸 AB ヲ C ニ於テ AC:CB = $(\frac{1}{2}r)^2$ [r ハ底半徑] ナラシメ、C ヲ過リ底面ニ平行スル平面ニテ截レバ可ナリ。若シ $r > AB$ ナルトキハ解無シ。∵ 等底ナルユエ高サニ比例ス。

2. (a) 直圓壺或ハ直圓錐ニ其曲面ノ上或ハ外ノ定點ヲ含ミテ切平面ヲ作レ。

(b) 直圓壺或ハ直圓錐ニ其ノ外ニ在リテ軸ニ平行スル直線ヲ含ミテ切平面ヲ作レ。

〔略解〕 (a) 定點 E ヲ過リ底面ニ平行スル平面ニテ截リ、E ヲ過ル母線 EA ヲ引キ、又 E ヨリ截リ口ナル圓ニ切線 EB ヲ引ケバ 面 BEA ハ所要ノ切平面ナリ。但シ E 點ガ外ニ在ルトキハ、E ヨリ截リ口圓ニ二切線ヲ引キ得ルユエニツノ解アリ。

(b) 定直線 FE 卜底面ノ引長トノ交點 E ヨリ底面ニ切線 EA, EA' ヲ引ケバ、面 FEA, FEA' ハ所要ノモノナリ。

3. 直圓壺ヲ其底周上ノ定點 C ヲ含ミ軸ニ平行ナル平面ニテ截リ其截リ口ヲ定正方形 a^2 ト等積ナラシメヨ。

〔解〕 軸 AB: $a = a:x$ ナルベキ x ヲ求メ、底面ノ弦 CD ヲ x ニ等シク取り、CD ヲ含ミ軸 AB ニ平行スル平面ニテ截レバ可ナリ。何トナレバ截リ口 CDFE ハ矩形ニシテ CE=AB, CD=x ナルユエ 矩形 CDFE = CE.CD = AB.x = a^2 ナルガ故ナリ。

4. 直圓錐ヲ底面ニ平行ナル平面ニテ截リ、

(a) 其截リ口ノ面積: 底面積 = $m:n$ ナラシメヨ。

(b) 上部ノ曲面積: 下部ノ曲面積 = $m:n$ ナラシメヨ。

(c) 上部ノ直圓錐: 元直圓錐 = $m:n$ ナラシメヨ。

〔證明〕 (a), (b) ハ 102 頁ノ 14 題ト同様ナリ。(c) ハ 103 頁ノ 15 題ト同様ナリ。

注意 底面ニ平行ナル截リ口ヲ定面積ニ等シカラシメヨ、ト云フ題ハ (a) ニ含マル。

5. 高サ 12 吋ノ直圓錐ヲ其底面ニ平行スル平面ニテ截リ其體積ヲ二等分セヨ。 (熊工)

〔解析〕 上下兩部ノ體積及ビ高サヲ夫々 V_1, V_2 及ビ h_1, h_2 トス。先ヅ解キ得タリトセバ $V_1 = V_2$ 。而シテ上部ハ元體ニ相似ナルユエ、其體積ハ高サノ三乗ニ比例ス、即チ $V_1:(V_1+V_2) = h_1^3:(h_1+h_2)^3$ 即チ $V_1:2V_1 = h_1^3:12^3$ ナルユエ $h_1^3 = \frac{12^3}{2}$, ∴ $h_1 = \frac{12}{\sqrt[3]{2}} = \frac{12\sqrt[3]{2}}{2} = 6\sqrt[3]{4}$ 。依テ

〔作圖〕 高サヲ頂點ヨリ距離 $6\sqrt[3]{4}$ ニ取り其點ヲ過リ底面ニ平行スル平面ニテ截レ。

〔證明〕 解析ト同理ニ依テ $V_1:(V_1+V_2) = (6\sqrt[3]{4})^3:12^3 = 864:1728$,

∴ $V_1:V_2 = 864:1728 - 864 = 864:864$, ∴ $V_1 = V_2$ 。

6. 直圓錐ヲ其頂點 S 卜底周上ノ定點 A 卜ヲ含ム平面ニテ截リ、其截リ口 SAB ノ高サヲ定長 l ニ等シカラシメヨ。

〔解〕 底面ニ垂線 SO 及ビ l ニ等シキ斜線 SC ノ軌跡ナル OC 圓ヲ畫キ、之ニ切線 AD ヲ引ケバ SAD ニテノ截リ口ハ所要ノモノナリ。證明ハ三垂線定理ニ依ルベシ。

7. 球或ハ分球或ハ扇球ノ中心ヲ求メヨ。

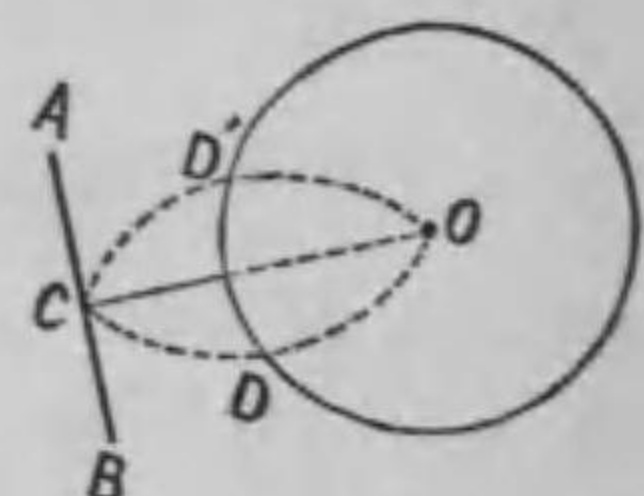
〔證明〕 球面或ハ球面部ヲ平行セザルニ平面ニテ截リ、其截リ口ナル小圓 AB, CD ノ中心 E, F ヲ求メ、次ニ E, F ヨリ夫々其圓面ニ立ツル垂線ハ何レモ球或ハ球面ノ中心ヲ過ルユエ其二垂線ノ交點 O ハ所要ノ中心ナルコト明ナリ。

8. 定球ニ次ノ與條件ニ適スル切平面ヲ作レ,

- (a) 定平面 P ニ平行スル. (b) 其球外ノ定直線 AB ヲ含ム.
- (b) 其球外ノ定直線 AB ト直交スル.

[解] (a) 先ヅ球心 O ヲ求メ, O ヲ過リ P 面ニ垂直ナル直徑 AB ヲ引キ, AB ノ兩端ヲ過リ之ニ垂直ナル二平面 Q, R ヲ作レバ, 此二平面ハ所要ノモノナリ.

(b) 先ヅ球心 O ヲ求メ, AB ニ垂線 OC ヲ引キ, OC ヲ直徑トシ AB ニ垂直ナル圓ヲ作り球面トノ交點ヲ D, D' トセバ二平面 ABD, ABD' ハ所要ノ切平面ナリ. 何トナレバ AB ⊥ 圓面 CDO ナルユエ AB ⊥ OD. 又 CD ⊥ OD ナルユエ OD ハ AB, CD ノ決定スル平面ニ垂線ナルガ故ナリ.

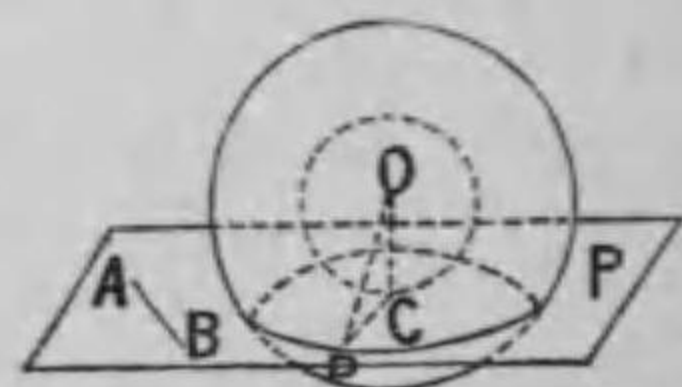


面 ABD' ニ付テモ同様ニ證明シ得ベシ.

(c) 先ヅ球心 O ヲ求メ, O ヲヨリ定直線 AB ニ平行スル直徑 CD ヲ引キ, 其兩端ヲ過リ之ニ垂直ナル二平面ヲ作レバ, 之レ所要ノ切平面ナリ.

9. 定直線 AB ヲ含ム平面ニテ定球 (半徑 r) ヲ截リ, 其截口ノ半徑ヲ定長 l ニ等シカラシメヨ. (名工)

[解] 先ヅ球心 O ヲ求メテ O ヲ球心トシ $\sqrt{r^2 - l^2}$ ヲ半徑トスル同心ノ小球ヲ作り, AB ヲ含ミ此小球ニ切スル平面 P ヲ作レバ之レ所要ノモノナリ.



何トナレバ P 面ニ垂線 OC ヲ引ケバ C

ハ切點ニシテ且ツ截リ口ナル圓心ナリ, 依テ截リ口ノ周上ニ任意ノ點 D ヲ取レバ

$$CD^2 = OD^2 - OC^2 = r^2 - \sqrt{r^2 - l^2}^2 = l^2, \text{ 從テ } CD = l \text{ ナルガ故ナリ.}$$

而シテ AB ヲ含ミ小球ニ切スル平面ハ球心 O ノ C ノ反對ノ側ニアルモ之ト同様ナリ.

10. 球面上ノ二定點ヲ過ル大圓ヲ畫ケ.

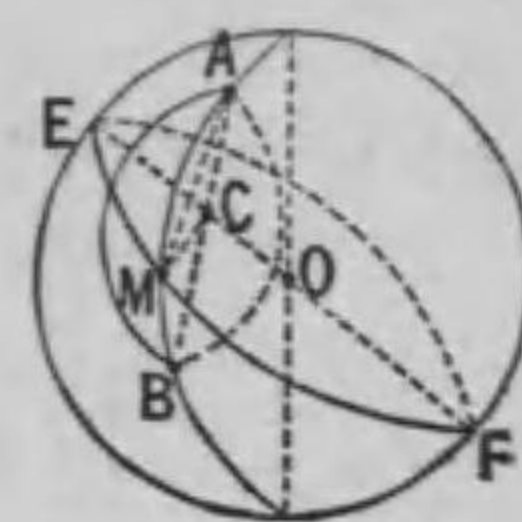
[解] 先ヅ球心 O ヲ求メ, 球面上ノ二定點 A, B ト O トヲ含ム平面ヲ作レバ, 其平面ニテノ球ノ截リ口ハ所要ノ大圓ナルコト明カナリ.

11. 球ノ大圓ノ定弧ヲ二等分セヨ.

[解] 弧 AB ノ A, B ヲ夫々中心トシ其中分ヨリモ大ナル半徑ヲ以テ二圓弧ヲ畫キ其二交點ヲ過ル大圓弧ヲ畫キ定弧 AB トノ交點ヲ M トセバ, M ハ所要ノ點ナリ.

[直定線ヲ二等分スルニ準ズ]

[別解] 大圓ノ定弧 AB ノ弦 AB ヲ直徑トシテ小圓ヲ畫キ, 其中心 C ヲ過ル球ノ直徑 EF ヲ含ミ弦 AB ニ垂直ナル大圓ヲ畫キ其周ト定弧 AB トノ交點ヲ M トセバ之レ所要ノ點ナリ. 何トナレバ AC ⊥ 圓面 EF ナルユエ AC ⊥ CM, 故ニ $\triangle AMC \equiv \triangle BMC$, 從テ同ク大圓ニ於テ弦 AM = MB ナルユエ弧 AM = MB ナレバナリ.



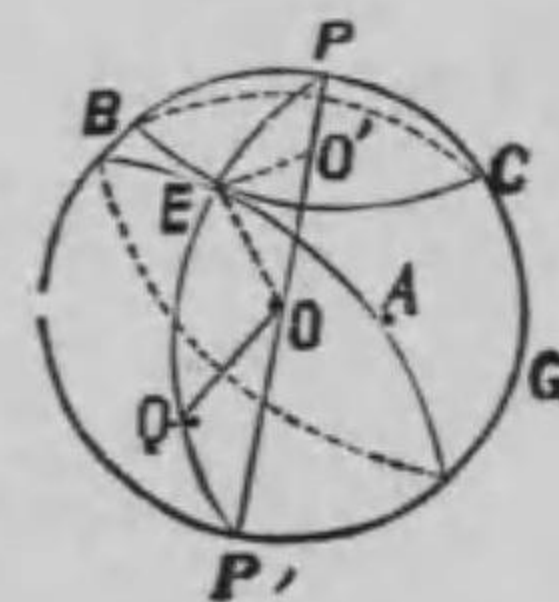
12. 球面上ノ一直線上ニ在ラザル三定點ヲ過リテ小圓ヲ畫ケ.

[解] 此三定點ヲ A, B, C トス. A, B ヲヨリ等距離ナル點ノ軌跡及ビ B, C ヲヨリ等距離ナル點ノ軌跡ヲ求メ [133 頁 15 題], 其交點ヲ P トセバ P ヲ中心トシ PA ヲ半徑トスル圓ハ所要ノモノナリ.

何トナレバ P ハ A, B, C ヲヨリ等距離ナルユエ此圓ハ亦タ B, C ヲ過ルガ故ナリ.

13. 球面上ノ一定點ヲ過リ其ノ面上ノ一定小圓ニ切スル大圓ヲ畫ケ.

[解] 球面上ノ定點ヲ A トシ, 小圓ヲ BC トス. 先ヅ球心 O ヲ求メ, 小圓 BC ニ垂線ナル球ノ直徑 PP' ヲ引キ, 大圓ノ四分圓弧 PCG ヲ取レ. 次ニ A ヲ中心トシ PG ヲ半徑トスル圓弧ヲ畫キ, 又 P' ヲ中心トシ CG ヲ半徑トスル圓弧ヲ畫キ, 其二圓弧ノ交點ヲ Q トシ此點ヲ極トセル大圓 AE ヲ畫ケバ之レ所要ノモノナリ. 何トナレバ



大圓ノ半圓 PQP' ヲ畫キ大圓 AE トノ交點ヲ E トセバ QE = 四分圓弧, P'Q = CG ナルユエ PE = PC. 故ニ E 點ハ小圓 BC ノ周上ニ在リ. 而シテ P, Q ハ夫々圓 BC, AE ノ極ナルユエ面 POQ ハ其二圓面ノ雙方ニ垂直ナリ, 從テ二圓面ノ交線ハ面 POQ ニ垂線ニシテ E ヲ過リ其面上ノ OE, O'E (即チ圓 BC, AE ノ半徑) ニ垂線ナルガ故ニ大圓 AE ハ小圓 BC ニ切ス.

同様ニ Q ノ對點 Q' ヲ極トスル大圓アリ.

〔別解〕 球心 O を頂點とし小圓 BC を底とする直圓錐 $(O-BC)$ に A を過る切平面を作れば、其ノ截り口ナル二ツノ大圓ハ何レモ所要ノモノナルコト明カナリ。

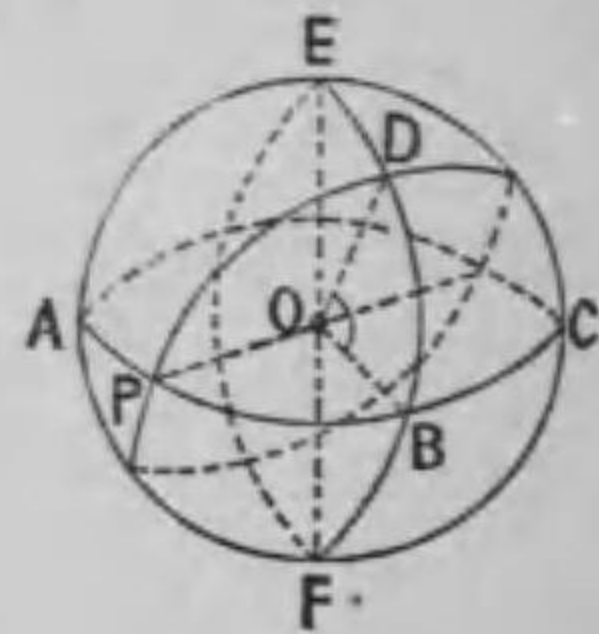
14. 球面上ノ二定小圓ニ切スル大圓ヲ畫ケ。

〔略解〕 二定小圓ヲ BC, MN トス。前題ト同法ニ依リ小圓 BC ニ就キ P' を中心トシ CG を半徑トスル圓弧ヲ畫キ、又小圓 MN ニ就キ其極 Q ノ對點 Q' を中心トシ CG を半徑トスル圓弧ヲ畫キ、其二圓弧ノ二交點ヲ夫々極トスル二大圓ハ所要ノモノナリ、證ハ前題ト同様ナリ。

15. 定大圓ノ周上ノ一定點ヲ過ル大圓ヲ畫キテ元大圓ト與角ヲ爲サシメヨ。

〔51頁作圖題(9)ヲ參考セヨ〕

〔解〕 定大圓ヲ AC トシ、其周上ノ一定點ヲ P トス。然ルトキ球心 O を過リ OP ニ垂直ナル大圓 EF を畫キ大圓 AC トノ交點ヲ B トシ、大圓 EF ノ面上ニ於テ \widehat{BOD} = 與角ニ作り、 OD ト EF トノ交點ヲ D トセバ、 P, D を過ル大圓ハ所要ノモノナリ。



何トナレバ $PO \perp$ 大圓 EF ナルユエ $PO \perp OB$ 及 $PO \perp OD$ 即チ二大圓 DP, AC 上ノ直線 DO, BO ハ其二大圓ノ平面ノ交線 PO ニ垂直ナルルユエ \widehat{BOD} ハ二大圓ノ面ノ交角ニニシテ且ツ與角ニ等シケレバナリ。

16. 次ノ與條件ニ適スル與半徑 r ノ球ヲ作レ。

- (a) (i) 三定點ヲ過ル。
- (ii) 三定點ヲ過リ且ツ一定球ニ切スル。
- (b) (i) 二定點ヲ過リ一定平面ニ切スル。
- (ii) 二定點ヲ過リ一定球ニ切スル。
- (c) (i) 一定點ヲ過リ二定平面ニ切スル。
- (ii) 一定點ヲ過リ二定球ニ切スル。
- (iii) 一定點ヲ過リ一定平面ト一定球トニ切スル。
- (d) (i) 三定平面ニ切スル。
- (ii) 二定球ニ切スル。
- (iii) 二定平面ト一定球トニ切スル。

(iv) 二定球ト一定平面トニ切スル。

〔略解〕 (a) (i) 三定點ヲ夫々中心トシ r を半徑トスル三ツノ球ヲ作り、其交點ヲ中心トシ r を半徑トスル球ヲ作レバ可ナリ。

(ii) 三定點 A, B, C を過ル圓ノ中心 G ヨリ其圓面ニ垂線 GH を引キ、定球心 O へ GH トヲ含ム平面 P を作り圓 ABC トノ交點ヲ K, L トシ、此二點ヲ過リ P 面ノ定球ノ截り口ナル圓 O ニ切スル圓ヲ畫キ、此圓ノ中心 D を中心トシ半徑 DK を半徑トスル球ヲ作レバ可ナリ。

何トナレバ GH ハ K, L ヨリ等距離ナル點ノ跡軌ナルユエ D ハ GH ノ上ニ在リ、故ニ $DK=DA=DB=DC$ 即チ球 D ハ A, B, C を過ル。次ニ圓 O ト圓 D トノ切點ヲ E トスレバ兩球ハ中心ノ連結線上ニ共通點ヲ有スルガ故ニ相切ス。

(b) (i) 二定點ヲ夫々中心トシ r を半徑トスル球ヲ作り、又定平面ヨリ r 距離ニ平面ヲ作レバ、其球ト平面トノ交點ハ所要ノ球心ナリ。

(ii) 二定點ヲ夫々中心トシ r を半徑トスル球ヲ作り、又定球ト同心ニシテ其半徑ト r トノ和或ハ差ヲ半徑トスル球ヲ作レバ、其二球ノ交點ハ所要ノ球心ナリ。

(c) 及ビ (d) 定點ヲ中心トシ r を半徑トスル球ヲ作り、定平面ノ兩側ニ於テ距離 r ニ平面ヲ作り、定球心ト同心ニシテ其半徑ト r トノ和或ハ差ヲ半徑トスル球ヲ作り、以上ノ交點ヲ求ムレバ、其交點ヲ球心トシ r を半徑トスル球ハ所要ノモノナリ。

17. 四面體ニ内切及ビ外接スル球ヲ作レ。

〔解〕 内切球ヲ作ルハ 82 頁ノ 9 條ノ (1) ニアリ。

又外接球ヲ作ルハ 82 頁 9 條ノ (2) 或ハ 122 頁 7 條ノ (3) ニアリ。

18. 直圓錐ニ内切スル球ヲ作レ。

〔略解〕 任意ノ母線 SA を引キ、底圓心 O へ A へ結ビ、 \widehat{SAO} ノ二等分線ト SO トノ交點ヲ P トセバ、 P を中心トシ PO を半徑トスル球ヲ作レバ可ナリ。

續 第一章 乃至 第四章

特 種 問 題

8. 常數問題 二付テハ 105 頁ノ 13 條ト同様ナリ.

問 題 及 ビ 解 答

1. 球 O ノ内或ハ外ノ定點 P ヨリ互ニ直交スル三直線ヲ引キ球面トノ交點ヲ夫々 A, B; C, D; E, F トセバ $\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{EF}^2$ ハ一定ナリ.

[證明] AB, CD ヲ含ム小圓ノ中心ヲ K トシ, AB, CD, EF ノ中點ヲ夫々 L, M, N トス. 又小圓及ビ球ノ半徑ヲ夫々 r 及ビ R トス. 然ルトキハ

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{EF}^2 &= 4(\overline{AL}^2 + \overline{CM}^2 + \overline{EN}^2) \\ &= 4(\overline{AK}^2 - \overline{KL}^2 + \overline{CK}^2 - \overline{KM}^2 + \overline{OE}^2 - \overline{ON}^2) \\ &= 4(r^2 - \overline{KL}^2 + r^2 - \overline{KM}^2 + R^2 - \overline{ON}^2) \\ & \quad \text{〔而シテ KLP, KPNO ハ共ニ矩形ナルユエ〕} \\ & \quad \overline{KL}^2 + \overline{KM}^2 + \overline{ON}^2 = \overline{PK}^2 + \overline{ON}^2 = 2\overline{PK}^2 \\ &= 4R^2 + 8r^2 - 8\overline{PK}^2 \\ &= 4R^2 + 8(\overline{OA}^2 - \overline{OK}^2 - (\overline{OP}^2 - \overline{OK}^2)) = 12R^2 - 8\overline{OP}^2. \end{aligned}$$

然レニ R 及ビ OP ハ夫々一定ナルユエ此結果ハ一定ナリ, 従テ $\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 + \overline{EF}^2$ ハ一定ナリ.

2. 前題ニ於テ $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 + \overline{PD}^2 + \overline{PE}^2 + \overline{PF}^2$ ハ常數ナリ.

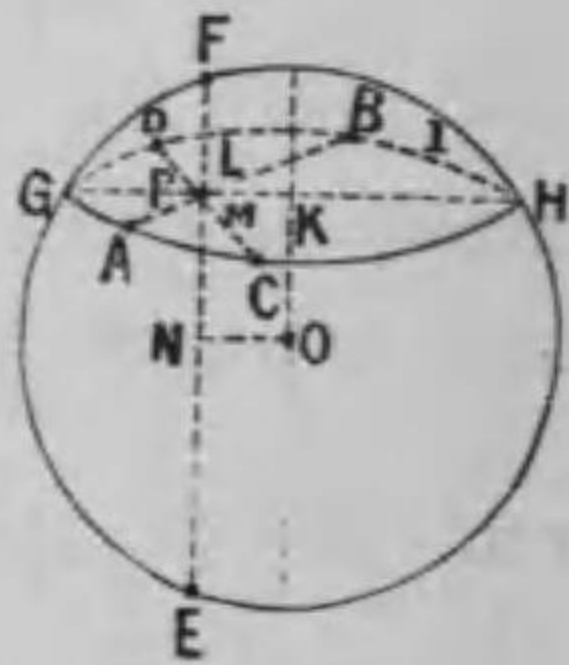
[證明] $AB \perp CD$ ナルユエ $\widehat{AC} + \widehat{BD} = \text{半圓周}$ ナリ, 故ニ $\widehat{CI} = \widehat{BD}$ ニ取レバ AI ハ小圓ノ直徑トナリ GH ニ等シ,

$$\therefore \overline{PA}^2 + \overline{PC}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CI}^2 = \overline{AI}^2 = \overline{GH}^2.$$

同様ニ $\overline{PG}^2 + \overline{PH}^2 + \overline{PE}^2 + \overline{PF}^2 = (2R)^2$ (R ハ球ノ半徑)

$$\begin{aligned} \therefore \overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 + \overline{PD}^2 + \overline{PE}^2 + \overline{PF}^2 &= 4R^2 + \overline{GH}^2 - (\overline{PG}^2 + \overline{PH}^2) = 4R^2 + 2\overline{PG} \cdot \overline{PH} \\ &= 4R^2 + 2(\overline{GK}^2 - \overline{PK}^2) = 4R^2 + 2(R^2 - \overline{OK}^2 - \overline{PK}^2) = 4R^2 + 2(R^2 - \overline{PO}^2). \end{aligned}$$

以下同上.



9. 極大 及 ビ 極小

問 題 及 ビ 解 答

1. (a) 上半徑 8 寸, 下半徑 1 尺, 長サ 9 尺ノ圓柱材ヲ削リテ最大方柱ヲ作レバ, 其屑ノ體積ハ幾何ナルカ. 但シ $\pi = \frac{22}{7}$ トス.

(b) (i) 各稜ガ 2 寸ナル立方石ヲ削リテ最大球ヲ製レバ, 其球ノ體積ハ幾何ナルカ, 但シ π ハ同上.

(ii) 直徑 15 尺ノ球ノ内部ニ其抱容シ得ル最大ナル正立方體狀ノ空腔ヲ作レバ, 殘リノ體積幾何. 但シ立方尺ヲ單位トシ小數第三位マテ精確ニ計算セヨ.

(大工)

[解] (a) 116 頁ノ (4) ノ (ii) ノ公式 $V = \frac{1}{3}\pi h(r^2 + r'^2 + rr')$ ニ依リテ,

$$\text{此圓柱材ノ體積} = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 9 \times (0.8^2 + 1^2 + 0.8 \times 1) = 23.005 \text{ (立方尺).}$$

而シテ圓ニ内接スル最大正方形ハ其直徑ヲ對角線トスル正方形ナルヲ以テ, 直徑 8 寸ノ圓ニ内接スル最大正方形ノ面積ハ $1.6^2 \div 2 = 1.28$ (平方尺) ナリ.

$$\text{故ニ 最大方柱ノ體積} = 1.28 \times 9 = 11.52 \text{ (立方尺).}$$

$$\therefore \text{屑ノ體積} = 23.005 \text{ 立方尺} - 11.52 \text{ 立方尺} = 11.475 \text{ 立方尺.}$$

(b) (i) 最大球ハ内切球ニシテ其直徑ハ立方體ノ高サ即チ一稜ニ等シ.

$$\therefore \text{所求ノ最大球ノ體積} = \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times \left(\frac{2}{2}\right)^3 = 4.194 \dots \dots \text{答 4.2 立方寸弱.}$$

$$(ii) \sqrt{3} = 1.73205, \pi = 3.14159 \text{ トスベシ,}$$

$$\text{答 } 1117.626 \text{ 立方尺.}$$

2. (a) 球面外ニ在ル一定直線ヲ含ム平面ニテ球ヲ截リ, 其截リ口ヲ最大ナラシメヨ.

(b) 球面内ニ在ル一定點ヲ含ム平面ニテ球ヲ截リ, 其截リ口ヲ最小ナラシメヨ.

[解] (a) 球心ト定直線トヲ含ム平面ニテノ截リ口ハ所要ノモノナリ.

(b) 球心ヲ O, 定點ヲ A トシ, OA ニ垂直ナル平面ニテノ截リ口 P ヲ作レバ可ナリ.

何トナレバ截リ口ハ球心ヲ距ルコト遠キモノガ小ナリ、然ルニ $OA \perp P$ 面ニシテ A
ヲ過ル他ノ任意ノ截リ口 Q ノ圆心ヲ B トセバ $OB \perp Q$ 面ナルユエ 直 $\triangle OBA$ ニ於テ
 $OA > OB$ ナルガ故ナリ。

3. (a) 直圓錐ニ最大ノ曲面積ヲ有スル直圓錐ヲ内接セヨ。

(b) 直圓錐ニ最大ノ體積ヲ有スル直圓錐ヲ内接セヨ。

[解] 直圓錐 (S-AB) ノ内接直圓錐 (ED-F) ノ底半徑 $OE = x$, 高サ $OC = y$ トス。

(a) 直圓錐ノ軸 SO ノ中點 C ヲ過リ其底面ニ平行スル平面ニテノ截リ口ヲ底面ト
スル内接直圓錐ヲ作レバ之レ所要ノモノナリ。 何トナレバ

内接直圓錐ノ曲面積 $= 2\pi xy$ ガ最大ナル爲メニハ
 2π ハ常數ナルユエ xy ガ最大ナレバ可ナリ。 今
SCO, AEO ハ夫々一直線ニシテ $FC \parallel AO, FE \parallel CO$
ナルヲ以テ $\triangle SAO$ ニ於テ

$$AO : x = SO : SC = SO : SO - y$$

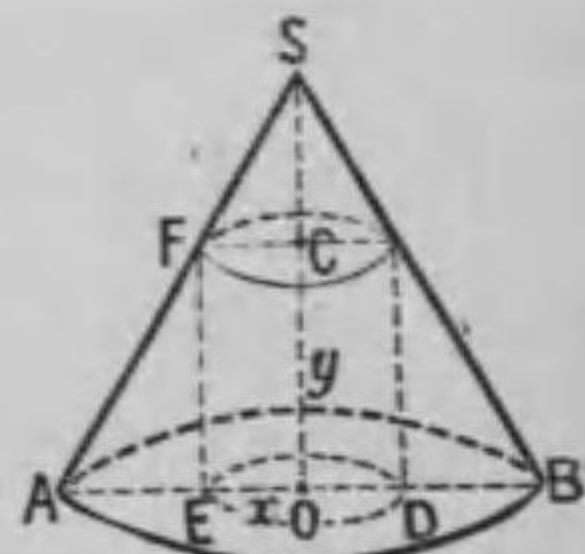
$$\text{故ニ } y = \frac{SO}{AO}(AO - x). \quad \therefore xy = \frac{SO}{AO}(AO - x)x$$

ガ最大ナル爲メニハ SO/AO ハ常數ナルヲ以テ $(AO - x)x$ ガ最大ナルヲ要ス。 而シ
テ、諸數ノ乘積ガ最大ナルハ其諸數ノ和ガ常數ニシテ其各々ガ相等シキトキナリ。 然
ルニ $AO - x + x = AO$ ハ常數ナルヲ以テ $AO - x = x$ 即チ $x = \frac{AO}{2}$ ナルトキニ xy ハ
最大ナリ。

(b) 直圓錐ノ底半徑 OA 上ニ O ヨリ其ノ $\frac{2}{3}$ ノ點 E ヲ取り、OE ヲ底半徑トスル
内接直圓錐ヲ作レバ之レ所要ノモノナリ。 何トナレバ内接直圓錐ノ體積 $= \pi x^2 y$ ガ
最大ナル爲メニハ π ハ常數ナルヲ以テ $x^2 y$ ガ最大ナレバ可ナリ。 依テ (a) ト同様ニ
 $y = \frac{SO}{AO}(AO - x)$

$$\therefore x^2 y = \frac{SO}{AO} x^2 (AO - x) \quad \text{ガ最大ナル爲メニハ } SO/AO \text{ ハ常數ナルヲ以テ}$$

$x \cdot x(2AO - 2x)$ ガ最大ナルヲ要ス。 然ルニ $x + x + 2AO - 2x = 2AO$ ハ常數ナルヲ
以テ $2AO - 2x = x$ 即チ $x = \frac{2}{3}AO$ ナルトキニ $x^2 y$ ハ最大ナリ。

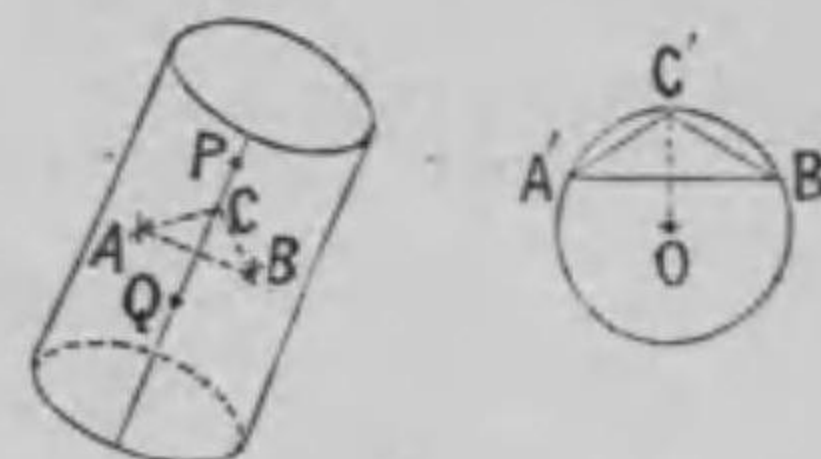


10. 實體ノ半徑ヲ求ムルコト

作圖題 (1) 實體圓錐ノ一母線ヲ知リテ 其直截リ口ノ半徑ヲ求メヨ。

[解] 與母線ヲ PQ トス。 P, Q ヲ夫々中心

トシ任意ノ半徑ヲ以テ實體圓錐ノ曲面上ニ
等圓ヲ畫キ其交點ヲ A, B トシ、又 PQ ノ
中點ヲ C トス。 而シテ 直線距離 AB, BC,
CA ヲ一平面上ニ移シテ $\triangle A'B'C'$ ヲ作り
之ニ外接圓 O' ヲ畫ケバ此圓ノ半徑ハ所要ノ半徑ニ等シ。



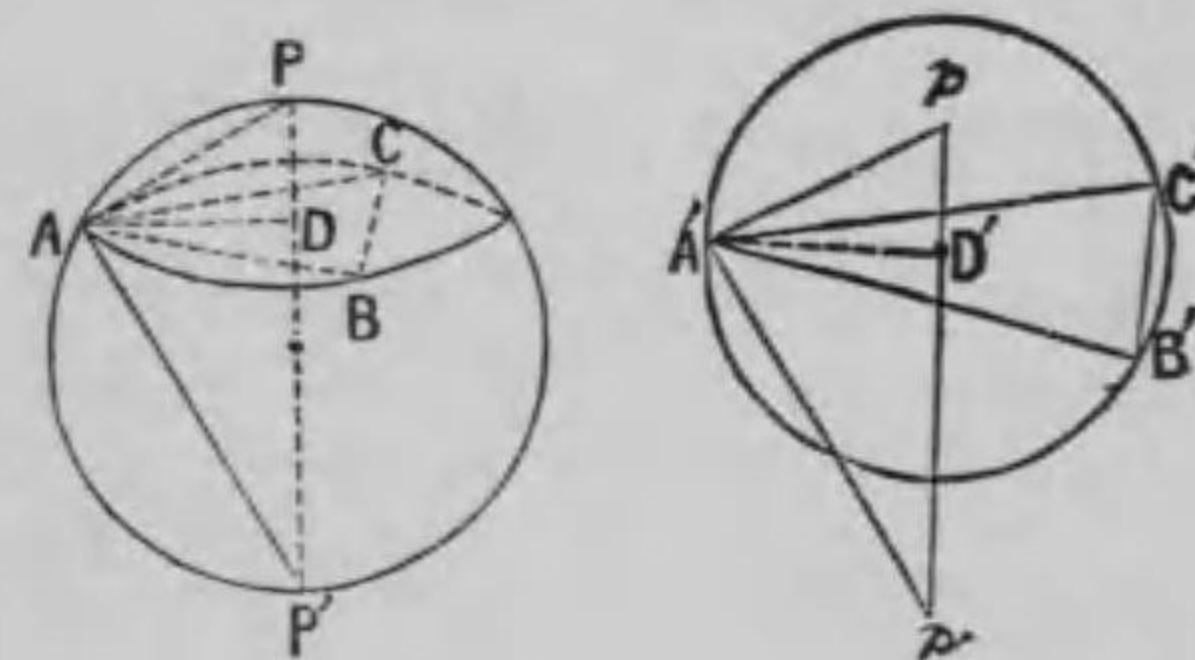
何トナレバ CA, CB ハ何レモ PQ ノ垂直二等分線ナルユエ PQ ハ面 ABC ニ垂直ナ
リ。 故ニ A, B, C ハ此圓錐ノ直截リ口ナル面上ノ三點ニシテ $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ ノ
外接圓ハ全等ナリ、故ニ圓 $A'B'C'$ ノ半徑ハ實體圓錐ノ直截リ口ノ半徑ニ等シ。

作圖題 (2) 實體球ノ半徑ヲ求ムルコト。

[解] 實體球ノ面上ノ任意ノ點 P ヲ中心トシ任意ノ半徑ヲ以テ小圓 ABC ヲ畫キ、直線
距離 AB, BC, CA ヲ一平面上ニ移シテ $\triangle A'B'C'$ ヲ作り、其外接圓ノ中心 D' ヲ求メ。

次ニ 此平面上ニ於テ $A'D'$

ヲ底邊トシ $PA =$ 等シキ斜邊ノ
直三角形 $pA'D'$ ヲ作り pA' ノ
垂線ト pD' ノ引長トノ交點ヲ P'
トセバ $pp'/2$ ハ所要ノ半徑ニ等
シ。



何トナレバ $\triangle A'B'C' \equiv \triangle ABC$,

從テ此等ノ外接圓ノ半徑 $A'D' = AD$, $pA' = PA$ 且ツ $\hat{A}' = \hat{A}$ ナルユエ
 $\triangle pA'p' \equiv \triangle PAP'$, 從テ $pp' = PP'$, 故ニ $\frac{pp'}{2} = \frac{PP'}{2}$ ハ此實體球ノ半徑ナリ。

續第二編乃至第三編

計算問題

注意 計算問題ノ多クハ已知ノ定理或ハ問題ニ於ケル數ノ計算ナリ。

問題及ビ解答

1. 平行六面體ノ四對角線ノ各平方ノ和ガ2900平方寸ニシテ、其一角頂ニ會セル三稜ノ比ガ2:3:4ナラバ、其三稜ノ長サハ、各々幾何ナルカ。

[解] 一角頂ニ會セル三稜ヲ $2x, 3x, 4x$ 寸トセバ、平行六面體ノ對角ハ四ツツ相等シキユエ各對角線ノ平方ノ和 $2900 = 4(2x^2 + 3x^2 + 4x^2)$ 、之ヲ解キ $x = \pm 5$ 、此正ノミチ取リテ $2x = 10, 3x = 15, 4x = 20$ 。 答 10 寸, 15 寸, 20 寸。

2. 矩形六面體ノ全面積ガ286平方尺ニシテ一角頂ニ會セル三稜ノ和ガ21尺ナラバ、其一對角線ノ長サ幾何。 答 12.4 尺餘。

[解] 一角頂ニ會スル三稜ヲ夫々 a, b, c 尺トセバ $a + b + c = 21, 2(ab + bc + ca) = 286$ 。
 \therefore 一對角線 $= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \sqrt{(a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)} = \sqrt{21^2 - 286} = 12.4$ 。

3. (a) 體積 15625 立方米ナル立方體ノ一對角線ノ長サ幾何。

(b) 一稜ガ 307.9 耗ナル正六面體ヲ一平面ニテ截リ、其截リ口ヲ正六邊形ナラシメ、且ツ其面積ヲ求メヨ。 (大工)

[解] (a) 立方體ノ體積ハ一稜ノ立方ニ等シキユエ 一稜 $= \sqrt[3]{15625} = 25$ ナリ。而シテ一對角線ノ平方ハ一稜ノ平方ノ3倍ニ等シキユエ 一對角線 $= 25\sqrt{3} = 43.3$ 。 答 43.3 米餘。

(b) 此作圖ハ 101 頁 8 題ニアリ。此截リ口ナル正六邊形ノ一邊ハ一面ナル正方形ノ對角線ノ半即チ $307.9 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 153.95\sqrt{2}$ ナリ。而シテ一邊 a ナル正六邊形ノ面積ハ $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$ ナリ。

\therefore 此正六邊形ノ面積 $= \frac{3\sqrt{3}}{2} \times 153.95^2 \times 2 = 123048.33$ 。 答 123048.33 平方耗。

4. (a) 底面ガ正三角形ナル角濤アリ、其體積ハ 1 立方米ニシテ其高サハ 0.8 米ナリ。底ノ一邊ヲ種ノ位マデ正シク算出セヨ。

(陸士)

(b) 高サ二寸五分ナル直角濤アリ、其底面ハ正六邊形ニシテ底面ノ一邊ハ一寸二分ナリト。然ラバ此角濤ノ全面積及ビ體積幾何。 (陸士)

(c) 厚サ $\frac{3}{8}$ 吋ノ鐵板ニテ造レル直角濤狀ノ無蓋ノ水溜アリ、其底面ハ内法ニテ 3 呎 4 吋ト 2 呎 6 吋ノ矩形ニシテ其深サ 4 呎 8 吋ナリ。水ヲ充タセル時及ビ空虛ナル時ノ此水溜ノ重量ヲ計算セヨ。但シ鐵ノ比重ヲ 7.2 トシ、又水一立方呎ノ重サヲ 62.3 封度トス。 (大工)

(d) 東西ニ傾斜ナク、北ヨリ南ニ向ヒ地面ニ沿ヒテ m 尺ニ付キ n 尺低下セル地面アリ。此地面中東西 a 尺、南北 b 尺ノ矩形ノ地所ヲ北ノ境界線ヨリ地面ニ沿ヒテ $\frac{1}{4}b$ 尺 南ノ處ト同ジ高サニ地均セントス。幾何ノ土ヲ補フベキカ。 (海兵)

[解] (a) 正三角形ノ一邊ヲ a 米トセバ $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \times 0.8 = 1$ 。

$$\therefore a^2 = \frac{4}{\sqrt{3} \times 0.8} = \frac{5\sqrt{3}}{3} = \frac{5 \times 1.73205}{3} = 2.8867 \dots$$

$$\therefore a = \sqrt{2.8867} = 1.61. \quad \text{答 1 米 6 粉 1 種。}$$

(b) 一邊 a ナル正六邊形ノ面積 $= \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$ ナルヲ以テ、

$$\text{全面積} = \text{傍面積} + \text{底面積} \times 2 = \text{底周} \times \text{高} + \text{底面積} \times 2 = 1.2 \times 6 \times 2.5 + \frac{3\sqrt{3}}{2} \times 1.2^2 \times 2 = 7.48224. \quad \text{答 7.48 平方寸餘。}$$

$$\text{又 體積} = \text{底面積} \times \text{高} = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \times 1.2^2 \times 2 \right) \times 2.5 = 18.7006. \quad \text{答 18.7 立方寸餘。}$$

(c) 水ノ重量 = $62.3 \text{ 封度} \times \left(3\frac{4}{12} \times 2\frac{6}{12} \times 4\frac{8}{12}\right) = 2422.7 \text{ 封度}$

又 水溜ノ重量 = $62.3 \text{ 封度} \times 7.2 \times \left\{ \left(3\frac{4}{12} + \frac{3}{8} \times 2\right) \times 2\frac{6}{12} \times \left(4\frac{8}{12} + \frac{3}{8}\right) - \left(3\frac{4}{12} \times 2\frac{6}{12} \times 4\frac{8}{12}\right) \right\}$
 $= 5642.44 \text{ 封度}$

(d) 地面ヲ ABCD トシ, BA=a 尺, CB=b 尺 トス. 又地均シタル地面ヲ KLMN トシ, 而シテ 面 ABCD, KLMN ノ交線ヲ GH トス. 然ルトキ

所要ノ土ノ立積ヲ V トスレバ

$V = \text{三角錐 (GKD-HLC)} - \text{三角錐 (AMG-BNH)}$

$= \frac{1}{2} \text{ LH} \cdot \text{CD} \cdot \text{CL} - \frac{1}{2} \text{ HN} \cdot \text{AB} \cdot \text{BN}$

$= \frac{1}{2} \text{ LH} \cdot \text{CD} \cdot \text{CL} - \frac{1}{2} \text{ HN} \cdot \text{AB} \cdot \text{BN}$

$= \frac{1}{2} \text{ LH} \cdot \text{AB} \cdot \text{CL} - \frac{1}{2} \text{ HN} \cdot \text{AB} \cdot \text{BN}$

然ルニ $\triangle \text{HLC} \sim \triangle \text{BNH} \sim \triangle \text{BFC}$ ナルユエ LH:LC=HN:NB=FC:FB 且ツ

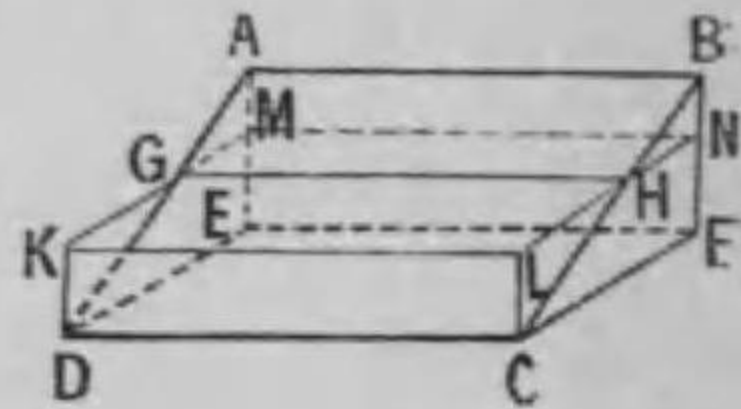
$\text{BH} = \frac{1}{4} \text{CB}$ ナルヲ以テ LH = $\frac{3}{4} \text{FC}$, LC = $\frac{3}{4} \text{FB}$, HN = $\frac{1}{4} \text{FC}$, NB = $\frac{1}{4} \text{FB}$ ナリ.

$\therefore V = \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \right) \text{ AB} \cdot \text{FC} \cdot \text{FB} = \frac{1}{4} \text{ AB} \cdot \text{FB} \cdot \text{FC}$

又 BC:BF=m:n ナルユエ BF = $\frac{bn}{m}$, CF = $\sqrt{\text{BC}^2 - \text{BF}^2} = \sqrt{b^2 - \frac{b^2 n^2}{m^2}}$

$= \frac{b}{m} \sqrt{m^2 - n^2}$

$\therefore V = \frac{1}{4} a \cdot \frac{b}{m} \sqrt{m^2 - n^2} \cdot \frac{bn}{m} = \frac{ab^2 n}{4m^2} \sqrt{m^2 - n^2}$ (立方尺)



5. (a) ニツノ相似角錐ノ體積ノ比ガ 216:343 ナラバ, 其全面積如何. 答 36:49.

(b) ニツノ四面體 SABC, VDEF トノ比ガ 3:5 ニシテ, 頂點 S 及ビ V ニ於ケル三面角ガ相等シク且ツ SA:VD=2:3 及ビ SB:VE=6:5 ナラバ SC:VE ハ如何. 答 3:4.

[略解] (a) 相似角錐ノ體積ハ對應稜ノ三乗ニ比例シ, 又全面積ハ對應稜ノ平方ニ比例ス.

(b) 頂點ニ於ケル三面角ガ相等シキニツノ四面體ノ體積ハ, 其頂點ニ於ケル三稜ノ乘積ニ比例ス.

6. (a) 各稜ノ長サ 1 尺ナル正四面體ノ表面積及ビ體積ヲ求メヨ. (東京)

(b) (i) 一稜ノ長サ a 尺ナル正四面體ノ體積ヲ求メヨ. (水講, 海機)

(ii) 一稜ノ長サ六寸ナル正四面體ノ體積ヲ求メヨ, 但シ立方寸以下二位マデ算セヨ. (四高)

(c) (i) 高サ l 尺ノ正四面體ノ體積ヲ求メヨ. (專檢)

(ii) 高サ六寸ノ正四面體ノ體積幾何. (熊工)

(d) 一稜ノ長サ 2 尺ナル正四面體ニ内接スル正四面體ノ體積ヲ小數三位マデ求メヨ.

(e) 一邊ノ長サ a ナル正四面體ノ相對スル稜ノ間ノ最短距離ヲ求メヨ. (東京)

[解] (a) 各面ハ一邊 1 尺ナル正三角形ナルユエ

表面積 = $\frac{\sqrt{3}}{4} \times 1^2 \times 4 = 1.732$ (平方尺)

又 91 頁ノ (c) ト同様ニ 體積 = $\frac{\sqrt{2}}{12} \times 1^3 = 0.144$ (立方尺)

(b) 同上 答 (i) $\frac{\sqrt{2}}{12} a^3$ 立方尺. (ii) 25.45 立方寸.

(c) 91 頁ノ (d) ト同様ニ, 高サノ平方ハ一稜ノ平方ノ三分ノ二ナリ, 故ニ一稜ヲ a 尺トセバ $l^2 = \frac{2}{3} a^2$, 從テ $a = l\sqrt{\frac{3}{2}}$ ナリ. 故ニ

(i) 體積 = $\frac{1}{3}$ 底面積 \times 高 = $\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \times l = \frac{\sqrt{3}}{12} l^3 \times \frac{3}{2} \times l = \frac{\sqrt{3}}{8} l^3$ (立方尺).

(ii) 同様ニ 體積 = $\frac{\sqrt{3}}{8} \times 6^3 = 46.764$ (立方寸).

(d) 83 頁ノ (3) 正四面體トスレバ EF:CS=DF:DS=1:3 即チ EF = $\frac{1}{3}$ CS.

同様ニ 相隣ル面ノ重心ノ連結線ハ皆チ各等稜ノ $\frac{1}{3}$ ナリ.

故ニ (a) ト同様ニ 内接正四面體ノ體積 = $\frac{\sqrt{2}}{12} \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 0.034$ (立方尺) 餘.

(e) 107 頁 3 ト同様ニ 所要ノ最短距離 = $\frac{\sqrt{2}}{2} a$.

7. (a) (i) 正六角錐ノ底面ノ一邊ハ一寸八分ニシテ、高サハ四寸七分ナリト。其體積幾何。

(東農)

(ii) 底面ノ各邊四寸ニシテ高サ一尺五寸ノ正六角錐ノ體積ヲ求メヨ。 答 207.84 立方寸。

(熊工)

(b) 體積 1 立方寸ナル角錐アリ、底面ハ平行四邊形ニテ其二邊及ビ對角線ハ夫々 1 寸、2 寸、 $\sqrt{7}$ 寸ナリト。高サ幾何。

(名工)

(c) 底ノ一邊ノ長サ 4 尺、傍稜ノ長サ 10 尺ナル正四角錐ノ全面積并ニ體積ヲ小數第三位マデ求メヨ。

(專檢)

(d) 對角線ノ長サ a 寸ナル正方形ヲ底面トスル直角錐ノ斜稜及ビ底面ノ一邊ノ長サノ比 3:2 ナルトキ、體積及ビ斜面ノ面積ヲ求メヨ。

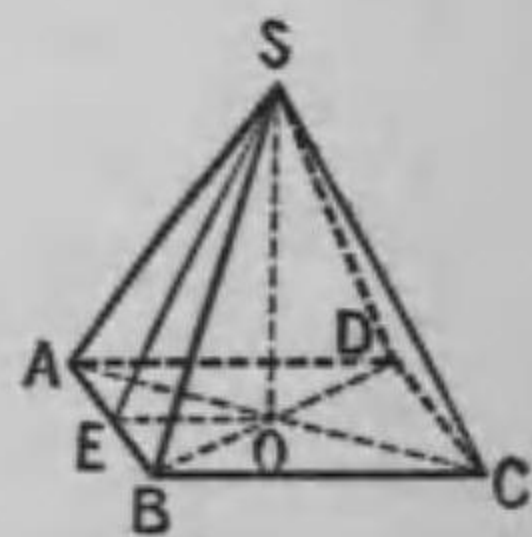
(東北工)

[解] (a) (i) 正六角錐ノ體積 $= \frac{1}{3} \times \text{底面積} \times \text{高サ} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \times 1.8^2 \right) \times 4.7 = 13.19$ (立方寸) 弱。

(b) $1+2+\sqrt{7}=2s$ トセバ $s = \frac{3+\sqrt{7}}{2}$ ナルユエ、三邊ヲ知リテ三角形ノ面積ヲ求ムル公式ニ依テ 半底面ノ面積 $= \sqrt{s(s-1)(s-2)(s-\sqrt{7})} = \sqrt{\left\{ \frac{3+\sqrt{7}}{2} \cdot \frac{1+\sqrt{7}}{2} \cdot \frac{-1+\sqrt{7}}{2} \cdot \frac{3-\sqrt{7}}{2} \right\}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。
 \therefore 高サ $= 1 \div \left(\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2 \right) = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} = 1.732$ (寸)。

(c) 正四角錐 (S-ABCD) ノ頂點 S ヨリ底面ヘノ垂線ノ足 O ハ底面ノ中心 即チ 兩對角線ノ交點ナリ。又 SA=SB ナルユエ斜高 SE ハ AB ヲ二等分ス。故ニ $SE^2 = SB^2 - BE^2 = 10^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2 = 96$ 且ツ $\hat{SOE} = \hat{R}$ ナルユエ $SO = \sqrt{SE^2 - EO^2} = \sqrt{96 - \frac{4}{2}} = \sqrt{92}$ 。

\therefore 全面積 $= \frac{1}{2} AB \cdot SE \times 4 + BC^2 = \frac{1}{2} \times 4 \times \sqrt{96} \times 4 + 4^2 = 94.38$ (平方尺) 餘。
 又 體積 $= \frac{1}{3} BC^2 \times SO = \frac{1}{3} \times 4^2 \times \sqrt{92} = 51.16$ (立方尺) 弱。



(d) 前圖ヲ用フ。AO $= \frac{1}{2} a$, AB $= \frac{1}{\sqrt{2}} a$, AE $= \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2\sqrt{2}} a$ ニシテ、

又 SA:AB=3:2 ナルユエ SA $= \frac{3}{2} AB = \frac{3}{2\sqrt{2}} a$ ナリ。

而シテ SO $= \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{\left\{ \left(\frac{3}{2\sqrt{2}} a \right)^2 - \left(\frac{1}{2} a \right)^2 \right\}} = \frac{\sqrt{14}}{4} a$,

SE $= \sqrt{SA^2 - AE^2} = \sqrt{\left\{ \left(\frac{3}{2\sqrt{2}} a \right)^2 - \left(\frac{1}{2\sqrt{2}} a \right)^2 \right\}} = a$ ナリ。

\therefore 體積 $= \frac{1}{3} AB^2 \cdot SO = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} a \right)^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{14}}{4} a \right) = \frac{\sqrt{14}}{24} a^3$ (立方寸)

及ビ 斜面ノ面積 $= \triangle SAB \times 4 = 4 \times \frac{1}{2} AB \cdot SE = \sqrt{2} a^2$ (平方寸)。

8. (a) 底面積九平方寸、高サ五寸ノ角錐アリ。之ヲ高サ三寸ノ所ニテ底面ニ平行ナル平面ニテ截ルトキハ、其兩部分ノ體積ハ各々幾何ナルカ。

(海兵)

(b) 平截頭三角錐 (ABC-DEF) ノ兩底ノ周ハ夫々 108 寸及ビ 60 寸ニシテ又其内切圓ノ半徑ハ夫々 9 寸及ビ 5 寸ナリ。今高サガ 36 寸ナラバ體積ハ幾何ナルカ。

(c) 土堤アリ、其下底ハ豎 20 尺 幅 14 尺及ビ上底ハ豎 12 尺 幅 9 尺ノ各矩形ニシテ、又高サハ 8 尺ナリ。其立積ヲ求メヨ。

[94 頁ノ17 題]

[解] (a) 上下兩部ノ體積ヲ夫々 V_1, V_2 トシ、又高サヲ夫々 h_1, h_2 トス。然ルトキハ上部ノ角錐ト元體トハ相似ニシテ、相似多角錐ノ體積ハ高サノ三乗ニ比例ス。

故ニ $V_1 : (V_1 + V_2) = h_1^3 : (h_1 + h_2)^3$ 即チ $V_1 : \frac{1}{3} \times 9 \times 5 = (5-3)^3 : 5^3$

$\therefore V_1 = \frac{1}{3} \times 9 \times 5 \times \frac{2^3}{5^3} = 0.96$ (立方寸)。

從テ $V_2 = \frac{1}{3} \times 9 \times 5 - 0.96 = 14.04$ (立方寸)。

(b) 多角形ノ面積ハ其周ト内切圓ノ半徑トノ積ノ半ニ等シキユエ、

下底面 ABC $= \frac{1}{2} \times 108 \times 9 = 486$ (平方寸), 上底面 DEF $= \frac{1}{2} \times 60 \times 5 = 150$ (平方寸)

此兩底面ノ比例中項 $= \sqrt{486 \times 150} = 270$ (平方寸) ナリ。

\therefore 體積 $= \frac{1}{3} \times (486 + 150 + 270) \times 36 = 10872$ (立方寸)。

(c) 體積 $= \frac{1}{6} \times 8 \times \{ 12 \times (2 \times 9 + 14) + 20 \times (2 \times 14 + 9) \} = 1498.67$ (立方尺) 弱。

9. (a) 底周 2 呎, 高サ 7 吋ナル直圓錐ノ體積ハ幾何.

(b) 直圓錐ノ高サ一米ニシテ其全面積ハ半徑二米ナル圓ノ面積ニ等シト, 此圓錐ノ半徑及ビ體積ヲ求メヨ. (陸士)

(c) 高サ二尺五寸ニシテ十立方尺ノ體積ヲ有スル直圓錐アリ, 其底面ノ直徑ヲ求メヨ, 但シ厘位以下四捨五入セヨ. (東商)

(d) 半徑 R ナル水槽アリ, 今活塞ノ通路ノ長サ l ニシテ其内半徑 r ナルほんぶヲ使用シテ此水ノ深サヲ L ダケ減ゼントス. 幾回活塞ヲ上下スベキカ. (海兵)

(e) 直圓錐狀ノ中空鉛管アリ, 其外径ハ 24 厘, 内径ハ 21 厘ニシテ長サハ 1.5 米ナリト. 其體積如何. 又鉛ノ比重ヲ 11.25 トセバ鉛管ノ重サハ幾何. 但シ $\pi=3.1416$ トス.

[略解] 底半徑ヲ r トシ, 又 (a) 乃至 (e) ハ $\pi=\frac{22}{7}$ トス.

(a) $2\pi r=2\times 12$ (吋) $\Rightarrow r=\frac{12}{\pi}$, 仍テ公式ニ依リ 答 320.7 立方吋餘.

(b) 全面積 $\pi\times 2^2=2\pi r^2+2\pi r\cdot l$ $\therefore r^2+r-2=0$ 即 $(r-1)(r+2)=0$
此正根ノミヲ取りテ $r=1$ (米). 從テ 體積 $=\pi r^2\cdot l=\frac{22}{7}\times 1^2\times 1=3.14$ (立方尺) 餘.

(c) 體積 $10=\pi r^2\times 2.5 \Rightarrow r$ ヲ求ムベシ. 答 1.128 尺.

(d) 此水槽ハ底半徑 R, 高サ l ナル直圓錐ニシテ, 又ほんぶハ半徑 r, 高サ l ナル直圓錐ナリ. 而シテ, 直圓錐ノ體積ハ底面積ト高サトノ乘積ニ等シ. 故ニ減ズベキ水槽ノ水量 $=\pi R^2\cdot L$ 又 活塞一同上下ノ水量 $=\pi r^2\cdot l$ ナリ.

$$\therefore \text{所要ノ回数}=\pi R^2\cdot L\div(\pi r^2\cdot l)=\frac{LR^2}{lr^2}$$

(e) 所要ノ體積ハ外径ノ直圓錐ヨリ内径ノ直圓錐ヲ減シタルモノ,
即チ $3.1416\times\left\{\left(\frac{24}{2}\right)^2-\left(\frac{21}{2}\right)^2\right\}\times 150=15904.35$ 即チ 15904.4 立方厘弱.
又 1 立方厘=1 瓦ナルユエ 此體ノ重サ $=1\bar{瓦}\times 15904.4\times 11.25=178923.94$ 瓦弱
 $=0.267\bar{キ}\times 178923.94=47772.69$ 匁強.

10. (a) 底半徑 4.8 尺, 高サ 6.4 尺ナル直圓錐ノ全面積ハ幾何.

(仙醫)

(b) 底半徑ト高サトガ相等シキ直圓錐ノ體積ガ 620928 立方厘ナラバ, 其底半徑ハ幾何.

(c) (i) 底面ノ周ガ八寸八分ニシテ高サガ二寸七分ナル直圓錐ノ體積ヲ求メヨ. 但シ $\pi=\frac{22}{7}$ トス. (長商)

(ii) 高サガ底面ノ直徑ニ等シキ直圓錐體アリ, 底面ノ周ガ 2 尺 2 寸ナルトキハ, 其體積幾何. 但シ π ハ同上. (東農)

(d) 半徑五尺, 斜高十三尺ナル直圓錐ノ體積如何. (海機)

(e) 斜高 a 寸ノ上口徑 2b 寸 (下口徑ハ甚ダ小ナルユエ無キモノトス) ノ漏斗アリ. 斜高ニ沿ヒル個ノ刻ミヲ附シ相隣レル刻ミ間ニ於ケル漏斗ノ容量ヲ相等シカラシムルニハ如何ナル間隔ニ刻ミヲ附スベキカ. (金醫)

[解] (a) 底半徑ヲ r, 高サヲ h, 斜高ヲ L トセバ $L=\sqrt{r^2+h^2}=\sqrt{4.8^2+6.4^2}=8$,
 \therefore 全面積 $=\pi r L+\pi r^2=\pi(L+r)=\frac{22}{7}\times 4.8\times(8+4.8)$ [$\pi=\frac{22}{7}$ トス]
 $=193.097$. 答 193.1 平方尺弱.

(b) 底半徑ヲ r トセバ, 體積 $620928=\frac{1}{3}\times\pi r^2\cdot r$, 依テ $\pi=\frac{22}{7}$ トセバ
 $r^3=620928\times\frac{3}{\pi}=620928\times\frac{3\times 7}{22}=592704$, $\therefore r=\sqrt[3]{592704}=84$ (厘).

(c) (i) 底半徑ヲ r トセバ $2\pi r=8.8$ ナルユエ $r=\frac{4.4}{\pi}$ ナリ.
 \therefore 體積 $=\frac{1}{3}\pi r^2\times 2.7=\frac{1}{3}\pi\times\left(\frac{4.4}{\pi}\right)^2\times 2.7=\frac{1}{3}\times\frac{7}{22}\times 4.4^2\times 2.7=5.544$ (立方寸).

(ii) 同上 答 89.83 立方寸餘.

(d) 高サ $=\sqrt{13^2-5^2}=12$. 依テ $\pi=3.1416$ トスレバ
體積 $=\frac{1}{3}\pi\times 5^2=\frac{3.1416}{3}\times 25=26.18$ (立方尺).

(c) 漏斗ヲ直圓錐トシ、其體積ヲ V トシ、底面ニ平行ナル平面ニテ截リタル一部分ノ體積ヲ v トセバ、元體ト尖端ヨリ第一ノ體トハ相似ナルニエ其體積ハ對應邊ノ立方ニ比例ス、故ニ此體ノ斜高ヲ x 寸トセバ、 $V:v=a^3:x^3$ 。

而シテ斜高ニ n 箇ノ刻ミヲ付スレバ其一部ハ

$$\frac{1}{n+1} \text{ナルニエ } v = \frac{1}{n+1} V, \therefore x^3 = \frac{a^3}{n+1}$$

\therefore 第一ノ刻ミ目ハ尖端ヨリ $x = \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} a$ 寸。

又第二 $v = \frac{2}{n+1} V$ ナルニエ、尖端ヨリ第二ノ刻ミ

目マデノ斜高ヲ y 寸トスレバ上ト同様ニ

$$y = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[n]{n+1}} a \text{ 寸。}$$

\therefore 第二ノ刻ミ目ハ第一ヨリ $\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[n]{n+1}} a$ 寸 $-\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} a$ 寸 $= \frac{\sqrt[3]{2}-1}{\sqrt[n]{n+1}} a$ 寸。

以下同理ニヨリテ夫々 $\frac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}{\sqrt[n]{n+1}} a$ 寸、 $\frac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{3}}{\sqrt[n]{n+1}} a$ 寸、……ナリ。



11. (a) (i) 平截頭直圓錐アリ、其高サ七十尺ニシテ、兩底面ノ直徑ハ夫々十尺及ビ七尺ナリ。體積幾何、但シ $\pi = \frac{22}{7}$ 。(水講)

(ii) 直圓錐臺ノ上下兩底ノ徑ハ夫々 3 尺、4 尺ニシテ高サハ 5 尺ナリ。此體積如何、但シ π ハ同上。(七高)

(iii) 丸太材木アリ、其兩底半徑ハ夫々 3 尺及ビ 3 尺 8 寸ニシテ又斜高ハ 2 尺 4 寸ナリト。體積幾何。

(b) (i) 底半徑ガ夫々 20 寸、10 寸ニシテ高サ 16 寸ナル平截頭直圓錐アリ。今高サノ中點ニ於テ底面ニ平行ナル平面ニテ之ヲ二分シ、各部分ノ體積ヲ計算セヨ。(大工)

(ii) 西洋樽アリ、兩端面ノ内法半徑ハ各 6 吋、中央ノ内法縱半徑ハ 9 吋ニシテ兩端面ノ距離ハ 21 吋ナリト。其容積如何、但シ $\pi = \frac{22}{7}$ トス、

(c) 平截頭直圓錐ノ兩底半徑ノ和ハ 27 尺、高サハ 14 尺ニシテ、體積ハ 8052 立方尺ナリト。兩底半徑ヲ求メヨ、但シ $\pi = \frac{22}{7}$ トス。

(d) 雨天ニテ屋外ニ置キタル口徑 1 尺、底徑 6 寸、深サ 8 寸ナルばけつノ深サノ半分ニ至リシト。1 坪ノ面積ニ降レル雨量ハ幾斗幾升ナルカ、但シ 1 升ヲ 64.8 立方寸トス。(海兵)

[解] 116 頁 (4) ノ (ii) ノ公式 $V = \frac{1}{3} \pi r^2 (r^2 + r'^2 + rr')$ ニ依リテ

(a) (i) 體積 $= \frac{1}{3} \times 70 \times \frac{22}{7} \times \left\{ \left(\frac{10}{2}\right)^2 + \left(\frac{7}{2}\right)^2 + \frac{10}{2} \times \frac{7}{2} \right\} = 4015$ (立方尺)。

(ii) 同上 答 48.45 立方尺餘。

(iii) 高サ $= \sqrt{24^2 - (38-30)^2} = 8$ 。以下同上。 答 29 立方尺 199 立方寸餘。

(b) (i) 高サノ中點ニ於ケル截リ口ハ圓ニシテ其半徑ハ $(20+10) \div 2 = 15$ (寸) ナリ、以下同上。 答 上部 3979 立方寸強、下部 7749 立方寸強。

(ii) 西洋樽ハ中央ノ垂直截リ口ヲ共通底面トセルニツノ全等ナル平截頭直圓錐ナリ、故ニ上ト同様ニ 體積 $= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 21 \times (6^2 + 9^2 + 6 \times 9) \times 2 = 7524$ (立方吋)。

(c) 兩底半徑ヲ夫々 r, r' トセバ、體積 $8052 = \frac{1}{3} \times 14 \times \frac{22}{7} \times (r^2 + r'^2 + rr')$

$$\therefore r^2 + r'^2 + rr' = \frac{3 \times 7}{14 \times 22} \times 8052 = 549 \dots\dots(1)$$

$$\text{又 } (r+r')^2 = 27^2 = 729. \therefore rr' = 729 - 549 = 180 \dots\dots(2)$$

此 (1), (2) ヲ解キ $r = 15, r' = 12$ 。 答 15 尺, 12 尺。

(d) ばけつ内ノ水ノ量ハ直圓錐臺狀ヲ爲シ、其底半徑ハ夫々 $(10+6) \div 2 = 8$ (寸) 及ビ 6 (寸) ニシテ、高サハ $8 \div 2 = 4$ (寸) ナルニエ 其立積ハ $\frac{1}{3} 4\pi \times (4^2 + 3^2 + 4 \times 3)$

即チ $\frac{148}{3} \pi$ (立方寸) ナリ。而シテ此水量ハ徑 1 尺ノ圓ノ面積即チ $5^2 \pi$ (平方寸) ノ面積内ニ降レル雨水ナリ。故ニ 1 坪即チ 60^2 (平方寸) 内ニ降レル雨水ノ量ヲ x (立方寸) トセバ

$$5^2 \pi : 60^2 = \frac{148}{3} \pi : x, \text{ 之ヨリ } x = 7104 \text{ ヲ得。}$$

\therefore 所要ノ雨量ハ $7104 \div 64.8 = 109.6 \dots\dots$ 即チ 約 1 石 1 斗ナリ。

12. (a) 半徑 2 尺ノ球ノ中心ヨリ其 3 平方尺ナル小圓ニ至ル距離ヲ求メヨ.

(b) 球ノ小圓周ヨリ其極ニ至ル大圓ノ弧ガ大圓周ノ $\frac{1}{12}$ ナル小圓ノ面積ト兩底ガ夫々小圓及ビ大圓ノ各半徑ニ等シク高サモ大圓ノ半徑ニ等シキ梯形ノ面積トハ何レガ大ナルカ. (海兵)

(c) (i) 面積ガ 400 平方寸ナル球ノ直徑如何. (海機)

(ii) 徑 1 尺 2 寸ノ球ノ全面ニ 4 寸平方ノ金箔ヲ張リ詰メントス、約何枚ノ金箔ヲ要スルカ.

(iii) 半徑 12 米及ビ 5 米ナル二球ノ面積ノ和或ハ差ニ等シキ面積ヲ有スル球ノ半徑ヲ求メヨ.

(d) (i) 體積ガ 100 立方尺ナル球ノ直徑及ビ面積ヲ求メヨ.

(ii) 鐵ノ比重ガ 7.8 ナラバ重サ一貫ノ鐵球ノ徑如何.

(iii) 地球ノ赤道ニ於ケル周ヲ 4 萬軒トシテ、地球ノ表面積及ビ體積ヲ概算セヨ.

(iv) 半徑 5 寸及ビ 3 寸ナル二ツノ鉛球彈ヲ熔シテ一球彈ニ改造スルトキハ、其半徑ハ幾何トナルカ.

(v) 外半徑 5 寸、内半徑 3 寸ナル中空球ノ體積幾何.

(c) 球ノ半徑四尺ニシテ球帶ノ高サ二尺五寸ナルトキハ、其球帶ノ曲面幾何. 但シ $\pi=2.1416$ トス. (仙醫)

[略解] 球ノ半徑ヲ r トシ、又 明言セザル $\pi=\frac{22}{7}$ トス.

(a) 小圓ノ半徑 $=\sqrt{\frac{3}{\pi}}$, \therefore 所要ノ距離 $=\sqrt{2^2-\frac{3}{\pi}}=1.75$ (尺) 弱.

(b) 此小圓ノ徑ハ球心ニ於テ $4R \times \frac{2}{12}$ 即チ $\frac{2}{3}R$ ニ對スルユエ球半徑ニ等シ.

\therefore 小圓ノ面積 $=\pi \left(\frac{1}{2}r\right)^2 = \frac{1}{4}\pi r^2$. 又 梯形ノ面積 $=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}r+r\right)r = \frac{3}{4}r^2$.

然ルニ $\pi > 3$ ナルユエ 小圓ノ面積ノ方ガ大ナリ.

(c) (i) 面積 $400=4 \times \frac{22}{7} r^2$, $\therefore 2r = \sqrt{400 \times \frac{7}{22}} = 5.21$ (寸) 強.

(ii) 球ノ表面積 $=4 \times \frac{22}{7} \times \left(\frac{12}{2}\right)^2$ 平方寸, 金箔一枚ノ面積 $=4^2$ 平方寸.

\therefore 所要ノ枚數 $=4 \times \frac{22}{7} \times 36 \div 16 = 28.28$ 即チ 約 28 枚 3 分.

(iii) $4\pi \cdot 12^2 + 4\pi \cdot 5^2 = 4\pi r^2$ $\Rightarrow r = 13$ (米).

又 $4\pi \cdot 12^2 - 4\pi \cdot 5^2 = 4\pi r^2$ $\Rightarrow r = 10.91$ (米) 弱.

(d) (i) 體積 $100 = \frac{4}{3}\pi r^3$, \therefore 直徑 $2r = \sqrt[3]{\frac{100 \times 3 \times 7}{22}} = 5.76$ (尺) 弱.

又 面積 $4\pi r^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times 5.76^2 = 104.2$ (平方尺) 餘.

(ii) 1 貫 $= 3750$ 瓦, 1 立方匁 $= 1$ 瓦 ナルヲ以テ, $\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{3750}{7.8}$ 立方匁,
 $\therefore r = \sqrt[3]{\frac{3750}{7.8} \times \frac{3}{4} \times \frac{7}{22}} = 9.71$ (匁) $= 32.04$ (分) 答 3 寸 2 分 餘.

(iii) $2\pi r = 4$ ナルユエ $r = \frac{2}{\pi}$ ナリ.

\therefore 地球ノ表面積 $= 4\pi \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 = \frac{16}{\pi} = \frac{16 \times 7}{22} = 5.0$ 約 5 億平方軒.

又 地球ノ體積 $= \frac{4}{3}\pi \left(\frac{2}{\pi}\right)^3 = \frac{32}{3\pi^2} = \frac{32 \times 7^2}{3 \times 22^2} = 1.08$ 約 1 億立方軒.

(iv) $\frac{4}{3}\pi(5^3+3^3) = \frac{4}{3}\pi r^3$, $\therefore r = \sqrt[3]{152} = 5.33$ (寸) 弱.

(v) $\frac{4}{3}\pi(5^3-3^3) = \frac{4}{3}\pi r^3$, $\therefore r = \sqrt[3]{98} = 4.61$ (寸) 餘.

(c) 126 頁 (9) ノ系ニ依テ 球帶ノ曲面幾何 $= 2 \times 4 \times 3.1416 \times 2.5 = 62.83$ (平方寸) 餘.

13. (a) 直徑四尺深サ六間ナル井戸ヲ掘リ此土ヲ以テ直徑二間四尺ノ圓錐形ノ山ヲ築カントス. 山ノ高サ幾何.

(b) 直徑四寸ノ球ヲ一邊六寸ノ正三角形ノ三邊ニテ支フルトキハ、三角形ノ面ヨリ球ノ最高點マデノ距離幾何. (大工)

(c) 直徑 6 匁、高サ 28 匁ノ直圓壺ノ兩端ニ同ジ直徑ノ半球ヲ附シタル立體アリ. 此體ト等積ナル球ノ直徑幾何. (小商)

(d) (i) 直圓錐ノ底周ハ 32 尺ニシテ其體積ハ半徑 5 尺ノ球ノ體積ニ等シ、此圓錐ノ高ヲ求メヨ。(海機)

(ii) 半徑 8 尺ナル球ト體積ハ相等シクシテ底面ノ半徑ガ 7 尺ナル直圓錐ノ高サ幾何。(海兵)

(iii) 直徑六米ナル球ノ體積ト底ノ直徑六米、高サ四米ナル直圓錐ノ體積トノ比ヲ求メヨ。(陸士)

(iv) 底面ノ半徑 5 寸、高サ 1 尺 2 寸ノ直圓錐ニ内切スル球ノ面積及ビ體積ヲ求メヨ。(熊工)

[解] 斷リナキ $\pi \times \frac{22}{7}$ トス。

(a) 井戸ハ直圓錐ニシテ、其體積 $= \pi r^2 h$
 又 築山ハ直圓錐ニシテ、其體積 $= \frac{1}{3} \pi r^2 h$ } 但シ r ハ底半徑、 h ハ高サナリ。

故ニ 築山ノ高サチ x 尺トセバ、此山ハ井戸ノ土ヲ以テ築クニエ

$$\frac{1}{3} \pi \times \left(\frac{2 \times 6 + 4}{2} \right)^2 \times x \text{ 立方尺} = \pi \times \left(\frac{4}{2} \right)^2 \times 6 \times 6 \text{ 立方尺, 答 1 間 1 尺弱.}$$

(b) 球 O ハ正三角形 ABC ノ内切圓ノ切點ニ於テ此三角形ニ交ル、今其内切圓ノ中心ヲ D トモバ $DO \perp \triangle ABC$. BC ノ中點ヲ E トセバ

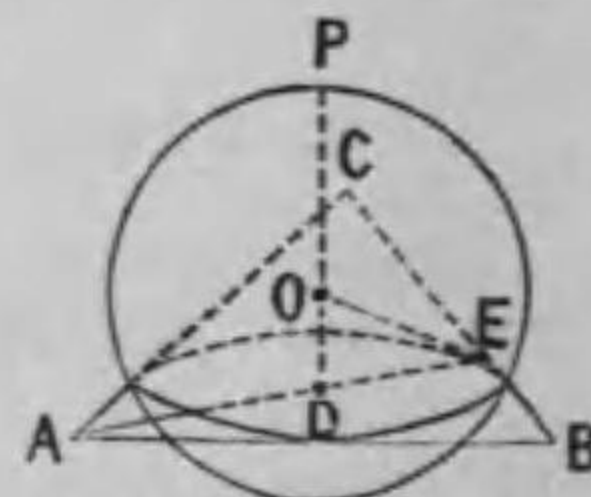
OE ハ球半徑、 DE ハ内切圓半徑、 ADE ハ一直線ナリ。

$$\therefore AE = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}, DE = \frac{1}{3} AE = \sqrt{3}.$$

故ニ $OD = \sqrt{OE^2 - DE^2} = \sqrt{2^2 - (\sqrt{3})^2} = 1$. 依テ

DO ノ引長ト球面トノ交點ヲ P トセバ

所要ノ距離 $PD = PO + OD = 2 + 1 = 3$ (寸).



(c) 所要ノ球ノ直徑ヲ d トセバ $\frac{1}{6} \pi d^3 = \pi \cdot \left(\frac{6}{2} \right)^2 \times 28 + \frac{4}{3} \pi \cdot \left(\frac{6}{2} \right)^3$

$$\therefore d^3 = (9 \times 28 + \frac{4}{3} \times 27) \times 6 = 27 \times (56 + 8) = 3^3 \times 4^3, \therefore d = 12 \text{ (寸).}$$

(d) (i) 直圓錐ノ底半徑ヲ r 尺、高サヲ h 尺トセバ $2\pi r = 32$ ヨリ $r = \frac{16}{\pi}$ 寸得。

故ニ $\pi \cdot \left(\frac{16}{\pi} \right)^2 h = \frac{4}{3} \pi \times 5^3, \therefore h = \frac{4}{3} \times 125 \times \frac{3.1416^2}{16^2} = 19.27$ (尺) 餘。

(ii) 同上 答 41.8 尺弱。

(iii) 所要ノ體積ノ比 $= \frac{1}{6} \pi \cdot 6^3 : \frac{1}{3} \pi \cdot \left(\frac{6}{2} \right)^2 \times 4$ 即チ 36 : 12 即チ 3 : 1.

(iv) 直圓錐 (A-BC) ノ高サ AD ヲ含ム平面ニテノ截リ口ヲ $\triangle ABC$ トセバ、之ニ内切スル圓 O ハ直圓錐ノ内切球ノ截リ口ニシテ其切點ヲ D, E, F トセバ OD, OE, OF ハ球ノ半徑ナリ。

而シテ 等角ナル直 $\triangle AOE \sim$ 直 $\triangle ACD$ ナルニエ

$$AO : OE = AC : CD$$

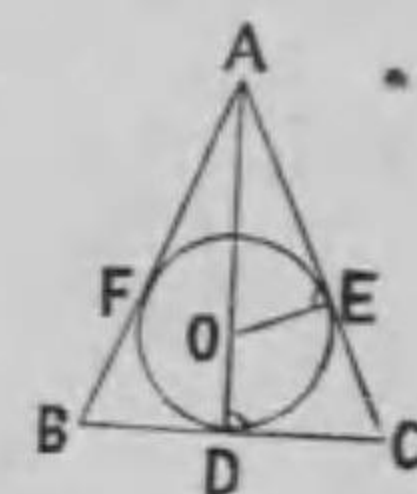
即チ $12 : OE = OE = \sqrt{12^2 + 5^2} : 5$

故ニ $12 : OE = 13 : 5 : 5$

$$\therefore OE = \frac{12 \times 5}{13} = \frac{10}{3} \text{ (寸).}$$

\therefore 所要ノ球ノ面積 $= 4\pi \cdot \left(\frac{10}{3} \right)^2 = 4 \times 3.14159 \times \frac{100}{9} = 139.63$ (平方寸) 弱。

又 所要ノ球ノ體積 $= \frac{4}{3} \pi \cdot \left(\frac{10}{3} \right)^3 = \frac{4}{3} \times 3.14159 \times \frac{1000}{27} = 155.14$ (立方寸) 強。



14. (a) (i) 邊 AB ヲ軸トシテ矩形 $ABCD$ ヲ一廻轉シテ生ズル體ノ體積ト對角線 AC ヲ軸トシテ三角形 ABC ヲ一廻轉シテ生ズル體ノ體積トノ比ヲ求メヨ、但シ AB ハ 3 尺、 BC ハ 5 尺トス。(名工)

(ii) 面積 a^2 ナル矩形ノ相隣レル二邊ヲ軸トシテ夫々之ヲ一廻轉シテ生ズル二ツノ直圓錐ノ體積ノ差ガ、半徑 $\frac{a}{2}$ ナル球ノ體積ノ 3 倍ニ等シキトキハ、矩形ノ二邊幾何。(海機)

(b) (i) 直三角形ノ直角ヲ夾ム二邊ガ七寸及ビ二尺四寸ナルトキ、斜邊ヲ軸トシテ元形ヲ一回旋轉シテ生ズル體ノ體積ヲ求メヨ。(陸士)

(ii) 邊ノ比 3 : 4 : 5 ナル直三角形ノ各邊ヲ夫々軸トシテ廻轉セシメテ生ズル立體ノ體積ヲ比較セヨ。(仙工)

(c) (i) 直三角形ノ直角ニ隣レル二邊ハ夫々四尺及ビ五尺ナリ、斜邊ヲ軸トシテ此三角形ヲ一廻轉スルトキ生ズル立體ノ體積及ビ此立體ニ内切スル球ノ體積ヲ計算セヨ。(東工)

(ii) 三角形 ABC ニ於テ BC ハ 18 寸、CA ハ 15 寸、AB ハ 12 寸ナルトキ、邊 BC 上ニ中心ヲ有シ且ツ他ノ二邊ニ切スル様ニ半圓ヲ内切セシメ、BC ヲ軸トシテ此半圓ヲ一廻轉シタル體ノ面積及ビ體積ヲ求メヨ。次ニ此體積ニ等シキ容量ヲ升ニテ表ハセ。(陸士)

[解] (a) (i) AB ヲ軸トシタル廻轉體ハ直圓錐ニシテ、其體積 $V = \pi \cdot BC^2 \cdot AB$

又 AC ヲ軸トシタル廻轉體ハ AC へノ垂線 BE

ヲ底トスル二ツノ直圓錐ノ和ニシテ、

$$\text{其體積 } V' = \frac{1}{3}\pi \cdot BE^2 \cdot AE + \frac{1}{3}\pi \cdot BE^2 \cdot EC$$

$$= \frac{1}{3}\pi \cdot BE^2 (AE + EC) = \frac{1}{3}\pi \cdot BE^2 \cdot AC$$

$$\therefore V : V' = \pi \cdot BC^2 \cdot AB : \frac{1}{3}\pi \cdot BE^2 \cdot AC = BC : \frac{1}{3}BE \quad [BC \cdot AB = \frac{1}{2}\Delta ABC = BE \cdot AC]$$

$$= 3BC : \frac{AB \cdot BC}{AC} = 3AC : AB = 3\sqrt{3^2 + 5^2} : 3 = \sqrt{34} : 1$$

(ii) 矩形ノ二邊ヲ x, y トスレバ $xy = a^2 \dots\dots(1)$

又二邊ヲ軸トシテ夫々一廻轉シテ生ズル二ツノ直圓錐ノ體積ハ夫々 $\pi x^2 y, \pi y^2 x$ ナリ。

$$\text{故ニ } x > y \text{ トセバ } \pi x^2 y - \pi y^2 x = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{a}{2}\right)^3 \times 3 \text{ 即チ } xy(x-y) = \frac{1}{2}a^3 \dots\dots(2)$$

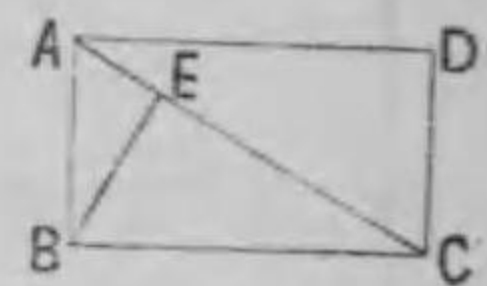
此 (1) ヲ (2) ニ代入スレバ $x-y = \frac{1}{2}a \dots\dots(3)$

(1), (3) ヲ解キ正根ノミヲ取リテ $x = \frac{\sqrt{17}+1}{4}a, y = \frac{\sqrt{17}-1}{4}a$

(b) (i) 118 頁上圖ヲ用フ。BC = $\sqrt{7^2 + 24^2} = 25$, $AD \times 25 = \frac{1}{2}\Delta ABC = 7 \times 24$

ナルユエ AD = 6.72 (寸)。故ニ 117 頁ノ 4 題ノ (a) ト同様ニ

$$\text{所要ノ體積} = \frac{1}{3}\pi \cdot AD^2 \cdot BC = \frac{1}{3} \times 3.1416 \times (6.72)^2 \times 25 = 118.25 \text{ (立方寸) 弱}$$



(ii) 117 頁ノ 4 題 (a) ト同様ニ

$$\text{所要ノ體積ノ比} = \frac{1}{3}\pi \cdot AC^2 \cdot AB : \frac{1}{3}\pi \cdot AB^2 \cdot AC : \frac{1}{3}\pi \cdot AD^2 \cdot BC$$

$$= AC^2 \cdot AB : AB^2 \cdot AC : \frac{AB \cdot AC}{BC} \quad [AD \cdot BC = \frac{1}{2}\Delta ABC = AB \cdot AC]$$

$$= AC \cdot BC : AB : 1 = 4 \times 5 : 3 : 1$$

$$= 20 : 3 : 1$$

(c) (i) ノ廻轉體ノ體積ハ (b) (i) ト全ク同様ナリ

答 65.42 立方尺。

次ニ斜邊 BC 上ニ中心 O ヲ有シ AB, AC ニ

E, F ニ於テ切スル圓ヲ畫キ、之レヲ BC ヲ軸ト

シテ一廻轉スルトキハ内切球ヲ得テ OE, OF

ハ其半徑ナルコト明カナリ。而シテ

$$\Delta AOB + \Delta AOC = \Delta ABC$$

$$\text{即チ } \frac{1}{2}AB \cdot OE + \frac{1}{2}AC \cdot OF = \frac{1}{2}AB \cdot AC, \text{ 依テ } AB=4, AC=5 \text{ トセバ } OE=OF \text{ ナル}$$

$$\text{ユエ } OE=OF = \frac{20}{9}$$

$$\therefore \text{内切球ノ體積} = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{20}{9}\right)^3 = 45.97 \text{ (立方尺)}$$

(ii) 上圖ヲ任意ノ三角形トシテ用フ。

$$2s = a + b + c = 18 + 15 + 12 \text{ ナルユエ } s = 22.5$$

$$\text{故ニ } \Delta ABC = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{22.5 \times 4.5 \times 7.5 \times 10.5}$$

$$= \sqrt{5 \times 4.5 \times 4.5 \times 5 \times 1.5 \times 7 \times 1.5} = 5 \times 4.5 \times 1.5 \times \sqrt{7}$$

$$\text{又圓心ヲ O トシ、半徑ヲ } r \text{ トセバ } \Delta ABC = ABO + \Delta ACO = \frac{1}{2}r(12+15) = 13.5r$$

$$\text{故ニ } 5 \times 4.5 \times 1.5 \times \sqrt{7} = 13.5r, \therefore r = 2.5 \times \sqrt{7} \text{ (寸)}$$

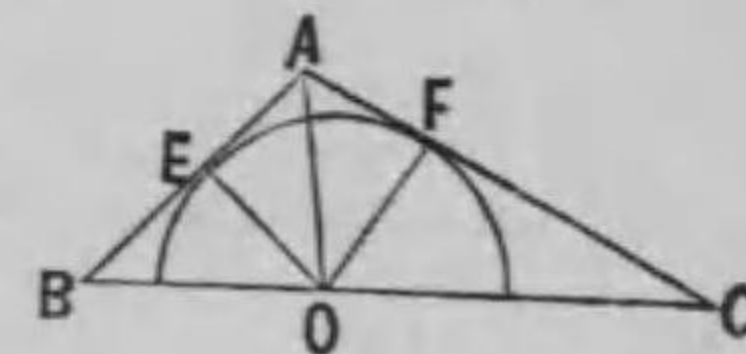
$$\therefore \text{所要ノ球ノ面積} = 4\pi \cdot (2.5 \times \sqrt{7})^2 = 175 \times 3.14159$$

$$= 549.77 \dots\dots \text{(平方寸)}$$

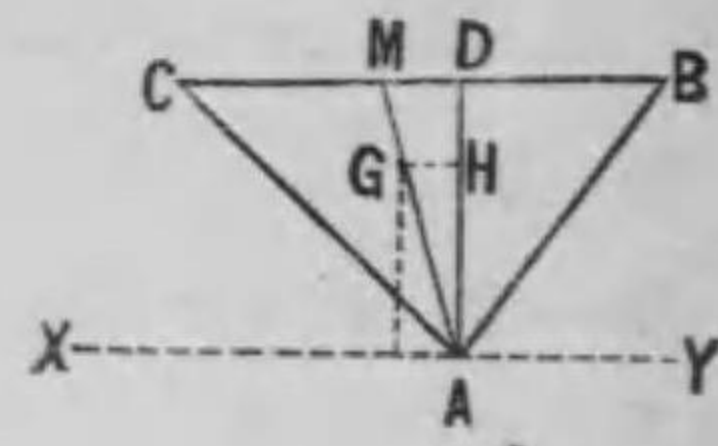
$$\text{又 所要ノ球ノ體積} = \frac{4}{3}\pi \cdot (2.5 \times \sqrt{7})^3 = \frac{875}{6} \times 3.141592 \dots\dots \times 2.645751 \dots\dots$$

$$= 1212.1 \dots\dots \text{(立方寸)}$$

此 體積ヲ升ニ直セバ $1212.1 \dots\dots \div 64.837 = 18.69 \dots\dots$ 即チ 18.7 升弱。



15. 右圖ニ於テ AB=10 寸, BC=21 寸, CA=17 寸トス. 今 A ヲ通ジテ BC ニ平行ナル直線 XY ヲ軸トシテ $\triangle ABC$ ノ平面ヲ一廻轉スルトキ, 次ノ各々ヲ計算セヨ.



- (a) $\triangle ABC$ ノ作ル廻轉體ノ體積.
- (b) $\triangle ABC$ ノ重心ノ畫ク徑路ト $\triangle ABC$ ノ面積トノ乘積. (大工)

[解] $AD \perp BC$ トセバ $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot BC \cdot CD$ 即チ $10^2 = 17^2 + 21^2 - 2 \times 21 \times CD$
 $\therefore CD = 15$. 從テ直 $\triangle ACD$ ニ於テ $AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8$.

(a) AB ヲ軸トシタル $\triangle ABC$ ノ體積 V ハ, BC ヲ母線トシタル直圓錐ヨリ AC 及ビ AB ヲ斜高トシタル二ツノ直圓錐ヲ減ジタルモノニシテ, 其底半徑ハ何レモ AD ニ等シ.

$$\therefore V = \pi \cdot AD^2 \cdot BC - \frac{1}{3} \pi \cdot AD \cdot BC = \frac{2}{3} \pi \cdot AD^2 \cdot BC = \frac{2}{3} \times 3.1416 \times 8^2 \times 21 = 2814.87 \dots \dots (\text{立方寸})$$

(b) BC ノ中點ヲ M トシ, 重心ヲ G トシ, $GH \parallel BC$ トセバ $\triangle AHG \sim \triangle ADM$ ナルユエ $AH : AD = AG : AM = \frac{2}{3} AM : AM = \frac{2}{3} : 1$, $\therefore AH = \frac{2}{3} AD$.

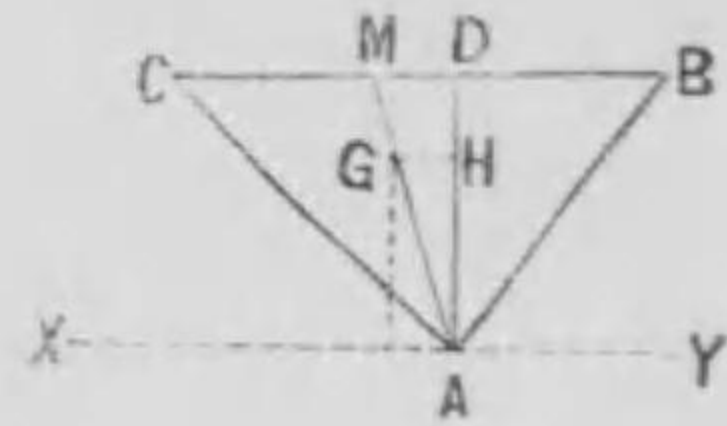
而シテ $GH \parallel XY$ ナルユエ G ノ畫ク徑路ハ H ノ畫ク徑路ニ等シクシテ $\pi \cdot AH^2$ ナリ,
 又 $\triangle ABC = \frac{1}{2} BC \cdot AD$. \therefore 所要ノ乘積 $= \pi \cdot AH^2 \times \frac{1}{2} BC \cdot AD = \frac{2}{3} \pi \cdot AD^3 \cdot BC$
 之レ $\triangle ABC$ ノ作レル廻轉體ト同一ナリ.

— { 立體幾何不可思議ノ諸問題 } —

平面三角法ノ部 目次

<p>第一編</p> <p>第一章 一般角ノ三角函數 恒等式ノ證明法…………… 6 三角函數ノ一ヲ知リテ他ヲ求ムル法…………… 14 特別角ノ三角函數 (30°, 45°, 60°ノ値ノ記憶法)…………… 16</p> <p>第二章 一般角ノ面積 其符號及ビ値ノ變化…………… 17 負角, 餘角, 補角ノ三角函數…………… 20 大角ノ三角函數ヲ小角ノ三角函數ニ變ズル法…………… 22</p> <p>第二編</p> <p>第一章 二角ノ和, 差ノ三角函數…………… 29 第二章 倍角ノ三角函數…………… 36 第三章 半角ノ三角函數…………… 45 第四章 和差ト積ノ關係…………… 49 和, 差ヲ積ニ變ズル法, 此逆…………… 49 第五章 特別角ノ面積 (15°, 18°, 22.5°, 36° 及ビ此等ノ餘角)…………… 60 條件附キ問題…………… 64</p>	<p>第三編</p> <p>第一章 三角形ノ角ノ關係…………… 67 第二章 三角形ノ邊ト角トノ關係…………… 75 第三章 三角形ノ面積, 外切圓, 內切圓, 切切圓ノ半径…………… 89 三角形ノ高ヲ, 中線, 角ノ二等分線…………… 90 凸四邊形ノ面積…………… 94 正多角形ノ面積…………… 95</p> <p>第四編</p> <p>第一章 三角形ノ解決…………… 96 第二章 高サ及ビ距離ノ簡易測量…………… 108 一般測量…………… 109 立體幾何ニ關スル問題…………… 119</p> <p>第五編</p> <p>第一章 三角方程式 三角方程式ノ解法…………… 134 餘函數方程式…………… 140 無限級ノ方程式…………… 142 聯立三角方程式…………… 145</p> <p>第二章 消去法…………… 148</p>
--	--

15. 右圖ニ於テ AB=10 寸, BC=21 寸, CA=17 寸トス. 今 A
ヲ通ジテ BCニ平行ナル直線 XYノ軸
トシテ△ABCノ平面ヲ一廻轉スルトキ,
次ノ各々ノ計算セヨ



- (a) △ABCノ作ル廻轉體ノ體積.
 (b) △ABCノ重心ノ畫ク徑路ト△ABCノ面積トノ乘積. (大E)
 解) $AD \perp BC$ トセヨ. $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC \cdot CD$ 即チ $10^2 = 17^2 + 21^2 - 2 \times 21 \times CD$
 ∴ $CD = 16$. 從テ直△ACDニ於テ $AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = \sqrt{17^2 - 16^2} = 8$.
 (a) ABヲ軸トシテ△ABCノ體積 V ニ, BCヲ母線トシテタル直圓錐ヨリ AC
 及ビ ABヲ斜高トシテタル直圓錐ヲ減シテ得ルニ等シ, 且底半徑ノ何レモ AD
 ニ等シ.
 ∴ $V = \frac{1}{3} \pi AD^2 \cdot BC = \frac{1}{3} \pi \cdot 8^2 \cdot 21 = \frac{224}{3} \pi \approx 2814.87$ (立方寸).
 (b) BCノ中點トシテ Mトシ, 重心トシテ Gトシ, GH/BCトセヨ. △AHG ∽ △ADMトシテ
 又 $AH : AD = AG : AM = \frac{2}{3} AM : AM = \frac{2}{3}$ ∴ $AH = \frac{2}{3} AD$.
 而シテ GH/XYトセヨ. Gノ畫ク徑路ハ Hノ畫ク徑路ニ等シトシテ $\pi \cdot AH^2 \cdot \pi$,
 又 △ABC = $\frac{1}{2} BC \cdot AD$ ∴ 所要ノ乘積 = $\pi \cdot AH^2 \times \frac{1}{2} BC \cdot AD = \frac{2}{3} \pi \cdot AD^3 \cdot BC$
 之レハ△ABCノ作ル廻轉體ト同一ナリ.

平面三角法ノ部 目次

第一編		第三編	
緒論.....	1	第一章 三角形ノ角ノ關係.....	67
第一章 銳角ノ三角函數 恒等式ノ證明法.....	6	第二章 三角形ノ邊ト角トノ關係.....	75
三角函數ノ一ヲ知リテ他ヲ 求ムル法.....	14	第三章 三角形ノ面積, 外接圓, 内切圓, 傍切圓ノ半 徑.....	89
特別角ノ三角函數(30°, 45°, 60°ノ値ノ記憶法).....	16	三角形ノ高サ, 中線, 角ノ二 等分線.....	90
第二章 一般角ノ函數 其符號及ビ値ノ變化.....	17	凸四邊形ノ面積.....	94
負角, 餘角, 補角ノ三角函數 大角ノ三角函數ヲ小角ノ三 角函數ニ變ズル法.....	22	正多角形ノ面積.....	95
第二編		第四編	
第一章 二角ノ和, 差ノ 三角函數.....	29	第一章 三角形ノ解法...	96
第二章 倍角ノ三角函數 二倍角, 三倍角.....	36	第二章 高サ及ビ距離ノ 簡易測量.....	108
第三章 半角ノ三角函數	45	一般測量.....	109
第四章 和差ト積ノ關係 和, 差ヲ積ニ變ズル法, 此逆	49	立體幾何ニ關スル問題.....	119
第五章 特別角ノ函數 (15°, 18°, 22.5°, 36° 及ビ此 等ノ餘角).....	60	第五編	
條件附キ問題.....	64	第一章 三角方程式 三角方程式ノ解法.....	134
		餘函數方程式.....	140
		制限附キ方程式.....	142
		聯立三角方程式.....	145
		第二章 消去法.....	148

平面三角法 公式集

主ナル公式集

注意 次ノ公式ハ常ニ熟知スルヲ要ス。其他ハ自修ノ際ニ成ルベク多ク暗誦セヨ

$\sin A \operatorname{cosec} A = 1$ $\cos A \operatorname{sec} A = 1$ $\tan A \operatorname{cot} A = 1$	$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$ $\cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$	$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ $1 + \tan^2 A = \sec^2 A$ $1 + \cot^2 A = \operatorname{cosec}^2 A$
$\begin{array}{l} \sin(2n \cdot 180^\circ + A) = \sin A \\ \cos(2n \cdot 180^\circ + A) = \cos A \end{array}$		
$\begin{array}{l} \sin(-A) = -\sin A \\ \cos(-A) = \cos A \\ \sin(180^\circ - A) = \sin A, \cos(180^\circ - A) = -\cos A \end{array}$		
$\begin{array}{l} \sin(90^\circ - A) = \cos A \\ \cos(90^\circ - A) = \sin A \end{array}$		
$\begin{array}{l} \sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B \\ \cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B \end{array}$		
$\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$		
$\begin{array}{l} \sin 2A = 2 \sin A \cos A \\ \cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A \\ \quad = 1 - 2 \sin^2 A \\ \quad = 2 \cos^2 A - 1 \end{array}$		
$\tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$		
$\begin{array}{l} \sin 3A = 3 \sin A - 4 \sin^3 A \\ \cos 3A = 4 \cos^3 A - 3 \cos A \end{array}$		
$\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{1 - \cos A}{2}, \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{1 + \cos A}{2}$		
$\sin(A+B) + \sin(A-B) = 2 \sin A \cos B$	$\sin S + \sin D = 2 \sin \frac{S+D}{2} \cos \frac{S-D}{2}$	
$\sin(A+B) - \sin(A-B) = 2 \cos A \sin B$	$\sin S - \sin D = 2 \cos \frac{S+D}{2} \sin \frac{S-D}{2}$	
$\cos(A+B) + \cos(A-B) = 2 \cos A \cos B$	$\cos S + \cos D = 2 \cos \frac{S+D}{2} \cos \frac{S-D}{2}$	
$\cos(A+B) - \cos(A-B) = -2 \sin A \sin B$	$\cos S - \cos D = -2 \sin \frac{S+D}{2} \sin \frac{S-D}{2}$	
$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}, \quad a = b \cos C + c \cos B, \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$		
$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan \frac{1}{2}(A-B)}{\tan \frac{1}{2}(A+B)}, \quad \sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}, \quad \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$		
$S = \frac{1}{2} bc \sin A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{b}{2 \sin B} = \frac{c}{2 \sin C} = \frac{abc}{4S}$		
$\sin \theta = a \text{ ノ解ハ } \theta = n\pi + (-1)^n a, \quad \cos \theta = a \text{ ノ解ハ } \theta = 2n\pi \pm a,$		
$\tan \theta = a \text{ ノ解ハ } \theta = n\pi + a. \text{ 但シ } a \text{ ハ最小角ナリ。}$		

平面三角法ノ部

第 一 章 緒 論

1. 三角法 トハ角ノ三角函數ト稱スルモノ、性質及セ關係ヲ代數學的ニ研究シ、兼テ之ガ應用ヲ講ズルモノナリ。
 注意 三角法ハ平面及ビ球面ニ就テ論ズルニ從ヒ、平面三角法及ビ球面三角法ト云フ。
2. 測角法 角ヲ測ルニ直角ヲ單位トスレドモ之ヨリモ小ナル角ヲ測ル爲メニ六十分法ヲ用フ、其組織ハ次ノ如シ。
 1 直角ヲ 90 等分シ其一部ヲ一度ト稱シ、符號 ° ヲ用ヒ。
 1 度ヲ 60 等分シ其一部ヲ一分ト稱シ、符號 ' ヲ用ヒ。
 1 分ヲ 60 等分シ其一部ヲ一秒ト稱シ、符號 " ヲ用フ。
 例ハ 37 度 42 分 25.8 秒ニ 37° 42' 25.8" 記スル如シ。
 注意 此法ハ星學、航海、測量等ニ如キ實地ニ計算ニ用ル。
3. 角ノ單位ノ變更 或ル角ヲ直角單位或ハ六十分法ノ何レカ一法ニテ表示サル、トキハ、之ヲ他ニ換算スルコトヲ得ベシ。
 例 (1) 1.234 直角ヲ六十分法ニテ示セ。 答 111° 36'。
 解 1.234R = 90° × $\frac{1234}{1000} = 111^\circ \frac{6}{100} = 111^\circ \frac{6}{100} \times \frac{60}{100} = 111^\circ \frac{36}{100} = 111^\circ 36'$
 例 (2) 205° 36' 17" ヲ直角單位ニテ表ハセ。 答 2.285 直角。
 解 205° 36' 17" = $\frac{205 \times 60 \times 60 + 36 \times 60 + 17}{90 \times 60 \times 60}$ 直角 = 2.285 直角。

問題 及 ビ 解答

1. (a) 正 n 邊形ノ一邊ガ其外接圓ノ周上ノ一點ニ對スル角ハ幾度ナルカ。 答 180/n。

主ナル公式集

注意 次ノ公式ハ第一象限ノ角ニ於テ成立ス 其類ノ角ノ際ニ成レバ多ク經過セ

$$\begin{array}{l} \sin A \csc A = 1 \\ \cos A \sec A = 1 \\ \tan A \cot A = 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \tan A = \frac{\sin A}{\cos A} \\ \cot A = \frac{\cos A}{\sin A} \end{array} \quad \begin{array}{l} \sin^2 A + \cos^2 A = 1 \\ 1 + \tan^2 A = \sec^2 A \\ 1 + \cot^2 A = \csc^2 A \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \sin(2\pi, 180^\circ + A) = \sin A \\ \cos(2\pi, 180^\circ + A) = \cos A \\ \sin(180^\circ - A) = \sin A \\ \cos(180^\circ - A) = -\cos A \end{array} \quad \begin{array}{l} \sin(-A) = -\sin A \\ \cos(-A) = \cos A \\ \sin(90^\circ - A) = \cos A \\ \cos(90^\circ - A) = \sin A \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B \\ \cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B \\ \sin 2A = 2 \sin A \cos A \\ \cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A \\ = 1 - 2 \sin^2 A \\ = 2 \cos^2 A - 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B} \\ \tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A} \\ \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{1 - \cos A}{2} \\ \cos^2 \frac{A}{2} = \frac{1 + \cos A}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \sin(A+B) + \sin(A-B) = 2 \sin A \cos B \\ \sin(A+B) - \sin(A-B) = 2 \cos A \sin B \\ \cos(A+B) + \cos(A-B) = 2 \cos A \cos B \\ \cos(A+B) - \cos(A-B) = -2 \sin A \sin B \end{array} \quad \begin{array}{l} \sin S + \sin D = 2 \sin \frac{S+D}{2} \cos \frac{S-D}{2} \\ \sin S - \sin D = 2 \cos \frac{S+D}{2} \sin \frac{S-D}{2} \\ \cos S + \cos D = 2 \cos \frac{S+D}{2} \cos \frac{S-D}{2} \\ \cos S - \cos D = -2 \sin \frac{S+D}{2} \sin \frac{S-D}{2} \end{array}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}, \quad a = b \cos C + c \cos B, \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan \frac{1}{2}(A-B)}{\tan \frac{1}{2}(A+B)}, \quad \sin \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}, \quad \cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad R = \frac{abc}{2 \sin A} = \frac{b}{2 \sin B} = \frac{c}{2 \sin C}$$

$\sin \theta = a$ ノ解ハ $\theta = \arcsin a + (-1)^n \pi$, $\cos \theta = a$ ノ解ハ $\theta = 2\pi \pm \arccos a$
 $\tan \theta = a$ ノ解ハ $\theta = \arctan a + n\pi$ 但シ α ハ最小角ナリ

平面三角法ノ部

第一編 緒論

1. 三角法 トハ角ノ三角函數ト稱スルモノ、性質及ビ關係ヲ代數學的ニ研究シ、兼テ之ガ應用ヲ講ズルモノナリ。

注意 三角法ハ平面及ビ球面ニ就テ論ズルニ從ヒ、平面三角法及ビ球面三角法ト云フ。

2. 測角法 角ヲ測ルニハ直角ヲ單位トスレドモ之ヨリモ小ナル角ヲ測ル爲メニ六十分法ヲ用フ、其組織ハ次ノ如シ、

1 直角ヲ 90 等分シ其一部ヲ一度ト稱シ、符號 ° ヲ用ヒ、

1 度ヲ 60 等分シ其一部ヲ一分ト稱シ、符號 ' ヲ用ヒ、

1 分ヲ 60 等分シ其一部ヲ一秒ト稱シ、符號 '' ヲ用フ。

例ヘバ 37 度 42 分 25.8 秒ハ 37°42'25.8'' ト記スガ如シ。

注意 此法ハ星學、航海、測量等ノ如キ實地ノ計算ニ用ヒラル。

3. 角ノ單位ノ變更 或ル角ヲ直角單位或ハ六十分法ノ何レカ一法ニテ表示サル、トキハ、之ヲ他ニ換算スルコトヲ得ベシ。

例 (1) 1.234 直角ヲ六十分法ニテ示セ。 答 111°3'36''。

[解] $1.234R = 90^\circ \times \frac{1234}{1000} = 111^\circ \frac{6}{100}, 60' \times \frac{6}{100} = 3' \frac{60}{100}, 60'' \times \frac{60}{100} = 36''$

例 (2) 205°36'17'' ヲ直角單位ニテ表ハセ。 答 2.285 直角。

[解] $205^\circ 36' 17'' = \frac{205 \times 60 \times 60 + 36 \times 60 + 17}{90 \times 60 \times 60}$ 直角 = 2.2845 ... 直角。

問題及ビ解答

1. (a) 正 n 邊形ノ一邊ガ其外接圓ノ周上ノ一點ニ對スル角ハ幾度ナルカ。 答 $180^\circ/n$ 。

(b) 正七角形及正十三角形ノ一角ハ夫々何度ナリヤ.

答 $128^{\circ}34'17''\frac{1}{7}$, $152^{\circ}18'27''\frac{9}{13}$.

(c) 正多角形ノ一外角ガ六十度ナラバ, 其邊數幾何. 答 六.

[略解] (b), (c) 正 n 邊形ノ一内角 = $\frac{(n-2) \cdot 2R}{n} = \frac{(n-2) \cdot 180^{\circ}}{n}$ = 依ル.

2. 半徑ト等長ナル弧ニ對スル圓心角ヲ六十分法ニテ表ハセ.

[解] 圓ノ半徑ヲ r トシ, 所要ノ角ノ度數ヲ x トセバ

圓心角ハ其對弧ニ比例ス [∵ 平幾] ルヲ以テ

$360^{\circ} : x = 2\pi : r \quad \therefore x = \frac{360^{\circ} \cdot r}{2r\pi} = \frac{180^{\circ}}{\pi} \cdot \frac{180^{\circ}}{3.1416} = 57^{\circ}17'44''\cdot 8$

3. 二時三十四分五十六秒ノ時刻ニ於ケル時計ノ長短兩針ノ交角ヲ六十分法ニテ表ハセ.

[解] 長針ト短針トノ速サノ比ハ 60 : 5 = 12 : 1 ナルヲ以テ,

兩針間ノ時限 = $34^m56^s - (5^m \times 2 + 34^m56^s \times \frac{1}{12}) = \frac{991^m}{45}$

然ルニ 60^m = 對應スル角ハ 360^o ナルヲ以テ,

所要ノ度數 = $\frac{991}{45} \times \frac{360^{\circ}}{60} = 132^{\circ} \frac{2}{15} = 132^{\circ}8'$.

4. (a) 三角形ノ三ツノ角ヲ夫々 1^o, 100^o, 10000^o ナル單位ニテ測リタル數値ガ 2 : 1 : 3 ナラバ, 各角ノ度數幾何.

(b) 三角形ノ各角ヲ順次ニ單位トシテ他ノ二角ノ和ヲ度リシ數値ガ等差級數ヲナストキハ, 元形ノ各角ハ調和級數ヲナス.

[略解] (a) 第一, 第二角ノ度數ヲ夫々 x, y トセバ題意ニ依テ次ノ方程式ヲ得,

即チ $\frac{x-1}{2} = \frac{60y-100}{1} = \frac{60 \times 60 \{180 - (x+y)\} \div 10000}{3}$ 是ヨリ $\frac{x}{2} = \frac{3y}{5}$

及ビ $\frac{3y}{5} = \frac{3\{180 - (x+y)\}}{25}$ 之ヲ解ク. 答 30^o, 25^o, 125^o.

(b) 第一, 第二, 第三角ノ度數ヲ夫々 x, y, z 且ツ x > y > z トセバ

$x+y+z=180^{\circ}$ ナルヲ以テ題意ニ依テ $\frac{180-x}{x} + \frac{180-y}{y} = 2 \frac{180-y}{y}$

即チ $\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{2}{y}$, 故ニ x, y, z ハ調和級數ヲナス.

第 一 章

銳角ノ三角函數

4. 銳角ノ三角函數ノ定義

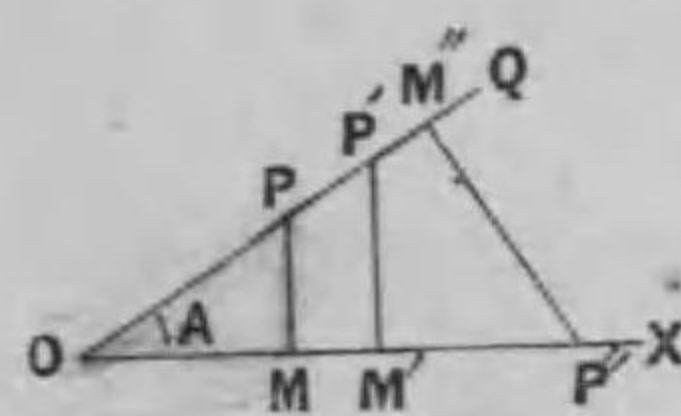
任意ノ銳角 A ノ一邊 OQ 上ニ P 點ヲ取り之ヨリ他ノ邊 OX へ垂線 PM ヲ下セバ, \hat{A} = 關シテ (i) 直角ノ對邊 OP ヲ斜邊ト云ヒ,

(ii) 其角ノ對邊 MP ヲ垂線ト云ヒ,

(iii) 其角ノ隣邊 OM ヲ底邊ト云フ.

而シテ此三線 OP, MP, OM ヲニツ

宛取リタル比ニ次ノ如ク命名ス,



(1) 垂線 即 $\frac{MP}{OP}$ ヲ \hat{A} ノ正弦 (sine) ト云ヒ, 之ヲ $\sin A$ ト記シ,

(2) 底邊 即 $\frac{OM}{OP}$ ヲ \hat{A} ノ餘弦 (cosine) ト云ヒ, 之ヲ $\cos A$ ト記シ,

(3) 垂線 即 $\frac{MP}{OM}$ ヲ \hat{A} ノ正切 (tangent) ト云ヒ, 之ヲ $\tan A$ ト記シ,

(4) 上ノ (3) ノ逆比ヲ \hat{A} ノ餘切 (cotangent) ト云ヒ, 之ヲ $\cot A$ ト記シ,

(5) 上ノ (2) ノ逆比ヲ \hat{A} ノ正割 (secant) ト云ヒ, 之ヲ $\sec A$ ト記シ,

(6) 上ノ (1) ノ逆比ヲ \hat{A} ノ餘割 (cosecant) ト云ヒ, 之ヲ $\csc A$ ト記ス.

此六ツノ比ヲ總稱シテ \hat{A} ノ三角函數又ハ圓函數ト云フ.

注意. (1) $\tan A$ 及ビ $\cot A$ ハ又 $tg A$ 及ビ $ctg A$ トモ記ス.

(2) $\sin A$, 等ハ \hat{A} = 屬スル比ノ記號ナルヲ以テ \sin , 等ト A トナ分離スベカラズ. 例ヘバ $\sin A + \sin B$ ハ A ノ正割ト B ノ正割トノ和ニシテ, A+B ノ正割 即チ $\sin(A+B)$ ニハ等シカラズ.

(3) $(\sin A)^2$, $(\tan A)^2$, 等ハ略シテ $\sin^2 A$, $\tan^2 A$, 等ト記ス.

(4) 一角ノ三角函數ハ邊ノ長短ニ關係セズ. 何トナレバ上圖ニ於テ $\triangle OPM \sim \triangle OP'M' \sim \triangle OP''M''$ ナルヲ以テ $\frac{MP}{OP} = \frac{M'P'}{OP'} = \frac{M''P''}{OP''}$ ニシテ此各

々ハ何レモ $\sin A$ ノ數値ナリ.

問 題 及 ビ 解 答

1. 前圖ニ於テ $\tan A = \frac{11}{3}$, $OM = \frac{27}{11}$ ナラバ, OP ノ値幾何.

[解] $\frac{11}{3} = \tan A = \frac{MP}{OM} = \frac{MP}{\frac{27}{11}}$ $\therefore MP = \frac{11}{3} \times \frac{27}{11} = 9$,
 $\therefore OP = \sqrt{MP^2 + OM^2} = \sqrt{9^2 + \left(\frac{27}{11}\right)^2} = \frac{9}{11} \sqrt{130}$.

2. (a) 直三角形ノ一鋭角ノ正切ガ 0.75 ニシテ其周圍ガ 12 寸ナラバ, 斜邊ハ何寸ナルカ. 答 5 寸. (海兵)

(b) 三角形ノ三邊ガ 1:2: $\sqrt{5}$ ナラバ最小角ノ正弦, 正切, 正割ノ値如何. 答 最小角ヲ A トセバ $\sin A = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\tan A = \frac{1}{2}$, $\sec A = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

3. $\triangle ABC$ ノ邊 BC ノ中點 M ト A ヨリ BC ニ垂線 AE ノ中點 N トヲ結ビ付ケタル直線 MN ト BC トノ爲ス角ヲ θ トセバ次ノ證如何, $\cot \theta = \cot B - \cot C$. (名工)

[解] $AB > AC$ トセバ 直 $\triangle ABE$, $\triangle ACE$ ニ於テ

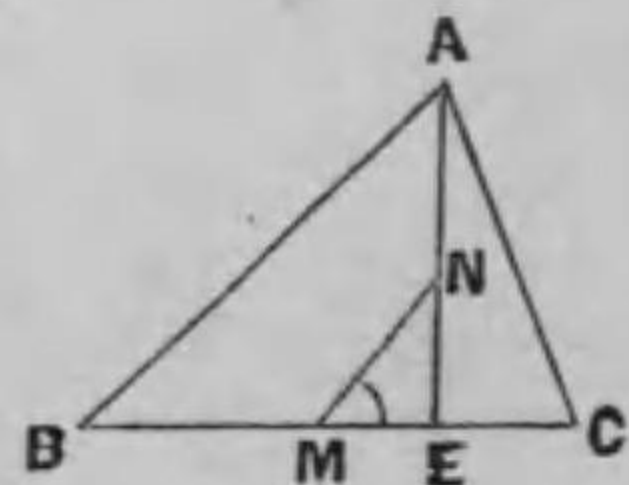
$BE = AE \cot B$ 及ビ $CE = AE \cot C$

故ニ $BE - CE = AE(\cot B - \cot C)$

$\therefore \cot B - \cot C = \frac{BE - CE}{AE} = \frac{2ME}{2EN} = \frac{ME}{EN} = \cot \theta$.

又 $AB < AC$ トセバ前ト同様ニ $\cot \theta = \cot C - \cot B$.

故ニ題言ノ如シ.



4. 直線 AD ヲ點 B, C ニ於テ三等分シ BC ヲ直徑トスル半圓周上ニ點 P ヲ取レバ $\tan APB \cdot \tan DPC = \frac{1}{4}$ ナリ.

[略解] $CE \parallel BP$, $BF \parallel CP$ トセバ $\angle C \cong \angle B$, $\angle B \cong \angle C$ 且ツ $\hat{BPC} = \hat{R}$.

5. (a) A ガ鋭角ナラバ $\sin A + \cos A > 1$ ナリ.

(b) $A, 2A$ ガ何レモ 90° ヨリモ小ナラバ $2\sin A > \sin 2A$ ナリ.

[解] (b) 四分圓 XOY ニ於テ $\hat{XOQ} = \hat{QOP} = \hat{A}$ トシ,

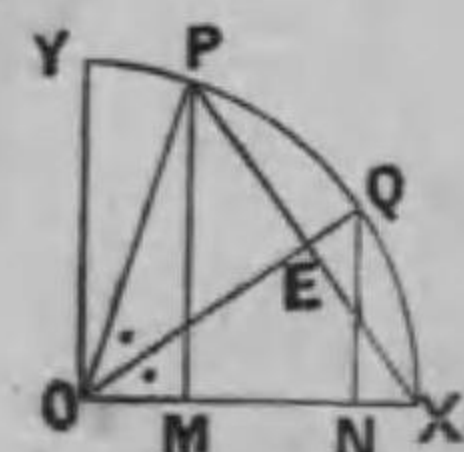
OX ニ垂線 PM, QN ヲ下シ PX ト OQ トノ交點ヲ

E トセバ 直 $\triangle OQN \cong \triangle OXE$, 從テ $QN = EX$.

又 $OE \perp OQ$ ナルヲ以テ $EX = EP$.

$\therefore 2\sin A = 2 \frac{NQ}{OQ} = \frac{PX}{OQ} = \frac{PX}{OP}$,

又 $\sin 2A = \frac{MO}{OP}$. 然レニ $PX > PM$. $\therefore 2\sin A > \sin 2A$.



5. 三角函數相互ノ關係

[第一] 相乘關係ノ定理

$$\left. \begin{aligned} \sin A \cdot \operatorname{cosec} A &= 1 \\ \cos A \cdot \sec A &= 1 \\ \tan A \cdot \cot A &= 1 \end{aligned} \right\} (1)$$

[證明] ハ定義ヨリ直チニ得ラルベシ.

[第二] 相除關係ノ定理

$$\left. \begin{aligned} \tan A &= \frac{\sin A}{\cos A} \\ \cot A &= \frac{\cos A}{\sin A} \end{aligned} \right\} (2)$$

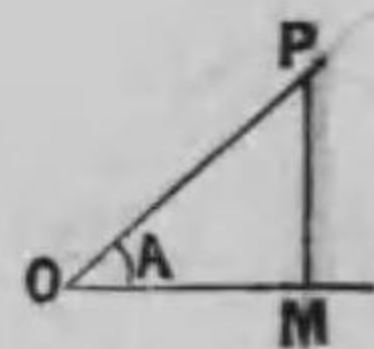
[證明] $\tan A = \frac{MP}{OM} = \frac{MP \div OP}{OM \div OP} = \frac{\sin A}{\cos A}$, 其他ハ之ニ倣フ.

[第三] 平方關係ノ定理

$$\left. \begin{aligned} \sin^2 A + \cos^2 A &= 1 \\ 1 + \tan^2 A &= \sec^2 A \\ 1 + \cot^2 A &= \operatorname{cosec}^2 A \end{aligned} \right\} (3)$$

[證明] 直 $\triangle OPM$ ニ於テ $\hat{POM} = \hat{A}$, $\hat{M} = \hat{R}$ トセバ

$$\sin^2 A + \cos^2 A = \left(\frac{MP}{OP}\right)^2 + \left(\frac{OM}{OP}\right)^2 = \frac{MP^2 + OM^2}{OP^2} = 1,$$



又 $1 + \tan^2 A = 1 + \left(\frac{MP}{OM}\right)^2 = \frac{OM^2 + MP^2}{OM^2} = \frac{OP^2}{OM^2} = \sec^2 A$, 其他ハ之ニ倣フ.

注意: 上ノ公式ハ屢々次ノ如ク變形シテ利用スルコトアリ,

即チ (1) ヨリ $\sin A$ 1 $\operatorname{cosec} A$, $\cos A$ 1 $\sec A$, $\tan A$ 1 $\cot A$ ハ互ニ逆數ナリ.

$$\text{又 (3) ヨリ } \begin{cases} \sin^2 A = 1 - \cos^2 A \\ \cos^2 A = 1 - \sin^2 A \end{cases} \quad \begin{cases} \tan^2 A = \sec^2 A - 1 \\ \cot^2 A = \operatorname{cosec}^2 A - 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \sec^2 A - \tan^2 A = 1 \\ \operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A = 1 \end{cases}$$

$$\text{從テ } \begin{cases} \sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} \\ \cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A} \end{cases} \quad \begin{cases} \tan A = \sqrt{\sec^2 A - 1} \\ \cot A = \sqrt{\operatorname{cosec}^2 A - 1} \end{cases}$$

元來根號ノ前ニハ複號トヲ附スルノ必要アルモ鋭角ノ三角函數ハ凡テ正ナルヲ以テ茲ニハ負號ヲ棄ツベシ.

6. 恒等式ノ證明法

前條ノ諸定理ニ依テ三角函數ヲ含メル恒等式ヲ證明シ得ベシ, 其方法ヲ次ニ示サン.

〔第一〕 恒等式ノ一邊ヲ他ノ一邊ニ變形スル方法.

此法ヲ用フルニハ複雑ナル一邊ヲ變形シテ他ノ一邊ニ變形スルヲ得策トス, 但シ通例ハ左邊ヨリ右邊ニ誘導ス.

〔第二〕 恒等式ノ兩邊ヲ夫々變ジテ結果ヲ等形ニスル方法.

〔第三〕 第一, 第二法ヲ用フルニ當リ \sin ト \cos ノミノ項ニ變ズル法.

之レ或ハ簡單ナラザルモ思考ヲ要スルコト少ナク, 概シテ容易ナリ, 特ニ第二法ニ於テハ最モ然リトス.

〔第四〕 已知ノ關係式ヨリ所設ノ式ニ誘導スル方法.

茲ニ已知ノ關係式トハ已知ノ公式及ビ其變形ヲ指スモノトス.

注意. 上ノ四法中何レニ依ルモ理論ニ於テハ些ノ優劣ナシ. 然レドモ第一法ニ於テハ但シ書キノ法ヲ用フルヲ慣例トス.

而シテ第三法ハ一般ニ適用シ得ベシ, 然ルニ第四法ハ頗ル簡潔ナルモ之ニ適スル問題ハ極メテ少數ナリ.

問 題 及 ビ 解 答

次ノ 1 乃至 20 ヲ夫々證明セヨ,

$$1. \sqrt{(a) \operatorname{cosec} A - \sin A = \cot A \cdot \cos A. \quad (b) \sec A - \cos A = \tan A \cdot \sin A. \\ (c) \cot A + \tan A = \sec A \cdot \operatorname{cosec} A. \quad (\text{商船, 海兵, 海機})$$

$$〔證明〕 (c) \text{ 左邊} = \frac{\cos A}{\sin A} + \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\cos^2 A + \sin^2 A}{\sin A \cdot \cos A} = \frac{1}{\sin A \cdot \cos A} = \operatorname{cosec} A \cdot \sec A.$$

$$2. (a) \tan^2 A - \sin^2 A = \tan^2 A \cdot \sin^2 A. \quad (b) \sqrt{\cot^2 A - \cos^2 A} = \cot^2 A \cdot \cos^2 A. \\ (c) \sqrt{\sec^2 A + \operatorname{cosec}^2 A} = \sec^2 A \cdot \operatorname{cosec}^2 A. \quad (\text{商船})$$

$$〔證明〕 (a) \text{ 左邊} = \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} - \sin^2 A = \sin^2 A \left(\frac{1}{\cos^2 A} - 1 \right) = \sin^2 A (\sec^2 A - 1) = \sin^2 A \cdot \tan^2 A.$$

$$\text{或ハ 左邊} = \tan^2 A (1 - \cos^2 A) = \tan^2 A \cdot \sin^2 A.$$

$$3. \sin^2 A \cdot \cos^2 B - \cos^2 A \cdot \sin^2 B = \sin^2 A - \sin^2 B.$$

〔略解〕 左邊ニ於ケル \cos ヲ \sin ニ變ズ.

$$4. (a) \frac{\tan \alpha}{\tan \alpha - \tan \beta} = \frac{\cot \beta}{\cot \beta - \cot \alpha}. \quad (b) \frac{\cot A + \tan B}{\tan A + \cot B} = \cot A \cdot \cot B.$$

〔略解〕 第三法ニ依ル. 或ハ

(a) ハ左邊ノ各項ヲ其逆數ニ變ズルヲ最簡トス.

(b) ハ左邊ノ分母ノミヲ其逆數ニ變ズルヲ最簡トス.

$$5. (a) \sec^2 A \cdot \operatorname{cosec}^2 A = \tan^2 A + \cot^2 A + 2. \quad [\because \text{公式(3)}]$$

$$(b) \sin^2 A \cdot \tan^2 A + \cos^2 A \cdot \cot^2 A = \tan^2 A + \cot^2 A - 1.$$

$$(c) \sin^2 A \cdot \tan A + \cos^2 A \cdot \cot A + 2 \sin A \cdot \cos A = \tan A + \cot A.$$

$$〔證明〕 (b) \text{ 左邊} = (1 - \cos^2 A) \tan^2 A + (1 - \sin^2 A) \cot^2 A \\ = \tan^2 A - \sin^2 A + \cot^2 A - \cos^2 A = \tan^2 A + \cot^2 A - 1.$$

$$6. (a) (\sec A + \operatorname{cosec} A)^2 \div (\sec^2 A + \operatorname{cosec}^2 A) = 1 + 2 \sin A \cdot \cos A.$$

$$(b) \cot^2 \theta \cdot \frac{\sec \theta - 1}{1 + \sin \theta} + \sec^2 \theta \cdot \frac{\sin \theta - 1}{1 + \sec \theta} = 0.$$

$$〔證明〕 (b) \text{ 左邊} = \frac{1}{\tan^2 \theta} \cdot \frac{\sec \theta - 1}{1 + \sin \theta} + \frac{1}{\cos^2 \theta} \cdot \frac{\sin \theta - 1}{1 + \sec \theta} \\ = \frac{1}{\sec^2 \theta - 1} \cdot \frac{\sec \theta - 1}{1 + \sin \theta} + \frac{1}{1 - \sin^2 \theta} \cdot \frac{\sin \theta - 1}{1 + \sec \theta} \\ = \frac{1}{\sec \theta + 1} \cdot \frac{1}{1 + \sin \theta} - \frac{1}{1 + \sin \theta} \cdot \frac{1}{1 + \sec \theta} = 0.$$

$$7. (a) \sin A (1 + \tan A) + \cos A (1 + \cot A) = \sec A + \operatorname{cosec} A. \quad (\text{仙工, 北農, 新醫})$$

$$(b) (\sin A + \cos A)(\tan A + \cot A) = \sec A + \operatorname{cosec} A.$$

$$(c) (\cos^2 A + \cot^2 A) \tan^2 A = \sec^2 A + (\cos^2 A - 1) \tan^2 A.$$

〔證明〕 (a), (b) ハ第一法ニ依ル, (c) ハ第二法ニ依ル, 或ハ

$$(a) \text{ 左邊} = \sin^2 A \left(\frac{1}{\sin A} + \frac{1}{\cos A} \right) + \cos^2 A \left(\frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\sin A} \right) \\ = \sin^2 A (\operatorname{cosec} A + \sec A) + \cos^2 A (\sec^2 A + \operatorname{cosec}^2 A) \\ = (\sin^2 A + \cos^2 A) (\sec A + \operatorname{cosec} A) = \sec A + \operatorname{cosec} A.$$

$$(c) \text{ 左邊} = \cos^2 A \cdot \tan^2 A + 1 = \cos^2 A \cdot \tan^2 A + (\sec^2 A - \tan^2 A) = \sec^2 A + (\cos^2 A - 1) \tan^2 A.$$

8. (a) $(1 + \sin\theta)^2 + (1 + \cos\theta)^2 = 3 + 2(\sin\theta + \cos\theta)$. (商船)
- (b) $(1 + \sin A + \cos A)^2 = 2(1 + \sin A)(1 + \cos A)$. (商船)
- (c) $(1 + \sin A - \cos A)^2 + (1 - \sin A + \cos A)^2 = 4(1 - \sin A \cos A)$.
- (d) $(1 + \sec A + \tan A)(1 + \operatorname{cosec} A + \cot A)$
 $= 2(1 + \tan A + \cot A + \sec A + \operatorname{cosec} A)$.
- (e) $\frac{1 + \sin\theta - \cos\theta}{1 + \sin\theta + \cos\theta} + \frac{1 + \sin\theta + \cos\theta}{1 + \sin\theta - \cos\theta} = 2\operatorname{cosec}\theta$. (新醫, 七高)

[證明] 考へ方 此種ノ題ハ代數ノ乘法公式ヲ利用ス。

$$(d) \text{ 左邊} = \frac{(1 + \sin\theta - \cos\theta)^2 + (1 + \sin\theta + \cos\theta)^2}{(1 + \sin\theta + \cos\theta)(1 + \sin\theta - \cos\theta)}$$

$$= \frac{2[(1 + \sin\theta)^2 + \cos^2\theta]}{(1 + \sin\theta)^2 - \cos^2\theta} \quad [\because (a-b)^2 + (a+b)^2 = 2(a^2 + b^2)]$$

$$= \frac{2[1 + 2\sin\theta + \sin^2\theta + \cos^2\theta]}{1 + 2\sin\theta + \sin^2\theta - \cos^2\theta} = \frac{4(1 + \sin\theta)}{2\sin\theta(1 + \sin\theta)} = \frac{2}{\sin\theta} = 2\operatorname{cosec}\theta.$$

9. $(1 + \sin A + \cos A)^2(1 - \sin A - \cos A)^2 = 4\sin^2 A \cos^2 A$.

[證明] 左邊 = $\{1 + (\sin A + \cos A)\}^2 \{1 - (\sin A + \cos A)\}^2$
 $= [1^2 - (\sin A + \cos A)^2]^2 \quad [\because (a+b)^2(a-b)^2 = (a^2 - b^2)^2]$
 $= [1 - \sin^2 A - 2\sin A \cos A - \cos^2 A]^2 = [-2\sin A \cos A]^2 = 4\sin^2 A \cos^2 A.$

10. (a) $(\tan A - \sin A)^2 + (1 - \cos A)^2 = (\sec A - 1)^2$.
- (b) $(\sin A + \sec A)^2 + (\cos A + \operatorname{cosec} A)^2 = (1 + \sec A \operatorname{cosec} A)^2$.
- (c) $(\sec A + \operatorname{cosec} A)^2 = (1 + \tan A)^2 + (1 + \cot A)^2$.

[證明] (a) 左邊 = $(\tan^2 A - 2\tan A \sin A + \sin^2 A) + (1 - 2\cos A + \cos^2 A)$
 $= (1 + \tan^2 A) - 2(\tan A \sin A + \cos A) + (\sin^2 A + \cos^2 A)$
 $= \sec^2 A - 2 \frac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\cos A} + 1 = \sec^2 A - 2\sec A + 1 = (\sec A - 1)^2.$

或ハ 左邊 = $\sin^2 A \left(\frac{1}{\cos A} - 1\right)^2 + \cos^2 A \left(\frac{1}{\cos A} - 1\right)^2 = \sin^2 A (\sec A - 1)^2 + \cos^2 A (\sec A - 1)^2$
 $= (\sin^2 A + \cos^2 A)(\sec A - 1)^2 = (\sec A - 1)^2.$

11. 直三角形ノ二邊ガ $2(1 + \sin\theta) + \cos\theta$ 及 ビ $2(1 + \cos\theta) + \sin\theta$ ナラバ斜邊ハ $3 + 2(\sin\theta + \cos\theta)$ ナルコトヲ證セ。

[略解] 第一, 第二式ノ平方ノ和ヲ第三式ノ平方ニ誘導セヨ。

12. (a) $\sin^4\theta + \cos^4\theta = 1 - 2\sin^2\theta \cos^2\theta$. $[\because a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab]$
- (b) $\sin^4\theta + \sin^2\theta \cos^2\theta + \cos^4\theta = 1 - \sin^2\theta \cos^2\theta$. $[\because a^2 + ab + b^2 = (a+b)^2 - ab]$
- (c) $\sin^4\theta - \sin^2\theta \cos^2\theta + \cos^4\theta = 1 - 3\sin^2\theta \cos^2\theta$. $[\because a^2 - ab + b^2 = (a+b)^2 - 3ab]$

13. $\frac{\tan^3 A}{1 + \tan^2 A} + \frac{\cot^3 A}{1 + \cot^2 A} = \frac{1 - 2\sin^2 A \cos^2 A}{\sin A \cos A}$

[證明] 左邊 = $\frac{\tan^3 A}{\sec^2 A} + \frac{\cot^3 A}{\operatorname{cosec}^2 A} = \frac{\sin^3 A}{\cos A} + \frac{\cos^3 A}{\sin A} = \frac{\sin^4 A + \cos^4 A}{\sin A \cos A}$, 以下前題(a)ニ依テ。

14. (a) $\cos^2\theta - \sin^2\theta = (\cos^2\theta - \sin^2\theta)(1 - 2\sin^2\theta \cos^2\theta)$.
 $[\because a^2 - b^2 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = (a-b)(a+b)\{(a+b)^2 - 2ab\}]$

(b) $(1 - \tan^2 A)\cos^2 A + \tan^2 A = 1$.

[證明] (b) 左邊 = $(1 - \tan^2 A)(1 + \tan^2 A)\cos^2 A + \tan^2 A$
 $= (1 - \tan^2 A)\sec^2 A \cos^2 A + \tan^2 A = (1 - \tan^2 A) \times 1 + \tan^2 A = 1.$

15. (a) $\sin^3\theta \pm \cos^3\theta = (\sin\theta \pm \cos\theta)(1 \mp \sin\theta \cos\theta)$.

(b) $1 + 2(\sin^6 A + \cos^6 A) = 3(\sin^4 A + \cos^4 A)$. (海兵)

[證明] (a) $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = \text{依ル}$.

(b) 左邊 = $1 + 2\{(\sin^2 A)^3 + (\cos^2 A)^3\}$
 $= 1 + 2(\sin^2 A + \cos^2 A)(\sin^4 A - \sin^2 A \cos^2 A + \cos^4 A)$
 $= (\sin^2 A + \cos^2 A)^2 + 2 \times 1 \times (\sin^4 A + \cos^4 A - \sin^2 A \cos^2 A)$
 $= (\sin^4 A + \cos^4 A + 2\sin^2 A \cos^2 A) + 2(\sin^4 A + \cos^4 A - 2\sin^2 A \cos^2 A)$
 $= 3(\sin^4 A + \cos^4 A).$

16. $\sec^6 A = 1 + \tan^6 A + 3\tan^2 A \sec^2 A$.

[證明] $\sec^6 A = (\sec^2 A)^3 = (1 + \tan^2 A)^3$
 $= 1^3 + \tan^6 A + 3\tan^2 A(1 + \tan^2 A) \quad [\because (a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)]$

17. (a) $1 - \tan^2 A + \tan^4 A = \cos^2 A(1 + \tan^6 A)$.

(b) $(\sec A - \operatorname{cosec} A)(1 + \tan A + \cot A) = \frac{\sec^2 A}{\operatorname{cosec} A} - \frac{\operatorname{cosec}^2 A}{\sec A}$

[證明] (a) 左邊 = $(1 - \tan^2 A + \tan^4 A)(1 + \tan^2 A) \div (1 + \tan^2 A)$
 $= (1 + \tan^6 A) \div \sec^2 A \quad [\because (a^3 - a^2b^2 + b^4)(a^2 + b^2) = a^5 + b^5]$
 $= \cos^2 A(1 + \tan^6 A).$

$$(b) \text{ 左邊} = \left(\frac{1}{\cos A} - \frac{1}{\sin A} \right) \left(1 + \frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\cos A}{\sin A} \right) = \frac{\sin A - \cos A}{\sin A \cos A} \cdot \frac{\sin A \cos A + \sin^2 A + \cos^2 A}{\sin A \cos A}$$

$$= \frac{\sin^3 A - \cos^3 A}{\sin^2 A \cos^2 A} \quad (\because (a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3)$$

$$= \frac{\sin A}{\cos^2 A} - \frac{\cos A}{\sin^2 A} = \frac{\sec^2 A}{\csc A} - \frac{\csc^2 A}{\sec A}$$

$$18. (a) \sin^2 A(1+n \cot^2 A) + \cos^2 A(1+n \tan^2 A)$$

$$= \sin^2 A(n + \cot^2 A) + \cos^2 A(n + \tan^2 A).$$

$$(b) (2 - \cos^2 A)(1 + 2 \cot^2 A) = (2 + \cot^2 A)(2 - \sin^2 A).$$

[證明] 第三法ニ依ルヲ適當トス, 即チ

$$(a) \text{ 左邊} = \sin^2 A \left(1 + n \frac{\cos^2 A}{\sin^2 A} \right) + \cos^2 A \left(1 + n \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} \right)$$

$$= \sin^2 A + n \cos^2 A + \cos^2 A + n \sin^2 A.$$

$$\text{又 右邊} = \sin^2 A \left(n + \frac{\cos^2 A}{\sin^2 A} \right) + \cos^2 A \left(n + \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} \right)$$

$$= n \sin^2 A + \cos^2 A + n \cos^2 A + \sin^2 A.$$

即チ 左右兩邊ノ結果相等シキユ元恒等式ハ成立ス.

[別解] (a) 左邊 = $\sin^2 A + n \sin^2 A \cot^2 A + \cos^2 A + n \cos^2 A \tan^2 A$

$$= (\sin^2 A + n \cos^2 A) + (\cos^2 A + n \sin^2 A)$$

$$= \cos^2 A (\tan^2 A + n) + \sin^2 A (\cot^2 A + n).$$

$$(b) \text{ 左邊} = \{2(\sin^2 A + \cos^2 A) - \cos^2 A\} \cdot \frac{1}{\sin^2 A} (\sin^2 A + 2\cos^2 A)$$

$$= \{2\sin^2 A + \cos^2 A\} \cdot \frac{1}{\sin^2 A} \{ \sin^2 A + 2(1 - \sin^2 A) \}$$

$$= (2 + \cot^2 A)(2 - \sin^2 A).$$

$$19. (a) \sec A = 1 + \frac{\tan^2 A}{1 + \sec A} \quad (b) 2 \csc^2 A = 1 + \csc^4 A - \cot^4 A.$$

$$(c) \sin A \cos A = \sqrt{\{(\sin A - \sin^3 A)^2 + (\cos A - \cos^3 A)^2\}}.$$

[證明] 本題ハ右邊ヨリ左邊ニ誘導スルヲ容易ナリ.

[別證] (a) $\sec A = 1 + (\sec A - 1) = 1 + \frac{\sec^2 A - 1}{\sec A + 1} = 1 + \frac{\tan^2 A}{\sec A + 1}$

$$(b) 2 \csc^2 A = \csc^2 A + \csc^2 A = 1 + \cot^2 A + \csc^2 A$$

$$= 1 + (\cot^2 A + \csc^2 A) \times (\csc^2 A - \cot^2 A)$$

$$= 1 + \cot^4 A - \csc^4 A. \quad (\because 1 + \cot^2 A = \csc^2 A)$$

$$(c) \sin A \cos A = \sqrt{(\sin^2 A \cos^2 A)} = \sqrt{\sin^2 A \cos^2 A (\sin^2 A + \cos^2 A)}$$

$$= \sqrt{\sin^2 A \cos^4 A + \cos^2 A \sin^4 A} = \sqrt{\sin^2 A (1 - \sin^2 A)^2 + \cos^2 A (1 - \cos^2 A)^2}$$

$$= \sqrt{\{(\sin A - \sin^3 A)^2 + (\cos A - \cos^3 A)^2\}}.$$

$$20. (a) \tan A + \cot A = \sin^2 A \sec A + \cos^2 A \csc A + 2 \sin A \cos A.$$

$$(b) \frac{\sin A}{1 + \cos A} = \frac{1 - \cos A}{\sin A} \quad (c) (i) \frac{1 - \sin A}{1 + \sin A} = \frac{(\sec A - \tan A)^2}{(\text{商船})}$$

$$(d) (i) \frac{1 + \tan A - \sec A}{1 - \tan A + \sec A} = \frac{\sec A + \tan A - 1}{\sec A + \tan A + 1} \quad (ii) \frac{1 + \cos A}{1 - \cos A} = \frac{(\csc A + \cot A)^2}{(\text{鹿農})}$$

$$(ii) \frac{1 + \cot A + \csc A}{1 - \cot A + \csc A} = \frac{\csc A + \cot A - 1}{-\csc A + \cot A + 1}$$

[證明] (a), (b), (d) ハ第四法ニ依テ證明シ得ベシ, 即チ

$$(a) \text{ 今 } \sin^2 A + \cos^2 A = 1 = 1^2 = (\sin^2 A + \cos^2 A)^2$$

$$\text{即チ } \sin^2 A + \cos^2 A = \sin^4 A + \cos^4 A + 2 \sin^2 A \cos^2 A$$

此雙方ヲ $\sin A \cos A$ ニテ除スルヲ所設ノ恒等式ヲ得.

考へ方 (b), (d) ハ分母ヲ拂ヒタル式ガ已知ノ恒等式ナルカ否カヲ確メ, 其恒等式ナルトキハ之ヲ元分母ノ乗積ニテ除ス.

$$(b) \text{ 今 } \sin^2 A = 1 - \cos^2 A \quad \text{此雙方ヲ } \sin A(1 + \cos A) \text{ ニテ除スルヲ所設ノ恒等式ヲ得.}$$

$$(d) \text{ 今 } (1 + \tan A)^2 - \sec^2 A = \sec^2 A - (1 - \tan A)^2$$

此雙方ヲ $(1 - \tan A + \sec A)(1 + \tan A + \sec A)$ ニテ除スルヲ所設ノ恒等式ヲ得.

又 (c), (e) ハ右邊ヨリ左邊ニ誘導スルヲ容易ナリ.

[別解] (b) $\frac{\sin A}{1 + \cos A} = \frac{\sin A(1 - \cos A)}{(1 + \cos A)(1 - \cos A)} = \frac{\sin A(1 - \cos A)}{1 - \cos^2 A} = \frac{\sin A(1 - \cos A)}{\sin^2 A} = \frac{1 - \cos A}{\sin A}$

$$(c) (i) \frac{1 - \sin A}{1 + \sin A} = \frac{(1 - \sin A)^2}{(1 + \sin A)(1 - \sin A)} = \frac{(1 - \sin A)^2}{1 - \sin^2 A} = \left(\frac{1 - \sin A}{\cos A} \right)^2 = (\sec A - \tan A)^2.$$

$$(d) (i) \frac{1 + \tan A - \sec A}{1 - \tan A + \sec A} = \frac{1 + \tan A - \sec A}{1 - \tan A + \sec A} \times \frac{\sec A + \tan A + 1}{\sec A + \tan A - 1} \times \frac{\sec A + \tan A - 1}{\sec A + \tan A + 1}$$

$$= \frac{(1 + \tan A)^2 - \sec^2 A}{\sec^2 A - (1 - \tan A)^2} \times \frac{\sec A + \tan A - 1}{\sec A + \tan A + 1}$$

$$= \frac{\sec^2 A + 2 \tan A - \sec^2 A}{\sec^2 A - \sec^2 A + 2 \tan A} \times \frac{\sec A + \tan A - 1}{\sec A + \tan A + 1} = \frac{\sec A + \tan A - 1}{\sec A + \tan A + 1}.$$

21. 次式ヲ最簡ニセヨ,

(a) (sin A - cosec A)^2 - (tan A - cot A)^2 + (cos A - sec A)^2. 答 1. (商船)

(b) (sec x sec y + tan x tan y)^2 - (tan x sec y + sec x tan y)^2. 答 1. (海機)

(c) 1/(1+sin^2 x) + 1/(1+cos^2 x) + 1/(1+sec^2 x) + 1/(1+cosec^2 x). 答 2. (海兵)

(d) (tan A + tan B)(cot A - cot B) + (tan A - tan B)(cot A + cot B).

(e) (cosec A - sin A)(sec A - cos A)(tan A + cot A). 答 1. (商船)

【略解】 (a), (b), (d) ハ括弧ヲ解クベシ. (d) 答 0.

(c) ハ sec, cosec ナ Cos, sin ニ變シ兩外項ト兩内項トヲ括ル.

(e) ハ sin, cos ノ項ニ變ズベシ.

22. (a) sin A + cos A = 1.2 ナルトキハ sin^2 A + cos^2 A ノ値如何. (海機)

(b) tan A = a/b ナルトキ a cosec A + b sec A ノ値ヲ求メヨ.

【解】 (a) 第一式ノ平方ハ 1 + 2 sin A cos A = 1.44, ∴ sin A cos A = 0.22.

∴ sin^2 A + cos^2 A = (sin A + cos A)^2 - 2 sin A cos A = 1.2^2 - 2 * 0.22 = 0.936.

(b) tan A = a/b ⇒ sin A / cos A = a/b, 故ニ sin A = a/c, cos A = b/c.

∴ a^2 / sin^2 A = b^2 / cos^2 A ⇒ a^2 + b^2 = a^2 cos^2 A + b^2 sin^2 A ⇒ a/c + b/c = √(a^2 + b^2).

即チ a cosec A + b sec A = √(a^2 + b^2).

23. (1 + cos α)(1 + cos β)(1 + cos γ) = (1 - cos α)(1 - cos β)(1 - cos γ) ナルトキハ此各々ハ ± sin α sin β sin γ ニ等シ.

【證明】 元式ノ兩邊ニ (1 + cos α)(1 + cos β)(1 + cos γ) ナ乗シテ平方ニ開ケル.

(1 + cos α)(1 + cos β)(1 + cos γ) = ± sin α sin β sin γ, 故ニ題言ノ如シ.

24. sin θ + sin^2 θ = 1 ナラバ cos^2 θ + cos^4 θ = 1 ナリ. (海機)

【證】 第一ヨリ sin θ = 1 - sin^2 θ = cos^2 θ ナ得,

∴ cos^4 θ + cos^2 θ = (cos^2 θ)^2 + cos^2 θ = (sin θ)^2 + cos^2 θ = sin^2 θ + cos^2 θ = 1.

25. 次式ヲ證明セヨ, [本題ハ雜問ニ屬ス]

(a) 1/tan^2 A = (cos B / tan C)^2 + (sin B / tan D)^2 ナラバ 1/sin^2 A = (cos B / sin C)^2 + (sin B / sin D)^2

ナリ.

(b) cos^4 A / cos^2 B + sin^4 A / sin^2 B = 1 ナラバ cos^4 B / cos^2 A + sin^4 B / sin^2 A = 1 ナリ.

【證】 考ヘ方 (a) ハ第二式ヲ變形ス [次ノ解ヲ逆順ニ見ヨ] シテ第一式ノ雙方ニ

1 = cos^2 B + sin^2 B ナ加フベキヲ知ルベシ.

(b) ハ第一ヲ變形シタル結果 (i) ト, 第二ヲ變形シタル結果 (ii) [次ノ解ヲ逆順ニ見ヨ] トヲ比較シテ「然ルニ」云々ヨリ (ii) ニ變シタルナリ.

(a) 第一式ヨリ cot^2 A = cos^2 B cot^2 C + sin^2 B cot^2 D,

而シテ 1 = cos^2 B + sin^2 B

相加ヘテ cot^2 A + 1 = cos^2 B(1 + cot^2 C) + sin^2 B(1 + cot^2 D)

即チ cosec^2 A = cos^2 B cosec^2 C + sin^2 B cosec^2 D

即チ 1/sin^2 A = (cos B / sin C)^2 + (sin B / sin D)^2.

(b) 第一式ヨリ cos^4 A / cos^2 B + sin^4 A / sin^2 B = 1 = sin^2 A + cos^2 A

轉項シテ, cos^2 A (cos^2 A / cos^2 B - 1) = sin^2 A (1 - sin^2 A / sin^2 B)

即チ cos^2 A (cos^2 A - cos^2 B) / cos^2 B = sin^2 A (sin^2 B - sin^2 A) / sin^2 B (i)

然ルニ cos^2 A - cos^2 B = sin^2 B - sin^2 A,

∴ cos^2 A (sin^2 B - sin^2 A) / cos^2 B = sin^2 A (cos^2 A - cos^2 B) / sin^2 B

故ニ sin^2 B (sin^2 B - sin^2 A) / sin^2 A = cos^2 B (cos^2 A - cos^2 B) / cos^2 A (ii)

即チ sin^4 B / sin^2 A - sin^2 B = cos^2 B - cos^4 B / cos^2 A

∴ sin^4 B / sin^2 A + cos^4 B / cos^2 A = sin^2 B + cos^2 B = 1.

7. 三角函數ノ一ヲ知リテ他ヲ求ムル法.

〔第一〕 公式(1)乃至(3)ヲ利用スル法.

〔第二〕 已知函數値即チ分數(若シ整數或ハ小數ナラバ已約分數トナス)ノ分子ノ數ヲ直三角形ノ適當ナル二邊ニ配スレバ, 第三邊ハピタゴラス定理ニ依テ容易ニ求メ得ベシ. 然ルトキハ三邊已知トナルヲ以テ定義ニ依リ凡テノ函數ヲ記スルコトヲ得.

例 (1) $\sin A = \frac{n}{m}$ ナルトキ他ノ凡テノ函數ヲ求メヨ.

〔第一解法〕 $\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{n}{m}\right)^2} = \sqrt{\frac{m^2 - n^2}{m^2}} = \frac{\sqrt{m^2 - n^2}}{m}$,

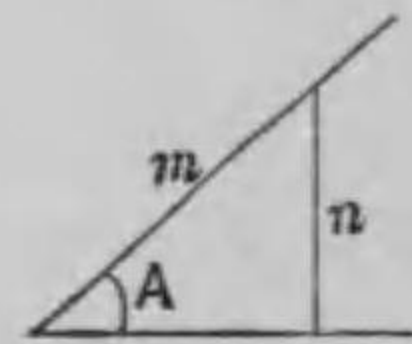
$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\frac{n}{m}}{\frac{\sqrt{m^2 - n^2}}{m}} = \frac{n}{\sqrt{m^2 - n^2}}$$

而シテ $\sin A, \cos A, \tan A$ が已知トナラバ $\csc A, \sec A, \cot A$ ハ夫々前者ノ逆數ナルヲ以テ直チニ記シ得ベシ. 以下皆ナ然リ.

〔第二解法〕 \hat{A} ニ關スル斜邊 $=m$ トセバ, 垂線 $=n$ ナ

ルユエ 底邊 $=\sqrt{m^2 - n^2}$ ナリ.

$$\therefore \cos A = \frac{\text{底邊}}{\text{斜邊}} = \frac{\sqrt{m^2 - n^2}}{m}, \quad \tan A = \frac{\text{垂線}}{\text{底邊}} = \frac{n}{\sqrt{m^2 - n^2}}$$



例 (2) $\tan A = \frac{n}{m}$ ナルトキ他ノ凡テノ函數ヲ求メヨ.

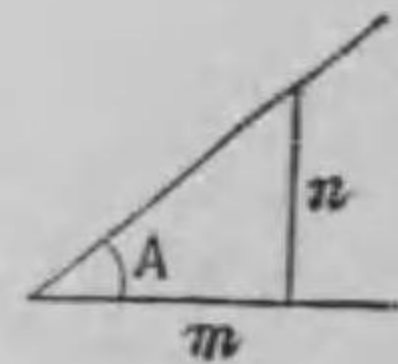
〔第一解法〕 $\sin A = \frac{1}{\csc A} = \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 A}} = \frac{\tan A}{\sqrt{\tan^2 A + 1}} = \frac{\frac{n}{m}}{\sqrt{\left(\frac{n}{m}\right)^2 + 1}} = \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}}$,

$$\cos A = \frac{1}{\sec A} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 A}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{n}{m}\right)^2}} = \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}}, \text{ 以下同上.}$$

〔第二解法〕 \hat{A} ニ關スル底邊 $=m$ トセバ,

垂線 $=n$ ナレユエ 斜邊 $=\sqrt{m^2 + n^2}$ ナリ.

$$\therefore \sin A = \frac{\text{垂線}}{\text{斜邊}} = \frac{n}{\sqrt{m^2 + n^2}}, \quad \cos A = \frac{\text{底邊}}{\text{斜邊}} = \frac{m}{\sqrt{m^2 + n^2}}$$



注意 根號ハ銳角ノ場合ニハ正ノミニテ充分ナリ, 然レドモ其斷リ無キ場合ニハ一般角トシテ解スルヲ正確トス [23頁2題ノ如シ]. 但シ次ノ問題ニ於テハ角 A, θ 等ハ銳角トシテノ解ヲ示ス.

問題及ビ解答

1. (a) $(\sec A - \tan A)^2$ ヲ $\sin A$ ノ項ニテ示セ. 答 $(1 - \sin A)/(1 + \sin A)$.
 (b) $1 - \tan^2 A$ ヲ $\cos A$ ノ項ニテ示セ. 答 $(2\cos^2 A - 1)/\cos^2 A$.

2. (a) $\sin A = 5/13$ ナルトキ $\tan A$ ノ値ヲ求メヨ. 答 $5/12$. (商船)
 (b) $\cos A = 0.28$ ナルトキ $\cot A, \operatorname{cosec} A$ ノ値ヲ求メヨ. (海兵)
 答 0.2916 及ビ 1.0416

(c) $\tan A = \frac{4}{3}$ ナルトキ $\sin A$ ノ値如何. 答 $\frac{5}{4}$. (五高)

(d) $\tan A = 2 - \sqrt{3}$ ナラバ $\cos A$ ノ値如何. 答 $(\sqrt{6} + \sqrt{2})/4$. (商船)

(e) $\sec x = 8$ ナルトキ $\sin x, \cos x, \tan x, \cot x$ ノ値ヲ小數第三位迄求メヨ. 答 $0.992, 0.125, 7.937, 0.126$. (盛農, 熊工)

3. (a) $\sin A = \frac{2m}{m^2 + 1}$ ナルトキ $\cos A, \cot A$ ノ値ヲ求メヨ.

$$\text{答 } \frac{m^2 - 1}{m^2 + 1}, \frac{m^2 - 1}{2m}$$

(b) $\cos A = \frac{2mn}{m^2 + n^2}$ ナルトキ $\sin A, \tan A$ ノ値ヲ求メヨ.

$$\text{答 } \frac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}, \frac{m^2 - n^2}{2mn}$$

4. (a) $\tan \theta = 2mn/(m^2 - n^2)$ ナルトキ次式ノ値ヲ求メヨ,
 $2mn \cdot \cos^2 \theta - (m^2 - n^2) \cos \theta \cdot \sin \theta$. 答 0 . (商船)

(b) $\tan A = b/\sqrt{a^2 - b^2}$ ナルトキ次式ノ値ヲ求メヨ,
 $\sin A(1 + \tan A) + \cos A(1 + \cot A) - \sec A$. 答 a/b .

5. $5 \sec A = 13$ ナルトキ $\frac{2 \sin A - 3 \cos A}{4 \sin A - 9 \cos A}$ ノ値ヲ求メヨ. 答 3 .

〔略解〕 $5 \sec A = 13 \Rightarrow \cos A = \frac{5}{13}$, 從テ $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13}$,

此 $\sin A, \cos A$ ノ値ヲ元式ニ置キ換ヘテ計算ス.

6. $\sin \theta : \cos \theta = a : b$ ナルトキ $\sin \theta, \cos \theta$ ノ値ヲ求メヨ.

$$\text{答 } a/\sqrt{a^2 + b^2}, b/\sqrt{a^2 + b^2}$$

7. $\tan A + \sec A = a$ ナルトキ $\sin A$ ノ値ヲ求メヨ.

〔解〕 元式ハ $\frac{\sin A}{\cos A} + \frac{1}{\cos A} = a$ 即チ $\frac{\sin A + 1}{\cos A} = a$, 故ニ $\frac{(\sin A + 1)^2}{1 - \sin^2 A} = a^2$

$$\text{即チ } \frac{\sin A + 1}{1 - \sin A} = a^2, \text{ 之ヨリ } \sin A = \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1}$$

8. 特別角ノ三角函數

〔第一〕 45°ノ三角函數ヲ求ムル法.

〔解〕 正方形 ACBD = 對角線 AB ヲ引ケバ

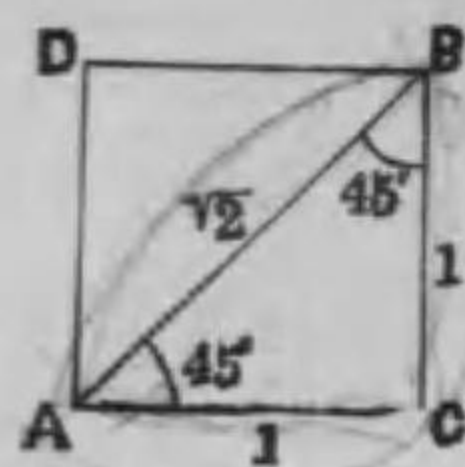
$\hat{A} = \hat{B} = 45^\circ$ ナルユエ AC=BC=1 トセバ

$AB = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ ナリ.

$$\therefore \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

同様ニ或ハ此二式ヨリ $\tan 45^\circ = 1 = \cot 45^\circ, \quad \sec 45^\circ = \sqrt{2} = \operatorname{cosec} 45^\circ$.

(海機)



〔第二〕 30° 及ビ 60°ノ三角函數ヲ求ムル法.

(海兵, 盛農)

〔解〕 正△ABDニ於テ AC⊥BD トスレバ

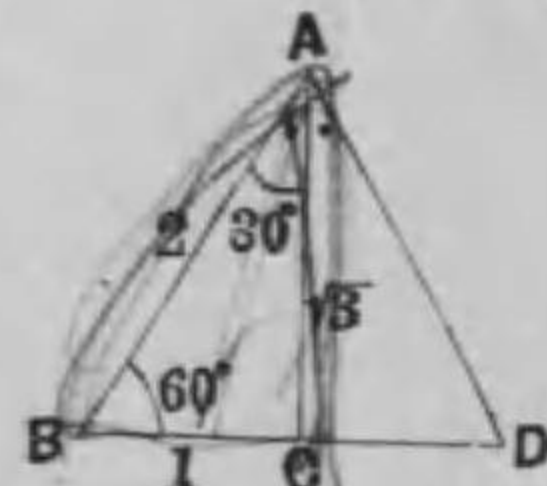
$\hat{BAC} = 30^\circ, \hat{B} = 60^\circ$ ナルユエ AB=2 トセバ

BC=1, 從テ AC= $\sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ ナリ.

$$\therefore \sin 30^\circ = \frac{1}{2} = \cos 60^\circ, \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60^\circ$$

同様ニ或ハ此二式ヨリ $\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \cot 60^\circ, \quad \cot 30^\circ = \sqrt{3} = \tan 60^\circ$ 及ビ

$\sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} = \operatorname{cosec} 60^\circ, \quad \operatorname{cosec} 30^\circ = 2 = \sec 60^\circ$ ナ得ベシ.



記憶法. 1, 2, 3ノ各平方根ノ半 即チ $\frac{\sqrt{1}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$ ハ夫々 30°, 45°, 60°ノ sinノ値ニシテ, 又此逆順ノ角ノ cosノ値ナリ.

問題 及 ビ 解答

1. (a) $\sin^2 60^\circ \cdot \cot 30^\circ - 2 \sec^2 45^\circ + 3 \cos 60^\circ \cdot \tan 45^\circ - \tan^2 60^\circ$ ノ値如何.

(b) $\frac{\tan 60^\circ - \tan 30^\circ}{\sin 60^\circ - \sin 45^\circ}$ ノ値ヲ小數三桁マデ求メヨ. (海機)

2. $\frac{\tan 45^\circ - \sin 30^\circ}{1 + \tan^2 45^\circ} = \cot^2 45^\circ - \cos^2 30^\circ$ ヲ證セ. (a) 答 $-\frac{35}{8}$. (b) 答 7.265.

3. $\cos(A-B) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ナルトキ $\sin(A-B) = \cos(A+B)$ ヨリ A, Bヲ求メヨ, 但シ A, Bハ何レモ正銳角トス. 答 $A = 45^\circ, B = 15^\circ$.

第 二 章

一般角ノ三角函數

9. 直線 及 ビ 角ノ正負 ハ便宜ノ爲メ次ノ如ク規約シ, 之ヲ高等數學ニマデ遵用ス.

第一 直線ノ正負

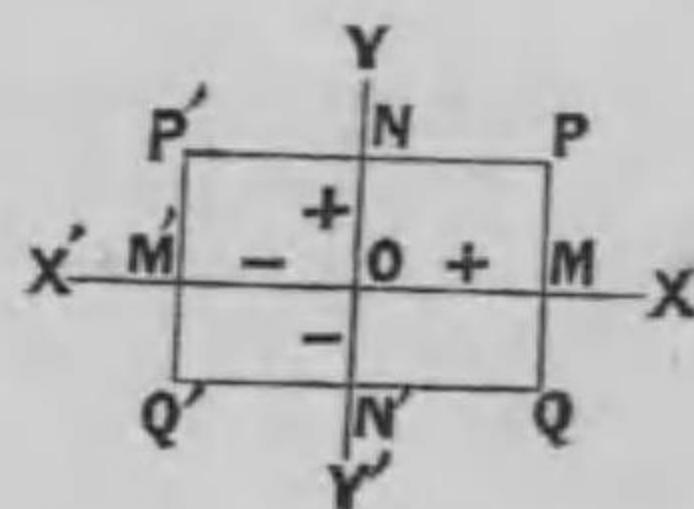
直交二直線 XOX', YOY' ヲ引キ, 此二

線ヲ夫々横軸及ビ縦軸ト云ヒ,

其交點 O ヲ原點ト云フ.

横軸ハ原點ノ右ヲ正, 左ヲ負トシ

縦軸ハ原點ノ上ヲ正, 下ヲ負トス.



又縦横兩軸ニ平行セル直線ノ正負ハ兩軸ノ正負ニ準ズ.

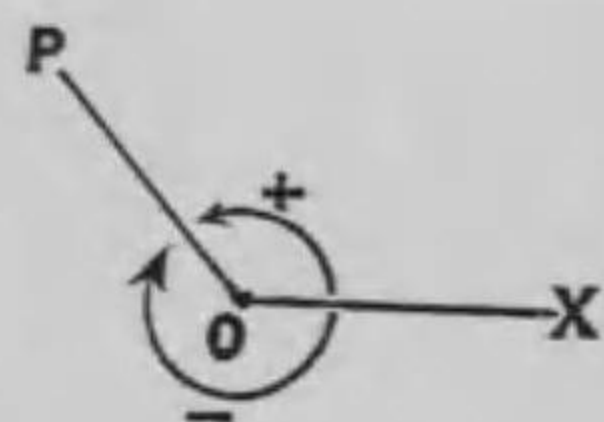
第二 角ノ正負

定直線 OX ニ一致セシメタル直線 OP

ヲ回軸シテ角ヲ作りタルトキ, 其回轉ノ方

向ガ時計ノ針ノ廻リ方ト反對及ビ同ジナ

ルニ從テ正角及ビ負角トス.



此 OX ヲ首線ト云ヒ, 又 OP ヲ動徑或ハ回線ト云フ.

定理 角ノ大サニハ限り無シ.

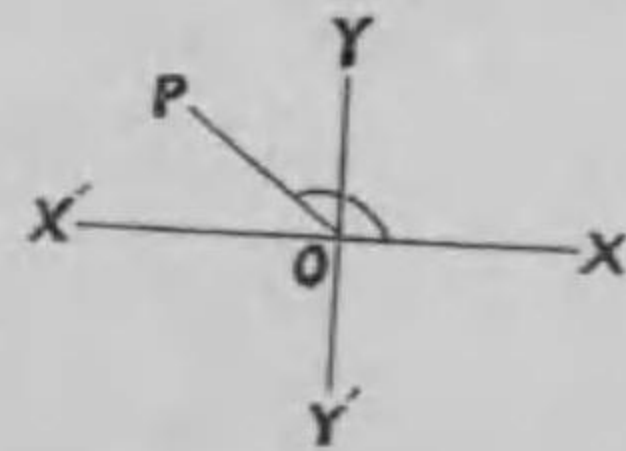
〔證明〕 何トナレバ \hat{A} ト $2n \cdot 180^\circ + \hat{A}$ (n ハ 0 或ハ整數トス) トノ動徑 OP ハ一致スルガ故ナリ.

10. 象限 直交二直線 XOX', YOY' ニテ一平面ヲ四分スルトキ, 其各々ノ分ヲ象限ト云フ.

此 XOY, YOX', X'OY', Y'OX ヲ順次ニ第一, 第二, 第三, 第四象限ト云フ.

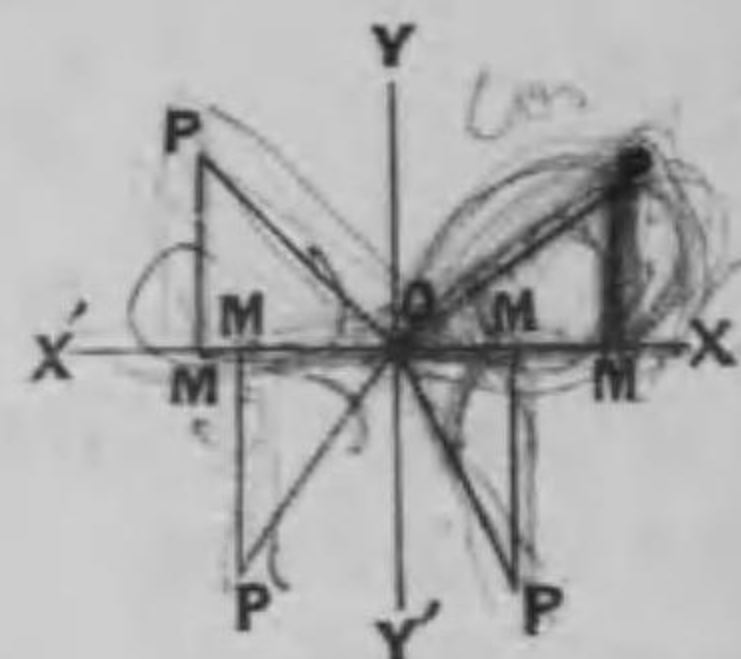
角ハ動徑ノ存在スル象限ニ從テ第何象

限ノ角ト云フ. 例ヘバ \hat{XOP} ハ第二象限ノ角ナルガ如シ.



11. 一般角ノ三角函數ノ定義

任意ノ \hat{A} 二於ケル首線ハ横軸ノ正傍 OX, 動徑ハ OP ノ位置ヲ取ルモノトス. 又 $MP \perp XX'$ トス. 然ルトキ OP ノ存在スル象限ノ如何ニ關セズ第一章ニ示セシト同様ニ作レル比ヲ一般角ノ三角函數ト稱ス,



即チ $\sin A = \frac{MP}{OP}$, $\cos A = \frac{OM}{OP}$, $\tan A = \frac{MP}{OM}$, $\operatorname{cosec} A$, $\sec A$, $\cot A$ ハ夫々前者ノ逆數トス.

12. 定理 $2n \cdot 180^\circ + \hat{A}$ ト \hat{A} ナル角ノ同名函數ハ相等シ(但シ n ハ 0 或ハ整數トス) 即チ

$$\begin{cases} \sin(2n \cdot 180^\circ + A) = \sin A \\ \cos(2n \cdot 180^\circ + A) = \cos A \end{cases} \quad (4)$$

其他ノ函數ニ就テモ同様ナリ.

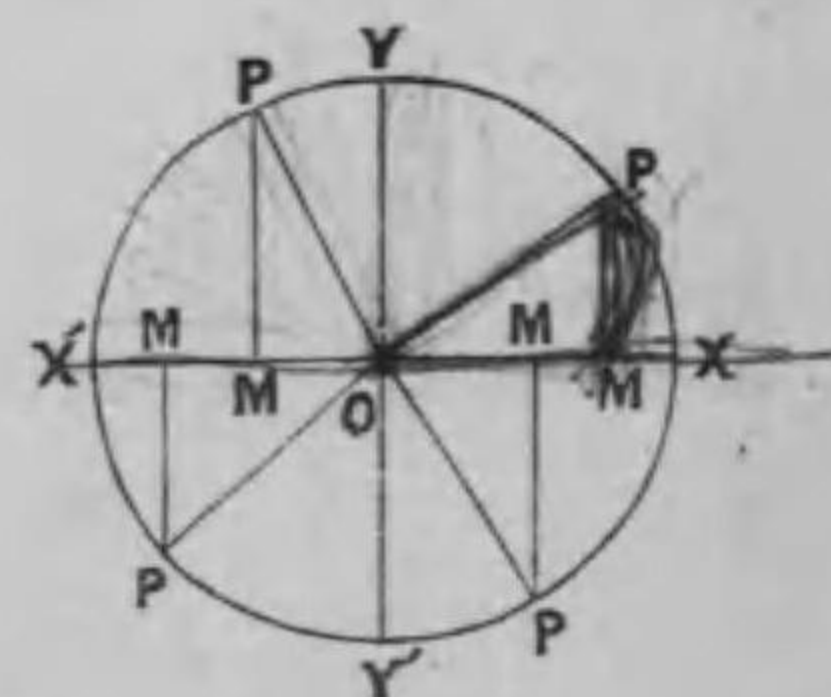
[證明] 何トナレバ n ガ 0 或ハ整數ナルトキ $2n \cdot 180^\circ + A$ ト \hat{A} トノ動徑ハ一致スルガ故ナリ.

13. 三角函數ノ符號及ビ値ノ變化

注意. 之レ縦横軸ノ正負ノ規約ノ適用タリ. 直交二直徑 XOX', YOY' ヲ引キテ

ナル數値ノ動徑 OP ガ OX ヲ首線トシテ \hat{A} ヲ作りタリトシ, $MP \perp XX'$ トス.

又 動徑 OP ハ常ニ正トス.



[第一] $\sin A$ ノ符號及ビ値ノ變化

(1) 第一象限ニ於テハ MP ハ正ニシテ, 0 ヨリ増大シテ r ニ至ル.

故ニ $\sin A = \frac{MP}{OP}$ ハ正ニシテ 0 ヨリ増大シテ 1 ニ至ル.

$$\therefore \sin 0^\circ = 0, \quad \sin 90^\circ = 1.$$

(2) 第二象限ニ於テハ MP ハ正ニシテ, r ヨリ減小シテ 0 ニ至ル.

故ニ $\sin A = \frac{MP}{OP}$ ハ正ニシテ 1 ヨリ減小シテ 0 ニ至ル.

$$\therefore \sin 180^\circ = 0.$$

(3) 第三象限ニ於テハ MP ハ負ニシテ, 0 ヨリ減小シテ $-r$ ニ至ル.

故ニ $\sin A = \frac{MP}{OP}$ ハ負ニシテ 0 ヨリ減小シテ -1 ニ至ル.

$$\therefore \sin 270^\circ = -1.$$

(4) 第四象限ニ於テハ MP ハ負ニシテ, $-r$ ヨリ増大シテ 0 ニ至ル.

故ニ $\sin A = \frac{MP}{OP}$ ハ負ニシテ, -1 ヨリ増大シテ 0 ニ至ル.

$$\therefore \sin 360^\circ = 0.$$

[第二] $\cos A$ ノ符號及ビ値ノ變化 ハ第一ニ倣フ.

[第三] $\tan A$ ノ符號及ビ値ノ變化

[第四] $\operatorname{cosec} A$, $\sec A$, $\cot A$ ハ夫々 $\sin A$, $\cos A$, $\tan A$ ノ逆數ナルヲ以テ符號ノ變化ハ前ト同様ナリ. 又値ノ變化ハ前ノ逆數ノ變化ナリ.

[第五] 若シ \hat{A} ガ負ナルトキハ象限ヲ逆順ニ論スベシ.

又 上ノ事實ハ一般ニ $2n \cdot 180^\circ + A$ ナル角ニモ適スルコト明カナリ.

注意. $\sin A$, $\cos A$ ノ最大値及ビ最小値ハ共ニ ± 1 ナリ, 從テ此等ノ逆數ナル $\operatorname{cosec} A$, $\sec A$ ノ最小値ハ ± 1 ナリ.

又 $\tan A$, $\cot A$ ハ 0 ト ∞ トノ間ノ値ヲ取ルコトヲ得. 但シ 0 及ビ ∞ ニハ+, - ナシトス.

14. 三角函數相互ノ關係 既ニ定義ヲ擴張セシ以上ハ三角函數相互ノ關係モ廣意ニ適スルコトハ當然ナリ, 仍テ

$$\left. \begin{aligned} \sin A \cdot \operatorname{cosec} A &= 1 \\ \cos A \cdot \sec A &= 1 \\ \tan A \cdot \cot A &= 1 \end{aligned} \right\} \text{及ビ} \quad \left. \begin{aligned} \tan A &= \frac{\sin A}{\cos A} \\ \cot A &= \frac{\cos A}{\sin A} \end{aligned} \right\} \text{ハ前ト同様ニ定義ヨリ直チニ得ラルベシ.}$$

又 $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ }
 $1 + \tan^2 A = \sec^2 A$ }
 $1 + \cot^2 A = \operatorname{cosec}^2 A$ }
 (ハ MP ト OM トハ正負如何ニ拘ハラズ此等ノ平方ハ常ニ正ナルヲ以テ亦タ前ト同様ニ證シ得ベシ.)

次ニ $\sin A = \pm \sqrt{1 - \cos^2 A}$, $\cot A = \pm \sqrt{\operatorname{cosec}^2 A - 1}$ 等ハ \hat{A} ノ大サガ未知ナルトキハ複號士ヲ用ヒ、又已知ナルトキハ何レカ一方ヲ選ムヲ要ス。

例ヘバ $\cos 160^\circ = -\sqrt{1 - \sin^2 160^\circ}$ 及ビ $\tan 230^\circ = +\sqrt{\sec^2 230^\circ - 1}$ ノ如シ。

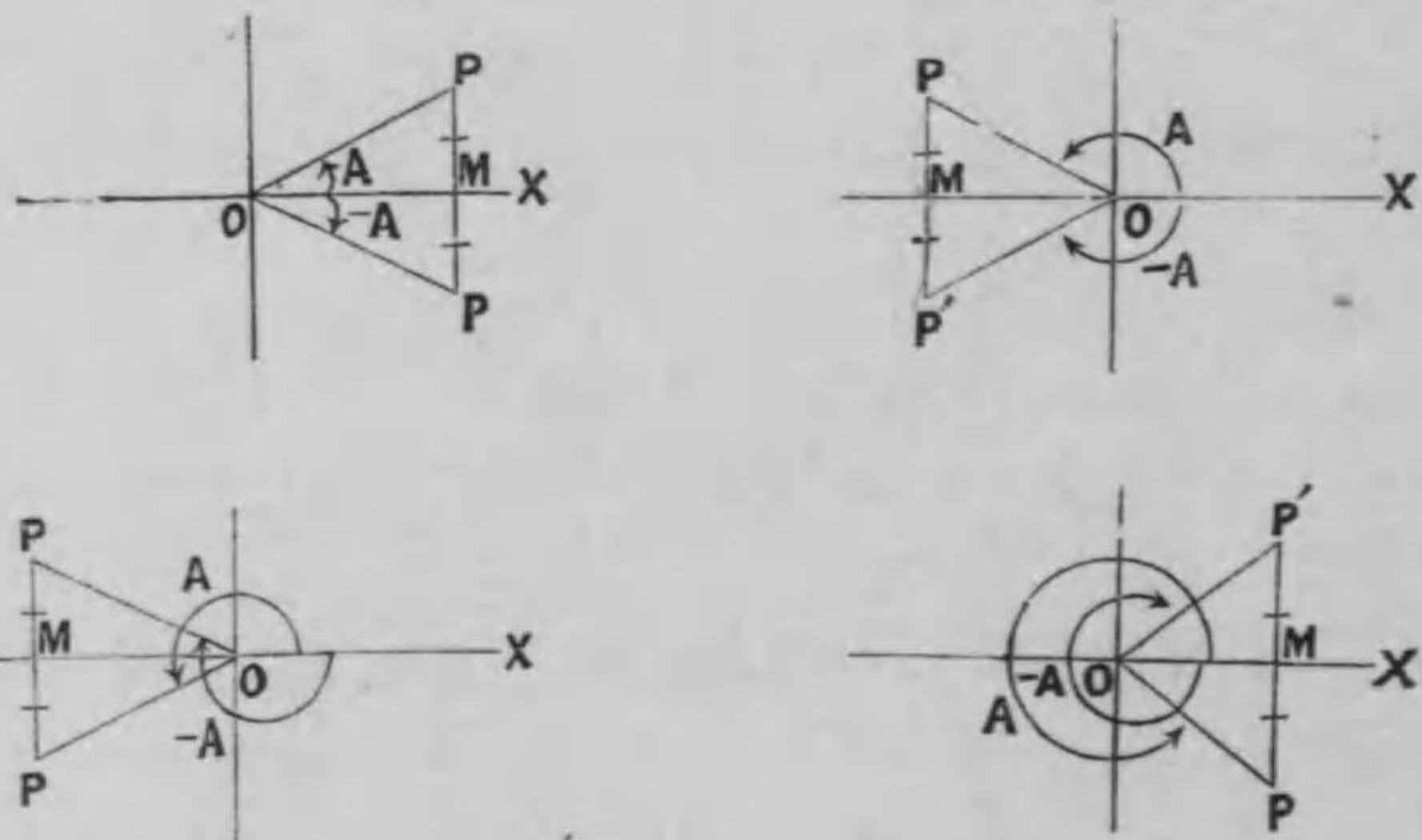
注意 本條ノ定理ヨリ誘導セラレタル關係式モ亦タ一般ニ眞ナリ、從テ第 6 條ノ問題モ亦タ然ルヲ以テ茲ニ再ビ練習スルモ可ナリ。

15. 負角ト正角トノ函數ノ關係

定理 二角が大サ相等シク符號相反スルトキハ、其正弦ハ數値相等シク符號相反ス、又餘弦ハ數値及ビ符號相等シ、即チ

$$\left. \begin{aligned} \sin(-A) &= -\sin A \\ \cos(-A) &= \cos A \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

[證明] $\hat{XOP} = \hat{A}$ 及ビ $\hat{XOP}' = -\hat{A}$ トシ、此二角ノ動徑 $OP = OP'$ トシ、 PP' ト XO 或ハ其引長トノ交點ヲ M トセバ $\triangle OMP \equiv \triangle OMP'$ 、從テ $MP = MP'$ トハ等長ニシテ符號ヲ異ニス。



$$\therefore \sin(-A) = \frac{MP'}{OP'} = \frac{-MP}{OP} = -\frac{MP}{OP} = -\sin A,$$

$$\cos(-A) = \frac{OM}{OP'} = \frac{OM}{OP} = \cos A.$$

同様ニ或ハ此二式ヨリ $\tan(-A) = -\tan A$, $\cot(-A) = -\cot A$ 及ビ $\sec(-A) = \sec A$, $\operatorname{cosec}(-A) = -\operatorname{cosec} A$ ヲ得。

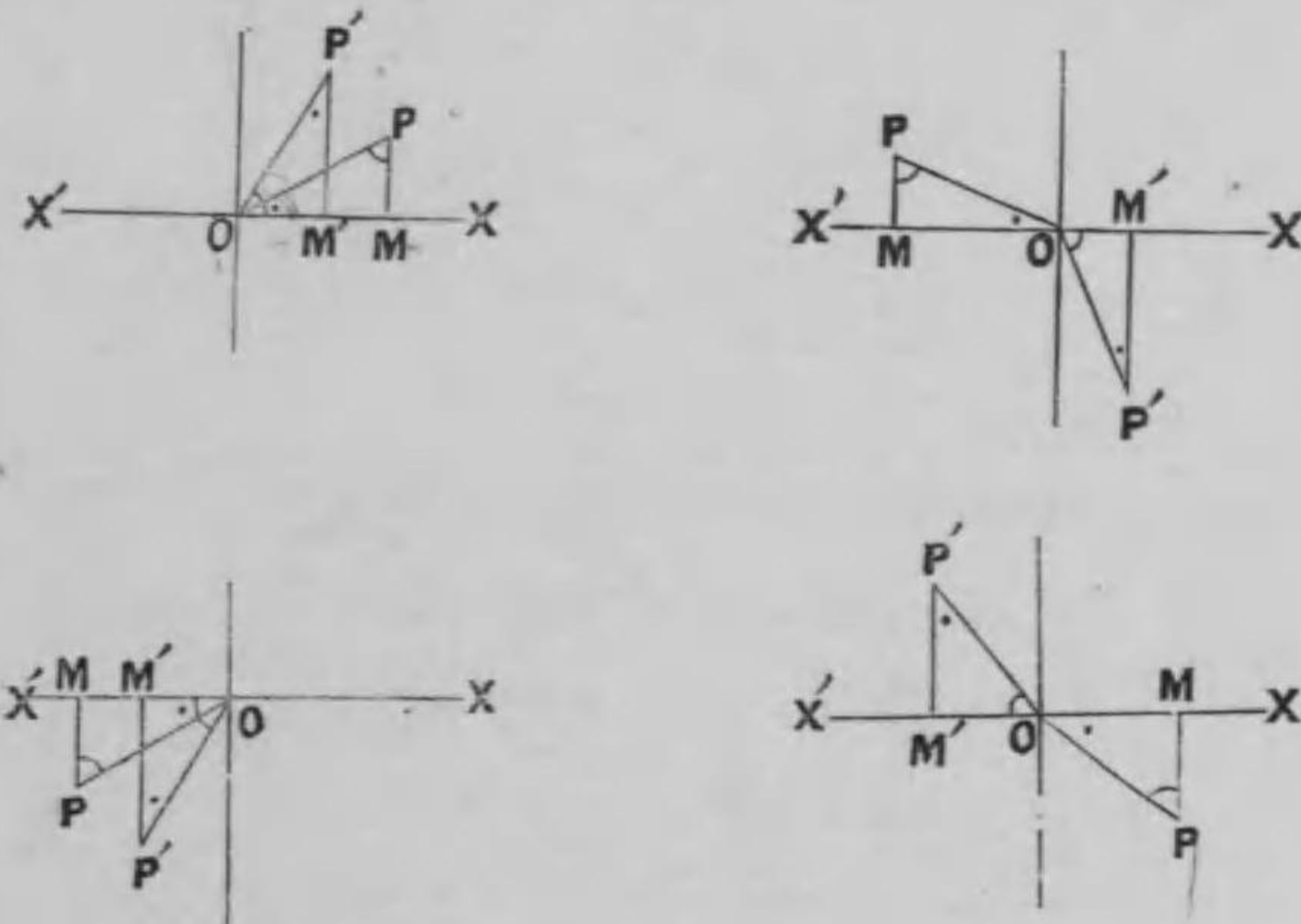
16. 餘角ノ三角函數

定義 二角ノ和ガ 90° ニ等シキトキ其各々ヲ他ノ餘角ト云フ、即チ \hat{A} ト $90^\circ - \hat{A}$ トハ互ニ餘角ナリ。從テ 90° ヨリモ大ナル角ノ餘角ハ必ズ負角ナリ。

定理 二角ガ互ニ餘角ナルトキ其正弦ト餘弦トハ相等シ、即チ

$$\left. \begin{aligned} \sin(90^\circ - A) &= \cos A \\ \cos(90^\circ - A) &= \sin A \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

[證明] $\hat{XOP} = \hat{A}$ 及ビ $\hat{XOP}' = 90^\circ - \hat{A}$ トシ、此二角ノ動徑 $OP = OP'$ トシ、 $PM \perp XX' \perp P'M'$ トスルトキハ $OP = OP'$, $M'P' = OM$, $OM' = MP$ ナリ。



$$\therefore \sin(90^\circ - A) = \frac{M'P'}{OP'} = \frac{OM}{OP} = \cos A, \quad \cos(90^\circ - A) = \frac{OM'}{OP'} = \frac{MP}{OP} = \sin A.$$

同様ニ或ハ此二式ヨリ $\tan(90^\circ - A) = \cot A$, $\cot(90^\circ - A) = \tan A$ 及ビ $\sec(90^\circ - A) = \operatorname{cosec} A$, $\operatorname{cosec}(90^\circ - A) = \sec A$ ヲ得。

$$\text{系. (1)} \quad \left. \begin{aligned} \sin(90^\circ + A) &= \cos A, \\ \cos(90^\circ + A) &= -\sin A. \end{aligned} \right\}$$

[證明] $90^\circ + A$ ト $-A$ トハ互ニ餘角ナルヲ以テ

$$\sin(90^\circ + A) = \cos(-A) = \cos A \quad \text{及ビ} \quad \cos(90^\circ + A) = \sin(-A) = -\sin A.$$

$$\text{系. (2)} \quad A + B = 90^\circ \quad \text{ナラバ} \quad \left. \begin{aligned} \sin A &= \cos B, \\ \cos A &= \sin B. \end{aligned} \right\}$$

17. 補角ノ三角函數

定義 二角ノ和ガ 180° ニ等シキトキ其各々ヲ他ノ補角ト云フ、即チ A ト $180^\circ - A$ トハ互ニ補角ナリ、從テ 180° ヨリモ大ナル角ノ補角ハ必ズ負角ナリ。

定理 二角ガ互ニ補角ナルトキ其正弦ハ相等シク、餘弦ハ數値相等シク符號相反ス、即チ

$$\left. \begin{aligned} \sin(180^\circ - A) &= \sin A \\ \cos(180^\circ - A) &= -\cos A \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

[證明] $\sin(180^\circ - A) = \sin\{90^\circ - (-90^\circ + A)\} = \cos\{-90^\circ - A\} = \cos(90^\circ - A) = \sin A$,
 $\cos(180^\circ - A) = \cos\{90^\circ - (-90^\circ + A)\}$
 $= \sin(-90^\circ + A) = -\sin(90^\circ - A) = -\cos A$.

同様ニ或ハ此二式ヨリ $\tan(180^\circ - A) = -\tan A$, $\cot(180^\circ - A) = -\cot A$ 及ビ
 $\sec(180^\circ - A) = -\sec A$, $\operatorname{cosec}(180^\circ - A) = \operatorname{cosec} A$ ナリ。

注意 此定理ハ亦タ前條ト獨立ニ前條ノ如ク證スルコトナリ。

系.

$$\left. \begin{aligned} \sin(180^\circ + A) &= -\sin A \\ \cos(180^\circ + A) &= -\cos A \end{aligned} \right\}$$

[證明] $180^\circ + A$ ト $-A$ トハ互ニ補角ナルヲ以テ

$$\sin(180^\circ + A) = \sin(-A) = -\sin A, \quad \cos(180^\circ + A) = -\cos(-A) = -\cos A.$$

18. 大角ノ三角函數ヲ小角ノ函數ニ變ズル法

[第一] 與角ガ負角ナラバ、之ヲ負角ト正角トノ關係ノ公式ニ依リテ正角ノ同名函數ニ變ズ。

[第二] 與角ガ $2 \cdot 180^\circ$ 即チ 360° ヨリモ大ナラバ、之ヲ同名函數ノ公式ニ依リテ正角ノ同名函數ニ變ズ。

[第三] 與角ガ $2 \cdot 180^\circ$ ト 90° トノ間ノ角ナラバ、之ヲ補角ノ公式ニ依リテ正角ノ同名函數ニ變ズ。

問題及ビ解答

1. (a) 第二象限ニ在ル角ノ三角函數ヲ其角ノ正切ニテ示セ。

(b) $\cos\theta = \pm \sqrt{1 - \sin^2\theta}$ ノ符號ヲ決定セヨ。 (海兵)

答 (a) 其角ヲ A トセバ $\sin A = -\frac{\tan A}{\sqrt{\tan^2 A + 1}}$, $\cos A = -\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 A}}$ ニシテ, $\operatorname{cosec} A$, $\sec A$, $\cot A$ ハ $\sin A$, $\cos A$, $\tan A$ ノ逆數。

(b) $0^\circ < \theta < 90^\circ$ 及ビ $270^\circ < \theta < 360^\circ$ ナルトキハ $\cos\theta = +\sqrt{1 - \sin^2\theta}$,
 $9^\circ < \theta < 180^\circ$ 及ビ $180^\circ < \theta < 270^\circ$ ナルトキハ $\cos\theta = -\sqrt{1 - \sin^2\theta}$.

2. (a) $\tan A = \frac{8}{15}$ ナルトキ $\sin A$, $\cos A$ ノ値ヲ求メヨ。 (海機)

(b) $\sec A = 2$ ナルトキ $\sin A$, $\tan A$ ノ値ヲ求メヨ。 (海兵)

(c) $\tan\varphi = \frac{n \cdot \sin\theta}{m + n \cdot \cos\theta}$ ナルトキ $\sin\theta$ ノ値ヲ求メヨ。 (海兵)

(d) $\sec A = \sqrt{2}$ ナルトキ $\sqrt{\frac{1 + \cos A}{1 - \sin A}}$ ノ一ツノ値ハ $\sqrt{2} + 1$

ナリ。

(陸士)

[解] (a) $\sin A = \pm \frac{\tan A}{\sqrt{\tan^2 A + 1}} = \pm \frac{8}{15} \div \left\{ \left(\frac{8}{15} \right)^2 + 1 \right\} = \pm \frac{8}{17}$,

從テ $\cos A = \pm \sqrt{1 - \sin^2 A} = \pm \frac{15}{17}$.

(b) 答 $\sin A = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan A = \pm \sqrt{3}$. (c) 答 $\sin\theta = \pm \frac{n \cdot \sin\theta}{\sqrt{m^2 + n^2 + 2mn \cdot \cos\theta}}$

(d) $\sec A = \sqrt{2} \Rightarrow \cos A = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

從テ $\sin A = \pm \sqrt{1 - \cos^2 A} = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$\therefore \sqrt{\frac{1 + \cos A}{1 - \sin A}}$ ノ一ツノ値ハ $\sqrt{\left\{ \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) / \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}}$

$= \sqrt{\left\{ \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - 1} \right\}} = \sqrt{2} + 1$ ナリ。

注意 本題ノ如ク所設ノ角 A ニ制限ナキトキハ之ヨリ誘導シタル函數値ニハ凡テ士ヲ附スルヲ要ス。

3. (a) 三角形ノ一角 A ノ正切ハ $-\frac{4}{3}$ ナリ、角 A ノ正弦及ビ餘弦ヲ求メヨ。

答 $\frac{4}{5}$, $-\frac{3}{5}$. (海機)

(b) $\tan 238^\circ = \frac{8}{5}$ ナルトキ $\sin 238^\circ$ 及ビ $\cos 122^\circ$ ノ値ヲ求メヨ。

(c) $A=202^{\circ}37'$ ニシテ $\sin A = -\frac{5}{13}$ ナルトキ $\cos A$ 及ビ $\cot A$ ノ値ヲ求メヨ.

答 $-\frac{12}{13}, \frac{12}{5}$

(d) A ガ 180° ト 270° トノ間ニ在リテ $3\tan A = 4$ ナルトキ $\sin A - 5\cos A + 2\cot A$ ノ値ヲ求メヨ.

答 3.7.

[解] (b) 問 2 ノ (a) ト同様ニシテ $\sin 238^{\circ} = \pm \frac{8}{\sqrt{89}}$ ナリ. 然ルニ 238° ハ第三象

限内ニ在ルヲ以テ $\sin 238^{\circ} = -\frac{8}{\sqrt{89}}$ ナリ.

次ニ $\cos 122^{\circ} = \cos(360^{\circ} - 238^{\circ}) = \cos(-238^{\circ}) = \cos 238^{\circ} = \pm \sqrt{1 - \sin^2 238^{\circ}}$. 是ヨリ前
ト同様ニ $\cos 122^{\circ} = -\frac{5}{\sqrt{89}}$ ナリ.

4. (a) (i) $\sin(45^{\circ} + A) = \cos(45^{\circ} - A)$, (ii) $\cos(30^{\circ} + A) = \sin(60^{\circ} - A)$

(iii) $\sin(90^{\circ} + A) = \sin(90^{\circ} - A)$ ヲ證セ.

(b) (i) $\sin^2 40^{\circ} + \sin^2 50^{\circ} = 1$,

(ii) $\sin^2(A + 45^{\circ}) + \sin^2(45^{\circ} - A) = 1$, (商船)

(iii) $\frac{\sin(90^{\circ} - A) \tan^2 A \operatorname{cosec}^2 A}{\cos(90^{\circ} - A) \cot(90^{\circ} - A) \sec^2 A} = \sec^2(90^{\circ} - A) - 1$ ヲ證セ.

(c) (i) $\tan^2 A \sec^2(90^{\circ} - A) - \sin^2 A \operatorname{cosec}^2(90^{\circ} - A)$ ノ値ヲ求メヨ.

答 1.

(ii) $\sin 37^{\circ} \cos 53^{\circ} + \cos 37^{\circ} \sin 53^{\circ}$ ヲ最簡ニセヨ. 答 1.

(d) $\triangle ABC$ ニ於テ \hat{C} ガ直角ナルトキハ次式ノ證如何,

$$(\sin A - \sin B)^2 + (\cos A + \cos B)^2 = 2. \quad (\text{山商})$$

[證及解] 餘角ノ公式ニ依ル.

(b) (iii) 兩邊ヲ夫々最簡ニシテ比較ス.

$$\begin{aligned} \text{或ハ 左邊} &= \frac{\cos A \tan^2 A \operatorname{cosec}^2 A}{\sin A \tan A \sec^2 A} = \frac{\cot A \tan A \operatorname{cosec}^2 A}{\sec^2 A} = \frac{\operatorname{cosec}^2 A}{\sec^2 A} = \frac{\cos^2 A}{\sin^2 A} \\ &= \frac{1 - \sin^2 A}{\sin^2 A} = \operatorname{cosec}^2 A - 1 = \sec^2(90^{\circ} - A) - 1. \end{aligned}$$

(d) $\hat{C} = \hat{R}$ ナルヲエ \hat{A} ト \hat{B} トハ互ニ餘角ナラス,

$$\begin{aligned} \therefore (\sin A - \sin B)^2 + (\cos A + \cos B)^2 &= (\cos A - \cos B)^2 + (\cos A + \cos B)^2 \quad [\because (b-a)^2 = (a-b)^2] \\ &= 2(\cos^2 A + \cos^2 B) = 2(\cos^2 A + \sin^2 A) = 2 \times 1 = 2. \end{aligned}$$

5. (a) $\sin(A - 130^{\circ}) = \sin(310^{\circ} - A)$ 及ビ $\cos(110^{\circ} + A) = -\cos(70^{\circ} - A)$.

(b) $\sin(270^{\circ} - A) = -\cos A$ 及ビ $\cos(270^{\circ} + A) = \sin A$ ヲ證セ.

[略解] (b) $270^{\circ} - A$ ノ補角ハ $-90^{\circ} + A$ ナルヲ以テ,

$$\sin(270^{\circ} - A) = \sin(-90^{\circ} + A) = -\sin(90^{\circ} - A) = -\cos A. \quad \text{次問モ同様ナリ.}$$

6. (a) $\alpha + \beta + \gamma = 90^{\circ}$ ナラバ $\sin(\alpha + \beta) = \cos \gamma$, $\tan(\alpha - \beta + \gamma) = \cot 2\beta$

及ビ $\sec(\alpha + 2\beta) = \operatorname{cosec}(\gamma - \beta)$ ノ證如何.

(b) $\alpha + \beta + \gamma = 180^{\circ}$ ナルトキ $\sin(2\alpha + \beta + \gamma) = -\sin \alpha$ 及ビ

$\cos(\beta - \gamma) = -\cos(\alpha + 2\gamma)$ ヲ證セ.

[略解] (a) $\alpha + \beta + \gamma = 90^{\circ}$ ヨリ $\alpha + \beta = 90^{\circ} - \gamma$, $\alpha - \beta + \gamma = 90^{\circ} - 2\beta$ 及ビ
 $\alpha + 2\beta = 90^{\circ} - (\gamma - \beta)$ ナリ. 以下前題ノ如クス.

(b) $\alpha + \beta + \gamma = 180^{\circ}$ ヨリ $2\alpha + \beta + \gamma = 180^{\circ} + \alpha$, $\beta - \gamma = 180^{\circ} - (\alpha + 2\gamma)$ ナリ.

7. 次式ヲ最簡ニセヨ.

(a) $(a-b)\tan(90^{\circ} - A) - (a+b)\tan(90^{\circ} + A)$. 答 $2a \cot A$. (海機)

(b) $\sin 90^{\circ} + \tan^2(180^{\circ} - A) - \operatorname{cosec}^2(90^{\circ} - A)$. 答 0. (東工)

(c) $\tan(180^{\circ} + A) \sin(90^{\circ} + A) + \cos(180^{\circ} - A) \cot(180^{\circ} - A)$.
答 $\operatorname{cosec} A$. (海機)

$$(d) \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) \cos(\pi - a)}{\cos(\pi + a)} + \frac{\sin(\pi - a) \cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right)}{\sin(\pi + a)}. \quad (\text{大工, 海機})$$

答 $\sin x + \cos x$.

(e) $\frac{\sin(180^{\circ} - A)}{\tan(180^{\circ} + A)} \times \frac{\cot(90^{\circ} - A)}{\tan(90^{\circ} + A)} \times \frac{\cos(360^{\circ} - A)}{\sin(-A)}$. 答 $\sin A$. (海兵)

(f) $\operatorname{cosec}(90^{\circ} - A) + \tan(180^{\circ} - A) \sin(-A) = -\sin(90^{\circ} + A)$ ヲ證セ.
(陸士)

(g) 四邊形ノ各角頂ヨリ對角線ヘノ垂線ヲ夫々 a, b, c, d トシ,
又對角線ヲ h, k トシ其夾角ヲ θ トセバ $\sin^2 \theta = (a+c)(b+d)/hk$ ナリ.

[解] 本題ハ餘角, 補角, 負角及ビ同名函數ノ公式ニ依ル.

$$(e) \tan(180^{\circ} + A) = \frac{\sin(180^{\circ} + A)}{\cos(180^{\circ} + A)} = \frac{\sin(-A)}{-\cos(-A)} = \frac{-\sin A}{-\cos A} = \tan A, \quad \sin(-A) = -\sin A,$$

$$\tan(90^{\circ} + A) = \cot(-A) = -\cot A, \quad \cos(360^{\circ} - A) = \cos(-A) = \cos A,$$

$$\therefore \text{元式} = \frac{\sin A}{\tan A} \times \frac{\tan A}{-\cot A} \times \frac{\cos A}{-\sin A} = \frac{\cos A}{\cot A} = \sin A.$$

8. 次ノ各角ノ三角函數ヲ求メヨ, (各學校)

$$(a) 120^\circ, 135^\circ, 150^\circ. \quad (b) 210^\circ, 225^\circ, 240^\circ.$$

$$(c) 300^\circ, 315^\circ, 330^\circ. \quad (d) -210^\circ, -855^\circ, 1230^\circ.$$

[解] 本題ノ求メ方ハ餘角, 補角, 負角及ビ同名函數ノ公式ニ依テ已知ノ正銳角 $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ ノ函數ニ誘導スルニアリ.

$$(a) \sin 120^\circ = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2},$$

$$\tan 120^\circ = \frac{\sin 120^\circ}{\cos 120^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2} \div \left(-\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3}.$$

$$\operatorname{cosec}, \operatorname{sec}, \operatorname{cot} \text{ ハ夫々此等ノ逆數ヲ取ル, 即チ } \operatorname{cosec} 120^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}}, \quad \operatorname{sec} 120^\circ = -2,$$

$$\operatorname{cot} 120^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

次ニ $135^\circ (=180^\circ - 45^\circ), 150^\circ (=180^\circ - 30^\circ)$ ニ付テモ同様ニ求メ得ベシ.

$$(b) \sin 210^\circ = \sin(180^\circ - (-30^\circ)) = \sin(-30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2},$$

$$\cos 210^\circ = \cos(180^\circ - (-30^\circ)) = -\cos(-30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\tan 210^\circ = \frac{\sin 210^\circ}{\cos 210^\circ} = -\frac{1}{2} \div \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ 以下同上.}$$

次ニ $225^\circ (=180^\circ - (-45^\circ)), 240^\circ (=180^\circ - (-60^\circ))$ ニ付テモ同様ニ求メ得.

$$(c) \sin 300^\circ = \sin(2.180^\circ + (-60^\circ)) = \sin(-60^\circ) = -\sin 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos 300^\circ = \cos(2.180^\circ + (-60^\circ)) = \cos(-60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \text{ 以下同上.}$$

次ニ $315^\circ (=2.180^\circ + (-45^\circ)), 330^\circ (=2.180^\circ + (-30^\circ))$ ニ付テモ同様ニ求メ得.

$$(d) \sin(-855^\circ) = -\sin 855^\circ = -\sin(2.2.180^\circ + 135^\circ) = -\sin 135^\circ$$

$$= -\sin(180^\circ - 45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\cos(-855^\circ) = \cos 855^\circ = \cos(2.2.180^\circ + 135^\circ) = \cos 135^\circ$$

$$= \cos(180^\circ - 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ 以下同上.}$$

次ニ $-210^\circ (= -\{180^\circ - (-30^\circ)\}), 1230^\circ (=2.6.180^\circ + 150^\circ)$ ニ付テモ同様ニ

求メ得ベシ.

$$9. (a) \frac{\sin 150^\circ \operatorname{cosec}(-45^\circ)}{\cos 225^\circ \tan 315^\circ} \text{ ノ値ヲ求メヨ. 答 } -1. \text{ (海兵)}$$

$$(b) A = \frac{11}{4}\pi \text{ ナルトキ } \sin^2 A - \cos^2 A + 3\tan A - \sec^2 A \text{ ノ値ヲ}$$

求メヨ, 但シ $\pi = 180^\circ$ ナリ. 答 -5 .

$$10. (a) \sin 0^\circ \cdot \cos 30^\circ + \tan 45^\circ \cdot \cot 60^\circ - \sec 0^\circ \cdot \operatorname{cosec} 90^\circ \text{ ノ値ヲ小數第三位マテ求メヨ. 答 (a) } -423. \text{ (b) } \infty.$$

$$(b) \sin 0^\circ \cdot \cos 90^\circ \cdot \tan 180^\circ + \cot 270^\circ \cdot \sec 360^\circ \cdot \operatorname{cosec} 45^\circ \text{ ノ値ヲ求メヨ.}$$

$$11. (a) A \text{ ガ正銳角ニシテ } \sin A = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ ナルトキハ } 30^\circ < A < 45^\circ \text{ ナリ.}$$

$$(b) A \text{ ガ } 4.5 \text{ 直角ト } 5 \text{ 直角トノ間ニ在レバ } \sin A > \cos A \text{ ナリ.}$$

$$[略解] (a) \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \sin A = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ 之ヲ通分シテ比較スレバ}$$

$\sin 30^\circ < \sin A < \sin 45^\circ$. 然ルニ第一象限ニ於テハ \sin ノ値ハ角ノ増大ニ伴ヒテ増大ス,
 $\therefore 30^\circ < A < 45^\circ$.

$$(b) 4.5 \text{ 直角} = 90^\circ \times 4.5 = 405^\circ = 2.180^\circ + 45^\circ, \text{ 同様ニ } 5 \text{ 直角} = 2.180^\circ + 90^\circ.$$

故ニ A ハ 45° ト 90° トノ間ニアリ. 而シテ $A = 45^\circ$ ナレバ $\sin A = \cos A = \frac{1}{\sqrt{2}}$

ニシテ A ガ増大シテ 90° ニ達スルマテ $\sin A$ ハ漸々増大シ, $\cos A$ ハ漸々減小ス,

$\therefore 45^\circ < A < 90^\circ$ ナルトキ $\sin A > \cos A$ ナリ.

$$12. 0^\circ \text{ ト } 180^\circ \text{ トノ間ニ於テ } \sin x \text{ ガ } \cos 50^\circ \text{ ヨリモ小ナル爲メノ } x \text{ ノ範圍ヲ求メヨ. (海兵)}$$

[解] 今 $\cos 50^\circ = \sin 40^\circ$ 或ハ $= \sin 140^\circ$ ナルヲ以テ

$$(i) x \text{ ガ第一象限内ニアレバ要件ハ } \sin 0^\circ < \sin x \leq \sin 40^\circ,$$

然ルニ第一象限ニ於テ \sin ハ角ノ増大ニ伴ヒ値が増大スルヲ以テ所要ノ x ノ範圍ハ $0^\circ < x \leq 40^\circ$ ナリ.

$$(ii) x \text{ ガ第二象限内ニアレバ要件ハ } \sin 180^\circ < \sin x \leq \sin 140^\circ,$$

然ルニ第二象限ニ於テ \sin ハ角ノ増大ニ伴ヒ値が減小スルヲ以テ所要ノ x ノ範圍ハ $180^\circ > x \geq 140^\circ$ ナリ.

13. x が實數ナルトキ $\sin A$ ハ $x + \frac{1}{x}$ ニ等シキコト能ハズ。之ヲ證セ。

[證] 今 $\sin A = x + \frac{1}{x}$ トシ、之ヲ整理スルニ $x^2 - \sin A x + 1 = 0$ 、
 此方程式ノ x が實數ナル爲メニハ判別式 $\sin^2 A - 4 \times 1 \geq 0$ ナリ、
 故ニ $\sin A \geq \pm 2$ 、然ルニ \sin ノ絶對最大値ハ 1 ナリ、
 故ニ題言ノ如シ。

14. 角 A ガ 0° ヨリ 360° マデ變ズルトキ $\sin A, \cos A, \sin A + \cos A$ ノ値ノ變化ヲ表示セヨ。(海兵)

答

	$\sin A$	$\cos A$	$\sin A + \cos A$
$0^\circ \dots\dots 45^\circ$	$0 \dots\dots \frac{1}{\sqrt{2}}$	$1 \dots\dots \frac{1}{\sqrt{2}}$	$1 \dots\dots \sqrt{2}$
$45^\circ \dots\dots 90^\circ$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \dots\dots 1$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \dots\dots 0$	$\sqrt{2} \dots\dots 1$
$90^\circ \dots\dots 135^\circ$	$1 \dots\dots \frac{1}{\sqrt{2}}$	$0 \dots\dots -\frac{1}{\sqrt{2}}$	$1 \dots\dots 0$
$135^\circ \dots\dots 180^\circ$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \dots\dots$	$-\frac{1}{\sqrt{2}} \dots\dots -1$	$0 \dots\dots -1$
$180^\circ \dots\dots 225^\circ$	$0 \dots\dots -\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-1 \dots\dots -\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-1 \dots\dots -\sqrt{2}$
$225^\circ \dots\dots 270^\circ$	$-\frac{1}{\sqrt{2}} \dots\dots -1$	$-\frac{1}{\sqrt{2}} \dots\dots 0$	$-\sqrt{2} \dots\dots -1$
$270^\circ \dots\dots 315^\circ$	$-1 \dots\dots -\frac{1}{\sqrt{2}}$	$0 \dots\dots \frac{1}{\sqrt{2}}$	$-1 \dots\dots 0$
$315^\circ \dots\dots 360^\circ$	$-\frac{1}{\sqrt{2}} \dots\dots 0$	$\frac{1}{\sqrt{2}} \dots\dots 0$	$0 \dots\dots 1$

第 二 編

複角ノ三角函數

第 一 章

二角ノ和 及ビ 差ノ三角函數

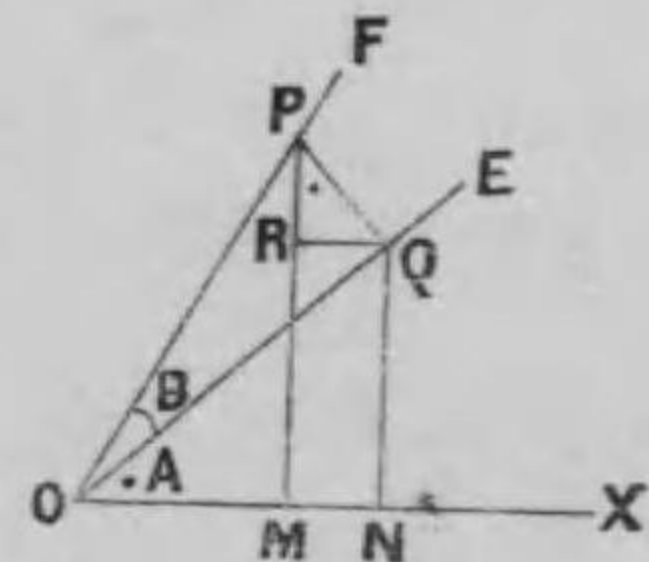
1. 二角ノ和差

[第一]
$$\left. \begin{aligned} \sin(A+B) &= \sin A \cos B + \cos A \sin B \\ \sin(A-B) &= \sin A \cos B - \cos A \sin B \end{aligned} \right\} (8)$$

(美術、海機、商船)

[證明] $\widehat{XOE} = \widehat{A}$, $\widehat{EOF} = \widehat{B}$ トセバ $\widehat{XOF} = \widehat{A+B}$ ナリ、今 $A+B < 90^\circ$ トシ、
 $PM \perp OX$, $PQ \perp OE$ トシ、又 $QN \perp OX$, $QR \perp PM$ トス。然ルトキハ $\widehat{QPR} = \widehat{A}$ 、

$$\begin{aligned} \therefore \sin(A+B) &= \frac{MP}{OP} = \frac{MR+RP}{OP} = \frac{NQ}{OP} + \frac{RP}{OP} \\ &= \frac{NQ \cdot OQ}{OQ \cdot OP} + \frac{RP \cdot PQ}{RQ \cdot OP} \\ &= \sin A \cos B + \cos A \sin B. \end{aligned}$$



次ニ此式ニ於テ B ナ $-B$ トセバ

$$\begin{aligned} \sin(A-B) &= \sin A \cos(-B) + \cos A \sin(-B) \\ &= \sin A \cos B - \cos A \sin B \quad (\because \cos(-B) = \cos B, \sin(-B) = -\sin B) \end{aligned}$$

[第二]
$$\left. \begin{aligned} \cos(A+B) &= \cos A \cos B - \sin A \sin B \\ \cos(A-B) &= \cos A \cos B + \sin A \sin B \end{aligned} \right\} (9)$$

[證明]
$$\begin{aligned} \cos(A+B) &= \frac{OM}{OP} = \frac{ON-RQ}{OP} = \frac{ON}{OP} - \frac{RQ}{OP} = \frac{ON \cdot OQ}{OQ \cdot OP} - \frac{RQ \cdot PQ}{PQ \cdot OP} \\ &= \cos A \cos B - \sin A \sin B. \end{aligned}$$

次ニ此式ニ於テ B ナ $-B$ トスルニ

$$\cos(A-B) = \cos A \cos(-B) - \sin A \sin(-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B.$$

茲ニ A, B 及ビ $A+B$ ハ共ニ 90° ヨリモ小ナリトシテ證明シタリ、
 然レドモ之レ一般角ニ擴張シ得ルナリ。

$$\text{系. } \left. \begin{aligned} \sin(A+B)\sin(A-B) &= \sin^2 A - \sin^2 B \\ \cos(A+B)\cos(A-B) &= \cos^2 A - \sin^2 B \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

(東師, 商船)

$$\text{〔第三〕 } \left. \begin{aligned} \tan(A+B) &= \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} \\ \tan(A-B) &= \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

(海兵)

$$\text{〔證明〕 } \tan(A+B) = \frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)} = \frac{\sin A \cos B + \cos A \sin B}{\cos A \cos B - \sin A \sin B} \\ = \frac{(\sin A \cos B + \cos A \sin B) \div \cos A \cos B}{(\cos A \cos B - \sin A \sin B) \div \cos A \cos B} = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

同様ニ或ハ此式ニ於テ B ヲ -B トスレバ次式ノ證明ヲ得.

$$\text{系. } \cot(A+B) = \frac{\cot B \cot A - 1}{\cot B + \cot A}, \quad \cot(A-B) = \frac{\cot B \cot A + 1}{\cot B - \cot A}$$

問 題 及 ビ 解 答

次ノ 1 乃至 5 ヲ夫々證明セヨ,

1. (a) $\sqrt{2} \sin(A \pm 45^\circ) = \sin A \pm \cos A$.
 (b) $2 \cos(A - 30^\circ) = \sqrt{3} \cos A + \sin A$.
 (c) $2 \sin(A - 60^\circ) = \sin A - \sqrt{3} \cos A$.

〔略解〕 公式 (8), (9) = 依ル.

2. (a) $\cos(45^\circ \mp A) - \sin(45^\circ \pm A) = 0$.
 (b) (i) $\sin(a + \beta) + \cos(a - \beta) = (\sin a + \cos a)(\sin \beta + \cos \beta)$. (海兵)
 (ii) $\cos(a - \beta) - \sin(a + \beta) = (\cos a - \sin a)(\cos \beta - \sin \beta)$.

〔略解〕 (b) ハ左邊ヲ公式 (8), (9) = 依テ展開シ, 而シテ因數ニ括ル.

3. (a) (i) $\sin \gamma = \sin a \cos(\gamma - a) + \cos a \sin(\gamma - a)$.
 (ii) $\cos \gamma = \cos(\beta + \gamma) \cos \beta + \sin(\beta + \gamma) \sin \beta$.
 (b) (i) $\sin mA = \sin A \cos(m-1)A + \cos A \sin(m-1)A$.
 (ii) $\cos mA = \cos A \cos(m-1)A - \sin A \sin(m-1)A$.

〔略解〕 (a) (i) $\sin \gamma = \sin(a + (\gamma - a))$, (ii) $\cos \gamma = \cos(\beta + \gamma - \beta)$,
 (b) (i) $\sin mA = \sin\{A + (m-1)A\} = \sin\{A + (m-1)A\}$, ヲ展開ス.

4. (a) $\frac{1}{2} \cos 40^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 40^\circ = \sin 70^\circ$ ヲ證セ. (海兵)
 (b) $\cos 4A \cos 2A - \sin 4A \sin 2A = \cos 3A \cos 2A - \sin 3A \sin 2A$,,
 (c) $\sin A \cos(B+C) - \sin B \cos(A+C) = \sin(A-B) \cos C$,,
 (d) $\frac{\sin(a-\beta)}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\sin(\beta-\gamma)}{\cos \beta \cos \gamma} + \frac{\sin(\gamma-a)}{\cos \gamma \cos \alpha} = 0$,,
 (e) $\frac{\sin A \sin(B-C) - \sin B \sin(A-C)}{\sin C}$ ヲ最簡ニセヨ. (海兵)

〔略解〕 公式 (8), (9) = 依ル. (e) 答 $\sin(B-A)$.

5. (a) (i) $\sin 36^\circ \sin 30^\circ = \sin^2 33^\circ - \sin^2 3^\circ$. (大工)
 (ii) $\cos 108^\circ = 2(\cos^2 84^\circ - \sin^2 24^\circ)$.
 (b) $\sin(a + \beta) \sin 3(a - \beta) = \sin^2(2a - \beta) - \sin^2(2\beta - a)$.
 (c) $\sin^2 B + \sin^2(A-B) + 2 \sin B \sin(A-B) \cos A$ ヲ最簡ニセヨ. (水講)
 (d) $\frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\sin^2(A+B)} = \frac{\tan A - \tan B}{\tan A + \tan B}$. (陸士)
 (e) $1 + \tan(A+B) \tan(A-B) = \frac{1 - 2 \sin^2 B}{\cos^2 A - \sin^2 B}$. (札農)

〔證及解〕 公式 (10) = 依ル.

$$(c) \text{ 元式} = \sin^2 B + \sin(A-B) \{ \sin(A-B) + 2 \sin B \cos A \} \\ = \sin^2 B + \sin(A-B) \{ \sin A \cos B - \cos A \sin B + 2 \cos A \sin B \} \\ = \sin^2 B + \sin(A-B) \sin(A+B) = \sin^2 B + \sin^2 A - \sin^2 B = \sin^2 A$$

6. (a) $\tan A \pm \tan B = \frac{\sin(A \pm B)}{\cos A \cos B}$. (r) $\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{\tan \alpha - \tan \beta} = \frac{\sin(a + \beta)}{\sin(a - \beta)}$. (長商)
 (c) $\tan^2 A - \tan^2 B = \frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\cos^2 A \cos^2 B}$ ヲ證セ.

7. (a) $\tan(45^\circ \pm A) = \frac{1 \pm \tan A}{1 \mp \tan A}$. (b) $\frac{\sin^2 A - \sin^2 B}{\cos^2 A - \cos^2 B} = \tan \frac{3}{4} \pi$. (陸士)
 (c) $\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$ ヲ對數計算ニ適スル式ニ直セ. 答 $\tan(x - 45^\circ)$.
 (d) $\frac{\tan(n+1)A + \tan(1-n)A}{1 - \tan(n+1)A \tan(1-n)A} = \tan 2A$ ヲ證セ.

〔略解〕 公式 (11) = 依ル, 但シ $\tan 45^\circ = 1$, $\tan 135^\circ = -1$.

8. A, B 及び A+B が正鋭角ニシテ,

(a) (i) $\sin A = \frac{2}{3}, \cos B = \frac{3}{5}$ ナルトキ $\sin(A+B)$ 及び $\cos(A-B)$ ノ値ヲ求メヨ.

答 $(6+4\sqrt{5})/15, (3\sqrt{5}+8)/15.$ (海兵, 海機)

(ii) $\sin A = \frac{12}{13}, \cos B = \frac{3}{5}$ ナルトキ $\tan(A+B)$ ノ値ヲ求メヨ.

(iii) $\cos A = \frac{4}{5}, \cos B = \frac{9}{41}$ トシテ $\cos(A+B)$ ノ値ヲ求メヨ.

(b) (i) $\tan A = \frac{1}{2}, \tan B = \frac{1}{3}$ ナルトキ $\tan(A-B)$.. (海經)

(ii) 同上 $\sin(A+B)$.. (永講)

(iii) $\tan A = \frac{1}{3}, \tan B = 8$ ナルトキ $\tan(A+B)$.. (商船)

(iv) $\tan A = \frac{\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}, \tan B = \frac{\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}$ ナルトキ $\tan(A-B)$ ノ

値ヲ小數第三位マデ計算スベシ.

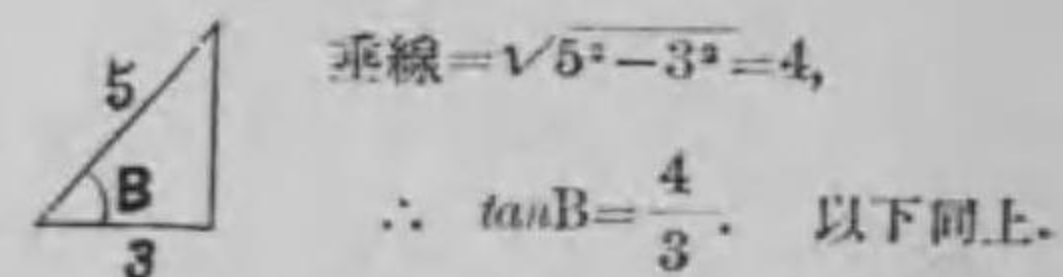
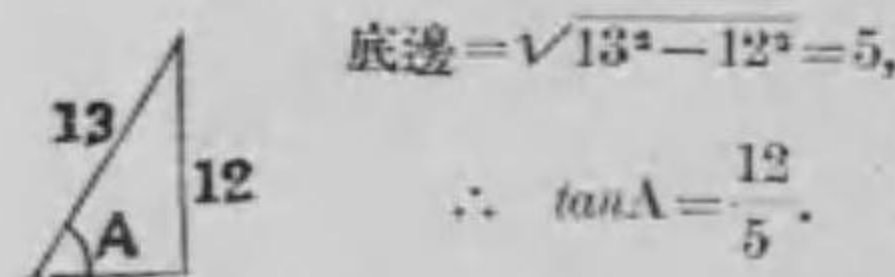
(c) $\sec A = \frac{17}{8}, \operatorname{cosec} B = \frac{5}{4}$ ナルトキ $\sec(A+B)$ ノ値ヲ求メヨ.

[解] (a) (ii) $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\sin A}{\sqrt{1-\sin^2 A}} = \frac{12}{13} / \sqrt{1-(\frac{12}{13})^2} = \frac{12}{13} \times \frac{13}{5} = \frac{12}{5}$

$\tan B = \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\sqrt{1-\cos^2 B}}{\cos B} = \frac{\sqrt{1-(\frac{3}{5})^2}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{5} \times \frac{5}{3} = \frac{4}{3}$

$\therefore \tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = \frac{(\frac{12}{5} + \frac{4}{3})}{(1 - \frac{12}{5} \times \frac{4}{3})} = -\frac{4}{3}$

[別解] $\sin A = \frac{12}{13}$ ナルニテ 又 $\cos B = \frac{3}{5}$ ナルニテ



答 (a) (iii) $-\frac{124}{205}$ (b) (i) $\frac{1}{7}$ (ii) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (iii) $-\frac{16}{193}$

(c) $-\frac{85}{36}$ 此 (b) の (ii) 及び (c) へ上ノ別解ニ倣フベシ. $\tan(A+B) = \frac{-32}{17}$

注意. 若シ問題ニ A, B 及び A+B が正鋭角又ハ 0° ト 90° トノ間ノ角ナル條件ヲキトキハ, 根號ハ複號トヲ採ルヲ要ス.

9. (a) (i) A+B が正鋭角ニシテ $\tan A = \frac{1}{2}, \tan B = \frac{1}{3}$ ナルトキハ $A+B=45^\circ$ ナリ. (千醫)

(ii) $\tan \beta = \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha}$ ナラバ $\alpha + \beta$ ノ一ツノ値ハ 45° ナリ.

(iii) $\cot x = 2, \operatorname{cosec} y = \sqrt{10}$ ナルトキハ $x+y=45^\circ$ ナリ, 但シ x, y ハ何レモ正鋭角ナリ. (高等)

(b) (i) 正切ガ夫々 $\sqrt{7} + \sqrt{6}$ 及び $\sqrt{7} - \sqrt{6}$ ナル二鋭角ノ和ヲ求メヨ.

(ii) 二等邊 $\triangle ABC$ ノ B ヲ直角トス, BC ヲ E, F ニ於テ三等分シ $\hat{C}AF, \hat{F}AE$ ノ正切ヲ求メヨ. 答 $\frac{1}{5}, \frac{3}{11}$. (東工)

(c) $\alpha + \beta = 45^\circ$ ナルトキハ $(1 + \tan \alpha)(1 + \tan \beta) = 2$ ナリ.

[證及解] (a) (i) $\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = \frac{(\frac{1}{2} + \frac{1}{3})}{(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3})} = 1 = \tan 45^\circ,$
 \therefore 兩邊ヲ比較シテ $A+B=45^\circ$ ナリ得. (b) (ii) 答 90° .

(c) $\tan(\alpha + \beta) = \tan 45^\circ$ 即チ $\frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = 1,$ 此分母ヲ拂ヒ轉項シテ
 $\tan \alpha + \tan \beta + \tan \alpha \tan \beta = 1,$ 此兩邊ニ 1 ヲ加フレバ
 $1 + \tan \alpha + \tan \beta + \tan \alpha \tan \beta = 2$ 即チ $(1 + \tan \alpha)(1 + \tan \beta) = 2$

10. (a) $\sin(180^\circ + x) \cdot \sin(90^\circ + y) - \sin(90^\circ - x) \cdot \sin(180^\circ - y)$ ヲ最簡ニセヨ. 答 $-\sin(x+y)$. (海兵)

(b) $\sin(x+60^\circ) + 2\sin(x-60^\circ) - \sqrt{3} \cdot \cos(120^\circ - x)$.. (海機)

(c) $\sin 100^\circ \cdot \sin(-160^\circ) + \cos 200^\circ \cdot \cos(-280^\circ)$..

(d) $\tan A \cdot \tan(A+60^\circ) + \tan A \cdot \tan(60^\circ - A) + \tan(A+60^\circ) \tan(A-60^\circ)$.. 答 -3 .

[解] (b) 元式 = $\sin(x+60^\circ) + 2\sin(x-60^\circ) + \tan 60^\circ \cdot \cos(60^\circ + x)$
 $= \frac{\sin(x+60^\circ)\cos 60^\circ + \cos(60^\circ+x)\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} + 2\sin(x-60^\circ)$
 $= 2\{\sin(x+120^\circ)\} + 2\sin(x-60^\circ) = 2\sin(60^\circ - x) + 2\sin(x-60^\circ)$
 $= 2\sin(60^\circ - x) - 2\sin(60^\circ - x) = 0.$

(c) 元式 = $-\sin 100^\circ \cdot \sin 20^\circ + (-\cos 20^\circ) \cdot (-\cos 100^\circ)$ [\therefore 補角, 負角ノ公式]
 $= \cos(100^\circ + 20^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}.$

11. (a) (i) $\tan\theta = \frac{b}{c}$ ナレバ $\tan(\theta - 45^\circ) = \frac{b-c}{b+c}$ ナリ. (商船)

(ii) $\tan B = \frac{n \sin A \cos A}{1 - n \sin^2 A}$ ナレバ $\tan(A - B) = (1 - n) \tan A$

ナリ.

slip. (b) $\tan\theta = \frac{a}{b}$ ナレバ $a \cos\omega + b \sin\omega = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \omega)$ ナリ. (東工)

(c) $\sin\theta : \cos\theta = a : b$ ナレバ $a \sin 2\theta + b \cos 2\theta = b$ ナリ.

[證明] (b) $\sin\theta = \frac{\tan\theta}{\sqrt{\tan^2\theta + 1}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ 及 $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2\theta}} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

$\therefore a \cos\omega + b \sin\omega = \sqrt{a^2 + b^2} \sin\theta \cos\omega + \sqrt{a^2 + b^2} \cos\theta \sin\omega = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\theta + \omega)$.

(c) 略解 $a \sin 2\theta + b \cos 2\theta = b \left(\frac{a}{b} \sin 2\theta + \cos 2\theta \right) = b(\tan\theta \sin 2\theta + \cos 2\theta)$, 下略.

12. (a) 二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ ノ二根ヲ $\tan A, \tan B$ トシテ $\tan(A + B)$ ノ値ヲ求メヨ. 答 $b/(c-a)$.

(b) 二次方程式 $x^2 + 6x + 7 = 0$ ノ二根ヲ $\tan \alpha, \tan \beta$ トスレバ $\sin(\alpha + \beta) = \cos(\alpha + \beta)$ ナリ. (海兵)

[證明] (b) 二次方程式ノ根ト係數ノ關係ニヨリ

$\tan \alpha + \tan \beta = -6$ 及 $\tan \alpha \tan \beta = 7$ ナルヲ以テ,

$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{-6}{1 - 7} = 1, \therefore \sin(\alpha + \beta) = \cos(\alpha + \beta)$.

13. $\cos^2\theta + \cos^2(a + \theta) - 2 \cos a \cos\theta \cos(a + \theta)$ ノ値ハ θ ニ關係ナシ.

[證明] 問 5 ノ (c) ト同様ニ 元式 $= 1 - \cos^2 a$ トナルガ故ナリ.

14. $\tan B = \frac{2 \sin A \sin C}{\sin(A + C)}$ ナラバ $\cot A, \cot B, \cot C$ ハ等差級數ヲナス

コトヲ證セ.

(仙醫)

[證明] $\cot B = \frac{\sin(A + C)}{2 \sin A \sin C} = \frac{\sin A \cos C + \cos A \sin C}{2 \sin A \sin C} = \frac{1}{2}(\cot C + \cot A)$

即チ $2 \cot B = \cot A + \cot C$. 故ニ $\cot A, \cot B, \cot C$ ハ等差級數ヲナス.

15. A, B ガ共ニ 90° ヨリモ小ナルトキハ次式ノ證如何,

$\sin(A + B) < \sin A + \sin B$.

(東師)

[證] A, B ガ正銳角ナレバ $\cos B, \cos A$ ハ共ニ 1 ヨリモ小ナルヲ以テ, $\sin A \cos B < \sin A$ 及 $\cos A \sin B < \sin B$, 此二式ヲ相加フレバ $\sin A \cos B + \cos A \sin B < \sin A + \sin B$ 即チ $\sin(A + B) < \sin A + \sin B$.

16. 次式ヲ證明セヨ,

(a) $\tan(p + q)A - \tan pA - \tan qA = \tan(p + q)A \tan pA \tan qA$.

(b) $\tan A + \tan 2A + \tan 3A = \tan A \tan 2A \tan 3A$.

(c) $\tan 5A - \tan 3A - \tan 2A = \tan 5A \tan 3A \tan 2A$.

[證] (a) 左邊 $= \tan(p + q)A - (\tan pA + \tan qA)$

$= \tan(p + q)A - \tan(p + q)A(1 - \tan pA \tan qA)$

$\left[\because \tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} \right]$

$\tan A + \tan B = \tan(A + B) - \tan(A + B) \tan A \tan B$

17. 次式ヲ夫々證明セヨ,

(a) $\sin(A + B + C) = \sin A \cos B \cos C + \sin B \cos C \cos A$

$+ \sin C \cos A \cos B - \sin A \sin B \sin C$.

(b) $\cos(A + B + C) = \cos A \cos B \cos C - \cos A \sin B \sin C$

$- \cos B \sin C \sin A - \cos C \sin A \sin B$

(c) $\tan(A + B + C) = \frac{\tan A + \tan B + \tan C - \tan A \tan B \tan C}{1 - \tan A \tan B - \tan B \tan C - \tan C \tan A}$

[略解] $A + B + C = (A + B) + C$ トシテ展開シ, 再ビ展開ヲ行フ.

18. $\tan A + \tan B + \tan C - \tan A \tan B \tan C = \frac{\sin(A + B + C)}{\cos A \cos B \cos C}$ ヲ證セ.

[略解] 左邊ヲ \sin, \cos ノ項ニ變シ同分母トナシ, 公式 (8) ニ依ル.

第 二 章

倍角ノ三角函數

2. 二倍角

$$〔第一〕 \quad \sin 2A = 2\sin A \cos A \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} \cos 2A &= \cos^2 A - \sin^2 A \\ &= 1 - 2\sin^2 A \\ &= 2\cos^2 A - 1 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

(大工, 海機)

$$〔證明〕 \quad \begin{aligned} \sin 2A &= \sin(A+A) = \sin A \cos A + \cos A \sin A = 2\sin A \cos A. \\ \cos 2A &= \cos(A+A) = \cos A \cos A - \sin A \sin A = \cos^2 A - \sin^2 A \\ &= (1 - \sin^2 A) - \sin^2 A = 1 - 2\sin^2 A \\ &= \cos^2 A - (1 - \cos^2 A) = 2\cos^2 A - 1. \end{aligned}$$

$$\text{系.} \quad \sin(a \pm \beta) = 2\sin \frac{1}{2}(a \pm \beta) \cos \frac{1}{2}(a \pm \beta).$$

$$〔第二〕 \quad \tan 2A = \frac{2\tan A}{1 - \tan^2 A} \quad (14)$$

(海機, 盛農)

$$〔證明〕 \quad \tan 2A = \tan(A+A) = \frac{\tan A + \tan A}{1 - \tan A \tan A} = \frac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}.$$

注意. 上ノ證明ハ公式(11)ニ於テ BヲAト置キタルニ過ギズ.

3. 三倍角

(陸士, 七高, 海機)

$$〔第一〕 \quad \left. \begin{aligned} \sin 3A &= 3\sin A - 4\sin^3 A \\ \cos 3A &= -(3\cos A - 4\cos^3 A) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$〔證明〕 \quad \begin{aligned} \sin 3A &= \sin(2A+A) = \sin 2A \cos A + \cos 2A \sin A \\ &= 2\sin A \cos^2 A + (1 - 2\sin^2 A) \sin A = 2\sin A(1 - \sin^2 A) + \sin A - 2\sin^3 A \\ &= 2\sin A - 2\sin^3 A + \sin A = 3\sin A - 4\sin^3 A. \\ \cos 3A &= \cos(2A+A) = \cos 2A \cos A - \sin 2A \sin A \\ &= (2\cos^2 A - 1)\cos A - 2\sin^2 A \cos A = 2\cos^3 A - \cos A - 2(1 - \cos^2 A)\cos A \\ &= 2\cos^3 A - \cos A - 2\cos A + 2\cos^3 A = 4\cos^3 A - 3\cos A. \end{aligned}$$

法)

第二編 倍角ノ三角函數

$$〔第二〕 \quad \tan 3A = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A} \quad (\text{商船})$$

$$〔證明〕 \quad \begin{aligned} \tan 3A &= \tan(2A+A) = \frac{\tan 2A + \tan A}{1 - \tan 2A \tan A} = \frac{\frac{2\tan A}{1 - \tan^2 A} + \tan A}{1 - \frac{2\tan A}{1 - \tan^2 A} \times \tan A} \\ &= \frac{2\tan A + \tan A - \tan^3 A}{1 - \tan^2 A - 2\tan^2 A} = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}. \end{aligned}$$

注意. 之モ亦々公式(11)ニ於テ Bヲ2Aト置キタルニ過ギズ.

問 題 及 ビ 解 答

次ノ1乃至7ヲ夫々證明セヨ,

$$1. (a) \quad \sin 2A = \frac{2\tan A}{1 + \tan^2 A} \quad (\text{海兵, 商船, 五高, 長商, 千醫})$$

$$(b) \quad \cos 2A = \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A} \quad (c) \quad \frac{\sin 2A}{1 + \cos 2A} = \tan A. \quad (\text{陸士})$$

$$(d) \quad \frac{\sin^2 A + \cos 2A + \cos^2 A}{\sin 2A} = \cot A. \quad (e) \quad \frac{1 - \cos 2A}{\sin 2A} = \tan A. \quad (\text{海機})$$

$$〔證明〕 (a) \quad \sin 2A = 2\sin A \cos A = 2\sin A \cos A \times \frac{1}{\cos^2 A \sec^2 A} = \frac{2\tan A}{\sec^2 A} = \frac{2\tan A}{1 + \tan^2 A}.$$

$$(b) \quad \cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = \frac{\cos^2 A - \sin^2 A}{\cos^2 A} \times \frac{1}{\sec^2 A} = (1 - \tan^2 A) \times \frac{1}{1 + \tan^2 A}.$$

$$(c) \quad \frac{\sin 2A}{1 + \cos 2A} = \frac{2\sin A \cos A}{1 + (2\cos^2 A - 1)} = \frac{2\sin A \cos A}{2\cos^2 A} = \frac{\sin A}{\cos A} = \tan A.$$

$$2. (a) \quad \sin 2a + \sin^2 a \tan a + \cos^2 a \cot a = \sec a \operatorname{cosec} a. \quad (\text{商船})$$

$$(b) \quad \sec 2A - \cos 2A = \frac{4\sin^2 A}{1 - \tan^2 A} \quad \text{或ハ} \quad \frac{4\tan^2 A}{1 - \tan^4 A}. \quad (\text{水講})$$

$$(c) \quad \sin 2A \tan 2A = \frac{4\sin^2 A}{1 - \tan^2 A} \quad (d) \quad \tan a = \frac{2}{\cot \frac{1}{2}a - \tan \frac{1}{2}a}. \quad (\text{東師})$$

$$(e) \quad \frac{\sin^4 a - \cos^4 a}{\sin 2a - 1} \div \frac{\sin a + \cos a}{\cot a - 1} \quad \text{ハ} \quad \operatorname{cosec} A = \text{等シ}. \quad (\text{醫專})$$

$$〔證明〕 (b) \quad \text{左邊} = \frac{1}{\cos 2A} - \cos 2A = \frac{1 - \cos^2 2A}{\cos 2A} = \frac{(1 + \cos 2A)(1 - \cos 2A)}{\cos 2A} \\ = \frac{2\cos^2 A \cdot 2\sin^2 A}{\cos^2 A - \sin^2 A} = \frac{4\sin^2 A}{1 - \tan^2 A} \quad \text{次問ハ1即チ} \frac{\sec^2 A}{1 + \tan^2 A} \text{ヲ乗ズ.}$$

$$(e) \quad \sin 2a - 1 = 2\sin a \cos a - (\sin^2 a + \cos^2 a) = -(\sin a - \cos a)^2 \quad \text{ニ注意セヨ.}$$

3. (a) (i) $\tan A + \cot A = 2\operatorname{cosec} 2A$ (大工, 農實, 陸士)
 (ii) $\tan 50^\circ + \cot 50^\circ = 2\sec 10^\circ$. (專檢, 海機)
 (b) (i) $\cot A - \tan A = 2\cot 2A$. (陸士)
 (ii) $\cot \frac{\pi}{8} - \tan \frac{\pi}{8} = 2$. (大工)
 (iii) $\tan A + 2\tan 2A + 4\tan 4A = \cot A - 8\cot 8A$ 及ビ
 $\tan 70^\circ = \tan 20^\circ + 2\tan 40^\circ + 4\tan 10^\circ$.
 (c) $\tan A + \cot A = 2\sqrt{2}$ ナラハ $2A$ ノ一ツノ値ハ 45° ナリ.

[證明] (a) $\tan A + \cot A = \frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\sin A \cos A} = \frac{1}{\frac{1}{2}\sin 2A} = 2\operatorname{cosec} 2A$.

(b) (i) (ii) (iii) ハ (i) ノ兩邊ノ角ヲ 2 倍シ且ツ兩邊ヲ 2 倍シ, 又其兩邊ノ角ヲ 2 倍シ且ツ兩邊ヲ 2 倍シ, 而シテ (i) ト此二式トヲ邊々相加ヘテ轉項ス.

(c) ハ (a) ト同様ニ $2\operatorname{cosec} 2A = 2\sqrt{2}$, $\therefore \cos 2A = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ナルユエ $2A$ ノ最小正角ハ 45° ナリ.

4. (a) $\cot^2 A - \tan^2 A = \frac{4\cos 2A}{\sin^2 2A}$ (陸士, 大工)
 或ハ $= 4\cot 2A \operatorname{cosec} 2A$. (農實, 盛農)
 (b) $\frac{\cos \alpha \pm \sin \alpha}{\cos \alpha \mp \sin \alpha} = \sec 2\alpha \pm \tan 2\alpha$. (陸士, 農實)

[證明] (a) $\cot^2 A - \tan^2 A = \frac{\cos^2 A}{\sin^2 A} - \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} = \frac{\cos^4 A - \sin^4 A}{\sin^2 A \cos^2 A}$
 $= \frac{(\cos^2 A + \sin^2 A)(\cos^2 A - \sin^2 A)}{\frac{1}{4}(2\sin A \cos A)^2} = \frac{1 \times \cos 2A}{\frac{1}{4}\sin^2 2A} = \frac{4\cos 2A}{\sin^2 2A}$
 或ハ $= 4\cot 2A \operatorname{cosec} 2A$.

(b) $\frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} = \frac{(\cos x + \sin x)^2}{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x + 2\sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x}$
 $= \frac{1 + \sin 2x}{\cos 2x} = \frac{1}{\cos 2x} + \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \sec 2x + \tan 2x$.

5. (a) $1 + \tan(A+B) \tan(A-B) = \frac{\cos 2B}{\cos^2 A - \sin^2 B}$ (農實)
 (b) $1 + \tan \alpha \tan \frac{\alpha}{2} = \sec \alpha$. (小商)

[證明] (a) 左邊 $= 1 + \frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)} \cdot \frac{\sin(A-B)}{\cos(A-B)} = \frac{\cos(A+B)\cos(A-B) + \sin(A+B)\sin(A-B)}{\cos(A+B)\cos(A-B)}$
 $= \frac{\cos^2 A - \sin^2 B + \sin^2 A - \sin^2 B}{\cos^2 A - \sin^2 B} = \frac{1 - 2\sin^2 B}{\cos^2 A - \sin^2 B} = \frac{\cos 2B}{\cos^2 A - \sin^2 B}$

6. (a) (i) $\sin(\alpha + 45^\circ) \sin(\alpha - 45^\circ) = -\frac{1}{2}\cos 2\alpha$. (海經)
 (ii) $\sec(45^\circ + \alpha) \sec(45^\circ - \alpha) = 2\sec 2\alpha$. (高等)
 (b) $\cos(15^\circ - A) \sec 15^\circ - \sin(15^\circ - A) \operatorname{cosec} 15^\circ = 4\sin A$. (海機)
 (c) (i) $\tan(45^\circ + A) + \tan(45^\circ - A) = 2\sec 2A$. (水講)
 (ii) $\tan(45^\circ + A) - \tan(45^\circ - A) = 2\tan 2A$. (海機, 仙工, 商船, 海兵)
 (d) $\sec^2(\alpha + 45^\circ) - \operatorname{cosec}^2(\alpha - 45^\circ) = 4\tan 2\alpha \sec 2\alpha$. (商船)
 (e) $2 + \tan^2(\alpha + 90^\circ) + \cot^2(\alpha - 90^\circ) = 4\operatorname{cosec}^2 2\alpha$. (海兵)
 (f) $\frac{1 - \tan^2(45^\circ - A)}{1 + \cos^2(45^\circ - A)} = \sin 2A$.

[證] (b) 左邊 $= \frac{\cos(15^\circ - A)}{\cos 15^\circ} - \frac{\sin(15^\circ - A)}{\sin 15^\circ} = \frac{\sin 15^\circ \cos(15^\circ - A) - \cos 15^\circ \sin(15^\circ - A)}{\sin 15^\circ \cos 15^\circ}$

$= \frac{\sin\{15^\circ - (15^\circ - A)\}}{\frac{1}{2}\sin 30^\circ} = \frac{\sin A}{\frac{1}{2}} = 2\sin A$.

(c) (ii) 左邊 $= \frac{1 + \tan A}{1 - \tan A} - \frac{1 - \tan A}{1 + \tan A} = \frac{(1 + \tan A)^2 - (1 - \tan A)^2}{(1 - \tan A)(1 + \tan A)}$
 $= \frac{4\tan A}{1 - \tan^2 A} = 2 \times \frac{2\tan A}{1 - \tan^2 A} = 2\tan 2A$.

(e) $1 + \tan^2 A = \sec^2 A$, $1 + \cot^2 A = \operatorname{cosec}^2 A$ 注意セヨ.

(f) 左邊ヲ \sin, \cos トシ $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ ヲ用フ.

7. $\cos 2\alpha = 2\cos(45^\circ + \alpha)\cos(45^\circ - \alpha)$.

[證明] $\cos 2\alpha = \sin(90^\circ - 2\alpha) = 2\sin(45^\circ - \alpha)\cos(45^\circ - \alpha)$
 $= 2\cos(45^\circ + \alpha)\cos(45^\circ - \alpha)$. [$\because \sin A = \cos(90^\circ - A)$]

8. (a) $\sin x = \frac{3}{5}$ ヲ知リテ $\sin 2x$ 及ビ $\tan 2x$ ノ値ヲ求メヨ. (海兵, 東工)

(b) $\tan \theta = \frac{2ab}{a-b}$ ナルトキ $\sin 2\theta$ ノ値ヲ求メヨ. (熊工)

(c) $\cot \alpha$ ノ値ヲ知リテ $\sin 2\alpha$ ノ値ヲ計算スル式ヲ作レ. (海機)

(d) (i) $\tan A = 2 - \sqrt{3}$, $\cos B = \frac{1}{2}$ ナルトキ $\tan(2A+B)$ ノ値ヲ求メヨ.
 $\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \cdot \frac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = \frac{1-2\sqrt{3}+3}{1-3} = \frac{4-2\sqrt{3}}{-2} = \sqrt{3}-2$ 答 ∞ 或 $-1/\sqrt{3}$. (北農)

(ii) $\tan x = 2$, $\tan y = \frac{1}{3}$ ヲ知リテ $\tan\{2(x+y)\}$,, (海兵, 陸士)