# 數學的園地

劉薰宇著

# 數學的園地

劉薰宇著

開明書店

開明青年叢書

# 目次

# 一 開場話

我在中學三年級學物理的時候，曾經碰過一次物理教員的釘子，現在只要一想到，額上好像都還有餘痛。詳細的情形已不大記得清楚了，大概是這樣的：為了什麼一個公式，我不知道牠的來源；便很愚笨地向了那位教員追問。起初他很和善，雖然已有點不大高興，他說：「你記住好了，怎樣來的，說來你這時不會懂。」在我那時的呆板而幼稚的心裏，無論如何不承認眞有說來不會懂的這末一回事，仍舊不知趣地這樣請求：「先生說說看吧！」他眞懊惱了，這一點我記得非常明白，他的臉發一陣紅又發一陣青，他氣忿忿地，呼吸很促，手也顫抖了，從桌子上拿起一支粉筆使勁在黑板上寫了這樣幾個字：$\frac{dy}{dx}$，(後來我知道這只是記號，不好單看成幾個字) 眼睛瞪着我，幾乎想要將我吞到他的

肚裏才甘心似的，「這你懂嗎？」我嚇得不敢出聲，心裏暗自想：「眞是不懂！」

從那一次起，雖則我已被嚇得自己只好承認不懂，然而總也不大甘心，常常想從什麽書上去找出這幾個奇怪字看，可惜得很，一直過了三年才遇見了牠，才算「懂其所懂」地懂了一點；眞的，第一次知道牠的意義的時候，心裏感到無限的喜悅！

不管怎樣，馬馬虎虎，我總算懂了，然而我的年齡也大起來了，我已經踏進了被人追問的領域了！「代數，幾何，學過了學些什麽呢？」「微積分是怎樣的東西呢？」這類的問題，常常被比我年紀小些的朋友們問到，我總記起我碰釘子時的苦悶，不忍心讓他們也在我的面前碰，常常想些似是而非的解說，使他們不全然失望。不過，總覺得這也於心不安，我相信一定可以簡單地將牠們的大意說明的，只是我不曾仔細去思索過。新近偶然從書坊店看見一本兩小時的數學（Deux Heures de Mathématique），書名很奇特，便買了來。翻讀一過，覺得牠很夠替我來解答前面的問題，因此就依據牠，寫成這篇東西，算是了卻一樁心願。我常常這樣想，數學和辣椒很有些相同，沒有喫過的人，初次喫到，免不

了要叫要哭，但眞喫慣了，不喫卻過不得；不只這樣，就是喫到滿頭是汗，兩眼淚流，身體上固然夠苦，精神上卻愈加舒暢。話雖如此，這裏卻不是眞要把這惡辣的東西硬叫許多人流一通大汗，實在還沒有喫生葱那樣的辣。

有一點卻得先聲明，數學的階段是很緊嚴的，只好一步一步地走上去，要跳，那簡直是妄想，結果只有跌了下來。因此，這裏雖然竭力避去繁重的說明，但也是對於曾經學過初等的算術，代數，幾何，而沒有全部忘掉的人說的。因此先來簡單地說幾句關於算術，代數，幾何的話。

## 算術

無論哪一個人要走進數學的園地裏去遊覽一番，一進門就碰到的是算術，這是因爲牠比較容易也比較簡單，所以易於親近的緣故。話雖這樣講，眞在數學的園地裏遊個盡興，到後來你要碰到的卻又是牠了，「整數的理論」就是數學中最難的部分。

你在算術中，經過了加，減，乘，除四道正門，就可以看到一座大廳，門上橫着一塊大大的匾，寫的是：「整數的性質」五個大字。已經走進這大廳，而且很快地就走了出來，由那裏轉到分數的庭院去，你當然很高興。但是我問你：你在那大廳裏究竟得到了什麼呢？裏面最重要的不是質數嗎？1，3，5，7，11，13……你都知道牠們是質數了吧！然而這就夠了嗎？隨便給你一個數，比如103，你能夠用比較牠小的質數一個一個地去除牠，除到後來，得數比除數小了還除不盡，你就決定牠是質數。這個法子，是很靠得住的，一點不會欺騙你。然而牠只是一個小聰明的玩意兒，眞要把牠正正經經地來用，那就叫你不得不搖頭了。倘若我給你的不是103，而是一個有一百零三位的整數，你還能呆板板地照老法子去決定牠是不是質數嗎？人壽幾何，一個不湊巧，恐怕你還沒有試到一半，已經天昏地暗了。那末，有沒有別的法子可以決定一個數是不是質數呢？對不起得很，眞要問，多請些人到這座大廳裏去轉去。

在「整數的理論」中，問題很多，得了別的一部分數學的幫助，也解決過一些，所以

算術自己也是在牠的領域內常常增加新的建築和點綴的，不過不及別的部分來得快罷了。

## 代數

走到代數的殿上，你知道解一次方程式和二次方程式，自然這是再快樂沒有了，算術碰見了要弄得焦頭爛額的四則問題，只要用一兩個羅馬字母去代替那所求的數，依着題目已說明白的條件，立起一個方程式，這就死板板地照法則可以求出答數來，眞是又輕巧又明白。代數比算術眞有趣得多，容易得多！但是，這也只是在那殿裏隨便玩玩就走了出來的說法，若留連在裏面，又將看出許多困難了，一次兩次方程式，總算可以解了，一般的方程式怎樣呢？

## 幾何

幾何的這座院子，裏面本來是陳列着些直線和曲線的圖形的，所以，你初走進去的時候，立刻會感到一種特別風味，好像牠在數學的園地裏，儼然是別有天地。但從笛卡特 (Descartes) 發現了牠和代數的院落的通路，這座院子也就不是孤另另的了。牠的內部更加充實富麗起來，萊布利玆 (Leibnitz) 用解析的方法也增加了牠的滋長繁榮的力量不少。的確的，用二元一次方程式 $y=mx+c$ 表示直線，用二元二次方程式 $x^2+y^2=c^2$ 和 $x^2/a^2+y^2/b^2=1$ 相應地表示圓和橢圓，實在便利不少。這條路，一經發現，來往行人都可通過，並不是只許進不許出，所以解析數學和幾何就手挽手地互相扶助着向前發展。

還有，這條路發現以後，也不是因爲牠比較便利，幾何的院子獨自的出路，便懸上一塊「路不通行，游人止步」的牌；牠自己獨立地進展，也一樣地沒有停息。即如李曼 (Riemann) 就是走老路題着「位置分析」(Analysis Situs) 又題着「形學」(Topobogie) 的那間亭子，也就是後來新造的，在裏面使你可以看見空間的性質，幾何的連續質的純

粹的性相，你只須用到那「量度」的抽象觀念就夠了。

## 總集論 (Théorie des Ensembles)

在物理學的園地裏面，有着恩斯坦(Einstein)的相對性原理的新建築，牠所陳列的，是通過性慧由敏感而發明的新定理；像這種性質的寶貨，數學的園地當中，也可以找得出嗎？在數學的園地裏，走來走去，所能夠見到的，都只是些老花樣，舊古董，不過和遊賞一所傾頹的古刹一樣嗎？

不，絕不！那些古老參天的樹幹，那些質樸的從幾千百年遺留下來的亭臺樓閣，在這園地裏，固然是占重要的地位，極容易映到遊人的眼裏。但倘使你看到了這些還不滿足，你慢慢地走進去，就可以看出古樹林中還有鮮豔的花草，亭樓裏面，更有新奇的裝飾；這些增加這園地的美感，充實了這園地的生命。由牠們，就可以使你知道，數學的園地從開闢到現在，沒有一天停止過墾殖。在別的各種園地裏，可以看見燦爛耀目的新點綴，但也

常常可以見到那舊建築傾跌以後殘留的破磚爛瓦，在數學的園地裏卻只有欣欣向榮的盛觀；這殘敗的使人感到淒涼的遺蹟，卻非常稀少，牠裏面的一切建築裝飾，都有着很牢固的根底的呀！

數學的園地裏，有一種使人感到不可思議的寶物叫做「無限」(L'infini mathématique)，牠常常都是一樣的嗎？牠裏面究包含着些什麼，我們能夠說明嗎？牠的意義必須確定嗎？

遊到了數學的園地當中的一個新的院落，牆門上寫着「總集論」三字的，那裏面，就可以給你看這些問題的解答了。這裏面是極有趣味的，用一面大的反射鏡，可以叫你看到這全個園地和幽邃的哲學的花園的關聯以及牠倆的通路。三十年來，康脫 (Contor) 將超限數 (Des nombres transfinis) 的意義導出，和那物理的園地中可驚的新建築，一般的重要而且可驚異！在本文的最後，就要說到牠。

# 二　第一步

我們來開始講正文吧，先從一個極平常的例說起。

假如，我和你兩個人同乘一列火車去旅行，在車裏非常寂寞，不湊巧我們既不是詩人，不能從那些經過車窗往後飛奔的田野樹木吸取什麼「煙士披里純」；我們又不是畫家，能夠在剎那間感到什麼自然界的色相的美；我們只有枯坐了，我們會覺得那車子走得很慢，眞到不耐煩的時候，也許竟會感到牠比我們自己步行還慢；但這全是主觀的，就是同樣地以爲牠走得太慢，我們所感到的慢的程度就不一定相等。我們只管詛咒車子跑得不快，車子，牠一定不肯甘休，要問我們拿出證據來這一下子，有事做了，我們兩個人就來測量牠的速度。

你立在車窗前數那鐵路旁邊的電線桿——假定牠們每兩根的距離是相等的，而且我們已經知道了——我看着我的錶。當你看見第一根電線桿的時候，你立刻叫出「一」來，我就注意我的錶上的秒針在什麼地方。你數到一個數目要停止的時候，又將那數叫出，我再看我的錶上的秒針指什麼地方。這樣我們屈指一算，就可以得出這火車的速度。假如得出來的是一分鐘走一公里，那麼六十分鐘，就是一小時，這火車要走六十公里；火車的速度就是每小時六十公里，我們無論怎樣，不好說牠太慢了。同樣地，若是我們知道：一個人十二秒鐘可以跑一百公尺，一匹馬半點鐘能跑十五公里，我們也可以將這人每秒鐘的或這馬每點鐘的速度算出來。

這你覺得很容易，是不是？但，你眞要做得對，就是說，你眞要得出那火車或人的精確的速度來，實際卻很難。比如你另換一個方法，先只注意火車或人從地上的某一點跑到某一點要多少時間，然後用捲尺去量那兩點的距離；再計算他們的速度，就多半不會恰好，火車每點鐘是走六十公里，人每十二秒鐘可跑一百公尺；也許火車走六十公里只要

59又$\frac{3}{10}$分，八跑一百公尺不過11又$\frac{3}{5}$秒。你只要眞耐煩，你儘可以去測到幾十次或一百次，你一定可看出來，沒有幾次的得數是全然相同的。所以速度的測法，說起來很簡便，做起來，那就很不容易。你測了一百次，說不一定全沒有一次是對的。但這一點關係也沒有，即使一百次中有一次是對的，你也沒有法子知道究竟是哪一次。歸根結蒂，我們不得不穩妥地說，只能測到「相近」的數。

說到「相近」也有程度的不同，用的器械，——時錶，尺子——越精良，「相近」的程度越高，反過來差誤就越小。極精密的電時錶，測量時間，差誤可以小於百分之一秒，我們可以想像，假如再將牠弄得更精密，可以使差誤小於千分之一秒，或者還要小些；但是，無論怎樣小，要使這差誤沒有，卻難能了！

* * * *

同樣地，我們對於一切運動的測量，也只能得相近的數。第一自然是因要測運動，總得測那種運動所經過的距離和牠費去的時間；而這距離和時間的測量就只能得到相

近的數。還不只這樣，運動本身也就是變動的。

假定一列火車由一個速度變到另一個較大的速度，就是變得更快一些，牠決不能突然就由前一個跳到第二個。那末，在這兩個速度當中，有多少不同的中間速度呢？這個數目，老實不客氣，是無限的呀！而我們的測量的方法，卻只容許我們計算出一個有限的數來。我們計算的時候，時間的單位越取得小，所得的結果自然越和眞實的速度相近，但無論用一秒鐘做單位或十分之一秒鐘做單位，在相鄰的兩秒鐘或兩個十分之一秒鐘的當中，常常總是有無限的中間速度。

能夠確切認知的速度原是抽象的！

這個抽象的速度只存在於我們的想像中。

這個抽象的速度，我們能夠理會，卻不能從經驗中得到。在我們所能測量得的一些速度當中，可以說，都有無限的中間速度存在。已經知道我們所測得的速度不精確，而又要用牠，這不是在自己騙自己嗎？

為了我們的精神不安，要補這個缺陷，需要一個理論上的精確的數目，需要一個容許計算到無限制的相近數的理論，應了這需要，人們就發明了微積分。

哈哈！微積分的發明，是一件很有趣味的事。英國的牛頓 (Newton) 和德國的萊布利慈差不多在同一個時候都將牠的原理發明了，弄得英國人認為微積分是他們的恩賜，德國人也認為是他們的禮物，各人自負着。其實呢，牛頓是從運動上面研究出來的，而萊布利慈卻是從幾何上出發，不過殊途同歸罷了。這個原理的發明，眞是功德無量，現在數學園地中的大部分建築都用牠當臺柱，物理園地的飛皇騰達也全仗牠。這個發明已有兩百年了，牠對於我們的科學的思想，着實有偉大的影響。就是說，假使微積分的原理還沒有發明，現在的所謂文明，一定不是這樣的輝皇，這決不是誇張的話！

# 三　速度

朋友，你留神過嗎？當你舒舒服服地坐着，因爲有什麼事要走開的時候，你立起來的頭幾步一定比較走得慢，然後才漸漸地加快；將到達你的目的地時，你又會慢起來的。自然這是照普通的情形說，賽跑就是例外，那班運動家，在賽跑的時候，因爲錦標在前面把他們拉昏了，就是已到了終點，他們還是忘命地跑。不過這時的終點，只是對他們的「錦標到手」的一聲叫喊，他們眞要停住，總得慢跑幾步，不然就得要人來攙扶，不然他們就只好跌到在地上。這種行動的原則，簡直是自然界的大法，不只是你和我才知道，你去看狗跑，你去看鳥飛，你去看魚游。

還是說火車吧！一列火車，初離站臺的時候，動得多末平穩多末緩慢，牠的速度往後

卻漸漸加大又加大地增加起來，在長而直的軌道上奔馳；（注意：軌道彎曲的地方，牠是不好過於快的）快要到站了，牠的速度就漸漸地減小又減小，後來才停止在站臺邊。記好這個速度變化的情況，假使經過兩點半鐘，火車一共走了一百二十五公里。要問這火車的速度是什麼？你怎樣回答呢？

我們看見了每一瞬間都在變化的速度，那在某路線上的一列車的一個速度，我們能說出來嗎？能全憑旅行人的遲鈍的測量回答嗎？

再舉一個例，然後來講明速度的意義。

用一塊平滑的木板，在上面挖一條光滑的長槽，槽邊上刻好公分，公寸和公尺各種數目，把一個光滑的小球放在木槽的一端讓牠自已向前滾出去，看着時錶，注意這木球過1，2，3各公尺的時間，假設正好是1秒，2秒和3秒。

這木球的速度是什麼呢？

在這種簡單的情形，這問題很容易回答：牠的速度在3公尺的路上總是一樣的，每

秒鐘1公尺。

在這種情形底下，我們說這速度是個常數，而這種運動，我們稱牠是「等速運動」。一個人踏了自行車在一條直路上走，若是等速運動，那末，牠的速度就是常數。我們測得他8秒鐘共走了40公尺。這樣，他的速度便等於每秒鐘5公尺。

關於等速運動，如這裏所舉出的球的運動，自行車的運動，或其他相類的運動，要計算牠們的速度，這比較容易，只要考察運動所經過的時間和通過的距離，用所得的時間去除所得的距離，就能夠得出來；3秒鐘走3公尺，速度每秒鐘1公尺；8秒鐘走40公尺，速度每秒鐘5公尺。

再用我們的球來試那種速度不是常數的情形。

把球「擲」到槽上，也讓牠「就勢」自己滾出去，我們可以看出，牠越滾越慢，終於在5公尺(假設)的一端便停止了。設若牠一共經過10秒鐘。

這速度的變化是這樣，前半最初的速度，比在半路的大，後半卻漸漸地減小下去，到

了終點便等於零。

我們來推究一下，這樣子的速度，是不是和等速運動一樣地是一個常數？

我們說，牠10秒鐘走過5公尺；倘若牠是等速運動，那末牠的速度就要是每秒鐘$\frac{5}{10}$或$\frac{1}{2}$公尺。但是，我們明明看出，牠不是等速運動，所以我們說每秒鐘$\frac{1}{2}$公尺是牠的「平均速度」。

實際上，這球的速度，先是比每秒鐘$\frac{1}{2}$公尺大，中間有一個時候和牠相等，以後就比牠小了。假如另外有個球，常常都用了這個平均速度運動，牠經過10秒鐘，也是停止在5公尺的地方。

看過了這種情形，我們再來答覆前面關於火車的速度的問題：「假使經過兩點半鐘，火車一共走了一百二十五公里，這火車的速度是什麼？」

因爲這火車不是等速運動，我們只能說出牠的平均速度來。牠兩點半鐘一共走125公里，我們說，牠的平均速度，在那條路上是每小時$2\frac{1}{2}$分之125公里，就是每小時

50公里。

我們來想像，當火車從車站開動的時候，同時有一輛汽車也開動，而且就是沿了那火車的軌道走，不過牠的速度，總不變，一直是每點鐘50公里。起初汽車在火車的前面，後來被火車追過去，到最後，牠們卻同時到停車的站上。這就是說，牠們都是兩點半鐘一共走了125公里，所以每點鐘50公里是汽車的眞速度而是火車的平均速度。

通常，若知道了一種運動的平均速度，和牠所經過的時間，我們就能夠計算出牠所通過的路程。那兩點半鐘一共走125公里的火車，牠有一個每點鐘50公里的平均速度。倘若牠夜間開始走，從我們的時錶上看去，一共走了七個鐘頭，我們就可計算出牠大約走了350公里。

但是這個說法，實在太粗疏了！牠只是給了一個總集的測量，忽略了牠沿路的運動的情形。那末，還有什麼方法應用牠可以更好地知道那眞的速度呢？

倘若我們再有一次新的火車旅行，我們能夠從鐵路旁邊立着的電線桿上看出公

里的數目，又能夠從時錶上看到火車所行走的時間。每走一公里所要的時間，我們都記下來，一直記到125次，我們就可以得出125個平均速度。這些平均速度自然全不相同，我們可以說，現在對於那火車的運動的認識是很詳細了。由那些漸漸加大，又漸漸減小的125個不同的速度，在這一段行程中火車的速度的變化的觀念，我們大體算是有了。

但是，這就夠了嗎？火車在每一公里中間，牠是不是等速運動呢倘若，我們能夠回答一個「是」字，那自然，上面所得的結果就夠了。可惜這個「是」字不好輕易就回答！我們既已知道火車在全行程上不是等速運動，同時卻又說，牠在每一公里中是等速運動，這種運動的情形實在很難想像得出來；兩個速度不相等的等速運動，是沒法直接相聯接的。所以我們不能不承認火車在每一公里內的速度也有不少的變化。這個變化，我們有沒有方法去考查出牠來呢？

自然，方法是有的，照前面的老樣子，比如說，將一公里分成一千段，假如我們又能夠

測到火車每走這一小段的時間，那末我們就可得出牠在一公里的行程中的一千個不同的平均速度。這很好，對於火車的速度的變化，我們所得到的觀念，更是清晰了。倘若，能夠將測量弄得更精密些，再將每一小段又分成多少個小小段，得出牠們的平均速度來；段數分得越多，我們得出來的不同的平均速度跟着也就一樣地多起來；我們對於那火車的速度的變化的觀念，也是更加明瞭。路程的段落越分越小，時間的間隔也就越來越近，所得的結果也就越弄越精密；然而，無論怎樣，所得出來的總是平均速度，而且，我們還得不要太高興了，這種分段求平均速度的方法，若只空口說白話，我們固然無妨樂觀一點，可盡量地連續想下去；至於實際要動起手來，那就有個限度了。

若想求物體轉動或落下的速度，即如行星運轉的速度，我們必須取出些距離，——若那速度不是一個常數，就盡可能的力量取最小的——而注意牠在各距離中經過的時間，因此得到一些平均速度。這一點卻須得注意，所得到的只是一些平均速度。

歸根結蒂一句話，所有我們的科學的實驗，或日常的經驗，都由一種連續而有規律

的形式給我們一個有變化的運動的觀念。(除了衝擊和突然的靜止，這些是難讓人覺出牠們的運動情形的) 我們不能夠明明白白地辨認出比較大的速度或比較小的速度當中任何速度的變化。雖是這樣，我們可以想像在任何兩個相鄰的速度中間，總有無量數的中間速度存在着。

為了測量速度起見，我們分割空間成為有規則的一些小部分，而在每一小部分中，注意牠所經過的時間，求出相應的「平均速度」這是上面已說過的方法。空間的段落越小，得出來的平均速度越接近，也就讓我們所知道的越近於眞實。但，無論怎樣，總不能完全達到眞實的境界；因為我們的這種想法總是不連續的，而運動卻是一個連續的量。

這個方法，只是在測量和計算上很夠應用罷了，牠卻不能講明我們的直覺的論據。

我們用了計算「無限小」的方法所推證得的結果來調和這論據和實驗的差別，這是非常困難的，但是這種困難在很久以前就已很清楚了。卽如大家都知道的最老的惹龍德勒 (Zénon d'Elée)，有名的帕拉朵克斯 (Paradoxe) 所謂「飛矢不動，」便

是一個好例。既說那矢是飛的，怎麼又說牠不動呢？這個話，中國也有，莊子上面講到公孫龍那班人的辯術，就引「鏃矢之疾也，而有不行不止之時，」這一條，不行不止，是怎樣一回事呢？這比惹龍的話更還來得玄妙了。從我們的理性去判斷，這自然只是一種詭辯，但要找出惹龍的論證的錯誤，而將牠推翻，卻也不很容易。在惹龍，這個矛盾的推論只供他利用了來否定運動的可能性；他卻沒有疑心到他的推論的方法，究竟有沒有錯誤。對於我們，這卻給了一個機緣，讓我們去找尋新的推論方法，並且把一些新的概念弄得更精密。飛矢不動的這個帕拉朵克斯可以更明白地這樣說：「飛矢是不動的；因為，在牠的行程上的每一剎那，牠總佔據着某一個有定的地位。所謂佔據着一個有定的地位那就是靜止的了。但是一個一個的靜止連接在一淘，無論有多少個，牠都只能生出一個靜止的狀態來；所以說飛矢是不動的。」

在後面，關於這個從古以來打了不少筆墨官司的帕拉朵克斯的解釋，我們還要重複說到；這裏，只要注意這一點，惹龍的推論法，是把時間細細地分成了極小的間隔，使得

他的反對派中的一些人推想到，這個帕拉朵克斯的奧妙就藏在連動的連續性裏面。運動是連續的，我們從上例中早已明白了。但是，這個運動的連續性，惹龍在他無限地細分時間的間隔的當兒，卻將牠弄掉了。

連續性這東西，從前，希臘人也知道，不過他們所說的連續性是直覺的，我們現在卻講的是由推論來的連續性。對於解答飛矢不動這帕拉朵克斯，很明白地，牠很是必要的條件，但是單只有牠並不充足。我們必須要精密地確定「極限」的意義，我們可以看出來，計算「無限小」的時候，就要使用到牠的。

照前幾段的說法，似乎我們對於從前的希臘哲人，如惹龍之流，很有些失敬了。然而，我們可以認清楚，他們的帕拉朵克斯雖然不合於眞理，但他們已經知道表明直覺和推理兩樣當中的矛盾了！

怎樣彌補這個缺憾呢？

找出一個實用的方法來，弄得測量一步精密一步，而使所得的結果和眞實一步接

近一步；是不是就只這樣的問題呢？

這本來只是關於機械一方面的事，但以後我們就可以看出來，將來實際所得的結果就是可以更超越於現在的，根本的問題卻還是解答不來。因爲，方法的研究無論牠達到怎樣好的程度，總是要和一串不連續的數相連在一淘，所以不能表示連續的變化。

* * * *

眞實的解答，是要發明一種在理論上有可能性的計算方法來表示一個連續的運動，牠能夠在我們的理性上面，嚴密地講明這連續性，和我們的精神所要求的一樣。

# 四 函數和變數

科學上所使用的名詞，各自都有牠的死板板的定義的，不過只是板了面孔來說，眞是太乏味了，什麼叫函數，我們且先來舉個不大合式的例。

我想，先把「數」字的意思放寬一些，不必太認眞，在這裏既不是要算狗肉賬，倒也沒有什麼大妨礙。這麼一來，我可以告訴你，現在的社會中，「女子就是男子的函數。」但你不要誤會，以爲我是在說女子應當是男子的奴隸，奴隸不奴隸，這是另外的問題。我所想說的只是女子的地位是隨了男子的地位變的。寫到這裏，忽然靈機一轉，記起了一段笑話，一段戲文上的笑話。有一個窮書生，討了一個有錢人家的女兒做老婆，因此平日就以怕老婆出了名。後來，他的運道亨通了，進京朝考，居然一榜及第；他身上披起了藍衫，許

多差人侍候着，回到家裏；一心以爲這回可以向他的老婆復仇了。那知老婆見了他，仍然是神氣活現的樣子。他覺得這未免有些奇怪，便問：「從前我窮，你向着我搭架子，現在我做了官，爲什麼你還要搭架子呢？」

她的回答很妙：「愧煞你是一個讀書人，還做了官，『水漲船高，』你都不曉得嗎？」

你懂得「水漲船高嗎？」船的地位的高低，就是隨了水的漲落變的，用句數學上的話來說，船的地位就是水的漲落的函數。說女子是男子的函數，也就是同樣的理由。在家從父，出嫁從夫，夫死從子，這已經有點像函數的樣子了，但還嫌粗些，我們無妨再精細一點說。女子一生下地來，父親是知識階級，或官僚政客，她就是千金小姐；若是父親是挑糞擔水的，她就是丫頭；這個地位一直到了她嫁人以後才得改變。這時改變也很大，嫁的是大官僚，她便是夫人；嫁的是小官僚，她便是太太；嫁的是教書匠，她便是師母；嫁的是生意人，她便是老板娘；嫁的是 $x$，她就是 $y$；$y$ 總是趕了 $x$ 變的，自己全作不來主；這種情形和「水漲船高」眞是一樣，所以我說，女子是男子的函數，$y$ 是 $x$ 的函數。

不過，這只是一個用來作比喻的例究竟女子的地位雖然隨了她所嫁的男子有什麼夫人，太太，師母，老板娘……$y$的不同，這只是命運，並非這些人彼此之間骨頭眞有輕重的差別；所以沒法用數量來表示，說是函數，終究有些勉強，眞要明瞭函數的意思，我們還是來正正經經地講別的例吧！

請你放一枝燃着的蠟燭在隔你的嘴一公尺遠的地方：倘若你向着那火焰吹一口氣，你這口氣，就會使得那火焰歪開，閃動，說不定，因了你的那一口氣很大，簡直就將牠吹熄了。倘若你沒有吹熄，——就是吹熄了也不打緊，重新點着好了；——請你將那枝蠟燭放到隔你的嘴三公尺遠的地方：你照樣再向着那火焰，吹一口氣，牠雖然也會歪開，閃動，卻沒有前一次的來得利害了。你一點不要怕麻煩，這是科學上的所謂實驗的態度，無妨向着蠟燭走近去，又退遠開來，你儘吹那火焰，看看牠歪開和閃動的情形。你一定不用費什麼事，就可以證實你隔那火焰越遠，牠歪開得越少。在這種情形，我們就說，火焰歪開的程度是蠟燭和嘴的距離的「函數」。

我們還能夠決定這個「函數」的性質：我們說這種函數是「降函數」火焰歪開的程度（函數）當蠟燭和嘴的距離漸漸「加大」的時候，牠卻逐漸「減小」。

現在，將蠟燭放在一定的地方，你自己也站好不要再走動，這樣，蠟燭和嘴的距離便是一定的了：你再來吹那火焰，隨着你那一口氣的強些或弱些，火焰歪開的程度也就大些或小些。這樣看來，火焰歪開的程度，也是吹氣的強度的函數。不過，這個函數又是另外一種，性質和前面的有點不相同：我們說牠是「升函數」；火焰歪開的程度（函數），當吹氣的強度漸漸「加大」的時候，牠也逐漸「加大」。

所以，一種現象可以不只是一種情景的函數；即如火焰歪開的程度是吹氣的強度的升函數，又是蠟燭和嘴的距離的降函數。在這裏，我們有幾點應當同時注意到：第一，火焰會歪開，是因為你在吹牠；第二，歪開的程度有大小，是因為蠟燭和嘴的距離有遠近同着你吹的氣有強弱。倘使你不去吹，牠自然不會歪開；即或你去吹，蠟燭和嘴的距離，以及你吹的氣的強弱，每次都是一樣，那末，牠的歪開也沒有什麼變化。所以函數是隨了別的

數變的，別的數自己也得先會變才行。窮書生不會做官，他的老婆自然也就當不來太太，因爲這樣，這種自己變的數，我們稱牠爲變量或變數。火焰歪開的程度，我們說牠是倚靠着兩個變數的一個函數。在平常的事情中，我們也能夠找出這類函數來：你用一柄錘去敲釘子，那錘所加到釘子上的力量，就是錘的重量和牠敲下去的速度這兩個變量的升函數；還有火爐噴出的熱力，就是爐孔的面積的函數。因了爐孔加大，牠就漸漸減弱。其他的例，你只要肯留意，隨處都可以碰見。

你會覺得奇怪起來了吧！數學是怎樣一種精密深奧的科學，從這種日常生活的事件當中，憑了一點簡單的推理，怎麼就能夠扯到函數的數學的概念上去呢？怎麼由我們的常識的解說，也可發現函數的意義呢？我們再來講一個比較細密一些的例。

我們用一個可以測定牠的變量的函數來做例，就可以發現牠的數學的意義。在鍋裏熱着一鍋子的水，放一只寒暑表在水裏面：你注意去觀察那寒暑表的水銀柱。你守在鍋子邊，你將可以看出，那水銀柱的高度，一直是在變動的，經過的時間越長，牠長的越高；

水銀柱的高度，實在就是那水的溫度的函數；這就是說，牠是倚靠着我們所加到那一定量的水的熱量的。所以，倘若測得了所供給的熱量，又測得了那水量，你就能夠決定出牠們的函數，那水銀柱的高來。

對於同量的水，加多了熱量上去，或是將同量的熱加到較少的水量，這時水銀柱一定更要長得高些，這高度我們是有法子可以算出的。

由上面的一些例看來，無論變數也好，函數也好，牠們的值都是變動不居的。以後我們所要常講到的變數中，我們要特別指出一個或幾個來，叫牠們是「獨立變數」(或者，爲了簡單起見，就只叫牠變數) 別的呢，就叫牠們是「倚變數」或這些變數的函數。

對於變數的每一個數值，牠的函數，我們都可以有一個相應的數值的。若是我們知道了變數的數值，就可以決定牠的函數的相應的數值時，這個函數，我們就算牠是「已知函數」。即如前面的例當中，倘若我們知道了物理學上所已說明的供給熱量到水所起的變化的法則，那末，水銀柱的高度，就是一個已知函數。

我們再說一個頂簡單的例，還是回到等速運動上面去，有一個小孩子，每分鐘可以爬五尺遠，他所爬的距離就是所爬的時間的函數。假如他爬的時間的分數，我們用 $t$ 來代表，那末他爬的距離便是 $t$ 的函數。在初等代數上，你已經知道這個距離和時間的關係，可以用下面的式子來表示：

$$d=5t$$

若是照函數的表示法，因為 $d$ 是 $t$ 的函數，所以又可以用 $F(t)$ 來代表 $d$，那就寫成：

$$F(t)=5t$$

從這個式子，我們若是知道了 $t$ 的數值，牠的函數 $F(t)$ 的相應的數值也就可求出來了。比如這個在地上爬的小孩子就是你的小弟弟，他是從你家大門口一直爬出去的，恰好你家的對面十來丈的地方有一條小河。你坐在家裏，一個朋友從外面跑了來說是看着你的弟弟從門邊向小河正爬了去。他從看着到和你們說話的時候正好三分鐘。那末，你一點不用慌張，你的小弟弟一定還不會掉到河裏。因為你既知道了 $t$ 的數值是

3，那末 F(七) 相應的數值便是五三一丈五，距那隔你家十來丈遠的河正還遠着呢！

以下常要講到的函數，我們在這裏來說明而且規定牠的一個重要性質，這性質，就叫做函數的「連續性」。

在我們上面所舉出的函數的一些例裏面，那函數都受着變數的連續的變化的支配，跟着從一個數值變到別一個數值，也是「連續的」。在兩頭的數值當中，牠經過了所有那裏面的一切中間數值。比如，水的溫度連續地加高起來，水銀柱的高，牠也連續地從最初的高度，經過所有中間的高度，達到最後的一步。

你試取兩桶溫度相差不多的水：例如，甲桶的是攝氏30度，乙桶的是攝氏32度。各放一枝寒暑表到裏面，水銀柱的高前者是15公分，後者是16公分。這是非常明白的，對於兩度溫度的差(這是變數)，相應的水銀柱的高(函數)的差是1公分。設若你將那桶溫度在攝氏32度的乙桶的水，涼到攝氏31.6度，那末，這支寒暑表水銀柱的高是15.8公分，而水銀柱的高的差就變成0.8公分了。

這件事情是很明白的：乙桶水自32度降到31．6度中間所有的溫度的差，相應的兩支水銀柱的高的差，是在1公分和0．8公分當中。

這話也可以反過來說，我們能夠弄得兩枝水銀柱的高的差（也是隨我們要怎樣的小都可以的，比如是0．4公分）相應到某個有定的溫度的差（比如0．8度）；但是，如果我們無論怎樣弄法，永遠不能使那兩桶水溫度的差小於0．8度，那末兩枝水銀柱的高的差也就永遠不會小於0．4公分了。

最後，若是兩桶水的溫度相等了，那末，一樣地，兩枝水銀柱的高也齊了。假設這溫度是攝氏31度，相應的水銀柱的高便是15．5公分；我們必需要把甲桶水加熱上去，到攝氏31度，而把乙桶水涼了下來也到攝氏31度；兩枝寒暑表的水銀柱，一個是上升，一個卻是下降，結果都到15．5公分的高度。

推到一般的情形去我們考察一個「連續」函數的時候，我們就可以證實下面的性質：當變數挨近一個定值的時候，或者說得更好一點，「伸張到」一個定值的時候，那

函數也「伸張，」經過一些中間值，「達到」一個相應的值，而且總是達到這個同一的值；不但這樣，牠要達到這個值，那變數也就必須達到牠的相應的值；還有，當變數保守着一定的值時，函數也保守着那相應的一定的值。

這個說法，就是「連續函數」的精密的數學的定義。由物理學的研究，我們證明了這個定義對於物理的函數是恰合的，尤其是運動，牠表明了連續函數的性質：運動所經過的空間，牠是一個時間的函數，只有衝擊和反擊的現象，是例外。再說回轉去：我們由實測上不能得到的運動的連續，我們的直覺卻有力量使我們感到牠。怎樣的光榮呀，我們的直覺！牠能結出這般豐盛的果實！

# 五　無限小的變數——誘導函數

現在還是來說關於運動的現象。有一條大路或是一條小槽；在那條路上面有一個輪子正轉動着，或是在這小槽裏邊有一個小球正滾着；倘若我們想找出牠們運動的法則，並且要計算出牠們在進行中的速度；比前面的還要精密些的方法，究竟有沒有呢？

將就以前說過的例，本來也可以再討論下去，不過爲着簡便起見，我們無妨將那個做例的特別的情形放到一般的情況；用一條線表示路徑，用些點來表示在這路上運動的東西。這麽一來，我們所要研究的問題，就變成一個點在一條線上的運動的法則和這個點在進行中的速度了。

爽性更簡單些，就用一條直線來表示路徑：這一條直線，從O點起，牠無限地向着箭

頭所指示的方向延長出去。

在這條直線上，依着同一方向，有一點P連續地運動，牠運動的起點也就是O，這一個儘管動得不停的P點，我們能夠知道牠在那直線上的位置嗎？是的，只要我們知道在每個時間t，這個動着的P點間隔O點多遠，那麼，這位置也就能確定了。


和從前的例一樣，連續運動在空間的徑路是時間的一個連續函數。先假定這個函數是已經知道了的；不過這並不能就解決了我們所要討論的問題。我們還不知道在這運動當中，P點的速度究竟是怎樣，也不知道這速度有些什麼變化。這樣一把你提醒，你將要失望了，將要皺眉頭了，是不是？

且慢慢地，你不用着急，我們請出一件法寶來幫助一下，這些問題，就迎刃而解了！這是一件什麼法寶呢？以後你就可以知道的，先只說牠的名字叫着「誘導函數法」牠眞是一件寶貨，牠便是數學園地當中，掛有「微分法」這個匾額的那座亭臺的基石。

* * * *

「運動」本來不過是從時間和空間的關係的變化認識出來的。不是麼?你倘若老是把眼睛閉着，儘管你心裏只是不耐煩，覺得時間眞難熬，大有度日如年之感，但是一隻花蝴蝶在你的面前翩遷地飛着，上下左右地迴旋，你那會知道牠在這麼有與致地動呢?原來，你閉了眼睛，你面前的空間有怎樣的變化，你眞是茫然了。同樣地，倘使，空間儘管有變化，但你根本就沒有時間的感覺，你也沒有法子理解「運動」是怎麼一回事!

倘若對於測得的時間 $t$ 的每一個數，或者說得更好一些，對於時間 $t$ 的每一個數值，我們都能夠計算出距離 $d$ 的數值來；這就是某種情形當中的時間和空間的關係的變化已經被我們認識出來；那運動的法則，我們也就算得已經知道了!我們就說：

距離是時間的已知函數，簡便一些，我們說 $d$ 是 $t$ 的已知函數，或者寫成 $d=f(t)$。

對於你的小弟弟在大門外地上爬的例，這公式就變成了 $d=5t$，另外隨便舉個例，比如 $d=3t+5$；這，我們就有了兩個不相同的運動法則，假如時間用分計算，和距離用尺

計算;在第一個式子,時間t若是10分鐘,那末距離d就得是50尺。但在第二個式子$d=3t+5$所表示的運動的法則,10分鐘的結末,那距離卻是$d=3\times10+5$便是距出發點35尺。

* * * *

來說計算速度的話吧!先須得注意,和以前說過的一樣,要能計算無限小的變動的速度,換句話說,就是要計算任何剎那的速度。

為了表示一個數値是很小的,小得與衆不同,我們就在牠的前面寫一個希臘字母Δ(delta)。所以$\Delta t$就是表示一個極小極小的時間的間隔,在這個時間當中,一個運動的東西所經過的路程自然很短很短,我們就用$\Delta d$表示。

現在我問你,那P點在時間$\Delta t$的間隔中,牠的平均速度是什麽?你大約沒有忘掉吧!運動的平均速度,等於用這運動所經過的時間去除牠所經過的距離;所以這裏,你可以這樣回答我:

$$平均速度\ m=\frac{\Delta d}{\Delta t}$$

這個回答一點沒有錯，雖然現在時間的間隔和空間的距離都是很小很小，但要求這個很小的時間當中，運動的平均速度，還是只有這麼一個老法子。

平均速度！平均速度！這平均速度，一開始不是就和牠纏個不清嗎？不是覺得對於眞實的運動情形，牠無論怎樣總表示不出來嗎？那末，我們爲什麼這裏還要說到牠呢？不過，這裏所說的平均速度，因爲時間和空間所取的數值都很小的緣故，很有點用場。要得出眞的速度而非平均的，要那運動只是一剎那間的，而非延續在一個時間的間隔當中的，我們只須把 $\Delta t$ 無限制地減小下去就行了。

我們先記好了前面已經說過的連續函數的性質，因爲在一剎那 $t$，運動的距離是 $d$，在和 $t$ 非常相近的時間，我們用 $t+\Delta t$ 來表示，那麼，相應地就有一個距離 $d+\Delta d$ 和 $d$ 也就非常相近；並且 $\Delta t$ 越減小，$\Delta d$ 跟着也是越小下來。

這樣一來，當我們所測定的時間，數目非常的小，簡直差不多和零相近的時候，牠會生出什麼結果呢？換句話說，就是使時間 $t$ 近於0的時候，這個 $\frac{\Delta d}{\Delta t}$ 的比卻變動得很微；

因為前項 $\Delta d$ 和後項 $\Delta t$ 雖則變動，但牠們的比卻差不多一樣。

平均速度 $\frac{\Delta d}{\Delta t}$ 這個關係，因為 $\Delta t$ 同 $\Delta d$ 無限地減小下來，牠慢慢一點點地變去，終於就會到了和一個定值 $v$ 相差幾乎是零的地步。在這種情形，我們就說：

「當 $\Delta t$ 和 $\Delta d$ 近於0的時候，$v$ 是這個比 $\frac{\Delta d}{\Delta t}$ 的極限 (limite)。」

$\frac{\Delta d}{\Delta t}$ 既是平均速度，牠的極限 $v$，就是在時間的間隔，和相應的空間，都近於零的時候，平均速度的極限。

結果，$v$ 便是在一剎那 $t$ 動點的速度。將上面的話，聯合起來，我們可以寫成：

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta d}{\Delta t}$$ ($\Delta t \to 0$ 表示 $\Delta t$ 近於0的意思)

找尋 $\frac{\Delta d}{\Delta t}$ 的極限值的計算方法，我們就叫牠是誘導函數法。

極限值 $v$，也有一個不大順口的名字，叫作「空間 $d$，對於時間 $t$ 的誘導函數。」

有了這個名字，我們說起速度來就便當了。什麼是速度？牠就是「空間對於一瞬的時間的誘導函數。」

* * * *

我們又可以回到惹龍的「飛天不動」的怕拉朵克斯去了。對於他的錯誤，在這裏還能夠加以一種說明。惹龍所用來解釋他的怕拉朵克斯的方法，無論牠怎樣地巧妙，但是橫在我們眼面前的事實，總叫我們不能相信飛矢是不動的。你總看過變戲法吧！你明知道，那些使你看了喫驚到目瞪口呆的玩意兒，都是假的，但你總不能找出牠們的漏洞來。我們若沒有正確的理由來攻破惹龍的推論，那末，對於他這巧妙的怕拉朵克斯，也只好懷着一個看戲法時所有的喫驚的心情了。

現在，我們再用一種工具來攻打惹龍的推論。

古代的人並不比我們笨，速度的意義他們也懂得的，只可惜他們還有比我們不如的地方，那就是關於無限小的量的觀念他們卻一點兒沒有。他們以為「無限小」就是等於零，並沒有什麼特別。因為這個緣故，他們實在喫虧不小，像惹龍那般了不起的人物，在他的推論法中，這個當更特別上得厲害。

不是麼？惹龍他這樣說，「在每一刹那，那矢是靜止的。」我們無妨自己問問自己看；他的話果眞合式嗎？在每一刹那，那矢的位置，是靜止得和一個不動的東西一般的嗎？

再舉個例來說，假如有兩枝同樣的矢，其中有一枝是用了比別一枝快一倍的速度飛動的。在牠們正飛着的當兒，照惹龍想來，每一刹那牠們都是靜止的，而且無論牠是飛得快的一枝或是慢的一枝，兩個的「靜止情形」也沒有一點分別。

在惹龍的腦子裏面，快的一枝和慢的一枝的速度，在無論那一刹那都是等於零。

但是，我們已經看明白了，想精密地把一個速度規定，必須要採用到些「無限小」的量，以及牠們相互的關係。上面已講起過，這種關係，老老實實地是可以有一個一定的極限的，而這個極限呢，又恰巧可以表出我們所設想的一刹那時間的速度。

所以，在我們的腦子裏面，和惹龍的就有點兩樣了！那兩枝矢在一刹那的時間，牠們的速度並不等於零：每枝都保持着牠的速度，在同一刹那的時間，快的一枝的速度總比慢的一枝的大一倍。

把惹龍的思想：用了我們的話來說，我們就可以得到這樣一個結論，他推證出來的，好像是兩個無限小的量，牠們的關係是必須等於零的。對於無限小的時間，照他想來那相應的距離總是零，這你會覺得有點可笑了，是不是？但這也不能就怪到惹龍，在他活着的時候，什麼極限呀，無限小呀，這些觀念都還沒有好好兒地規定淸楚呢。速度這東西，我們把牠當作是距離和時間的一種關係，所以在我們，那飛矢總是動的；說得明白點，就是：在每一刹那牠總保牢一個並不等於零的速度。

好了！關於惹龍的話，就此停着吧！我們來說點別的！

你學過初等數學的，是不是？你還沒有全都忘掉吧！在這裏，就來舉一個計算誘導函數的例怎樣？先選一個極簡單的運動法則，好，就用你的弟弟在大門外爬的那一個：

$$d = 5t \qquad (1)$$

無論在那一刹那 $t$ 的末了他所爬到的距離總是：

$$d_1 = 5t_1 \qquad (2)$$

我們就來計算你的弟弟在地上爬時，這一剎那的速度，就是找空間 $d$ 對於時間 $t$ 的誘導函數。設若有一個極小極小的時間間隔 $\Delta t$，就是說剛好接連着 $t_1$ 的一剎那 $t_1+\Delta t$，在這時候，那運動着的點，經過了空間 $\Delta d$，牠的距離就應當是：

$$d_1+\Delta d=5(t_1+\Delta t) \qquad (3)$$

這個小小的距離 $\Delta d$ 我們要用來做成這個比 $\frac{\Delta d}{\Delta t}$ 的，所以我們可以先把牠找出來。從(3)式的兩邊減去 $d_1$ 便得：

$$\Delta d=5(t_1+\Delta t)-d_1 \qquad (4)$$

但是第(2)式告訴我們說 $d_1=5t_1$，將這個關係代了進去，我們就可以得到：

$$\Delta d=5(t_1+\Delta t)-5t_1$$

在時間 $\Delta t$ 當中的平均速度，前面說過是 $\frac{\Delta d}{\Delta t}$，我們要找出這個比等於什麼，只須將 $\Delta t$ 除前一個式子的兩邊就好了。

$$\therefore \frac{\Delta d}{\Delta t}=\frac{5(t_1+\Delta t)-5t_1}{\Delta t}=\frac{5t_1+5\Delta t-5t_1}{\Delta t}$$

化簡單了，便是：

$$\frac{\Delta d}{\Delta t}=\frac{5\Delta t}{\Delta t}=5.$$

從這個例看來，$\frac{\Delta d}{\Delta t}$無論 $\Delta t$ 怎樣地小法，總是一個常數。因此，就是我們將 $\Delta t$ 的值盡量地減小，到了簡直要等於零的地步，那速度 v 的值，在 $t_1$ 這一刹那，也是等於5；也就是誘導函數等於5；所以：

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta d}{\Delta t}=5.$$

這個式子表明無論在那一刹那，速度都是一樣的；總歸等於5. 速度既然保持着一個常數，那末這運動便是等速的了。

不過，這個例是非常簡單的，所以要找牠的結果也非常容易，至於一般的例，那就往往很麻繁，做起來並不像這般地輕巧。

就實在的情形說，$d=5t$ 這個運動的法則，明明指出運動所經的路程（比如用尺

做單位）總是五倍於運動所經過的時間（比如用分做單位）一分鐘你的弟弟在地上爬五尺，兩分鐘他便爬了一丈，所以，他的速度明明白白地總是等於每分鐘五尺。

再另外舉一個簡單的運動法則來做例，不過牠的計算卻沒有前一個例那樣地簡便，假如有一種運動，牠的法則是：

$$e = t^2 \tag{1}$$

依照這個法則，時間用秒做單位，空間用公尺做單位；那末，在2秒鐘的末尾，所經過的空間應當是4公尺；在3秒鐘的末尾，應當是9公尺；照樣推下去，公尺的數目總是秒數的平方，所以在10秒鐘的末尾，所經過的空間便是100公尺。

還是用空間對於時間的誘導函數來計算這運動的速度吧！

為了要找出誘導函數來，在時間 $t$ 的任一剎那設想這時間增加了很小一點 $\Delta t$。在這 $\Delta t$ 很小的一剎那當中，運動所經過的距離 $e$ 也加上很小的一點 $\Delta e$。從（1）式我們可以得出：

$$e+\Delta e = (t+\Delta t)^2 \tag{2}$$

現在我們就可從這個式子先求出 $\Delta e$ 和時間 $t$ 的關係了。在（2）式裏面兩邊都減去了 $e$，便得

$$\Delta e = (t+\Delta t)^2 - e$$

因爲 $e = t^2$ 將這個值代進去：

$$\Delta e = (t+\Delta t)^2 - t^2 \qquad (3)$$

到了這裏，我們須得將式子的右邊化簡單些；這第一步就非將括弧去掉不可。朋友！你也許忘掉了吧；我問你，$(t+\Delta t)$ 脫去括弧應當等於什麼？想不上來嗎？我告訴你，牠應當是

$$t^2 + 2t \times \Delta t + (\Delta t)^2$$

所以（3）式又可以照下面的樣子寫：

$$\Delta e = t^2 + 2t \times \Delta t + (\Delta t)^2 - t^2$$

式子的右邊有兩個 $t^2$，一個正一個負恰好消去，式子也更簡單些：

$$\Delta e = 2t \times \Delta t + (\Delta t)^2 \qquad (4)$$

接着就來找平均速度 $\frac{\Delta e}{\Delta t}$ 應當將 $\Delta t$ 去除（4）式的兩邊：

$$\frac{\Delta e}{\Delta t}=\frac{2t\times\Delta t}{\Delta t}+\frac{(\Delta t)^2}{\Delta t} \tag{5}$$

現在再把式子右邊的兩項中分子和分母的公因數 $\Delta t$ 對消了去，只剩下：

$$\frac{\Delta e}{\Delta t}=2t+\Delta t \tag{6}$$

倘若我們所取的 $\Delta t$ 眞是小得難以形容，簡直幾乎就和零一樣，這就可以得出平均速度的極限：

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta e}{\Delta t}=2t+0$$

於是，我們就知道在 $t$ 剎那時，速度 $v$ 和時間 $t$ 的關係是：

$$v=2t$$

你把這個結果和前一個例的比較一下，你總可以看出牠們倆有些不一樣吧！最明顯的，就是前一個例的 $v$ 總歸是5，和 $t$ 一點關係沒有；這裏卻不這般地簡單；速度總是時間 $t$ 的兩倍。所以恰在第一秒的當兒，速度是2公尺，但恰在第二秒的一剎那，卻是4公尺了；這樣推下去，每一剎那的速度都不同，所以這種運動不是等速的。

## 六　誘導函數的幾何的表示法

「無限小」的計算法，這眞可以算得是一件寶貨，你在數學的園地中走去走來，差不多都可以見着牠。

在幾何的院落裏，特別可以看出牠是怎樣的玲瓏。老實說，幾何的院落現在這般地繁榮美麗，受牠的恩賜很不少。牛頓把牠發覺了，萊伯利茲也把牠發覺了；但是他們兩並沒有打過招呼，所以各人走的路也不同。萊伯利茲是在幾何的院落裏玩得興致很濃，想在那裏面加上些點綴，爲了要解決一個極有趣味的問題才發覺了「無限小」這寶貨，而且將牠盡量地玩弄。

你在幾何中，切線這一個名字，總不知碰見牠過多少次了。所謂切線，照通常的說法，

就是和一條曲線除了一點相挨着，再也不會和牠相碰的那樣一條直線。萊布利茲在幾何的園地中，津津有味地所要解決的問題，就是：在任意一條曲線上的隨便一點，要引一根切線的方法。有些曲線，比如圓或橢圓，在牠們的上面隨便一點，要引一根切線，這個方法，學過幾何的人都已知道了的。但是對於別的曲線，依了樣卻不能就把那葫蘆畫得出來，究竟一般的方法是怎樣的呢？在幾何的院落裏，曾有許多人想找出打開這道門的鎖匙，但都被牠逃走了！

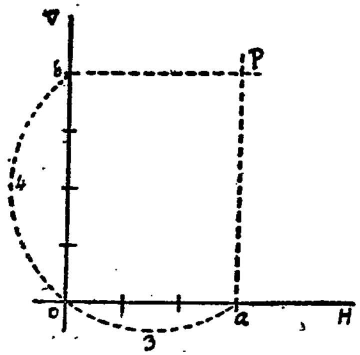
和萊布利茲同時遊賞數學的園地，而且在裏面去加上些建築或裝飾的人，曾經找到過一條適當而且開闊的路去探尋各種曲線的堂奧：笛卡特就在代數和幾何兩座院落當中築了一條通路，這便是掛着「解析幾何」這塊牌子的那些地方。

依了解析幾何的方法，數學的關係可用幾何的圖形表示出來，而一條曲線也可以用等式的形式去記錄牠。這個方法眞有點神異，是不是？但是仔細追根究底，卻非常簡單。到了現在，我們看着簡直是很平淡無奇了。然而，這條道路若不是像笛卡特那樣的才能

是建築不起來的！

要說明這個方法的用場，我們也先來舉一個頂頂簡單的例。

你取一頁白色的紙，釘在桌面上，並且預備好一管米突尺，一塊三角板，一枝鉛筆和一條橡皮。你用你的鉛筆在那紙上作一個小黑點，馬上就用橡皮將他擦去。你有什麼方法能夠將那個黑點的位置再找出來嗎？你眞將牠擦到一點痕跡都不留，無論如何你再也沒法去找回牠來了。所以在一頁紙上，要定一個點的位置，這種方法非常重要。

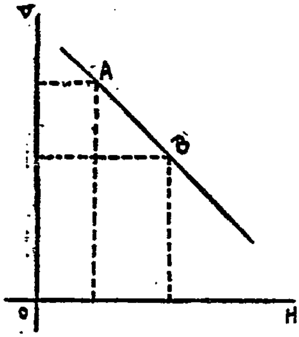



要定出一個點在紙面的位置的方法，實在不只一個，還是選一個容易明白的吧。你用三角版和鉛筆，在紙上畫一條水平線OH，和一條垂直線OV；假如P是那位置應當確定的點；你由P引兩條直線，一條水平的和一條垂直的（圖中的虛線；）這兩條直線和前面畫的

兩條，比如說相交在a點和b點，你就用米達尺去量Oa和Ob。

設若量了出來，Oa等於3公分Ob等於4公分。

現在你把所畫的P點和那兩條虛線都用橡皮擦了去，只留下用作標準的兩條直綫OH和OV，這樣你只須注意到Oa和Ob兩距離。P點就可以很容易地再找出來。




實際就是這樣做法：從O點起在水平線OH上量出3公分的一點a，再，還是從O點起，在垂直線OV上量出4公分的一點b。跟着，從a畫一條垂直線，又從b畫一條水平線；你是已經知道的，這兩條線會相碰着，這相碰的一點，便是你所再要找的P點。

這個方法，是比較簡便的，但並不是獨家經理的唯一無二的方法。這裏用到的是兩個數，一個垂直距離和一個水平距離，但另外選兩個適當的數，也可以把平面上一點的位置確定，不過別的方法都沒這般平易罷了。

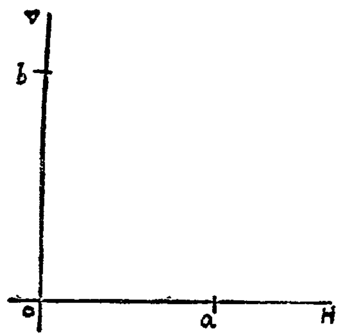
你在平面幾何上曾經讀過一條定理說不平行的兩條直線若不是全相重合就只能有一個交點，你總還記得吧！就因這個緣故，所以我們用一條垂直線和一條水平線，所能決定的點只有一個。依了同樣的方法，用距O點不同的垂直線和水平線便可決定許多位置不同的點。你不相信麼？就用你的三角板和鉛筆，胡亂畫幾條垂直線和水平線來看一看。

再請你回憶起平面幾何上的一條定理來，那就是通過兩個定點必能夠畫一條直線，而且也只能夠畫一條。所以，倘若你先在紙上畫一條直線，只任意留下了兩點，便將全線擦去；你若要再找出原來的那條直線，只須用你的米突尺和鉛筆，將所留的兩點連起來那就成了。你試試看，前後兩條直線的位置有什麼不同的地方沒有？

* * * *

前面說的只是點的位置，現在，我們更進一步來研究任意一段曲線，或是BC弧。我們也能夠將牠表示出來嗎？

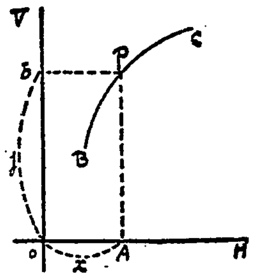
為了方便起見，我和你先約束好：在水平線上從O起量出的距離我們用x代表，在垂直線上從O起量出的距離用y代表：這麼一來，設若那段曲線上有一點P，從P向着




OH和OV各畫一條垂線；那末，無論P點在曲線上的什麼地方，x和y都一定各有一個相應於這P點的位置的值。在BC一段曲線上，設想有一點P，從P向OH畫一條垂線Pa，設若牠和OH相交在a點；又從P向OV也畫一條垂線Pb，設若牠和OV相交在b點；Oa和Ob便是x和y相應於P點的值。你試在BC上另外取一點Q，依照這方法做起來，就可以看出x和y的值便不能同是Oa和Ob了。

接連在曲線BC上面，取一串的點，比如說是$P_1$，$P_2$，$P_3$，……從各點向OH和OV都畫垂線，這就得出相應於$P_1$，$P_2$，$P_3$，……這些點的位置的x和y的值，$x_1$，$x_2$，$x_3$，……和$y_1$，$y_2$，

$y_3$，……來。$x$的一串值$x_1$，$x_2$，$x_3$，……各都和$y$的一串值$y_1$，$y_2$，$y_3$，……中的一個相應；這些是你從圖上一眼就會看得明白的。




倘若已將$x$和$y$的各自的一串值都畫出，曲線BC的位置大體也就決定了。所以，實際上，你若把$P_1$，$P_2$，$P_3$，……這一串點留着，而將曲線BC擦去，和前面畫直線的一般，你就有方法能夠再找出牠來。因爲$x$的每一個值，都相應於$y$的一串值中的一個，所以要決定曲線上的一點，我們就在OH上從O起取一段等於$x$的值，又在OV上從O起取一段等於相應於牠的$y$的值；那末，這一點，就和前面的例所說過的一般，便可完全決定。跟着，用同樣的方法，將$x$的一串值和$y$的一串值都畫出來，$P_1$，$P_2$，$P_3$，……這一串的點也就全然決定，曲線BC同樣地也可將牠決定了。

不過，這卻要小心，前面，我們說過，有了兩點就可決定一條直線；在平面幾何學上你

還學過一條定理，有不在一條直線上的三點就可以決定一個圓周。但是一般的曲線，要有多少點才能將牠決定，那是誰也回答不上來的，不是麼？曲線是彎來彎去的，沒有畫出來的時候那個能完全明白牠是怎樣的彎法呢！所以，在實用上，眞要由許多點來決定一條曲線，必須要畫出很多的互相挨得很近的點，那條曲線才可以大體決定。並且這還須注意，無論怎樣，倘然沒有別的方法加以證明，你這樣畫出的總只是一條相近的曲線。

* * * *

話說回頭去，我們記好，以前所講過的數學的函數的定義，把牠來和這裏所說的表示x和y的一串值的方法對照一番，這是有趣極了！我們既說，每一個x的值，都相應於y的一串值中的一個；那好，我們不是也就可以乾乾脆脆地說y是x的函數嗎？要是掉過槍法，我們也就可以說x是y的函數。從這一點看起來，函數有些是可以用幾何的方法表示的。

比如：y是x的函數，用幾何的方法來表示就是這樣：有一條曲線BC，又決定了x

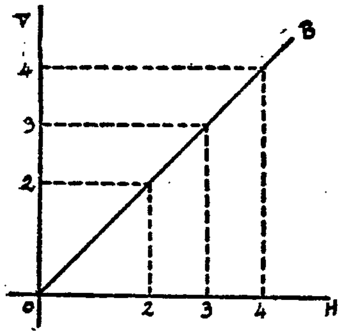
的大小，設若x等於Oa，我們實際上就可決定相當於牠的y的值是Ob。

所以從解析數學這邊看來，一個數學的函數是代表一條曲線的。但掉過頭從幾何那邊看來，一條曲線就表示一個數學的函數。兩邊簡直是合則雙美的玩意兒。

* * * *

要反過來說，也是非常容易的。假如有一個數學的函數：

$$y = f(x)$$




我們很能夠給這函數一個幾何的說明。

還是先畫兩條互相垂直的曲線OH和OV。在水平線OH上面，我們取出x的一串值，而在垂直線OV上面我們取出y的一串值；從各點都畫OH或OV的垂線；從x和y的兩兩相應的值所畫出的兩垂線都有一個交點。這些點總集起來就決定了一條曲線；而且這

條曲線就表示出了我們的函數。

舉一個頂簡單的例吧：設若那已知的函數是：$y=x$ 表示牠的曲線是什麽？

先隨便選一個 $x$ 的值，例如 $x=2$，那末相應於牠的 $y$ 的值也是 $2$，所以相應於這一對值的曲線上的一點，就是從 $x=2$ 和 $y=2$ 這兩點畫出的兩條垂線的交點。同樣地，由 $x=3$，$x=4$，……我們就得出 $y=3$，$y=4$，……並且得出一串相應的點。聯合這些點，就是我們要找來表示我們的函數的曲線。

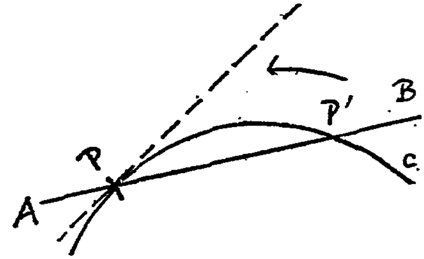
我想，在這點，倘若你要挑剔的話，你一定捉到一個漏洞了！不是麽？圖上畫出的，明明是一條直線，爲什麽我們在前面卻儘管很親切地叫牠是曲線呢？但是，朋友！一個人究竟只有這樣大的本領，寫說明的時候，那圖的影兒還不會有一點，那就會知道牠是一條直線呀！若是畫出圖來是一條直線，便返回去將說明改過，這叫你看去，好像我是「未卜先知」了，成什麽話呢？

我們說是曲線的變成了直線，這只是特別的情形，說到特別，朋友！我告訴你，這回的

例，眞是特別得很，牠不但是直線，而且牠和水平線ＯＨ以及和垂直線ＯＶ所成的角還是相等的，恰好45度，就好像你把一頁正方塊的紙對角摺出來的那條摺痕一般。

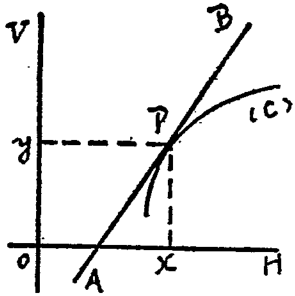
＊　＊　＊　＊

原來是要講切線的，話卻越說越遠了，現在回到本題上面來吧。爲了確定切線的意義，先設想一條曲線（Ｃ）在這曲線上取一點Ｐ；接着，過Ｐ點引一條割線ＡＢ和曲線（Ｃ）又在Ｐ′點相碰着。




請你將Ｐ′點慢慢地在曲線上向着Ｐ點這邊移近起來，你可以看出，當你移動Ｐ′點的時候，ＡＢ的位置跟着也起了變動；牠繞着固定的Ｐ點，依了箭頭所指的方向慢慢地轉動。到了Ｐ′點和Ｐ點碰在一淘的辰光，這條直線ＡＢ便不再割斷曲線（Ｃ），只和牠在Ｐ相挨着了。換句話說，就是在這當兒，直線ＡＢ變成了

## 曲線(C)的切線。




* * * *

再用到我們的水平線OH和垂直線OV。

設若曲線(C)表示一個函數。我們若是能夠算出切線AB和水平線OH所夾的角，或是說AB對於OH的傾斜率，以及P點在曲線(C)上的位置；那末，過P點我們就可以將AB畫出了。

* * * *

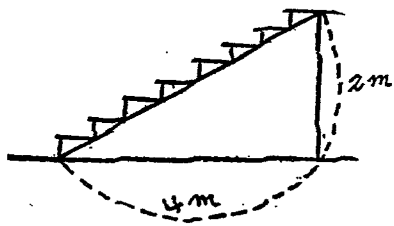
呵，了不起！這末一來，我們又碰到難題目了！

怎樣可以決定AB對於OH的傾斜率呢？

朋友！不要慌！你去問造房子的木匠去！你去問他，怎樣可決定一座樓梯對於地面的傾斜率？

你一時找不着木匠去問吧！那末，我告訴你一個法子，你自已去做去。

你拿一根長竹竿，到一堵矮牆前面去。比如那矮牆的高是2公尺，你將你的竹竿斜靠在牆上邊，竹竿落地的這一頭恰好距牆腳4公尺。

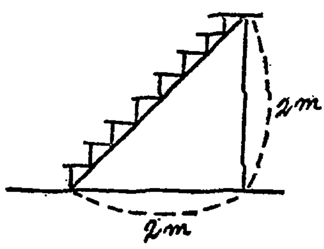



這回你已知道你的竹竿，靠着牆的一點離地的高和落地的一點距牆腳的遠；牠們的比恰好是

$$\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

這個比值就決定了你的竹竿對於地面的傾斜率。假如，你將你的竹竿靠到牆上邊的時候，落地的一頭距牆腳2公尺，就是說恰和靠着牆的一點離地的高相等；那末牠們倆的比便是

$$\frac{2}{2}=1.$$



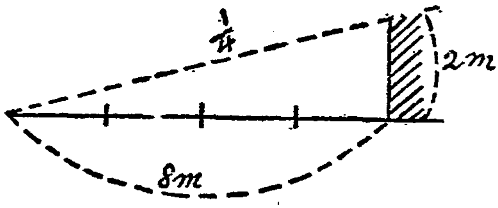
你總已經看出來了，這一次你的竹竿對於地面的傾斜度比前一次的來得陡些。

假如我們要想得出一個 $\frac{1}{4}$ 的傾斜率，你的竹竿落地的一頭應當距牆腳多少遠呢？

你只要使這個距離等於那牆高的4倍就行了。所以倘若你將你的竹竿落地的一頭放在距牆腳8公尺遠的地方那末；

$$\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$$

恰好是我們所想找的傾斜率。




總括起來，簡單地說，要決定傾斜率，只須知道「高」和「遠」的比。

* * * *

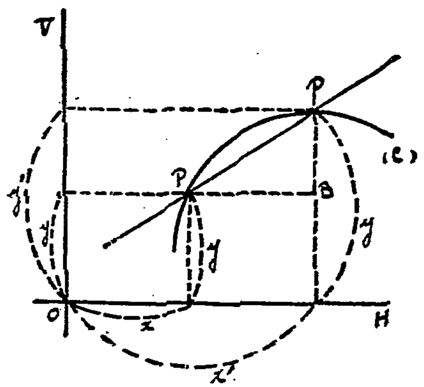
快可以歸到一個結論了，讓我們先把所要用來解答這個切線問題的材料集攏起來吧。第一，作一條水平線OH和一條垂直線OV。第二，畫出我們的曲線。第三，過定點P

和另外一點P′畫一條直線將曲線切斷，就是說過
和P′畫一條割線。

先不要忘了我們的曲線(C)是用一個下面的已知函數表示的：

$$y = f(x)$$

相應於P點的x和y的值就算是x和y；相應於P′點的x和y的值設牠們是x′和y′。從P畫一條水平線和從P′所畫的垂直線相遇在B點。我們先來




決定割線PP′對於水平線PB的傾斜率。

這個傾斜率，和我們剛才說過的一般，是用「高」P′B和「遠」PB的比來表示的；所以我們得出下面的式子：

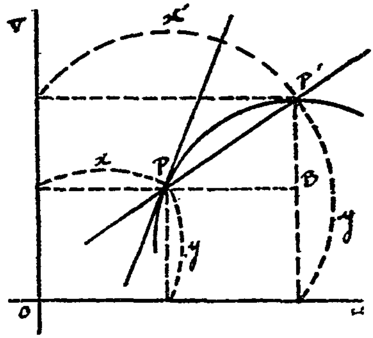
$$PP'\text{的傾斜率} = \frac{P'B}{PB}$$

到了這一步，我們很明白地知道；我們所要解決的問題是：

「用來表示傾斜率的比，牠能不能由曲線的函數的幫助來計算呢？」

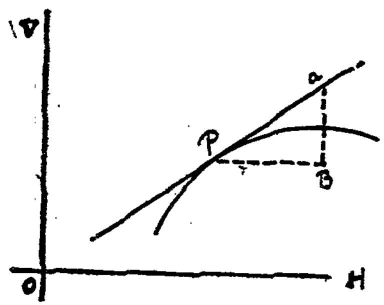
看着圖來說話吧。由圖上我們很容易地知道水平線PB等於x′和x的差，而「高度」P′B等於y′和y的差。將這相等的值代進前節的的式子裏面去，我們就找出割線的傾斜率等於$\frac{y'-y}{x'-x}$跟着，來計算P點的切線的傾斜率，只要在曲線上使P′和P接近起來就成了。

P′挨近P的時候，y′便挨近了y，而x′也就挨近了x。這個比$\frac{y'-y}{x'-x}$跟着P′的移動漸漸地變的結果，P′越近於P，牠就越近於我們所要找來表示P點的切線的傾斜率的那個比。



要解決的問題總算解決了。歸結起來，用一般的話說，這解答的步驟是這樣。

知道了一條曲線，和表示牠的一個函數；那曲線上的任一點的切線的傾斜度，我們就可以計算。所以，通過曲線上的一點，引一條直線，若是牠的傾斜率和我們已經算出來的一樣，那末，這條直線，就是我們所要找的切線了！




* * * * *

說起來，囉哩囉嗦地，好像很麻煩，但實際上要去畫牠，卻並不困難。即如我們前面所舉的例，設若$y'$很近於$y$，$x'$也很近於$x$，那末，這個比$\frac{y'-y}{x'-x}$跟着便很近於$\frac{1}{2}$了。因此在曲線上的P點，那切線的傾斜率也就很近於$\frac{1}{2}$；我們這裏所說的「很近」就是可以使得相差的數無論小到什麼程度都可以的意思。

我們動手來畫吧！過P點引一段水平線PB，使牠的長為2公分；在B這一頭，再畫一段垂直線Ba，牠的長只是1公分。末了把Ba的一頭a和P聯結起來作一條直線：這末一來，aP直線在P點的傾斜率等於aB和PB的比，恰好是$\frac{1}{2}$，所以牠就是我們所求的在曲線上P點的切線。

* * * *

對於切線的問題。我們算是有了一個一般的解答了。但是，我問你，一直說到現在，我們所解決的都是些特別的例，牠能不能就用到一般的已定曲線上去呢？

還不能呢；還得要用數學的方法，再進一步找出牠的一般的原理才行的。不過要達到這地步，也不是很困難的事。我們仔細再從我們所用的方法當中去探究一番，那就可以得到一個合意的回答了。

我們所用的方法，牠含有什麼性質呢？

假如我們記清楚從前所說過的：什麼連續函數咧，牠的什麼變化咧，這些變化的什

麼平均值咧，這一類的東西；將牠們來比照一下，對於我們所用的方法，一定更加明瞭了。

一條曲線和一個函數，本可以看成是一般無二的東西，因爲一個函數可以表出牠的性質，而牠也可以把這函數用圖形表示；所以，一樣的情形，一條曲線也就表示一個點的運動的情況。

爲了要知道淸楚運動的性質，我們曾經研究過用來表示這運動的函數有怎樣的變化。研究的結果，將誘導函數的意義也弄明白了；我們知道牠在一般的形式下面，也是一個函數，函數一般的性質和變化牠都含得有。

認爲函數是表示一種運動的時候，牠的誘導函數，就是表示每一刹那間，這運動所有的速度。

丟開了運動不講，在一般的情形當中，一個函數的誘導函數，牠含得有些什麼意義沒有呢？

我們再簡單地來看一看，誘導函數是怎樣被我們誘導出來的，我們先對於變數，使

牠任意加大一點，然後從這點出發去計算所要求的誘導函數。就是找出相應於這點變化，那函數增加了多少，接着就求這兩個增加的數的比。

因爲函數的增加是依賴着變數的增加的，我們所以跟着就留意，在那增加的量很小很小的時候，牠的變化是怎樣的情形。

這樣的做法，我們已說過好些次，而結果仍舊是一樣的；那增加的量無限小的時候，這個比就達到一個有定的值。中間有個必要的條件，我們不要忘掉，就是這個比若有極限的時候，那個函數是連續的。

將這些情形和所講過的計算一條曲線的切線的傾斜率的方法比較一下，我們不是很容易明白，牠們實在沒有什麼分別嗎?

末了，就得到這麼一個結論：一個函數表示一條曲線；函數的每一個值，都相應於那曲線上的一點；對於函數的每一個值的誘導函數，就是那曲線上相應點的切線的傾斜率。

這樣說來，切線的傾斜率，便有一個一般的求法了。這個結果，不但對於本問題很重要，牠簡直是微積分的臺柱子。

這不但解釋了切線的傾斜率的求法，而且反過來，也就得了誘導函數在數學函數上的抽象的意義；正和我們爲了要研究函數的變化，卻得到了無限小和牠的計算法，以及誘導函數的意義一般。

再結束一下，誘導函數這個寶貝，眞是玲瓏得可以，你講運動吧，牠就表示這運動的速度；你講幾何吧，牠又變成曲線上一點的切線的傾斜率；你看牠多麼活潑有趣！

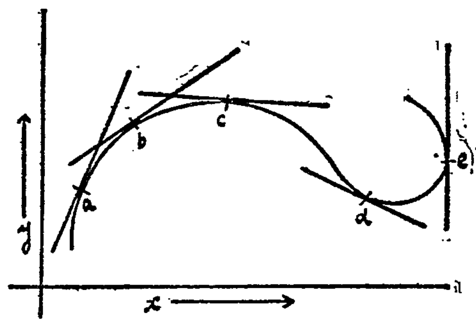
* * * *

索性再來看牠還有些什麼把戲可以玩出來。

誘導函數表示運動的速度，所以牠就指給我們看那運動有些什麼變化。

在圖形上，牠既表示切線的傾斜率，又有什麼可以指示給我們看的沒有呢？

設想有一條曲線，對了，曲線本是一條彎去彎來的線，牠在什麼地方怎樣的彎法，我




們有沒有法子可以表明呢？

從圖上看吧，在a點附近曲線彎得快些；掉句話說，x的距離加得很小，而相應的y的距離卻加得較大，這就證明在a點的切線，牠的傾斜度來得很陡。

在b點呢，切線的傾斜度就較平了，切線和水平線所成的角也很小；x和y的距離加增的強弱相差也不十分利害。

至於c點，傾斜度簡直成了零，切線和水平線全然平行，x的距離儘管增加，y的總是老樣子，所以這一小段曲線也很平。接着下去，牠反而向下彎起來，就是說，x的距離增加，y的反而減小。在這裏，傾斜度就改變方向，一直降到d，才又回頭。從c到d這一段，因爲傾斜度掉了方向的緣故，我們就說牠是「負的」。

最後，在e點，斜傾度成了直角，就是切線變了水平線的垂直線：這小段曲線成了非常地陡；x若只無限小地增加一點的時候，y的值還是一樣。

這個例叫我們知道，對於誘導函數的研究：牠有多少大，牠是正或負，都可以指示出曲線的變化來；這正和用牠表示速度時，可以看出運動的變化一般的情形。

你看！誘導函數這麼一點小傢伙，牠的花頭有多少！

# 七 無限小的量

量本來是抽象的，爲了容易想像的緣故，我們前面說誘導函數的效用和計算法的時候，曾經找出運動的現象來做例。現在更要確切一點地來講明白數學的函數的意義；我們用的方法雖然和前面已經用過的相彷彿，但要比牠更一般些。

誘導函數的一般的定義是怎樣的呢？

從以前所講過的許多例，我們知道；誘導函數是表示函數的變化的，無論那函數所倚靠着的變數，牠的變化小到什麼地步，總歸可表示出函數在那當兒所起的變化。誘導函數指示給我們看，那函數什麼時候漸漸變大，和什麼時候漸漸變小。牠又指示給我們，這種變化什麼時候來得快，什麼時候來得慢。而且牠所能指示的，並不是大體的情形，簡

直連變數的值雖只有無限小的一點變化，函數的變化狀態，也指示得非常清楚。因此，研究函數的時候，誘導函數實在佔着很重要的位置。關於這種巧妙的方法的研究和解釋，以及牠的計算的發明，都是非常有趣的。牠的發明眞是十分的奇異，而結果又十分的豐富，這可算得是一種奇蹟吧！

然而追根究底，牠不過是從數學的符號的運用當中誘導出來的。不是麼？我們用Δ這樣一個符號放在一個量的前面，算牠所表示的量是無限地小，牠可以逐漸減小下去，而且是可以無限地減小下去的。我們跟着就研究這種無限小的量的關係，便得出誘導函數這一個奇怪的量。

不過起源雖很簡單，但這些符號也並不是就可以任意誘導出來的。照我們前面所已講明的看來，牠們原是爲了研究任何函數無限小的變化的基本運算才產生的。牠逐漸展開的結果，對於一般的數學的解析，卻變成了一個很精當的工具。

這也就是數學中，微分學這一部分又有人叫牠是解析數學的原因。

一直到這裏，我們已經好幾次說到，對於誘導函數這一類的東西，要給牠一個精確的定義，但始終還是沒有做到，這總算一件憾事。原來要抽象地了解牠，本不很容易，所以還只得慢慢地再說吧。單是從數學計算的實際上，這些東西的定義是不能再找到的了，所以仍舊只好請符號來說明，一起頭舉例，我們就用字母來代表運動的東西，這已是一種符號的用法。

後來講到函數，我們又用到下面這種形式的一個式子：

$$y = f(x)$$

這式子自然也只是一個符號。這符號所表示的意思，雖則前面已說過，爲了明白起見，這里無妨再重述一遍。x表示一個變數，y表示隨了x變的一個函數；換句話說，就是：對於x的每一個數值，我們都可以將y的相應的數值計算出來。

在函數以後講到誘導函數，又用過幾個符號，將牠連在一淘，可以得出下面的一個

式子:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

y′表示誘導函數,這個式子就是說,誘導函數是:當 Δx 自己以及 Δy 隨了牠都近於零的時候,$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 這個比的極限,

再把話說得更像教科書式一些,那末:

誘導函數是「當變數的增量 Δx 同着隨了牠變的函數的增量 Δy 都無限地減小時,Δy 和 Δx 的比的極限」到了這極限時,我們另外用一個符號:$\frac{dy}{dx}$ 表示。

朋友!你還記得麼!一開場,我就說過,爲這個符號我曾經碰了一次大釘子的,現在你也會見牠了,總算便宜了你。你好好地記清楚牠所表示的意義吧;用場多着呢。有了這個新符號,誘導函數的式子又多一個寫法:

$$\frac{dy}{dx} = y'$$

dy 和 dx 所表示的都是無限小的量,牠們同名不同姓,dy 叫着 y 的「微分」,dx

叫x的「微分」在這裏應得小心的是：$dy$ 或 $dx$ 都只是一個符號，若看成和代數上寫的ab或xy一般，以為是d和y或d和x相乘的意思，那就大錯了，好比一個人姓張，你卻叫他一聲弓長先生，你想，他會不會對你失敬呢？

從 $\frac{dy}{dx}=y'$，這式子我們變化一番，就可得出一個很重要的關係：

$$dy = y'dx;$$

這就是說：「函數的微分等於誘導函數和變數的微分的乘積。」

* * * *

我們已經規定明白了幾個數學符號的意思：什麼是誘導函數，什麼是無限小，同着什麼是微分，現在就來使用牠們一回，用牠們來研究；和分解幾個不同的變數。

對於這些符號，老實不客氣，我們也可以照別的符號一般，用到各色的計算上面去。

但是有一點卻要非常地小心，和這些量的定義矛盾的地方就得避開。

閒話少講，還是拿幾個例出來，先來個簡單之中最簡單的。

假如S是一個常數，等於三個有限的量a，b，c和三個無限小的量dx, dy, dz的和，我們就知道：

$$a+b+c+dx+dy+dz=S$$

在這個式子裏面，因爲dx, dy, dz都是無限小的變量，而且可以任我們的意使牠們小到不可名言的地步的，因此乾脆一點，我們簡直可以使牠們都等於零，那就得出下面的式子.

$$a+b+c=S$$

你又會要捉到一個漏洞了。早先我們說惹龍把無限小想成等於零是錯的，現在我却自己馬馬虎虎地也跳進了這個圈子。但是，朋友！小心之餘還得小心，捉漏洞，你要看好了牠眞是一個漏洞，不然，近視眼看着牆壁上的一只小釘，當是蒼蠅，一手拍去，於釘子固無傷，然而如手痛何！

在這個例中，因爲S和a，b，c全都是有限的量，一點兒偷換不來，留幾個小把戲夾

雜在當中跳去跳來的，反而不雅觀，這才可以乾脆說牠們都等於零，惹龍所談的問題，他講到無限小的時間同時講到無限小的空間，兩個小把戲自己跳在一淘，那就馬虎不得，乾脆不來了。所以假如在一個式子中不但有無限小的量，還有幾個無限小的量相互關連着，那，我們就沒有硬派牠們等於零，將牠們消去的權利，我們在前面不是已經看到過麼？無限小和無限小關連着，會得出有限的值來的，朋友！有一句俗話說，一斗芝蔴揀出一顆，有牠無多無牠不少，但是倘若就只有兩三顆芝蔴，你揀去了一顆，不是只剩二分之一或三分之一了嗎？

無限小可以省去和不能省去的條件你明白了嗎？無限大也是一樣的。

上面的例是說，在一個式子當中，若是含有一些有限的數，和一些無限小的數，那無限小的數通可以略掉。假如在一個式子中所含有的，有些是無限小的數，有些卻是兩個無限小的數的乘積；小數和小數相乘，數值便越乘越小，一個無限小的數已夠小了，何況還是兩個無限小的數的乘積呢；因此，這個乘積對於無限小的數，同前面的理由一般，也

可以略去。假如，我們有下面的一個式子.

$$dy = y'dx + dv\,dx$$

在這裏面 dv 也是一個無限小的數，所以右邊的第二項便是兩個無限小的數的乘積，牠對於一個無限小的數說起來，簡直是無限小中的無限小；對於有限數，無限小的數可以略去；同樣地，對於無限小的數，這無限小中的無限小，也就可以略去。

兩個無限小的數的乘積，對於一個無限小的數說，我們稱牠為二次無限小數。同樣地，假如有三個或四個無限小數相乘的積，對於一個無限小的數（平常我們也說牠是一次無限小的數）我們就稱牠為三次或四次無限小的數。通常二次以上的，我們都稱牠們為高次無限小的數。假如，我們把有限的數，當成零次的無限的小數看，那末，我們可以這樣說：在一個式子中、次數較高的無限小數對於次數較低的，通可以略去；所以，一次無限小的數對於有限的數，可以略去，二次無限小的數對於一次的，也可以略去。

在前面的式子當中，我們已經知道，若兩邊都用同樣的數去除，結果還是相等的；我

們現在就用 $dx$ 去除；於是我們得：

$$\frac{dy}{dx} = y' + dv$$

在這個新得出來的式子當中，左邊 $\frac{dy}{dx}$ 所含的是兩個無限小的數，牠們的比，等於有限的數 $y'$。這 $y'$ 我們稱為函數 $y$ 對於變數 $x$ 的誘導函數。因為 $y'$ 是有限的數，$dv$ 是無限小的，所以他對於 $y'$ 可以略去因此，$\frac{dy}{dx} = y'$，或是兩邊再用 $dx$ 去乘，這式子也是不變的；所以：

$$dy = y'dx$$

這個式子和原來的式子比較，就是少了那兩個無限小的數的乘積 $dv\,dx$ 這一項。

* * * *

這一節我們就此停止，再換個新鮮的題目來談吧！

# 八　二次誘導函數—加速度—高次誘導函數

數學上的一切法則，都有一個極應當留意到的特性，這就是無論什麼法則，在牠成立的時候，使用的範圍雖然有一定的限制，但我們也可嘗試一下，將牠擴充出去，用到一切的數或一切的已知函數；我們可將牠和別的法則連合起來，使牠用了出去，能夠產生更大的效果。

呵！這又是一段「且夫天下之人」一流的空話了，還是舉例吧。

在算術裏面，學了加法，就學減法，但是牠眞小氣得很，只許可你從一個數當中減去一個較小的數，因此，我們用起牠來就有時免不了要碰壁。比如從一斤減去八兩，你立刻就回答得出來，還剩半斤；但是要從半斤減去十六兩，那，你還有什麼法子！碰了壁就完了

嗎?人總是不服氣的,越是觸霉頭越想往那中間鑽;除非你是嬾得動彈的大少爺,或是沒有力氣的大小姐,碰了壁才肯就丟手!那末,在這碰壁的當兒,額角是碰痛了,痛定思痛,總得找條出路,從半斤減去十六兩怎樣減法呢?我們發狠一想,便有兩條路:一條我們無妨說牠是「大馬路,」因爲人人會走,而且特別是大少爺和大小姐怕多用心的,喜歡去散步的。這是怎麼?其實只是一條不是路的路,就是我們乾乾脆脆地回答三個字「不可能。」你已說不可能了,誰還會再和你爲難呢,這不是就以不了了之了嗎?然而,仔細一想,朋友,不客氣說,偺們這些享有四千多年文化的黃帝的子孫,現在弄得焦頭爛額,衣食都不能自給,就是上了這以不了了之的當了。「不可能!不可能!」老是這樣叫着,不但要自己動手,推脫說是不可能,連別人明明已經做出了的,初聽見乍看着,因爲怕想一想的緣故,也還說不可能。見了火車,有人和你說,別人已有東西可以在空中飛。你心裏會想到「這不可能,」見了一根一根電線搭在空中,別人和你說,現在已有不要線的電報電話,你心裏也會想到「這是不可能,」朋友!什麼是可能的呢?請你回答我!你不願意答應麼?我替你回

答：

「老祖宗傳下來的別人做現成的，都可能；此外，那就要看別人，和別人的少爺小姐，好少爺好小姐們了！」呵！多麼大氣量！

對不起，筆一溜，說了不少的廢話，而且也許還很失敬，不過我還得聲明一句，本心無他，希望你和我不要無論想到什麼地方都只往「大馬路」上混，我們的路是第二條。

我們要從半斤減去十六兩碰了壁，我們硬不服，創出一個負數的戶頭來記這筆苦賬，這就是說，將減法的定義擴充到正負兩種數。不是麼？你欠別人十六兩高粱酒，他來向你討，偏偏不湊巧你只有半斤，你要還清他，不是差八兩嗎？「差」的就是負數了！

法則的擴充，還有一條路；因爲我們將一個法則的限制打破，只是讓牠能夠活動的範圍擴大起來；但除此以外，有時，我們又要求牠能夠簡單些，少消耗我們一點力量，讓我們在別方面也去活動活動。這，舉個例說，就是一種法則若是要重重複複地用時，我們也可以想一個歸總的來代替牠。比如，要你從一百五十減去三，減了一次又減一次地繼續

下去，看多少次可以減完。這題目自然是可能的，但眞要去減誰這樣耐煩！眞沒趣得很，是不是？於是我們就另開闢一條行人便道，那便是除法；將 3 去除 150 就得 50；要回答上面的問題，你說多少次可減完？同樣地，加法，若只是同一個數儘管加了又加，也乏味得很，又另開闢一條路，掛塊牌子叫乘法。

歸到近一些地方吧！我們以前講過的一些方法，也可以擴張牠的應用的範圍嗎？也可以將牠的法則推廣嗎？

講誘導函數的時候，我們限定了，說對於 $x$ 的每一個值，牠都有一個有定的極限。所以，我們就知道，對於 $x$ 的每一個值，牠都有一個相應的值。歸根結蒂，我們便可以將誘導函數 $y'$ 看成 $x$ 的已知函數。結果，我們也就一樣地，可以計算誘導函數 $y'$ 對於 $x$ 的誘導函數，這就成爲誘導函數的誘導函數了；我們叫牠是二次誘導函數，並且用 $y''$ 表示牠。

實在呢，要得出一個函數的二次誘導函，並不是難事，只是將誘導函數法連用兩次好了，比如前面我們拿來做例的：

牠的誘導函數是：

$$e = t^2 \qquad (1)$$

$$e' = 2t \qquad (2)$$

將這個函數，照 $d=5t$ 的例計算，就可得出二次誘導函數：

$$e'' = 2 \qquad (3)$$

二次誘導函數對於一次誘導函數的關係恰和一次誘導函數對於本來的函數的關係相同。一次誘導函數表示本來的函數的變化，同樣地，二次誘導函數就表示一次誘導函數的變化。

我們開始講誘導函數時，用運動來做例，現在再借重牠來解釋二次誘導函數，看能有什麼玩意兒生出來不能。

我們曾經從運動當中看出來，一次誘導函數是表示每一剎那間，一個點的速度。所謂速度的變化究竟是什麼意思呢？假如一個東西，第一秒鐘的速度是4尺，第二秒鐘的

是6尺，第三秒鐘的是8尺，這速度越來越大，照我們平常的說法，就是牠越動越快。若是文氣一點說，便是牠的速度逐漸增加，你只不要把「增加」這個辭太看呆板了，那末所謂增加也就是變化的意思。所以速度的變化，就只是運動的速度的增加，我們便說牠是那運動的「加速度」。

要想求出一個運動着的點，牠在一刹那間的加速度，只須將從前我們所用過的求一刹那間的速度的方法，重複用一次就行了。不過，在第二次的時候，有一點必得加以注意，第一次，我們求的是距離對於時間的誘導函數，而第二次所求的卻是速度對於時間的誘導函數。結果，所謂加速度這個東西，牠就是等於速度對於時間的誘導函數；我們可以用下面的一個式子來表示這種關係：

$$\text{加速度} = \frac{dy'}{dt} = y'';$$

因為速度，牠自己是用運動所經過的空間對於時間的誘導函數來表示；所以加速度也只是這運動所經過的空間對於時間的二次誘導函數。

有了一次和二次誘導函數，應用牠們，對於運動的情形我們更能夠知道得清楚些，牠的速度的變化是怎樣一個情景，我們便可完全明瞭。

假如一個點始終是靜止着的，那末牠的速度便是零，於是第一次誘導函數也就等於零。

反過來，假如，一次誘導函數，或是說速度，牠等於零，我們就可以斷定那個點是靜止的。

跟着這個推論，比如已經知道了一種運動的法則，我們想要找出這運動着的點歸到靜止的時間，我們只要找出什麼時候牠的一次誘導函數等於零，那就成了。

隨便舉個例來說，假設有一個點，牠的運動法則是：

$$d = t^2 - 5t$$

由以前講過的例，$t^2$ 的誘導函數是 $2t$，而 $5t$ 的誘導函數是 $5$；所以：

$$d' = 2t - 5 \quad (注)$$

就是這個點的速度，在每一刹那$t$間是$2t-5$，若要問這個點什麼時候得到靜止，只要找出什麼時候牠的速度等於零就行了。但是，牠的速度，就是這運動的一次誘導函數$d'$；所以若$d'$等於零時，這個點就是靜止的。我們再來看$d'$怎樣才等於零。牠既等於$2t-5$，那末$2t-5$若等於零，$d'$也就等於零。因此我們可以進一步來看：$2t-5$等於零要什麼條件。我們試解下面的簡單方程式：

$$2t-5=0$$

解這方程式的法則，我相信你沒有忘掉，所以我只簡截地回答你，這方程式的根是2.5。假如$t$是用秒做單位的，那末，便是兩秒半鐘的時候，$d'$等於零，就是那個點，在開始運動後兩秒半鐘歸到靜止。

現在，我們另外討論別的問題，假如那點的運動是等速的：那末，一次誘導函數或是說速度，牠是一個常數。因此，牠的加速度，或是說牠的速度的變化，便等於零，也就是二次誘導函數等於零。一般的情況一個常數的誘導函數總是等於零的。

又可以掉過話頭來說，假如有一種運動法則，牠的二次誘導函數是零，那末牠的加速度自然也是零。這就是表明牠的速度老是一個樣子沒有什麼變化。從這一點，我們可以知道，一個函數，若牠的誘導函數是零，牠便是一個常數。

再繼續着推上去，若是加速度或二次誘導函數，不是一個常數，我們又可以問牠有什麼變化了。要知道牠的變化，我們不必用別的法子，還是找牠的誘導函數。這一來，我們卻得的是第三次誘導函數。在一般的情形當中，這第三次誘導數也不一定就等於零的。假如，牠還不是一個常數，牠就可以有誘導函數，這便成第四次的了。照這樣可以儘管推下去，我們不過連續地重複用那誘導函數法罷了。無論第幾次的誘導函數，都是表示牠前一次的函數的變化。

從這樣看，關於函數變化的研究是可以窮追下去沒有底的。誘導函數不但可以有第二次的，第三次的，簡直可以有無限次數的；這全看那些數的氣量怎樣，只要牠不是被我們追過幾次便板起臉孔，死氣沉沉地，成了一個常數，我們就可以追過不憩。

(注)這個式子也可以直接計算出來:

$$\because \quad d = t^2 - 2t \tag{1}$$

$$d + \Delta d = (t+\Delta t)^2 - 2(t+\Delta t)$$

$$\therefore \quad \Delta d = (t+\Delta t)^2 - 2(t+\Delta t) - d$$

$$= (t+\Delta t)^2 - 2(t+\Delta t) - (t^2 - 2t)$$

$$= (t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2) - 2t - 2\Delta t - (t^2 - 2t)$$

$$= 2t\Delta t - 2\Delta t + \Delta t^2$$

$$\therefore \quad d' = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta d}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (2t - 2 + \Delta t) = 2t - 2.$$

# 九 局部誘導函數和全部的變化

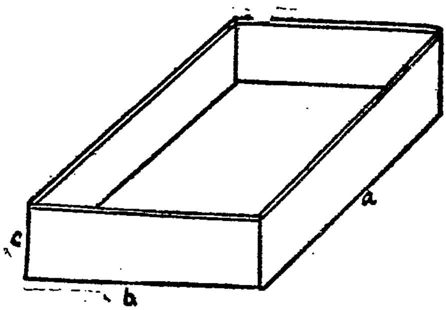
朋友火柴盒子，你總很面熟的了。牠是長方的，牠有長，有寬，又有高，這你都知道的，不是嗎？對於這種有長有寬又有高的東西，我們要計較牠的大小，就得算出牠的體積，算這種火柴盒子的體積的方法，算術裏已經講過，是把牠的長，寬，高來相乘。因此，這三個數中若有一個變了一點，牠的體積也跟着要變的，所以我們可以說火柴盒子的體積是這三個量的函數：設若牠的長是 $a$，寬是 $b$，高是 $c$，體積是 $v$，我們就可得出下面的式子：

$$v = abc$$

假如你有的火柴盒子是燮昌公司的，我有的卻是丹鳳公司的，你一定要和我爭，說是你那一個的體積比我這一個的大。朋友！空口說白話，絕不能叫我心服，我得向你要證

明，你有法子嗎？你只好將牠們的長，寬，高都比一比，找出變昌的盒子有一邊，或兩邊，甚而至於三邊，都比丹鳳的盒子要長些，你眞能這樣，我自然只好啞口無言了。

我們借這個小問題做引子，來看看火柴盒子這類東西的體積的變化是怎樣一個情景，先得想像牠的長 a，寬 b，和高 c 都是可以隨我們的意思叫牠們伸縮的。




再得想像牠們的變化是連續的，好像你用打氣筒套在足球的橡皮膽上打氣的一般。火柴盒的三邊既然是連續地變，牠的體積自然也得跟着連續地變，而恰好是三個變數 a，b，c 的連續函數。到了這裏，我們就有了一個問題：

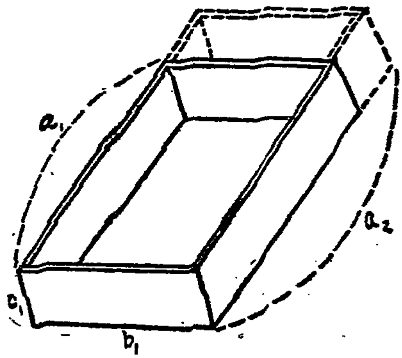
「當這三個變數同時連續地變的時候，牠們的函數 v 的無限小的變化，我們怎樣去測法呢？」

以前，為了要計算無限小的變化，我們請出了一件寶貨，

誘導函數來不過那時的函數是只依賴着一個變數的；現在，我們就來看，這個寶貨，碰到了幾個變數的函數，牠還靈不靈。

第一步我們先注意到，我們能夠將下面的一個體積，

$$v_1 = a_1b_1c_1$$




由以下將要說到的頂簡便的方法變成這麼一個新體積。

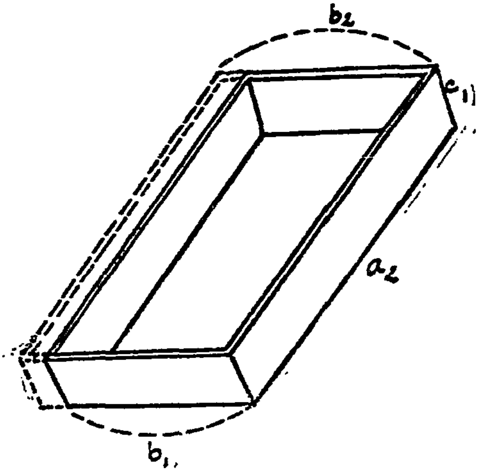
$$v_2 = a_2b_2c_2$$

開始，我們將這體積的寬 $b_1$ 和高 $c_1$ 保住老樣子，不讓牠改變，只使長 $a_1$ 加大一點變成 $a_2$。

接着，再保住 $a_2$ 和 $c_1$ 只讓寬 $b_1$ 變到 $b_2$.

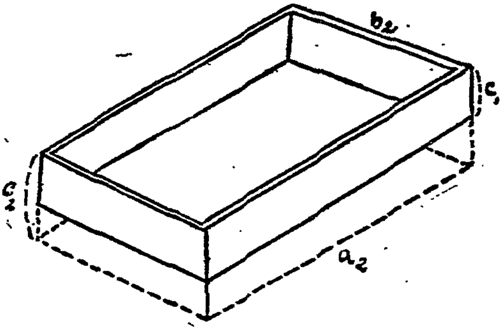
末了，將 $a_2$ 和 $b_2$ 保住，只將 $c_1$ 變到 $c_2$.

這種方法，我們是用三次手續使體積 $v_1$ 變到 $v_2$ 的，在每一次我們都只讓一個變數改變。




只依賴着一個變數的函數，牠的變化，我們以前是用這個函數的誘導函數來表示。

同樣的理由，我們每次都可以得出一個誘導函數來。不過這裏所得的誘導函數，都只能表示那函數的局部的變化，因此我們就替牠們取一個名字叫「局部誘導函數」，從前我們表示 y 對於 x 的誘導函數用的符號是 $\frac{dy}{dx}$ 現在對於局部誘導函數我們也用和牠相似的符號表示，就是：




$$\frac{\partial v}{\partial a},\ \frac{\partial v}{\partial b},\ \frac{\partial v}{\partial c}$$

第一個表示只將 a 當變數，第二個和第三個相應地表示只將 b 或 c 當變數。

你將前面說過的關於微分的式子記起來吧！

$$dy = y'dx.$$

同樣地，若要找 v 的變化 dv，那就得將牠三邊的變化加起來。所以：

$$dv = \frac{\partial v}{\partial a}da + \frac{\partial v}{\partial b}db + \frac{\partial v}{\partial c}dc$$

* * * *

dv 這個東西，在數學上給牠一個名字叫「總微分」或「全微分」。

由上面的例，推到一般的情形去，我們就可以說：

「幾個變數的函數，牠的全部變化，可以用牠的總微分表示，這總微分呢，便等於這函數對於各變數的局部微分的和。」所以要求出一個函數的總微分，必須分次求出牠對於每一個變數的局部誘導函數。

# 一〇 積分學

數學的園地裏，最有趣味的一件事，就是許多重要的高樓大廈，有一座向東就一定，有一座向西，有一座朝南，就有一座朝北；使得遊賞的人，走過去又可以走回來。而這些兩兩相對的亭台樓閣，牠們裏面的一切結構，陳設，點綴，都互相關連着，恰好珠聯璧合，相得益彰。

不是麼？你會加就得會減，你會乘就得會除，你學了求公約數和最大公約數，你就得學求公倍數和最小公數；你知道怎樣通分的原理，你就也懂得怎樣約分；你曉得乘方的法子還不夠，必須要曉得開方的法子，才算完全；原來一反一正不只是做文章的大道理呢？加法，乘法，……算牠們是正的，那末減法，除法，……恰巧相應地就是牠們的還原，所以

便是反的。

假如微分法算是正的，也有和牠相反的方法沒有呢？

朋友！一點不騙你，正有一個和牠相反的方法，這就是積分法，倘使沒有這樣一個方法，那麼我們曉得了一種運動的法則，可以算出牠在每一剎那間的速度，遇着有人和我們開玩笑，說出一個速度來，要我們囘答他這是什麼一種運動，那不是糟了嗎？他若再不客氣點，還要我們替他算出在某一個時間中，那運動所經過的空間距離，我們怎樣下台？

別人假如向你說，有一種運動的速度，每小時總是5里，要求牠的運動法則，你自然差不多能夠不假思索地就囘答他：

$$d = 5t。$$

他若問你，八個鐘頭的時間，這運動的東西在空間經過了多少長的距離，你也可以輕輕巧巧地就說出是40里？

但是，這是一個極簡單的等速運度的例呀！碰了不是等速運動的時候，怎樣？

倘使你碰着的是一個粗心馬虎的闊少，你只要給他一個大致不差的回答，他就很高興的，那自然什麼問題也沒有。不是麼？咱們中國人是寬大慣了的，算什麼都四捨五入，又痛快又簡單。你到過小菜場麼？你看那賣菜的雖是提着一桿秤在稱，但那秤總不要牠平，而且稱完了，買的人覺得不滿足，還可任意在籃子裏去抓一把來添上。在這樣的場合，卽使有人問你什麼速度什麼運動，你很可以隨便一點地囘答他。其實呢，在日常生活當中，本來用不到什麼精密的計算，所以上面提出的問題，若為實際運用，只要有一個近似的解答就行了。

近似的解答，卻並不很難找，只要我們能夠知道一種運動的平均速度，舉一個例，比如，我們曉得一部汽車牠的平均速度是每小時40公里；那末，5小時，牠就「大約」走的是200公里了。

但是，我們知道了那汽車眞實的速度，是常常變動的，我們又想要將牠在一定的時間當中所走的路程計算得更精密些，就得要知道許多相離很近的剎那間的速度。——

一串平均速度。

這樣計算出來的結果，自然比前面用一點鐘做單位的平均速度來計算所得的，要精確些，我們所取的一串平均速度，數目越多，互相隔開的時間間隔越短，所得的結果，自然也就越精確，但是，無論怎樣，總不是眞實的情形。

怎樣解決這問題呢？

一部汽車，繼續了一個鐘頭，在一條很直的路上奔馳過去；每一刹間牠的速度，我們也知道了；牠在一點鐘裏面所經過的路程，究竟怎樣呢？

第一個求近似值的方法：我們可以將一點鐘的時間，分成每5分鐘一個間隔。在這十二個間隔當中。每一個間隔，我們都選一個，在一刹那間的眞速度：比如說在第一個間隔裏，每分鐘 $v_1$ 公尺是牠在某一刹間的眞實的速度；在第二個間隔裏，我們選 $v_2$，第三個間隔裏，選 $v_3$……這樣一直到 $v_{12}$。

這汽車在第一個五分鐘時間內所經過的路程，和 $5v_1$ 公尺相近；在第二個五分鐘

裏所經過的，和 $5v_2$ 公尺相近，以下也可以照推。

牠一點鐘的時間所通過的距離，就近於經過這十二個時間隔間所走的距離的和，就是說：

$$d = 5v_1 + 5v_2 + 5v_3 + \cdots + 5v_{12}。$$

這個結果，也許恰好就是正確的，但這於我們也沒有用，因爲牠是不是正確，我們就沒有法子去決定。一般地說來，牠總是和眞實的相差不少。

實際上，我們上面的方法，雖則已將時間分成了十二個間隔，但在每5分鐘這一段裏面，還是用一個速度來作成平均速度。雖則這個速度，在某一剎那是眞實的，但牠和平均速度比較起來，也許太大了或是太小了；跟着我們所算出來的那段路也說不定會太大或太小。所以，這個算法要得出確切的結果，差得還遠呢！

不過，照這個樣子，我們還可做得更精細些，無妨將5分鐘一段的時間間隔再分得更小些，比如說，一分鐘一段；那末所得出的結果，即或一樣地不可靠，相差的程度總比較

小些。就照這樣做下去，時間的間隔越分越小，我們用來做代表的速度，也就比較更近於那段時間中的平均速度；我們所得的結果，跟着便更近於眞實的距離。

除了這個法子，我們還有第二個求近似值的方法：假如在那一點鐘以內，各分鐘我們選出的一刹那間的速度是 $v_1$，$v_2$，$v_3$，……$v_{60}$，那末這全路的距離 $d$ 便是：

$$d = v_1 + v_2 + v_3 + \cdots\cdots + v_{60}$$

照這樣繼續做下去，把時間的段數越分越多，我們所得出的距離近似的程度總是越來也越大。這所經的路程的值，我們總用項數逐漸加多，每次的數值逐漸近於眞實，這樣的許多數的和來表示。實際上，每一項都是表示一個很小的時間間隔乘一個速度所得的積。

我們還得將這個法子再講下去，請你千萬不可忘掉，和數中的各項，實際都是表示那路程的一小段。

我們照數學上慣用的假設來說：現在我們想像再將時間的間隔繼續分下去，一直

到無限，那末，最後的時間間隔，便是一個無限小的量了，將我們以前已用過的符號來表示，就是 $\Delta t$。

我們不要再找什麼很小的時間間隔中的任何速度吧，我們還是將從前所講過的速度的意義記起來。眞是，我們能夠將時間間隔無限地分下去，到無限小爲止，在這一剎那的速度，依以前所說的，牠便是那運動所經過的路程對於時間的誘導函數。可見得，這速度和這無限小的時間的乘積，便是一剎那間，運動所經過的路程。自然這路程也是無限小的。但是將這樣一個一個的無限小的路程加在一淘，不就是一點鐘內眞實的總共的路程了嗎？不過，道理雖是這樣一說就可以明白，實際要照普通的加法去加，那一點兒動不來手；不但因爲相加的數每個都是無限小，還有這加在一淘的無限小的數，牠的數目，卻是數不清的無限大。

一點鐘的眞實的路程既可以有法子得到，只要將牠重用起來，無論多少點鐘的眞實的路程也可以得到了；一般地說，我們仍然設時間是 $t$。

照上面看起來，對於每一個t的值，我們都可以得出距離d的值來，所以d便是t的函數，可以寫成下面的樣子：

$$d = f(t)$$

換過一句話來說，這就是表示那運動的法則。

* * * *

歸根下來，我們所要找尋的只是將一個誘導函數還元轉去的法子。從前是知道了一種運動法則，要找牠的速度，現在卻是由速度要反回去求牠所屬的運動法則。從前用過的由運動法則求速度的方法，叫做誘導函數法，所以得出來的速度也叫誘導函數。

現在我們所要找的和誘導函數法正相反的方法便叫「積分法」；所以一種運動在一段時間內所經過的距離d，便是牠的速度對於時間的「積分」。

由前面順了看下來，你大概已經可以明白「積分」是什麼意思了。為了使得我們的觀念更清楚一些，用一般習用的名詞來說，所謂「積分」就是：

「無限大的數目這般多的一些無限小的量的總和的極限。」

話雖只一句，「的」字太多了，恐怕反而有些眉目不清吧！那末，重來說一次，我們將許許多多的，簡直是無法表明白的，一些無限小量，加在一淘；但這是不能照平常的加法去加的，所以我們只好換一個法子，求這個總和的極限；這極限便是所謂「積分。」

* * * *

這個一般的定義雖則我們也能夠用到關於運動的問題上面去，但我們現在還能更一般地去研究牠。我們只須把已說過的關於速度這種函數的一些話，重複一番就好了。

設若$y$是變數$x$的一個函數，照一般的寫法：

$$y = f(x)$$

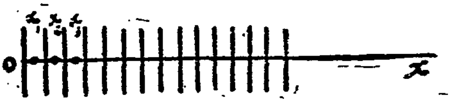
對於每一個$x$的值，$y$的相應值假如也知道了；那末函數$f(x)$對於$x$的積分是什麼東西呢？

因爲積分法就是誘導函數法的反方法，那末要將一個函數 $f(x)$ 積分，就是無異於說：要另外找一個函數，比如是 $F(x)$，而這個函數不是可以隨便拿來塘塞的，必須牠 $F(x)$ 的誘導函數就恰好是函數 $f(x)$。這正和我們知道了3和5要求8，用加法，而知道了8同5要求3就用減法是一般情形，不是麼？在代數裏面，我們對於減法精密地一般地來下定義，就得這樣講：「有a和b兩個數，要找一個數出來，牠和b相加就等於a，這種方法便是減法」。

* * * *

前面已經說過的積分法，我們再來做個例看。

我們先選好一段變數的間隔：比如，有了起點0，又有x的任意一個數值。我們就將0和x當中的間隔分成很小很小的小間隔，一直到可以用 $\Delta x$ 表示的一步，在每一個小小的間隔裏，我們隨便選一個x的值 $x_1$，$x_2$，$x_3$，……。



因爲函數$f(x)$對於$x$的每一個值都有相應的值，牠相應於$x_1$，$x_2$，$x_3$……的值我們可以用$f(x_1)$，$f(x_2)$，$f(x_3)$……來表示；那末這總和就應當是：

$$f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + f(x_3)\Delta x + \cdots\cdots$$

在這個式子裏面$\Delta x$越小，那就是我們將0 x分的段數越多，所以牠的項數跟着也就多起來，但是每項的數值卻小了下去。這樣，我們不是又可以得出另外一個不同的總和來了嗎？假如繼續不斷地照樣做下去，逐次新做出來的和總比牠前一次的漸漸地來得精確些。到了極限，這個和就會等於我們所要找的$F(x)$。所以積分法，實在是要求一個總和。$F(x)$是$f(x)$的積分，掉過來$f(x)$就是$F(x)$的誘導函數，由前面的微分的表示法：

$$dF(x) = f(x)dx, \qquad (1)$$

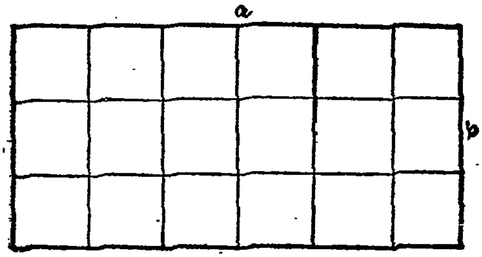
若把一個S拉長了來寫成「$\int$」這個樣子。作爲積分的符號，那末$F(x)$和$f(x)$的關係又可以這樣表示：

$$\therefore\ F(x)=\int f(x)dx \qquad (2)$$

第一第二兩個式子的意義雖然不相同，但所表示的兩個函數的關係卻是一樣的，這恰好像說「趙阿狗是趙阿貓的爸爸」和「趙阿貓是趙阿狗的囝囝」一般，意味呢全然兩樣，但「阿狗」「阿貓」都姓趙而且阿狗是爸爸，阿貓是囝囝，這個關係，在兩句話當中總是一樣地包含着。

*　*　*　*

講誘導函數的時候，先用運動來做例，後來再從數學上的運用去研究牠；積分法，除了在知道速度時，去求一種運動的法則以外，還有別的用場沒有呢？

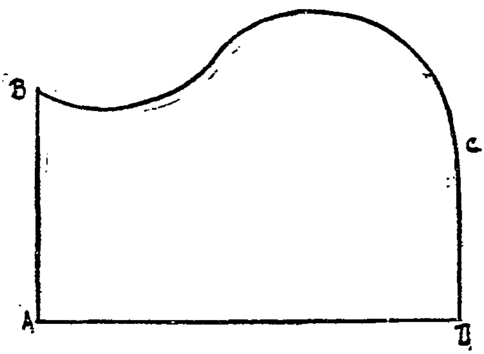



## 一一 面積的計算

將前節所講過的方法拿來運用，再沒有比求矩形的面積，那麼更簡單的例了。比如有一個矩形，牠的長是a，寬是b，牠的面積便是a和b的乘積，這在算術上就講過。像圖上所表示的，長是6寬是3，面積就恰好是三六一十八個方塊。

假如這矩形，有一邊不是直線，——那自然就不能再叫牠是矩形，——要求牠的面積，也就不能照求矩形的面積的方法這般簡單；那麼，我們有什麼法子呢？

假使我們所要求的是圖中ABCD線所包圍着的面積，

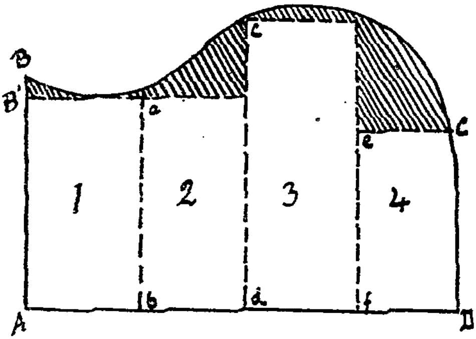



我們知道AB，AD和DC的長，並且又知道表示BC曲綫的函數，（這樣，我們就可知道BC曲線上各點到AB線的距離，）我們用什麼方法，可以求出ABCD的面積呢？

* * * *

一眼看去，這問題好像非常困難，因爲BC曲線那樣的不規則，眞是有點兒不容易對付。但是，你卻不必着忙，只要應用我們前面已說過好幾次的方法，就可以迎刃而解的。一起首，無妨先找牠的近似值，再連續地使這近似值漸漸地加增牠的近似的程度，直到我們得了精確的值爲止。

這個方法，實在非常自然的，前面我們已討論過無限小的量的計算法；又說過將一條線分了又分直分到無窮的方法；這些方法就可以供我們用來解決一些較複雜較困




難的問題；先從粗疏的一步入手，漸漸往前進，便可達到精確的一步。

* * * *

第一步，簡直一點困難都沒有，因為我們所要的只是一個大概的數目。

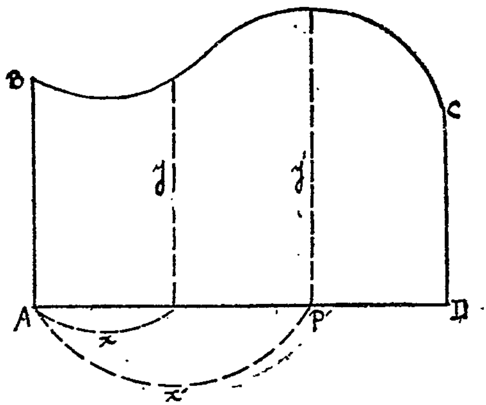
先把ABCD分成一些矩形，這些矩形的面積，我們自然已會算的了。

假如S的面積，差不多等於1，2，3，4四個矩形的和，我們就先來算這四個矩形的面積，用牠各自的長去乘牠各自的寬。

這樣一來，我們第一步所可得到的近似值，便是這樣：

$$S = \underbrace{AB' \times Ab}_{(1)} + \underbrace{ab \times bd}_{(2)} + \underbrace{cd \times df}_{(3)} + \underbrace{fD \times CD}_{(4)}$$

不用說，從圖上一看，就可知道，這樣得出來的結果，相差很遠，S的面積實在要比這四個矩形的面積的和大得多：圖中用了斜線畫着的那四塊，全都沒有算在裏面。




* * * *

但是，這個差誤，我們並不是沒有一點兒法子補救的，先記好表示BC曲線的函數是已知道的，我們可以求出BC上面各點到直線AD的距離。反過來就是對於直線AD上的每一點，都可以找出牠們和BC曲線的距離。假如我們把AD看作和以前各圖中的水平線OH一樣，AB就恰好相當於垂直線OV。在AD線上的點的值，我們就可說牠是x，相應於這些點的到BC的距離便是y。所以AD上的一點P到AD的距離實在是一個

變數，現在我們說AD的距離是x，AD上面另外有一點P′，AP′的距離是x′。過P和P都畫一條垂直線同BC相交在$p$和$p_1$；$pP'$，$P_1P'_1$就相應地表示函數在x和x′那兩點的值y和y′。

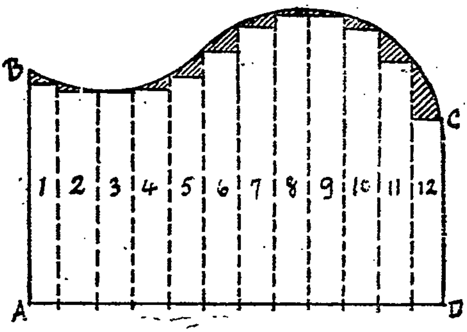
結果，無論P和P′點在AD上什麼地方，我們都可以將y和y′找出來，所以y是x的函數，可以寫成：

$$y = f(x),$$

這個函數就是BC曲線所表示的。

* * * *

現在，再來求面積S的值吧！將前面的四個矩形，再分成數目更多的較小的一些矩形。由圖上就可看明白，那些從曲線上畫出的和AD平行的短線都比較地挨近曲線；而斜紋所表示的部分也比上面的減小了。因此用這些新的矩形的面積的和來表示所求的面積；




$$S = 1 + 2 + 3 + \cdots\cdots + 12.$$

比前面所得的差誤就小得多。

再把AD分成更小的線段，比如是A $x_1$, $x_2$, $x_3$,……由各點到曲線BC的距離設爲 $y_1$, $y_2$, $y_3$,……這些矩形的面積就是 $y_1 \times x_1$, $y_2 \times (x_2 - x_1)$, $y_3 \times (x_3 - x_2)$;……而總共的面積就等於這些小面積的和；所以：

$$S(\text{近似值}) = y_1 \times x_1 + y_2 \times (x_2 - x_1) + y_3 \times (x_3 - x_2) + \cdots\cdots$$

若要想得出一個精確的結果呢，只須繼續着再把AD分得段數一次比一次的多，每段的間隔一次比一次的短，每次都將各個小矩形的面積的和來表所求的面積；那末，S和這所得的近似值，牠們的差，便越來越小了。

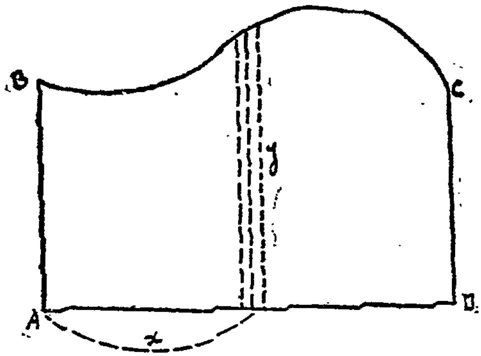
這樣做下去，到了極限，就是說，小矩形的數目是無限地多，而牠們每一個的面積，便

是無限地小，這一羣小矩形的和便是眞實的面積S。

但是，所謂數目無限的，一些無限小的量的和，牠的極限，照前節所講過的，這就是積分。所以我們剛才所講的例，實在就是積分法的幾何上的運用。

所求的面積S，就是x的函數y對x的積分。

換句話說，求一條曲線所切成的面積，必須計算那些連續的近似值，一直到極限，這就是所謂積分。




* * * *

到這裏，爲了要說明白積分法的原理，我們已舉了兩個例：第一個，是說明積分法就是微分法的還原；第二個，是表示出積分法在幾何學上的意味。將這些範圍和形式都不

相同的問題的解決法，貫通起來，就可以明瞭積分法的意義，而且還可以擴張牠的使用的範圍。不是麼？我們講誘導函法的時候，也是一步一步地逐漸將牠的意義弄明白，同時也就擴張了牠的活動的領域；積分法既是牠的還原法，自然也可以照樣來一下的了。比如說，前面我們只是用牠來計算面積，但如果我們要用牠來計算體積在原理上，也就全是一樣。因爲立方柱的體積，我們早就知道牠是等於牠的長，寬，高，相乘的積，假如我們所要求牠的體積的那個東西，有一面是曲面，我們就可以先把牠分成幾部分，照求立方柱的體積的方法，將牠們的體積計算出來，然後將這幾個積加在一淘，這就是第一次的近似值了。和前面一樣地，我們可以再將各部分分小下去，求第二次，第三次……的近似值。這些近似值，因爲越分項數越多，每項的值越小，所以近似的程度就漸次地加高，到了最後，項數增到無限多，每項的值變成了無限小，這些的和的極限，就是我們所求的體積，這種方法就是積分。

# 一二 微分方程式

在數學的園地中微分法這一個院落從建築起來的時候直到現在，牠都在盡量地擴充牠的地盤，充實牠的內容，牠眞是與時俱進地，越來越繁榮。因了這樣，牠最初的基礎雖很簡單，現在，離開那初期的簡單的模樣，已不知有多少遠了。牠從建始到現在已經是兩世紀半，這二百五十來年當中，經過了不少的高明工匠的慘淡經營，便成了現在的蔚然大觀。

由很多的數學家，逐漸逐漸地使牠展開，一步一步地將牠一般化，所謂無限小的計算，或叫做解析數學的這一枝，就變成現在的情景：在數學中佔了很廣闊的地位，關於牠的專門研究，以及一切的應用，也就不是一件容易弄清楚的事！

* * * *

不過，再要進一步去看裏面的「西洋景」這倒很難；不客氣點說，還要和以前一般，離開了許多數學的符號，而想講明白牠，那簡直是不可能的。因此，只好對不起，關於無限小的計算，我們所可以這般常識地講一點大意的，也就快收場了。但請你還不要就失望，下面所講到的，也還是一樣地重要。

從我們以前所講過許多次數的例看起來，所有關於運動的問題，都要用到微分法。因為一個關於運動的問題，牠所包含着的，無論已知或未知的條件，總不外是：延續在某一定時間當中的空間的路程，牠的速度，和牠的加速度，而這三個量又恰好由運動的法則和這個法則的誘導函數可以表明。

所以，知道了運動的法則，就可以求出合於這法則的速度以及加速度。現在假如我們知道一些速度以及一些加速度，並且還知道要適合於牠們所必須的一些不同的條件，那麽，要表明這運動，就只差找出牠的運動法則了。

單只空空洞洞地說，總是不中用的，仍然歸到切實一點的地步吧。關於速度和加速度，牠們彼此中間有什麼條件，在數學上都是用方程式來表示，不過這種方程式和代數上所講的普通方程式有些兩樣罷了；最大的不同，就是牠裏面包含得有誘導函數這個寶貝，因此，爲了和一般的方程式畫分門戶，我們就喊牠是微分方程式。

在代數中，我們有了一個方程式，是要去找出適合於這方程式的數值來，這個數值我們叫牠是這方程式的根。

和這個情形相類的，有了一個微分方程式，我們是要去找出一個適合於牠的函數來。這裏所謂的「適合」是什麼意思呢？明白點說，就是比如我們找出了一個函數，將牠的誘導函數的值，代進原來的微分方程式，這方程式還能成立，那就叫做適合於這個方程式，而這個被找了出來的函數，便稱爲這個微分方程式的積分。

代數裏從一個方程式去求牠的根叫作解方程式，對於微分方程式要找適合於牠

的函數，我們就說是將這微分方程式來積分。

還是來舉個頂頂簡單的例。

比如有一點，牠是在直線上運動着的，牠的加速度總是一個常數，這個運動的法則怎樣呢？

在這個題目裏，設如用$y''$表示運動的加速度，c代表一個老是不變的常數，那末我們就可以得到一個簡單的微分方程式：

$$y''=c.$$

你記得清楚加速度就是函數的二次誘導函數；所以現在的問題，就是要找出一個函數來，牠的第二次誘導函數恰好是c。

這裏的問題，自然是天字第一號容易的，前面已經說過，一種均齊變化的運動的加度是一個常數，但是若由數字上來找這個運動的法則，那就必須要將上面的微分方程式積分。

第一次，我們將牠積分得：（設變數是 $t$）

$$y' = ct$$

你要問這個式子怎樣來的麼？我卻不再說了，你看以前的例 $y''=c$ 是從什麼一個式子微分來的，就可以知道。

不過在這裏有個小小的問題，照以前所講過的誘導函數法算來，下面的兩個式子，都可以得出同樣的結果 $y''=c$，

$$y' = ct$$

$$y' = ct + a \quad （a也是一個常數）$$

這兩個式子恰好差了一項，（一個常數）我們總是用第二個而把第一個當成一種特殊的情形，（就是第二式中的 $a$ 等於零的結果）；那末，$a$ 究竟是什麼數呢？朋友對不起，「有人來問我，連我也不知，」我只曉得牠是一個常數。

這就很奇怪了，我們將微分方程式積分得出來的，還是一個不完全確定的回答！但

是，朋友這算不來什麼用不着大驚小怪；你在代數裏面解二次方程式時通常就會得出兩個根來的，若問你那一個對，你只好說都對，但倘使你所解的二次方程式，別人還另外給你一個什麼限制，你的答案有時就只能容許有一個了。同這個一般的道理，倘使另外還有條件，常數a也可以決定是什麼一回事的。上面的兩個式子當中無論那一個也還是一個微分方程式，再將這個微分方程式積分一次，所得出來的函數，便表示我們所要找的運動法則，$v=\frac{c}{2}t^2+at+b$（b又是一個常數）。

無限小的計算，雖則我們所舉過的例都只是關於運動的，但物理的現象實在是以運動的研究做基礎，所以很多的物理現象，我們要去研究牠們，要去發現牠們的法則，以及將這些法則表示出來，都離不了這無限小的計算。實際上，除了物理學外，別的科學用到牠的地方也非常廣闊，天文，化學，這些不用說了，就是生物學和許多社會科學，也要倚賴着牠。實際，現在要想走進學術的園地去，恐怕除了做「月姊姊花妹妹」的詩，寫「我愛你，你不愛我」的小說，和牠不接觸的機會總是很少的。

# 一三 數學究竟是什麼

在這一節裏，我打算寫些關於數學的總概念的話。不過我很躊躇了許久，究竟這些話寫了出來會不會比不寫出來更壞現？在雖終於寫了，但我並不是已經相信得過，寫了出來比不寫一定是好一些。其實呢，關於數學的園地這個題目要動手寫，要這樣地寫法，就是到了已快要完結的現在，我仍然懷疑。

第一個疑問是：誰要看這樣的東西？對於數學有興趣的朋友們，自己走到數學的園地裏去觀賞，無論怎樣，所得到的一定比看完這篇粗枝大葉的文字來得多。至於對於數學沒趣味的朋友們，牠卻已夠殺風景了。不是麼？倘然我寫的是甲男士遇着了乙女士，怎樣傾心，怎樣拜倒，怎樣追求，無論結果是好是壞，總可惹得一些人的心癢起來；倘若我寫

的是一位英雄的故事，他怎樣熱心救同胞，怎樣忠於主義，怎樣奮鬬，無論他成功失敗，也可以引起一些人的讚賞豔羨，數學無論怎樣總是叫人頭痛的東西，誰喜歡這個？

第二個疑問；這樣的寫法，會不會反給許多人一些似是而非的概念？

關於第一個疑問，我不想開口再說什麼，只有這第二個疑問，卻好像應得顧到一下，這纔對得起居然肯費脫幾個鐘頭來看這篇文字的朋友們！

數學是什麼？牠究竟是什麼？

眞要囘答這個問題麼？對不住，你若希望得到的是一個完全合於邏輯的條件的答案，我卻只好敬謝不敏，說句老實話，只要有人囘答得上來，我也要五體投地去請教他，而且將他的囘答永遠刻在我的肺腑裏。那末，這裏還能夠說什麼呢？我只想寫幾個別人的答案出來，這雖然不能使朋友們滿意，但從牠們也可以知道一點數學的園地的輪廓吧！

遠在亞里士多德以前的一個囘答，也是所有的囘答當中的最通俗的一個，牠是這樣說的：

「數學是計量的科學。」

朋友，這個回答你能夠滿足麼？什麼叫做量？量怎樣去計算牠？假如我們說，測量和統計都是計量的科學，這大約不會有十分大的毛病吧！雖則，牠們的最後目的並不是只要求出一個量的關係來，但就牠們的手段說，對於量的計算，比較還來得直接些呢。因此，到了孔德(Auguste Comte)就將牠改變了一下：

「數學是間接計量的科學。」

他要這樣加以改變，並不是爲怕和測量，統計這些相混。實在有許多量，是無法直接去測定或計算的；比如天空中閃動的星的距離和大小，比如原子的距離和大小，一個大得不堪，一個小得可憐，我們這些笨脚笨手的人，都是沒法直接去量牠們的。

這個回答雖已進步了一點，牠就能令我們滿意嗎？量是什麼東西，這還是須得要解釋。這且不去管牠，我們姑且照常識的說法，給量一個定義，不過，就是這樣，到了近代，數學的園地裏增加了一些希奇古怪的建築，牠也不能包括進去了。在那廣闊的園地裏面，有

些新的亭樓，樹着的遍額，是什麼羣論咧，投影幾何咧，數論咧，邏輯的代數咧，……這些都和量絕緣的。

孔德的回答出了漏洞，於是又有許多人來加以修正，這要一個一個地列舉出來，當然不可能，隨便舉一個，即如皮爾士 (Benjamin Peirce)

「數學是引出必要的結論的科學。」

他這個回答，自然包括得寬廣些了，但是也還有問題，所謂「必要的結論」是什麼一個玩意兒呢？這五個字這樣地排在一淘，牠的意思就非加以解釋不可了，然而他究竟怎樣解釋法，照他的解釋能不能說明數學究竟是什麼，這誰也不知道。

還有，從前數學的園地裏面，都只是盡量地在各個院落中加增建築，培植花木，即或另闢院落，也是向着前面開闢的地方去動手，近來卻有些工匠異想天開地，在後面背陰的地方要開一條大道通到隔隣的邏輯的園地去。他們努力的結果，自然已有相當的成績。但把一座數學的園地更弄得五花八門，要給牠說明更是困難了。終於弄得，對於我們

所期待着回答的問題，回答的越多，越「糊塗」，羅素更巧妙，簡直和開玩笑一般，他說：

"Mathematics is the subject in which we never know what we are talking about nor whether what we are saying is true"。

我不翻譯這句話了，假如你眞要我翻譯，那我想這樣譯法：「有人來問我，連我也不知。」你大約曉得這兩句話的來路的吧！

數學究竟是什麼？我所想舉出的回答，只有這樣多。不是越說越惝恍，越不像樣了麼？是的！但雖不能夠簡單地說明牠，也就說明了牠的一大半了！研究科學的人最喜歡給牠所研究的東西下一個定義，所以冠冕堂皇的科學書，翻開來第一頁第一行就是定義，而且這些定義也差不多有一定的形式，就中國話說便是「某某者研究」什麼什麼「的科學也，」若要寫個「洋文」調，就便舉英文，那便是 'X is the science which Y.' 這一來，無論那一個花了幾毛錢或幾塊錢將那本書買到手，翻開一看，就非常高興，不要五分鐘，便可將書放到箱子裏去，說起那一門的東西，自己也就可以回答得出牠講的是什麼。

然而，這簡直和賣膏藥的廣告沒有多大兩樣，只要你眞把那本書讀完，你就可以看出來，第一頁第一行的定義簡直是前幾年的中交票，只好限制兌現的。若是你多跑些地方，你還可以知道那鈔票就有些中交兩行的分行也拒絕收用。

朋友！這不是什麽毛病，你一點兒用不着失望！假如有一門科學，已經可以給牠下一個懸諸國門不能增損一字的定義，牠也就算完事了；這正和一個人可以被別人替他寫享年幾十有幾歲一般，不怕就是享年一百二十歲，他總已躺在棺材裏了。一天一天地還能吃飯睡覺的人，不能說他享年若干歲，一時一刻進步不止的科學，也沒有人能說明牠究竟是什麽東西！越是身心健全的人，越難推定他的命運，越是發展得旺盛的科學，越難有確定的定義。

不過，我們將這正面丟開，從旁邊灣一下，數學的性質，好像有一點是頂特別的，就是喜歡用符號。有了0，1，2，……9十個符號，又有了「＋」，「－」，「×」，「÷」，「＝」五個符號，便能記通常的數而且計算牠們，單是加，減，乘，除，計算不便當，我們又畫一條線來隔開兩

個數，說一個是分母，一個是分子，這一來就有分數的計算，接連下去，在運算方面我們又有比例的符號，在記數方面我們有方指數和根指數，對數的記法，這還是就算術說，到了代數，你已經知道符號更多了，到了微積分，其實也不過多幾個符號而已。

數學的叫人頭痛，大約就是這些符號在作怪，你把牠們看得活動麼，那眞活動，x在這個方程式代的是人的年齡，在那個方程式就會代烏龜的腦袋，但是你要把牠看得呆麼，那牠眞夠呆，對了牠看三天三夜。x還只是x，你解不出那方程式，牠一點不來幫你的忙，也許牠還在暗中笑你蠢。

所謂數學家也者，依我說，就是一些能夠支使符號的人物，他們寫在數學書上的東西，說高深，自然是高深，眞有些是不容易懂的，但假如不許他們用符號，他們就只好一籌莫展了！

所以關於數學的東西，眞要說個透徹，離了符號，直無辦法，你初學代數的時候，總很有些日子，對於a，b，c，x，y，z，想不通的，覺得牠們和你用慣的1，2，3，4……有些兩樣。

自然，說他們完全一樣，是有點靠不住，你去買白菜，說要x斤，別人只好瞪起兩隻眼睛瞪着你；但你用慣了，你做起題來，也就不會感到牠們的差別有怎樣的了不起。

數學就是這末一回事，這篇文裏雖則盡量地避去符號的運用，但只是爲了對於不喜歡或是看不慣符號的朋友說一些數學的概念，所以有些非多用符號不可的東西，只得不說了！

朋友！你假若高興，多在數學的園地裏白相相的話，請你多多練習使用符號的能力。你見到一個人直立者，兩手正向左右平伸的時候，你不要聯想到那是釘死耶穌的十架，你就想像他的兩臂恰好是水平線，他的身體恰好是垂直線，假如碰巧有一隻蒼蠅從他的耳邊斜飛到他的手上，那更好，你就想像牠是一點在那裏動，牠飛過的路，便是一條曲線，這條曲線表示一個函數，可以求牠的誘導誘函數，又可以求這誘導函數的誘導函數；這就是蒼蠅飛動的速度和加速度了！

# 一四 總集論

科學的進展，有一個共通而富於趣味的傾向；這就是，每一種科學誕生以後，科學家們便拚了命使牠向前發展，正如大獲全勝的軍人遇着敵人總要窮追到山窮水盡一般。窮追的結果，自然總可以得到不少的戰利品，但後方空虛，卻也是很大的危險。一種科學發達到相當的程度，再要往前進取，總不如早時的容易，這是從科學史上可以見到的。因爲前進感到困難，於是便有些人自然而然地會疑心到牠的根底上面去，這一來，就要動手攷查牠的基礎和原理了。前節不是說過嗎？在數學的園地中，近來就有人在背陰的一面去開墾。

一種科學，恰和一個人一樣，年青的時候，生命力旺盛，只知道照着自己的浪漫的思

想往前衝，結果自然進步非常快；在這種時期誰還有那麼從容的工夫去思前想後，回看一看自己的來路和家屬呢？這樣地奮勇前進，只要不碰壁絕不願掉頭的。一種科學從牠的幾個基本原理或法則建立的時候起，科學家努力的結果總是替牠開闢領土，增加實力，使牠光榮，使牠傲然自大。

然而，上面越闊大，下面的根基更非牢固不可，不然頭重脚輕，豈不要栽觔斗嗎？所以，科學園地中的營造，到了一個範圍較大，內容較繁的時候，建築師們對於添造房屋就逐漸愼重躊躇起來了，倘使沒有確定牠的基石牢固到什麼程度，擴大的工作，便不敢貿然地動手；這樣，開始將他們的事業轉一個方向去進行：將已成的工作全部加以攷查，把所有的原理拿來批評，將所用的論證拿來估價，很仔細地去證明那些用慣了的極簡單的命題。他們對於一切都懷疑，若不是重新經過更可靠的更明確的方法證明那結果並沒有差異，即使是已經被一般人所是認的，他們也不敢遽然相信。

一般地說來，數學的園地裏面的建築都比較地穩固，但是許多工匠也懷疑牠而朔

始加以根底地攷查了。就是大家都不疑心的已得到的結果的簡單的證明，也不一定就可以直信而不容疑。因了推證的不完全或譯演的錯誤，不免會混進一些錯誤到科學裏面去的；重行攷查，實在有這個必要。

將已用慣的原理來重加攷訂，為了使科學的基礎愈加穩固，這是非常重要的工作，無論是數學或別的科學，牠的進展中總常常加添些新的意義進去，而所以加添進去的動力又大半是全憑直覺。因此就很有些是若加以嚴格地限定，就變成不可能了的。比如說，一個名詞的定義，在我們最初規定牠的時候，總是很小心很精密的，我們也覺得牠是很完全很可滿足了。但是用去用來，跟着牠所解釋的東西，不自覺地，牠就逐漸變化，結果簡直會和牠的本來的意義大相懸殊。我來隨便舉一個例，在邏輯上講到名詞的多義的時候，就一定講出許多名詞，牠的意義逐漸擴大，而許多又逐漸縮小，這只要你肯留心，隨處都可找到的。「墨水」顧名思義當然是說把黑的墨溶在水中的一種液體，但現在我們卻常在口上說紅墨水藍墨水紫墨水等，這樣一來，墨水的意義已全然變過，我們對於

舊日用慣的那一種，倒要另替牠取個名字叫黑墨水。墨本來是黑的，但事實上卻不能不在牠的上面加一個形容詞「黑」，可見現在我們口裏所說的墨，已不一定含有「黑」這個性質了。日常生活上的這種變遷，在科學上也是不能全免的，不過沒有這麼明顯，沒有這麼利害罷了。

其次說到科學的法則，我們初建立牠的時候，總覺得牠若不是絕對的，而是相對的，在科學上的價值，就不大。但是我們眞能夠將一個法則辯護着，使牠永遠享有絕對的力量嗎？所謂科學上的法則，牠是根據了我們所觀察的或實驗的結果歸納得來的。人力總只有這般大，那能盡所有的事物都觀察到或實驗到呢？因此，我們所不曾觀察到和實驗到的那一部分，也許就是我們所認爲絕對的法則的死對頭。科學是要承認事實的，所以科學的法則，就有時會碰着例外。

我們還是來舉例吧！在許多科學常用的名詞中，有一個，牠的意義究竟是怎樣，非常不容易嚴密地規定的；這就是所謂「無限。」

擡起頭望天空，白雲的上面還有青色的雲，有人問你天外是什麼？你只好回答他「天外還是天，天就是大而無限的，」他若不懂，你就要回答，天的高是「無限。」暗夜看閃爍的星球，掛滿了天空，有人問你牠們究有多少顆，你也只好說「無限。」然而，假如問你「無限」是什麼意思呢。你怎樣回答？你也許會這樣想，就是數不清的意思。但我卻要和你纏夾了。你的眉毛你數得淸嗎？你當然是數不清的，那麼你的眉毛是「無限」的嗎？無限和數不淸究竟不全然一樣，是不是？所以在我們平常用「無限」這個詞時，實在含有一個不能理解，或者說不可思議的意思。換句話說就是超越於我們的智力以上的，簡直是我們的精神的力量的極限。要說牠奇怪，實在比上帝和「無常」還奇怪，假如眞有上帝，我們知道他會造人，知道他會獎善罰惡，而且我們還可想像他的樣子的一個大概，因爲人是照他的模樣造出來的。至於「無常」我們知道他很高，知道他戴着高帽子，知道他穿的白衣服，知道他只有夜晚敢出來，知道他無論天晴下雨手裏總拿着一把傘。呵！這是鬼話，上帝無常我都不會見過，但是無論那個說到他們，還可以說得出點眉目，至於

「無限，」有誰能描模牠一句呢！

「無限」眞是一個神奇的東西，通常說話固然用到牠，文學上哲學上也用到牠，科學上那不用說了。不過，平常說話，本來全靠彼此心照，認不來許多眞，所以馬虎一點滿不在乎。就是文學上，也沒有要還出一個精確的意思的必要，文學的作品裏面，原來十有八九是誑賬，「白髮三千丈」李太白的個兒究竟有多高？但是在哲學上，就因牠的意義不明常常出岔子，在數學上也就時時生出矛盾來。

數學的園地中，各色各樣的東西，雖然大都弄得眉目很清楚，只有這「無限」我們卻被牠征服了，立在牠的面前總免不了要頭昏眼花，多麼神祕的東西呵，牠是！

* * * *

雖是這樣，數學家們還是不甘屈服，總要探索牠一番，這裏便打算大略說一說，不過請先容許我來繞一個小灣子。

這一節的題目是「總集論，」我們就先來說「總集」這個詞，在這裏的意義比如

有些相同的東西在一淘，我們只計算他的件數，不管牠們究竟是些什麼，這就叫牠們的「總集。」比如你的衣服袋裏，放得有三個「袁頭，」五只「八開，」和十二個銅子，不管三七二十一我們只數牠叮叮噹噹響着的一共是二十個，這個二十就稱爲含有二十個單元的總集。至於這單元的性質我們卻不去問牠；又比如你在課堂上坐着，同一個課堂裏，有男同學女同學和教師，比如教師是一個，女同學是五個，男同學是十四個，那末，這個課堂裏教師和男女同學的總集，恰好和你衣袋裏的錢的總集是一樣。

朋友！你也許正要闖進來打斷我的話頭，向我詰問了吧！這樣混雜不清的數目有什麼用呢？是的，當你學算術的時候，你的先生一定很認眞地告訴你，不是同種類的量不能加在一淘，三個男士加五個女士得出八來，非男非女又有男有女，這是什麼話？兩個「袁頭」加四只「八開」得出了六，這又算什麼？算術上所以總叫你處處小心，不但要注意到量要同種類而且還要同單位才能加減。到了現在我們卻不管這些了，這有什麼用場呢？

牠的用場嗎？眞是大極了！我們就要由牠去窺探那我們所難理解的「無限。」其實，

你會起那樣的疑問，實在由於你太認眞而又太不認眞的緣故。你爲什麼把「袁頭，」「八開，」銅子，男，女，學生，教師的分別看得那般重大呢？你爲什麼不從根本上去想一想「數」本來只是一個抽象的概念呢？我們只管到這抽象的數的概念的時候，你的衣袋裏的東西的總集和你課堂裏的人的總集，不是一樣的嗎？假如你的衣袋的錢，你並不是預備拿去買什麼吃食的，你只用牠來記一個於你關係很重要的數，那麼，牠不是很夠資格了嗎？「二十」這個數就是含有二十件單元而不管牠們的性質，所得出來的「總集。」

數的發生可以說是由於比較，所以我們就來說「總集」的比較法。比如有兩個總集在這裏，一個含有十五個單元，我們用個符號表示牠，E15，另外一個含有十個單元，用符號表示牠就是E10。

現在來比較這兩個「總集：」對於E10當中的各個單元，都從E15當中取一個來和牠成對；這是可以做得到的，是不是？但是，假如要掉一個頭，對於E15當中的各個單元都從E10當中取一個來和牠成對，做到第十對，就做不下去，只好停止了；可見

得，掉一個頭是不可能的，在這種情形的時候，我們就說：

「E15超過E10，」或是說：

「E15包含E10，」或者更說得文氣一些：

「E15的次數高於E10的。」

假如另外有兩個總集Ea和Eb，我們雖然「不知道a是什麼，」也「不知道b是什麼，」但是我們不單只能夠對於Eb當中的每一個單元，都從Ea取一個來和牠成對；而且還能夠對於Ea當中的每一個單元都從Eb取一個來和牠成對；我們就說，這兩個總集的次數是一樣，牠們所含的單元的數相同；也就是a等於b。前面不是說過你衣袋裏的錢的總集和你課堂裏的人的總集一樣嗎？你可以從衣袋裏將錢拿出來每人都給他一個；反過來，每個錢也能夠都不落空被一個人拿了去；這就可以說這兩個總集一樣，也就是你的錢的數目和你課堂裏的人的數目相等了。

我想來，你看了這幾段一定會笑得換不過氣的，這樣簡單明瞭的東西，還値得這麼

當成一回事地說嗎?不錯。E15超過E10,E20和E20一樣,三歲大的小孩子也就知道的。但是,朋友!你別忙啦!這只是用來做例,說明白我們的比較法。因爲數目簡單,兩個總集所含單元的數,你通都知道了,所以覺得很容易,但是這個比較法,就是對於不能夠知道牠所含的單元的數的也可以使用。我再來舉幾個通常的例然後歸到數學的本身上去。

你在學校裏,口上總常講「師生」兩個字,耳朵裏不用說也常聽到的。「師」的總集和「生」的總集,(不只就一個學校說)就不一樣,究竟合古今中外數起來,「師」的總集和「生」的「總集」是什麼,沒有那一個人回答得出來;然而我們卻可以想得到每一個「師」都給他一個「生」要他完全負責任這是可能的。但若要每一個「生」都替他找一個專一只對他負責任的「師」那就不可能了;所以這兩個總集不一樣;實在我們就可以說「生」的總集的次數高於「師」的總集的。再要舉例,比如父和子,比如長兄和弟弟,又比如偉人和丘八,這些兩個兩個的總集都不一樣。要找一個總集相等的

例麼，那就是夫妻倆，雖然我們並不知道，全世界有多少個丈夫和多少個妻子，但有資格被稱爲丈夫的總必須有一個妻子伴着他；（小老婆我們在這裏不算她和男子是夫妻關係）反過來，有資格被人稱爲妻子的，也必有一個丈夫伴着她；所以無論從那一邊說，「一對一」的關係都能成立。

好了！來說數學上的話，來講關於「無限」的話。

我們來想像一個總集，含有無限個個單元的：比如整數的總集：1,2,3,4,5,……n,(n+1),……

這是非常明白的，牠的次數，比一切含着有限個數單元的總集都高。我們現在要緊的是將牠來和別的無限總集比較，就用偶數的總集吧：

2,4,6,8,10,……2n,(2n+2)……

這就有些趣味了。照我們平常的想法，偶數只佔全整數的一半，所以整數的無限總集當然比偶數的無限總集，次數要高些。不是麼，十個連續整數中，只有五個偶數，一百個

連續整數中也不過五十個偶數，就是一萬個連續整數中也還不過五千個偶數，總歸只有一半；所以要成功「一對一」的關係，似乎有一面是不可能的。然而，你錯了，你不好單就有限的數目去想，我們現在是在比較兩個無限的總集呀！「無限」總有些奇怪的！我們試將牠倆一個對一個地排成兩行：

$1, 2, 3, 4, 5 \cdots\cdots\cdots n, \quad n+1 \cdots\cdots\cdots$

$2, 4, 6, 8, 10 \cdots\cdots\cdots 2n, \quad 2n+2 \cdots\cdots\cdots$

因爲兩個都是「無限」的緣故，自然我們不能把牠們通都寫出來。但是我們已經可以看得出來，第一行有個數，只要用2去乘牠就得出第二行中和牠相對的數來。掉一個頭，第二行中有一個數，只要用 2 去除牠，也就得出第一行中和牠相對的數來，這個「一對一」的關係不是無論用那一行做基礎都可能嗎？那麼，我們有什麼權力來說這兩個無限總集不一樣呢？

整數的無限總集，因爲牠是無限總集中我們最容易理解的一個；又因爲牠可以由

我們一個一個地舉出來，（雖然永遠舉不盡）所以我們替牠取一個名字叫「可枚舉的總集」(L'ensemble dé-nombrale) 我們常常用牠來做無限總集比較的標準，凡是次數和牠相同的無限總集，都是「可枚舉的無限總集」——我們單憑直覺也就可以斷定，整數的無限總集在所有的無限總集當中牠是次數頂低的一個，牠可以被我們用來做比較的標準，也就是這個緣故。

究竟無限總集當中，有沒有次數比這個「可枚舉的無限總集」更高的呢？我可以很爽快地回答你一個「有」字。不但是有，而且我們想要多少就有多少。從這個回答，我們就已對於無限算是比較地有些認識，不和以前一般地模糊了。這個回答，我供認不諱地向你說，我也是聽來的，最初提出牠來的，是康托Cantor，這已是三十多年的事了。在數學界中，他眞是值得我們崇敬的人物，他所創設的總集論，不但在近世數學中佔了很珍貴的幾頁，還開闢了數學進展的一條新路徑，使人不得不對他銘感五腑！

人間的事，說來總有些奇怪，無論什麽，不經人道破，大家便很懵懂，但有人一鑿穿，頓

時人人都聰明了。在他以前，我們只覺無限就是無限，吾生也有涯總歸弄牠不清楚就以不了了之。但現在想起來，實在有些可笑，無須什麽證明，我們有些時候也能夠覺到，無限總集是可以不相同的。

又來舉個例：比如前面我們所用來決定點的位置的直線，從0點起儘管伸張出去，牠所包含的點，就是一個無限總集。隨便想去，我們就會覺得牠的次數要比整數的無限總集的高，而從別的方面證明起來，也承認了我們所覺到的並沒有錯，這樣說來，我們的直覺很是一個可信賴的了。但是，朋友！你不要太觀樂呀，在別的時候，純粹的直覺就會叫你上當的。

你不相信嗎？比如有一個正方形，牠的一邊是AB。我問你，全個正方形內的點的總集是不是比單只一邊AB上的點的總集，牠的次數要高些呢？憑了我們的直覺，總要給牠一個肯定的回答的，但這你上當了，仔細去證明，牠們倆的次數卻恰好只是相等。

總結以上的話，你記好下面的一個基本的定理：

『若是有了一個無限總集，我們總能夠做出一個次數比牠高的來。』

要證明這個定理，我們就用整數的總集來做基礎，那麼所有可枚舉的無限總集也就不用再證明了。爲了說明簡單些，我只隨意再用一個總集，

照前面說過的，整數的總集是這樣：

1, 2, 3, 4, 5,………n, (n+1),………

就用E代表牠。

凡是用E當中的單元所做成的總集，無論牠所含的單元的數有限或無限都稱牠們爲E的「局部總集」所以：

17, 25, 31.

2, 5, 8, 11, ………2+3(n−1)………

1, 4, 9, 16………$n^2$………

這些都是E局的部總集，我們用$P_n$來代表牠們。

第一步，凡是用E的單元所能夠做成的局部總集，我們都將牠們做盡。

第二步我們就來做一個新的總集C，C的每一個單元原都是E的一個局部總集$P_n$，而且所有E的局部總集全都包含在裏面。這一來，C便成了E的一切局部總集的總集。

你把上面的條件記清楚，我們已來到要證明的重要地步了。我們要證明C的次數就比第一個總集E的高。為了這樣，我們還重複說一次比較兩個總集的法則，你務必也要將牠記好。

我們必須要對於E的每一個單元都能從C的當中取一個出來和牠成對。實際上只要依下面的方法配合就夠了：

$$1,\quad 2,\quad 3,\cdots\cdots n,\cdots\cdots\cdots\cdots (E)$$

$$(1,2)\ (2,3)\ (3,4)\cdots\cdots(n,n+1)\cdots\cdots(\text{C的一部分})$$

從這樣的配合法，因為第二行實在只用到C單元的一部分，這是很容易知道明白

的C的次數或是比E的高或是和E的相等。

我們能不能夠轉過頭來，對於C當中的每一個單元都從E當中取出一個和牠成對呢？

假如能夠做得到，那末E和C的次數是相等的。

假如不能夠，那末C的次數就高於E的。

我們無妨就假定能夠做得到，看會碰釘子不會！

算這種配合法是可以有的，我們就隨便一對一對地將牠們配合起來，寫成下面的樣子：

$P_1, P_2, P_3 \cdots\cdots P_n \cdots\cdots$ (C)

$1, 2, 3, \cdots\cdots n \cdots\cdots$ (E)

單就這兩行看，第一行是所有的局部總集，就是所有C的單元，都來了；（因為我們是要這樣做的）第二行我們卻說不定，也許是一切的整數都有，也許只有一部分；因為

我們是對了第一行的單元取出來的，究竟取完了沒有，還說不定。

這回，我們來一對一地檢查一下看，先從$P_1$和牠的對兒1來起。因爲$P_1$是E的局部總集，所以包含的是一些整數，現在$P_1$和1的關係就可以有兩種：一種是$P_1$裏面有1，一種是$P_1$裏面沒有1．假如$P_1$裏面沒有1的，我們將牠放在一邊。跟了來看，$P_2$和2這一對，假如$P_2$裏就有2，我們就把牠留着。照這樣子一直檢查下去，把所有的Pn都檢查完，凡是遇着整數n不在牠的對兒當中的，都放在一邊。

這些檢查後另外放在一邊的整數，我們又可做成功一個整數的總集。朋友！這點你却要注意，一點馬虎不得了！我們檢查的時候，有些整數因爲牠的對兒裏面已有了，牠所以沒有放出來。由此可以見得我們新做成的整數總集不過包含整數的一部分，所以牠也是E的局部總集。但是我們前面說過C的單元是E的局部總集，而且所有E的局部總集全部包含在C的裏面了。所以這個新的局部總集也應當是C的一個單元。用$P_t$來代表這個新的總集，$P_t$就應當是第一行$P_n$當中的一個，因爲第一行是所有的單元都排

在那兒的。

既然$P_t$已經應當站在第一行裏了，就應當有一個整數或是說E的一個單元來和牠成對。

假定和$P_t$成對的整數是t。

朋友！糟了！這就碰釘子了！你若還要硬撐場面，那麼再做下去。

在這裏我們又有兩種可能的情況：

第一種：t是$P_t$的一部分。但是這卻眞碰釘子了。$P_t$所包含的單元是在第一行中成對兒的單元所不包含在裏面的整數，而$P_t$自己就是第一行的一個單元，這不是矛盾了嗎？所以t不應當是$P_t$的一部分，這就到了下面的形況。

第二種：t不是$P_t$的一部分。這可能把釘子避開呢？不行，不行，還是不行。$P_t$自己是第一行的一個單元，t和牠相對又不包含在牠的裏面，我們檢查的時候就把牠放在一邊了。朋友，你看，這夠多麼糟。t既被我們檢查的時候放在一邊，而$P_t$就是這些被放在一邊，

的整數的總集，結果$t$就應當是$P_t$的一部分。

這夠多麼糟！照第一種說法，$t$是$P_t$的一部分，不行；照第二種說法$t$不是$P_t$的一部分也不行。說去說來都不行，只好囘頭了，在E的單元當中，就沒有和C的單的元$P_t$成對的。朋友，你還得注意，我們將兩行的單元配對，原來是隨意的，所以要是不承認E的單元裏面沒有和$P_t$配對的，這種釘子，無論我們怎樣都得碰。

第一次將E和C比較已知道C的次數必是高於E的或等於E的；現在比較下來，E的次數不能和C的相等，所以我們說C的次數高於E的。

歸到最後的結果，就是我們前面所說的定理已證明了，有一個無限總集，我們就可做出次數高於牠的無限總集來。

無限總集的理論，也有一個無限的廣場展開在牠的面前！

* * * *

我們常常都能夠比較這一個和那一個無限總集的次數嗎？

我們能夠將無限總集照牠們次數的順序排列嗎?

所有這一類的難題目以及其他關於「無限」的問題，都還沒有在這個理論當中佔有地盤；不過這個理論既已經具有相當基礎，逐漸往前進展，這些問題總有解決的一天；畢竟我們現在對於「無限」已用不到和從前一般地只是感到驚奇不可思議了!

老實說，數學家們無論對於做這個理論的基礎的一些假定，或是對於從裏面尋出來的一些拍拉朵克斯的解釋都還沒有全部的理解。

然而這我們一點兒用不到吃驚，一種新的理論的產出正和一個嬰兒的誕生一樣，要他長大做一番驚人的事業，養育和保護，都少不來的!

# 數學的園地

民國二十二年九月初版
民國三十六年四月八版

每冊定價國幣一元五角

著作者 劉薰宇

發行者 開明書店 代表人范洗人

印刷者 開明書店




(78P.) K 圖