Siu Hsien Fu

連江陳文編

中等教科 平面三角法

科學會編譯部刊行

目錄

中等教科

平面三角法

第一章

角之計法

1. 三角法之定義

三角法者。講三角函數之性質及應用之學科也。而依其應用之區域。分為平面球面二部。

2. 常度 (或名六十分法)

實地計算上所通用之計角法如次。

直角之九十等分之一。(即正三角形上一角之六十等分之一)謂之一度。度之六十等分之一。謂之一分。分之六十等分之一。

謂之一秒。以度,分,秒,爲單位所計得之角度。謂之常度。而 d 度 m 分 s 秒。恒記爲 $d^\circ m' s''$

〔注意〕 秒之單位過於細微。故實際上用時甚少。凡小於分之角。均以用分之小數顯之爲常。且甚便宜。(通例用小數一位)教科書所以用秒者。盖從其習慣。

又以一直角爲單位之角度謂之百分度。

3. 兩種單位之變換。

凡任意之一角。於百分度及常度二者中。任知其一種。則他種易求得。其方法如次。

〔第一〕 欲將百分度變爲常數。則先以90乘之。得常度之度數。又以60乘度之分數。得分之數。再以60乘分之分數。得秒數。以所得之度分秒連記之。即答。

例.

1. 變百分度 $\frac{45}{64}$ 爲常度.

運算.

$$\frac{45}{64}\text{直角}=\left(\frac{45}{64}\times 90\right)\text{度}=63\frac{6}{32}\text{度}$$

$$\frac{9}{32}\text{度}\quad=\left(\frac{9}{32}\times 60\right)\text{分}=16\frac{7}{8}\text{分}$$

$$\frac{7}{8}\text{分}\quad=\left(\frac{7}{8}\times 60\right)\text{秒}=32{\cdot}5\text{秒}$$

答.

$63^{\circ}\quad 16'\quad 52''{\cdot}5.$

2. 變百分度 1·07875 爲常度.

運算.

$$\begin{array}{rl} 1{\cdot}07875 & \text{直角} \\ 90 & \\ \hline 97{\cdot}0875 & \text{度} \\ 60 & \\ \hline 5{\cdot}25 & \text{分} \\ 60 & \\ \hline 15 & \text{秒} \end{array}$$

答.

$97^{\circ}\quad 5'\quad 15''.$

〔第二〕 欲化常度爲百分度宜用次式

$$d^{\circ}\ m'\ s''=\left(\frac{d}{90}+\frac{m}{90\times 60}+\frac{s}{90\times 60\times 60}\right)\text{直角}$$

例.

問 $8^\circ\ 15'\ 27''$ 爲幾直角

運算.

$$8^\circ\ 15'\ 27''=\left(\frac{8}{90}+\frac{15}{90\times 60}+\frac{27}{90\times 60\times 60}\right)\text{直角}$$

$$=\left(\frac{8}{90}+\frac{1}{90\times 4}+\frac{3}{90\times 20\times 20}\right)\text{直角}$$

$$=\frac{3200+100+3}{90\times 400}\text{直角}$$

$$=\frac{3303}{36000}\text{直角}$$

$$=\frac{367}{4000}\text{直角}=0{\cdot}09175\text{直角}.$$

設題一.

1. 化次之諸角爲常度

$\frac{11}{16}$直角, 0.678直角, 0.0241直角.

答. $61^\circ\ 52'\ 30''$, $61^\circ\ 1'\ 12''$, $2^\circ\ 10'\ 12''$.

2. 以直角爲單位。問次之諸角之值幾何 49°, $37'$., $32''.4$, $11^\circ 15'$, $8^\circ 0' 36''$, $45' 5''.4$, $61^\circ 52' 30''$

答 0.54, 0.007, 0.0001, 0.125, 0.089, 0.00835, 0.6875

3. 以某角爲單位。其計常度 15° 及百分度 0.2 所得兩值之和爲 0.75 問某角爲幾度 答 45°

4. 三角形之第二角之分數,及第三角之秒數。各爲第一角之度數之 10 倍及 120 倍,問三個角各幾度

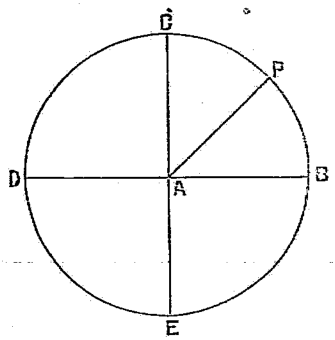
答 150°, 25°, 5°

5. 二點鐘三十四分五十六秒時。求鐘之長針與短針所夾之角度 答 $132^\circ 8'$

第　二　章

銳角之三角函數

4. 定義

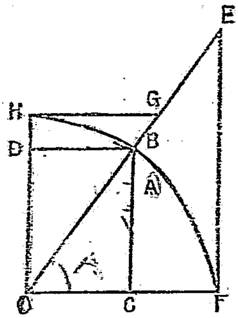


CAE及BAD二直線相交所生之直角。各名爲一象限。

BAC, 稱爲第一象限。CAD, 稱爲第二象限。DAE, 稱爲第三象限。EAB, 稱爲第四象限。

今以AB爲本線。由廻線廻轉作任意之角。若AP在第一象限內。則BAP, 謂之第一象限之角。若AP在第二象限內。則其角謂之第二象限之角。他倣此,

在一象限內。有任意之角A。則BC, 謂之A之正弦。以sinA記之。



BD, (=OC) 謂之 A 之餘弦。以 cosA 記之。

EF, 謂之 A 之正切。以 tanA 記之。

GH, 謂之 A 之餘切。以 cotA 記之。

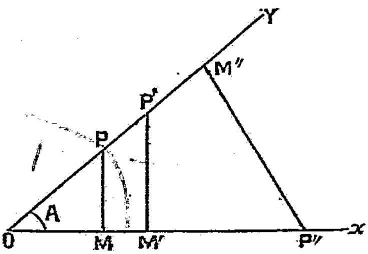
OE, 謂之 A 之正割。以 secA 記之。

OG, 謂之 A 之餘割。以 cosecA 記之。

(又 CF, 謂之 A 之正矢, DH 謂之 A 之餘矢, 然幾無用。故從略)

以上六項。統稱爲 A 之圓函數。又謂之 A 之三角函數。

又 OB=OF=OH, 謂之半徑。以 r 字顯之。



有任意之銳角 A。於其任意之邊 OY 上。除角頂外。任取一點 P。由此點作垂線於他邊 OX 上。其足爲 M。如是則

關於A角。OP爲斜邊。MP爲垂線。OM底邊。

依同式形。可得次之六個比。

〔第一〕 $\frac{\text{垂線}}{\text{斜邊}}=\frac{\sin A}{r}$, 即 $\frac{MP}{OP}=\frac{\sin A}{r}$, 而 r 通常設爲1,(以下準此)故 $\frac{MP}{OP}=\sin A$

〔第二〕 $\frac{\text{底邊}}{\text{斜邊}}=\cos A$, 即 $\frac{OM}{OP}=\cos A$

〔第三〕 $\frac{\text{垂線}}{\text{底邊}}=\tan A$, 即 $\frac{MP}{OM}=\tan A$

〔第四〕 $\frac{\text{底邊}}{\text{垂線}}=\cot A$, 即 $\frac{OM}{MP}=\cot A$

〔第五〕 $\frac{\text{斜邊}}{\text{底邊}}=\sec A$, 即 $\frac{OP}{OM}=\sec A$

〔第六〕 $\frac{\text{斜邊}}{\text{垂線}}=\operatorname{cosec} A$, 即 $\frac{OP}{MP}=\operatorname{cosec} A$,

〔注意一〕 正弦與餘弦,正切與餘切,正割與餘割。互謂之餘函數。

〔注意二〕 由 OY 上他之任一點 P′ 及 OX 上之任意一點 P″, 作垂線於 OX 及 OY。其足爲 M′, M″。則 OP′M′, 及 OP″M″ 兩三角形。俱與 OPM 相似。故A爲定角。則其各三角函數皆爲定數。

〔注意三〕 sin,（正弦）cos,（餘弦）tan,（正切）cot,（餘切）sec,（正割）cosec,（餘割）爲三角法中所通用之記號。學生宜熟記。

又欲記憶此六個記號。有一便法。即單記識 sin,（正弦）tan,（正切）sec,（正割）各加 co 於字首。更略去其字末之兩個字母。即得 cos,（餘弦）cot（餘切）cosec（餘割）惟 cosec 因略去字末之兩字母。則與 cos（餘弦）同。故存之。

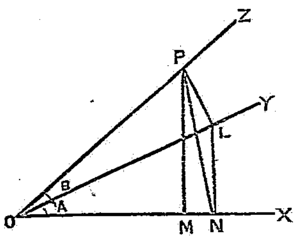
sin, cos, tan, cot, sec, cosec, 原本於臘丁語 sinus,（正弦）cosinus,（餘弦）tangens,（正切）cotangens,（餘切）secans,（正割）cosecans,（餘割）爲各國所通用。惟或以 tg 代 tan, 以 csc 代 cosec, 不無少異。

5。關於記法之注意

〔第一〕 sinA 等。原爲 A 角中之比之記號。故 sin 與 A。不能分離。如 sinA＋sinB, 乃顯 A 之正弦與 B 之正弦之和。原非 A 與 B 之和之正弦 sin(A＋B)

今命 $X\hat{O}Y$ 爲 A, $Y\hat{O}Z$ 爲 B。由 OZ 上之一點 P。作垂

線於 OY, OX, 其足爲 L,M, 由 L 作垂線於 OX。其足爲 N。聯 P,N 爲其線。則



$$\sin A = \frac{NL}{OL} > \frac{NL}{OP},$$

$$\sin B = \frac{LP}{OP},$$

$$\therefore \quad \sin A + \sin B > \frac{NL+LP}{OP} > \frac{PN}{OP} > \frac{MP}{OP},$$

卽 $\sin A + \sin B > \sin(A+B)$.

〔第二〕 n 非負數。則欲示三角函數之 n 乘方。常因便宜。以指數 n 附於函數記號之右肩上。

如 $(\sin A)^3$, $(\cos A)^2$ 記爲 $\sin^3 A$, $\cos^2 A$, 是也。

設題二

1. 直角三角形之三邊爲三寸, 四寸, 五寸, 求其最小角之正弦, 餘弦, 正切 答 $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{4}$

2. 有一直角三角形其夾直角之二邊爲 28, 45, 求其大銳角之正弦 答 $\frac{45}{53}$

3. 有三角形其三邊之比爲 33, 56, 65. 求其最小角之餘切,正割,餘割　　答 $\frac{56}{33}$, $\frac{65}{56}$, $\frac{65}{33}$

4. 有於 C 爲直角之 $\overset{\triangle}{ABC}$。其 $\tan A=\frac{11}{3}$, $AC=\frac{27}{11}$, 求 AB。　　答 $\frac{9\sqrt{130}}{11}$

6. 三角函數之關係

今將同角度之三角函數。揭其重要之關係如次。

〔第一〕 二重關係.

$\sin A = \frac{1}{\operatorname{cosec} A}$

$$\sin A\ \operatorname{cosec} A=\frac{垂}{斜}\cdot\frac{斜}{垂}=1 \quad \operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A} \quad \cdots\cdots(1)$$

$$\cos A\ \sec A=\frac{底}{斜}\cdot\frac{斜}{底}=1 \quad \cos A = \frac{1}{\sec A} \quad \cdots\cdots(2)$$

$\sec A = \frac{1}{\cos A}$

$$\tan A\ \cot A=\frac{垂}{底}\cdot\frac{底}{垂}=1 \quad \tan A = \frac{1}{\cot A} \quad \cdots\cdots(3)$$

$\cot A = \frac{1}{\tan A}$

〔第二〕 三重關係。

$$\tan A=\frac{垂}{底}=\frac{垂}{斜}\div\frac{底}{斜}=\frac{\sin A}{\cos A} = \tan A = \frac{1}{\cot A} \quad \cdots\cdots(4)$$

$$\cot A=\frac{底}{垂}=\frac{底}{斜}\div\frac{垂}{斜}=\frac{\cos A}{\sin A} \quad \cot A = \frac{1}{\tan A} \quad \cdots\cdots(5)$$

〔第三〕 平方關係.

$$\sin^2A+\cos^2A=\left(\frac{垂}{斜}\right)^2+\left(\frac{底}{斜}\right)^2=\frac{斜^2}{斜^2}=1\text{..................}(6)$$

$\cos^2A=1-\sin^2A$

$\sin^2A=1-\cos^2A$

$$1+\tan^2A=1+\left(\frac{垂}{底}\right)^2=\left(\frac{斜}{底}\right)^2=\sec^2A\text{..................}(7)$$

$\tan^2A=\sec^2A-1.$

$\sec^2A-\tan^2A=1.$

$$1+\cot^2A=1+\left(\frac{底}{垂}\right)^2=\left(\frac{斜}{垂}\right)=\operatorname{cosec}^2A\text{..................}(8)$$

$\cot^2A=\operatorname{cosec}^2A-1$

$\operatorname{cosec}^2A-\cot^2A=1.$

Indentity

7. 恒等式之證明法

依前條之關係.能證明含三角含數之種種恒等式.

〔第一〕 由左邊導出右邊之法

例

證 $\tan^2A\cos^2A+\cot^2A\sin^2A=1$

證

$$左邊=\frac{\sin^2A}{\cos^2A}\cdot\cos^2A+\frac{\cos^2A}{\sin^2A}\cdot\sin^2A$$

$$=\sin^2A+\cos^2A$$

$$=1$$

[第二] 由已知之關係導出之法

例

證 $\dfrac{\operatorname{cosec}A-\sec A}{\cot A+\tan A}=\dfrac{\cot A-\tan A}{\operatorname{cosec}A+\sec A}$

證.

$$\operatorname{cosec}^2A=1+\cot^2A$$

$$\sec^2A=1+\tan^2A$$

$$\therefore\quad \operatorname{cosec}^2A-\sec^2A=\cot^2A-\tan^2A$$

$$(\operatorname{cosec}A-\sec A)(\operatorname{cosec}A+\sec A)=(\cot A-\tan A)(\cot A+\tan A).$$

$$\therefore\quad \frac{\operatorname{cosec}A-\sec A}{\cot A+\tan A}=\frac{\cot A-\tan A}{\operatorname{cosec}A+\sec A}.$$

設 題 三.

證以下諸式

1. $\tan^2A-\sin^2A=\tan^2A\sin^2A.$

2. $\cot^2A-\cos^2A=\cot^2A\cos^2A.$

3. $\sec^2A+\operatorname{cosec}^2A=\sec^2A\operatorname{cosec}^2A.$

此三個亦爲平方關係

4. $\operatorname{cosec}A-\sin A=\cot A\cos A.$

5. $\sec A-\cos A=\tan A\sin A$.

6. $\cot A+\tan A=\sec A\operatorname{cosec}A$.

此三個謂之四重關係

7. $\sin^4 A+\cos^4 A=1-2\sin^2 A\cos^2 A$.

8. $\sin^6 A+\cos^6 A=1-3\sin^2 A\cos^2 A$.

9. $\dfrac{1}{1+\tan^2 A}+\dfrac{1}{1+\cot^2 A}=1$.

10. $\sin^2 A\tan A+\cos^2 A\cot A+2\sin A\cos A=\tan A+\cot A$.

11. $1+\tan A)^2+(1+\cot A)^2=(\sec A+\operatorname{cosec}A)^2$.

12. $1+\operatorname{cosec}^4 A-\cot^4 A=2\operatorname{cosec}^2 A$.

13. $\sec A+\tan^3 A\operatorname{cosec}A=\sec^3 A$.

14. $\cot A-\sec A\operatorname{cosec}A(1-2\sin^2 A)=\tan A$.

15. $\dfrac{(\sec A+\operatorname{cosec}A)^2}{\sec^2 A+\operatorname{cosec}^2 A}=1+2\sin A\cos A$.

16. $(1-\tan^4 A)\cos^2 A+\tan^2 A=1$.

17. $\dfrac{1-\cos A}{1+\cos A}=(\operatorname{coses}A-\cot A)^2$.

18. $(\tan A+\sec A)^2=\dfrac{1+\sin A}{1-\sin A}$.

19. $\sin^3 A\cos A+\cos^3 A\sin A=\sin A\cos A$.

20. $(\cos^2 A+\cot^2 A)\tan^2 A=\sec^2 A+(\cos^2 A-1)\tan^2 A$.

21. $\sin A(1+\tan A)+\cos A(1+\cot A)=\operatorname{cosec} A+\sec A.$

由以下諸式消去 θ.

22. $\sin\theta=a,\ \cos\theta=b.$ 答. $a^2+b^2=1.$

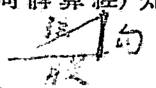
23. $\sec\theta=a,\ \tan\theta=b.$ 答. $a^2-b^2=1.$

24. $\operatorname{cosec}\theta=a,\ \cot\theta=b.$ 答. $a^2-b^2=1.$

25. $\cos\theta+\sin\theta=a,\ \cos\theta-\sin\theta=b.$ 答. $a^2+b^2=2.$

8. 知三角函數之一種求他種之法

無論何角。任知其三角函數之一種。則於關於此角之斜邊，垂線，底邊三者中。設其用爲分母之邊爲1(即作此函數用者)則用爲分子之邊。必等於此函數之值。而其餘之一邊。可由彼達哥拉士之定理(Pythagoras' theorem 即句方股方等於弦方之定理。然此法實出於我國。(見周髀算經)知之。從而其他之一切函數。皆能求之。



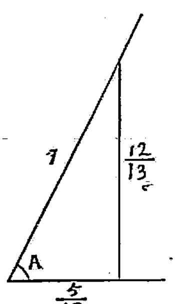
或設用爲分母之邊。等於值之分母。則當分子之邊。等於值之分子。而其餘之一邊。由前之定理求之。由是亦能計算他之函數。

例

設 $\sin A=\frac{12}{13}$，求 A 之他函數.

解

於 $\hat{A}$ 設斜邊=1。則垂線=$\frac{12}{13}$，底線=$\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}=\frac{5}{13}$



$$\therefore\ \cos A=\frac{5}{13}\div 1=\frac{5}{13},$$ 底/斜

$$\tan A=\frac{12}{13}\div\frac{5}{13}=\frac{12}{5},$$ 垂/底

$$\cot A=\frac{5}{13}\div\frac{12}{13}=\frac{5}{12},$$ 底/垂

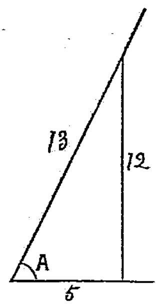
$$\sec A=1\div\frac{5}{13}=\frac{13}{5},$$ 斜/底

$$\operatorname{cocse}A=1\div\frac{12}{13}=\frac{13}{12},$$ 斜/垂

或於 $\hat{A}_2$ 設斜邊=13 則垂線=12,

底邊=$\sqrt{(13)^2-(12)^2}=5$

$$\therefore\ \cos A=\frac{5}{13},$$



$\tan A=\frac{12}{5}$,

$\cot A=\frac{5}{12}$,

$\sec A=\frac{13}{5}$,

$\operatorname{cosec} A=\frac{13}{12}$,

$\sin A=\frac{12}{13}$

設 題 四.

1. $\sin A=\frac{99}{101}$ 求 $\cos A$ 及 $\cot A$. 答. $\frac{20}{101}$, $\frac{20}{99}$.

2. $\sec A=1{\cdot}03$ 求 $\sin A$ 及 $\tan A$. 答. $\frac{\sqrt{61}}{31}$, $\frac{\sqrt{61}}{30}$,

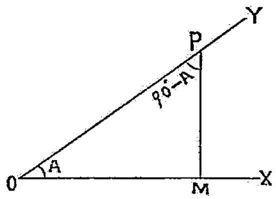
3. $\cot A=\frac{q}{p}$ 求 $\frac{p\cos A-q\sin A}{p\cos A+q\sin A}$ 之值. 答. $\frac{p^2-q^2}{p^2+q^2}$.

4. $p\cot A=\sqrt{q^2-p^2}$ 求 $\sin A$. 答. $\frac{p}{q}$.

5. $\tan A=\frac{2mn}{m^2-n^2}$ 求 $\cos A$ 及 $\operatorname{cosec} A$.

答. $\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$, $\frac{m^2+n^2}{2mn}$.

9. 餘角之三角函數



有任意之銳角A。在其一邊OY上任取一點。由此點作垂線於他邊OX。其足爲M。則由三角函數之定義。得次之關係。

$$\sin(90^\circ-A)=\frac{OM}{OP}=\cos A,$$

$$\cos(90^\circ-A)=\frac{MP}{OP}=\sin A,$$

$$\tan(90^\circ-A)=\frac{OM}{MP}=\cot A.$$

$$\cot(90^\circ-A)=\frac{MP}{OM}=\tan A.$$

$$\sec(90^\circ-A)=\frac{OP}{MP}=\operatorname{cosec} A.$$

$$\operatorname{cosec}(90^\circ A-)=\frac{OP}{OM}=\sec A.$$

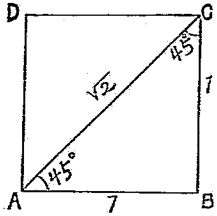
$(90^\circ-A)$ 謂之 A 之餘角。

據上式 $90^\circ-A$ 之各三角函數。與 A 之各三角函數。其同數之項。互爲餘函數。

此六個關係中。後之四個。可由前二個導出。以下準此。

10. 特別角之三角函數

[第一] 45° 之三角函數



於以 1 爲邊之正方形 ABCD。作其對角線 AC。則 BAC=45° AC=$\sqrt{2}$　故

$$\sin 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}=\cos 45^\circ$$

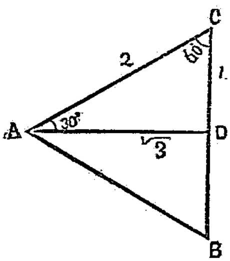
$$\tan 45^\circ=\ 1\ =\cot 45^\circ$$

$$\sec 45^\circ=\ \sqrt{2}\ =\operatorname{cosec} 45^\circ$$

[第二] 30° 及 60° 之三角函數

於以 2 爲邊之正三角形 ABC。由 A 作垂線於對邊，則其足 D 爲 BC 之中點。而

$D\hat{A}C=30^\circ$　$AD=\sqrt{3}$ 故



$$\sin 30^\circ=\frac{1}{2}\ =\cos 60^\circ,$$

$$\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin 60^\circ,$$

$$\tan 30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}=\cot 60^\circ,$$

$$\cot 30^\circ=\sqrt{3}=\tan 60^\circ,$$

$$\sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} = \operatorname{cosec} 60^\circ,$$

$$\operatorname{cosec} 30^\circ = 2 = \sec 60^\circ.$$

今例表於下

	sin	cos	tan	cosec	sec	cot
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

設 題 五.

證以下諸恒等式.

1. $\sec(90^\circ - A) - \cot A \cos(90^\circ - A)\tan(90^\circ - A) = \sin A.$

2. $\dfrac{\cot(90^\circ - A)}{\operatorname{cosec}^2 A} \cdot \dfrac{\operatorname{cosec}(90^\circ - A)\cot^2 A}{\sin^2(90^\circ - A)} = \sec A.$

3. $\dfrac{\cot^2 A \sin^2(90^\circ - A)}{\cot A + \cos A} = \tan(90^\circ - A) - \cos A.$

求以下諸式之值

4. $\sin^3 60^\circ \cot 30^\circ - 2\sec^2 45^\circ + 3\cos 60^\circ \tan 45^\circ - \tan^2 60^\circ.$

答. $-\dfrac{35}{8}.$

5. $3\tan^2 30^\circ+\frac{1}{4}\sec 60^\circ+5\cot^2 45^\circ-\frac{2}{3}\sin^2 60^\circ.$　　答. 6.

6. $\frac{1}{3}\sin^2 60^\circ-\frac{1}{2}\sec 60^\circ\tan^2 30^\circ+\frac{4}{3}\sin^2 45^\circ\tan^2 60^\circ$

答. $\frac{23}{12}$

求合於以下各方程式之角

7. $4\sin^2\theta-2(\sqrt{3}+1)\sin\theta+\sqrt{3}=0.$　　答. 30°, 60°

8. $\tan^2\theta-(\sqrt{3}+1)\tan\theta+\sqrt{3}=0.$　　答. 45°, 60°

9. $\sin^2\theta+\sqrt{3}\cos\theta-\frac{7}{4}=0$　　答. 30°.

此三式謂之三角方程式。其通例詳於後編。

11. 三角函數表

求任何角之三角函數。爲三角法之高等部分。其理論高尙。運算繁雜。本書不具論。然其數值。前人已詳細計算。編列爲表。據本書所載。則由0°至90°。其間每$10'$之諸角。俱能撿其三角函數之四位數。

凡非表中之角。若欲求其三角函數。或求對於三角函數之角。須依次之定理。

角之小變化與其各三角函數應此之變化。殆成比例。

論此定理之由來及界限。不適於本書之程度。故略之。今惟依例示其應用法而已

例.

1. 求 $\sin 32^\circ 16'.4$

解.

$$\sin 32^\circ 20' - \sin 32^\circ 10' = 0.5348 - 0.5324 = 0.0024$$

$$10 : 6.4 :: 0.0024 : x$$

$$x = 0.0015$$

$$\sin 32^\circ 16'.4 = 0.5324 + 0.0015 = 0.5339.$$

2. $\tan A = 1.568$ 求 A.

解.

$$\tan 57^\circ 30' - \tan 57^\circ 20' = 1.570 - 1.560 = 0.010$$

$$\tan A - \tan 57^\circ 20' = 1.568 - 1.560 = 0.008$$

$$0.010 : 0.008 :: 10 : x$$

$$x = 8$$

$$A = 57^\circ 20' + 8' = 57^\circ 28'.$$

3. 求 $\cot 29°43'.6$

解.

$$\cot 29°40' - \cot 29°50' = 1{\cdot}756 - 1{\cdot}744 = 0{\cdot}012$$

$$10 : 3{\cdot}6 : 0{\cdot}012 : x$$

$$x = 0{\cdot}004$$

$$\cot 29°43'.6 = 1{\cdot}756 - 0{\cdot}004 = 1{\cdot}752$$

4. $\cos A = 0{\cdot}4452$ 求 A.

解.

$$\cos 63°30' - \cos 63°40' = 0{\cdot}4462 - 0{\cdot}4436 = 0{\cdot}0026$$

$$\cos 63°30' - \cos A \qquad = 0{\cdot}4462 - 0{\cdot}4452 = 0{\cdot}0010$$

$$0{\cdot}0026 : 0{\cdot}0010 :: 10 : x$$

$$x = 3{\cdot}8$$

$$A = 63°30' + 3'{\cdot}8 = 63°33'{\cdot}8.$$

設　題　六.

1. 求 $\tan 25°26'{\cdot}7$　　答. 0·4778.

2. 求 $\sec 38°27'{\cdot}7$　　答. 1·277.

3. 求 $\cos 63°37'{\cdot}3$　　答. 0·4443.

4. 求 $\operatorname{cosec} 41°18'.2$ 答. 1·515.

5. $\sin A = 0.9479$ 求 A 答. $71°25'.6$.

6. $\tan A = 0.1723$ 求 A 答. $9°49'.7$.

第　三　章

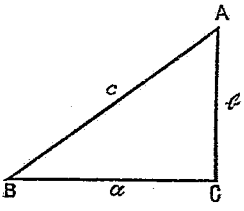
直角三角形

12. 定義

凡平面三角形。皆有六事。其三者爲邊。三者爲角。知其六事中之三。則其餘三事。自能求得。惟所知之三事中。必須有一爲邊。

從三角形內已知之事。求其未知之事。謂之三角算法, Solution

13. 直角三角形之性質



三角形之三個角爲A, B, C, 其各對邊爲a,b,c,(以下準此)若C爲直角則有次之關係

$$A+B=90^\circ.$$

$$\sin A=\frac{a}{c}=\cos B.$$

$$\cos A=\frac{b}{c}=\sin B. \quad 2$$

$$\tan A=\frac{a}{b}=\cot B. \quad 1$$

$$\cot A=\frac{b}{a}=\tan B. \quad 2$$

$$\sec A=\frac{c}{b}=\operatorname{cosec} B. \quad 3$$

$$\operatorname{cosec} A=\frac{c}{a}=\sec B.$$

$$\therefore \begin{cases} a=c\sin A=c\cos B=b\tan A=b\cot B. \\ b=c\cos A=c\sin B=a\cot A=a\tan B. \\ c=b\sec A=b\operatorname{cosec} B=a\operatorname{cosec} A=a\sec B. \end{cases}$$

14. 直角三角形之算法

凡直角三角形。於直角外。知其五事中之兩事。則其餘三事。自能求得。惟所知之兩事中。必須有一爲邊。其算法有四種。

〔第一〕 知斜邊 C 及一銳角(如 A)則

由 $B=90^\circ-A$。求 B

又由 $\left.\begin{array}{l} a=c\sin A \\ b=c\cos A \end{array}\right\}$ 或 $\left.\begin{array}{l} a=c\cos B \\ b=c\sin B \end{array}\right\}$ 求 a.b

〔第二〕 知直角之一邊及一銳角(如 a.A)則

由 $B=90°-A$。求 B

又由 $\left.\begin{array}{l} b=a\cot A. \\ c=a\operatorname{cosec}A. \end{array}\right\}$ 或 $\left.\begin{array}{l} b=a\tan B. \\ c=a\sec B. \end{array}\right\}$ 求 b, c

〔第三.〕 知斜邊 c 及他之一邊(如 a)則

由 $\left.\begin{array}{l} \sin A=\dfrac{a}{c}. \\ b=c\cos A. \\ B=90°-A. \end{array}\right\}$ 或 $\left.\begin{array}{l} \cos B=\dfrac{a}{c}. \\ b=c\sin B. \\ A=90°-B. \end{array}\right\}$ 求 A, B, b

〔第四.〕 知直角之二邊則

由 $\left.\begin{array}{l} \tan A=\dfrac{a}{b}. \\ c=b\sec A \text{ 或 } a\operatorname{cosec}A. \\ B=90°-A. \end{array}\right\}$ 求 A, B, c 又用

$\left.\begin{array}{l} \tan B=\dfrac{b}{a}. \\ c=b\operatorname{cosec}B \text{ 或 } a\sec B. \\ A=90°-B. \end{array}\right\}$ 亦可

〔注意〕 既知兩邊。則依「彼達哥拉士」之定理。可計算

其餘之一邊。又用以上諸方法。均以用代數計算爲便。

設題七.

依次之條件計算直角三角形 ABC;

但 $\sqrt{2}=1{\cdot}414$, $\sqrt{3}=1{\cdot}732$.

1. $c=12$, $A=30°$ 答 $B=60°$, $a=6$, $b=10{\cdot}4$.

2. $a=5\sqrt{3}$, $A=60°$. 答 $B=30°$, $b=5$, $c=10$.

3. $c=12$, $a=3$.

   答 $A=14°28'{\cdot}2$, $B=75°31'{\cdot}8$, $b=11{\cdot}6$.

4. $a=5$, $b=6$.

   答 $A=39°48'{\cdot}2$, $B=40°11'{\cdot}8$, $c=7{\cdot}8$.

15. 實用問題上重要之術語

〔第一〕 過一點及地球中心之直線或平面。謂之此點之**直立線**或**直立面**

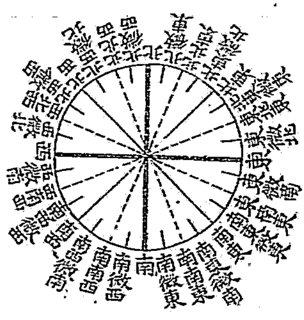
〔第二〕 過一點而在此點與直立線成直角之直線或平面。謂之此點之**水平線**或**水平面**。

〔第三〕 測一點時。其點與窺測器之中心(即窺筒中交線之交點)所聯之中心。必與過窺測器中心之水平面成角。視其點較水平面之低昇。謂之**仰角**或**俯角**。

仰角或稱爲**高度**(其重者爲天體之例)

〔第四〕 二點與窺測器之中心聯爲直線。其夾角謂之此二點之**角距**

〔第五〕 航海用之羅盤。於東南西北之間。各分爲八等分。得三十二方向。其命名如次。



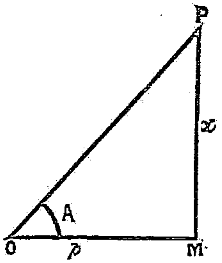
陸地測量用之羅盤於其周圍刻度分秒。其角以距南或距北計之。記爲北幾度東,(或西)又南幾度東(或西)等以示其方向。

16. 實用問題

不能直接測得之距離或高。可用三角形之解法計算之。今舉其例於次。

例

〔第一〕　有一直立物體。人能行至其基礎下。欲求其高。設MP直立物體之高爲x。若距m基礎。取適當距離p處之O點。測其頂點P。設頂點之仰角爲A則　$\tan A = \frac{PM}{OM}$

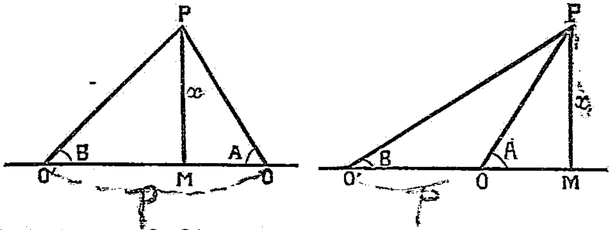


$$MP = OM \tan MOP$$

即　$x = p \tan A$

〔注意〕　欲求其精密。則加物體之厚(即基礎處之厚)之半於p計算。又加窺測器中心之高於其結果。以下準此。

〔第二〕　有物在人所不能到之處。但能自遠處望之。欲求遠處一點與物之距離。



於直線上。取O, O′二點。測其距離。(設爲p)。由不能到之點P, 作此線之垂線PM。設PM之數値爲x。又MOP角, MO′P角爲A, B, 則

$\cot\beta = B = \frac{O'M}{x}$ $O'M = x\cot\beta$

$$MO' \pm MO = OO',$$

$\cot A = \frac{MO}{x}$ $MO = x\cot A$

$$MP \cot MO'P \pm MP \cot MOP = OO'.$$

卽 $$x\cot B \pm x\cot A = p,$$

$$\therefore \quad x = \frac{p}{\cot B \pm \cot A}$$

〔第三〕 有一直立物體。人不能至其基礎下。惟能在與此物體同在一平面上之二點。測其頂之仰角。欲求此物體之高及距離。

於前例之右圖。設MP爲物體。OO′爲兩窺測點。OM爲y。則

$$x=\frac{p}{\cot B-\cot A}$$

$$y=x\cot A=\frac{p\cot A}{\cot B-\cot A}$$

設　題　八.

1. 於距烟筩300尺之地。測其頂之仰角爲30°,問烟筩之高幾何。　　答　173.2尺

2. 於高160尺之檣頂。測得一小艇之俯角爲30°,問船與艇之距離幾何。　　答　277,12尺

3. 高6尺之竿影爲$2\sqrt{3}$尺.求太陽之高度。

4. 於距塔影86.6尺之地。測得塔頂之仰角爲30°,問塔頂與窺測之距離幾何　　答　100尺

5. 有梯長45尺。其一端倚壁頂。他端置於地上。而壁與梯成60度之角。求壁之高。及距梯脚若干。

答　22.5尺　38.93尺

6. 有二檣。高60尺及40尺。而聯其兩頂之直線。與水平面成33°41′之角。問二檣之距離幾何。　答　30尺

7. 由某處望高66丈.之絕壁。得頂之仰角41°18′。問

絕壁之頂與觀測者之距離幾何。但 $\sin 41°18'=0.66$

答 100丈

8. 有烟筩兩個。其一個較他一個高15丈。而聯兩頂之直線。與水平面成 $27°2'$ 之角。且此直線。在距小烟筩50丈之處與地面相交。問大烟筩之高幾何。

但 $\tan 27°2'=0.51$.　　答 40.5丈

9. 有在塔東相間隔200尺之兩地。各望其頂得仰角 $45°$ 及 $30°$, 問塔之高幾何。　　答 273.2尺

10. 由地上之一點。望塔上長2米突之避雷針。其上端及下端之仰角爲 $44°20'$, $42°10'$ 問塔高幾何

答 25.4 米突

11. 由水平面高 30 步之燈臺望在其西之二艇。得俯角 $62°30'$, $28°50'$ 問二艇之距離幾何。

12. 於成直線狀之海岸。由相距165.2米突之二點A, B。望海上之船C。知 $CAB=62°30'$, $CBA=76°15'$, 問船與海岸之距離幾何。　　答 215.9 米突

13. 由燈臺L。於南西及南 $15°$ 東之方向。有二船A.B. AB之方向爲南東。AL之長爲 4 浬。問二船之距離幾何。　　答 6.928 浬

14. 於東西相距一哩之二地A.B.望輕氣球之方位。爲北西及北東。其仰角爲45°問球之高幾何。

答 3733呎

15. 於地上之一點。知半徑r之輕氣球之張角爲α,仰角爲β。問球之高幾何。 答 $r\sin\beta\,\mathrm{ccsec}\frac{\alpha}{2}$

16. 由山之麓望其頂。得仰角45°,又由成30°斜角之直線坂路。向頂上一哩。再望其頂。得仰角60°,問山高幾何。

17. 有高h之塔。於距塔a之地。見塔頂與山頂在一直線上。於塔脚得山頂之仰角α。問山高幾何

答$\dfrac{ah}{a-h\cot\alpha}$

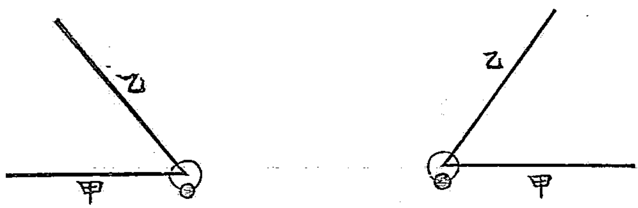
18. 於塔南之一地。得其頂之仰角爲α。又由是向西行l。測其仰角得β.問塔之高幾何 答$\dfrac{l}{\sqrt{\cot^2\beta-\cot^2\alpha}}$

第四章

任意角之三角函數

17. 角之定義

就角所研究之事項。欲通於一切。須擴張角之意義。故得普通之定義如次。



由同點引甲乙二直線。則其一線。如乙。由甲之方位起。繞同點迴轉至本方位。此迴轉之量。謂之乙與甲所成之角。又乙稱爲迴線。甲稱爲本線。而迴線之運動。或與時針之運動反對。或與時針之運動同樣。從而其所作之角或爲正，或爲負。

角之本線及廻線謂之邊。二線之公點謂之頂.

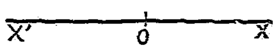
欲示其角。則在本線及廻線上取一點。各附以名稱。而於名稱之間。夾以角頂之名稱。即爲角之名稱。如乙O甲之類

〔注意一〕 角之值無制限

〔注意二〕 又對於本線成A角之廻線。與對於本線成$n\times360^\circ+A$角之廻線相合。但n顯零或任意之數。以下準此

18. 直線之方向

本編不獨考直線之大。更須考其方向。設定點O爲原點。XX′爲通過原點O之直線。

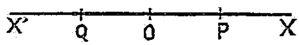


由是。在直線XX′中。求距O點a距離之點P之位置。非知P在O之何側。不能決定。故欲除此不確之弊。宜設一方向之距離爲正 他方向之距離爲負。

得符號之約規如次

原點右方之距離爲正。

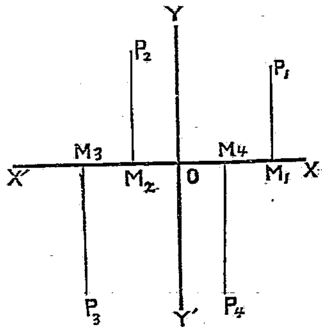
原點左方之距離爲負。



如上圖P, Q各爲在XX′直線內距O點 a 距離之點。然位置則如次。

$$OP=+a,\quad OQ=-a$$

於平面之例亦然。



於平面中任取一點O爲原點。通 O 作互成直角之XX′及YY′兩直線。YY′名爲縱線XX′名爲橫線。

由是此兩直線分平面爲四分面。各爲一直角即第4欵所謂象限。是也。

通例有次之規約。

凡沿橫線(即XX′)之距離。其在縱線(即YY′)右者爲正。在縱線左者爲負。

凡沿縱線(即YY′)之距離。其在橫線(即XX′)上者爲正。在橫線下者爲頁。

如前圖之 OM, OM_4, 爲正。OM_2, OM_3, 爲負。又, M_1P_1, M_2P_2, 爲正。M_3P_3, M_4P_4, 爲負。是也。

又 OX 可名爲本線。OX' 可名爲延長線。

19. 三角函數之方向

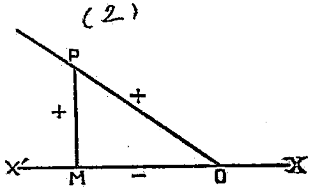
由是將第四款所述之定義。附以次之規則。乃爲三角函數之普通定義。

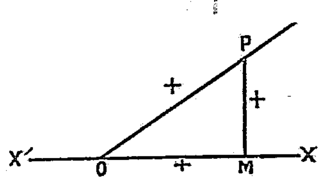
〔第一〕 斜邊常取於廻線上。其符號恒爲正。

〔第二〕 底邊在本線上者爲正。在本線之延長線上者爲負。

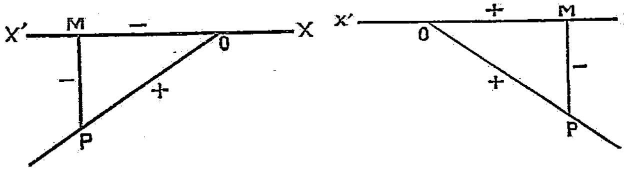
〔第三〕 垂線在本線之上方者爲正。在本線之下方者爲負。

(2)





(4)



20. $n\times360^\circ+A$ 之三角函數

$n\times360^\circ+A$ 角之二邊與 A 角之二邊相合故有次之關係

$\sin(n\times360^\circ+A)=\sin A$, $\cos(n\times360^\circ+A)=\cos A$,

$\tan(n\times360^\circ+A)=\tan A$, $\cot(n\times360^\circ+A)=\cot A$,

$\sec(n\times360^\circ+A)=\sec A$, $\operatorname{cosec}(n\times360^\circ+A)=\operatorname{cosec}A$.

21. 三角函數互相之關係

第六欵所得(1)(2)(3)(4)(5)之關係由定義推之。任何角皆合理。

彼達哥拉士之定理。無論邊之正負皆合理。故由是誘導之(6)(7)(8)三關係。亦任何角皆合理。故通例

$\sin A\operatorname{cosec}A=1$, $\cos A\sec A=1$, $\tan A\cot A=1$,

$$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}. \qquad \cot A=\frac{\cos A}{\sin A}.$$

$\sin^2A+\cos^2A=1$, $1+\tan^2A=\sec^2A$, $1+\cot^2A=\operatorname{cosec}^2A$ 從此

諸公式所生之關係。亦皆合理。

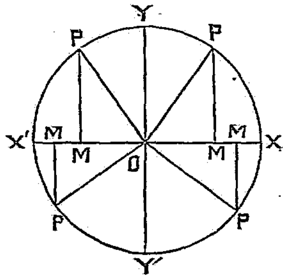
22. 無窮大 Infinite

a 爲非零之常數。則於 $\frac{a}{x}$ 分數、若 x 之數値漸次減少。則此分數之數値次第增大。故 x 愈小。而分數之數値愈大。由是 x 之極限爲無窮小(即O)則 $\frac{a}{x}$ 之値爲無窮大。無窮大之記號爲 ∞

(o 無正負之差別。故 $\frac{a}{o}$ 即 ∞ 亦無正負之差別。)

23. 三角函數之變化

有在O相交成直角之二直線 XX' 及 YY'。其間有 r 數値廻線OP。以OX爲本線。作由O度至360度之角。於其各位置上。自P作 XX' 之垂線。其足爲M。從XOP角(名爲A)之變化。研究其三角函數之變化。如次。



〔第一〕 sinA 及 cosecA 之變化 r

於第一象限。MP爲正。其數値可由O增至Δ。

~A之變化　　cosecA $= \frac{1}{\sin A}$　　$\frac{1}{0} = \infty$

$0 \to 90° \to 180 \to 270 \to 360°$　|　$0 \to 90° \to 180° \to 270° \to 360°$

$0 \nearrow 1 \searrow 0 \searrow -1 \nearrow 0$　cosecA　|　$\infty \searrow 1 \nearrow \pm\infty \nearrow -1 \searrow \infty$

故 $\sin A=\frac{MP}{OP}$ 爲正。其數值由 O 增至 1。又 $\operatorname{cosec}A=\frac{OP}{MP}$ 爲正。其數值可由 ∞ 減至 1。($\sin 0°=0$, $\operatorname{cosec}0°=\infty$. $\sin 90°=1$, $\operatorname{cosec}90°=1$,)

於第二象限。MP 爲正，其數值由 r 減至 O，故 $\sin A=\frac{MP}{OP}$ 爲正。其數值由 1 減至 O，又 $\operatorname{cosec}A=\frac{OP}{MP}$ 爲正。其數值由 1 增至 ∞。($\sin 180°=0$, $\operatorname{cosec}180°=\infty$,)

於第三象限。MP 爲負。其數值由 O 增至 r。故 $\sin A=\frac{MP}{OP}$ 爲，負。其數值由 O 增至 1。$\operatorname{cosec}A=\frac{OP}{MP}$ 爲負。其數值由 ∞ 減至 1。($\sin 270°=-1$, $\operatorname{cosec}270°=-1$)

於第四象限 MP 爲負。其數值由 r 減至 O，

故 $\sin A=\frac{MP}{OP}$ 爲負。其數值由 1 減至 O，又 $\operatorname{cosec}A=\frac{OP}{MP}$ 爲負。其數值由 1 增至 ∞，($\sin 360°=0$, $\operatorname{cosec}360°=\infty$)

[第二] cosA 及 sec A 之變化。

於第一象限。OM 爲正。其數值由 r 減至 O。

故 $\cos A=\frac{OM}{OP}$ 爲正。其數值由 1 減至 O。又 $\sec A=\frac{OP}{OM}$ 爲正。其數值由 1 增至 ∞。($\cos 0°=1$, $\sec 0°=1$; $\cos 90°=0$, $\sec 90°=\infty$)

於第二象限，OM 爲負。其數值由 O 增至 r。

故 $\cos A=\frac{OM}{OP}$ 爲負。其數值由 O 增至 1。又 $\sec A=\frac{OP}{OM}$ 爲負。其數值由 ∞ 減至 1。($\cos 180^\circ=-1$, $\sec 180^\circ=-1$,)

於第三象限。OM 爲負。其數值由 r 減至 O。

故 $\cos A=\frac{OM}{OP}$ 爲負。其數值由 1 減至 O，又 $\sec A=\frac{OP}{OM}$ 爲負。其數值由 1 增至 ∞。($\cos 270^\circ=0$, $\sec 270^\circ=\infty$)

於第四象限。OM 爲正。其數值由 O 增至 r。

故 $\cos A=\frac{OM}{OP}$ 爲正。其數值由 O 增至 1。又 $\sec A=\frac{OP}{OM}$ 爲正。其數值由 ∞ 減至 1。($\cos 360^\circ=1$, $\sec 360^\circ=1$)

〔第三〕 tanA 及 cotA 之變化。

於第一象限。MP 爲正。其數值由 O 增至 r。OM 爲正。其數值由 r 減至 O。故 $\tan A=\frac{MP}{OM}$ 爲正。其數值由 O 增至 ∞。$\cot A=\frac{OM}{MP}$ 爲正。其數值由 ∞ 減至 O。($\tan 0^\circ=0$, $\cot 0^\circ=\infty$, $\tan 90^\circ=\infty$, $\cot 90^\circ=0$)

於第二象限。MP 爲正。其數值由 r 減至 O。OM 爲負。其數值由 O 增至 r。故 $\tan A=\frac{MP}{OM}$ 爲負。其數值由 ∞ 減至 O。又 $\cot A=\frac{OM}{MP}$ 爲負。其數值由 O 增至 ∞。($\tan 180^\circ=0$, $\cot 180^\circ=\infty$)

於第三象限。MP爲負,其數值由O增至r。OM爲負。其數值由r減至O。故$\tan A=\frac{MP}{OM}$爲正。其數值由O增至∞。$\cot A=\frac{OM}{MP}$爲正。其數值由∞減至O。($\tan 270^\circ=\infty$, $\cot 270^\circ=0$)

於第四象限。MP爲負。其數值由r減至O。OM爲正。其數值由O增至r。故$\tan A=\frac{MP}{OM}$爲負。其數值由∞減至O。$\cot A=\frac{OM}{MP}$爲負。其數值由O增至∞。($\tan 360^\circ=0$, $\cot 360^\circ=\infty$)

各三角函數之變化,用表示之如次。

	0°		90°		180°		270°		360°
sin	0	+	1	+	0	−	−1	−	0
cos	1	+	0	−	−1	−	0	+	1
tan	0	+	∞	−	0	+	∞	−	0
cot	∞	+	0	−	∞	+	0	−	∞
sec	1	+	∞	−	−1	−	∞	+	1
cosec	∞	+	1	+	∞	−	−1	−	∞
	−360°		−270°		−180°		−90°		0°

〔注意一〕角由360°漸次增大。其三角函數,當依上表之變化。終而復始。迴線由本線起而作負角。其三角函

數。當依上表之變化。逆次變之。終而復始。

〔注意二〕正弦及餘弦之數值不能大於1。正割及餘割之數值不能小於1。正切及餘切之數值無制限。

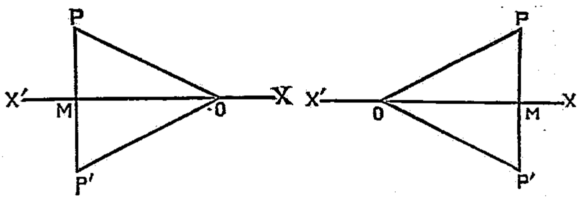
〔注意三〕以一數爲一個三角函數之值。則其角上廻線之方位。恒有一定。

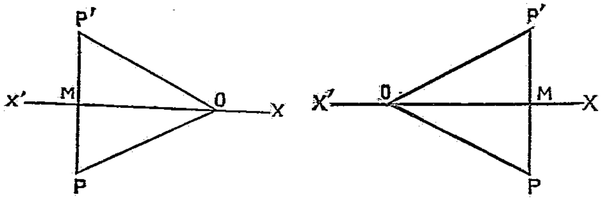
〔注意四〕0°, 30°, 45°, 60°, 90°之正弦。等於0, 1, 2, 3, 4, 之平方根之半。$\left(\text{即}\frac{\sqrt{0}}{2}, \frac{\sqrt{1}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{4}}{2},\right)$其餘弦等於 4, 3, 2, 1, 0, 之平方根之半。$\left(\text{即}\frac{\sqrt{4}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{1}}{2}, \frac{\sqrt{0}}{2},\right)$

24. 90°整倍數與他角和較之關係

〔第一〕$-A$, 與 A, 兩三角函數之關係。

設XOP角爲A, XOP′爲$-A$。於二角之廻線上。取等長之 OP, OP′, 則聯PP′之直線。與OX(或其延長線)直交。設交點爲M。則$OP'=OP$。$MP'=-MP$, 故有次之關係。





$$\sin(-A)=\frac{MP'}{OP'}=\frac{-MP}{PO}=-\sin A.$$

$$\cos(-A)=\frac{OM}{OP'}=\frac{OM}{OP}=\cos A.$$

$$\tan(-A)=\frac{MP'}{OM}=\frac{-MP}{OM}=-\tan A.$$

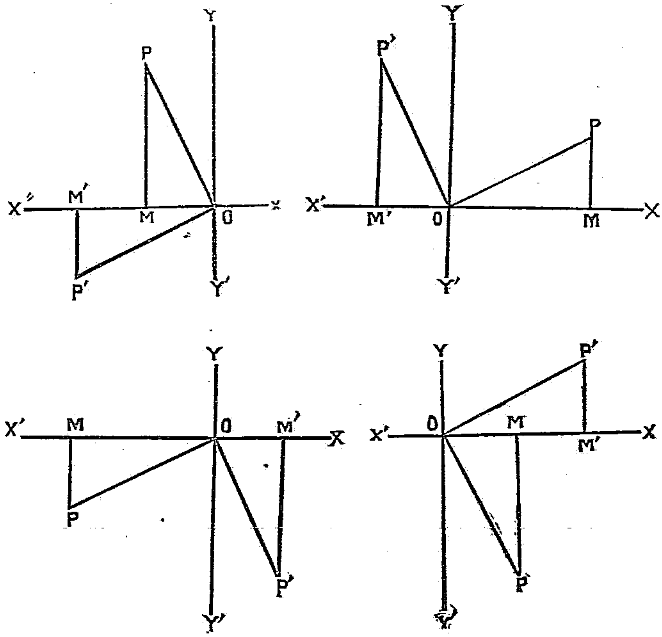
$$\cot(-A)=\frac{OM}{MP'}=\frac{OM}{-MP}=-\cot A.$$

$$\sec(-A)=\frac{OP'}{OM}=\frac{OP}{OM}=\sec A.$$

$$\mathrm{cosec}(-A)=\frac{OP'}{MP'}=\frac{OP}{-MP}=-\mathrm{cosec}A.$$

〔第二〕 $90°+A$,與A,兩三角函數之關係。

設XOP角爲A,XOP′爲$90°+A$,於二角之廻線上。取等長之OP,OP′由PP′作垂線於OX。設其足爲M,M′。則$OP'=OP$, $M'P'=OM$, $OM'=-MP$,故有次之關係。



$$\sin(90^\circ+A)=\frac{M'P'}{OP'}=\frac{OM}{OP}=\cos A.$$

$$\cos(90^\circ+A)=\frac{OM'}{OP'}=\frac{-MP}{OP}=-\sin A.$$

$$\tan(90^\circ+A)=\frac{M'P'}{OM'}=\frac{OM}{-MP}=-\cot A.$$

$$\cot(90^\circ+A)=\frac{OM'}{M'P'}=\frac{-MP}{OM}=-\tan A.$$

$$\sec(90^\circ+A)=\frac{OP'}{OM'}=\frac{OP}{-MP}=-\operatorname{cosec}A.$$

$$\operatorname{cosec}(90^\circ+A)=\frac{OP'}{M'P'}=\frac{OP}{OM}=\sec A.$$

〔第三.〕 90°−A 與 A 兩三角函數之關係

$$\sin(90^\circ-A)=\sin\{90^\circ+(-A)\}=\cos(-A)=\cos A.$$

$$\cos(90^\circ-A)=\cos\{90^\circ+(-A)\}=-\sin(-A)=\sin A.$$

$$\tan(90^\circ-A)=\tan\{90^\circ+(-A)\}=-\cot(-A)=\cot A.$$

$$\cot(90^\circ-A)=\cot\{90^\circ+(-A)\}=-\tan(-A)=\tan A.$$

$$\sec(90^\circ-A)=\sec\{90^\circ+(-A)\}=-\operatorname{cosec}(-A)=\operatorname{cosec}A.$$

$$\operatorname{cosec}(90^\circ-A)=\operatorname{cosec}\{90^\circ+(-A)\}=\sec(-A)=\sec A.$$

定義　90°−A 謂之 A 之餘角

〔第四.〕 180°+A 與 A 兩三角函數之關係.

$$\sin(180^\circ+A)=\sin\{90^\circ+(90^\circ+A)\}=\cos(90^\circ+A)$$
$$=-\sin A.$$

$$\cos(180^\circ+A)=\cos\{90^\circ+(90^\circ+A)\}=-\sin(90^\circ+A)$$
$$=-\cos A.$$

$$\tan(180^\circ+A)=\tan\{90^\circ+(90^\circ+A)\}=-\cot(90^\circ+A)$$
$$=\tan A.$$
$$\cot(180^\circ+A)=\cot\{90^\circ+(90^\circ+A)\}=-\tan(90^\circ+A)$$
$$=\cot A.$$
$$\sec(180^\circ+A)=\sec\{90^\circ+(90^\circ+A)\}=-\operatorname{cosec}(90^\circ+A)$$
$$=-\sec A.$$
$$\operatorname{cosec}(180^\circ+A)=\operatorname{cosec}\{90^\circ+(90^\circ+A)\}=\sec(90^\circ+A)$$
$$=-\operatorname{cosec}A.$$

〔第五.〕 $180^\circ-A$ 與 A 兩三角函數之關係.

$$\sin(180^\circ-A)=\sin\{180^\circ+(-A)\}=-\sin(-A)$$
$$=\sin A.$$
$$\cos(180^\circ-A)=\cos\{180^\circ+(-A)\}=-\cos(-A)$$
$$=-\cos A.$$
$$\tan(180^\circ-A)=\tan\{180^\circ+(-A)\}=\tan(-A)$$
$$=-\tan A.$$
$$\cot(180^\circ-A)=\cot\{180^\circ+(-A)\}=\cot(-A)$$
$$=-\cot A.$$

$$\sec(180^\circ-A)=\sec\{180^\circ+(-A)\}=-\sec(-A)$$
$$=-\sec A.$$
$$\operatorname{cosec}(180^\circ-A)=\operatorname{cosec}\{180^\circ+(-A)\}=-\operatorname{cosec}(-A)$$
$$=\operatorname{cosec}A.$$

定義 $180^\circ-A$謂之A之補角

系 $180^\circ\pm A$(即$2\times90^\circ\pm A$)之三角函數。與A之各同名函數。其數值相等。又 $90^\circ\pm A$ 之三角函數。與 A之各餘函數。其數值亦相等。因得次之通則(證明從略)

〔第一〕 $n\times90^\circ\pm A$之三角函數。恒依下二例。(1)n為偶數。(0,屬於此例)則其數值等於 A 之各同名函數之數值。(11)n為奇數。則其數值等於 A之各餘函數之數值。

〔第二〕 $n\times90^\circ\pm A$ 之三角函數。苟 A 為銳角。則其符號依象限定之。

例

〔1〕 以A之函數,顯$270^\circ+A$之三角函數

解

A爲銳角。則 $270°+A$ 在第四象限。故其餘弦及正割爲正。其他爲負。又 $270°$ 爲 $90°$ 之奇倍

$\therefore \quad \sin(270°+A)=-\cos A. \quad \cos(270°+A)=\sin A.$

$\tan(270°+A)=-\cot A. \quad \cot(270°+A)=-\tan A$

$\sec(270°+A)=\operatorname{cosec} A. \quad \operatorname{cosec}(270°+A=-\sec A$

(2) 以A之函數,顯 $270°-A$ 之三角函數。

解

A爲銳角。則 $270°-A$ 在第三象限。故唯正切及餘切爲正。其他爲負。又 $270°$ 爲 $90°$ 之奇倍。

$\therefore \quad \sin(270°-A)=-\cos A. \quad \cos(270-A)=-\sin A$

$\tan(270°-A)=\cot A. \quad \cot(270°-A)=\tan A$

$\sec(270°-A)=-\operatorname{cosec} A. \quad \operatorname{cosec}(270°-A)=-\sec A$

(3) 以A之函數顯 $\tan(540°-A)$

解

A爲銳角。則 $540°-A$ 在第二象限。故其正切爲負。又 $540°$ 爲 $90°$ 之偶倍。

$\therefore \quad \tan(540°-A)=\tan A$

(4) 求 $\cos 675°$ 之值

解

$675° = 7 \times 90° + 45°$

$\therefore\ \cos 675° = \sin 45° = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(5) 求 $\sin(-1050°)$ 之值

解

$-1050° = -12 \times 90° + 30° \quad \therefore\ \sin(-1050°) = \sin 30° = \dfrac{1}{2}$

設題九

(1.) 求次之二角之象限

(i) $2000°$. 答. 第三.

(ii) $-4000°$. 答. 第四.

(2.) 求次之二式之值

(i) $\cos 0° \sin 270° + 2\cos 180° \tan 45°$. 答. -3.

(ii) $3\sin 0° \sec 180° + 2\operatorname{cosec} 90° - \cos 360°$. 答. 1.

(3.) 求次之三個角之各三角函數

(i) $120°$. 答. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{2}, -\sqrt{3}, -\dfrac{1}{\sqrt{3}}, -2, \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

(ii) $135°$. 答. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, -1, -1, -\sqrt{2}, \sqrt{2}$.

(iii) $150°$.　答. $\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\sqrt{3}, -\frac{2}{\sqrt{3}}, 2$.

(4.) 求次之諸函數之值

(i) $\sin 210°$.　答. $-\frac{1}{2}$.

(ii) $\cos 240°$.　答. $-\frac{1}{2}$.

(iii) $\tan 225°$.　答. 1.

(5) 將次之諸函數,用最小正角之函數顯之。

(i) $\sin 1005°$.　答. $-\cos 15°$.

(ii) $\tan(-2232°)$.　答. $-\cot 18°$.

(6.) 求適于次之方程式之正角(不得過$360°$)

(i) $2\sin^2\theta+3\cos\theta-3=0$.　答. $0°, 60°, 300°, 360°$,

(ii) $\cos\theta+\tan\theta=\sec\theta$.　答. $0°, 90°, 360°$.

(iii) $\sec^3\theta-2\tan^2\theta=2$.　答. $60°, 300°$.

第五章。

關於二角之公式。

25. 求任意兩角和所成之角之正弦及餘弦

用任意二角 A, B 之正弦及餘弦顯此二角和 A+B, 之正弦與餘弦。其式如次.

$$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B \dots\dots\dots\dots (9)$$

$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B \dots\dots\dots\dots (10)$$

證.

〔第一〕 A, B 皆爲零之例.

$$\sin(A+B)=\sin(0+0)=\sin 0=0,$$

又 $\sin A\cos B+\cos A\sin B=\sin 0\cos 0+\cos 0\sin 0$

$$=0\times1+1\times0=0.$$

$\therefore$ $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B.$

次 $\cos(A+B)=\cos(0+0)=\cos 0=1,$

又 $\cos A\cos B-\sin A\sin B=\cos 0\cos 0-\sin 0\sin 0$

$$=1\times1-0\times0=1.$$

$\therefore\quad \cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

〔第二.〕 A, B 中有一個(如 A)爲零,其他一個非零,之例

$$\sin(A+B)=\sin(0+B)=\sin B,$$

又 $\sin A\cos B+\cos A\sin B=\sin 0\cos B+\cos 0\sin B$

$$=0\times\cos B+1\times\sin B=\sin B.$$

$\therefore\quad \sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B.$

次 $\cos(A+B)=\cos(0+B)=\cos B,$

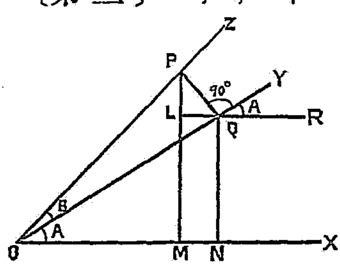
又 $\cos A\cos B-\sin A\sin B=\cos 0\cos B-\sin 0\sin B$

$$=1\times\cos B-0\times\sin B=\cos B.$$

$\therefore\quad \cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B.$

同樣於 $A\neq 0$, $B=0$ 之例易知上之關係之合理

〔第三.〕 A, B, A+B 共爲正銳角之例



$X\hat{O}Y$, $Y\hat{O}Z$, $X\hat{O}Z$, 各爲 A, B, A+B, 由 OZ 上之一點 P 作垂線于 OY, OX, 其足爲 Q, M。由 Q 作垂線于 MP, OX 其足爲 L, N, 設 LQ 之

延長爲QR則$\hat{RQP}$爲$90°+A$故有次之關係

$$\sin(A+B)=\frac{MP}{OP}=\frac{NQ+LP}{PO}=\frac{NQ}{OQ}\cdot\frac{OQ}{OP}+\frac{LP}{QP}\cdot\frac{QP}{OP}$$

$$=\sin A\cos B+\sin(90°+A)\sin B$$

$$=\sin A\cos B+\cos A\sin B.$$

$$\cos(A+B)=\frac{OM}{OP}=\frac{ON+QL}{OP}=\frac{ON}{OQ}\cdot\frac{OQ}{OP}+\frac{QL}{QP}\cdot\frac{QP}{OP}$$

$$=\cos A\cos B+\cos(90°+A)\sin B$$

$$=\cos A\cos B-\sin A\sin B.$$

〔第四.〕 A, B 俱爲正銳角,而$A+B$爲直角,之例

$$\sin(A+B)=\sin 90°=1,$$

又 $\sin A\cos B+\cos A\sin B=\sin A\cos(90°-A)+\cos A\sin(90°-A)$

$$=\sin^2A+\cos^2A=1.$$

$\therefore\qquad \sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B.$

次 $$\cos(A+B)=\cos 90°=0,$$

又 $\cos A\cos B-\sin A\sin B=\cos A\cos(90°-A)-\sin A\sin(90°-A)$

$$=\cos A\sin A-\sin A\cos A=0.$$

$\therefore\qquad \cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B.$

〔第五.〕 A, B 俱爲正銳角而 A+B 爲鈍角之例

$90^\circ-A$, $90^\circ-B$, $(90^\circ-A)+(90^\circ-B)$ 俱爲正銳角故

$$\sin(A+B)=\sin\{180^\circ-(A+B)\}=\sin\{(90^\circ-A)+(90^\circ-B)\}$$
$$=\sin(90^\circ-A)\cos(90^\circ-B)+\cos(90^\circ-A)\sin(90^\circ-B)$$
$$=\cos A\sin B+\sin A\cos B$$
$$=\sin A\cos B+\cos A\sin B.$$

$$\cos(A+B)=-\cos\{180^\circ-(A+B)\}=-\cos\{(90^\circ-A)+(90^\circ-B)\}$$
$$=-\{\cos(90^\circ-A)\cos(90^\circ-B)-\sin(90^\circ-A)\sin(90^\circ-B)\}$$
$$=-\{\sin A\sin B-\cos A\cos B\}$$
$$=\cos A\cos B-\sin A\sin B.$$

〔第六.〕 A, B 爲任何正角之例

(9)(10) 兩公式無論 A, B 爲或值皆合理。則 A, B 之中有一個(如 A)增至 90° 亦合理如次

$$\sin\{(90^\circ+A)+B\}=\sin\{90^\circ+(A+B)\}=\cos(A+B)$$
$$=\cos A\cos B-\sin A\sin B$$
$$=\sin(90^\circ+A)\cos B+\cos(90^\circ+A)\sin B.$$

$$\cos\{(90^\circ+A)+B\}=\cos\{90^\circ+(A+B)\}=-\sin(A+B)$$

$$=-\sin A\cos B-\cos A\sin B$$

$$=\cos(90^\circ+A)\cos B-\sin(90^\circ+A)\sin B.$$

然(9)(10)兩公式。其A,B爲任意之正銳角皆合理。已證於前。故此A,B之一個,或二者加至90°整數倍之任何正角。亦能推定其合理

〔第七〕 A, B之一個,或俱爲負角之例

A,B之中。有一個(如A)爲負角。則加360°適當之倍量于是。其和$n\times360^\circ+A$爲正角則

$$\sin(A+B)=\sin(n\times360^\circ+A+B)$$

$$=\sin(n\times360^\circ+A)\cos B+\cos(n\times360^\circ+A)\sin B$$

$$=\sin A\cos B+\cos A\sin B.$$

$$\cos(A+B)=\cos(n\times360^\circ+A+B)$$

$$=\cos(n\times360^\circ+A)\cos B-\sin(n\times360^\circ+A)\sin B$$

$$=\cos A\cos B-\sin A\sin B$$

同樣B爲負角。或A,B俱爲負角。可知公式合理

故(9)(10)兩公式。一切合理。此二式爲三角函數論之大本。稱爲加法定理或基礎公式

26. 求任意兩角差所成之角之正弦及餘弦

用任意二角 A, B 之正弦及餘弦。顯此二角差 A−B 之正弦與餘弦。其式如次

$$\sin(A-B)=\sin\{A+(-B)\}$$
$$=\sin A\cos(-B)+\cos A\sin(-B)$$
$$=\sin A\cos B-\cos A\sin B\text{........................}(11)$$

$$\cos(A-B)=\cos\{A+(-B)\}$$
$$=\cos A\cos(-B)-\sin A\sin(-B)$$
$$=\cos A\cos B+\sin A\sin B\text{........................}(12)$$

此二式原含於 (9)(10) 兩式中。今特揭於是。唯便於參照

27. 求任意二角和差所成之角之正切及餘切。

用任意二角 A, B 之正切顯此二角和 A+B 及差 A−B 之正切。其式如次

$$\tan(A+B)=\frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)}$$

$$=\frac{(\sin A\cos B+\cos A\sin B)\div\cos A\cos B}{(\cos A\cos B-\sin A\sin B)\div\cos A\cos B}$$

$$=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

同樣　$\tan(A-B)=\dfrac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}\cdots\cdots\cdots\cdots(14)$

系　$\cot(A+B)=\dfrac{\cot A\cot B-1}{\cot B+\cot A}$,

$$\cot(A-B)=\frac{\cot A\cot B+1}{\cot B-\cot A}.$$

28. 求任意二角之和差所成之角之正弦或餘弦之乘積

將(9)(11)兩式相乘。則

$$\sin(A+B)\sin(A-B)=\sin^2A\cos^2B-\cos^2A\sin^2B$$

$$=\sin^2A(1-\sin^2B)-(1-\sin^2A)\sin^2B$$

$$=\sin^2A-\sin^2B=\cos^2B-\cos^2A\cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

將(10)(12)兩式相乘。則

$$\cos(A+B)\cos(A-B)=\cos^2A\cos^2B-\sin^2A\sin^2B$$

$$=\cos^2A(1-\sin^2B)-(1-\cos^2A)\sin^2B$$

$$=\cos^2A\sin^2B=\cos^2B-\sin^2A\cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$

29. 化 $a\cos A+b\sin A$ 爲一項式之法.

求以$\frac{b}{a}$爲正切之角設之爲α

則$\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$故

$$a\cos A+b\sin A=a(\cos A+\frac{b}{a}\sin A)$$

$$=a(\cos A+\tan\alpha\sin A)$$

$$=a\left(\frac{\cos A\cos\alpha+\sin A\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)$$

$$=\frac{a\cos(A-\alpha)}{\cos\alpha}$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\cos(A-\alpha)\text{.....................}(17)$$

設　題　十.

1. $\sin A=\frac{3}{5}$, $\cos B=\frac{5}{13}$求$\sin(A+B)$　答. $\frac{63}{65}$.

2. $\sin A=\frac{15}{17}$, $\tan B=\frac{4}{3}$, 求$\cos(A-B)$　答. $\frac{84}{85}$.

於上之二問題A, B爲銳角

3. $\tan A=\frac{\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}$, $\tan B=\frac{\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}$求$\tan(A-B)$　答 $\frac{3}{8}$.

4. 求15°ノ三角函數

答. $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}, \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}, 2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}, \sqrt{6}+\sqrt{2}, \sqrt{6}-\sqrt{2}$

5. 化 $\cos^2 A+\cos^2(A+B)-2\cos A\cos B\cos(A+B)$ 爲簡式

答. $\sin^2 B$.

6. 證次之二恒等式

(i) $\sin A\sin B=\sin^2\dfrac{A+B}{2}-\sin^2\dfrac{A-B}{2}$.

(ii) $\cos A\cos B=\cos^2\dfrac{A+B}{2}+\cos^2\dfrac{A-B}{2}-1$.

7. 化 $\sqrt{3}\cos A+\sin A$ 爲一項式 答. $2\cos(A-30^\circ)$

證次之諸恒等式。(此諸式俱重要)

8 $\cos A+\sin A=\sqrt{2}\sin(45^\circ+A)=\sqrt{2}\cos(45^\circ-A)$.

9. $\cos A-\sin A=\sqrt{2}\cos(45^\circ+A)=\sqrt{2}\sin(45^\circ-A)$.

10. $\tan(45^\circ\pm A)=\dfrac{1\pm\tan A}{1\mp\tan A}$.

11. $\tan(p+q)A-\tan pA-\tan qA$

$=\tan(p+q)A\tan pA\tan qA$.

12. $\tan A\pm\tan B=\dfrac{\sin(A\pm B)}{\cos A\cos B}$.

13. $\cot B\pm\cot A=\dfrac{\sin(A\pm B)}{\sin A\sin B}$.

14. $\cot A \pm \tan B = \dfrac{\cos(A \mp B)}{\sin A \cos B}$.

15. $\sin(A+B+C) = \sin A \cos B \cos C + \cos A \sin B \cos C$

$\qquad + \cos A \cos B \sin C - \sin A \sin B \sin C$.

16. $\cos(A+B+C) = \cos A \cos B \cos C - \cos A \sin B \sin C$

$\qquad - \sin A \cos B \sin C - \sin A \sin B \cos C$.

17. $\tan(A+B+C) = \dfrac{\tan A + \tan B + \tan C - \tan A \tan B \tan C}{1 - \tan B \tan C - \tan C \tan A - \tan A \tan B}$.

求適於次之方程式, 360° 以內之正角

18. $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. 答. $105^\circ, 345^\circ$.

19. $\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta = 1$. 答. $0^\circ, 60^\circ, 360^\circ$.

20. 由 $\left\{\begin{array}{l} \sin\alpha + \sin\beta = a \\ \cos\alpha + \cos\beta = b \\ \cos(\alpha - \beta) = c \end{array}\right\}$ 消去 α, β

答. $a^2 + b^2 = 2(c+1)$.

30. 正弦餘弦之乘積與和或差之轉換。

作(9)(11)之和及差。并(12)(10)之和及差。將各式之左右邊轉換得次式

$$2\sin A \cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B) \quad \cdots\cdots (18.)$$

$$2\cos A \sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B) \quad \cdots\cdots (19.)$$

$$2\cos A\cos B=\cos(A-B)+\cos(A+B)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(20)$$

$$2\sin A\sin B=\cos(A-B)-\cos(A+B)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(21)$$

此四式稱爲(A, B)式。用和或差。變二角之正弦餘弦之乘積。

次爲

$$\sin C+\sin D=\sin\left(\frac{C+D}{2}+\frac{C-D}{2}\right)+\sin\left(\frac{C+D}{2}-\frac{C-D}{2}\right)$$

$$=2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(22)$$

$$\sin C-\sin D=\sin\left(\frac{C+D}{2}+\frac{C-D}{2}\right)-\sin\left(\frac{C+D}{2}-\frac{C-D}{2}\right)$$

$$=2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(23)$$

$$\cos D+\cos C=\cos\left(\frac{C+D}{2}-\frac{C-D}{2}\right)+\cos\left(\frac{C+D}{2}+\frac{C-D}{2}\right)$$

$$=2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(24)$$

$$\cos D-\cos C=\cos\left(\frac{C+D}{2}-\frac{C-D}{2}\right)+\cos\left(\frac{C+D}{2}+\frac{C-D}{2}\right)$$

$$=2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(25)$$

此四式稱(C, D)式。用乘積變正弦餘弦之和或差

系一. $\cos C+\sin D=\sin(90^\circ+C)+\sin D$

$$=2\sin\left(45^\circ+\frac{C+D}{2}\right)\cos\left(45^\circ+\frac{C-D}{2}\right)$$

$$\cos C-\sin D=\sin(90^\circ+C)-\sin D$$

$$=2\cos\left(45^\circ+\frac{C+D}{2}\right)\sin\left(45^\circ+\frac{C-D}{2}\right)$$

此二式亦與前四式爲同様之目的

系二 $\sin(p+1)A=2\sin pA\cos A-\sin(p-1)A.$

$\cos(p+1)A=2\cos pA\cos A-\cos(p-1)A.$

由此二式。可逐次求得倍角之正弦及餘弦

設 題 十 一.

(1.) 化次之諸式爲一次式

(i) $2\sin 50^\circ\cos 10^\circ.$ 答. $\sin 60^\circ+\sin 40^\circ.$

(ii) $2\cos 60^\circ\sin 10^\circ.$ 答. $\sin 70^\circ-\sin 50^\circ.$

(iii) $2\cos 77^\circ\cos 4^\circ.$ 答. $\cos 73^\circ+\cos 81^\circ.$

(iv) $2\sin 6^\circ\sin 5^\circ.$ 答. $\cos 1^\circ-\cos 11^\circ.$

(2.) 化次之諸式爲一項式

(i) $\sin 70^\circ+\sin 30^\circ.$ 答. $2\sin 50^\circ\cos 20^\circ.$

(ii) $\sin 30^\circ-\sin 16^\circ.$ 答. $2\cos 23^\circ\sin 7^\circ.$

(iii) $\cos 1^\circ+\cos 3^\circ.$ 答. $2\cos 2^\circ\cos 1^\circ.$

(iv) $\cos 27^\circ - \cos 77^\circ$. 答. $2\sin 52^\circ \sin 52^\circ$.

(3.) 化次之諸式爲最簡式

(i) $\sin 40^\circ + \sin 20^\circ$. 答. $\cos 10^\circ$.

(ii) $\sin 80^\circ - \sin 40^\circ$. 答. $\sin 20^\circ$.

(iii) $\cos 55^\circ + \cos 65^\circ$. 答. $\cos 5^\circ$.

(iv) $\cos 17^\circ - \cos 77^\circ$. 答. $\sin 47^\circ$

(4.) 化次之二式爲最簡式

(i) $\cos 10^\circ + \sin 40^\circ$. 答. $\sqrt{3}\cos 20^\circ$.

(ii) $\cos 80^\circ - \sin 70^\circ$. 答. $-\sin 50^\circ$.

證次之諸式

(5.) (i) $\cos(60^\circ + A) + \cos(60^\circ - A) = \cos A$.

(ii) $\sin(60^\circ + A) - \sin(60^\circ - A) = \sin A$.

(6.) (i) $\cos A + \cos(120^\circ + A) + \cos(120^\circ - A = 0$.

(ii) $\sin A + \sin(120^\circ + A) - \sin(120^\circ - A) = 0$.

(7.) (i) $4\sin A \sin B \sin C = \sin(B + C - A) + \sin(C + A - B)$

$+ \sin(A + B - C) - \sin(A + B + C)$.

(ii) $4\cos A \cos B \cos C = \cos(B + C - A) + \cos(C + A - B)$

$+ \cos(A + B - C) + \cos(A + B + C)$.

(8.) $\sin 2A+\sin 4A+\sin 6A=\dfrac{\cos A-\cos 7A}{2\sin A}$.

(9.) $\dfrac{\sin A+\sin 3A+\sin 5A}{\cos A+\cos 3A+\cos 5A}=\tan 3A$.

(10.) 求次之諸式之值

(i) $8\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 80^\circ$ 答. $\sqrt{3}$

(ii) $\cos 40^\circ\cos 80^\circ\cos 160^\circ$ 答. $-\dfrac{1}{8}$

(iii) $\cos 55^\circ+\cos 65^\circ+\cos 175^\circ$ 答. 0.

(iv) $\cos 108^\circ\cos 132^\circ+\cos 132^\circ\cos 12^\circ+\cos 12^\circ\cos 108^\circ$.

答. $-\dfrac{3}{4}$.

(11.) 求適於次之方程式在180°以內之正角

(i) $\sin 4\theta+\sin\theta=0$. 答. 60°, 72°, 144°. 180°.

(ii) $\cos\theta-\cos 3\theta=\sin 2\theta$. 答. 0°, 90°, 180°.

(iii) $\cos 3\theta+\cos 2\theta+\cos\theta=0$. 答. 45°, 120°, 135°.

(12.) 由$\left\{\begin{array}{l} x\cos\theta+y\sin\theta=2a \\ x\cos\varphi+y\sin\varphi=2a \\ 2\cos\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\varphi}{2}=1 \end{array}\right\}$消去$\theta, \varphi$

答. $y^2=4a(x+a)$.

31. 二倍角及半角之三角函數.

於(9)(10)(13)設B=A則

$$\sin 2A=2\sin A\cos A \qquad (26)$$

$$\begin{aligned}\cos 2A&=\cos^2 A-\sin^2 A\\&=2\cos^2 A-1\\&=1-2\sin^2 A \qquad (27)\end{aligned}$$

$$\tan 2A=\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A} \qquad (28)$$

系一. $\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$.

$$\cos A=\cos^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2}=2\cos^2\frac{A}{2}-1=1-2\sin^2\frac{A}{2}.$$

$$\tan A=\frac{2\tan\frac{A}{2}}{1-\tan^2\frac{A}{2}}.$$

系二. $\sin^2 A=\frac{1-\cos 2A}{2}$.

$$\cos^2 A=\frac{1+\cos 2A}{2}.$$

由此式可化任意角之正弦及餘弦之平方爲一次式,

又於此式以$\frac{A}{2}$代A.可得次之結果

$$\sin^2\frac{A}{2}=\frac{1-\cos A}{2}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(29)$$

$$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{1+\cos A}{2}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(30)$$

從而 $$\tan^2\frac{A}{2}=\frac{1-\cos A}{1+\cos A}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(31)$$

次式亦甚緊要

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{2\cos^2\frac{A}{2}}=\frac{\sin A}{1+\cos A}.$$

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{2\sin^2\frac{A}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}=\frac{1-\cos A}{\sin A}.$$

$$\therefore\quad\tan\frac{A}{2}=\frac{\sin A}{1+\cos A}=\frac{1-\cos A}{\sin A}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(32)$$

設題十二

證次之諸恆等式

1. $\operatorname{cosec}2A=\dfrac{\cot^2A+1}{2\cot A}$.

2. $\sin 2A=\dfrac{2\tan A}{1+\tan^2A}$.

3. $\cos 2A=\dfrac{1-\tan^2A}{1+\tan^2A}$.

4. $\cot A+\tan A=2\operatorname{cosec}2A.$

5. $\cot A-\tan A=2\cot 2A.$

6. $\operatorname{cosec}A+\cot A=\cot\frac{A}{2}.$

7. $\operatorname{cosec}A-\cot A=\tan\frac{A}{2}.$

8. $1\pm\sin A=\left(\cos\frac{A}{2}\pm\sin\frac{A}{2}\right)^2.$

9. $\frac{1\pm\sin A}{1\pm\sin A}=\tan^2\left(45^\circ\pm\frac{A}{2}\right).$

10. $\sec A\pm\tan=\tan\left(45^\circ\pm\frac{A}{2}\right).$

上之諸式俱甚重要

11. $\cos A=\frac{1}{1+\tan A\tan\frac{A}{2}}.$

12. $\tan\frac{A}{2}=\frac{1+\sin A-\cos A}{1+\sin A+\cos A}.$

13. $2\sin^2A\sin^2B+2\cos^2A\cos^2B=1+\cos 2A\cos 2B.$

14. $\operatorname{cosec}2A+\cot 4A=\cot A-\operatorname{cosec}4A.$

15. $\cos^2A+\cos^2(120^\circ+A)+\cos^2(120^\circ-A)=\frac{3}{2}.$

16. $\cos A=\frac{\cos\alpha-\cos\beta}{1+\cos\alpha\cos\beta}$ 則 $\tan^2\frac{A}{2}=\tan^2\frac{\alpha}{2}=\cot^2\frac{\beta}{2}$

17. 求適於次之方程式在 360° 以內之正角

(i) $\cos 2\theta + 2\sin^2 2\theta = 1.$

答. $60°, 120°, 180°, 240°, 300°, 360°.$

(ii) $8\cot\theta = \sec^2\frac{\theta}{2} + \operatorname{cosec}^2\frac{\theta}{2}.$ 答. $45°, 225°.$

(iii) $\tan\theta + \cot\theta = \frac{4}{\sqrt{3}}.$ 答. $30°, 60°, 210°, 240°.$

23. 三倍角之三角函數.

$$\sin 3A = \sin(2A + A) = \sin 2A\cos A + \cos 2A\sin A$$

$$= 2\sin A\cos A\cos A + (1 - 2\sin^2 A)\sin A$$

$$= 2\sin A(1 - \sin^2 A) + \sin A - 2\sin^3 A$$

$$= 3\sin A - 4\sin^3 A \qquad \cdots\cdots(33)$$

$$\cos 3A = \cos(2A + A) = \cos 2A\cos A - \sin 2A\sin A$$

$$= (2\cos^2 A - 1)\cos A - 2\sin A\cos A\sin A$$

$$= 2\cos^3 A - \cos A - 2\cos A(1 - \cos^2 A)$$

$$= 4\cos^3 A - 3\cos A \qquad \cdots\cdots(34)$$

$$\tan 3A = \tan(2A + A) = \frac{\tan 2A + \tan A}{1 - \tan 2A\tan A}$$

$$= \frac{\dfrac{2\tan A}{1 - \tan^2 A} + \tan A}{1 - \dfrac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}\tan A}$$

$$=\frac{3\tan A-\tan^3 A}{1-3\tan^2 A}\cdots\cdots\cdots\cdots(35)$$

系 $\sin^3 A=\dfrac{3\sin A-\sin 3A}{4}.$

$\cos^3 A=\dfrac{3\cos A+\cos 3A}{4}$

由此式,可化任意角之正弦或餘弦之立方爲一次式.

設題十三.

證次之諸恒等式

1. (i) $4\sin A\sin(60^\circ-A)\sin(60^\circ+A)=\sin 3A.$

   (ii) $4\cos A\cos(60^\circ-A)\cos(60^\circ+A)=\cos 3A.$

   (iii) $\tan A\tan(60^\circ+A)\tan(120^\circ+A)=-\tan 3A.$

2. $\dfrac{\cos 3A}{\cos A}-\dfrac{\cos 6A}{\cos 2A}+\dfrac{\cos 9A}{\cos 3A}-\dfrac{\cos 18A}{\cos 6A}$

   $=2(\cos 2A-\cos 4A+\cos 6A-\cos 12A)$

3. (i) $\sec A+\sec(120^\circ+A)+\sec(240^\circ+A)=-3\sec 3A.$

   (ii) $\operatorname{cosec}A+\operatorname{cosec}(120^\circ+A)+\operatorname{cosec}(240^\circ+A)$

   $=3\operatorname{cosec}3A.$

4. (i) $\cos^3 A\dfrac{\sin 3A}{3}+\sin^3 A\dfrac{\cos 3A}{3}=\dfrac{\sin 4A}{4}.$

   (ii) $\sin 3A\sin^3 A+\cos 3A\cos^3 A=\cos^3 2A.$

5. (i) $\tan A+\tan(60°+A)+\tan(120°+A)=3\tan 3A.$

(ii) $\cot A+\cot(60°+A)+\cot(120°+A)=3\cot 3A.$

9. $\dfrac{\sin 3A+\cos 3A}{\sin 3A-\cos 3A}=\tan(A-45°)\left(\dfrac{1+2\sin 2A}{1-2\sin 2A}\right).$

7. (i) $\sin^3 A+\sin^3(120°+A)-\sin^3(120°-A=-\dfrac{3}{4}\sin 3A.$

(ii) $\cos^3 A+\cos^3(120°+A)+\cos^3(120°-A)=-\dfrac{3}{4}\cos 3A.$

8. (i) $\sin 5A=16\sin^5 A-20\sin^3 A+5\sin A.$

(ii) $\cos 5A=16\cos^5 A-20\cos^3 A+5\cos A.$

9. (i) $\sin 18°=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}.$

(ii) $\cos 36°=\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}.$

10. 求適於次之方程式在 360° 以內之正角.

(i) $\operatorname{cosec}\theta-4\sin\theta=2.$ 答. 18°, 162°, 234°, 306°.

(ii) $\sin 5\theta=16\sin^5\theta.$

答. 0°, 30°, 150°, 180°, 210°, 330°, 360°.

第六章。

對數.

對數之定義及記法.

任意一數 a 之 x 乘方爲 y。(但 x 爲任意之數)則 x 爲 y 之 a 底對數。此關係以 $x=\log_a y$ 記之。

〔注意一.〕 此關係或記爲 $y=\log_a{}^{-1}x$.

〔注意二.〕 據定義可推定次之關係.

第一. $a^0=1$ $\qquad\therefore\ \log_a 1=0.$

第二. $a^1=a$ $\qquad\therefore\ \log_a a=1.$

第三. $a^m=a^m$ $\qquad\therefore\ \log_a a^m=m.$

設題十四.

求次之對數之值

1. $\log_2 1024.$ 答. $10.$

2. $\log_3 \sqrt{27}.$ 答. $\frac{3}{2}.$

3. $\log_4 0\cdot125$.　　答. $-\frac{3}{2}$.

4. $\log_5 \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt{125}}$.　　答. $-\frac{7}{6}$.

5. $\log_{\sqrt{3}} 81$.　　答. 8.

6. $\log_{.01} 10$.　　答. $-\frac{1}{2}$.

7. $\log_{49} 343\sqrt{7}$.　　答. $\frac{7}{4}$.

8. $\log_4 \sqrt[5]{\frac{1}{2}}$.　　答. $-\frac{1}{10}$.

9. $\log_2 \sin 45°$　　答. $-\frac{1}{2}$.

10. $\log_a x=\log_b y=\log_c z$ 則此對數為以 $a^p b^q c^r$ 為底之 $x^p y^q z^r$ 之對數求證.

34. 對數之重要性質.

〔第一.〕 乘積之對數等於其各因數之對數之和.

證.

設 $\log_a m=x$, $\log_a n=y$ 則 $m=a^x$, $n=a^y$

$$\therefore \quad mn=a^x a^y=a^{x+y}$$

$\therefore\ \log_a mn = x+y = \log_a m + \log_a n.$

同樣 $\log_a mnp\ldots\ldots = \log_a m + \log_a n + \log_a p + \ldots\ldots\ldots$

〔第二.〕 商之對數等於由被除數之對數,减除數之對數之差.

證.

$\log_a m = x,\ \log_a n = y$ 則 $m = a^x,\ n = a^y$

$$\therefore\ \frac{m}{n} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$\therefore\ \log_a \frac{m}{n} = x - y = \log_a m - \log_a n.$$

〔第三.〕 一數之乘方之對數。等於以指數(任意數)乘原數之對數。

證.

設 $\log_a m = x$ 則 $m = a^x$, 今 r 爲任意之數則

$$m^r = (a^x)^r = a^{rx}$$

$$\therefore\ \log_a(m^r) = rx = r\log_a m.$$

〔第四.〕 以一數之對數除他數之對數。其商等於以第二數爲底之第一數之對數。

證.

設 $\log_c a = x,\ \log_c b = y$ 則 $a = c^x,\ b = c^y$

$$\therefore \quad a^{\frac{1}{x}}=b^{\frac{1}{y}}$$

$$\therefore \quad a=b^{\frac{x}{y}}$$

$$\therefore \quad \log_b a=\frac{x}{y}=\frac{\log_c a}{\log_c b}.$$

設題十五.

(1) 證 $7\log_a\frac{15}{16}-6\log_a\frac{3}{8}+5\log_a\frac{2}{5}-\log_a\frac{25}{32}=\log_a 3$

(2) 知 8, 14, 21 之 10 底對數求由 1 至 10 諸整數之對數。

(3) $\log_8 9=a$, $\log_2 5=b$, $\log_5 7=c$ 問由 1 至 7 諸整數之 10 底對數各幾何

答. $0, \frac{1}{b+1}, \frac{3a}{2b+2}, \frac{2}{b+1}, \frac{b}{b+1}, \frac{3a+2}{2b+2}, \frac{bc}{b+1}.$

(4) 證 $2\log_a x+2\log_a x^2+2\log_a x^3+\ldots\ldots+2\log_a x^n$
$=n(n+1)\log_a x$

(5) 證 $\log_a b\times\log_b c=\log_a c$　及　$\log_a b\times\log_b a=1$

35. 對數之種類.

最有用之對數爲自然對數及常用對數二種(自然對數,又名爲納伯爾對數.)

第一. 自然對數者。以 $e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots+\frac{1}{r!}+\cdots\cdots=2\cdot71828\cdots\cdots$ 爲底之對數也。理論數學多用之。

本書不用此種對數.

第二. 常用對數者。以 10 爲底之對數也。實地計算多用之.

注意. 據前條第四

$$\frac{\log_{10}m}{\log_{10}e}=\log_e m$$

$$\therefore \quad \log_{10}m=\log_{10}e\times\log_e m$$

而 $\log_{10}e=\cdot43429\cdots\cdots, \quad \frac{1}{\log_{10}e}=2\cdot30258\cdots\cdots$

設此爲 μ 及 $\frac{1}{\mu}$ 則

$$\log_{10}m=\mu\log_e m.$$

$$\log_e m=\frac{1}{\mu}\log_{10}m.$$

由此式。知其一種對數自能求出他種對數

36. 常用對數.

〔規約一.〕 常用對數之記法不須記其底。

〔規約二.〕 常用對數其小數部分常爲正，若整數部分爲負。則以負號記於其數字上。

〔定義一.〕 對數之小數部分。謂之假數其整數之部分。謂之指標.。

〔定義二.〕 變數之對數之符號。謂之餘對數.。

〔注意一.〕 一數之餘對數。以 colog 之記法顯之。

〔注意二.〕 互爲反數之二數之對數。互爲餘對數。

〔定理一.〕 惟單位相異之二數。其對數之假數無異。

證.

$$\log(a\times 10^n)=\log a+\log 10^n=n+\log a.$$

$$\log(a\div 10^n)=\log a-\log 10^n=-n+\log a.$$

故 $(a\times 10^n)$, a, $(a\div 10^n)$ 其對數之假數無異.

〔定理二.〕 有整數 n 位之數。其對數之指標爲 $(n-1)$。小數點以下至有意數字間有 n 個零(即 0) 之小數。其指標爲 $-(n+1)$.

證.

有整數 n 位之數原在 10^{n-1} 與 10^n 之間。因而其對數在 $(n-1)$ 與 n 之間。故其指標爲 $(n-1)$.

小數點以下至有意數字有 n 個零之數,原在 $10^{-(n+1)}$ 與 10^{-n} 之間。因而其對數在 $-(n+1)$ 與 $-n$ 之間。故其指標爲 $-(n+1)$

〔定理三.〕 以由 1 減對數之假數爲假數,並以變其指標之符號加於 -1 爲指標,則其對數爲原對數之餘對數.

證.

設任意對數之指標爲 a, 假數爲 b, 則

$$-(a+b)=-a-b=(-1-a)+(1-b).$$

37. 對數四則.

〔第一〕 對數之加法.

因對數之假數常爲正。故求和時。宜注意指標之符號而求其代數和。

例一.	例二.	例三.
3·6428	$\bar{2}$·9326	3·5637
2.5364	$\bar{1}$·6785	$\bar{5}$·7456
6·1792	$\bar{2}$·6111	$\bar{1}$·3093

〔第二.〕 對數之減法.

對數相減惟加其餘對數可也.

[例] 由 2·6389, $\bar{3}$·5463 之和減 $\bar{2}$·5713, 2·2105 之和.

運算.	按
2·6389	$-(\bar{2}$·5713$)=1$·4287
$\bar{3}$·5463	$-(2$·2105$)=\bar{3}$·7895
1·4287	
$\bar{3}$·7895	
$\bar{1}$·4034	

〔第三.〕 以整數乘對數之法.

對數爲正則如普通數行乘法。若爲負。則分指標與假數各別用乘法。並加其結果。

例一.

$$\begin{array}{r} 2{\cdot}3576 \\ 3 \\ \hline 7{\cdot}0728 \end{array}$$

例二.

$$\begin{array}{r} \bar{3}{\cdot}6782 \\ 2 \\ \hline \bar{5}{\cdot}3564 \end{array}$$

〔第四.〕以整數除對數之法.

對數爲正。則如普通數行除法。若爲負。則由指標減適當之數。而加此適當之數于假數。使指標能整除。然後行除法。

例一.

$$\begin{array}{l} 2.7539\ (4 \\ \hline 0.6885 \end{array}$$

例二.

$$\begin{array}{l} \bar{5}{\cdot}9287\ (3 \\ \hline \bar{2}{\cdot}6429 \end{array}$$

88。數之對數表.

數之對數表。原載至若干數止諸整數對數之假數。本書卷尾之表。惟列舉假數四位之整數對數至 999 止。其用法如次。

〔第一.〕求數之對數法.

例.

(1) 求 log83·2

解.

83·2 之對數之假數。撿表知為 9201 又指標據 36 條知為 1.

$$\therefore\ \log 83{\cdot}2 = 1{\cdot}9201$$

(2) 求 $\log 0{\cdot}000357$

解.

0·000357 之對數之假數。撿表知為 5527 又指標據 36 條知為 -4.

$$\therefore\ \log 0{\cdot}000357 = \bar{4}{\cdot}5527.$$

(3) 求 $\log 5{\cdot}118$

解.

$$\log 5{\cdot}12 - \log 5{\cdot}11 = 0{\cdot}7093 - 0{\cdot}7084 = 0{\cdot}0009$$

$$0{\cdot}01 : 0{\cdot}008 :: 0{\cdot}0009 : x$$

$$x = 0{\cdot}0007.$$

$$\therefore\ \log 5{\cdot}118 = 0{\cdot}7084 + 0{\cdot}0007 = 0{\cdot}7091.$$

(4) 求 $\log 0{\cdot}7332$.

解.

$$\log 0{\cdot}734 - \log 0{\cdot}733 = \bar{1}{\cdot}8657 - \bar{1}{\cdot}8651 = 0{\cdot}0006.$$

$$0{\cdot}001 : 0{\cdot}0002 :: 0{\cdot}0006 : x$$

$$x=0\cdot0001.$$

$\therefore\ \log 0\cdot7332=\bar{1}\cdot8651+0\cdot0001=\bar{1}\cdot8652.$

(5) 求 $\log 456\cdot78.$

解.

$\log 457-\log 456=2\cdot6599-2\cdot6590=0\cdot0009.$

$$1:0.78::0\cdot0009:x$$

$$x=0\cdot0007.$$

$\therefore\ \log 456\cdot78=2\cdot6590+0\cdot0007=2\cdot6597.$

[第二] 知對數求相當之眞數法。

例.

(1) $\log a=0\cdot4579$ 求 a (卽 $\log^{-1}0\cdot4579$)

解.

以 0·4579 爲對數之眞數。其數字之排列。檢表知爲287此數據指標知爲整數一位之數。

$$\therefore\ a=2\cdot87.$$

(2) $\log a=\bar{1}\cdot3766$ 求 $a.$

以 $\bar{1}\cdot3766$ 爲對數之數。其數字之排列.檢表得238此數據指標知爲小數點以下至有意數字間無0之小數。

$$\therefore\ a=0\cdot238.$$

(3) $\log a = 2{\cdot}7516$ 求 a.

解.

$$\log 565 - \log 564 = 2{\cdot}7520 - 2{\cdot}7513 = 0{\cdot}0007.$$

$$\log a - \log 564 = 2{\cdot}7516 - 2{\cdot}7513 = 0{\cdot}0003.$$

$$0{\cdot}0007 : 0{\cdot}0003 :: 1 : x$$

$$x = 0{\cdot}4$$

$$\therefore \quad a = 564 + 0.4 = 564{\cdot}4$$

(4) $\log a = \bar{3}{\cdot}8314$ 求 a.

解.

$$\log 0{\cdot}000679 - \log 0{\cdot}00678 = \bar{3}{\cdot}8319 - \bar{3}{\cdot}8312 = 0{\cdot}0007.$$

$$\log a - \log 0{\cdot}00678 = \bar{3}{\cdot}8314 - \bar{3}{\cdot}8312 = 0{\cdot}0002$$

$$0{\cdot}0007 : 0{\cdot}0002 :: 0{\cdot}00001 : x$$

$$x = 0{\cdot}000003.$$

$$\therefore \quad a = 0{\cdot}00678 + 0{\cdot}000003 = 0{\cdot}006783.$$

〔注意一.〕求表中所未載諸數之對數法。及求與對數相當之數法。須依次之定理。

數之小變化。與其相當對數之變化。殆成比例。

但此定理之由來及限界。本書不具論。

〔注意二.〕 用比例部分 (P. P.) 可省比例之運算。(如上諸例)

39. 三角函數之對數表.

三角函數之對數表者。載由 $0°$ 至 $90°$ 諸角之三角函數之對數或加 10 於是者也。(謂之表對數以 L 爲其記號)

〔注意.〕 表對數唯便於排字

本書卷尾之表。列舉由 $0°$ 至 $90°$ 間每 $10'$ 諸角之三角函數之對數。其用法如次

〔第一〕 求角之三角函數之對數法.

例.

(1) 求 $\log\sin 23°\,34'\cdot 6$

解.

$$\log\sin 23°40' - \log\sin 23°30' = \bar{1}\cdot 6036 - \bar{1}\cdot 6007 = 0.0029.$$

$$10 : 4\cdot 6 :: 0\cdot 0029 : x$$

$$x = 0\cdot 0013.$$

$$\therefore \quad \log\sin 23°\,34'\cdot 6 = \bar{1}\cdot 6007 + 0\cdot 0013 = \bar{1}\cdot 6020.$$

(2) 求 $\log\tan 72°53'\cdot 3$

解.

$$\log\tan 73^\circ - \log\tan 72^\circ 50' = 0{\cdot}5147 - 0{\cdot}5102 = 0{\cdot}0045$$

$$10 : 3{\cdot}3 :: 0{\cdot}0045 : x$$

$$x = 0{\cdot}0015.$$

$$\therefore\quad \log\tan 72^\circ 53'{\cdot}3 = 0{\cdot}5102 + 0{\cdot}0015 = 0{\cdot}5117.$$

(3) 求 $\log\cos 35^\circ 42'{\cdot}7$.

解.

$$\log\cos 35^\circ 40' - \log\cos 35^\circ 50' = \bar{1}{\cdot}9098 - \bar{1}{\cdot}9089 = 0{\cdot}0009.$$

$$10 : 2{\cdot}7 :: 0{\cdot}0009 : x$$

$$x = 0{\cdot}0002.$$

$$\therefore\quad \log\cos 35^\circ 42'{\cdot}7 = \bar{1}{\cdot}9098 - 0{\cdot}0002 = \bar{1}{\cdot}9096.$$

(4) 求 $\log\cot 64^\circ 18'{\cdot}6$.

解.

$$\log\cot 64^\circ 10' - \log\cot 64^\circ 20' = \bar{1}{\cdot}6850 - \bar{1}{\cdot}6817 = 0{\cdot}0033.$$

$$10 : 8{\cdot}6 :: 0{\cdot}0033 : x$$

$$x = 0{\cdot}0028$$

$$\therefore\quad \log\cot 64^\circ 18'{\cdot}6 = \bar{1}{\cdot}6850 - 0{\cdot}0028 = \bar{1}{\cdot}6822.$$

(5) 求 $\log\sec 21^\circ 37'{\cdot}4$.

解.

$$\log\cos 21°37'\cdot4=\bar{1}\cdot9683.$$

$\therefore\ \log\sec 21°37'\cdot4=0\cdot0317.$

(6)　求 $\log\operatorname{cosec}16°42'\cdot3.$

解.

$$\log\sin 16°42'\cdot3=\bar{1}\cdot4586.$$

$\therefore\ \log\operatorname{cosec}16°42'\cdot3=0.5414.$

〔第二〕 知三角函數之對數。求相當之角法。

例.

1、 $\log\sin A=\bar{1}\cdot3035$ 求 A.

解.

$$\log\sin 11°40'-\log\sin 11°30'=\bar{1}\cdot3058-\bar{1}\cdot2997=0\cdot0061.$$

$$\log\sin A\qquad-\log\sin 11°30'=\bar{1}\cdot3035-\bar{1}\cdot2997=0\cdot0038.$$

$$0\cdot0061:0\cdot0038::10:x$$

$$x=6\cdot2.$$

$$A=11°30'+6'\cdot2=11°36'\cdot2.$$

2　$\log\tan A=0\cdot4782$ 求 A.

解.

$$\log\tan 71^\circ 40' - \log\tan 71^\circ 30' = 0{\cdot}4797 - 0{\cdot}4755 = 0{\cdot}0042.$$

$$\log\tan A - \log\tan 71^\circ 30' = 0{\cdot}4782 - 0{\cdot}4755 = 0{\cdot}0027.$$

$$0{\cdot}0042 : 0{\cdot}0027 :: 10 : x$$

$$x = 6{\cdot}4.$$

$$\therefore\quad A = 71^\circ 30' + 6'{\cdot}4 = 71^\circ 36'{\cdot}4.$$

3. $\log\cos A = \bar{1}{\cdot}9349$ 求 A

解.

$$\log\cos 30^\circ 30' - \log\cos 30^\circ 40' = \bar{1}.9353 - \bar{1}.9346 = 0{\cdot}0007.$$

$$\log\cos 30^\circ 30' - \log\cos A = \bar{1}{\cdot}9353 - \bar{1}{\cdot}9349 = 0{\cdot}0004.$$

$$0{\cdot}0007 : 0{\cdot}0004 :: 10 : x$$

$$x = 5{\cdot}7.$$

$$\therefore\quad A = 30^\circ 30' + 5'.7 = 30^\circ 35'.7.$$

4. $\log\cot A = \bar{1}{\cdot}8253$ 求 x.

解.

$$\log\cot 56^\circ 10' - \log\cot 56^\circ 20' = \bar{1}{\cdot}8263 - \bar{1}{\cdot}8235 = 0{\cdot}0028.$$

$$\log\cot 56^\circ 10' - \log\cot A \quad = \bar{1}{\cdot}8263 - \bar{1}{\cdot}8253 = 0{\cdot}0010.$$

$$0{\cdot}0028 : 0{\cdot}0010 :: 10 : x$$

$$x = 3{\cdot}6.$$

$\therefore \quad A=56°10'+3'\cdot6=56°13'\cdot6.$

5. $\log \sec A=0\cdot0560$ 求 A.

解.

$$\log \cos A=\bar{1}\cdot9434.$$

$$\therefore \quad A=28°37'\cdot1$$

6. $\log \operatorname{cosec} A=0\cdot2668$ 求 A.

解.

$$\log \sin A=\bar{1}\cdot7332.$$

$$A=32°45'\cdot$$

〔注意一.〕 求表中所未載諸銳角之三角函數之對數「及知三角函數之對數」求其角須依次之定理.

不近於 0° 或 90° 諸角之小變化與其三角函數之相當對數之變化。殆成比例。

此定理之由來及限界。本書不具論。

〔注意二.〕 用比例部分表。可省略比例之運算.

40. 諸計算中對數之應用.

例.

(1) 計算 $x=2\cdot582\times345\cdot7.$

解.

$$\log 2{\cdot}582 = 0{\cdot}4119$$
$$\log 345{\cdot}7 = 2{\cdot}5387$$
$$\log x = 2{\cdot}9506$$
$$x = 892{\cdot}4.$$

(2) 計算 $x=\dfrac{0{\cdot}07438}{129{\cdot}5}$

解.

$$\log 0{\cdot}07438 = \bar{2}{\cdot}8715$$
$$-\log 129{\cdot}5 = \bar{3}{\cdot}8877$$
$$\log x = \bar{4}{\cdot}7592$$
$$x = 0{\cdot}0005744.$$

(3) 計算 $x=(3{\cdot}072)^3$

解.

$$\log 3{\cdot}072 = 0{\cdot}4874$$
$$3$$
$$\log x = 1{\cdot}4622$$
$$x = 28{\cdot}99.$$

(4) 計算 $x=\sqrt[4]{0{\cdot}007654}$

解.

$$\log 0{\cdot}007654 = \bar{3}{\cdot}8839\ (4$$
$$\log x = \bar{1}{\cdot}4710$$

$$x=0{\cdot}2958.$$

(5) 解 $(1{\cdot}2)^x=1{\cdot}1$

解.

$$x\log 1{\cdot}2=\log 1{\cdot}1$$

$$x=\frac{\log 1.1}{\log 1.2}=\frac{0{\cdot}0414}{0{\cdot}0792}$$

$$\begin{aligned}\log 0{\cdot}0414&=\bar{2}{\cdot}6170\\ -\log 0{\cdot}0792&=1{\cdot}1013\\ \hline \log x&=\bar{1}{\cdot}7183\\ x&=0{\cdot}5229.\end{aligned}$$

.注意. 如本題者謂之指數方程式.

設 題 十 六.

(1) 解 $\left(\frac{203}{200}\right)^{2x}=2$ 答. 23·16.

(2) 解 $8^{5-3x}=12^{1-2x}$ 答. $x=0{\cdot}3607$.

(3) 解 $\begin{cases}2^x\times5^y=1\\5^{x+}\times2=2\end{cases}$ 答. $\begin{cases}x=-0{\cdot}699.\\y=\ \ 0{\cdot}301.\end{cases}$

(4) 計算 $\frac{(2{\cdot}013)^2\times(0{\cdot}0593)^{\frac{3}{2}}}{(0{\cdot}9123)^4}$ 答. 0·08447.

(5) 計算 $\dfrac{(34{\cdot}73)^{\frac{4}{5}}\times\sqrt[6]{2{\cdot}539}}{\sqrt[4]{4{\cdot}397}\times(3{\cdot}456)^3}$ 答. 0·3338.

第　七　章。

任　意　三　角　形.

41. 三角形之性質.

〔第一〕 角之關係.

$A+B+C=180^\circ$ 因而 $A+B=180^\circ-C$, $\dfrac{A+B}{2}=90^\circ-\dfrac{C}{2}$,

故有次之關係.

$$\left.\begin{aligned}\sin(A+B)&=\sin C\\ \cos(A+B)&=-\cos C\\ \tan(A+B)&=-\tan C\end{aligned}\right\}\qquad\left.\begin{aligned}\sin\frac{A+B}{2}&=\cos\frac{C}{2}\\ \cos\frac{A+B}{2}&=\sin\frac{C}{2}\\ \tan\frac{A+B}{2}&=\cot\frac{C}{2}\end{aligned}\right\}$$

設　題　十　七.

A, B, C 爲一個三角形上之角。證次之諸式。

(1)　(i)　$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$.

(ii)　$\sin A+\sin B-\sin C=4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$.

(2) (i) $\cos A+\cos B+\cos C=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+1.$

(ii) $\cos A+\cos B-\cos C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}-1.$

(3) (i) $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+1.$

(ii) $\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}=2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+2$

(4) (i) $\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}$

$$=4\cos\left(45^\circ-\frac{A}{4}\right)\cos\left(45^\circ-\frac{B}{4}\right)\cos\left(45^\circ-\frac{C}{4}\right).$$

(ii) $\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}-\cos\frac{C}{2}$

$$=4\sin\left(45^\circ-\frac{A}{4}\right)\sin\left(45^\circ-\frac{B}{4}\right)\cos\left(45^\circ-\frac{C}{4}\right).$$

(5) (i) $\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}$

$$=4\sin\left(45^\circ-\frac{A}{4}\right)\sin\left(45^\circ-\frac{B}{4}\right)\sin\left(45^\circ-\frac{C}{4}\right)+1.$$

(ii) $\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}-\sin\frac{C}{2}$

$$=4\cos\left(45^\circ-\frac{A}{4}\right)\cos\left(45^\circ-\frac{B}{4}\right)\sin\left(45^\circ-\frac{C}{4}\right)-1.$$

(6)　(i)　$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C.$

(ii)　$\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=-4\cos A\cos B\cos C-1.$

(7)　(i)　$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2\cos A\cos B\cos C+2.$

(ii)　$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=-2\cos A\cos B\cos C+1.$

(8)　(i)　$\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C.$

(ii)　$\cot B\cot C+\cot C\cot A+\cot A\cot B=1.$

(9)　$\cot A+\cot B+\cot C=\cot A\cot B\cot C+\mathrm{cosce}A\,\mathrm{cosec}B$ $\mathrm{cosec}C.$

(10)　(i)　$\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=1.$

(ii)　$\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}.$

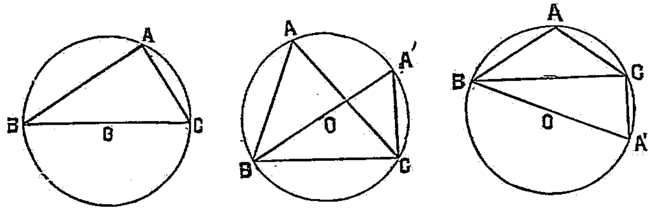
(11)　(i)　$\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C=-4\cos\frac{3A}{2}\cos\frac{3B}{2}\cos\frac{3C}{2}.$

(ii)　$\cos 3A+\cos 3B+\cos 3C=-4\sin\frac{3A}{S}\sin\frac{3B}{2}\sin\frac{3C}{2}$ $+1.$

(12)　$\cot\frac{A}{2}$, $\cot\frac{B}{2}$, $\cot\frac{C}{2}$成等差級數。求證 $\cot\frac{A}{2}\cot\frac{C}{2}$ $=3$

第二.　外接圓之直徑及正弦比例之式.

設 $\hat{ABC}$ 上 A, B, C 角之對邊爲 a, b, c, 外接圓之中心爲 O, 直徑爲 K.



(i) $A=90^\circ$ 則 $\sin A=1,\ a=K$

$$\therefore\quad \sin A=\frac{a}{K}$$

$$\therefore\quad K=\frac{a}{\sin A}.$$

(ii) $A\neq 90^\circ$ 則延長 BO 與圓周相交於 A' 點連此於 C。則 $B\hat{C}A'=90^\circ$ 而 A, A' 相等或互爲補角。故

$$\sin A=\sin A'=\frac{CB}{A'B}=\frac{a}{K}$$

$$\therefore\quad K=\frac{a}{\sin A}.$$

故不拘 $\hat{A}$ 之如何 $K=\dfrac{a}{\sin A}$.

同樣 $K=\dfrac{b}{\sin B}$, $K=\dfrac{c}{\sin C}$.

$$\therefore \quad \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}(=K) \dots\dots\dots\dots\dots\dots (36)$$

是謂正弦比例式

〔第三〕 兩角之半差及半和之三角函數之關係.

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=K$$

$$\therefore \quad a=K\sin A,\ b=K\sin B,\ c=K\sin C.$$

故有次之關係.

(i) $$\frac{a-b}{a+b}=\frac{K\sin A-K\sin B}{K\sin A+K\sin B}=\frac{\sin A-\sin B}{\sin A+\sin B}.$$

$$=\frac{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}=\frac{\tan\frac{A-B}{2}}{\tan\frac{A+B}{2}}=\frac{\tan\frac{A-B}{2}}{\cot\frac{C}{2}}$$

$$\therefore \quad \tan\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2} \dots\dots\dots\dots\dots\dots (37)$$

(ii) $$\frac{a+b}{b}=\frac{K\sin A+K\sin B}{K\sin C}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin C}$$

$$=\frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}.$$

(iii) $$\frac{a-b}{c}=\frac{K\sin A-K\sin B}{K\sin C}=\frac{\sin A-\sin B}{\sin C}$$

$$=\frac{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}}.$$

$$\therefore\ c=\frac{(a+b)\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}}=\frac{(a-b)\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A-B}{2}}\cdots\cdots\cdots\cdots(38)$$

〔第四.〕 以邊顯一角之餘弦及正弦之式.

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{K^2\sin^2B+K^2\sin^2C-K^2\sin^2A}{2K\sin B.\ K\sin C}$$

$$=\frac{\sin^2B+\sin^2C-\sin^2A}{2\sin B\sin C}$$

$$=\frac{\sin^2(C+A)+\sin(C+A)\sin(C-A)}{2\sin(C+A)\sin C}$$

$$=\frac{\sin(C+A)+\sin(C-A)}{2\sin C}$$

$$=\frac{2\sin C\cos A}{2\sin C}=\cos A.$$

$$\left.\begin{aligned} \therefore\qquad \cos A&=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\\ \text{同樣}\qquad \cos B&=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\\ \cos C&=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(39)$$

此公式又可書爲次之形.

$$\left.\begin{aligned} a^2&=b^2+c^2-2bc\cos A\\ b^2&=c^2+a^2-2ca\cos B\\ c^2&=a^2+b^2-2ab\cos C\end{aligned}\right\}$$

此關係亦可依三角形邊上諸正方形之幾何學定理作之

次

$$\sin A=\sqrt{(1-\cos^2 A)}=\sqrt{\{(1+\cos A)(1-\cos A)\}}$$

$$=\sqrt{\left\{\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\right\}}$$

$$=\sqrt{\left\{\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}\cdot\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}\right\}}$$

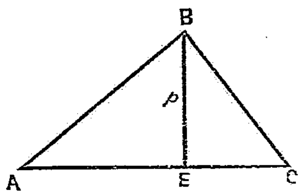
$$=\frac{1}{2bc}\sqrt{\{(b+c+a)(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c)\}}$$

今 $\dfrac{a+b+c}{2}=p$ 則

$b+c-a=2(p-a), c+a-b=2(p-b), a+b-c=2(p-c).$

$$\left.\begin{aligned}
\therefore\quad &\sin A=\frac{2}{bc}\sqrt{\{p(p-a)(p-b)(p-c)\}}\\
\text{同様}\quad &\sin B=\frac{2}{ca}\sqrt{\{p(p-a)(p-b)(p-c)\}}\\
&\sin C=\frac{2}{ab}\sqrt{\{p(p-a)(p-b)(p-c)\}}
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(40)$$

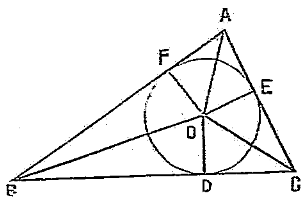
〔第五.〕 三角形面積之式.



於 $A\hat{B}C$, 由一角頂 B 作垂線 BE 于對邊 CA 其數値爲 p, 則 $p=c\sin A$ 故其積 S 之式如積

$$\left.\begin{aligned}
S&=\frac{1}{2}bp\\
&=\frac{1}{2}bc\sin A\\
&=\frac{1}{2}ca\sin B\\
&=\frac{1}{2}ab\sin C\\
&=\sqrt{\{p(p-a)(p-b)(p-c)\}}
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(41)$$

〔第六.〕 內接圓之半徑及半角之正切之式.



設 $\overset{\triangle}{ABC}$ 之面積爲 S, 内接圓之中心爲 O, 半徑爲 r, 與各邊之切點爲 D, E, F 則

$$S=O\overset{\triangle}{BC}+O\overset{\triangle}{CA}+O\overset{\triangle}{AB}=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr$$

$$=\frac{a+b+c}{2}\times r=pr$$

$$\therefore\quad r=\frac{S}{p}=\sqrt{\left\{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}\right\}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(42)$$

次 $\tan FAO=\dfrac{FO}{AF}$, 而 $FO=r$, $AF=p-a$

$$\left.\begin{aligned}\therefore\quad \tan\frac{A}{2}&=\frac{r}{p-a}=\frac{1}{p-a}\sqrt{\left\{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}\right\}}\\ \text{同樣}\quad \tan\frac{B}{2}&=\frac{r}{p-b}=\frac{1}{p-b}\sqrt{\left\{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}\right\}}\\ \tan\frac{C}{2}&=\frac{r}{p-c}=\frac{1}{p-c}\sqrt{\left\{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}\right\}}\end{aligned}\right\}\cdots(43)$$

〔注意.〕 此式可以 cosA 之值代入 $\tan^2\dfrac{A}{2}=\dfrac{1-\cos A}{1+\cos A}$ 求得

〔系.〕 設在 $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, 内之傍接圓之半徑爲 r', r'', r''' 則.

$$r'=\frac{S}{p-a},\quad r''=\frac{S}{p-b},\quad r'''=\frac{S}{p-c}.$$

設題十八.

A, B, C 爲三角形之角, a, b, c 爲其對邊, 證次之諸式

(1) $$\begin{cases} a=b\cos C+c\cos B \\ b=c\cos A+a\cos C \\ c=a\cos B+b\cos A \end{cases}$$

(2) (i) $$\begin{cases} \sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \\ \sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-c)(p-a)}{ca}} \\ \sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ba}} \end{cases}$$ (ii) $$\begin{cases} \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \\ \cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ca}} \\ \cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}} \end{cases}$$

(3) (i) $b\sin B-c\sin C=a\sin(B-C)$.

(ii) $b\cos B+c\cos C=a\cos(B-C)$.

(4) (i) $a\cos\frac{B-C}{2}=(b+c)\sin\frac{A}{2}$.

(ii) $a\sin\frac{B-C}{2}=(b+c)\cos\frac{A}{2}$.

(5) $a\cos A+b\cos B+c\cos C=2a\sin B\sin C$.

(6) $c(a\cos B-b\cos A)=a^2-b^2$.

(7) $\dfrac{\cos A}{a}+\dfrac{\cos B}{b}+\dfrac{\cos C}{c}=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$.

(8) $(b^2-c^2)\cot A+(c^2-a^2)\cot B+(a^2-b^2)\cot C=0$.

(9) (i) $\cot A+\cot B=\dfrac{c}{b\sin A}$.

(ii) $\cot A-\cot B=-\dfrac{a^2-b^2}{ab\sin C}$.

(10) (i) $S=\dfrac{a^2\sin B\sin C}{2\sin(B+C)}$

(ii) $S=\dfrac{a^2-b^2}{2}\cdot\dfrac{\sin A\sin B}{\sin(A-B)}$.

(iii) $S=\dfrac{abc}{p}\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$.

(11) 對於 a, b, c 之垂線爲 p_1, p_2, p_3 則

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}=\frac{p}{S}.$$

(12) (i) $\dfrac{1}{r'}+\dfrac{1}{r''}+\dfrac{1}{r'''}=\dfrac{1}{r}$.

(ii) $r'+r''+r'''-r=2S$

(13) (i) $1-\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}=\dfrac{2c}{a+b+c}$.

(ii) $(b+c)^2\sin^2\dfrac{A}{2}+(b-c)^2\cos^2\dfrac{A}{2}=a^2$

(14)　$C=2B$ 證 $c^2-b^2=ab$.

(15)　A, B, C 爲等差級數則

$$2\cos\frac{A-C}{2}=\frac{a+c}{\sqrt{a^2-ac+c^2}}.$$

(16)　對於 a 邊之中線之長爲 $\frac{1}{2}\sqrt{(b^2+c^2+2bc\cos A)}$

(17)　於 A, 其內角及外角之二等分線之長爲

$$\frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c} \text{ 及 } \frac{2bc\sin\frac{A}{2}}{b\sim c}$$

(18)　四邊形之對角線爲 m, n, 而 θ 爲其夾角則其面積 S 等於 $\frac{1}{2}mn\sin\theta$.

(19)　設內接圓之四邊形之各邊爲 a, b, c, d 又 $a+b+c+d=2p$ 則面積 S 等於

$$\sqrt{\{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)\}}$$

若此四邊形又外接于他圓則 S 等於 $\sqrt{abcd}$

(20)　n 邊之正多角形之一邊爲 a, 外接圓之半徑爲 R, 內接圓之半徑爲 r 則其面積 S 之式如次

(i)　$\frac{1}{4}na^2\cot\frac{180^\circ}{n}$,　(ii)　$\frac{1}{2}nR^2\sin\frac{360^\circ}{n}$,　(iii)　$nr^2\tan\frac{180^\circ}{n}$

42. 三角形之解法

一般三角形之解法有例四種

〔第一.〕 知一邊及二角(如 a, B, C)

則由 $A=180^\circ-(B+C)$ 求 A.

又由 $\left\{\begin{array}{l} b=\dfrac{a\sin B}{\sin A} \\ c=\dfrac{a\sin C}{\sin A}\end{array}\right\}$ 求 b, c.

〔第二.〕 知二邊及其夾角。(如 b, c, A) 則

由 $\dfrac{B+C}{2}=90^\circ-\dfrac{A}{2}$ 求 $\dfrac{B+C}{2}$,

由 $\tan\dfrac{B-C}{2}=\dfrac{b-c}{b+c}\cot\dfrac{A}{2}$ 求 $\dfrac{B-C}{2}$

由 $B=\dfrac{B+C}{2}+\dfrac{B-C}{2}$, $C=\dfrac{B+C}{2}-\dfrac{B-C}{2}$ 求 B, C

由 $a=\dfrac{(b+c)\sin\dfrac{A}{2}}{\cos\dfrac{B-C}{2}}$ 或 $\dfrac{(b-c)\cos\dfrac{A}{2}}{\sin\dfrac{B-C}{2}}$ 求 a

〔注意〕 求 B, C 後, 由正弦比例式求 a 亦可

〔第三〕 知二邊及對其一邊之角(如 a, b, A) 則

由 $\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}$ 求 B,

由 $C=180^\circ-(A+B)$ 求 C,

由 $c=\dfrac{b\sin C}{\sin B}$ 求 c

然由正弦之值定 B,有下例

(i) $\sin B>1$ 即 $\log\sin B>0$ 則不能解

(ii) $\sin B=1$ 卽 $\log\sin B=0$ 則 $B=90^\circ$ 故祇有一個解法 (見14款第一).

(iii) $\sin B<1$ 卽 $\log\sin B<0$ 而 $a \nless b$ 則 $A \nless B$, 故 $B<90^\circ$ 從而有一種解法。

(iv) $\sin B<1$ 卽 $\log\sin B<0$ 而 $a<b$ 則 $A<B$, 故 B 爲銳角或鈍角故 B 有互爲補角之二值從而有二種解法。是謂有兩意之例

〔第四〕 知三邊 a, b, c 則

$$
\text{由}\begin{cases}\tan\dfrac{A}{2}=\dfrac{1}{p-a}\sqrt{\left\{\dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}\right\}},\\[2ex]\tan\dfrac{B}{2}=\dfrac{1}{p-b}\sqrt{\left\{\dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}\right\}}\end{cases}
$$

求 A, B 由 $C=180^\circ-(A+B)$ 求 C

計 算 例 題.

(1) 於 $A\hat{B}C$, $A=50°58'7$, $B=32°50'·8$, $c=169·4$ 求 a, b.

算 式.

$$\begin{cases} A=180°-(B+C) \\ b=\dfrac{a\sin B}{\sin A} \\ c=\dfrac{a\sin C}{\sin A} \end{cases}$$

運 算.

$$\begin{array}{r} A=50°58'7 \\ B=32°50'·8 \\ \hline A+B=83°49'·5 \\ 180°=179°60' \\ \hline C=96°10'·5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \log c=2·2289 \\ \log \sin A=\bar{1}.8904 \\ -\log \sin C=0·0025 \\ \hline \log a=2·1218 \\ a=132·4. \end{array} \qquad \begin{array}{r} \log c=2·2289 \\ \log \sin B=\bar{1}·7344 \\ -\log \sin C=0·0025 \\ \hline \log b=1·9658 \\ b=92·43. \end{array}$$

(2) 於 $A\hat{B}C$, $b=4·567$, $c=3·456$, $A=56°7'·8$ 求 B, C, a

算　式.

$$\begin{cases} \tan\dfrac{B-C}{2}=\dfrac{b-c}{b+c}\cot\dfrac{A}{2}. \\ a=\dfrac{(b-c)\cos\dfrac{A}{2}}{\sin\dfrac{B-C}{2}}. \\ B=\dfrac{B+C}{2}+\dfrac{B-C}{2},\ C=\dfrac{B+C}{2}-\dfrac{B-C}{2}. \end{cases}$$

$$\begin{array}{rl} b= & 4{\cdot}567 \\ c= & 3.456 \\ \hline b-c= & 1{\cdot}111 \\ b+c= & 8{\cdot}023 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} A= & 56^\circ 7'8 \\ \dfrac{A}{2}= & 28^\circ 3'{\cdot}6 \\ 90^\circ= & 89^\circ 60' \\ \hline \dfrac{B+C}{2}= & 61^\circ 56'{\cdot}1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \log(b-c)= & 0{\cdot}0457 \\ \log\cot\dfrac{A}{2}= & 0{\cdot}2731 \\ -\log(b+c)= & \bar{1}{\cdot}0956 \\ \hline \log\tan\dfrac{B-C}{2}= & \bar{1}{\cdot}4144 \\ \dfrac{B-C}{2}= & 14^\circ 33'{\cdot}3 \\ \dfrac{B+C}{2}= & 61^\circ 56'{\cdot}1 \\ \hline B= & 76^\circ 29'{\cdot}4. \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \log(b-c)= & 0{\cdot}0457 \\ \log\cos\dfrac{A}{2}= & \bar{1}{\cdot}9457 \\ -\log\sin\dfrac{B-C}{2}= & 0{\cdot}5998 \\ \hline \log a= & 0{\cdot}5912 \\ a= & 3{\cdot}901 \end{array}$$

$C=47°22'\cdot8$.

(3) 於 $\hat{ABC}$, $a=182\cdot5$, $b=236\cdot8$, $A=32°29'\cdot6$ 求 B, C, c.

算　式.

$$\begin{cases} \sin B=\dfrac{b\sin A}{a} \\ C=180°-(A+B) \\ c=\dfrac{b\sin C}{\sin B} \end{cases}$$

運　算.

$$\begin{array}{r} \log b=2\cdot3743 \\ \log\sin A=\bar{1}\cdot7301 \\ -\log a=\bar{3}\cdot7397 \\ \hline \log\sin B=\bar{1}\cdot8441 \end{array}$$

$\log\sin B<0$, $a<b$

故爲有兩意之例.

$$\begin{array}{rcl} B=44°17'\cdot7 & 或 & 135°42'\cdot3 \\ A=32°29'\cdot6 & & 32°29'\cdot6 \\ \hline A+B=76°47'\cdot3 & 或 & 168°11'\cdot9 \\ 180°=179°60' & & 179°60' \\ \hline C=103°12'\cdot7 & 或 & 11°48'\cdot1 \\ \log\sin C=\bar{1}\cdot9883 & 或 & \bar{1}\cdot3107 \\ \log b=2\cdot3743 & & 2\cdot3743 \end{array}$$

$$-\log\sin B = 0{\cdot}1559 \qquad\qquad 0{\cdot}1559$$
$$\log c = 2{\cdot}5185 \quad 或 \quad 1{\cdot}8409$$
$$c = 330 \quad 或 \quad 69{\cdot}33.$$

(4) 於 $\hat{ABC}$, $a=273{\cdot}9$, $b=198{\cdot}6$, $c=236{\cdot}8$ 求 A, B, C.

算 式.

$$\begin{cases} \tan\frac{A}{2}=\frac{1}{p-a}\sqrt{\left\{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}\right\}} \\ \tan\frac{B}{2}=\frac{1}{p-b}\sqrt{\left\{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}\right\}} \\ C=180^\circ-(A+B) \end{cases}$$

運 算.

$a=273{\cdot}9$	$-\log p=\bar{3}{\cdot}4502$
$b=198{\cdot}6$	$\log(p-a)=1{\cdot}9074$
$c=236{\cdot}8$	$\log(p-b)=2{\cdot}1934$
$2p=709{\cdot}3$	$\log(p-c)=2{\cdot}0715$
$p=354{\cdot}7$	$\log r^2=3{\cdot}6225$
$p-a=\ 80{\cdot}8$	$r=1{\cdot}8113$
$p-b=156{\cdot}1$	$\log\tan\frac{A}{2}=\bar{1}{\cdot}9039$
$p-c=117{\cdot}9$	$\frac{A}{2}=38^\circ42'{\cdot}69$
	$A=77^\circ25'{\cdot}4.$

$$\log\tan\frac{B}{2}=\bar{1}\cdot6179$$

$$\frac{B}{2}=22^\circ31'\cdot94$$

$$B=45^\circ3'\cdot9.$$

$$A+B=122^\circ29'\cdot3$$

$$180^\circ=179^\circ60'$$

$$C=57^\circ30'\cdot7.$$

設題十九.

(1) $A=78^\circ23'\cdot2$, $B=52^\circ16'.3$, $a=796\cdot3$ 求 b, c.

答. $643, 616\cdot9$.

(2) $b=295\cdot6$, $c=999\cdot2$, $A=108^\circ29'\cdot6$ 求 C, a.

答. $57^\circ7'\cdot4$, 1131.

(3) $a=23\cdot46$, $b=35\cdot79$, $A=28^\circ35'\cdot4$ 求 C, c.

答. $\begin{cases}104^\circ30'\cdot4,\\ 47\cdot43\end{cases}$ 或 $\begin{cases}18^\circ18'\cdot8,\\ 12\cdot23\end{cases}$

(4) $a=375\cdot9$, $b=298\cdot7$, $c=400\cdot8$ 求 A, B.

答. $63^\circ2'\cdot2$, $45^\circ5'\cdot4$.

(5) 知 a, b, $A-B$ 問解 $A\hat{B}C$ 之方法.

(6) 知 $a+b$, A, B 問解 $A\hat{B}C$ 之方法.

(7) 知 a, $b+c$, A 問解 $\hat{ABC}$ 之方法.

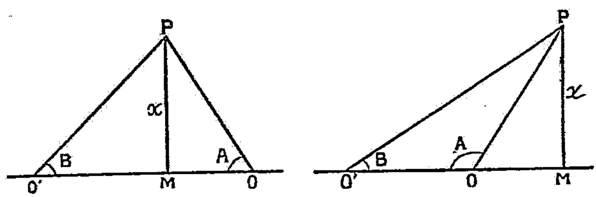
(8) 知 $a+b+c$, A, B 問解 $\hat{ABC}$ 之方法.

(9) 知四邊形之三邊及二對角線求其餘之一邊之方法若何

43. 距離及高之測法。

用直角三角形之算法以測距離及高。既舉其數例矣。而用一般三角形之算法。其所得之方法。較前尤便。更舉其數例於次。

〔第一.〕有物在人所不能到之處。但能由遠處望之。欲求遠處一點與物之距離



於直線上取 O, O′ 二點。測其距離。(設爲 p) 由不能到之點 P。作垂線 PM 於此線。設 PM 之數值爲 x, 又設 O′OP 角及 OO′P 角爲 A, B, 則。

於 $\overset{\triangle}{\mathrm{OO'P}}$, $\mathrm{OP}=\dfrac{\mathrm{OO'}\sin\mathrm{OO'P}}{\sin\mathrm{OPO'}}=\dfrac{p\sin\mathrm{B}}{\sin(\mathrm{A}+\mathrm{B})}$.

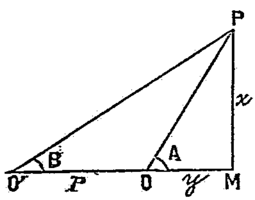
又於 $\overset{\triangle}{\mathrm{OMP}}$, $\mathrm{MP}=\mathrm{OP}\sin\mathrm{MOP}=\mathrm{OP}\sin\mathrm{A}$

$$\therefore\quad x=\frac{p\sin\mathrm{A}\sin\mathrm{B}}{\sin(\mathrm{A}+\mathrm{B})}.$$

〔第二.〕 有一直立物體。人不能至其基礎下。惟能在地上之二點觀測之。求其高及距離。

如圖。MP 爲物體。O,O′ 爲觀測點。設 OO′, MP, OM 之數值爲 p, x, y, 從 O,O′ 與 MP 同在一平面上與否。而用次之方法。

(i) O,O′ 與 MP 同在一平面上。則測 MOP 角, 及 MO′P 角。設之爲 A, B, 則



於 $\overset{\triangle}{\mathrm{OO'P}}$, $\mathrm{OP}=\dfrac{\mathrm{OO'}\sin\mathrm{OO'P}}{\sin\mathrm{OPO'}}$

$=\dfrac{p\sin\mathrm{B}}{\sin(\mathrm{A}-\mathrm{B})}$ 次於 $\overset{\triangle}{\mathrm{OMP}}$

$\mathrm{MP}=\mathrm{OP}\sin\mathrm{MOP}$

$=\mathrm{OP}\sin\mathrm{A}$

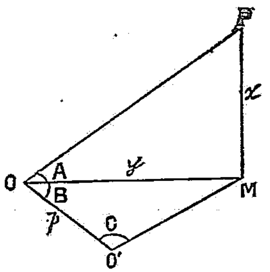
$\mathrm{OM}=\mathrm{OP}\cos\mathrm{MOP}$

$$=\mathrm{OP}\cos\mathrm{A}$$

$$\therefore \quad x=\frac{p\sin\mathrm{A}\sin\mathrm{B}}{\sin(\mathrm{A}-\mathrm{B})}$$

$$y=\frac{p\cos\mathrm{A}\sin\mathrm{B}}{\sin(\mathrm{A}-\mathrm{B})}$$

次 O,O′ 與 MP 不同在一平面上。則測 MOP 角 MOO′ 角，OO′M 角，設之爲 A, B, C, 則



於 $\overset{\triangle}{\mathrm{OMO'}}$

$$\mathrm{OM}=\frac{\mathrm{OO'}\sin\mathrm{OO'M}}{\sin\mathrm{OMO'}}$$

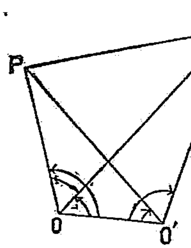
$$\therefore \quad y=\frac{p\sin\mathrm{C}}{\sin(\mathrm{B}+\mathrm{C})}.$$

次於 $\overset{\triangle}{\mathrm{OMP}}$

$$\mathrm{MP}=\mathrm{OM}\tan\mathrm{MOP}.$$

$$\therefore \quad x=\frac{p\tan\mathrm{A}\sin\mathrm{C}}{\sin(\mathrm{B}+\mathrm{C})}.$$

〔第三.〕有二物在遠處。皆爲人所不能到。欲求其距離。

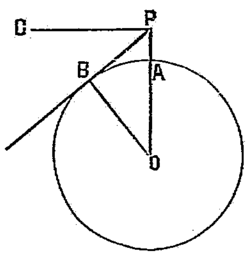


如圖。有人不能到之二點 P,P'，惟能於相宜之二點 O,O' 望之。則測 $O'\hat{O}P'$, $O'\hat{O}P$, $P'\hat{O}P$, $O'\hat{O}P$。$O\hat{O}'P'$ 及 OO'

於 $O\hat{O}'P$ 求 OP，於 $O\hat{O}'P$ 求 OP'，於 $P\hat{O}P'$ 求 PP'，

〔注意〕 P, P', O, O', 同在一平面上。則可少測一O角。

〔第四.〕 視水平之距離及俯向。



於左圖。O 爲地球之中心。P 爲若干高之觀測點。PB 爲切線。則 B 之軌跡圖周。謂之視水平。PB 及 $B\hat{P}C$ (PC 爲水平線) 謂之距離及俯向。今設地球之半經爲 r。視測點之高爲 h。視水平之距離及俯向爲 l 及 δ，則有次之關係

(i) $\cos\delta=\cos BOP=\dfrac{OB}{OP}=\dfrac{r}{r+h}.$

(ii) 變上式之形則 $h\cos\delta=r(1-\cos\delta)$

$$\therefore \quad h=\frac{r(1-\cos\delta)}{\cos\delta}.$$

(iii) $$r=\frac{h\cos\delta}{1-\cos\delta}.$$

(iv) $$l=r\tan\delta=\frac{h\sin\delta}{1-\cos\delta}=h\cot\frac{\delta}{2}.$$

設題二十.

(1) 於河之一岸。由相距 100 丈之二點 A, B。望對岸之一點 P。知 $P\hat{A}B=60°$, $P\hat{B}A=45°$ 問河寬幾何

答. 63·4 丈

(2) 有人望前面之塔項。測其仰角得 30°, 由是向塔再進 100 尺。測其項之仰角得 75°, 求塔高及至初觀測點之距離。 答. 68·3 尺, 1183 尺

(3) 有人望北及北 30° 西兩方向之二物體。A,B。由是向北西之方向進 10 里。則 A,B 之方向爲北東及東。問 A,B 之距離幾何 答. 8·16 里

(4) 有立於 h 高石臺上之紀念碑, 於距石臺 a 之一地望之。紀念碑上端之仰角, 爲下端仰角之二倍。問臺上碑高幾何。 答. $\left(\frac{a^2+h^2}{a^2-h^2}\right)h$

(5) 設地球之半經爲 r。則於 h 高之一點。其視水平之距離等於 $\sqrt{2rh}$, 試證之,

(6) 由高 h 尺之塔項。於其一面。望與塔脚同在一水平面上之二物體。得俯角 $45°-A$, 及 $45°+A$, 問二物之距離幾何　　答. $2h\tan 2A$ 尺

(7) 於塔南之一地。測其項之仰角得 $30°$, 次由此地向西行 a 距離。再測塔項之仰角。得 $18°$。求證塔高等於 $\dfrac{a}{\sqrt{(2+2\sqrt{5})}}$

(8) 由湖水面上高 h 尺之處。望停雲之一點。得仰角 a, 同時望其在湖水中之影。得俯角 β, 問雲之高幾何　　答. $\dfrac{h\sin(\beta+a)}{\sin(\beta-a)}$ 尺

(9) 有人望塔項, 及立於塔上高 c 尺之旗竿之上端。得仰角 B 及 A。問塔高幾何

答. $\dfrac{C\cos A\sin B}{\sin(A-B)}$ 尺

(10) 在塔之基礎望樹頂。得仰角 a, 次登塔 h 尺。再望其仰角。得仰角 β, 問樹高幾何

答. $\dfrac{h\cos\beta\sin a}{\sin(a-\beta)}$ 尺

(11) 有人測立於丘上之塔項。及塔根。得仰角 A 及 B,

次退後 l 距離。再測塔頂之仰角得 C, 問在丘上之塔高及丘高幾何。

答. $\frac{l\sin C\sin(A-B)}{\cos B\sin(A-C)}$, $\frac{l\cos A\tan B\sin C}{\sin(A-C)}$

(12) 在山麓。測在山頂之巖之上端。得仰角 47°, 由是向成 32° 傾斜角之直線坂路登 1000 尺。再測巖之仰角得 77°, 問巖較初之測點高幾何. 答. 1034 尺

(13) 由向北走之船。望見兩個燈臺。爲北東及北北東之方向。由是走 20 哩後。再望二燈臺。俱在東方向。問二燈臺之距離幾何。 塔. 11.3 哩

(14) 距 ALB 塔 48 尺之地。有一高 14 尺之臺 C。在此臺上望塔。知 $A\hat{C}L=L\hat{C}B$, 而 AL=30 尺。問塔高幾何。

(15) 由向西南走之二船。望碇泊之二船爲北北西及西北西。由是走 5 哩。再望二船。其方向爲北及北西。問二船之距離幾何。 答. 9.239 哩

(16) 有二點 P,Q, 於 P 南之一地 L 望之。知 $P\hat{L}Q=A$, 次由 L 向西走 a 距離。到 M。知 $P\hat{M}Q=A$, 更猶同方向進 b, 達 Q 之地 N, 證 P,Q 之距離爲

$$\sqrt{\{(a+b)^2+b^2\tan^2 A\}}$$

(17) 有立於ED塔上之旗竿DC,於與塔脚E同在一水平面上之一點P。知$E\hat{P}D=B$, $D\hat{P}C=A$, 次由P向E進c距離到Q。再望之。知$D\hat{Q}C=A$, 問塔高幾何。

答. $\dfrac{c\sin B\cos(A+B)}{\cos(A+2B)}$

(18) 有立於BC塔上之旗竿CD,於由B距C里之地。測得最大角爲A, 則$CD=2c\tan A$, $BC=c\tan\left(45^\circ-\dfrac{A}{2}\right)$試證之。

第八章

逆三角函數（或反函數）

44. 定義

正弦爲a之角。謂之a之逆正弦。以$\mathrm{Sin}^{-1}a$表之。(即sin=a)

逆餘弦，逆正切，逆餘切，逆正割，逆餘割準此。

統此六種。稱爲**逆三角函數**。或謂之逆圓函數。

一數之逆三角函數。有無數之值。其中最小數值。謂之主值。(有正負相同之數值。則以正爲主) 以$\sin^{-1}a$等顯之。

〔注意一〕 或以$\sin^{-1}a$等顯逆三角函數之一切值。以$\mathrm{Sin}^{-1}a$顯其主值。然逆三角函數之性質。多關於主值。故用小s字顯之。較爲便利。本書用$\sin^{-1}a$等顯其主值。

〔注意二〕 逆三角函數之主值。雖不能由視察求得。

然可由表求之。

45. $\mathrm{Sin}^{-1}a$ ノ值.

正弦相等之角。其迴線之位置。祇有兩種。因 $\sin(180^\circ-A)=\sin A$, $\sin(n\times 360^\circ+A)=\sin A$

故 $n\times 360^\circ+\sin^{-1}a$ 或 $n\times 360^\circ+(180^\circ-\sin^{-1}a)$ 悉有 a 正弦。其他諸角不然

$$\therefore\quad \mathrm{Sin}^{-1}a=n\times 360^\circ+\sin^{-1}a$$

$$\text{或}\quad n\times 360^\circ+(180^\circ-\sin^{-1}a)$$

$$=2n\times 180^\circ+\sin^{-1}a$$

$$\text{或}\quad (2n+1)180^\circ-\sin^{-1}a$$

$$=n\times 180^\circ+(-1)^n\sin^{-1}a \qquad \text{......................(44)}$$

但 n 顯零或任意之整數(以下準此)

例.

1. $\mathrm{Sin}^{-1}0=n\times 180^\circ+(-1)^n\sin^{-1}0=n\times 180^\circ+0^\circ=n\times 180^\circ$

2. $\mathrm{Sin}^{-1}1=n\times 180^\circ+(-1)^n\sin^{-1}1=n\times 180^\circ+(-1)^n 90^\circ.$

而 $n\times 180^\circ+(-1)^n 90^\circ$ 其 n 爲任意之偶數$(2m)$則爲 $2m\times 180^\circ+90^\circ$ 卽 $(4m+1)90^\circ$ n 爲任意之奇數$(2m+1)$ 則亦爲$(2m+1)180^\circ-90^\circ$ 卽 $(4m+1)90^\circ$ 故可記爲

$$\mathrm{Sin}^{-1}1=(4n+1)90^\circ$$

3. $\mathrm{Sin}^{-1}(-1)=n\times180^\circ+(-1)^n\sin^{-1}(-1)$

$$=n\times180^\circ+(-1)^n(-90^\circ).$$

而 $n\times180^\circ+(-1)^n(-90^\circ)$, 其 n 爲任意之偶數 $(2m)$ 則爲 $2m\times180^\circ-90^\circ$ 卽 $(4m-1)90^\circ$, n 爲任意之奇數 $(2m-1)$ 則亦爲 $(2m-1)180^\circ+90^\circ$ 卽 $(4m-1)90^\circ$.

故可記爲 $\mathrm{Sin}^{-1}(-1)=(4n-1)90^\circ$

系. $\mathrm{Cosec}^{-1}a=n\times180^\circ+(-1)^n\mathrm{cosec}^{-1}a.$

46. $\mathrm{Cos}^{-1}a$ 之值.

餘弦相等之角其迴線之位置祇有兩種。

而因 $\cos(A)=\cos A$, $\cos(n\times360^\circ+A)=\cos A$

故 $n\times360^\circ+\cos^{-1}a$ 或 $n\times360^\circ+(-\cos^{-1}a)$ 悉有 a 餘弦其他之角不然

$\therefore$ $\mathrm{Cos}^{-1}a=n\times360^\circ+\cos^{-1}a$

或 $n\times360^\circ+(-\cos^{-1}a)$

$=2n\times180^\circ+\cos^{-1}a$

或 $2n\times180^\circ-\cos^{-1}a$

$$=2n\times180^\circ\pm\cos^{-1}a \qquad (45)$$

例.

1. $\mathrm{Cos}^{-1}0=2n\times180^\circ\pm\cos^{-1}0=2n\times180^\circ\pm90^\circ=(4n\pm1)90^\circ$

而以 $4n+1$ 及 $4n-1$ 所表之諸數俱爲一切奇數

故可記爲 $\text{Cos}^{-1}0=(2n+1)90^\circ$

2. $\text{Cos}^{-1}1=2n\times180^\circ\pm\cos^{-1}1=2n\times180^\circ\pm0^\circ=2n\times180^\circ.$

3. $\text{Cos}^{-1}(-1)=2n\times180^\circ\pm\cos^{-1}(-1)=2n\times180^\circ\pm180^\circ$

$$=(2n\pm1)180^\circ.$$

而 $2n+1, 2n-1$ 俱顯一切奇數

$\therefore$ 可記爲 $\text{Cos}^{-1}(-1)=(2n+1)180^\circ$

系. $\text{Sec}^{-1}a=2n\times180^\circ\pm\sec^{-1}a.$

47. Tan^{-1}a 之值

正切相等之角。其廻線之位置。祇有兩種。

而因 $\tan(180^\circ+A)=\tan A$, $\tan(n\times360^\circ+A)=\tan A$

故 $n\times360^\circ+\tan^{-1}a$ 或 $n\times360^\circ+(180^\circ+\tan^{-1}a)$ 悉有 a 正切。其他之角不然

$$\therefore\ \text{Tan}^{-1}\text{a}=n\times360^\circ+\tan^{-1}a$$

$$\text{或}\quad n\times360^\circ+(180^\circ+\tan^{-1}a)$$

$$=2n\times180^\circ+\tan^{-1}a$$

$$\text{或}\quad (2n+1)180^\circ+\tan^{-1}a$$

$$=n\times180^\circ+\tan^{-1}a \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(46)$$

例.

1. $\mathrm{Tan}^{-1}0=n\times180^\circ+\tan^{-1}0=n\times180^\circ+0^\circ=n\times180^\circ.$

2. $\mathrm{Tan}^{-1}1=n\times180^\circ+\tan^{-1}1=n\times180^\circ+45^\circ=(4n+1)45^\circ.$

3. $\mathrm{Tan}^{-1}(-1)=n\times180^\circ+\tan^{-1}(-1)=n\times180^\circ+(-45^\circ)$

$$=(4n-1)45^\circ.$$

4. $\mathrm{Tan}^{-1}\infty=n\times180^\circ+\tan^{-1}(\infty)=n\times180^\circ+90^\circ$

$$=(2n+1)90^\circ.$$

系. $\mathrm{Cot}^{-1}a=n\times180^\circ+\cot^{-1}a.$

設題二十一.

證次之諸式

1. (i) $\sin^{-1}a=\cos^{-1}\sqrt{1-a^2}=\tan^{-1}\dfrac{a}{\sqrt{1-a^2}}=\cot^{-1}\dfrac{\sqrt{1-a^2}}{a}$

$$=\sec^{-1}\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}=\operatorname{cosec}^{-1}\frac{1}{a}.$$

(ii) $\cos^{-1}a=\sin^{-1}\sqrt{1-a^2}=\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{1-a^2}}{a}=\cot^{-1}\dfrac{a}{\sqrt{1-a^2}}$

$$=\sec^{-1}\frac{1}{a}=\operatorname{cosec}^{-1}\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}$$

(iii) $\tan^{-1}a=\sin^{-1}\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}=\cos^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}=\cot^{-1}\dfrac{1}{a}$

$$=\sec^{-1}\sqrt{1+a^2}=\operatorname{cosec}^{-1}\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}.$$

(iv) $\cot^{-1}a=\sin^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}=\cos^{-1}\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}=\tan^{-1}\dfrac{1}{a}$

$$=\sec^{-1}\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}=\operatorname{cosec}^{-1}\sqrt{1+a^2}.$$

(v) $$\sec^{-1}a=\sin^{-1}\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}=\cos^{-1}\frac{1}{a}=\tan^{-1}\sqrt{a^2-1}$$

$$=\cot^{-1}\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}=\operatorname{cosec}^{-1}\frac{a}{\sqrt{a^2-1}}.$$

(vi) $$\operatorname{cosec}^{-1}a=\sin^{-1}\frac{1}{a}=\cos^{-1}\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}=\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}$$

$$=\cot^{-1}\sqrt{a^2-1}=\sec^{-1}\frac{a}{\sqrt{a^2-1}}.$$

2. (i) $\sin^{-1}a\pm\sin^{-1}b=\sin^{-1}\{a\sqrt{1-b^2}\pm b\sqrt{1-a^2}\}$

(ii) $\cos^{-1}a\pm\cos^{-1}b=\cos^{-1}\{ab\mp\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}\}$

(iii) $\tan^{-1}a\pm\tan^{-1}b=\tan^{-1}\dfrac{a\pm b}{1\mp ab}.$

(iv) $\cot^{-1}a\pm\cot^{-1}b=\cot^{-1}\dfrac{ab\pm 1}{b\pm a}.$

3. (i) $2\sin^{-1}a=\sin^{-1}2a\sqrt{1-a^2}.$

(ii) $2\cos^{-1}a=\cos^{-1}(2a^2-1).$

(iii) $2\tan^{-1}a=\tan^{-1}\dfrac{2a}{1-a^2}.$

(iv) $2\cot^{-1}a=\cot^{-1}\dfrac{a^2-1}{2a}.$

上之諸式俱爲重要之式

4. $\sin^{-1}\dfrac{1}{2}+\sin^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2}=90^\circ$

5. $\cos^{-1}\frac{9}{\sqrt{82}}+\cos^{-1}\frac{5}{\sqrt{41}}=45^\circ$.

6. $\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}$,　　$2\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{7}$,

$4\tan^{-1}\frac{1}{5}-\tan^{-1}\frac{1}{239}$,　　$\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{8}$,

$4\tan^{-1}\frac{1}{5}-\tan^{-1}\frac{1}{70}+\tan^{-1}\frac{1}{99}$ 俱爲 45°

7. $\cot^{-1}\frac{3}{4}+\cot^{-1}\frac{1}{7}=135^\circ$.

8. $\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}+\cot^{-1}3=45^\circ$.

9. 求適於次之方程式之 x 值

(i) $\sin^{-1}x+\tan^{-1}\frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}}=60^\circ$.　　答. $\pm\frac{\sqrt{21}}{14}$.

(ii) $\tan^{-1}x+\frac{1}{2}\sec^{-1}5x=45^\circ$.　　答. $\pm\frac{1}{3}$.

(iii) $\cot^{-1}x+\cot^{-1}(n^2-x+1)=\cot^{-1}(n-1)$.

答. n, n^2-n+1.

第　九　章

三角方程式

48. 定義

顯未知角之三角函數與已知數之關係之方程式。謂之**三角方程式**。求其適於此式之角。謂之**解**。所得之角謂之**所求之解**。

49. 三角方程式之解法

三角方程式可依次之方法解之

〔第一〕 用普通方程式之解法。以求其未知角之三角函數之值。

〔第二〕 應所得之三角函數之值。求其逆三角函數之一切值。此值即爲所求之解

例.

(1.) 解 $\sin\theta=a$

解.

$$\theta=\mathrm{Sin}^{-1}a=n\times180^\circ+(-1)^n\sin^{-1}a.$$

或 依次法解之

$$\cos(\theta-90^\circ)=a$$

$$\theta-90^\circ=2n\times180^\circ\pm\cos^{-1}a$$

$$\theta=2n\times180^\circ+90^\circ\pm\cos^{-1}a$$

$$=(4n+1)90^\circ\pm\cos^{-1}a$$

(2.) 解 $\cos\theta=a$

解.

$$\theta=\cos^{-1}a=2n\times180^\circ\pm\cos^{-1}a$$

(3.) 解 $\tan\theta=a$

解.

$$\theta=\mathrm{Tan}^{-1}a=n\times180^\circ+\tan^{-1}a.$$

(4.) 解 $\sin^2\theta=a$

解.

$$\frac{1-\cos2\theta}{2}=a$$

$$\cos2\theta=1-2a$$

$$2\theta=2n\times180^\circ\pm\cos^{-1}(1-2a)$$

$$\therefore\quad\theta=n\times180^\circ\pm\frac{1}{2}\cos^{-1}(1-2a)$$

(5.) 解 $\cos^2\theta=a$

解.

$$\frac{1+\cos 2\theta}{2}=a$$

$$\cos 2\theta=2a-1$$

$$2\theta=2n\times 180^\circ\pm\cos^{-1}(2a-1)$$

$$\theta=n\times 180^\circ\pm\frac{1}{2}\cos^{-1}(2a-1).$$

(6.) 解 $\cos\theta+\sin\theta=a$

解.

$$\sqrt{2}\cos(\theta-45^\circ)=a$$

$$\cos(\theta-45^\circ)=\frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$\theta-45^\circ=2n\times 180^\circ\pm\cos^{-1}\frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$\theta=2n\times 180^\circ+45^\circ\pm\cos^{-1}\frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$=(8n+1)45^\circ\pm\cos^{-1}\frac{a}{\sqrt{2}}.$$

同樣解 $\cos\theta-\sin\theta=a$

$$x=(8n-1)45^\circ\pm\cos^{-1}\frac{a}{\sqrt{2}}$$

(7.) 解 $a\cos\theta+b\sin\theta=c$

解.

$$\cos\theta+\frac{b}{a}\sin\theta=\frac{c}{a}.$$

今設 $\tan^{-1}\frac{b}{a}=\alpha$ 則 $\tan\alpha=\frac{b}{a}$, $\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 而

$$\cos\theta+\tan\alpha\ \sin\theta=\frac{c}{a}$$

$$\frac{\cos(\theta-\alpha)}{\cos\alpha}=\frac{c}{a}$$

$$\cos(\theta-\alpha)=\frac{c}{a}\cos\alpha=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\theta-\alpha=2n\times180^\circ\pm\cos^{-1}\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\theta=2n\times180^\circ+\alpha\pm\cos^{-1}\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$=2n\times180^\circ+\tan^{-1}\frac{b}{a}\pm\cos^{-1}\frac{c}{\sqrt{a^1+b^2}}.$$

$$=2n\times180^\circ+\tan^{-1}\frac{b}{a}\pm\tan^{-1}\frac{\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{c}$$

$$=2n\times180^\circ+\tan^{-1}\frac{bc\pm a\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{ca\mp b\sqrt{a^2+b^2-c^2}}$$

同樣解 $a\cos\theta-b\sin\theta=c$ 則

$$\theta=2n\times180^\circ-\tan^{-1}\frac{bc\pm a\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{ca\mp b\sqrt{a^2+b^2-c^2}}$$

設題二十二.

解次之三角方程式

(1.) $\cot\theta-\tan\theta=\cot\alpha-\tan\alpha.$　答. $n\times 90^\circ+\alpha.$

(2.) $\cos 2\theta-\cos 120^\circ=\cos\theta-\cos 60^\circ.$

答 $(2n+1)90^\circ$, $(6n\pm 1)60^\circ.$

(3.) $\sec^2\theta+3\operatorname{cosec}^2\theta=8.$　答 $(2n+1)45^\circ$; $(3n\pm 1)60^\circ.$

(4.) $\tan\theta+\tan 3\theta=2\tan 2\theta.$　答. $n\times 180^\circ.$

(5.) $2\cot 2\theta-\tan 2\theta=3\cot 3\theta.$　答. $n\times 180^\circ.$

(6.) $\tan\theta+\tan(\theta-45^\circ)=2.$　答. $(3n\pm 1)60^\circ.$

(7.) $6\cot^2\theta=1+4\cos^2\theta$　答. $(3n\pm 1)60^\circ.$

(8.) $3(\sin^4\theta-\cos^4\theta)+4\cos^6\theta=\cos^3 2\theta$　答. $n\times 180^\circ.$

(9.) $\operatorname{cosec} 3\theta+\operatorname{cosec} 2\theta=\sin 2\theta\operatorname{cosec}\theta\operatorname{cosec} 3\theta.$

答. $(6n\pm 1)60^\circ.$

(10.) $\sin\theta-\cos\theta=4\cos^2\theta\sin\theta.$

答. $(4n-1)45^\circ$, $(4n-1)22^\circ\cdot 5.$

(11.) $\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta=\sqrt{2}.$　答. $(24n+4\pm 3)15^\circ.$

(12.) $\tan 2\theta=8\cos^2\theta-\cot\theta.$ 答. $(2n+1)90^\circ$, $\{6n+(-1)^n\}7^\circ\cdot 5.$

(13.) $\tan(45^\circ+\theta)=1+\sin 2\theta.$　答. $n\times 180^\circ$, $(4n-1)45^\circ.$

(14.) $\cot 15^\circ\cos\theta+\sin\theta=1.$　答. $(4n+1)90^\circ$, $(6n-1)60^\circ.$

(15.) $\sec 4\theta-\sec 2\theta=2.$　但 $\cos 2\theta\cos 4\theta\neq 0.$

答. $(2n+1)18^\circ.$

(16.) $\tan\theta+\sec2\theta=1.$　　答. $n\times180^\circ$, $(4n-1)22^\circ.5.$

(17.) $(1-\tan\theta)(1+\sin2\theta)=1+\tan\theta.$

答. $n\times180^\circ$, $(4n-1)45^\circ.$

(18.) $2\sin2\theta-4\sin(\theta+30^\circ)+\sqrt{3}=0.$

答. $(6n-1)30^\circ$, $(12n+1)30^\circ.$

(19.) $\cos\theta-\sin\theta=\sin\theta\cos\theta$　答. $(8n-1)45^\circ\pm\cos^{-1}\dfrac{\sqrt{2}-2}{2}$

(20.) $\sin5\theta+\sin3\theta+\sqrt{2}(\sin\theta+\cos\theta)\cos\theta=0.$

答. $(2n+1)90^\circ$, $(8n-1)9^\circ$, $(8n+5)15^\circ.$

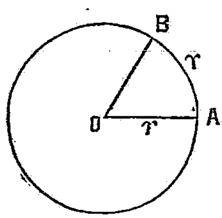
第十章。

眞弧度法.

50. 定義

於任意之圓。其等於半徑之弧上之中心角。恒有一定之大。此角謂之本位弧。

證.



於中心 O, 半徑 r 之圓。設 $AB=r$

則

$$\frac{A\hat{O}B}{2\text{直角}}=\frac{\widehat{AB}}{\text{半圓周}}=\frac{r}{\pi r}=\frac{1}{\pi}$$

$$\therefore\ \text{本位弧}=\frac{1}{\pi}(2\text{直角})$$

以本位弧爲單位。其計角所得 θ 值。則此角謂之 θ 本位弧或謂其其弧度爲 θ, 此計法謂之眞弧度法。

弧度法於理倫上之講究通用之。

〔注意一〕 於半徑 r 之圓。其 l 弧上之中心角之弧

度爲$\frac{l}{r}$,從而對於 θ 本位弧之中心角弧爲 $r\theta$.

〔注意二〕 二直角之弧度爲π。從而$\frac{\pi}{2}$及 2π 爲直角及四直角之弧度

〔注意三〕 1 本位弧凡 $53°13'44''.8$

51. 眞弧度與常度之關係.

設某角之眞弧度及度數爲 θ 及 D, 則據前條得次之關係。

$$\frac{\theta}{\pi}=\frac{D}{180}$$

由此式。任意角之眞弧度及度數。俱可轉換。

設題二十三.

(1) 求 $35'30''$ 之眞弧度。 答. 0·01033

(2) 求$\frac{\pi}{13}$之度數 答. $13°.846153$

(3) 問 n 邊正多角形之一內角之弧度幾何。

答. $\frac{(n-2)\pi}{n}$

(4) 於半徑 4 尺之圓。問其 10 尺弧上之中心角之常度幾何。 答 $143°14'20''8$

(5) 地球之直徑爲 3900 哩。此直徑於太陽之張角爲 $17''.8$ 太陽之光以 $8^m13^s.3$ 達地球。問光速度幾何(小文字 ^{m} 及 ^{s} 爲時候之分及秒) 答每秒凡 185600 哩

畢

附錄

第一。

數之對數表。

用此表時宜先看

第六章 38 款

數之對數表.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	043	086	128	170	212	253	294	334	374
11	414	453	492	531	569	607	645	682	719	755
12	792	828	864	899	934	969	004*	038*	072*	106*
13	1139	173	206	239	271	303	335	367	399	430
14	461	492	523	553	584	614	644	673	703	732
15	761	790	818	847	875	903	931	959	987	014*
16	2041	068	095	122	148	175	201	227	253	279
17	304	330	355	380	405	430	455	480	504	529
18	553	577	601	625	648	672	695	718	742	765
19	788	810	833	856	878	900	923	945	967	989
20	3010	032	054	075	096	118	139	160	181	201
21	222	243	263	284	304	324	345	365	385	404
22	424	444	464	483	502	522	541	560	579	598
23	617	636	655	674	692	711	729	747	766	784
24	802	820	838	856	874	892	909	927	945	962
25	979	997	014*	031*	048*	065*	082*	099*	116*	133*
26	4150	166	183	200	216	232	249	265	281	298
27	314	330	346	362	378	393	409	425	440	456
28	472	487	502	518	533	548	564	579	594	609
29	624	639	654	669	683	698	713	728	742	757
30	771	786	800	814	829	843	857	871	886	900
31	914	928	942	955	969	983	997	011*	024*	038*
32	5051	065	079	092	105	119	132	145	159	172
33	185	198	211	224	237	250	263	276	289	302
34	315	328	340	353	366	378	391	403	416	428
35	441	453	465	478	490	502	514	527	539	551
36	563	575	587	599	611	623	635	647	658	670
37	682	694	705	717	729	740	752	763	775	786
38	798	809	821	832	843	855	866	877	888	899
39	911	922	933	944	955	966	977	988	999	010*
40	6021	031	042	053	064	075	085	096	107	117
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

P. P.

	43	41
1	4·3	4·1
2	8·6	8·2
3	12·9	12·3
4	17·2	16·4
5	21·5	20·5
6	25·8	24·6
7	30·1	28·7
8	34·4	32·8
9	38·7	36·9

	35	33
1	3·5	3·3
2	7·0	6·6
3	10·5	9·9
4	14·0	13·2
5	17·5	16·5
6	21·0	19·8
7	24·5	23·1
8	28·0	26·4
9	31·5	29·7

	27	25
1	2·7	2·5
2	5·4	5·0
3	8·1	7·5
4	10·8	10·0
5	13·5	12·5
6	16·2	15·0
7	18·9	17·5
8	21·6	20·0
9	24·3	22·5

	19	17
1	1·9	1·7
2	3·8	3·4
3	5·7	5·1
4	7·6	6·8
5	9·5	8·5
6	11·4	10·2
7	13·3	11·9
8	15·2	13·6
9	17·1	15·3

	11	9
1	1·1	0·9
2	2·2	1·8
3	3·3	2·7
4	4·4	3·6
5	5·5	4·5
6	6·6	5·4
7	7·7	6·3
8	8·8	7·2
9	9·9	8·1

數之對數表

P. P.

	39	37
1	3.9	3.7
2	7.8	7.4
3	11.7	11.1
4	15.6	14.8
5	19.5	18.5
6	23.4	22.2
7	27.3	25.9
8	31.2	29.6
9	35.1	33.3

	31	29
1	3.1	2.9
2	6.2	5.8
3	9.3	8.7
4	12.4	11.6
5	15.5	14.5
6	18.6	17.4
7	21.7	20.3
8	24.8	23.2
9	27.9	26.1

	23	21
1	2.3	2.1
2	4.6	4.2
3	6.9	6.3
4	9.2	8.4
5	11.5	10.5
6	13.8	12.6
7	16.1	14.7
8	18.4	16.8
9	20.7	18.9

	15	13
1	1.5	1.3
2	3.0	2.6
3	4.5	3.9
4	6.0	5.2
5	7.5	6.5
6	9.0	7.8
7	10.5	9.1
8	12.0	10.4
9	13.5	11.7

	7	6
1	0.7	0.6
2	1.4	1.2
3	2.1	1.8
4	2.8	2.4
5	3.5	3.0
6	4.2	3.6
7	4.9	4.2
8	5.6	4.8
9	6.3	5.4

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
40	6021	031	042	053	064	075	085	096	107	117
41	128	138	149	160	170	180	191	201	212	222
42	232	243	253	263	274	284	294	304	314	325
43	335	345	355	365	375	385	395	405	415	425
44	435	444	454	464	474	484	493	503	513	522
45	532	542	551	561	571	580	590	599	609	618
46	628	637	646	656	665	675	684	693	702	712
47	721	730	739	749	758	767	776	785	794	803
48	812	821	830	839	848	857	866	875	884	893
49	902	911	920	928	937	946	955	964	972	981
50	990	998	007*	016*	024*	033*	042*	050*	059*	067*
51	7076	084	093	101	110	118	126	135	143	152
52	160	168	177	185	193	202	210	218	226	235
53	243	251	259	267	275	284	292	300	308	316
54	324	332	340	348	356	364	372	380	388	396
55	404	412	419	427	435	443	451	459	466	474
56	482	490	497	505	513	520	528	536	543	551
57	559	566	574	582	589	597	604	612	619	627
58	634	642	649	657	664	672	679	686	694	701
59	709	716	723	731	738	745	752	760	767	774
60	782	789	796	803	810	818	825	832	839	846
61	853	860	868	875	882	889	896	903	910	917
62	924	931	938	945	952	959	966	973	980	987
63	993	000*	007*	014*	021*	028*	035*	041*	048*	055*
64	8062	069	075	082	089	096	102	109	116	122
65	129	136	142	149	156	162	169	176	182	189
66	195	202	209	215	222	228	235	241	248	254
67	261	267	274	280	287	293	299	306	312	319
68	325	331	338	344	351	357	363	370	376	382
69	388	395	401	407	414	420	426	432	439	445
70	451	457	463	470	476	482	488	494	500	506
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

數之對數表

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
70	8451	457	463	470	476	482	488	494	500	506
71	513	519	525	531	537	543	549	555	561	567
72	573	579	585	591	597	603	609	615	621	627
73	633	639	645	651	657	663	669	675	681	686
74	692	698	704	710	716	722	727	733	739	745
75	751	756	762	768	774	779	785	791	797	802
76	808	814	820	825	831	837	842	848	854	859
77	865	871	876	882	887	893	899	904	910	915
78	921	927	932	938	943	949	954	960	965	971
79	976	982	987	993	998	004*	009*	015*	020*	025*
80	9031	036	042	047	053	058	063	069	074	079
81	085	090	096	101	106	112	117	122	128	133
82	138	143	149	154	159	165	170	175	180	186
83	191	196	201	206	212	217	222	227	232	238
84	243	248	253	258	263	269	274	279	284	289
85	294	299	304	309	315	320	325	330	335	340
86	345	350	355	360	365	370	375	380	385	390
87	395	400	405	410	415	420	425	430	435	440
88	445	450	455	460	465	469	474	479	484	489
89	494	499	504	509	513	518	523	528	533	538
90	542	547	552	557	562	566	571	576	581	586
91	590	595	600	605	609	614	619	624	628	633
92	638	643	647	652	657	661	666	671	675	680
93	685	689	694	699	703	708	713	717	722	727
94	731	736	741	745	750	754	759	763	768	773
95	777	782	786	791	795	800	805	809	814	818
96	823	827	832	836	841	845	850	854	859	863
97	868	872	877	881	886	890	894	899	903	908
98	912	917	921	926	930	934	939	943	948	952
99	956	961	965	969	974	978	983	987	991	996
100	0000	004	009	013	017	022	026	030	035	039
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

P. P.

6	
1	0·6
2	1·2
3	1·8
4	2·4
5	3·0
6	3·6
7	4·2
8	4·8
9	5·4

5	
1	0·5
2	1·0
3	1·5
4	2·0
5	2·5
6	3·0
7	3·5
8	4·0
9	4·5

4	
1	0·4
2	0·8
3	1·2
4	1·6
5	2·0
6	2·4
7	2·8
8	3·2
9	3·6

第　四。
用　法　之　例。

用　　法　　例

第一. 求數之對數法.

例.

求 $\log 238\cdot 4$

$\log 238\cdot 0 = 2\cdot 3766$ (於 2 頁)

$\cdot 4 \ldots\ldots 7\cdot 2$ (於 P.P. 18)

$\log 238\cdot 4 = 2\cdot 3773$

〔注意〕 因 18 爲 P.P. 欄中所無。故用 19,' 17 欄之對於 4 之比例部分之平均數。

第二. 知數之對數求其數之法.

例.

求 $\log^{-1}\bar{2}\cdot 7054$

$\log^{-1}\bar{2}\cdot 7050 = 0\cdot 0507$ (於 3 頁)

$3\cdot 6 \ldots\ldots\ldots\ldots 0\cdot 4$

(於 P.P. 9)

$0\cdot 36 \ldots\ldots\ldots\ldots 0\cdot 04$

$\log^{-1}\bar{2}\cdot 7054 = 0\cdot 05074$

第三. 求角之三角函數之對數法.

例.

1. 求 $\log\tan 28^\circ 43'\cdot 7$

$\log\tan 28°40' \quad = \bar{1}\cdot7378$ (於 11 頁)

$3' \ldots\ldots\ldots 9$

(於 P.P. 30)

$0'\cdot7 \ldots\ldots\ldots 2\cdot1$

$\log\tan 28°43'\cdot7 = \bar{1}\cdot7389$

2. 求 $\log\sec 76°\,18'\cdot7$

$\log\cos 76°\,10' \quad = \bar{1}\cdot3786$ (於 8 頁)

$8' \ldots\ldots -41\cdot6$

(於 P.P. 52)

$0'\cdot7 \ldots\ldots -3\cdot64$

$\log\cos 76°\,18'\cdot7 = \bar{1}\cdot3741$

$\log\sec 76°\,18'\cdot7 = 0\cdot6259$

3. 求 $\log\sin 2°\,34'\cdot6$

$2°\,34'\cdot6 = 154'\cdot6$

$\log\sin a' = \log a + \bar{4}\cdot4637 + \frac{1}{3}\log\cos a'$ (於 6 頁)

$\log\cos 154'\cdot6 = \bar{1}\cdot9996(3$

$\bar{1}\cdot9999$

$\bar{4}\cdot4637$

$\log 154\cdot6 = 2\cdot1892$ +

$\log\sin 154'\cdot6 = \bar{2}\cdot6528$

第四. 知角之三角函數之對數求其角之法.

例.

1. 求 $(\log\cot)^{-1}\bar{1}\cdot4995$

$$
\begin{array}{lll}
(\log\cot)^{-1}\bar{1}\cdot5031 & =72^\circ 20' & (於\ 9\ 頁) \\
\quad -35\cdot2 \ldots\ldots & 8' & (於\ \text{P.P.}\ 44) \\
\quad -0\cdot88 \ldots\ldots & 0'\cdot2 & \\
\hline
(\log\cot)^{-1}\bar{1}\cdot4955 & =72^\circ 28'\cdot2 &
\end{array}
$$

2. 求 $(\log\operatorname{cosec})^{-1}0\cdot2811$

$$(\log\operatorname{cosec})^{-1}0.2811=(\log\sin)^{-1}\bar{1}\cdot7189$$

$$
\begin{array}{ll}
(\log\sin)^{-1}\bar{1}7181=31^\circ 30' & (於\ 12\ 頁) \\
\qquad 8 \ldots\ldots 4' & (於\ \text{P.P.}\ 20) \\
\hline
\log\sin)^{-1}\bar{1}\cdot7189=31^\circ 34' &
\end{array}
$$

3. 求 $(\log\tan)^{-1}\bar{2}\cdot8882$

$$\log a=\log\tan a'-\bar{4}\cdot4637\div\frac{2}{3}\log\cos a' \quad (於\ 6\ 頁)$$

$$
\begin{array}{r}
\log\cos a'=\bar{1}\cdot9987 \\
2 \\
\hline
\bar{1}\cdot9974(3 \\
\hline
\left.\begin{array}{r}\bar{1}\cdot9991 \\ =\bar{4}\cdot4637=3\ 5363 \\ \log\tan a'=\bar{2}\cdot8882\end{array}\right\} + \\
\hline
\log a=2.4236 \\
a'=265'\cdot2=4^\circ 25'\cdot2
\end{array}
$$

第五. 求角之三角函數之法.

例.

求 $\sin 36^\circ 32'\cdot 6$

第一法.

$\log\sin 36^\circ 30' = \bar{1}\cdot 7744$ (於 13 頁)

$2' \ldots\ldots 3\cdot 4$
(於 P.P. 17)
$0'\cdot 6 \ldots\ldots 1\cdot 02$

$\log\sin 36^\circ 32'\cdot 6 = \bar{1}\cdot 7748$

$\sin 36^\circ 32'\cdot 6 = 0\cdot 5954$ (於 3 頁)

第二法.

$\sin 36^\circ 30' = 0\cdot 5948$ (於 23 頁)

$2'\cdot 6 \ldots\ldots 6$ $\left(24 \times \frac{2\cdot 6}{10} = 6\right)$

$\sin 36^\circ 32'\cdot 6 = 0\cdot 5954$

第六. 知角之三角函數。求其角之法

例.

求 $\cot^{-1} 0\cdot 7463$

第一法.

用　　法　　例

$\log 0{\cdot}7463 = \bar{1}{\cdot}8729$　　(於 4 頁)

$\therefore\ \cot^{-1} 0{\cdot}7463 = (\log\cot)^{-1}\bar{1}{\cdot}8729$

$(\log\cot)^{-1}\bar{1}{\cdot}8745 \quad = 53^\circ\, 10'$　(於 13 頁)

$\underline{\qquad\qquad -16{\cdot}2 \ldots\ldots\ldots 6'}$　(於 P.P. 27)

$(\log\cot)^{-1}\bar{1}{\cdot}8729 \quad = 53^\circ\, 16'$

第二法.

$\cot^{-1} 0{\cdot}7490 = 53^\circ\, 10'$　(於 23 頁)

$$\frac{\qquad -27 \ldots\ldots 6'}{\cot^{-1} 0.7463 = 53^\circ 16'} \quad \left(\frac{27}{45} \times 10 = 6\right)$$

發行所　上海四馬路惠福里　科學會編譯部總發行所

發行者　科學會編譯部

印刷所　秀英舍第一工場
東京市牛込區市ヶ谷加賀町一丁目十二番地

印刷者　藤本兼吉
東京市牛込區市ヶ谷加賀町一丁目十二番地

編輯者　連江陳文

光緒三十三年五月二十日發行
光緒三十三年五月十五日印刷

定價大洋六角

平面三角法奥付