MATHÉMATIQUE ET LOGIQUE.

Sur quelques points de la Logique de M. Brouwer,

par M. V. GLIVENKO (*).

Dans une note précédente (**), j'ai donné une démonstration d'un théorème remarquable de M. Brouwer, à savoir que, dans sa logique, a lieu la fausseté de la fausseté du principe du tiers exclu, et j'en ai déduit que si la fausseté d'une certaine proposition est une conséquence du principe du tiers exclu, dans la logique brouwerienne a lieu cette même fausseté.

Or, il n'est pas sans intérêt de mettre en évidence des relations beaucoup plus générales qui se présentent entre la logique classique et celle de M. Brouwer. On a :

1° *Si une certaine expression de la logique de propositions est démontrable dans la logique classique, c'est la fausseté de la fausseté de cette expression qui est démontrable dans la logique brouwerienne.*

2° *Si la fausseté d'une certaine expression de la logique de propositions est démontrable dans la logique classique, cette même fausseté est démontrable dans la logique brouwerienne.*

Quelques remarques préliminaires y sont indispensables.

Dans la note citée, j'ai adopté les neuf axiomes suivants

(*) Présenté par M. De Donder.

(**) *Sur la logique de M. Brouwer*, ces *Bulletins*, (5), (1928), pp. 225-228.

comme admissibles dans la logique brouwerienne de propositions :

I. $p \supset p,$

II. $p \supset q : \supset : q \supset r . \supset . p \supset r,$

III. $pq \supset p,$

IV. $pq \supset q,$

V. $r \supset p : \supset : r \supset q . \supset . r \supset pq,$

VI. $p \supset p \vee q,$

VII. $q \supset p \vee q,$

VIII. $p \supset r : \supset : q \supset r . \supset . p \vee q \supset r,$

IX. $p \supset q : \supset : p \supset \sim q . \supset . \sim p.$

Or, si l'on veut jeter les fondements complets d'un calcul logique, il faut y ajouter des axiomes nouveaux. Par exemple, il faut exprimer axiomatiquement le fait qu'il est possible de permuter l'ordre de deux prémisses :

A. $p . \supset . q \supset r : \supset : q . \supset . p \supset r,$

et que, lorsqu'une prémisse est employée deux fois de suite, il est permis aussi de l'employer une fois seulement :

B. $p . \supset . p \supset r : \supset : p \supset r.$

Les axiomes I — IX et A — B sont assez élémentaires pour qu'on les admette sans aucune hésitation. Mais les inventeurs mêmes du calcul logique ont remarqué que de tels axiomes élémentaires ne suffisent pas pour que le calcul soit vraiment fécond. Il faut encore préciser le sens formel de la conséquence logique en acceptant que toute proposition vraie découle de tout ce qu'on veut :

C. $p . \supset . q \supset p,$

et que tout ce qu'on veut forme une conséquence de toute proposition faussée :

D. $\sim q . \supset . q \supset p.$

Ces axiomes C — D sont-ils admissibles dans la logique brouwerienne? Je me bornerai ici à une remarque simple (*) En vertu des axiomes VI — VII, les expressions C — D ne sont que des conséquences immédiates du principe :

$$p \vee \sim q . \supset . q \supset p$$

dont l'admissibilité est bien évidente, car la conséquence formelle p d q n'a d'autre sens que « lorsqu'on accepte la vérité de p, on doit accepter celle de q ». On peut même dire que ce principe-ci est tout à fait opposé à celui du tiers exclu, car ce dernier s'exprimerait comme il suit :

$$q \supset p . \supset . p \vee \sim q .$$

Peut être, la définition même de l'addition logique (axiomes VI — VIII) mériterait quelques objections, mais cela sortirait des bornes de la critique de M. Brouwer.

En résumé, tous les axiomes I — IX et A — D sont admissibles dans la logique brouwerienne. Or, il est à remarquer que si l'on y ajoute le principe du tiers exclu, on obtient un système *complet* de la logique classique de propositions, de sorte que toutes les expressions de la logique classique de propositions que la logique classique reconnaît pour vraies peuvent être déduites des treize axiomes I — IX et A — D et de l'axiome $\sim p \vee p$, à l'aide des deux règles connues de formation de chaînons logiques (**).

Tout cela posé, commençons par démontrer la proposition 1°.

(*) C'est M. A. Heyting qui m'a fait voir pour la première fois l'opportunité des deux axiomes C — D dans la logique brouwerienne. Pour plus de détails, je renvoie le lecteur à son mémoire qui paraîtra prochainement dans les *Mathem. Annalen.*

(**) Pour les méthodes au moyen desquelles on peut établir qu'un système d'axiomes est *complet*, voir, par exemple, D. Hilbert et W. Ackermann, *Grundzüge der theoret. Logik*, p. 33.

La fausseté de la fausseté de chacune des expressions I — IX et A — D résulte immédiatement de la formule

$$p \supset \sim \sim p$$

démontrée dans ma note citée page 227 (*). La fausseté de la fausseté de l'expression $\sim p \vee p$ a été démontrée dans ma note citée, page 226.

Il nous reste donc à démontrer que si la fausseté de la fausseté de certaines expressions a lieu, la même propriété est possédée par les expressions que l'on déduit de celles-ci à l'aide des deux règles de formation de chaînons logiques. En ce qui concerne la règle de substitution, cela est évident. La règle de conclusion qui s'exprime par le schème

$$\frac{\begin{matrix}\mathcal{P}\\ \mathcal{P} \supset \mathcal{Q}\end{matrix}}{\mathcal{Q}}$$

exige un peu plus d'attention. Il y s'agit de vérifier le schème

$$\frac{\begin{matrix}\sim \sim \mathcal{P}\\ \sim \sim (\mathcal{P} \supset \mathcal{Q})\end{matrix}}{\sim \sim \mathcal{Q}}$$

A cet effet, démontrons les formules

1. $$p : \supset : p \supset q \,.\supset .\, q,$$

2. $$p \,.\supset .\, q \supset r : \supset : \sim \sim p \,.\supset .\, \sim \sim q \supset \sim \sim r.$$

On a

(I) $$p \supset q \,.\supset .\, p \supset q$$

(A) $$\frac{p \supset q \,.\supset .\, p \supset q \,.: \supset :.\, p : \supset : p \supset q \,.\supset .\, q}{p : \supset : p \supset q \,.\supset .\, q};$$

c'est la formule 1.

(*) Nous écrivons ici $\sim \sim p$ au lieu de $\sim (\sim p)$

Rappelons maintenant l'une des expressions de ma note citée (p. **226**) :

3. $$p \supset q . \supset . \sim q \supset \sim p.$$

Grâce à cette expression, on a

$$\begin{array}{ll}
(3) & p \supset q . \supset . \sim q \supset \sim p \\
(3) & \sim q \supset \sim p . \supset . \sim\sim p \supset \sim\sim q \\
\hline
 & 4.\ p \supset q . \supset . \sim\sim p \supset \sim\sim q \ (*)
\end{array}$$

Cela nous permet de former le chaînon logique suivant :

$$\begin{array}{ll}
\text{(Hypothèse).} & p . \supset . q \supset r \\
(4) & q \supset r . \supset . \sim\sim q \supset \sim\sim r \\
\hline
 & p . \supset . \sim\sim q \supset \sim\sim r \\
 & p . \supset . \sim\sim q \supset \sim\sim r \\
(A) & p . \supset . \sim\sim q \supset \sim\sim r : \supset : \sim\sim q . \supset . p \supset \sim\sim r \\
\hline
 & \sim\sim q . \supset . p \supset \sim\sim r \\
 & \sim\sim q . \supset . p \supset \sim\sim r \\
(4) & p \supset \sim\sim r . \supset . \sim\sim p \supset \sim\sim\sim\sim r \\
\hline
 & \sim\sim q . \supset . \sim\sim p \supset \sim\sim\sim\sim r \\
 & \sim\sim q . \supset . \sim\sim p \supset \sim\sim\sim\sim r \\
(A) & \sim\sim q . \supset . \sim\sim p \supset \sim\sim\sim\sim r : \supset : \sim\sim p . \supset . \sim\sim q \supset \sim\sim\sim\sim r \\
\hline
 & \sim\sim p . \supset . \sim\sim q \supset \sim\sim\sim\sim r.
\end{array}$$

De cette dernière expression on déduirait sans peine, en se servant de l'expression

$$\sim\sim\sim p \supset \sim p,$$

(*) Pour abréger l'écriture, nous nous servons parfois de la règle suivante :

$$\begin{array}{c}
\mathfrak{P} \supset \mathfrak{Q} \\
\mathfrak{Q} \supset \mathfrak{R} \\
\hline
\mathfrak{P} \supset \mathfrak{R}
\end{array}$$

qui résulte immédiatement de l'axiome II.

démontrée dans la note citée (p. 227), une autre formule que voici :

$$\sim\sim p . \supset . \sim\sim q \supset \sim\sim r,$$

ce qui prouve l'expression **2**.

Cela posé, on a

$$(1) \qquad p : \supset : p \supset q . \supset . q$$

$$(2) \qquad \frac{p : \supset : p \supset q . \supset . q . : \supset : . \sim\sim p . \supset . \sim\sim (p \supset q) \supset \sim\sim q}{\sim\sim p . \supset . \sim\sim (p \supset q) \supset \sim\sim q},$$

d'où il résulte immédiatement la règle à vérifier.

La proposition 1° est ainsi complètement démontrée.

Afin de prouver la proposition **2**°, supposons qu'on ait démontré, dans la logique classique, la fausseté d'une certaine expression $\mathcal{S}$, c'est-à-dire qu'on a démontré l'expression $\sim \mathcal{S}$. Alors, comme nous venons de le voir, c'est l'expression $\sim\sim\sim \mathcal{S}$ qui est démontrable dans la logique brouwerienne. On en déduit, d'après l'expression $\sim\sim\sim \mathcal{S} \supset \sim \mathcal{S}$ déjà mentionée, l'expression $\sim \mathcal{S}$ elle-même.

Cela démontre la proposition **2**°.