Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2022**

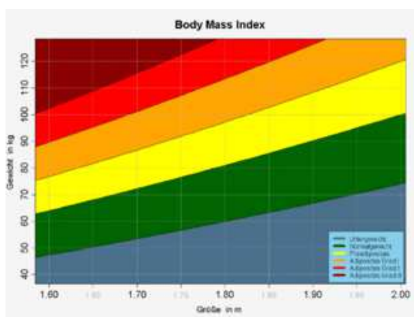
Analysis II

Arbeitsblatt 57

Übungsaufgaben

Aufgabe 57.1. Skizziere die Höhenlinien und das Gradientenfeld zur Funktion

$$h\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y) \longmapsto 2(x-3)^2+3(y-1)^2.$$



Aufgabe 57.2. Der Body-Mass-Index wird bekanntlich über die Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R},\, (m,l) \longmapsto \frac{m}{l^2},$$

berechnet, wobei m für die Masse und l für die Länge eines Menschen (oder eines Tieres, einer Pflanze, eines Gebäudes) steht (in den Einheiten Kilogramm und Meter).

(1) Für welche Punkte ist diese Abbildung regulär?
(2) Skizziere das zugehörige Gradientenfeld.
(3) Wenn man seinen Body-Mass-Index verringern möchte, und dabei dem Gradienten dieser Abbildung vertraut, sollte man dann besser abnehmen oder größer werden? Inwiefern hängt dies vom Punkt, inwiefern von den gewählten Einheiten ab?
(4) Wie lassen sich die Fasern dieser Abbildung als Graphen von Funktionen beschreiben?
(5) Berechne die Hesse-Matrix von φ und bestimme ihren Typ in jedem Punkt.

(6) Zu welchen Daten wird das Maximum bzw. das Minimum des Body-Mass-Index angenommen, wenn man ihn auf $[30, 300] \times [1, 2]$ einschränkt, und welche Werte besitzt er dann?
(7) Modelliere die Abbildung, die den Menschen aus einer Menge T ihren Body-Mass-Index zuordnet, mittels Messungen, Produktabbildung und Hintereinanderschaltung.

AUFGABE 57.3. Es sei

$$h\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und $P \in \mathbb{R}^n$ ein kritischer Punkt zu h. Wie sieht die Lösung des Anfangswertproblems

$$v(0) = P$$

zum zugehörigen Gradientenfeld Grad $h(P)$ aus?

AUFGABE 57.4.*

Bestimme die Lösung zum Anfangswertproblem

$$v' = \text{Grad } h(v)$$

mit $v(0) = w$ ($w \in \mathbb{R}^2$) zum Gradientenfeld zur Funktion

$$h\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y) \longmapsto x^2 + y^2.$$

AUFGABE 57.5. Bestimme die Lösung zum Anfangswertproblem

$$v' = \text{Grad } h(v)$$

mit $v(0) = w$ ($w \in \mathbb{R}^3$) zum Gradientenfeld zur Funktion

$$h\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x, y, z) \longmapsto x^2 - y^2 + 3yz.$$

AUFGABE 57.6. Vergleiche Lemma 47.11 und Lemma 57.5.

AUFGABE 57.7. Berechne die ersten drei Iterationen der Picard-Lindelöf-Iteration zum Anfangswertproblem

$$v' = \text{Grad } h(v) \text{ und } v(0) = (3,\ 2)$$

zu

$$h(x, y) = x^3 - xy^2 + y^2.$$

Aufgabe 57.8.*

Es sei

$$G\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

ein Gradientenfeld und sei

$$\varphi\colon J \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

($J \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall) eine Lösung der zugehörigen Differentialgleichung $v' = G(v)$. Es gelte $\varphi'(t) \neq 0$ für alle $t \in J$. Zeige, dass φ injektiv ist.

Aufgabe 57.9.*

Es sei

$$h\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetig differenzierbare Funktion und

$$G(P) = \operatorname{Grad} h(P)$$

das zugehörige Gradientenfeld. Es sei

$$\varphi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine stetig differenzierbare Lösung zur zugehörigen Differentialgleichung, die eine Faser F zu h zu zwei verschiedenen Zeitpunkten $t_0 < t_1$ trifft. Zeige, dass $\varphi|_{[t_0,t_1]}$ konstant ist.

Aufgabe 57.10.*

Es sei

$$h\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetig differenzierbare Funktion und

$$G(P) = \operatorname{Grad} h(P)$$

das zugehörige Gradientenfeld. Es sei

$$\varphi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine stetig differenzierbare Lösung zur zugehörigen Differentialgleichung und es sei $t \in \mathbb{R}$ ein Zeitpunkt mit

$$\varphi'(t) = 0.$$

a) Es sei h zweimal stetig differenzierbar. Zeige, dass φ konstant ist.

b) Zeige durch ein Beispiel, dass ohne die Voraussetzung aus a) φ nicht konstant sein muss.

Aufgabe 57.11.*

Es sei

$$F\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

ein stetiges Vektorfeld, wobei die i-te Komponente nur von der i-ten Variabeln abhängen möge. Es sei

$$\gamma\colon [a,b] \longrightarrow U$$

ein stetig differenzierbarer Weg. Zeige, dass das Wegintegral $\int_\gamma F$ nur von $\gamma(a)$ und $\gamma(b)$ abhängt.

Aufgabe 57.12.*

Fertige eine Illustration zu Beispiel 57.6 an.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 57.13. (4 Punkte)

Wir betrachten das zeitunabhängige Vektorfeld

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\, v \longmapsto 3v^{2/3} = 3\sqrt[3]{v^2}.$$

Zeige direkt, dass dieses Vektorfeld stetig ist, aber nicht lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt.

Aufgabe 57.14. (3 Punkte)

Es sei

$$h\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Linearform. Bestimme das zugehörige Gradientenfeld und die Lösungen der zugehörigen Differentialgleichung.

Aufgabe 57.15. (4 Punkte)

Bestimme die Lösungen der Differentialgleichung, die zum Gradientenfeld der Funktion

$$h\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\, (x,y) \longmapsto x + y^2,$$

gehört.

Aufgabe 57.16. (3 Punkte)

Welche linearen Vektorfelder

$$G\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n,\, v \longmapsto Mv,$$

sind Gradientenfelder? Wie sehen die Potentialfunktionen dazu aus?

Aufgabe 57.17. (5 Punkte)

Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Zeige, dass U genau dann zusammenhängend ist, wenn man je zwei Punkte $P, Q \in U$ durch einen stetig differenzierbaren Weg verbinden kann.

Tipp: Man denke an den Beweis von Satz 35.13.

Abbildungsverzeichnis