Prof. Dr. H. Brenner — Osnabrück WS 2019/2020

Bündel, Garben und Kohomologie

Arbeitsblatt 13

Aufgabe 13.1. Zeige durch ein Beispiel, dass die Kegelabbildung

$$\mathbb{A}_K^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}_K^n$$

nicht abgeschlossen sein muss.

Aufgabe 13.2. Es sei R ein $\mathbb{Z}$-graduierter Ring und $\mathfrak{p}$ ein Primideal in R. Zeige, dass die Homogenisierung $\mathfrak{p}^h$ ebenfalls ein Primideal ist.

Aufgabe 13.3. Es sei K ein Körper und $R = K[X_0, X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{a}$ eine standard-graduierte K-Algebra. Zeige, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \operatorname{Spek}(R) \supseteq D(R_+) & \longrightarrow & V(\mathfrak{a}) \cap D(X_0, X_1, \ldots, X_n) & \longrightarrow & \mathbb{A}_K^{n+1} \supseteq D(X_0, X_1, \ldots, X_n) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \operatorname{Proj}(R) & \longrightarrow & V_+(\mathfrak{a}) & \longrightarrow & \mathbb{P}_K^n \end{array}$$

aus Schemamorphismen kommutiert, wobei die vertikalen Abbildungen links und rechts Kegelabbildungen sind und die horizontalen Abbildungen Isomorphien und die natürlichen abgeschlossenen Einbettungen sind.

Aufgabe 13.4. Diskutiere den Zusammenhang zwischen der Kegelabbildung

$$\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2 \supset \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1$$

und der Hopf-Faserung $S^3 \to S^2$.

Aufgabe 13.5. Es sei $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul auf einem beringten Raum $(X, \mathcal{O}_X)$. Zeige, dass zu jedem Punkt $P \in X$ der Halm $\mathcal{F}_P$ ein $\mathcal{O}_{X,P}$-Modul ist.

Aufgabe 13.6. Es seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ $\mathcal{O}_X$-Moduln auf einem beringten Raum $(X, \mathcal{O}_X)$. Zeige, dass dann auch die direkte Summe $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul ist.

Aufgabe 13.7. Es sei $\mathcal{F}$ ein $\mathcal{O}_X$-Modul auf einem beringten Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ und $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ ein $\mathcal{O}_X$-Untermodul. Zeige, dass die Quotientengarbe $\mathcal{F}/\mathcal{G}$ in natürlicher Weise ein $\mathcal{O}_X$-Modul ist.

Aufgabe 13.8. Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein beringter Raum. Zeige, dass

$$s \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$$

genau dann eine Einheit ist, wenn der zugehörige $\mathcal{O}_X$-Modulhomomorphismus $\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X$ ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 13.9. Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein beringter Raum. Es seien $s_1, \ldots, s_n \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ globale Schnitte, die in $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ das Einheitsideal erzeugen. Zeige, dass der zugehörige $\mathcal{O}_X$-Modulhomomorphismus $\mathcal{O}_X^n \to \mathcal{O}_X$, $e_i \mapsto s_i$, surjektiv ist.

In der vorstehenden Aussage gilt nicht die Umkehrung, siehe Aufgabe 14.10.

Aufgabe 13.10. Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein beringter Raum. Es seien $s_1, \ldots, s_n \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X)^n$ globale Schnitte mit $s_i = (s_{i1}, \ldots, s_{in})$. Zeige, dass die Determinante der Matrix $(s_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ genau dann eine Einheit in $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ ist, wenn der zugehörige $\mathcal{O}_X$-Modulhomomorphismus $\mathcal{O}_X^n \to \mathcal{O}_X^n$, $e_i \mapsto s_i$, ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 13.11. Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein beringter Raum und seien $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ Modulgarben auf X. Es sei

$$\varphi \colon \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$$

ein Garbenmorphismus und es sei $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine offene Überdeckung. Zeige die folgenden Aussagen.

(1) Wenn die Abbildungen
$$\varphi_{U_i} \colon \Gamma(U_i, \mathcal{M}) \longrightarrow \Gamma(U_i, \mathcal{N})$$
für alle i mit der Addition verträglich sind, so gilt dies auch für
$$\varphi_X \colon \Gamma(X, \mathcal{M}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{N}).$$

(2) Wenn die
$$\varphi_{U_i} \colon \Gamma(U_i, \mathcal{M}) \longrightarrow \Gamma(U_i, \mathcal{N})$$
für alle i mit den $\Gamma(U_i, \mathcal{O}_X)$-Skalarmultiplikationen verträglich sind, so gilt dies auch für
$$\varphi_X \colon \Gamma(X, \mathcal{M}) \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{N}).$$

(3) Wenn die
$$\varphi|_{U_i} \colon \mathcal{M}|_{U_i} \longrightarrow \mathcal{N}|_{U_i}$$
$\mathcal{O}_X|_{U_i}$-Modulhomomorphismen für alle i sind, so gilt dies auch für φ.

Aufgabe 13.12. Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein beringter Raum und sei $\mathcal{F}$ eine Modulgarbe auf X.

Zeige, dass es einen natürlichen $\mathcal{O}_X$-Modulhomomorphismus

$$\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}^{**}$$

gibt.

Aufgabe 13.13. Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein beringter Raum und seien $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ Modulgarben auf X. Zeige, dass der Halm der Prägarbe

$$U \longmapsto \Gamma(U, \mathcal{F}) \otimes_{\Gamma(U, \mathcal{O}_X)} \Gamma(U, \mathcal{G})$$

in einem Punkt $P \in X$ gleich

$$\begin{aligned} & \operatorname{colim}_{P \in U} \Gamma(U, \mathcal{F}) \otimes_{\Gamma(U, \mathcal{O}_X)} \Gamma(U, \mathcal{G}) \\ = \; & (\operatorname{colim}_{P \in U} \Gamma(U, \mathcal{F})) \otimes_{(\operatorname{colim}_{P \in U} \Gamma(U, \mathcal{O}_X))} (\operatorname{colim}_{P \in U} \Gamma(U, \mathcal{G})) \\ = \; & \mathcal{F}_P \otimes_{\mathcal{O}_{X,P}} \mathcal{G}_P \end{aligned}$$

ist.

Aufgabe 13.14. Es sei $\mathcal{F}$ eine Modulgarbe auf einem beringten Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ und sei $\mathcal{F}^*$ die duale Garbe zu $\mathcal{F}$. Zeige, dass es einen natürlichen $\mathcal{O}_X$-Homomorphismus

$$\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}^* \longrightarrow \mathcal{O}_X$$

gibt.

Aufgabe 13.15. Es sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein lokal beringter Raum und $\mathcal{L}$ eine invertierbare Garbe auf X. Es sei $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge derart, dass die Einschränkung $\mathcal{L}|_U$ trivial ist, und es sei $\varphi\colon \mathcal{L}|_U \to \mathcal{O}_X|_U$ ein Isomorphismus. Es sei $s \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ ein globaler Schnitt mit dem Invertierbarkeitsort X_s. Zeige, dass $X_s \cap U = U_{\varphi(s)}$, wobei rechts der Invertierbarkeitsort zu $\Gamma(U, \mathcal{O}_X|_U)$ steht.

Aufgabe 13.16. Es sei $\mathcal{L}$ eine invertierbare Garbe auf einem beringten Raum $(X, \mathcal{O}_X)$. Zeige, dass die duale Garbe $\mathcal{L}^*$ ebenfalls invertierbar ist.

Aufgabe 13.17. Es sei $\mathcal{L}$ und $\mathcal{M}$ invertierbare Garben auf einem beringten Raum $(X, \mathcal{O}_X)$. Zeige, dass die Tensorierung $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}$ ebenfalls invertierbar ist.

Aufgabe 13.18. Es sei $\mathcal{L}$ und $\mathcal{M}$ invertierbare Garben auf einem lokal beringten Raum $(X, \mathcal{O}_X)$. Es seien $s \in \Gamma(X, \mathcal{L})$, $t \in \Gamma(X, \mathcal{M})$ und $st \in \Gamma(X, \mathcal{L} \otimes \mathcal{M})$. Zeige, dass die Invertierbarkeitsorte

$$X_{st} = X_s \cap X_t$$

erfüllen.

Aufgabe 13.19. Zeige, dass eine invertierbare Garbe $\mathcal{L}$ auf einem beringten Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ in natürlicher Weise isomorph zu ihrem Bidual $\mathcal{L}^{**}$ ist.

Aufgabe 13.20. Es sei $\mathcal{L}$ eine invertierbare Garbe auf einem beringten Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ und sei $\mathcal{L}^*$ die duale Garbe zu $\mathcal{L}$. Zeige, dass es einen natürlichen $\mathcal{O}_X$-Isomorphismus

$$\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L}^* \longrightarrow \mathcal{O}_X$$

gibt.

Aufgabe 13.21. Wir betrachten den projektiven Raum über einem Körper K und die invertierbare Garbe $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_K}(m)$ zu $m > 0$. Es sei

$$f \in \Gamma\big(\mathbb{P}^n_K, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_K}(m)\big) = K[X_0, X_1, \ldots, X_n]_m.$$

Zeige für die Invertierbarkeitsmenge die Gleichheit $(\mathbb{P}^n_K)_f = D_+(f)$.

Aufgabe 13.22. Wir betrachten den projektiven Raum über einem Körper K und die invertierbaren Garben $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_K}(\ell)$. Zeige

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_K}(\ell) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_K}(m) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_K}(\ell + m).$$

Aufgabe 13.23. Es sei $F \in K[X_0, X_1, \ldots, X_n]$ ein homogenes Polynom $\neq 0$ vom Grad d. Zeige, dass dies eine kurze exakte Garbensequenz

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_K}(-d) \xrightarrow{\cdot F} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_K} \longrightarrow \mathcal{O}_{V_+(F)} \longrightarrow 0$$

auf dem projektiven Raum festlegt (hierbei wird die Strukturgarbe auf der projektiven Hyperfläche $V_+(F)$ als eine Garbe auf dem projektiven Raum aufgefasst).

Abbildungsverzeichnis