Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2019/2020**

Bündel, Garben und Kohomologie

Arbeitsblatt 5

Aufgabe 5.1. Es sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{F}$ eine Prägarbe auf X. Zeige, dass durch die Zuordnung

$$U \mapsto \prod_{P \in U} \mathcal{F}_P$$

(die Produktmenge aus allen Halmen zu U) mit den natürlichen Projektionen eine Prägarbe gegeben ist, und dass es einen natürlichen Prägarbenhomomorphismus von $\mathcal{F}$ in diese Prägarbe gibt.

Aufgabe 5.2. Es sei $\mathcal{F}$ eine Prägarbe auf einem topologischen Raum X und $\widetilde{\mathcal{F}}$ die Vergarbung zu $\mathcal{F}$. Zeige, dass es zu jedem Prägarben-Morphismus

$$\psi\colon \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$$

in eine Garbe $\mathcal{G}$ eine eindeutige Faktorisierung

$$\tilde{\psi}\colon \widetilde{\mathcal{F}} \longrightarrow \mathcal{G}$$

gibt.

Die Vergarbung einer konstanten Prägarbe nennt man *lokal konstante Garbe* und manchmal auch einfach *konstante Garbe*.

Aufgabe 5.3. Es sei $\mathcal{F}$ eine konstante Prägarbe auf einem topologischen Raum X zur Menge M. Zeige, dass der Halm der Vergarbung von $\mathcal{F}$ in jedem Punkt $P \in X$ gleich M ist.

Aufgabe 5.4. Es sei G eine diskrete topologische Gruppe und X ein topologischer Raum. Es sei $\mathcal{G}$ die konstante Prägarbe auf X zu G. Zeige, dass die Vergarbung von $\mathcal{G}$ gleich $C^0(-, G)$ ist.

Aufgabe 5.5.*

Es sei X ein topologischer Raum, $\mathcal{G}$ eine Garbe auf X und $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ eine Untergarbe. Es sei $t \in \Gamma(X, \mathcal{G})$ mit $t_P \in \mathcal{F}_P$ für alle $P \in X$. Zeige $t \in \Gamma(X, \mathcal{F})$.

AUFGABE 5.6. Es sei X ein topologischer Raum und es sei $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Homomorphismus von Garben von kommutativen Gruppen. Zeige, dass durch $(\operatorname{kern} \varphi)(U) := \operatorname{kern} \varphi_U$ eine Garbe von Gruppen auf X definiert ist.

AUFGABE 5.7. Es sei X ein topologischer Raum und es sei $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Homomorphismus von Garben von kommutativen Gruppen. Zeige, dass φ genau dann injektiv ist, wenn $\operatorname{kern} \varphi$ die Nullgarbe ist.

AUFGABE 5.8. Es sei X ein topologischer Raum und es sei $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Homomorphismus von Garben von kommutativen Gruppen. Zeige, dass φ genau dann surjektiv ist, wenn $\operatorname{bild} \varphi = \mathcal{G}$ ist.

AUFGABE 5.9. Es sei X ein topologischer Raum und es sei $\varphi\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Homomorphismus von Garben von kommutativen Gruppen. Zeige, dass für jeden Punkt $P \in X$ die Beziehung $(\operatorname{bild} \varphi)_P = \operatorname{bild} (\varphi_P)$ ist.

AUFGABE 5.10. Es sei eine Garbe $\mathcal{G}$ von kommutativen Gruppen und eine Untergarbe von Gruppen $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ gegeben. Zeige, dass es einen kanonischen surjektiven Garbenhomomorphismus von kommutativen Gruppen

$$\mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}/\mathcal{F}$$

gibt.

AUFGABE 5.11. Es sei eine Garbe $\mathcal{G}$ von kommutativen Gruppen und eine Untergarbe von Gruppen $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$ gegeben, und es sei $\mathcal{G}/\mathcal{F}$ die Quotientengarbe. Zeige

$$(\mathcal{G}/\mathcal{F})_P = \mathcal{G}_P/\mathcal{F}_P$$

für jeden Punkt $P \in X$.

Abbildungsverzeichnis