Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2017/2018**

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Arbeitsblatt 18

Gar nicht mehr lange! Wir wünschen schon jetzt frohe Weihnachten!

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 18.1. Zeige, dass man jede endliche Permutation durch ein überschneidungsfreies Pfeildiagramm darstellen kann.

Übungsaufgaben

Aufgabe 18.2. Berechne für die Permutation

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$\sigma(x)$	2	5	7	3	1	4	8	6

die Anzahl der Fehlstände und das Vorzeichen.

Aufgabe 18.3. Berechne für die Permutation σ mit

P	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\sigma(P)$	7	10	3	9	5	2	4	1	8	6

die Potenzen σ^2 und σ^3 und gebe die Zyklendarstellung für diese drei Permutationen an.

Aufgabe 18.4.*

Betrachte die Permutation $\tau \in S_7$, die durch die Wertetabelle

x	1	2	3	4	5	6	7
$\tau(x)$	1	3	5	7	6	4	2

gegeben ist.

(1) Man gebe die Zyklendarstellung von τ an und bestimme den Wirkungsbereich.
(2) Berechne τ^3 und die Ordnung von τ^3.
(3) Bestimme die Fehlstände von τ und das Vorzeichen (Signum) von τ.
(4) Schreibe τ als Produkt von Transpositionen und bestimme erneut das Vorzeichen von τ.

Aufgabe 18.5.*

Betrachte die beiden Permutationen

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$\sigma(x)$	2	5	3	7	1	4	8	6

und

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$\tau(x)$	4	5	2	8	6	7	1	3

Berechne $\sigma\tau$ und $\tau\sigma$. Bestimme die Anzahl der Fehlstände und das Vorzeichen von τ. Man gebe die Zyklendarstellung von σ und von σ^3 an. Was ist die Ordnung von σ?

Aufgabe 18.6.*

Wir betrachten die durch die Wertetabelle

x	1	2	3	4	5	6	7	8
$F(x)$	3	5	1	7	8	2	6	4

gegebene Abbildung F von $M = \{1, 2, \ldots, 8\}$ in sich selbst.

(1) Erstelle eine Wertetabelle für $F^2 = F \circ F$.
(2) Erstelle eine Wertetabelle für $F^3 = F \circ F \circ F$.
(3) Begründe, dass sämtliche iterierten Hintereinanderschaltungen F^n bijektiv sind.
(4) Bestimme für jedes $x \in M$ das minimale $n \in \mathbb{N}_+$ mit der Eigenschaft, dass
$$F^n(x) = x$$
ist.
(5) Bestimme das minimale $n \in \mathbb{N}_+$ mit der Eigenschaft, dass
$$F^n(x) = x$$
für alle $x \in M$ ist.

Aufgabe 18.7. Zeige, dass durch die Zuordnung

$$S_n \times \{1, \ldots, n+1\} \longrightarrow S_{n+1},\ (\varphi, x) \longmapsto \tilde{\varphi},$$

mit

$$\tilde{\varphi}(k) = \begin{cases} \varphi(k) \text{ für } k \leq n \text{ und } \varphi(k) < x\,, \\ \varphi(k) + 1 \text{ für } k \leq n \text{ und } \varphi(k) \geq x\,, \\ x \text{ für } k = n+1\,, \end{cases}$$

eine wohldefinierte bijektive Abbildung gegeben ist.

Aufgabe 18.8. Gabi Hochster, Heinz Ngolo, Lucy Sonnenschein und Mustafa Müller wollen untereinander wichteln. Jede Person soll also genau von einer Person ein Geschenk bekommen, aber natürlich nicht von sich selbst. Wie viele Wichtelmöglichkeiten gibt es?

Aufgabe 18.9. Bestimme die Fixpunkte der Abbildung

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto x^2.$$

Aufgabe 18.10. Es sei M eine Menge und es sei

$$F\colon M \longrightarrow M$$

eine Abbildung. Zeige, dass F genau dann einen Fixpunkt besitzt, wenn der Durchschnitt des Graphen von F mit der Diagonalen $\triangle = \{(x,x) \in M \times M | x \in M\}$ nicht leer ist.

Aufgabe 18.11. Berechne die Determinanten aller 3×3-Matrizen, bei denen in jeder Spalte und in jeder Zeile genau einmal 1 und zweimal 0 steht.

Aufgabe 18.12. Sei $M = \{1, \ldots, n\}$ und sei π eine Permutation auf M. Die zugehörige *Permutationsmatrix* M_π ist dadurch gegeben, dass

$$a_{\pi(i),i} = 1$$

ist und alle anderen Einträge 0 sind. Zeige, dass

$$\det M_\pi = \operatorname{sgn}(\pi)$$

ist.

Aufgabe 18.13.*

a) Man gebe ein Beispiel für eine 4×4-Permutationsmatrix, bei der in jeder Diagonalen (Haupt-, Neben- und Gegendiagonalen) höchstens eine 1 steht.

b) Zeige, dass es keine Lösung zu a) gibt, bei der $a_{11} = 1$ ist.

Aufgabe 18.14. Es sei K ein Körper und sei

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} | \, a,b,c,d \in K, \, ad - bc \neq 0 \right\}$$

die Menge aller invertierbaren 2×2-Matrizen.

a) Zeige (ohne Bezug zur Determinante), dass M mit der Matrizenmultiplikation eine Gruppe bildet.

b) Zeige (ohne Bezug zur Determinante), dass die Abbildung

$$M \longrightarrow K^\times, \, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto ad - bc,$$

ein Gruppenhomomorphismus ist.

Aufgabe 18.15. Bestimme mittels der Leibniz-Formel die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 9 & 8 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Sei $(G, e, \circ)$ eine Gruppe. Eine Teilmenge $H \subseteq G$ heißt *Untergruppe* von G wenn folgendes gilt.

(1) $e \in H$.
(2) Mit $g, h \in H$ ist auch $g \circ h \in H$.
(3) Mit $g \in H$ ist auch $g^{-1} \in H$.

Die Weihnachtsaufgabe für die ganze Familie

Aufgabe 18.16. Welches Bildungsgesetz liegt der Folge

1, 11, 21, 1211, 111221, 312211, ...

zugrunde?

(Es wird behauptet, dass diese Aufgabe für Grundschulkinder sehr einfach und für Mathematiker sehr schwierig ist.)

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 18.17. (2 Punkte)

Sei M eine Menge und sei $M = \biguplus_{i \in I} M_i$ eine Partition von M, d.h. jedes M_i ist eine Teilmenge von M und M ist die disjunkte Vereinigung der M_i. Zeige, dass die Produktgruppe

$$\prod_{i \in I} \operatorname{Perm}(M_i)$$

eine Untergruppe von $\operatorname{Perm}(M)$ ist.

Aufgabe 18.18. (2 Punkte)

Zeige, dass jede gerade Permutation $\sigma \in S_n$, $n \geq 3$, ein Produkt aus Dreierzykeln ist.

Aufgabe 18.19. (5 Punkte)

Sei σ ein Zykel der Ordnung n. Zeige, dass man σ als Produkt von $n-1$ Transpositionen schreiben kann, aber nicht mit einer kleineren Anzahl von Transpositionen.

Aufgabe 18.20. (4 Punkte)

Sei $m \geq n$. Wie viele injektive Abbildungen gibt es von $\{1, \ldots, n\}$ nach $\{1, \ldots, m\}$ und wie viele surjektive Abbildungen gibt es von $\{1, \ldots, m\}$ nach $\{1, \ldots, n\}$?

Aufgabe 18.21. (3 Punkte)

Bestimme mittels der Leibniz-Formel die Determinante der Matrix

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 6 & 8 & 2 \\ 7 & 5 & 4 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 18.22. (4 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$f \colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N},$$

die dem Bildungsgesetz aus Aufgabe 18.16 entspricht.

(1) Ist f wachsend?
(2) Ist f surjektiv?
(3) Ist f injektiv?
(4) Besitzt f einen Fixpunkt?

Abbildungsverzeichnis