Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2019/2020**

Mathematik für Anwender I

Vorlesung 27

Eigentheorie

Unter einer Achsenspiegelung in der Ebene verhalten sich gewisse Vektoren besonders einfach. Die Vektoren auf der Spiegelungsachse werden auf sich selbst abgebildet, und die dazu senkrechten Vektoren werden auf ihr Negatives abgebildet. Für all diese Vektoren liegt das Bild unter der linearen Abbildung in dem von diesem Vektor aufgespannten eindimensionalen Unterraum. In der Theorie der Eigenwerte und Eigenvektoren untersucht man, ob es zu einer linearen Abbildung Geraden (also eindimensionale Unterräume) gibt, die unter der Abbildung auf sich selbst abgebildet werden. Eine Zielsetzung ist dabei, zu einer gegebenen linearen Abbildung eine Basis zu finden, bezüglich der die beschreibende Matrix möglichst einfach ist. Eine wichtige Anwendung ist dabei, Lösungen für ein lineares Differentialgleichungssystem zu finden.

Eine *Achsenspiegelung* besitzt zwei Eigengeraden, die Spiegelungsachse zum Eigenwert 1 und die dazu senkrechte Gerade zum Eigenwert -1.

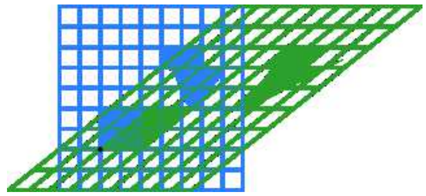
Definition 27.1. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann heißt ein Element $v \in V$, $v \neq 0$, ein *Eigenvektor* von φ (zum Eigenwert λ), wenn

$$\varphi(v) = \lambda v$$

mit einem $\lambda \in K$ gilt.



Eine *Scherung* hat eine Eigengerade zum Eigenwert 1 und keine weitere Eigenwerte.

Definition 27.2. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann heißt ein Element $\lambda \in K$ ein *Eigenwert* zu φ, wenn es einen von 0 verschiedenen Vektor $v \in V$ mit

$$\varphi(v) = \lambda v$$

gibt.

Definition 27.3. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Zu $\lambda \in K$ nennt man

$$\operatorname{Eig}_\lambda(\varphi) := \{v \in V \mid \varphi(v) = \lambda v\}$$

den *Eigenraum* von φ zum Wert λ.

Wir erlauben also beliebige Werte (nicht nur Eigenwerte) in der Definition der Eigenräume. Die 0 gehört zu jedem Eigenraum, obwohl sie kein Eigenvektor ist. Den von einem Eigenvektor erzeugten Untervektorraum nennt man eine *Eigengerade*. Wir betrachten einige einfache Beispiele über $\mathbb{R}$.

Beispiel 27.4. Eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ ist die Multiplikation mit einer festen Zahl $a \in \mathbb{R}$ (dem *Streckungsfaktor* oder *Proportionalitätsfaktor*). Daher ist jede Zahl $v \neq 0$ ein Eigenvektor zum Eigenwert a und der Eigenraum zu diesem Eigenwert ist ganz $\mathbb{R}$. Es gibt neben a keinen weiteren Eigenwert, sämtliche Eigenräume zu $\lambda \neq a$ sind 0.

Beispiel 27.5. Eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$ ist bezüglich der Standardbasis durch eine 2×2-Matrix gegeben. Wir betrachten die Eigenwerte zu einigen elementaren Beispielen. Eine Streckung ist durch $v \mapsto av$ mit einem Streckungsfaktor $a \in \mathbb{R}$ gegeben. Jeder Vektor $v \neq 0$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert a und der Eigenraum zu diesem Eigenwert ist ganz $\mathbb{R}^2$. Es gibt neben a keinen weiteren Eigenwert, sämtliche Eigenräume zu $\lambda \neq a$ sind 0. Die Identität besitzt den einzigen Eigenwert 1.

Eine Achsenspiegelung an der x-Achse wird durch die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ beschrieben. Der Eigenraum zum Eigenwert 1 ist die x-Achse, der Eigenraum zum Eigenwert -1 ist die y-Achse. Ein Vektor (s,t) mit $s,t \neq 0$ kann kein Eigenvektor sein, da die Gleichung

$$(s,-t) = \lambda(s,t)$$

dann keine Lösung besitzt.

Eine ebene Drehung wird durch die Drehmatrix $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ zu einem Drehwinkel α, $0 \leq \alpha < 2\pi$, gegeben. Bei $\alpha = 0$ liegt die Identität vor, bei $\alpha = \pi$ liegt die Halbdrehung vor, also die Punktspiegelung bzw. die Streckung mit dem Faktor -1. Bei allen anderen Drehwinkeln wird keine Gerade auf sich selbst abgebildet, so dass diese Drehungen keine Eigenwerte und keine Eigenvektoren besitzen (und alle Eigenräume 0 sind).

LEMMA 27.6. *Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum*

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung und $\lambda \in K$. Dann gelten folgende Aussagen.

(1) *Der Eigenraum*

$$\mathrm{Eig}_\lambda(\varphi)$$

ist ein Untervektorraum von V.

(2) *λ ist genau dann ein Eigenwert zu φ, wenn der Eigenraum $\mathrm{Eig}_\lambda(\varphi)$ nicht der Nullraum ist.*

(3) *Ein Vektor $v \in V$, $v \neq 0$, ist genau dann ein Eigenvektor zu λ, wenn $v \in \mathrm{Eig}_\lambda(\varphi)$ ist.*

Beweis. Siehe Aufgabe 27.11. □

Für Matrizen verwenden wir die entsprechenden Begriffe. Ist $\varphi\colon V \to V$ eine lineare Abbildung und M eine beschreibende Matrix bezüglich einer Basis, so gilt für einen Eigenwert λ und einen Eigenvektor $v \in V$ mit dem Koordinatentupel $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ bezüglich dieser Basis die Beziehung

$$M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Die Matrix N bezüglich einer weiteren Basis steht dann zu M nach Lemma 25.8 in der Beziehung $N = BMB^{-1}$, wobei B eine invertierbare Matrix ist. Es sei

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

das Koordinatentupel bezüglich der anderen Basis. Dann ist

$$\begin{aligned} N \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} &= (BMB^{-1}) \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \\ &= (BMB^{-1})B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= BM \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= B\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= \lambda B \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

d.h. die beschreibenden Matrizen besitzen dieselben Eigenwerte, wobei sich allerdings die beschreibenden Koordinatentupel für die Eigenvektoren mit den Basen ändern.

Beispiel 27.7. Wir betrachten die durch eine Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & d_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

gegebene lineare Abbildung

$$\varphi\colon K^n \longrightarrow K^n,\ e_i \longmapsto d_i e_i.$$

Die Diagonaleinträge d_i sind Eigenwerte von φ, und zwar ist der i-te Standardvektor e_i ein zugehöriger Eigenvektor. Die Eigenräume sind

$$\begin{aligned} & \operatorname{Eig}_d(\varphi) \\ = \ & \{v \in K^n \mid v \text{ ist Linearkombination von solchen } e_i, \text{ für die } d = d_i \text{ ist}\}. \end{aligned}$$

Diese Räume sind genau dann von 0 verschieden, wenn d mit einem Diagonaleintrag übereinstimmt. Die Dimension der Eigenräume ist gegeben durch die Anzahl, wie oft der Wert d in der Diagonalen vorkommt. Die Summe dieser Dimensionen ergibt n.

Beispiel 27.8. Bei einer *orthogonalen Spiegelung* des $\mathbb{R}^n$ an einem $(n-1)$-dimensionalen Untervektorraum $U \subseteq \mathbb{R}^n$ wird dieser Untervektorraum fixiert und jeder Vektor wird senkrecht zu U auf die andere Seite von U abgebildet. Wenn $v_1, \ldots, v_{n-1}$ eine Basis von U und v_n ein zu U orthogonaler Vektor ist, so wird die Spiegelung bezüglich dieser Basis durch die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

beschrieben.

Beispiel 27.9. Wir betrachten die durch die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

definierte lineare Abbildung

$$\varphi \colon \mathbb{Q}^2 \longrightarrow \mathbb{Q}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5y \\ x \end{pmatrix}.$$

Die Frage, ob diese Abbildung Eigenwerte besitzt, führt zur Frage, ob es $\lambda \in \mathbb{Q}$ derart gibt, dass die Gleichung

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

eine nichtriviale Lösung $(x, y) \neq (0, 0)$ besitzt. Bei gegebenem λ kann dies auf ein lineares Problem zurückgeführt werden, das mit dem Eliminationsalgorithmus einfach gelöst werden kann. Die Frage aber, ob es Eigenwerte überhaupt gibt, führt wegen des variablen „Eigenwertparameters“ λ zu einem nichtlinearen Problem. Das obige Gleichungssystem bedeutet ausgeschrieben

$$5y = \lambda x \text{ und } x = \lambda y\,.$$

Bei $y = 0$ ist auch $x = 0$, der Nullvektor ist aber kein Eigenvektor. Sei also $y \neq 0$. Aus den beiden Gleichungen erhält man die Bedingung

$$5y = \lambda x = \lambda^2 y,$$

woraus $5 = \lambda^2$ folgt. Da in $\mathbb{Q}$ die Zahl 5 keine Quadratwurzel besitzt, gibt es keine Lösung und das bedeutet, dass φ keine Eigenwerte und damit auch keine Eigenvektoren besitzt.

Wir fassen nun die Matrix M als eine reelle Matrix auf und untersuchen die zugehörige Abbildung

$$\psi \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5y \\ x \end{pmatrix}.$$

Die gleichen Rechnungen führen auf die notwendige Lösungsbedingung $5 = \lambda^2$, die jetzt von den beiden reellen Zahlen

$$\lambda_1 = \sqrt{5} \text{ und } \lambda_2 = -\sqrt{5}$$

erfüllt wird. Für diese beiden Werte kann man unabhängig voneinander nach Eigenvektoren suchen. Wir betrachten zuerst den Fall $\lambda = \sqrt{5}$, was zum linearen Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sqrt{5} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

führt. Dies schreibt man als

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

bzw. als lineares Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \sqrt{5} & -5 \\ -1 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dieses ist einfach lösbar, der Lösungsraum ist eindimensional und

$$v = \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist eine Basislösung.

Für $\lambda = -\sqrt{5}$ führen dieselben Umformungen zu einem weiteren linearen Gleichungssystem, für das der Vektor

$$w = \begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine Basislösung ist. Über $\mathbb{R}$ sind also $\sqrt{5}$ und $-\sqrt{5}$ Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume sind

$$\operatorname{Eig}_{\sqrt{5}}(\psi) = \left\{ s \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\} \text{ und } \operatorname{Eig}_{-\sqrt{5}}(\psi) = \left\{ s \begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Weiteres zu Eigenräumen

Lemma 27.10. *Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und*

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann ist

$$\operatorname{kern} \varphi = \operatorname{Eig}_0(\varphi).$$

Insbesondere ist 0 genau dann ein Eigenwert von φ, wenn φ nicht injektiv ist.

Beweis. Siehe Aufgabe 27.12. □

Allgemeiner gilt die folgende Charakterisierung.

Lemma 27.11. *Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und*

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Es sei $\lambda \in K$. Dann ist

$$\operatorname{Eig}_\lambda(\varphi) = \operatorname{kern}(\lambda \cdot \operatorname{Id}_V - \varphi).$$

Beweis. Sei $v \in V$. Dann ist $v \in \operatorname{Eig}_\lambda(\varphi)$ genau dann, wenn $\varphi(v) = \lambda v$ ist, und dies ist genau bei $\lambda v - \varphi(v) = 0$ der Fall, was man als $(\lambda \cdot \operatorname{Id}_V - \varphi)(v) = 0$ schreiben kann. □

Bemerkung 27.12. Neben dem Eigenraum zu $0 \in K$, der der Kern der linearen Abbildung ist, sind die Eigenwerte 1 und -1 besonders interessant. Der Eigenraum zu 1 besteht aus allen Vektoren, die auf sich selbst abgebildet werden. Auf diesem Untervektorraum wirkt also die Abbildung wie die Identität, man nennt ihn den *Fixraum*. Der Eigenraum zu -1 besteht aus allen Vektoren, die auf ihr Negatives abgebildet werden. Auf diesem Untervektorraum wirkt die Abbildung wie eine Punktspiegelung.

Lemma 27.13. *Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und*

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Es seien $\lambda_1 \neq \lambda_2$ Elemente in K. Dann ist

$$\operatorname{Eig}_{\lambda_1}(\varphi) \cap \operatorname{Eig}_{\lambda_2}(\varphi) = 0.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 27.14. □

Lemma 27.14. *Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und*

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Es seien $v_1, \ldots, v_n$ Eigenvektoren zu (paarweise) verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$. Dann sind $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig.

Beweis. Wir beweisen die Aussage durch Induktion nach n. Für $n = 0$ ist die Aussage richtig. Sei die Aussage also für weniger als n Zahlen bewiesen. Betrachten wir eine Darstellung der 0, also

$$a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0.$$

Wir wenden darauf φ an und erhalten einerseits

$$a_1 \varphi(v_1) + \cdots + a_n \varphi(v_n) = \lambda_1 a_1 v_1 + \cdots + \lambda_n a_n v_n = 0.$$

Andererseits multiplizieren wir die obige Gleichung mit λ_n und erhalten

$$\lambda_n a_1 v_1 + \cdots + \lambda_n a_n v_n = 0.$$

Die so entstandenen Gleichungen zieht man voneinander ab und erhält

$$(\lambda_n - \lambda_1) a_1 v_1 + \cdots + (\lambda_n - \lambda_{n-1}) a_{n-1} v_{n-1} = 0.$$

Aus der Induktionsvoraussetzung folgt, dass alle Koeffizienten $(\lambda_n - \lambda_i)a_i = 0$, $i = 1, \ldots, n-1$, sein müssen. Wegen $\lambda_n - \lambda_i \neq 0$ folgt $a_i = 0$ für $i = 1, \ldots, n-1$ und wegen $v_n \neq 0$ ist dann auch $a_n = 0$. □

KOROLLAR 27.15. *Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei*

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Dann gibt es maximal $\dim(V)$ *viele Eigenwerte zu φ.*

Beweis. Siehe Aufgabe 27.15. □

Abbildungsverzeichnis

Quelle = Simetria axial.png , Autor = Benutzer Rovnet auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 1

Quelle = VerticalShear m=1.25. , Autor = Benutzer RobHar auf Commons, Lizenz = PD 2

Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von http://commons.wikimedia.org) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 9

Lizenzerklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 9