Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2021**

Mathematik für Anwender I

Arbeitsblatt 32

Übungsaufgaben

Aufgabe 32.1. Finde sämtliche Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y' = (t^2 - 4t + 5)y.$$

Aufgabe 32.2. Löse das Anfangswertproblem

$$y' = (t^2 - 4t + 5)y \text{ mit } y(6) = -3\,.$$

Aufgabe 32.3. Zeige durch Ableiten, dass

$$y(t) = \sqrt[n+1]{e^{t^{n+1}}}$$

eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = t^n y$$

ist.

Aufgabe 32.4. Es sei $y(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung $y' = g(t)y$ und $z(t)$ eine Lösung der Differentialgleichung $z' = h(t)z$. Zeige, dass die Produktfunktion yz eine Lösung der Differentialgleichung

$$u' = (g(t) + h(t))u$$

ist, und zwar einmal durch Ableiten und einmal mit Satz 32.2.

Aufgabe 32.5. Finde sämtliche Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y' = -\frac{y}{t}.$$

Aufgabe 32.6. Finde sämtliche Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y' = \frac{y}{t^2}.$$

Aufgabe 32.7. Finde sämtliche Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y' = e^t y.$$

Aufgabe 32.8. Bestätige durch Nachrechnen, dass die in Beispiel 32.7 gefundenen Funktionen

$$y(t) = c\frac{\sqrt{t-1}}{\sqrt{t+1}}$$

die Differentialgleichung

$$y' = y/(t^2 - 1)$$

erfüllen.

Aufgabe 32.9.*

Bestimme eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \frac{y}{t^2(t-1)}$$

für $t > 1$.

Aufgabe 32.10. Es sei

$$y' = g(t)y$$

eine homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung mit einer unendlich oft differenzierbaren Funktion g und es sei y eine differenzierbare Lösung.

a) Zeige, dass y ebenfalls unendlich oft differenzierbar ist.

b) Es sei $y(t_0) = 0$ für einen Zeitpunkt t_0. Zeige unter Verwendung von Aufgabe 14.25, dass $y^{(n)}(t_0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 32.11.*

Es sei $f\colon I \to \mathbb{R}_+$ eine differenzierbare Funktion auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Finde eine homogene lineare gewöhnliche Differentialgleichung, für die f eine Lösung ist.

Aufgabe 32.12. Finde die Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$y' = y + 7.$$

Aufgabe 32.13. Finde die Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$y' = y + e^t.$$

Aufgabe 32.14. Finde die Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$y' = y + e^{3t}.$$

Aufgabe 32.15. Finde die Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$y' = y + \frac{\sinh t}{\cosh^2 t}.$$

Die folgende Aussage nennt man das *Superpositionsprinzip* für inhomogene lineare Differentialgleichungen. Es besagt insbesondere, dass die Differenz zweier Lösungen einer inhomogenen linearen Differentialgleichung eine Lösung der zugehörigen homogenen linearen Differentialgleichung ist.

AUFGABE 32.16. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein reelles Intervall und seien $g, h_1, h_2 \colon I \to \mathbb{R}$ Funktionen. Es sei y_1 eine Lösung der Differentialgleichung $y' = g(t)y + h_1(t)$ und es sei y_2 eine Lösung der Differentialgleichung $y' = g(t)y + h_2(t)$. Zeige, dass dann $y_1 + y_2$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = g(t)y + h_1(t) + h_2(t)$$

ist.

AUFGABE 32.17. Petra sitzt im Straßenkaffee bei einer Außentemperatur von 20 Grad. Ihr wird ein Kaffee serviert mit einer Temperatur von 90 Grad, den sie erst in fünf Minuten nach einem wichtigen Telefonat trinken möchte. Sie trinkt ihren Kaffee ohne Zucker, aber mit einem Milchanteil von 10 Prozent. Die Milch wird mit einer Temperatur von 10 Grad in einer Kühlbox serviert, die die Temperatur konstant hält. Der Abkühlungskoeffizient für Kaffee und Milch (siehe Beispiel 32.11) sei $d = \frac{1}{500}$, wobei die Zeit in Sekunden aufgefasst werde.

a) Welche Temperatur besitzt der Kaffee zu Trinkbeginn, wenn die Milch sofort in den Kaffee gekippt wird.

b) Welche Temperatur besitzt der Kaffee zu Trinkbeginn, wenn die Milch unmittelbar vor dem Trinken in den Kaffee gekippt wird.

c) Welche Temperatur besitzt der Kaffee zu Trinkbeginn, wenn die Milch unmittelbar vor dem Trinken in den Kaffee gekippt wird, und die Kühlbox nicht funktioniert.

AUFGABE 32.18.*

a) Finde alle Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung ($t \in \mathbb{R}_+$)

$$y' = \frac{y}{t}\,.$$

b) Finde alle Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung ($t \in \mathbb{R}_+$)

$$y' = \frac{y}{t} + t^7\,.$$

c) Löse das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{y}{t} + t^7 \text{ und } y(1) = 5\,.$$

AUFGABE 32.19.*

a) Finde alle Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$y' = -\frac{\sin t}{\cos t} y + (t^2 - 3)\cos t$$

für $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

b) Löse das Anfangswertproblem

$$y' = -\frac{\sin t}{\cos t} y + (t^2 - 3)\cos t \text{ mit } y(0) = 7\,.$$

Aufgabe 32.20.*

a) Bestimme eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \frac{2t}{t^2+1} y.$$

b) Bestimme eine Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \frac{2t}{t^2+1} y + t^2.$$

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 32.21. (3 Punkte)

Löse das Anfangswertproblem

$$y' = (2t^3 - 7t + 4)y \text{ mit } y(3) = 7\,.$$

Aufgabe 32.22. (3 Punkte)

Finde sämtliche Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y' = \frac{y}{t^2 - 3}.$$

Aufgabe 32.23. (3 Punkte)

Finde die Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$y' = (t+2)y + t \exp\left(\frac{1}{2}t^2 + 2t\right).$$

Welche Lösung hat das Anfangswertproblem $y(1) = \pi$?

Aufgabe 32.24. (5 Punkte)

Löse das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{t}{t^2+2} y \text{ mit } y(3) = 7\,.$$

Aufgabe 32.25. (3 Punkte)

Finde die Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$y' = y + e^{2t} - 4e^{-3t} + 1\,.$$

Aufgabe 32.26. (5 Punkte)

Finde die Lösungen der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$y' = \frac{y}{t} + \frac{t^3 - 2t + 5}{t^2 - 3}\,.$$

Abbildungsverzeichnis