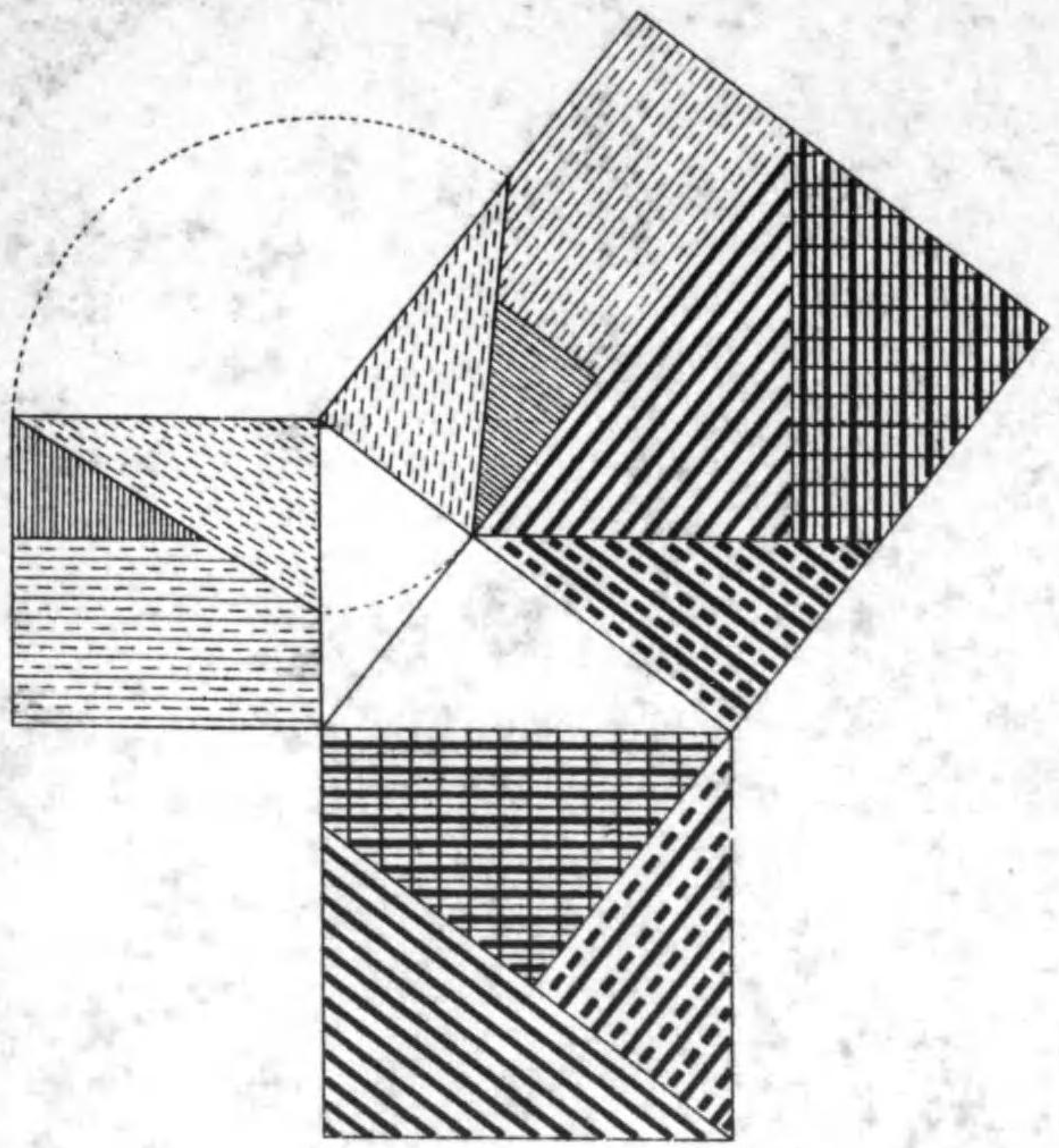
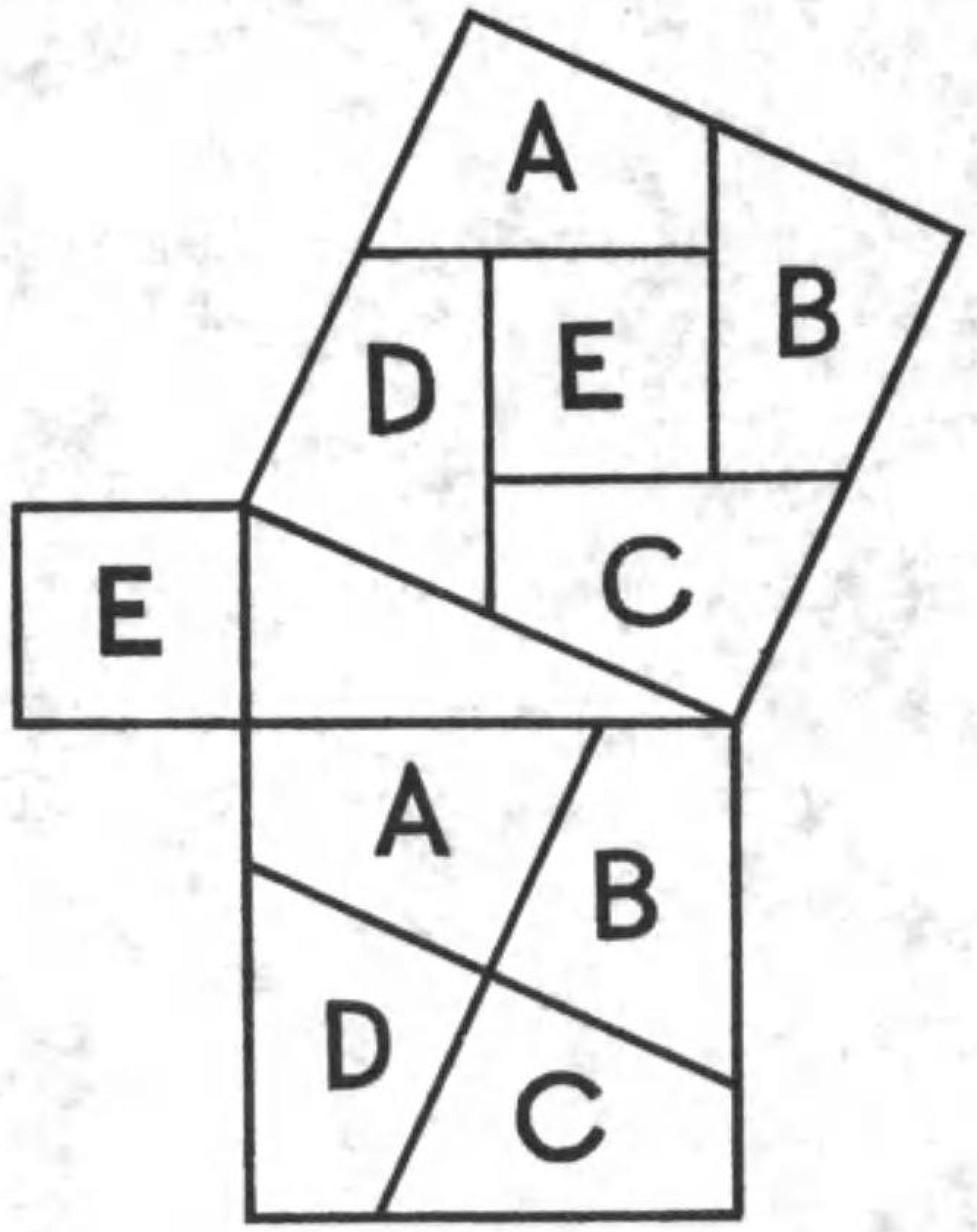
K. NAGASAWA.

NEW GEOMETRY, PLANE.

大正版




A
D
E
B
E
C
A
B
D
C

NEW GEOMETRY,
PLAEN.

K. NAGASAWA.

長澤龜之助編纂

大正版

新幾何學教科書

平面

發行所

株式會社 國定教科書共同販賣所

序

本書ハ中學校,其ノ他,中等教育程度ノ學校ノ教科用ニ充テンガ爲ニ,曩ニ編纂シタルモノヲ,明治四十四年七月文部省發布ノ教授要目ニ適ズル如ク改訂シ,更ニ採用學校ノ意見ニ基ヅキテ再訂シタルモノナリ. 而シテ其ノ編纂ノ大要ハ次ノ如シ.

1. 他分科との連絡.

從來行ハルル教科書ハ,數學ノ他分科トノ連絡ニ乏シ. 廣ク數學ノ各分科ト連絡セシムルコトハ兎モアレ,幾何學ヨリ前ニ修メシ算術,竝ニ稍前ヨリ始メタル代數學トノ連絡ハ,中等教育程度ノ幾何學トシテ,是非トモ之ヲ附ケ置カザルベカラズ.

2. 應用を重んず.

從來行ハルル教科書ハ,乾燥無味ナルモノ多ク,且應用ニ乏シ,是亦中學教科用トシテ適當ニ之ヲ加ヘザル可カラズ.

3. 論理學の術語を本文より省く.

從來ノ教科書ハ,論理學ノ術語ヲ用フルコト重キニ過ギタリ,本書ハ是等ヲ一切本文ヨリ省キ,簡單ニ頁ノ下段ニ註記シ,取捨隨意トシタリ,尤モコレスラ,一ケ所ニ纏メズ,便宜ノ處ニ示スコトトシタリ.

4. 相當の定律.

面積ノ定理,比例論ノ如キハ,算術及ビ代數學ト一層深キ關係アルモノニシテ,教授にゅーかむ氏ノ所謂相當ノ定律 [Law of Homology] ニ從フトキハ,冗長ノ說述ヲ簡單明了ニシテ,生徒ノ悟心ヲ爽カニスルコトト信ジ,本書ハ之ニ從ヘリ.

5. 用器畫との連絡.

幾何學ト用器畫トハ,最モ密接ノ關係アルコト言ヲ竢タズ. 然レドモ從來ノ教科書ノ作圖題ノ圖ト,用器畫ノ幾何圖トノ畫キ方ハ,相同ジカラズ,故ニ本書ハ用器畫トノ連絡ヲ謀リ,作圖題ノ圖ハ,總テ既知線ハ細線 [Fine line], 既知點ハ小サキ單圈 [Single small circle], 作圖ニ入用ナル線ハ斷續線 [Dotted line], 作リ得タル所要ノ線ハ太線 [Thick line], 求メ得タル點ハ小サキ複圈 [Double small circles] ヲ附シ置ケリ,尤モ定

理ノ圖ハ,格別ニシテ生徒ニ通曉シ易キコトヲ專一トセリ.

6. 比例論の簡明.

佶倔冗長ナル比例論ノ,此ノ種ノ教科書ヲ用フル生徒ノ年齢學力等ニ不相當ナルハ,識者ノ認識スル所ナリ. 余ハ生徒ノ年齢學力等ヲ顧慮シ,所論ハ十分簡單ニシテ,通約スベキ量ニ就キテ論ジ,通約スベカラザル量ニ就キテハ,近似値ヲ以テ滿足スルコトトセリ,尤モ教師諸君時ト場合トニ依リ,之ヲ補足セラルルハ固ヨリ妨ナシ.

7. 歷史的註釋及び肖像.

歷史的註釋ハ生徒ニ利益アル興味ヲ與フルモノト信ジ,米人びーまん及ビすみす氏ノ書ニ依リ,所々ニ記入セリ,尤モ稍疑ハシキモノハ英人ごー氏ノ希臘數學歷史,米人かじょりー氏,英人ぼーる氏等ノ數學歷史,佛人かたらん氏幾何學ニ依リ,其ノ正確ト信ゼラルルモノニ就キテ之ヲ揭載セリ. 而シテ本版ニ於テハ,處々ニ本文ニ關係アル先輩ノ肖像ヲ插入シ,且ソレニ就キ小話ヲ載セタリ.

8. 問題の選擇.

問題ノ選擇ニ重キヲ置キ,必要ナルモノ,興味アルモノ,實用的ナルモノ,他分科ト關係アルモノ等ヲ適當ニ配合集錄セリ.

9. 重要なる問題.

本書本文中ニ挿入セシ問題ハ,其ノ數甚ダ多カラズ,悉ク之ヲ課スルモ時間ニ不足ヲ感ズルガ如キコトナシト信ズ,然レドモ萬一場合ニ依リテ之ヲ省キタキトキハ, ＊ヲ附シタル問題以外ヲ省クベシ,＊ヲ附シタル問題ハ後ニ引用アルカ,又ハ必ズ學ブベキ問題ニシテ,何レモ重要ナルモノユヱ,之ヲ省略スベカラズ.

10. 記號的證明.

證明ヲ徹頭徹尾文章ニテ記スルノ迂愚ナルハ,余ノ十數年來ノ主張ニシテ,世間ノ教科書モ近頃大イニ之ニ傾キタルハ,竊ニ余ノ本懷トセル所ナリ,本書モ亦固ヨリ適當ニ記號ヲ配シテ證明ヲ簡ニセリ. 而シテ其ノ記號ノ如キハ慣用ノモノニ依レリ.

11. 定理及び作圖題の證明は紙の裏面に跨らぬこと.

定理及ビ作圖題ノ證明ヲ記スルニハ,成ルベク紙ノ裏面ニ跨ラヌ樣ニセリ,此ハ他ト違ヒ幾何學ニテハ,一々圖ト對照スルガ爲ニ最モ必要ナルコトト信ズ.尤モ止ムヲ得ズ紙ノ裏面ニ跨ル場合ニハ,更ニ又同ジ圖形ヲ入レテ,圖トノ對照ヲ便ニセリ.

12. 代數學と幾何學との解法の比較.

代數學ト幾何學トノ解法ノ比較ハ,簡單ナル二次方程式ニ歸スルモノヨリ,彼此解法ヲ對照シ,興味アリテ利益ヲ與フルモノ二三ヲ示セリ.

13. 教科書の簡明.

教科書ハ簡明ヲ主トスルコトハ,余ガ十數年來ノ持論ニシテ,本書ハ,出來得ル限リ簡明ナラシメタリ.

14. 復習雜題のこと.

復習雜題ハ,本文問題ノ不足ヲ補ハンガ爲ニ,又ハ補

習科ナドニテ課センガ爲ニ,本文ノ順序ニ從ヒテ問題ヲ配置セリ,是等ハ中學ヲ卒業シテ,尙高等ノ學校ニ受驗セントスル學生ノ爲ニ便益ナラシメンコトヲ期セリ.

15. 試驗問題のこと.

試驗問題ハ最近十五ヶ年間[特ニ大正三年マデ]ニ涉リテ,中學卒業生ヲ收容セントスル諸官立學校ノ入學試驗箋ヨリ收錄シタリ,但本文ノ順ニ類別セルユエ,便宜必要ノ場所ニ挿入シテ教授スルコトヲ得ベシ.

16. 大正版の特長.

大正版ニ於テハ,前版ニ問題中ニ收メタルモノノ中,稍重要ナルモノヲ定理作圖題等ニ揭ゲタリ,尤モ證明ノ簡單ナルモノ,又ハ前ニ述ベタルト同樣ノ證明法ナルトキハ,之ヲ省キテ學生ヲシテ自ラ試ミシムルノ方針ヲ取レリ.

終ニ本書ヲ教科ニ採用セラルル諸君ハ,本書ノ爲ニ批評忠言ヲ示サレンコトヲ切望ス.

大正三年十一月　　編者識ス

用語及び記號

1. 定義 トハ,用語ノ意義ヲ確定スルコトナリ.

2. 命題 トハ,一ノ事項ノ陳述ナリ.

3. 定理 トハ,推理ニ依リテ其ノ眞ナルコトヲ證明セントスル命題ナリ.

4. 系 トハ,定理ヨリ直チニ推定シ得可キ命題ナリ.

5. 記號

$+$	加.	$-$	減.	$\sim$	差.
$=$	等.	$\neq$	不等.	$\equiv$	全等.
$>$	ヨリ大.	$<$	ヨリ小.		
$\ngtr$	ヨリ大ナラズ.	$\nless$	ヨリ小ナラズ.		
$\wedge$	角.	$\hat{R}$	直角.	$\perp$	垂線.
$\parallel$	平行.	$\triangle$	三角形.		
$\square$	平行四邊形.	$\square$	矩形.	$\square$	正方形.
$\backsim$	相似.	$\therefore$	故ニ.		
$\because$	如何トナレバ.	$\geqq$	$>$或ハ$=$.		
$\leqq$	$<$或ハ$=$.	$\pm$	$+$或ハ$\sim$.		
Δ	三角形ノ面積.				

豫習事項

圓規[規]及ビ定木[矩],或ハ三角定木ヲ用ヒテ,次ノ作圖ヲナスコトヲ,豫メ習得セシメ置クベシ.

1. 與ヘラレタル長サノ邊ヲモツ正三角形ヲ作ルコト.

2. 與ヘラレタル三ツノ長サノ邊ヲモツ三角形ヲ作ルコト.

3. 與ヘラレタル直線上或ハ外ノ與ヘラレタル一點ヨリ之ニ垂線ヲ引クコト.

4. 與ヘラレタル直線ヲ二等分スルコト.

5. 與ヘラレタル角ニ等シキ角ヲ作ルコト.

6. 與ヘラレタル一點ヲ過リテ,與ヘラレタル直線ニ平行スル直線ヲ引クコト.

目次

緒論 … … … … … … … … 1—8.

第一編 直線 … … 9—65.

第一節 角 … … … … … … … 9—20.
第二節 平行線 … … … … … … 21—26.
第三節 多角形 … … … … … … 27—61.
雜題 … … … … … … … … 62—65.

第二編 圓 … … … 66—128.

第一節 弦弧中心角 … … … … … 66—78.
第二節 圓周角 … … … … … … 79—83.
第三節 切線及ビ二圓ノ關係 … … 84—92.
第四節 內接形及ビ外切形 … … … 93—103.
雜題 … … … … … … … … 104—106.
第五節 軌跡 … … … … … … … 107—112.
第六節 作圖題 … … … … … … 113—126.
雜題 … … … … … … … … 127—128.

第三編 面積 … … 129—178.

第一節 面積ノ比較 … … … … … 129—142.

第二節 長サ及ビ面積ノ測度 … … 143—150.
第三節 面積ノ關係 … … … … … 151—170.
雜題 … … … … … … … 171—174.
第四節 代數的作圖題 … … … … 175—178.

第四編 比例 … … 179—232.

第一節 比及ビ比例 … … … … … 179—184.
第二節 線ニ關スル比例 … … … … 185—211.
第三節 面積ニ關スル比例 軌跡 … 212—228.
雜題 … … … … … … … 229—232.

附 錄 … … … 233—300.

幾何學ニ於ケル不能問題ノ一例 … … … 234.
代數學ト幾何學トノ解法ノ比較 … … 235—238.
復習問題 … … … … … … … … 239—268.
試驗問題 … … … … … … … … 269—298.
問題ノ答 … … … … … … … … 299—300.

新幾何學教科書

平面

緒論

1. 定義 空間の限りある部分を稱して**立體**と云ふ.

空間ハ分チ得可キモノナリ. 空間ヨリ其ノ一部ヲ引キ離シテ考フルトキハ,コレ立體ナリ.

立體ハ物體ト異ナリ,物體ハ實質體ニシテ,木石ナドノ如シ. 物體ノ占有セル空間ノ一部ハ卽チ立體ニシテ,實質アルニ非ズ.

立體ニハ長サト幅ト厚サト位置トアリ.

而シテ 立體ハ分チ得可キモノナリ.

2. 定義 立體の界を**面**と云ふ.

立體ノ界,卽チ立體ト其ノ周リノ空間トノ界ハ面ナリ. 面ニハ長サト幅ト位置トアレドモ,厚サナシ.

而シテ 面ハ分チ得可キモノナリ.

3. 定義 面の界を線と云ふ.

面ノ一部ト他ノ一部トノ界ハ線ナリ.

線ニハ長サト位置トアレドモ,幅モナク,厚サモナシ.

而シテ 線ハ分チ得可キモノナリ.

4. 定義 線の界を點と云ふ.

線ノ一部ト他ノ一部トノ界ハ點ナリ.

點ニハ長サモ幅モナク,亦厚サモナシ,唯位置アルノミ. 而シテ 點ハ分チ得可カラザルモノナリ.

注意 立體,面,線,及ビ點ハ幾何學ニ於テ論ズル基本タリ,而シテ是等ハ亦逆ニ次ノ如ク云ヒ得可シ.

I. 點ハ唯位置アルノミニシテ大イサナシ.

II. 點ガ動クトキハ線ヲ生ズ.

[此ノ運動ノ爲ニ長サヲ生ズ].

III. 線ガソレ自身ニ沿ウコトナシニ動クトキハ面ヲ生ズ.

[此ノ運動ノ爲ニ長サノ外ニ幅ヲ生ズ].

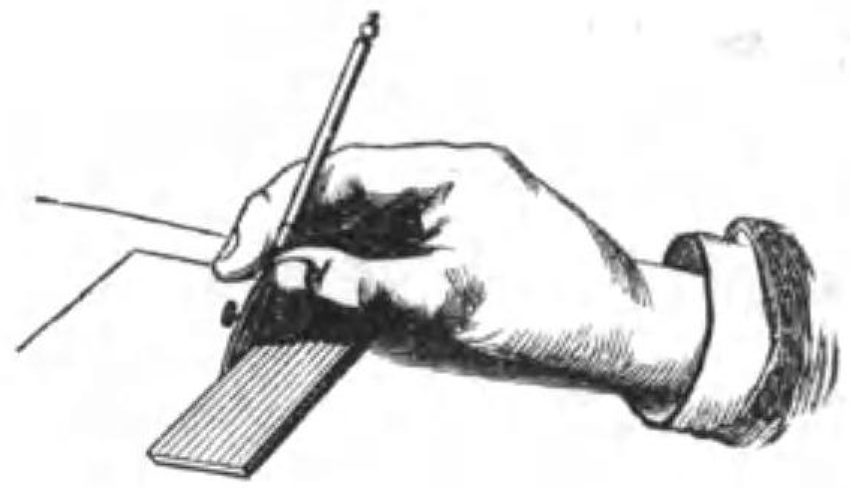
IV. 面ガソレ自身ニ沿ウコトナシニ動クトキハ立體ヲ生ズ.

[此ノ運動ノ爲ニ長サト幅トノ外ニ厚サヲ生ズ].

5. 定義 點,線,面,立體,或は此の集合を**圖形**と稱す.

6. 定義 **直線**とは,線の各部が同一の方向をもつものなり.

故ニ 直線ハ其ノ一部ヲ取リテ,其ノ任意ノ一部ノ上ニ,如何樣ニ相重ヌルモ,重ナリ合フベシ.



注意 緊張シタル絲,又ハ錘ヲ吊シタル絲ノ如キハ直線ノ觀念ヲ與フ,而シテ實際紙面ニ直線ヲ引クニハ,嘴鋼筆(カラスグチ)又ハ鉛筆ヲ定木(ヂヤウギ)[矩]ノ緣ニ當テテ引クベシ.

7. 直線ハ雙方トモ長サニ制限ナシ.

若シ 直線ノ一部分ヲ考ヘタルトキハ**線分**,或ハ**有限直線**ト稱ス. 時トシテハ有限直線ト云フベキコトヲ單ニ直線ト云フコトアリ.

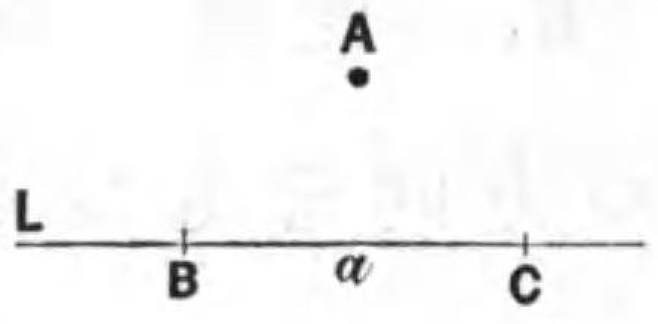
注意 線ノ各部ガ始終同一ノ方向ヲモタザルトキハ之ヲ**曲線**ト云フ.

8. 一ノ點ハ一ノ羅馬文字ニテ表ハサル.

例ヘバ '點A' 或ハ 'A點' ト云フガ如シ.

直線ハ一ノ羅馬文字,又ハ其ノ上ノ二點ノ文字ニテ表ハサル.

例ヘバ '直線L' 又ハ '直線BC' ト云フガ如シ.



若シ 二點B, C ノ間ニ含マルル直線ノ一部ヲ表ハサンニハ'線分BC' ト云フ. 線分ハ又其ノ長サヲ表ハス小文字ニテ表示セラル. 例ヘバ '線分a' ト云ヘバ 'aナル長サノ直線' ヲ意味スルガ如シ.

直線BC ノ**延線**トハ, BC ヲ B ヨリ C ノ方ヘ引キ延バシタルモノヲ云ヒ, 又 CB ノ延線トハ, BC ヲ C ヨリ B ノ方ヘ引キ延バシタルモノヲ云フ.

9. 定義 平面とは,面の上にある任意の二點を結び付くる直線が全く其の面上にある如きものを云ふ.*

注意 靜水ノ面,平滑ナル鏡ノ面ノ如キハ,平面ノ觀念ヲ與フ.

* 大工ガさしがねノ緣ヲ削リタル板ノ面ニ當テテ,其ノ平滑ナルヤ否ヤヲ驗スルハ,此ノ定義ノ應用ニ外ナラズ.

10. 定義 幾何學とは,圖形の形狀,大いさ及び位置に就きて論ずる學科なり.*

平面幾何學ハ一平面上ニアル圖形ニ就キテ論ジ,

* 幾何學ハ最モ古キ學術ノ一ニシテ,測量航海建築等ニ關鍵シテ,埃及(エジプト)並ニ巴比倫(バビロニア)ニ起リシガ如シ. 實ニ幾何學ノ英語 Geometry ハ"地"及ビ"測ル"ヲ意味スル二ツノ希臘語ニ基ヅクモノナリ. 埃及國ヲ遊歷セシ希臘ノ史家へろどたす [Herodotus, 西暦紀元前484年乃至425年頃ノ人] ノ說ニ依レバないる河ノ年々ノ洪水ニハ沿岸平野一帶ノ土地ノ境界ヲ沒失セシムルニ依リ,稅務官ハ土地所有者各自ノ田地ヲ測量シテ其ノ境界ヲ正サザルベカラズ,之ヨリ幾何學ノ基因ヲナセリト云フコト,史家ノ齊シク唱道スル所ナリ. 又近年ニ及ンデ巴比倫ノ碑文及ビ埃及ノ古記ノ發見アリテ,往古ノ幾何學ニ就キ得ル處少ナカラズ. 西暦紀元前1700年頃埃及ノ僧あーむす [Ahmes] ハ一ノ數學書ヲ著ハシ,其中ノ多數ハ,幾何學ニ關スル事項ナリ. 斯ノ如キ碑文古記ノ外,今日ニ現存セルぴらみっど,方碑,塔,宮殿,溝渠,等ノ如キ古代ノ建造物ニ依リ,古人ノ幾何學的知識ヲ窺フベキモノ少ナカラズ. 然レドモ是等幾何學的知識ヲ綜合シテ,尙多クノ眞理ヲ發見シタルハ,希臘人ノ智力ニ歸ス. 卽チ希臘國ノ賢人ハ埃及ニ遊ビ,其ノ幾何學ヲ修メ,歸リテ大イニ之ヲ研鑽シ,新ニ多クノ定理問題等ヲ發見シ,約300年間ノ研究ヲ經テ西暦紀元前300年頃ゆーくりっどニ至リ大成シテ一ノ幾何學教科書ヲ編述シ,今日ニ至ルマデ權威アル幾何學書タリ.

立體幾何學ハ一平面上ニアラザル圖形ニ就キテ論ズルモノナリ.

11. 定義 公理とは,推理の基本とする所の命題なり.

公理ハ他ニ依リテ之ヲ說明スルコト能ハズ,吾人ハ吾人ノ經驗ニ依リテ眞ナリト認ムルモノナリ.

公理に**普通公理**及び**幾何學公理**の二種あり.

普通公理ハ各種ノ量ニ關スルモノ,幾何學公理ハ特ニ幾何學的量ニノミ關スルモノナリ.

12. 普通公理 普通公理ノ中,幾何學ニ必要ナルモノヲ擧グレバ次ノ如シ.

I. 全量ハ其ノ各部分ノ和ニ等シ.
故ニ 全量ハ其ノ部分ヨリ大ナリ.

II. 同ジ量或ハ相等シキ量ニ等シキ量ハ相等シ.

III. 相等シキ量ニ相等シキ量ヲ加フレバ,其ノ和ハ相等シ.

IV. 相等シキ量ヨリ相等シキ量ヲ減ズレバ,其ノ殘リハ相等シ.

V. 相等シキ量ト不等ノ量トノ和ハ相等シカラズ.
大イナル量ト加ヘタル和ガ,他ノ和ヨリ大ナリ.

VI. 相等シキ量ヲ不等ノ量ヨリ減ズレバ,其ノ殘リハ相等シカラズ.
大イナル量ヨリ減ジタル殘リガ,他ノ殘リヨリ大ナリ.

VII. 相等シキ量ヨリ不等ノ量ヲ減ズレバ,其ノ殘リハ相等シカラズ.
大イナル量ヲ減ジタル殘リガ,他ノ殘リヨリ小ナリ.

VIII. 相等シキ量ノ同ジ倍數ノ量ハ相等シ.
而シテ 相等シキ量ノ同ジ分數ノ量モ亦相等シ.

13. 幾何學公理

I. 圖形ハ其ノ形狀,及ビ大イサヲ變ズルコトナクシテ,其ノ位置ヲ變ジ得可シ.

II. 全ク相合セシメ得ル大イサハ相等シ.

III. 一點ヲ過リテ,一ツノ方向ニ一ツノ直線ヲ引クコトヲ得,而シテ唯一ツニ限ル.
此ハ亦次ノ如ク換言スルコトヲ得可シ.

一點ト一ノ方向トハ,一直線ヲ決定ス.

此ノ公理ヨリ次ノ二件ヲ知ル.

(1) 二點ハ一直線ヲ決定ス.

[或ハ 二點ヲ通有スル二直線ハ,全ク相合シテ一直線トナル].

(2) 相異ナル二直線ハ,唯一點ニ於テ相交リ得ルノミ.

IV. 二點間ノ最短徑ハ其ノ間ノ直線ナリ.

14. 定義 二點間の**距離**とは,其の間の直線の長さを云ふ.

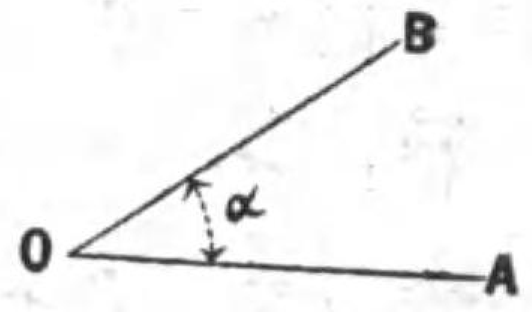
第一編 直線

第一節

角

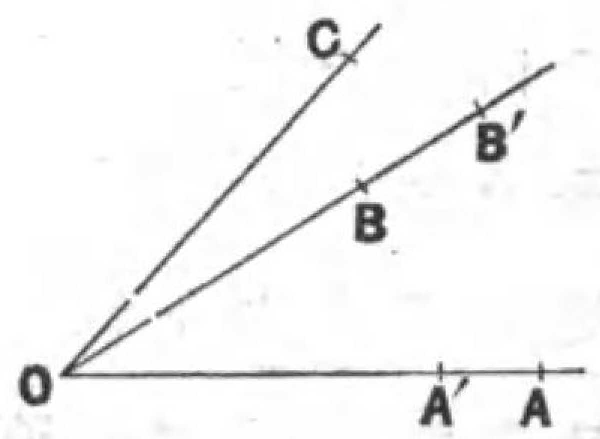
15. 定義 同じ點より引ける二直線は,**角**をなすと云ひ,其の點を角の**頂點**,其の二直線を角の**邊**と云ふ.

一點 O ヨリ引ケル直線 OA ガ, O ヲ樞(カナメ)トシテ, OA ノ位置ヨリ OB ノ位置マデ廻轉スルトキハ, OA ハ二直線 OA, OB ノ間ノ角ダケ廻轉セリト云ヒ,角ノ大小ハ此ノ廻轉ノ量ノ多少ニ同ジ.



角ハ此ノ廻轉ノ量ノ多少ニ依ルモノニシテ,角ノ邊ノ長サニ關係ナシ.

例ヘバ練兵場ニ於ケル二人ノ兵士ノ位置ヲ A 及ビ B トシ,之ヲ O ニアル人ヨリ望ムトキ, AO, BO ハ一ノ角ヲナス. 若シ



A ニアル兵士ガ直線 AO 上ヲ歩ミテ A′ ニ來リ, B ニアル兵士ガ直線 OB 上ヲ歩ミテ B′ ニ來ルトスルモ, O ヨリ見タルトキ, 二人ノ兵士ノ間ノ角ハ前ト異ナラズ, 然レドモ B ニアル兵士ガ, BO 上ニアラザル C ノ如キ位置ニ來ルトキハ, 最早 AO ト CO トノ間ノ角ハ AO ト BO トノ間ノ角ニ等シカラズ.

16. 角ハ其ノ頂點ニアル一ツノ文字ニテ表ハサル.

例ヘバ　角 O ノ如シ, 之ヲ $\hat{O}$ ト記ス[15款ノ圖].

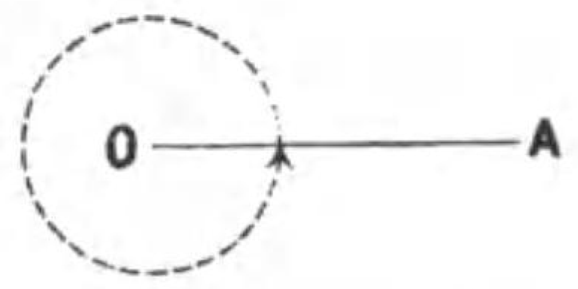
又角ハ其ノ頂點ノ文字ヲ中央ニ, 二邊ノ文字ヲ兩端ニ置キテ表ハサル.

例ヘバ　角 AOB ノ如シ, 之ヲ $\widehat{AOB}$ ト記ス.

或ハ又　角ハ其ノ角內ニアル一ツノ文字ニテ表ハサル.

例ヘバ　角 α ノ如シ, 之ヲ單ニ α ト記ス.

直線 OA ガ O ヲ樞トシ, OA ノ位置ヨリ時計ノ針ノ廻ルト反對ノ向キニ紙面ヲ離ルルコトナク, 全一廻轉シテ復 OA ノ位置ニ達シタルトキハ, OA ハ**周角**ヲ畫クト云ヒ, 周角ノ半分ヲ**平角**, 平角ノ半分ヲ**直角**ト云フ. 直角ハ之ヲ $\hat{R}$ ト記ス.



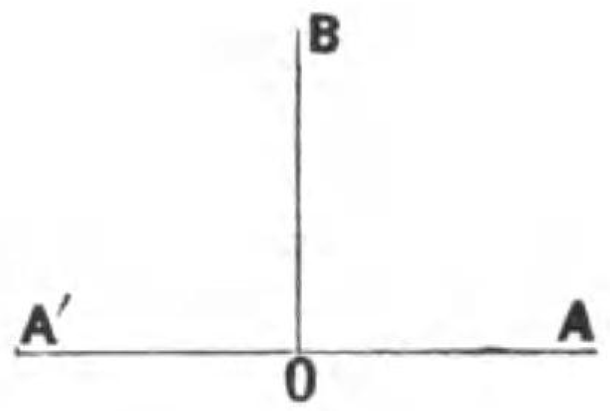
周角ハ一ノ線分ガ其ノ一端ヲ樞トシテ全一廻轉シテ, 復モトノ位置ニ達シタルトキノ角ナルヲ以テ, 次ノ命題ノ眞ナルコトヲ知ル可シ.

總ての周角は相等し.

從ヒテ　總テノ平角モ相等シク, 而シテ總テノ直角モ亦相等シキコトヲ知リ得可シ.

直角ヨリ小ナル角ヲ**銳角**ト云ヒ, 直角ヨリ大ニシテ, 二直角, 即チ平角ヨリ小ナル角ヲ**鈍角**ト云フ.

注意　OA ガ時計ノ針ノ廻ルト同ジ向キニ一廻轉スルモ, 其ノ畫ク所ノ角ハ一周角ニ等シ. 又 OA ガ時計ノ針ノ廻ルト同ジ向キニ廻轉シテ, AO ノ延線 OA′ ニ達スルトキト, 之ト反對ノ向キニ廻轉シテ OA′ ニ達スルトキト, 其ノ畫ク所ノ角ノ大イサハ相等シ. 其ノ理ハ角ノ平面ヲ AOA′ ヲ折目トシテ折リ返セバ全ク相重ナリ合フヲ以テ知ルベシ.



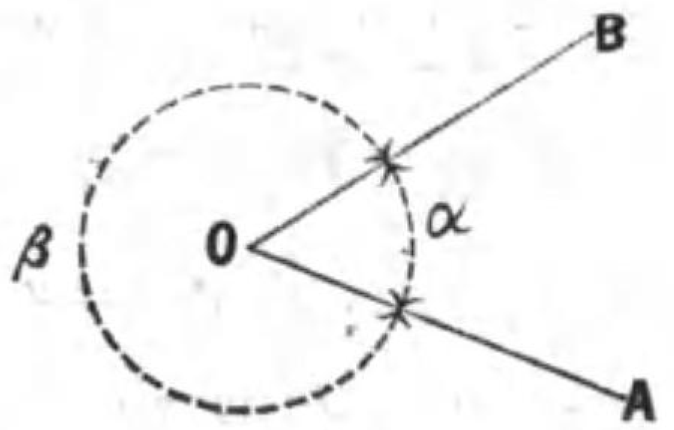
依リテ $\widehat{AOA'}$ ハ平角ナルコトヲ知ルベシ.

又直線 BO ガ直線 AA′ ト O ニ於テ交リ,

$\widehat{AOB}=\widehat{BOA'}$ ナルトキハ,此ノ各ハ平角ノ半分,卽チ直角ナルコトヲ知ルベシ.

17. **定義** 同一の點より引ける二直線は,二つの角をなし,此の二角は合せて一周角に等しく,之を互に**共軛**なりと云ふ.

例ヘバ圖ノ α ト β トノ如シ. 而シテ此ノ二角ヲ區別スル必要アルトキハ,其ノ小ナル方[α]ヲ**劣角**,大ナル方[β]ヲ**優角**ト云フ. 本書ニ於テハ,別段ニ斷リナシニ角ト云ヘバ,劣角ヲ指スモノトス.



二ツノ角ガ,其ノ頂點ト一邊トヲ共有シテ,共有邊ノ異傍ニアルトキハ,之ヲ互ニ**接角**ヲナスト云フ.

注意 初等幾何學ニ於テハ,直角ヲ單位トスレドモ,實地應用上ニハ,便利ノ爲ニ,直角ヲ90等分シテ**度**ト云ヒ,一度ヲ60等分シテ**分**ト云ヒ,一分ヲ60等分シテ**秒**ト云フ.

卽チ

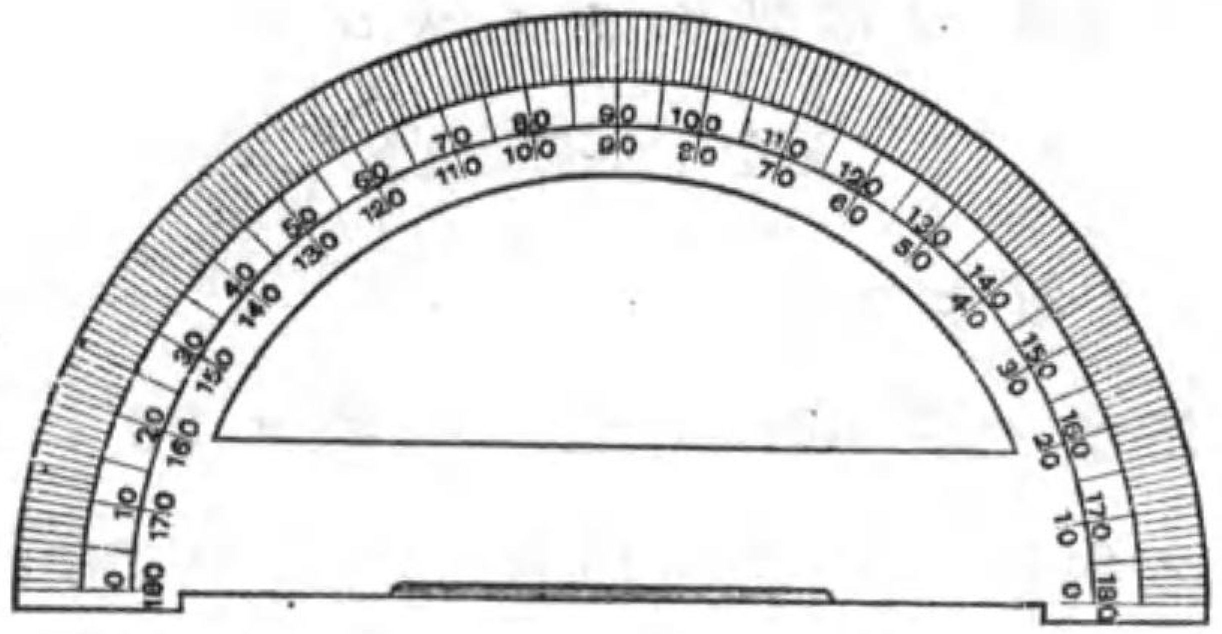
$$\overset{\text{度}}{1}=\overset{\text{分}}{60}=\overset{\text{秒}}{3600}$$

$$\overset{\text{分}}{1}=\overset{\text{秒}}{60}$$

度分秒ニハソレゾレ °, ′, ″ ナル記號ヲ用フ.

例ヘバ 42°25′30″ ハ 42 度 25 分 30 秒ナルガ如シ.

角ノ度數ヲ知ルニハ,實際ニハ**分度器**ヲ用フ.



分度器ハ圖ノ如ク,一平角ノ大イサヲ 0 度ヨリ 180 度マデ目盛シタルモノニシテ;眞鍮,洋銀,又ハ羊角,等ニテ製スルモノトス.

例題

※1. 任意ノ一直線ヲ二ツニ等分スル點ハ一ツアリ,而シテ唯一ツニ限ル[之ヲ其ノ直線ノ**中點**ト云フ].

※2. 任意ノ一角ヲ二ツニ等分スル直線ハ一ツアリ,而シテ唯一ツニ限ル[之ヲ其ノ角ノ**二等分線**ト云フ].

※3. 有限直線 AB ノ中點ヲ M トシ, M′ ハ AB 上

ノ任意ノ點ナリトスレバ

$$AM'+BM'=2AM \text{ 及ビ } AM'\sim BM'=2MM'$$

ナリ,其ノ證如何.

又 N ヲ BM' ノ中點ナリトスレバ

$$AM'+AB=2AN$$

ナルコトヲ證セヨ.

*4. 任意ノ角 AOB ノ二等分線ヲ OC トシ, O ヨリ角 AOB ノ內ニ引キタル任意ノ直線ヲ OC' トスレバ

$$\widehat{AOC'}+\widehat{BOC'}=2\widehat{AOC} \text{ 及ビ } \widehat{AOC'}\sim\widehat{BOC'}=2\widehat{COC'}$$

ナリ,其ノ證如何.

又 OD ヲ角 BOC' ノ二等分線ナリトスレバ

$$\widehat{AOC'}+\widehat{AOB}=2\widehat{AOD}$$

ナルコトヲ證セヨ.

5. 一周角ハ幾直角ニ等シキカ.

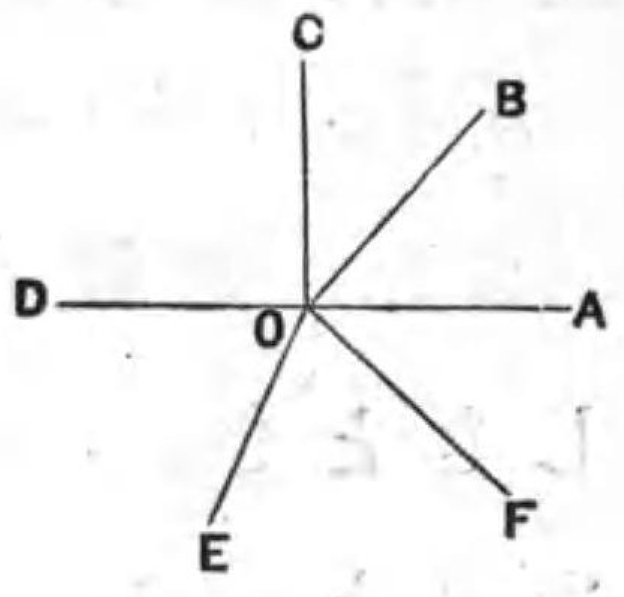
---

18. 定理 一點より若干の直線を引きて生ずる,隣接せる總ての角の和は,一周角[卽ち四直角]に等し.

OA, OB, OC, ……, OF ハ O ヨリ引ケル若干ノ直線

ナリトスルトキ,

$\widehat{AOB}+\widehat{BOC}+\widehat{COD}+\ldots\ldots+\widehat{FOA}$ ハ一周角ニ等シキコトヲ證セントス.

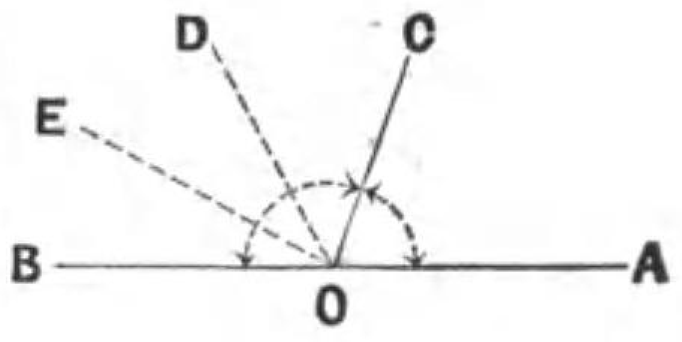


證 直線 OA ガ,其ノ最初ノ位置 OA ヨリ廻轉シ始メテ,順次ニ OB, OC, ……, OF ナル位置ヲ經過シテ,復最初ノ OA ナル位置ニ歸ルトキハ,順次ニ角 AOB, BOC, ……, EOF, FOA ヲ畫ク.

然ルニ此ノ廻轉ハ,全一廻轉ナルユヱ一周角ナリ.

故ニ $\widehat{AOB}+\widehat{BOC}+\widehat{COD}+\ldots\ldots+\widehat{FOA}=1$(周角).

19. 系 一直線[CO]ガ他ノ一直線[AB]ニ出會フトキ,其ノ二ツノ接角[$\widehat{AOC}$, $\widehat{COB}$]ノ和ハ一平角[$2\hat{R}$]ニ等シ.



注意 AB ノ同ジ傍ニ CO, DO, …… ノ如キ,夥多ノ直線ガ同一ノ點 O ニ出會フトモ $\widehat{AOC}$, $\widehat{COD}$, ……, $\widehat{EOB}$ ノ如キ,隣接セル總テノ角ノ和ハ一平角ニ等シ.

20. 定義 二角の和が一平角,卽ち二直角に等しきときは,此の二角は,之

を互に**補角**なりと云ふ.

相等シキ角ノ補角ハ,互ニ相等シキコト明カナリ.

21. 定義 二角の和が一直角に等しきときは,此の二角は,之を互に**餘角**なりと云ふ.

相等シキ角ノ餘角ハ,互ニ相等シキコト明カナリ.

例　題

6. 13°27′42″ ノ角ノ補角ハ如何.
又ソノ餘角ヲ問フ.

*7. 一ツノ角ノ二等分線ハ,之ヲ反對ノ方ヘ引キ延バセバ,又其ノ共軛角ヲモ二等分ス.

---

22. 定義 二直線が相交りてなす向ひ合ひの角を**對頂角**と云ふ.

23. 定理 對頂角は相等し.*

二ツノ直線 AB, CD ガ O ニ於テ相交ルトキ,

---

* 此ノ定理ハたーれす[Thales]ノ發見セシモノナリ.

タレス氏肖像

THALES.

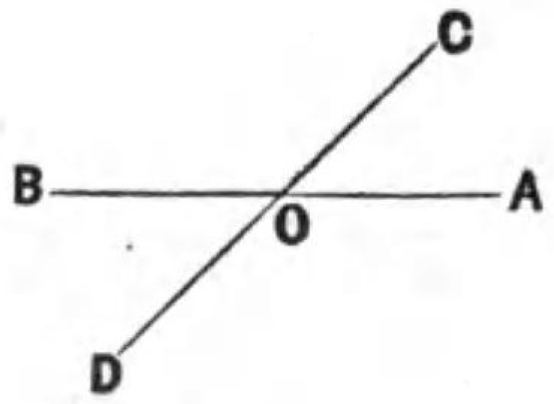
(c.640—c.542.B.C)

ターレス氏小話

氏ハ希臘ノ數學及ビ哲學ヲ創立セシ人ニシテ, 紀元前約640年みれとすニ生レ, 同ジキ約542年同地ニ死セリ. ふぃにしあ人ノ後胤ニシテ, 其ノ若カリシ時代ニハ商人ナリシガ, 埃及ニ漫遊シテ教育アル人々ヨリ多少ノ學問ヲ受クルコトヲ得タリ. 氏ハ其ノ後みれとすニ學校ヲ創設シ, 而シテ希臘七賢ノ一ニ數ヘラルルニ至リヌ. 又彼ノ幾何學ヲ科學ノ基礎トナシタルハ氏ニ始マルガ如シ, 而シテ氏ノ力ニ成レル五個ノ定理アリ. 氏ハ又海上ノ船ノ距離ヲ測定スル法ヲ發見セリ. 尙氏ハ陰影ヲ用ヒテ, 高サヲ測定スル法ヲモ發見セリ. 玆ニ氏ニ關スル逸話アリ, 或人驢馬ヲシテ鹽ヲ負ハシメテ川ヲ渡セシニ, 或時, 其ノ負フ處ノ荷, 水ニ浸リ, 目方大イニ減ジタルヲ知リ, 其ノ後驢馬ハ, 必ズ負フ處ノ荷ヲ水ニ浸シテ目方ヲ減ゼシムルコトトスルユヱ, 荷主ハ甚ダ迷惑シテ, 之ヲ氏ニ謀リシニ, 氏ハ一日鹽ニ代フルニ綿ヲ以テセシニ, 例ノ如ク驢馬ハ之ヲ水ニ浸セシニ, 目方却ツテ大イニ增加シタルユヱ, 之ニ懲リテ爾後負フ處ノ荷ヲ水ニ浸サザルニ至レリト云フ.

$\widehat{AOC}$ ト $\widehat{BOD}$, $\widehat{AOD}$ ト $\widehat{BOC}$ トヲ對頂角ナリトスレバ

$$\widehat{AOC}=\widehat{BOD},$$
$$\widehat{AOD}=\widehat{BOC}$$



ナルコトヲ證セントス.

證　$\widehat{AOC}+\widehat{AOD}=2\widehat{R}$,　[19 款]

又　$\widehat{BOD}+\widehat{AOD}=2\widehat{R}$.

$\therefore\ \widehat{AOC}+\widehat{AOD}=\widehat{BOD}+\widehat{AOD}$,　[12 款 II]

故ニ　$\widehat{AOC}=\widehat{BOD}$.　[12 款 IV]

同樣ニ　$\widehat{AOD}=\widehat{BOC}$ ナルコトヲ證シ得可シ.*

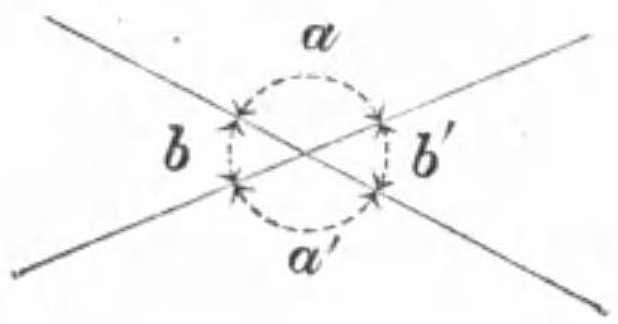
例　題

*8. 二直線ガ相交ルトキ, 一組ノ對頂角ガ各直角ナルトキハ, 他ノ一組ノ對頂角ノ大イサ如何.

---

* 此ノ證明ハ次ノ如キ記法ヲ用フレバ, 一層明瞭ナルベシ.

$$\hat{b}+\hat{a}=2\hat{R},$$
$$\hat{b'}+\hat{a}=2\hat{R},$$
$$\therefore\ \hat{b}+\hat{a}=\hat{b'}+\hat{a},$$
$$\therefore\ \hat{b}=\hat{b'}.$$



*9. 任意ノ角ノ二等分線ハ,其ノ對頂角ヲ如何ニ二分ツベキカ.

---

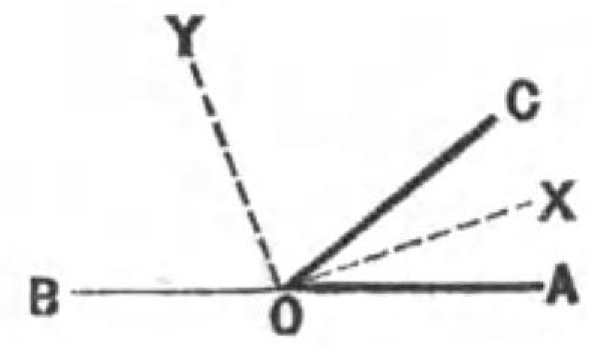
24. 定義 二直線が互に直角に交るときは,此の二直線は,之を互に**垂直**なりと云ひ,其の一を他の一の**垂線**なりと云ふ.

一直線ガ他ノ一直線ニ垂直ナルコトヲ示スニハ,其ノ間ニ⊥ナル記號ヲ用フ.

二直線ガ直角ニアラザル他ノ角ヲ以テ交ルトキハ,其ノ一ヲ他ノ一ノ**斜線**ナリト云フ.

一直線ノ垂線,又ハ斜線ガ之ニ出會フ點ヲ垂線,又ハ斜線ノ趾(アシ)ト云フ.

例 題



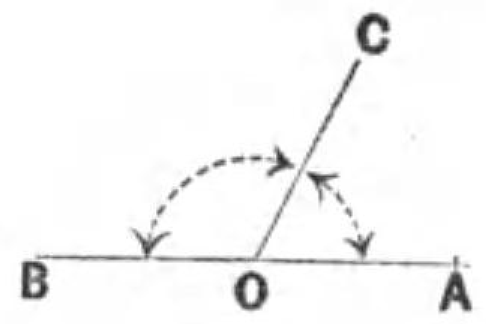
*10. 直線 CO ガ直線 AOB ト點 O ニ於テ交リ,角 AOC ノ二等分線ヲ OX トシ,角 COB ノ二等分線ヲ OY トスルトキ; OX, OY ハ互ニ垂直ナルコトヲ證セヨ.

OX ヲ角 AOC ノ**内二等分線**, OY ヲ其ノ角ノ**外二等分線**ト云フコトアリ.

11. 半紙一枚ノ隅ヲ斜メニ折ルトキハ,其ノ折目ハ,折レタル邊ノ二部ノ間ノ角ノ二等分線ト,直角ヲナスコトヲ證セヨ.

---

25. 定理 二つの接角の和が,二直角に等しきときは,外の二邊は同一の直線をなす.* [19 款ノ定理ノ逆].



$\widehat{BOC}+\widehat{COA}=2\hat{R}$

ナルトキハ,

BO, OA ハ同一ノ直線ヲナス

コトヲ證セントス.

證 $\widehat{BOC}+\widehat{COA}=\widehat{BOA}$.

然ルニ $\widehat{BOC}+\widehat{COA}=2\hat{R}$, [假設]

故ニ $\widehat{BOA}=2\hat{R}$.

卽チ $\widehat{BOA}$ ハ平角ナリ.

故ニ 邊 BO, OA ハ同一ノ直線上ニアリ.

---

* 定理ハ**假設**及ビ**終結**ノ二部ヨリ成ル.[以下次頁脚註ヲ見ヨ].

例　題

*12. 對頂角ノ二等分線ハ同一ノ直線ヲナスコトヲ證セヨ.

*13. AOB ハ一直線ニシテ; CO, OD ハ AOB ノ反對ノ側ニアリテ,且 AOB ト $\widehat{AOC}=\widehat{BOD}$ ナル如キ角ヲナス二直線トスレバ; CO, OD ハ同一ノ直線ヲナスコトヲ證セヨ.

*14. 既知ノ一直線上ノ既知ノ一點ヨリ,之ニ一ツノ垂線ヲ引クコトヲ得,而シテ唯一ツニ限ル.

[二枚ノ三角定木ヲ用ヒテ,一直線上ノ一點ニ於テ,之ニ垂線ヲ引ケ].

15. 或角ト其ノ餘角ト,大イサ相等シキトキ,各角ノ大イサ如何.

*16. 角 LOM ノ二邊 LO, MO ガ,ソレゾレ角 L′OM′ ノ二邊 L′O, M′O ニ垂直ナルトキハ

$$L\hat{O}M=L'\hat{O}M' \text{ 或ハ } L\hat{O}M+L'\hat{O}M'=2\hat{R}$$

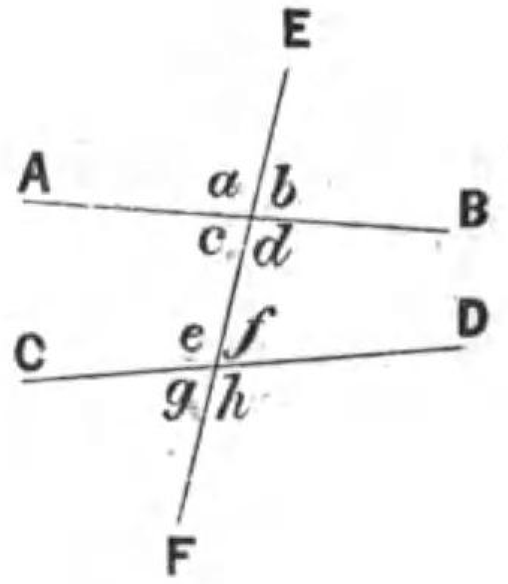
ナルコトヲ證セヨ.

假設ハ卽チ‘假ニ然リトスル所ノコト’ニシテ,
終結ハ卽チ‘假設ヨリ起リ來ル可シト主張スル所ノコト’ナリ.
二ツノ定理ノ一ノ假設ト終結トガ,ソレゾレ他ノ一ノ終結ト假設トナルトキハ,此ノ二ツノ定理ハ之ヲ互ニ**逆**ナリト云フ.
或定理ガ眞ナルモ,其ノ逆ハ必ズシモ眞ナラズ.

第二節

平行線

26. 定義　一つの直線が,二つ或は多くの直線を截るときは,之を**横截線**と云ふ.



横截線 EF ガ,二直線 AB, CD ヲ截リテ生ズル八ツノ角ニハ,次ノ如キ命名ヲ用フ.

a, b, g, h ハ**外角**, *c, d, e, f* ハ**內角**,

a ト *e*, *c* ト *g*, *b* ト *f*, *d* ト *h* トハ**同位角**,

c ト *f*, *d* ト *e* トハ**錯角**.

例　題

*17. 26 款ノ圖ニ於テ,一組ノ錯角ガ相等シケレバ,他ノ一組ノ錯角モ亦相等シク,同位角ハ相等シク,又同傍ノ內角ハ互ニ補角ヲナスコトヲ證セヨ.

---

27. 定義　二直線が,同一の平面上

にありて,雙方へ如何程引き延ばさるるも出會はざるときは,之を互に**平行す**と云ふ.

二ツノ直線ガ平行スルコトヲ示スニハ,其ノ間ニ記號 ∥ ヲ用フ.

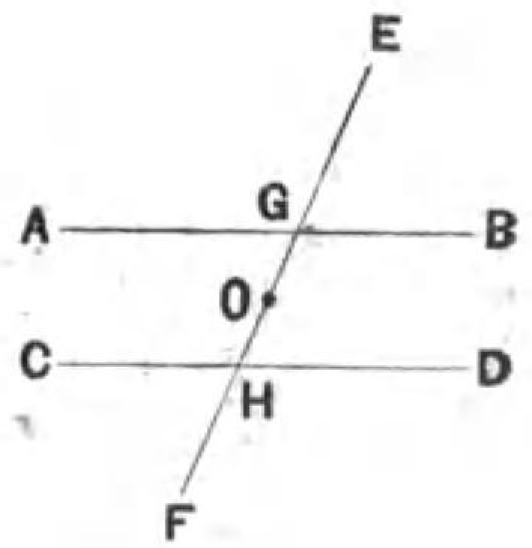
28. 定理 一直線が,他の二直線を截りてなす所の錯角が相等しければ,後の二直線は互に平行す可し.

一直線 EF ガ二直線 AB, CD ヲ G, H ニ於テ截リ

$A\hat{G}H = G\hat{H}D$ トナストキハ

AB ∥ CD

ナルコトヲ證セントス.



證 全キ圖形ヲ, GH ノ中點 O ヲ樞トシテ,一平角ダケ廻轉シ, GH ガ復ソノ線自ラト重ナルニ至ラシメヨ.

然ルトキハ　　OG = OH　　[假設]

ナルヲ以テ,點 G ハ點 H ニ,點 H ハ點 G ニ重ナル.

而シテ　　$A\hat{G}H = G\hat{H}D$　　[假設]

ナルヲ以テ　直線 GA ハ直線 HD ト重ナリ,

直線 HD ハ直線 GA ト重ナル.

故ニ　直線 AGB ハ直線 DHC ニ重ナリ,　[13 款 III (1)]

直線 CHD ハ直線 BGA ニ重ナル,

斯ク　直線 GA, HC ハソレゾレ同ジ直線ノ一部 HD, GB ト重ナルヲ以テ,

若シ　直線 GA, HC ノ延線ガ出會フナラバ,

GB, HD ノ延線モ亦出會ハザル可カラズ,*

コレ背理ナリ.**　[13 款 III (1)]

故ニ　直線 AB, CD ハ何レノ方ヘ引キ延バスモ,出會フコト能ハズ.

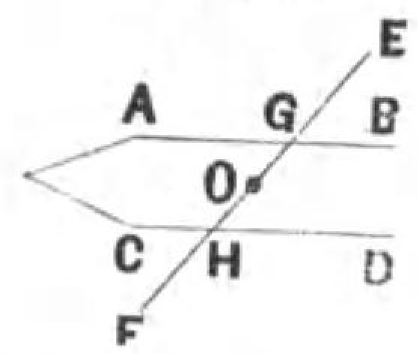
∴ AB ∥ CD.

29. 系 1. 一直線ガ他ノ二直線ヲ截リテナス所ノ同位角ガ相等シキカ,或ハ同傍ノ二內角ガ互ニ補角ナルトキハ,後ノ二直線ハ互ニ平行スベシ.

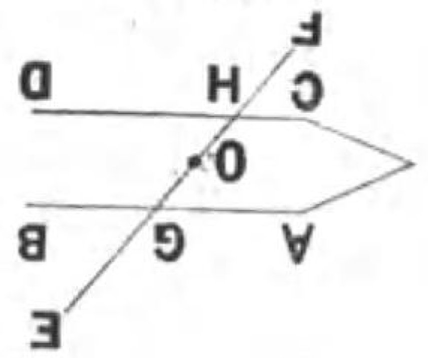
系 2. 同ジ直線ニ垂直ナル二直線ハ,互ニ平行ス.

---

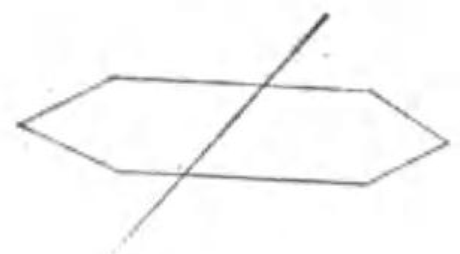
* [1 圖]



[2 圖]



[3 圖]

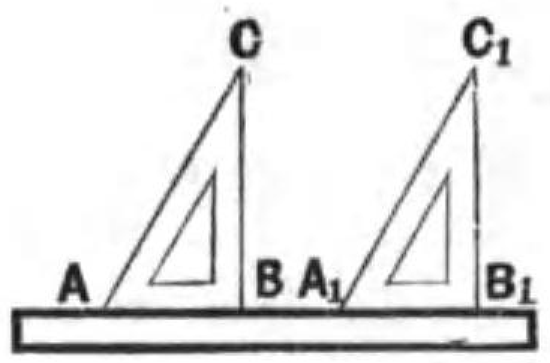


1 圖ノ如ク GA, HC ノ延線ガ出會フトキハ,之ヲ一平角ダケ廻轉シタル後ニハ, 2 圖ノ如クナルベシ. 依リテ此ノ二ツノ圖ヲ重ネ合シテ考フレバ, 3 圖ノ如クナリテ,二點ヲ過ル直線ガ二ツアルコトトナルベシ.

** 此ノ定理ノ證明ノ如ク,背理ニ導クモノヲ**背理法**ト名ヅク.

例　題

18. 圖ノ如ク二枚ノ同ジ三角定木ヲ,ものさしノ緣ニ沿ヒテ置クトキ, $BC \parallel B_1C_1$, 及ビ $AC \parallel A_1C_1$ ナル理由如何.



---

30. 幾何學公理　13 款 [7, 8 頁] ノ續.

V.　一點ヲ過リ,一直線ニ平行スル直線ハ一ツアリ,而シテ唯一ツニ限ル.

此ノ公理ヨリ次ノ二件ヲ知ル.

(1)　平行線ノ一ニ交ル直線ハ,必ズ他ノ直線ニモ亦交ル.

(2)　二ツノ平行線ノ一ニ平行スル直線ハ,必ズ他ノ直線ニモ亦平行ス.

此ハ次ノ如ク換言スルコトヲ得可シ.

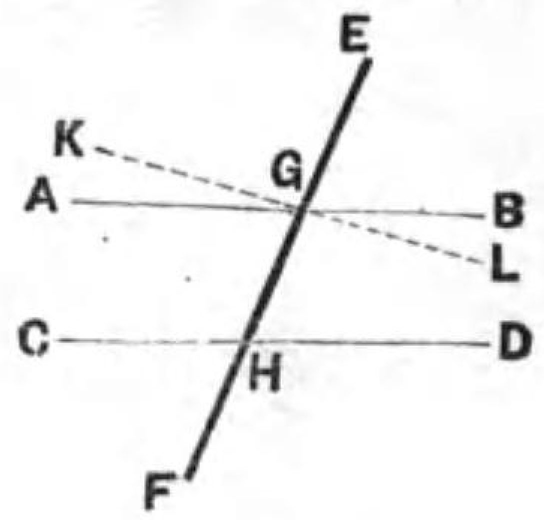
同ジ直線ニ平行スル二直線ハ,必ズ互ニ平行ス.

31. 定理　一直線が,二平行直線を

截るときは,其の錯角は相等し.

一直線 EF ガ二平行直線 AB, CD ヲ點 G, H ニ於テ截ルトキハ,　$A\hat{G}H = G\hat{H}D$

ナルコトヲ證セントス.



證　若シ　$A\hat{G}H \neq G\hat{H}D$

ナルトキハ, G ヲ過リテ一直線 KGL ヲ引キ,

$$K\hat{G}H = G\hat{H}D$$

ナラシメヨ.

然ルトキハ　$KL \parallel CD$,　[28 款]

然ルニ　$AB \parallel CD$,　[假設]

卽チ　點 G ヨリ CD ニ平行スル二ツノ直線ヲ引キ得ルニ至ル,

コレ背理ナリ.　[公理 V]

故ニ　$A\hat{G}H = G\hat{H}D$.

32. 系 1. 一直線ガ二平行直線ヲ截ルトキハ,

(1)　橫截線ノ同ジ傍ニアル二內角ハ互ニ補角ナリ.

(2)　同位角ハ相等シ.

系 2. 平行直線ハ共通ノ垂線ヲ有ス.

33. 定義　二平行直線の間に夾ま

れたる共通垂線の長さを,其の二平行線間の距離と云ふ.

例　　題

*19. 一直線ガ他ノ二平行直線ヲ截ルトキハ,其ノナス所ノ一雙ノ錯角ノ二等分線ハ,互ニ平行ナルコトヲ證セヨ.

此ノ問題ニ於テ錯角ノ代リニ,同位角ヲ取ルトキハ如何.

*20. 相交ル二直線ノ各ニ垂直ナル二直線ハ,亦互ニ相交ル可シ.

*21. 二ツノ角ノ各ノ二邊ガ,ソレゾレ平行スルトキハ,其ノ二ツノ角ハ相等シキカ,或ハ互ニ補角ナリ.

*22. 角 LOM ノ二邊 LO, MO ガソレゾレ角 L′O′M′ ノ二邊 L′O′, M′O′ ニ垂直ナルトキハ,

$$\widehat{LOM}=\widehat{L'O'M'},\ 又ハ\ \widehat{LOM}+\widehat{L'O'M'}=2\hat{R}$$

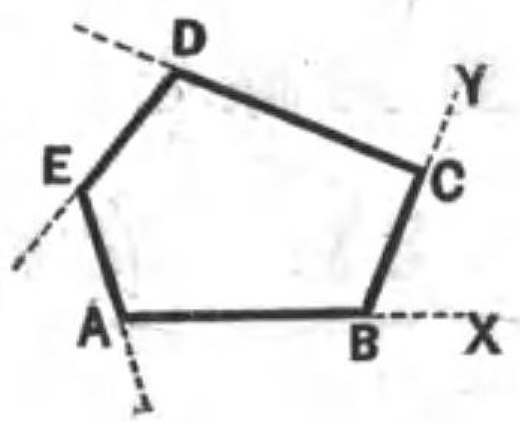
ナルコトヲ證セヨ.

第三節

多角形

34. **定義**　**平面形**とは,一つ或は多くの線を以て圍みたる平面の部分を云ひ,平面形の界を其の**周**と云ふ.

35. **定義**　直線を以て圍みたる平面形を,**直線形**或は**多角形**と云ふ.



多角形 ABCDE ニ於テ $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCD}$, $\widehat{CDE}$, ... ハ其ノ**內角**ニシテ,之ヲ單ニ多角形ノ**角**ト云ヒ; AB, BC, CD, ... ヲ多角形ノ**邊**ト云フ.

多角形ノ邊ト其ノ隣ノ邊ノ延線トノ間ノ角 XBC, YCD, ... ヲ多角形ノ**外角**ト云フ.

多角形ハ其ノ角數ガ 3, 4, 5, ... ナルニ從ヒ,ソレゾレ之ヲ**三角形**或ハ**三邊形**, **四角形**或ハ**四邊形**, **五角形**或ハ**五邊形**, ... ト云フ.

多角形ノ各角ガ劣角ナルモノヲ**凸多角形**ト云フ.

注意 多角形ノ各角ガ悉ク劣角ナラザルモノ,即チ少ナクモ一ツノ優角ヲ有スル多角形ハ,之ヲ**凹多角形**ト云フ.

凸多角形ハ,何レノ一邊ヲ双方へ引キ延バスモ,其ノ一方ニアレドモ,凹多角形ハ其ノ何レカノ一邊ヲ双方へ引キ延バセバ,本形ヲ截ルナリ.

本書ニ於テ,單ニ多角形ト云ヘバ,凸多角形ノ義ナリト知ルベシ.

36. 定義 多角形の相隣らざる二つの角の頂點を結び付くる直線を,其の**對角線**と云ふ.

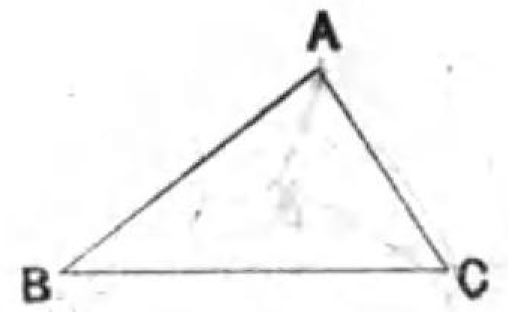
37. 定義 多角形の總ての邊が相等しきときは,之を**等邊多角形**と云ひ,總ての角が相等しきときは,之を**等角多角形**と云ふ.

38. 定義 等邊にして,且等角なる多角形を**正多角形**と云ふ.

39. 定理 三角形の二邊の和は,他の一邊より大なり.

△ABC ニ於テ

$$\left.\begin{array}{l} AB+BC>CA \\ BC+CA>AB \\ CA+AB>BC \end{array}\right\}$$



ナルコトヲ證セントス.

證 線分 CA ハ點 C ト點 A トノ最短徑ナリ.

[13 款 IV]

依リテ $AB+BC>CA.$

他モ亦之ト同様ニ證明シ得可シ.

40. 系 三角形ノ二邊ノ差ハ,他ノ一邊ヨリ小ナリ.

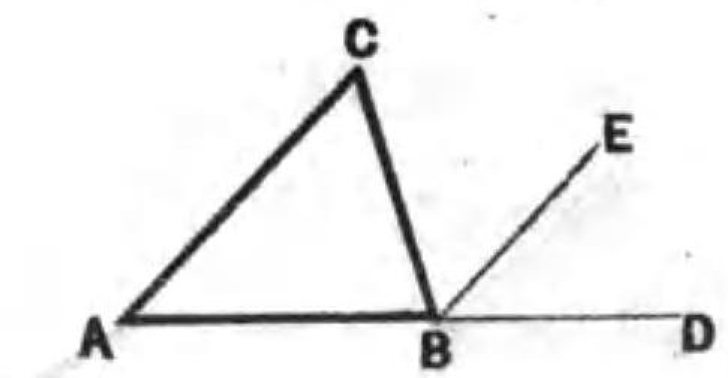
例 題

※23. 三角形内ノ一點ト,一邊ノ兩端トヲ結ビ付クル二ツノ線分ノ和ハ,他ノ二邊ノ和ヨリ小ナルコトヲ證セヨ.

※24. 三角形内ノ一點ト,其ノ三ツノ角ノ頂點トヲ結ビ付クル三ツノ線分ノ和ハ,三角形ノ周ヨリ小ニシテ,半周ヨリ大ナルコトヲ證セヨ.

41. **定理** 三角形の各角の和は,二直角に等し.*

△ABC ニ於テ
$\hat{A}+\hat{C}+\widehat{ABC}=2\hat{R}$
ナルコトヲ證セントス.



證 B ヨリ AC ニ平行スル BE ヲ引キ, AB ヲ任意ノ點 D ニ引キ延バセバ, AB ハ二平行直線 AC, BE ノ横截線ナルユエ

$\hat{A}=\widehat{EBD}$, [32款系1(2)]

又 BC モ亦二平行直線 AC, BE ノ横截線ナルユエ

$\hat{C}=\widehat{CBE}$, [31款]

故ニ $\hat{A}+\hat{C}+\widehat{ABC}=\widehat{EBD}+\widehat{CBE}+\widehat{ABC}$, [12款III]

然ルニ $\widehat{EBD}+\widehat{CBE}+\widehat{ABC}=2\hat{R}$, [19款注意]

故ニ $\hat{A}+\hat{C}+\widehat{ABC}=2\hat{R}$.

42. **系** 1. 三角形ノ一外角ハ,之ニ隣ラザル二ツノ内角ノ和ニ等シ. 從ヒテ 三角形ノ一外角ハ,之ニ隣ラザル内角ノ何レヨリモ大ナリ.

系 2. 二ツノ三角形ニ於テ,二角ガソレゾレ相等シキトキハ,第三ノ角モ亦相等シ.

* 此ノ定理ハぴたごらす[Pythagoras]ノ始メテ證明セシモノナリ.

系 3. 三角形ニ於テ,一ツノ角ガ直角或ハ鈍角ナルトキハ,他ノ二ツノ角ハ鋭角ナリ.

系 4. 一直線外ノ一點ヨリ,之ニ一ツノ垂線ヲ引クコトヲ得,而シテ唯一ツニ限ル.

一點ヨリ一直線マデノ**距離**トハ,此ノ點ヨリ此ノ直線ヘ引キタル垂線ノ長サナリ.

43. **定義** 三角形の一角が直角なるものを**直角三角形**,鈍角なるものを**鈍角三角形**,總ての角が鋭角なるものを**鋭角三角形**と云ふ.

直角三角形ニ於テ直角ニ對スル邊ヲ**斜邊**ト云フ.

直角三角形ニ於テ,最モ短キ邊ヲ**鉤**,之ニ次グ邊ヲ**股**ト稱シ,最モ長キ邊[即チ斜邊]ヲ**弦**ト稱スルコトアリ.從ヒテ此ノ場合ニハ直角三角形ヲ**鉤股弦**ト稱ス.

例題

25. 直角三角形ニ於テ,二ツノ鋭角ハ互ニ餘角ナルコトヲ證セヨ.

26. 等角三角形ノ各角ノ大イサ如何.

※27. 一直線ガ他ノ二直線ヲ截リ,其ノ同傍ノ内角

ノ和ガ二直角ヨリ小ナルトキハ,後ノ二直線ハ此ノ傍ニ於テ出會フ.

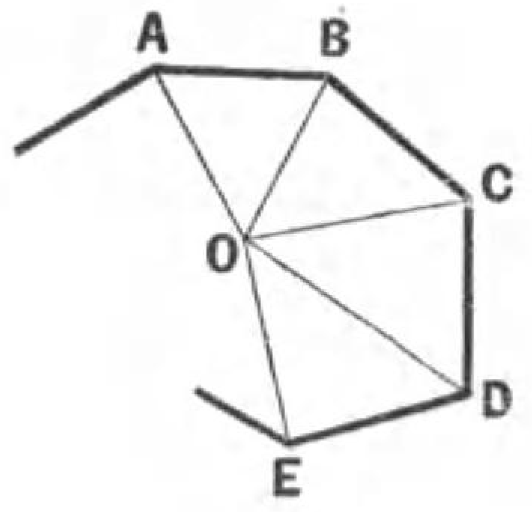
※28. 三角形内ノ一點ニ於テ,底邊ノ張ル角ハ三角形ノ頂角ヨリ大ナリ[三角形ノ**底邊**トハ,此ノ上ニ三角形ガ立テリト考フル所ノ邊ニシテ,**頂角**トハ底邊ニ對スル角ヲ云フ].

※29. 三角形ノ二ツノ外角ノ二等分線ノナス角ハ,殘リノ外角ノ半分ニ等シキコトヲ證セヨ.

※30. 三角形 ABC ニ於テ, $\hat{B}$ ノ内二等分線ト, $\hat{C}$ ノ外二等分線トノ交角ハ, $\hat{A}$ ノ半分ニ等シ.

---

44. 定理 多角形の各角の和は,邊數の二倍より四を減じたるだけの直角に等し.



ABCDE...... ヲ n 邊ノ多角形

トスルトキハ

其ノ各角ノ和$=(2n-4)\hat{R}$

ナルコトヲ證セントス.

證 多角形ノ各角ノ頂點

A, B, C, ... ヲ,形内ノ一點 O ニ結ビ付クルトキハ,

n 個ノ三角形 ABO, BCO, CDO, ... ヲ得,

而シテ此ノ各三角形ノ三ツノ角ノ和ハ $2\hat{R}$ ナリ,

[41 款]

故ニ　n 個ノ三角形ノ各角ノ和ハ $2n\hat{R}$ ナリ.

然ルニ　此ノ和ハ多角形ノ各角ノ和ト

O ニ於ケル各角ノ和トノ和ニ等シ.

而シテ　O ニ於ケル各角ノ和ハ $4\hat{R}$ ナリ. [18 款]

故ニ　多角形ノ各角ノ和$=(2n-4)\hat{R}$.

45. 系 多角形ノ外角ノ和ハ四直角ニ等シ.

例　題

31. 四邊形ノ各角ノ和ハ四直角ニ等シ.

32. 正 n 角形ノ一角ノ大イサ如何.

33. 正五角形ノ一角ハ幾度ナルカ.

34. 正多角形ノ一外角ガ,正三角形ノ一角ニ等シキトキハ,幾邊形ナルカ.

35. 正多角形ノ一角ガ 135° ナルトキハ,幾邊形ナルカ.

36. 正多角形ノ一外角ガ,其ノ内角ノ六分ノ一ナルトキハ,幾邊形ナルカ.

---

46. **定義** 二つの圖形の一を,他の一に重ねて全く相合せしめ得れば,是等の圖形は,之を**合同**,或は**全等**なりと云ふ.

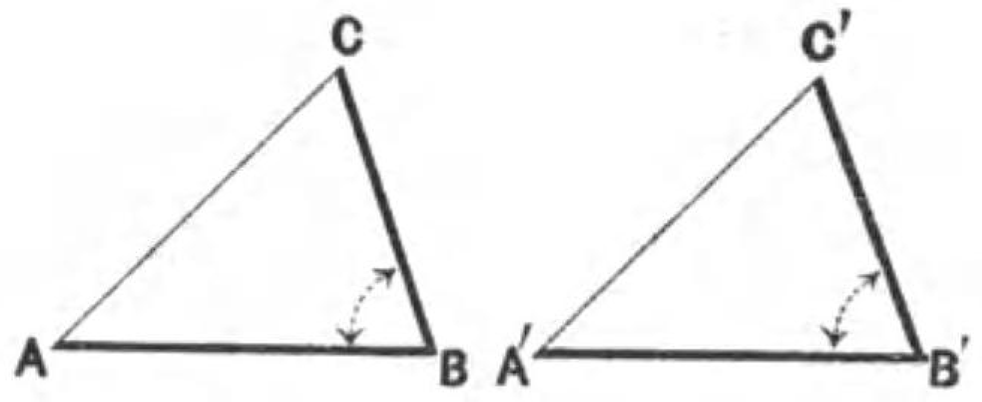
二ツノ圖形ガ全等ナルコトヲ示スニハ,其ノ間ニ≡ナル記號ヲ用フ.

47. **定理** 二つの三角形に於て,二邊及び其の夾角が,それぞれ相等しきときは,其の二つの三角形は全等なり.

$\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ ニ於テ

$$\left.\begin{array}{l} AB=A'B' \\ BC=B'C' \\ \hat{B}=\hat{B'} \end{array}\right\}$$

ナルトキ



$\underline{\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'}$

ナルコトヲ證セントス.

證 $\triangle ABC$ ヲ $\triangle A'B'C'$ ノ上ニ重ヌルニ,

B ヲ B' ノ上ニ置キ,BA ヲ $B'A'$ ニ沿ヒテ置クトキハ,

BC ハ $B'C'$ ニ重ナル, $\because$ $\hat{B}=\hat{B'}$. [13 款 III]

而シテ $AB=A'B'$ 及ビ $BC=B'C'$

ナルユヱ A ハ A' ニ, C ハ C' ニ合ス.

而シテ AC ハ $A'C'$ ニ重ナル. [13 款 III (1)]

$\therefore$ 二ツノ三角形ハ相合ス.

$\therefore$ $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$. [46 款]

注意 1. 此ノ證明ノ如ク重ネ合シテ證明スル法ヲ**重置法**ト云フ.

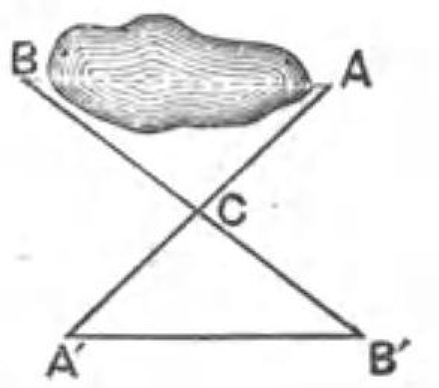
注意 2. 全等ナル二ツノ三角形ハ,其ノ總テノ部分ヲ相重ナラシメ得ルユヱ,

二ツノ三角形ガ全等ナルトキハ,等角ニ對スル邊ハ相等シク,又等邊ニ對スル角ハ相等シ.

例 題

37. 四邊形 $ABCD$ ニ於テ $AB=DA$, 而シテ對角線 AC ガ角 BAD ヲ二等分スルトキハ $BC=DC$, 又 AC ハ角 DCB ヲ二等分スルコトヲ證セヨ.

38. 湖水ヲ隔テタル二點 A, B ノ距離ヲ測ランニハ,先ヅ點 C ヲ過リテ ACA', BCB' ノ二直線ヲ取リ, $CA'=CA$, $CB'=CB$ ナラシメ, $A'B'$ ヲ



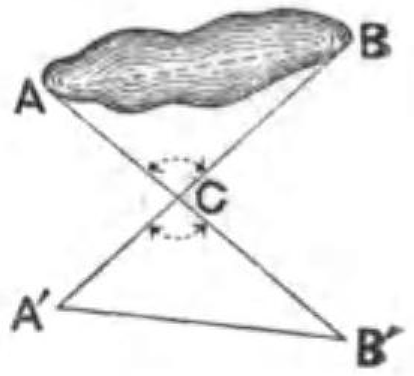
測レバヨシ,何故ナルカ.*

---

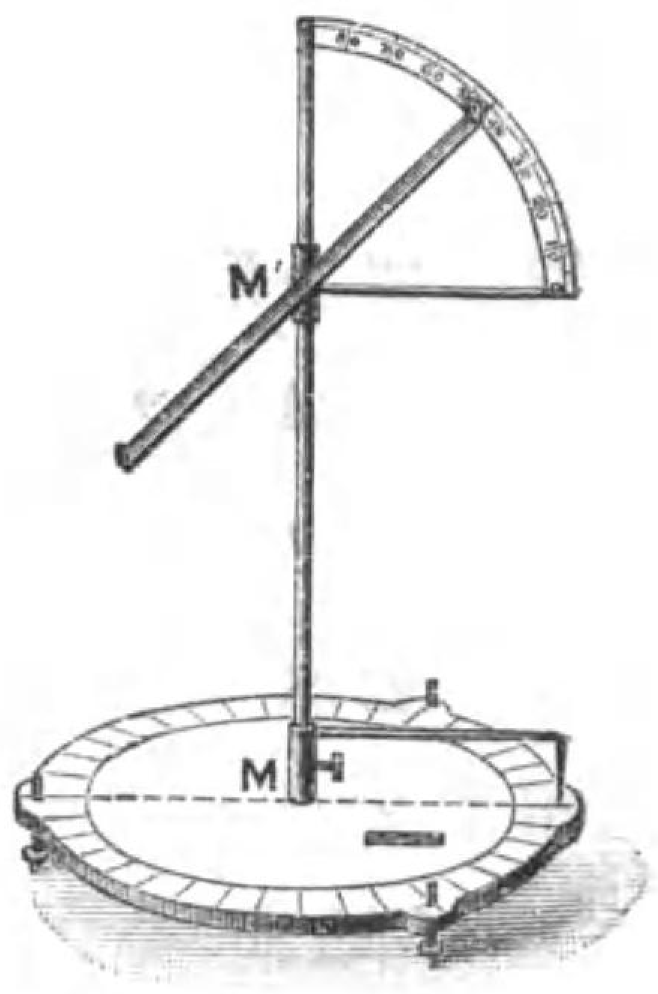
48. 定理 二つの三角形に於て,其の二角及び其の二角の夾邊が,それぞれ相等しきときは,其の二つの三角形は全

---

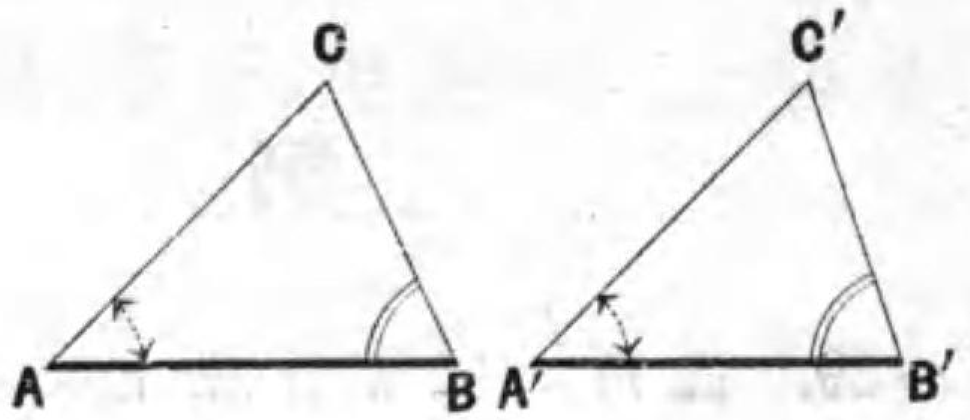
* 本題ハ又圖ノ如ク A′C=CA, B′C=CB ナル如ク取リテ A′B′ ヲ測ルモ可ナリ. 但前ノ圖ノ如クスレバ,三角形 A′B′C ト三角形 ABC トハ全ク相等シク,即チ相重ナラシメ得可ケレドモ,此ノ圖ノ如キハ,三角形 A′B′C ヲ裏返スニアラザレバ,三角形 ABC ト重ネ合スコト能ハザルナリ.



又横ノ角[之ヲ**水平角**ト云ヒ,平地上ニ度リタル角ノ如キ是ナリ],及ビ縦ノ角[之ヲ**垂直角**ト云ヒ,木又ハ塔ノ如キモノヲ,地面上ニテ度リタル角ノ如キ是ナリ]ヲ測ル簡單ナル器械ハ,圖ニ示ス如キモノニシテ, MM′ ナル杆ハ M ニ於ケルそっけっとニ挿入シテ旋廻自在ナラシメ,横杆ノ先端ニ,平圓板上ニ度數ヲ指示スル針ヲ有シ,以テ横ノ角ヲ測リ,又 M′ ニ於テ縦ノ圓ノ度數ヲ指示スル杆ヲ上下ニ廻轉セシメ,以テ縦ノ角ヲ測ル.



等なり.*



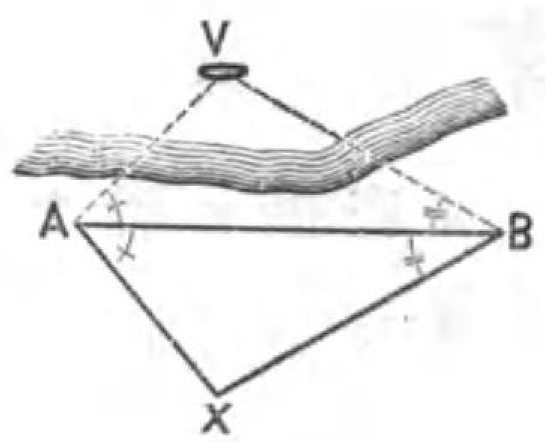
△ABC, 及ビ
△A′B′C′ ニ於テ
$\hat{A}=\hat{A}'$, $\hat{B}=\hat{B}'$, $AB=A'B'$
ナルトキハ
△ABC≡△A′B′C′
ナルコトヲ證セントス.

證 [△ABC ヲ △A′B′C′ ノ上ニ重ヌルニ, A ヲ A′ ノ上ニ, AB ヲ A′B′ ニ沿ヒテ置キ,前款ノ如ク重置法ニ依リテ證明ス可シ].

注意 二ツノ三角形ニ於テ,任意ノ二角ガソレゾレ相等シク,一組ノ等角ニ對スル邊ガ相等シキ場合ハ,本定理ニ歸ス. [42 款系 2].

---

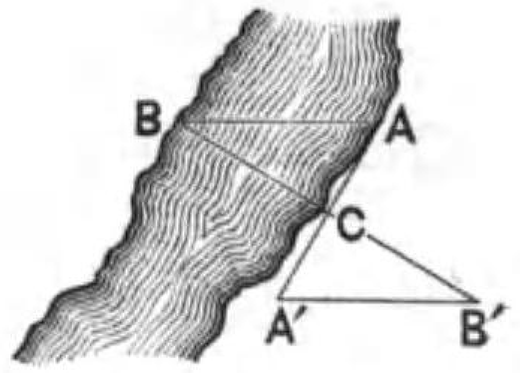
* たーれす [Thales] ハ此ノ定理ヲ"碇泊セル船ノ位置ヲ定ムルコト"ニ應用セリ. 即チ船 V ノ位置ヲ定メンガ爲ニ,海岸 AB ニ於テ角 VAB, VBA ヲ測リ,陸上ニ三角形 VAB ト全等ナル三角形 XAB ヲ作リ; AX, BX ノ長サヲ測リテ, AV, BV ノ長サヲ知リ,以テ船 V ノ位置ヲ定ムルニ在リ.



例　　題

*39. 或角ノ二等分線上ノ各點ハ,角ノ二邊ヨリ等距離ニアリ.

40. 河ノ岸ニ在ル點 A ヨリ對岸ニ在ル點 B ノ距離ヲ測ランド欲シテ,先ヅ點 C ヲ取リ, AC ヲ A′ ニ引キ延バシ, A′C=AC ナラシメ,角 CA′B′ ヲ角 CAB ニ等シク, B′CB ヲ一直線ニ取リテ,三角形 A′B′C ヲ作リ, A′B′ ヲ測レバ AB ノ長サヲ得ト云フ,何故ナルカ.



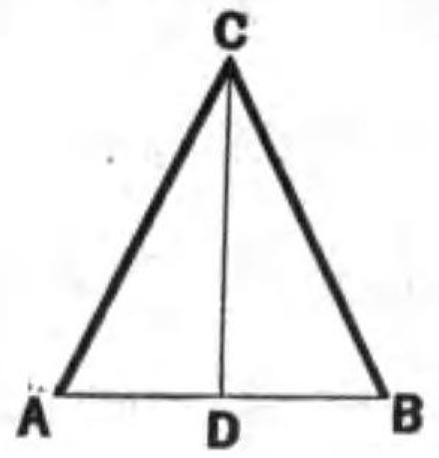
---

49. 定義　三角形の二邊が相等しきときは,之を**二等邊三角形**と云ふ.

二等邊三角形ニ於テ,相等シカラザル邊ヲ**底邊**ト稱シ,底邊ニ對スル角ヲ**頂角**,頂角ノ頂點ヲ二等邊三角形ノ**頂點**,頂點ヨリ底邊ヘ引ケル垂線ヲ**高サ**ト云ヒ,又底邊ニ隣ル角ヲ**底角**ト云フ.

注意　任意ノ三角形ニ於テハ,任意ノ一邊ヲ**底邊**ト見ルコトヲ得.

50. 定理　二等邊三角形の二つの底角は相等し.



△ABC ニ於テ

AC=BC トスルトキハ

$\hat{A}=\hat{B}$

ナルコトヲ證セントス.

證　角 ACB ヲ二等分スル直線 CD ヲ引クトキハ,

△ACD, △BCD ニ於テ

AC=BC　　［假設］
CD ハ共通
$\widehat{ACD}=\widehat{BCD}$　　［作圖］

∴　△ACD≡△BCD,　　［47 款］

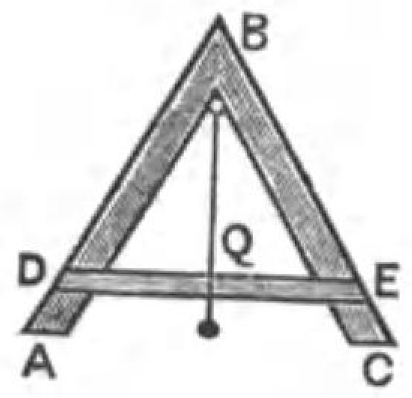
依リテ　　$\hat{A}=\hat{B}$.

注意　斯ノ如クニツノ三角形ヲ,互ニ比較シテ證明スル法ヲ**比較法**ト云フ.

51. 系 1.　二等邊三角形ノ頂角ノ二等分線ハ,底邊ニ垂直ニシテ且コレヲ二等分ス.*

---

* 此ノ理ニ依リテ大工ノ用フル水準器ヲ作リ得ベシ.　即チ圖ノ如クA字形ノ枠ヲ作リ, BD=BE ナラシメ, B ニ螺著シタル鈎ニ絲ヲ懸ケテ重錘ヲ吊ストキ,其ノ絲ガ DE ノ中點 Q ヲ過レバ, DE ハ水平トナル.



注意 或直線ニ垂直ニシテ,且コレヲ二等分スル直線ヲ,始ノ直線ノ**垂直二等分線**ト云フ.

而シテ二等邊三角形ノ頂角ノ二等分線モ,亦底邊ノ垂直二等分線モ,唯一ツニシテ,

頂角ノ二等分線ハ,底邊ノ垂直二等分線ナルユヱ,逆ニ底邊ノ垂直二等分線ハ,又頂角ノ二等分線ナリ.*

系 2. 等邊三角形ハ何レノ邊ヲモ底邊ト見ルコトヲ得ルユヱ,等邊三角形ノ總テノ角ハ相等シ.

又ソノ三ツノ高サハ相等シ.

例題

*41. 二等邊三角形ノ底邊ノ兩端ヨリ,對邊ノ中點ヘ引ケル直線ハ相等シ.

三角形ノ一ツノ角ノ頂點ヨリ,對邊ノ中點ヘ引ケル直線ヲ**中線**ト云フ.

*42. 同ジ底邊ノ上ニ立ツ二ツノ二等邊三角形ノ頂點ヲ結ビ付クル直線ハ,其ノ頂角ノ二等分線ニシテ,且共通ノ底邊ノ垂直二等分線ナリ.

* 若シ唯一ツノXト,唯一ツノYトアリテ,XハYナルコトヲ證シ得レバ,YハXナルコトハ,證ヲ竢タズシテ明カナリ. 之ヲ**同一法**ト云フ.

*43. 二等邊三角形ノ頂角ノ外二等分線ハ,底邊ニ平行ス.

44. 二等邊三角形 ABC ト全等ナル二等邊三角形 DEF ヲ作リ, 47 款ノ定理ヲ用ヒテ,本定理ヲ證明セヨ.

---

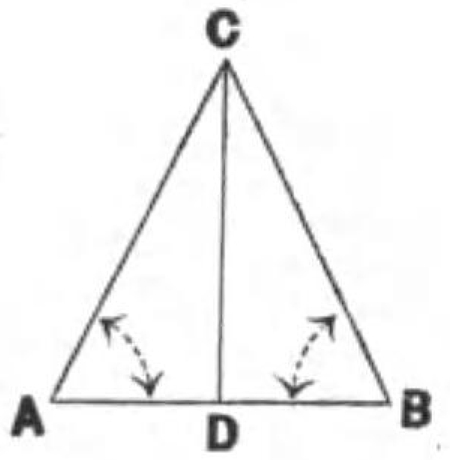
52. 定理 三角形の二つの角が相等しきときは,之に對する邊も亦相等し.

△ABC ニ於テ

$\hat{A}=\hat{B}$ ナルトキハ

BC=AC

ナルコトヲ證セントス.



證 [C ヨリ AB ヘ垂線 CD ヲ引キ 50 款ノ如ク,比較法ニ依リテ證明セヨ].

53. 系 三角形ノ總テノ角ガ,互ニ相等シキトキハ,總テノ邊ハ互ニ相等シ. 故ニ

等邊三角形は等角三角形ニシテ, [51 款系 2]

等角三角形は等邊三角形ナリ. [52 款]

注意 50款及ビ52款ヨリ 三角形ノ二邊ガ相等シケレバ,是等ノ邊ニ對スル角ハ相等シク,

而シテ逆ニ 三角形ノ二角ガ相等シケレバ,是等ノ角ニ對スル邊ハ相等シ.

故ニ 三角形ノ二邊ガ相等シカラザレバ,是等ノ邊ニ對スル角ハ相等シカラズ.

而シテ 三角形ノ二角ガ相等シカラザレバ,是等ノ角ニ對スル邊ハ相等シカラズ.*

54. 定義 三角形の各邊が悉く不等なるものを,**不等邊三角形**と云ふ.

是ニ依リテ 不等邊三角形ハ,其ノ何レノ二角モ相等シカラズ.

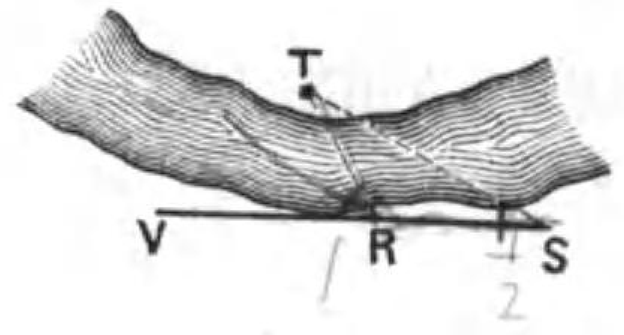
例題

45. 三角形 ABC ニ於テ $\hat{B}=2\hat{A}$ ナルトキ,角 B ヲ

* 若シ定理ノ雛形ヲ
「A ガ B ナルトキハ C ハ D ナリ」トセバ
「C ガ D ナラザルトキハ A ハ B ナラズ」ヲ前ノ定理ノ**對偶**ト云ヒ,或定理ガ眞ナレバ,其ノ對偶ハ必ズ眞ナリ.

二等分スル直線ガ,對邊 AC ニ D ニ於テ交ルトキハ, AD ハ BD ニ等シキコトヲ證セヨ.

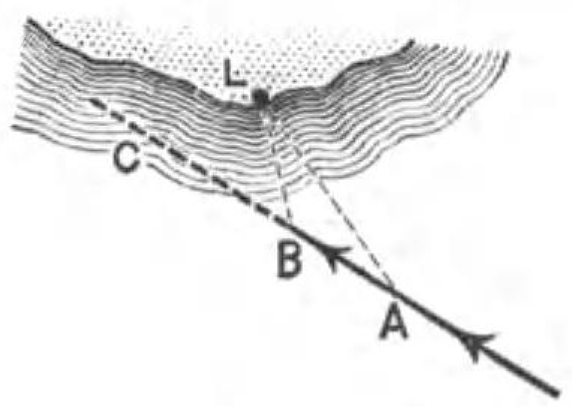
46. 河ノ彼岸ニアル點 T ハ,此ノ岸ノ點 R ヨリ幾何ノ距離ニアルカヲ知ラントト欲シ,此ノ岸ニ直線 VR ヲ引キ,角 VRT ヲ測リ,ソレヨリ VR ヲ點 S ニ引キ延バシ,角 RST ヲ角 VRT ノ二分ノ一ニ等シカラシムレバ, RS=RT ナルコトヲ證セヨ.*



47. 二等邊三角形ノ底邊ノ兩端ニ於ケル外角ヲ二等分スル直線ト底邊トハ,一ツノ二等邊三角形ヲ成ス.

48. 一ツノ直角三角形ハ,二ツノ二等邊三角形ニ分ツコトヲ得.

* 航海者ハ海岸ノ某點ニ至ル距離ヲ知ランガ爲ニ,此ノ理ヲ應用スルナリ. 例ヘバ ABC ノ方向ニ航海シツツアル船ガ, A ニ於テ一ノ燈臺 L ヲ認メ,舳ニ於ケル角 LAB ヲ測リ,ソレヨリ船ガ進ムニ從ヒテ,舳ニ於ケル角ハ,漸々增大シ,角 LBC ガ角 LAB ノ二倍トナレリトセバ, BL=BA ナルユヱ,船ト燈臺トノ距離ヲ知ルナリ. 但 AB ナル距離ハ,航程器ニテ之ヲ測ルモノトス.

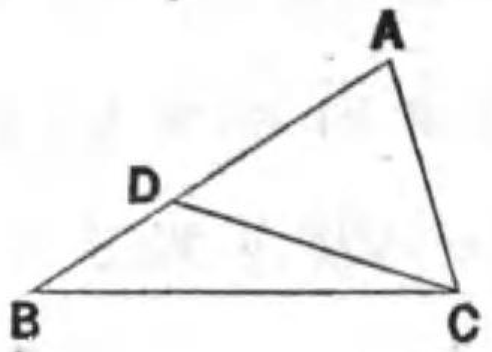


55. 定理 三角形の二邊が相等しからざるときは,大なる邊に對する角が,小なる邊に對する角より大なり.

△ABC ニ於テ

AB>AC ナルトキハ

$A\hat{C}B>A\hat{B}C$



ナルコトヲ證セントス.

證 AB ノ上ニ AD=AC ヲ取リ,

CD ヲ結ビ付ケヨ.

然ルトキハ　AD=AC

ナルヲ以テ　$A\hat{C}D=A\hat{D}C$,　[50 款]

然ルニ　$A\hat{D}C>A\hat{B}C$,　[42 款系 1]

故ニ　$A\hat{C}D>A\hat{B}C$,

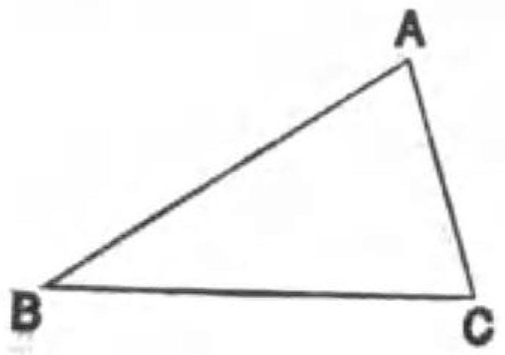
故ニ尚更　$A\hat{C}B>A\hat{B}C$.　[12 款 I]

56. 定理 三角形の二角が相等しからざるときは,大なる角に對する邊が,小なる角に對する邊より大なり.

△ABC ニ於テ

$A\hat{C}B>A\hat{B}C$ ナルトキハ

AB>AC



ナルコトヲ證セントス.

證 若シ　AB≯AC

ナルトキハ　AB=AC,

或ハ　AB<AC

ナラザルベカラズ.

然ルニ　AB≠AC,

如何トナレバ,若シ　AB=AC

ナルトキハ　$A\hat{C}B=A\hat{B}C$

ナルベケレバナリ.　[50 款]

又　AB≮AC,

如何トナレバ,若シ　AB<AC

ナルトキハ　$A\hat{C}B<A\hat{B}C$

ナルベケレバナリ.　[55 款]

即チ　AB≠AC,

又　AB≮AC,

故ニ　AB>AC.*

---

* 斯ノ如ク一群ノ定理

$$\left.\begin{array}{l} AB>AC \text{ ナルトキハ } A\hat{C}B>A\hat{B}C \\ AB=AC \text{ ナルトキハ } A\hat{C}B=A\hat{B}C \\ AB<AC \text{ ナルトキハ } A\hat{C}B<A\hat{B}C \end{array}\right\} \text{ヲ知リテ,其ノ逆ノ眞ナルコトヲ}$$

推定スル法ヲ轉換法ト云フ.

例題

49. 三角形ABCノ角Aヲ二等分スル直線ガ,邊BCト點Dニ於テ出會フトキハ

(1) $AB>AC$ ナレバ $\widehat{ADB}$ ハ鈍角ナリ.

(2) $AB>BD$ 及ビ $AC>CD$.

50. 直角三角形ノ斜邊ハ,他ノ邊ヨリ大ニシテ,鈍角三角形ノ鈍角ニ對スル邊ハ,他ノ邊ヨリ大ナリ.

---

57. 定理 一直線外の一點より,之に引ける總ての線分に就きて,

(1) 垂線は最短なり.

(2) 垂線の趾より相等しき距離に趾をもつ斜線は相等し.

(3) 垂線の趾より遠き距離に趾をもつ斜線は,近き距離に趾をもつ斜線より長し.

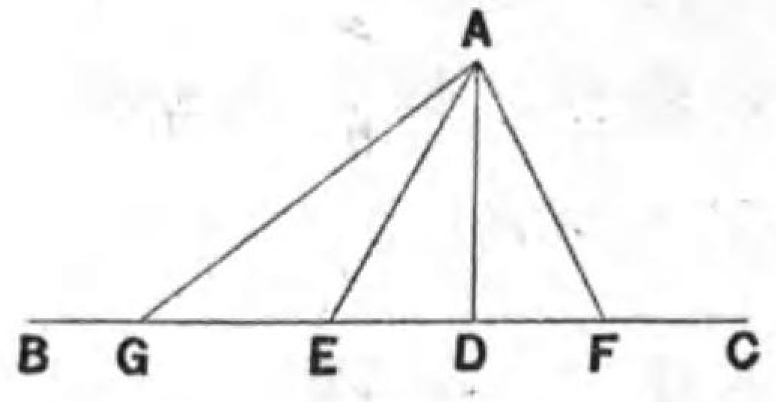
一點Aヨリ一直線BCヘ引ケル垂線ヲADトシ,AE, AF, AGヲ斜線トスルトキハ

(1) $AD<AE$.

(2) $DE=DF$

ナレバ

$AE=AF$.



(3) $DG>DE$, 或ハ DF ナレバ

$AG>AE$, 或ハ AF

ナルコトヲ證セントス.

證 (1) 三角形ADEニ於テ,

$\widehat{ADE}$ ハ直角ナルユヱ, [假設]

$\widehat{AED}$ ハ直角ヨリ小ナリ. [42款系3]

故ニ $\widehat{AED}<\widehat{ADE}$,

故ニ $AD<AE$. [56款]

(2) △ADE, △ADFヲ比較シ, 47款ノ定理ニ依リテ證明スベシ.

(3) △AGEニ於テ, 56款ノ定理ニ依リテ證明スベシ.

58. 系 1. 一直線外ノ一點ヨリ,之ニ引ケル垂線ト相等シキ角ヲナス斜線ハ相等シク,又垂線ト大ナル角ヲナス斜線ハ,小ナル角ヲナス斜線ヨリ長シ.

系 2. 一直線外ノ一點ヨリ,之ニ相等シキ二ツノ

ノ線分ヲ引クコトヲ得. 唯二ツニ限ル. 而シテ是等ノ線分ノ間ノ角ハ,其ノ點ヨリ引ケル垂線ニテ二等分セラル.

59. 定理 二つの三角形に於て,三邊がそれぞれ相等しきときは,其の二つの三角形は全等なり.

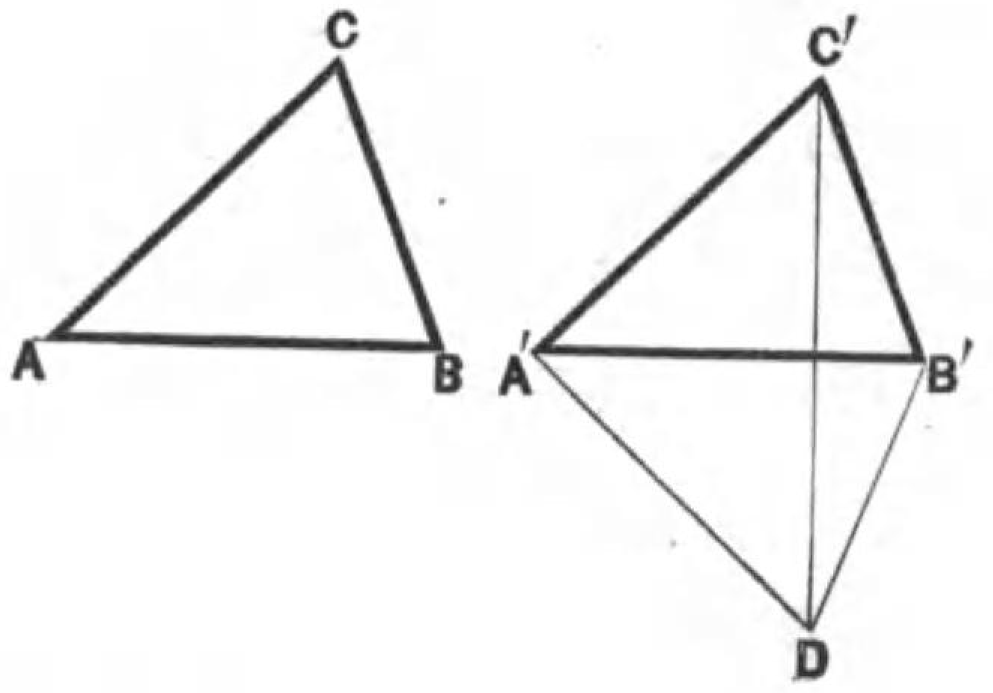
$\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ ニ於テ

$$\underline{AB=A'B',\ BC=B'C',\ CA=C'A'}$$

ナルトキ $\underline{\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'}$

ナルコトヲ證セントス.

證 $\triangle ABC$ ヲ裏返シテ A ヲ A′ ノ上ニ, 邊 AB ヲ A′B′ ニ沿ヒテ重ネ,點 C ハ點 D ニ來ルトセヨ.



B ハ B′ ノ上ニ落ツ.

$$\because\ AB=A'B'.$$

而シテ $\triangle A'B'D$ ハ $\triangle ABC$ ノ裏返シタル位置ナリ.

C′D ヲ結ビ付ケヨ.

サテ $A'C'=A'D$

ナルユヱ $A'\widehat{D}C'=A'\widehat{C'}D$, [50 款]

同様ニ $B'\widehat{D}C'=B'\widehat{C'}D$,

故ニ $A'\widehat{D}B'=A'\widehat{C'}B'$ [12 款 III, 或ハ IV]

又 $A'D=A'C'$

$B'D=B'C'$

ナルユヱ $\triangle A'DB' \equiv \triangle A'C'B'$. [47 款]

然ルニ $\triangle ABC \equiv \triangle A'DB'$, [作圖].

$\therefore\ \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.*

注意 三角形 ABC ニ於テ,邊 BC, CA, AB ヲソレゾレ小文字 a, b, c ニテ表ハスヲ通例ナリトス.

例　題

*51. 二等邊三角形ノ底邊ヘ引ケル中線ハ,底邊ノ垂直二等分線ニシテ,又頂角ノ二等分線ナリ.

52. 三角形 ABC ノ二邊 AB, AC 上ニ AD=AE ヲ取リ, DE ヲ底邊トシテ其ノ上ニ二等邊三角形 DEF ヲ作ルトキハ, AF ハ角 BAC ヲ二等分ス.

* 此ノ證ハふぃろー [Philo, 西曆紀元前150年頃ノ人] ノ發見セシモノナリ.

60. 定理 二つの三角形に於て,二つの邊がそれぞれ相等しく,且その一對角が相等しきときは,他の一組の等邊に對する角は,

(1) 相等しきか,或ハ

(2) 互に補角なり.

$\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ ニ於テ,

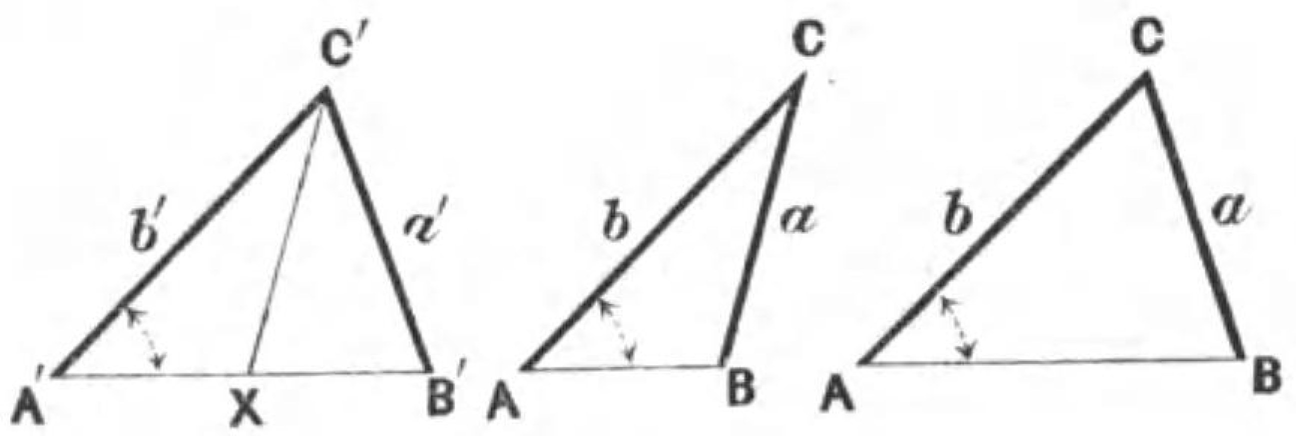
$$\underline{a=a',\ b=b',\ \hat{A}=\hat{A}'}$$

ナルトキ

(1) $\underline{\hat{B}=\hat{B}'}$ 從ヒテ $\underline{\triangle ABC\equiv\triangle A'B'C'}$.

或ハ (2) $\underline{\hat{B}+\hat{B}'=2\hat{R}}$

ナルコトヲ證セントス.



證 $\triangle ABC$ ヲ $\triangle A'B'C'$ ノ上ニ重ヌルニ,

A ヲ A' ノ上ニ, b ヲ b' ト合セシメ, B 及ビ B' ヲ b ノ同傍ニアラシムレバ,

$\hat{A}=\hat{A}'$ ナルユヱ, AB ハ A'B' ニ沿ヒテ重ナル.

然ルトキハ B ハ B' ノ上ニ落ツルカ, (1)

或ハ AB 又ハ其ノ延線上ノ他ノ或點 X ノ上ニ落ツ可シ. (2)

(1) ノ場合ニハ 二ツノ三角形ハ合同シ,

$$\hat{B}=\hat{B}'.$$

(2) ノ場合ニハ $C'X=a=a'$

ナルユヱ $C'\widehat{B'}X=C'\widehat{X}B'$, [50 款]

然ルニ $C'\widehat{X}A'+C'\widehat{X}B'=2\hat{R}$, [19 款]

$$\therefore\ \hat{B}+\hat{B}'=2\hat{R}.$$

注意 本定理ノ既知件ヨリ,二ツノ三角形ヲ得ルトキハ,之ヲ**兩意ノ場合**ト稱ス.

61. 系 二ツノ三角形 ABC, A'B'C' ニ於テ

$a=a'$, $b=b'$, $\hat{A}=\hat{A}'$ ナルトキ.

(1) $\hat{A}=\hat{R}$ 或ハ $\hat{A}>\hat{R}$ ナルトキハ,兩形ハ全等ナリ.

(2) $a>b$ ナルトキハ,兩形ハ全等ナリ.

(3) $a=b$ ナルトキハ,兩形ハ全等ナリ.

(4) $a<b$ ナルトキハ,兩形ハ兩意ノ場合ナリ.

(5) $\hat{B}'=\hat{R}$ ナルトキハ,兩形ハ全等ナリ.

(6) $\hat{B}$, $\hat{B}'$ ガ共ニ鈍角,或ハ共ニ銳角ナルトキハ,兩形ハ全等ナリ.

例　題

*53. 二等邊三角形ノ頂點ヨリ底邊ヘ引ケル垂線ハ,底邊ノ二等分線ニシテ,又頂角ノ二等分線ナリ.

---

62. 定理 二つの三角形に於て,二邊がそれぞれ相等しく,其の夾角が不等なるときは,夾角の大なる方の對邊は,小なる方の對邊より大なり.

$\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ ニ於テ

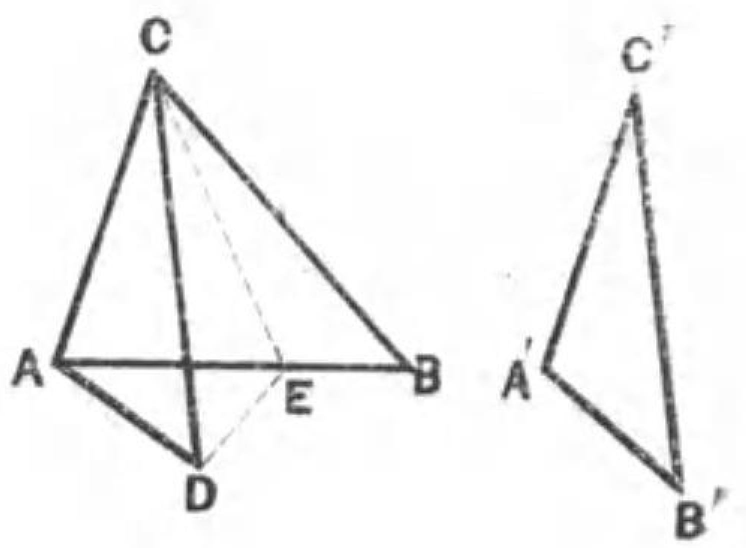
$$\underline{AC=A'C',\ BC=B'C',\ \widehat{ACB}>\widehat{A'C'B'}}$$

ナルトキハ　$\underline{AB>A'B'}$

ナルコトヲ證セントス.

證 $\triangle A'B'C'$ ヲ $\triangle ABC$ ノ上ニ重ヌルニ,

A' ヲ A ノ上ニ, $A'C'$ ヲ AC ニ沿ヒテ置クトキハ, $A'C'=AC$ ナルユヱ C' ハ C ノ上ニ落ツ. 而シテ點 B ト點 B' トハ AC ノ



同ジ傍ニアラシメ,點 B' ハ或點 D ニ落ツルトセヨ.

然ルトキハ　$\triangle ADC$ ハ $\triangle A'B'C'$ ノ新位置ナリ.

而シテ　$\widehat{A'C'B'}<\widehat{ACB}$, 從ヒテ $\widehat{ACD}<\widehat{ACB}$

ナルユヱ　CD ハ角 ACB ノ内ニアリ.

若シ點 D ガ AB 上ニ來レバ $AB>A'B'$ ナルコト明カナリ,故ニ點 D ガ AB 上ニ來ラザル場合ヲ論ゼン.

角 DCB ヲ CE ニテ二等分シ, AB ニ E ニ於テ交ラシメ, DE ヲ結ビ付ケヨ.

然ルトキハ　$\triangle DCE$, $\triangle BCE$ ニ於テ

$$\left.\begin{array}{l} DC=BC \\ CE\ \text{ハ共通} \\ \widehat{DCE}=\widehat{BCE} \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{r} [\text{假　設}] \\ \\ [\text{作　圖}] \end{array}$$

$\therefore$ $\triangle DCE\equiv\triangle BCE$,　[47 款]

從ヒテ　$DE=EB$,

然ルニ　$AB=AE+EB=AE+ED$,

而シテ　此ハ AD ヨリ大ナリ,　[39 款]

$\therefore$ $AB>A'B'$.

例　題

54. $\triangle ACD$ ヲ AC ノ左方,卽チ $\triangle ABC$ ト反對ノ側ニ置キテ本定理ヲ證セヨ.

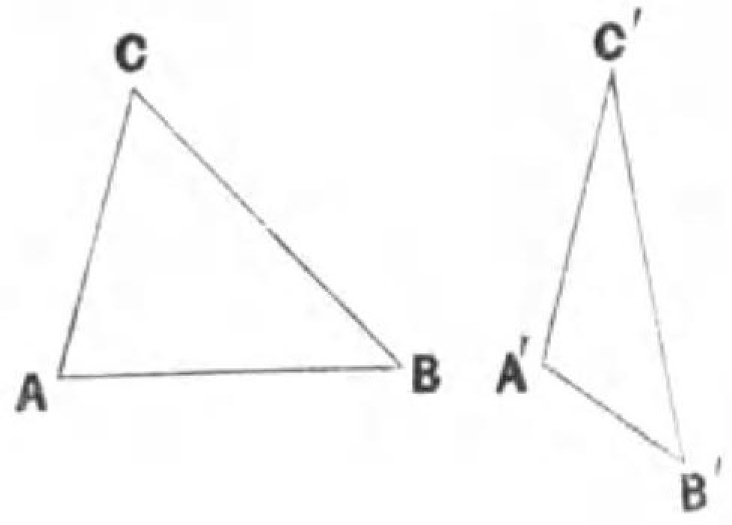
55. 三角形 ABC ニ於テ中線 CD ヲ引クトキ, $\widehat{CDA}$ ガ鈍角ナレバ AC>BC ナリ.

---

63. 定理 二つの三角形に於て,二邊がそれぞれ相等しく,第三邊が不等なるときは,其の大なる邊に對する角は,小なる邊に對する角より大なり.

△ABC, △A′B′C′ ニ於テ

$\left.\begin{array}{l} AC=A'C' \\ BC=B'C' \\ AB>A'B' \end{array}\right\}$



ナルトキハ $\hat{C}>\hat{C'}$

ナルコトヲ證セントス.

證 [轉換法ニ依リテ證明スベシ].

例題

56. 三角形 ABC ニ於テ,中線 CD ヲ引クトキ, AC>BC ナレバ $\widehat{CDA}$ ハ鈍角ナリ.

---

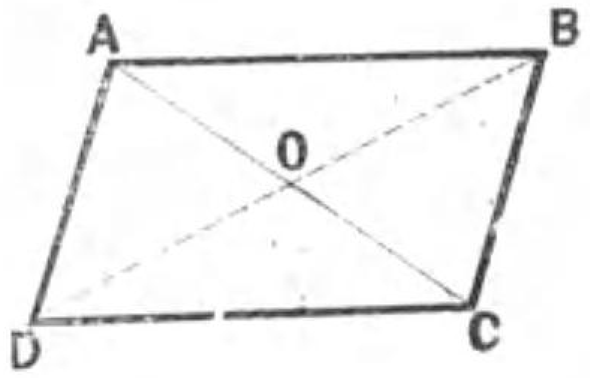
64. 定義 四邊形に於て,二組の對邊が互に平行なるときは,之を**平行四邊形**と云ひ,總ての邊が相等しきときは**菱形**,總ての角が直角なるときは**矩形**,總ての邊が相等しく且總ての角が相等しきときは,之を**正方形**と云ふ.

65. 定理 平行四邊形に於て,二組の對邊は互に相等し.

平行四邊形 ABCD

ニ於テ AB=DC, BC=AD

ナルコトヲ證セントス.



證 AC ハ二平行直線 AB, DC ノ横截線ナルユヱ

$\widehat{BAC}=\widehat{DCA}$, [31 款]

又 AC ハ二平行直線 BC, AD ノ横截線ナルユヱ

$\widehat{BCA}=\widehat{DAC}$, [31 款]

而シテ AC ハ △ABC, △CDA ニ共通ス,

∴ △ABC≡△CDA, [48 款]

∴ AB=DC, BC=AD.

66. 系1. 平行四邊形ノ對角線ハ,之ヲ全ク相等シキ二ツノ三角形ニ分ツ.

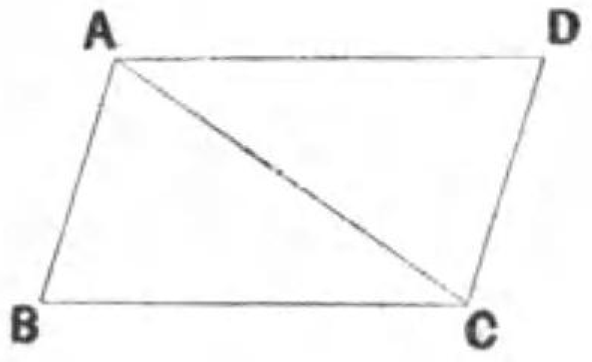
系2. 平行四邊形ニ於テ,二組ノ對角ハ互ニ相等シ.

系3. 平行四邊形ノ二ツノ對角線ハ互ニ二等分セラル.

注意 平行四邊形ニ於テ,次ノ三條ヲ知ル.

1. 兩隣邊ガ相等シキトキハ菱形ナリ.
2. 一角ガ直角ナルトキハ矩形ナリ.
3. 兩隣邊相等シク且一角ガ直角ナルトキハ正方形ナリ.

67. 定理 四邊形の一組の對邊が相等しく,且平行なるときは,平行四邊形なり.



四邊形 ABCD ニ於テ,

AB=DC, 及ビ AB∥DC

ナルトキハ

ABCD ハ平行四邊形ナルコトヲ證セントス.

證 [AC ヲ結ビ付ケテ,之ヲ證明セヨ].

68. 系1. 四邊形ノ二組ノ對邊ガ,各互ニ相等シキトキハ平行四邊形ナリ.

系2. 四邊形ノ二組ノ對角ガ,各互ニ相等シキトキハ平行四邊形ナリ.

系3. 四邊形ノ兩對角線ガ,互ニ二等分セラルルトキハ平行四邊形ナリ.

例 題

*57. 菱形ノ兩對角線ハ互ニ垂直ニシテ,且ソノ角ヲ二等分スルコトヲ證セヨ.

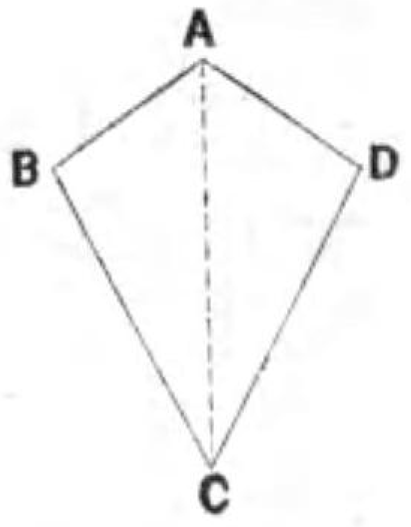
*58. 矩形ノ兩對角線ハ相等シク,何レモ一邊ト等角ヲナスコトヲ證セヨ.

又正方形ニ就キテハ如何.

59. 平行四邊形ノ兩對角線ノ交點ヲ過リテ,兩對邊ノ間ニ引ケル任意ノ直線ハ,該點ニテ二等分セラルルコトヲ證セヨ.

一定點ヲ過リテ一ノ圖形ノ間ニ夾マレタル任意ノ直線ガ,其ノ定點ニテ二等分トナルトキ,此ノ圖形ハ此ノ點ニ關シテ**對稱**ナリト云ヒ,或ハ**點對稱**ヲモツト云フ. 而シテ此ノ定點ヲ**對稱ノ中心**ト稱ス.

60. しるべすたー [Sylvester] 氏ハ一種ノ紙鳶ヲ圖ノ如キ形,即チ **AB=AD, BC=CD** ナル四邊形 **ABCD** トセリ.



此ノ紙鳶ニ於テ

(1) 此ノ軸[AC]ハ **BD** ヲ結ビ付クル直線ヲ直角ニ二等分シ,又角 **A** 及ビ **C** ヲ二等分ス.

(2) 角 **B** 及ビ **D** ハ相等シク,且 **BD** ガ相等シキ邊トナス角ハ相等シ.

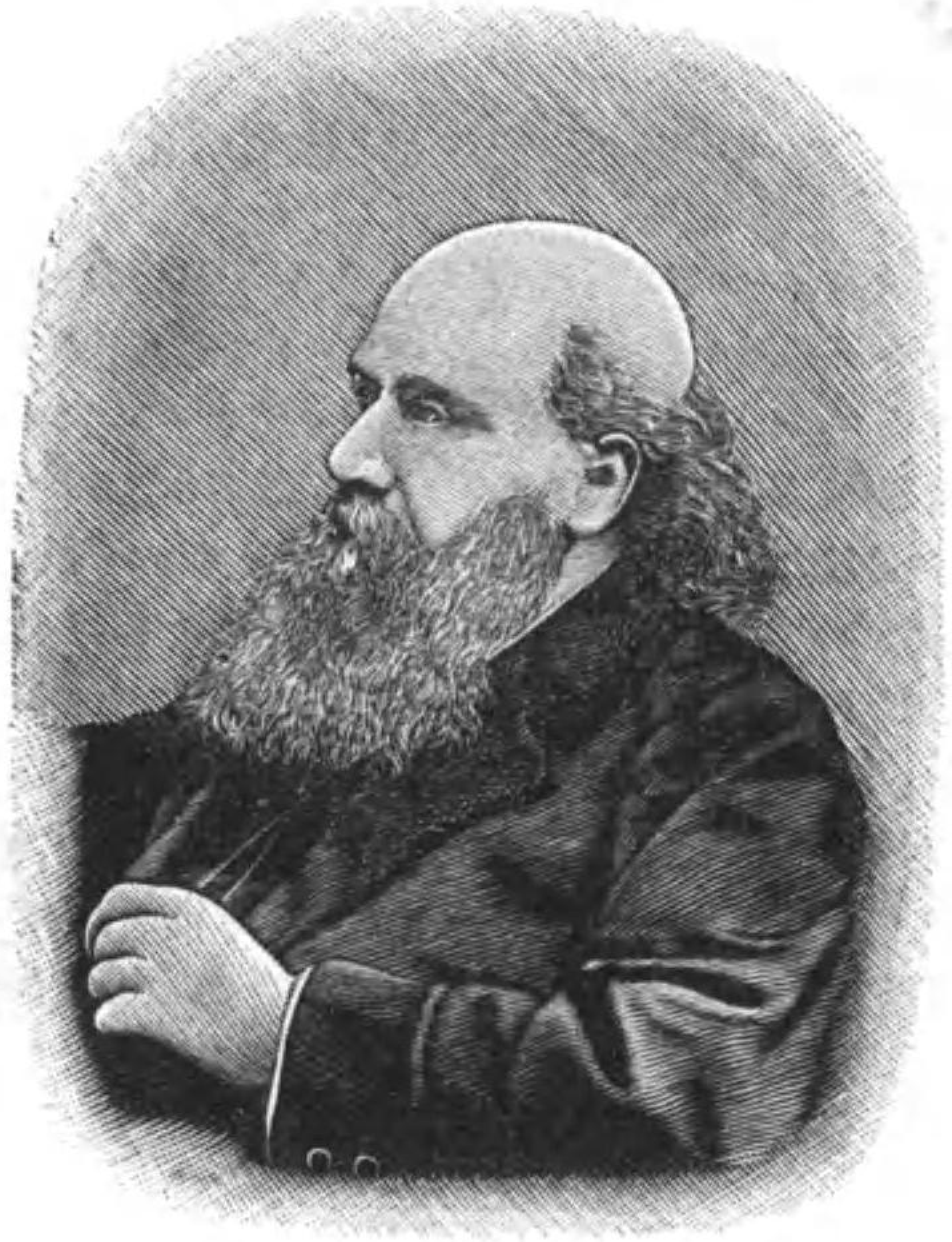
(3) **AC** ヲ軸トシテ折リ返ストキハ △**ABC** ハ全ク△**ADC** ニ重ナル.

一ノ圖形ガ一定直線ヲ折目トシテ,其ノ一部ヲ折リ返シ,全ク他ノ一部ト重ナルトキハ,此ノ圖形ハ此ノ定直線ニ關シテ**對稱**ナリト云ヒ,或ハ**線對稱**ヲモツト云フ. 而シテ此ノ定直線ヲ**對稱ノ軸**ト稱ス.

61. 二ツノ平行四邊形ニ於テ兩隣邊ハ,彼此相等シク,且ソノ夾角モ亦相等シキトキハ,兩形ハ全ク相等シ.

62. 平行四邊形ノ兩對角線ノ交點ヲ過リテ,互ニ直角ニ相交ル二ツノ直線ヲ引キ,其ノ各邊ト交ル點

シルベスター氏肖像



JAMES JOSEPH SYLVESTER.

(1814—1897. A. D.)

シルベスター氏小話

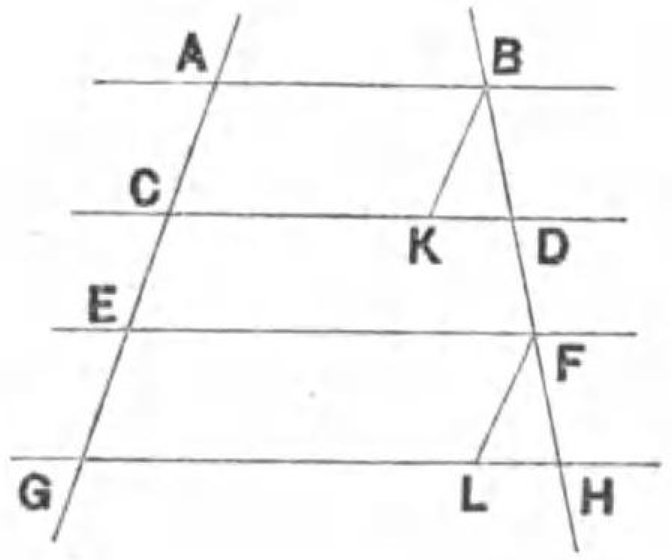
英國ノ數學者ニシテ，西曆 1814 年 9 月 3 日倫敦ニ生レ，1897 年 3 月 15 日ニ死セリ． 氏ハ劍橋(ケンブリッヂ)ニ於テ教育ヲ受ケシガ，同處ニ居ル間ニ，けーれー氏ト生涯ノ交際ヲ結ビタリ，而シテ氏ハ其ノ學殖ニ於テ，けーれー氏ト兄タリ難ク，弟タリ難シ． 氏ハ西曆 1837 年ニ倫敦大學ノ物理學教授トナリ，1841 年ニハゔあーじにあ大學ノ教授トナリ，數年ニシテ英國ニ歸リ，うーりっちノ陸軍大學ノ數學教授トナリ，1877 年ニハじょんすほぷきんす大學ノ數學教授トナリ，其處ニ止マルコト七年ニシテ，又英國ニ歸リ牛津(オックスフォード)ニ於ケル數學ノさべりあん教授トナル． 氏ハ米國ノ數學雜誌 "American Journal of Mathematics" ノ創刊者ニシテ，數年間ソノ記者タリキ． 氏ハ強固ナル人格ヲ有シ，又奮鬪的數學教師ナリシガ，氏ノ著稿ハ夥多ニシテ，斷片的ニ，且研究的ノモノナルユエ，一々玆ニ縷述スルコト能ハズ．

ヲ順次ニ結ビ付クルトキハ，菱形ヲ生ズルコトヲ證明セヨ．

---

69. 定理　二組の二直線が悉く相平行するとき，一つの直線と交り，其の各組の二直線間に夾まるる部分が相等しきときは，他の何れの直線と交るも，亦各組の二直線間に夾まるる部分は相等しかるべし．

AB, CD ト EF, GH トヲ悉ク相平行スル二組ノ直線トシ; ACEG, BDFH ヲ之ニ交ル任意ノ二直線トスルトキ，



ルトキ，　$\underline{AC=EG}$

ナレバ　$\underline{BD=FH}$

ナルコトヲ證セントス．

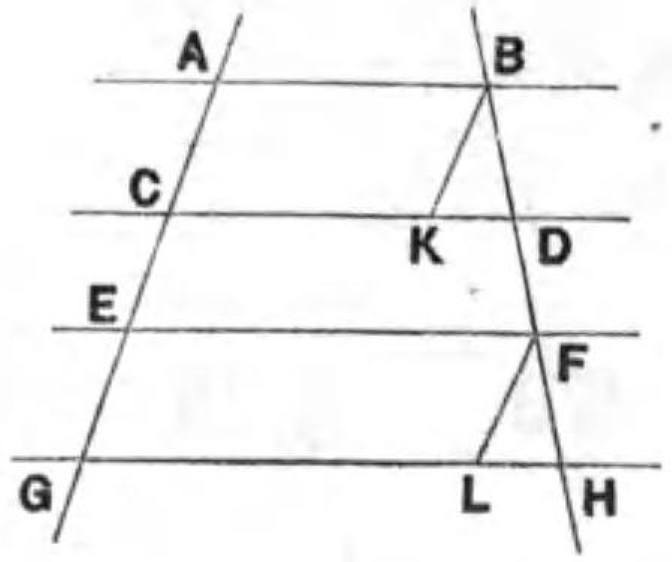
證　若シ BH ガ AG ニ平行スルトキハ，

BD＝AC 及ビ FH＝EG.　[65 款]

而シテ　AC＝EG,　[假　設]

故ニ $BD=FH.$

若シ BH ガ AG ニ平行セザルトキハ, AG ニ平行スル BK, FL ヲ引キ; CD, GH ニソレゾレ K, L ニ於テ交ラシム.



然ルトキハ $BK=AC$ 及ビ $FL=EG,$ [65 款]

然ルニ $AC=EG,$ [假 設]

故ニ $BK=FL.$

又 $\widehat{BKD}=\widehat{ACD},\ \widehat{FLH}=\widehat{EGH},$ [32 款系 1 (2)]

然ルニ $\widehat{ACD}=\widehat{EGH},$

故ニ $\widehat{BKD}=\widehat{FLH}.$

サテ $\triangle BKD,\ \triangle FLH$ ニ於テ

$$\left.\begin{array}{l}\widehat{BKD}=\widehat{FLH}\\ \widehat{BDK}=\widehat{FHL}\\ BK=FL\end{array}\right\}$$ [32 款系 1 (2)]

（而シテ $BK=FL$）

故ニ $BD=FH.$ [48 款注意]

70. **系** 1. 三ツノ平行直線ガ,一ノ横截線ヨリ相等シキ線分ヲ截リ取ルトキハ,他ノ任意ノ横截線ヨリモ亦相等シキ線分ヲ截リ取ルベシ.

系 2. 三角形ノ一邊ノ中點ヨリ,他ノ一邊ニ平行シテ引ケル直線ハ,第三邊ノ中點ヲ過ル.

系 3. 三角形ノ二邊ノ中點ヲ結ビ付クル直線ハ,第三邊ニ平行シ,且ソノ半分ニ等シ.

例 題

*63. 二邊ガ平行スル四邊形ノ,平行セザル二邊ノ中點ヲ結ビ付クル直線ハ,平行スル二邊ニ平行シ,且ソノ二邊ノ和ノ半分ニ等シキコトヲ證セヨ.

二邊ガ平行スル四邊形ヲ**梯形**ト云フ.

*64. 梯形ノ兩對角線ノ中點ヲ結ビ付クル直線ハ,平行スル二邊ニ平行シ,且ソノ差ノ半分ニ等シ.

*65. 四邊形ノ各邊ノ中點ヲ順次ニ結ビ付クレバ,平行四邊形ヲ生ズ,其ノ證如何.

又此ノ四邊形ノ周ハ,元ノ四邊形ノ兩對角線ノ和ニ等シキコトヲ證ス可シ.

*66. 四邊形ノ二組ノ兩對邊ノ中點ヲ結ビ付クル直線ト,兩對角線ノ中點ヲ結ビ付クル直線トハ,同一ノ點ニ於テ相交リ,且互ニ二等分セラル.

雜　　題

*1. 三角形ABCノ各邊上ニ,之ヲ一邊トシテ外方ニ正三角形 BCD, CAE, ABF ヲ作ルトキハ; AD, BE, CF ハ相等シ.

*2. 直角三角形ニ於テ,斜邊ノ中點ハ三ツノ角ノ頂點ヨリ等距離ニアリ.
而シテ此ノ逆モ亦眞ナリ.

3. 三角形ノ一中線ガ兩隣邊トナス二角ニ就キテ,小邊トナス角ハ大邊トナス角ヨリ大ナリ,之ヲ證セヨ.

4. 三角形ノ一角ノ頂點ヨリ對邊ヘ垂線,中線,及ビ其ノ角ノ二等分線ヲ引クトキハ,二等分線ハ他ノ二線ノ間ニアルコトヲ證セヨ.

*5. 二等邊三角形ノ底邊ノ兩端ヨリ,對邊ヘ引ケル垂線ハ相等シキコトヲ證セヨ.

*6. 二等邊三角形ノ底邊上ノ任意ノ一點ヨリ,二ツノ等邊ヘ引ケル垂線ノ和ハ一定ナリ.
若シ點ガ底邊ノ延線上ニアルトキハ,差ガ一定ナリ.

*7. 正三角形内ノ任意ノ一點ヨリ各邊ヘ引ケル

ガウス氏肖像

CARL FRIEDRICH GAUSS.
(1777—1855. A. D.)

ガウス氏小話

氏ハ獨逸ノ數學者ニシテ，歐洲ニ於ケル近代ノ光輝アル數學者ノ一人タリ．氏ハ一勞働者ノ子ニシテ，西曆 1777 年 4 月 30 日ばるんすうぃっくニ於テ生レ，少時げっちんげんニ學生タリシガ，其ノ後，同大學ニ於テ，數學ノ敎授及ビ天文臺長トナレリ．故ニ實際氏ノ活動的生涯ハ同處ニ消費セラレタリ． 氏ハばるんすうぃっくニ學生タリシ以前ヨリ，早ク既ニ最小二乘法ノ研究ヲナシ，1796 年三月ニハ，初等幾何學ニテ圓周ヲ十七等分スベキ方法ヲ發見シ，始メテ古代ノ幾何學ノ發展ヲナシタル人ナリ． 1801 年一月ニハ，天體ノ位置ヲ計算スベキ新法ヲ發見シ，晩年ニハ多ク測地學及ビ電氣學ノ二科ノ研究ニ從事シ，1821 年ヨリ 1824 年マデノ間ニハ，あるとな及ビげっちんげん間ノ子午線ノ長サヲ測レリ． 而シテ氏ハ電氣學ノ數學的理論ノ創立者ナリ． 而シテ 1855 年 2 月 23 日ばるんすうぃっくニ於テ死セリ．

垂線ノ和ハ一定ナリ．

若シ點ガ正三角形ノ外ニアルトキハ如何．

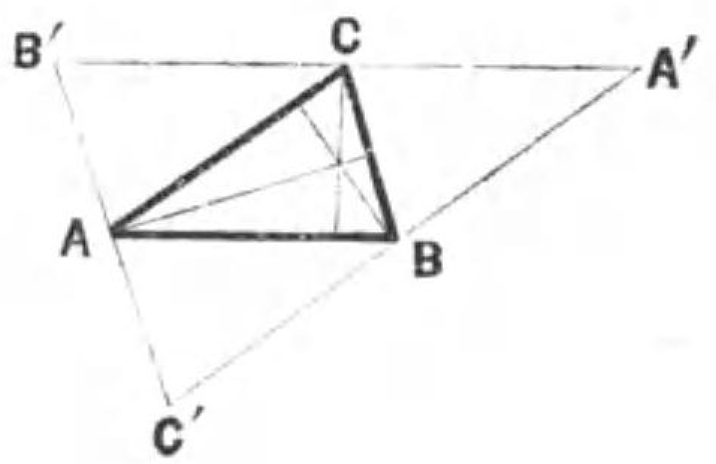
※8. 三角形ノ三ツノ中線ハ，同一ノ點ニ於テ相交ル． 而シテ此ノ點ハ各角頂ヨリ中線ノ三分ノ二ノ所ニアリ．

此ノ點ヲ三角形ノ**重心**ト云フ．

※9. 三角形ノ各邊ノ垂直二等分線ハ，同一ノ點ニ於テ相交ル，而シテ此ノ點ハ各角頂ヨリ等距離ニアリ．

此ノ點ヲ三角形ノ**外心**ト云フ．

※10. 三角形ノ各角頂ヨリ對邊ヘ引ケル垂線ハ，同一ノ點ニ於テ相交ル．*



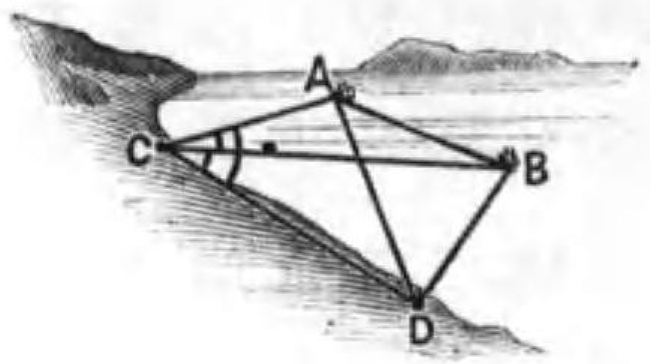
此ノ點ヲ三角形ノ**垂心**ト名ヅク．

[△ABC ノ各角頂ヲ過リテ對邊ニ平行スル直線ヲ引キ，△A′B′C′ ヲ作リテ證セヨ]．

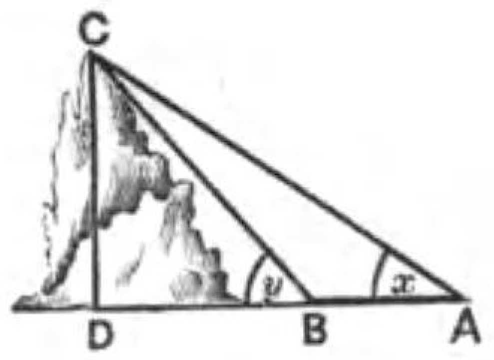
11. 港ニ碇泊スル二船 A, B ノ間ノ距離ヲ測ラン

* 此ノ定理ハ希臘ノ數學者あるきめです [Archimedes] ノ發見セシモノニシテ，玆ニ求メントスル證ハ，近世ノ一大數學家がうす [Gauss] ノ考案ニ係ル．

ト欲シ,海岸ニ二點 C, D ヲ選ミ, C 及ビ D ニ於テ二ツノ角[例ヘバ C ニ於テ, $\widehat{ACB}$, $\widehat{BCD}$, $\widehat{ACD}$ ノ中ノ任意ノ二ツ]ヲ測リ,又 CD ノ長サヲ測リ,以テ AB ノ長サヲ測ル法ヲ示セ.



12. 山ノ高サ CD ヲ測ランガ爲ニ,先ヅ A, B ニ於ケル二ノ角 x, y ヲ測リ,次ニ AB ノ長サヲ測リ,以テ高サ CD ヲ測ル法ヲ示セ.



13. 鋭角三角形ニ於テハ,外心モ垂心モ形内ニアルコトヲ證セヨ.

鈍角三角形ニ於テハ如何.

直角三角形ニ於テハ如何.

※14. 三角形ノ各角ノ二等分線ハ,同一ノ點ニ於テ相交ル. 而シテ此ノ點ハ各邊ヨリ等距離ニアリ. 此ノ點ヲ三角形ノ**內心**ト云フ.

※15. 三角形ノ一角ノ內二等分線ト,他ノ二角ノ外二等分線トハ,同一ノ點ニ於テ相交ル. 而シテ此ノ點ハ各邊ヨリ等距離ニアリ.

此ノ點ヲ三角形ノ**傍心**ト云フ.

16. 三角形 ABC ニ於テ,二邊 AB, AC ガ不等ナレバ中線 BE, CF モ亦不等ナルコトヲ證セヨ.*

[AB>AC ナレバ BE>CF].

※17. 定直線 MN ノ同傍ニ二定點 A, B アリ,今 MN 上ニ一點 P ヲ取リ, AP+BP ヲ最小ナラシメヨ.

又 A, B ガ MN ノ異傍ニアルトキ, AP∼BP ヲ最大ナラシメヨ.

※18. ABC ハ任意ノ角ニシテ, AC ハ BC ニ垂線ナリトス. 若シ AC ノ上ニ一點 P ヲ求メ, BP ヲ引キ延バシテ, A ヲ過リテ BC ニ平行スル直線ニ Q ニ於テ交ラシメ, PQ ヲ AB ノ二倍ナラシメ得レバ,角 PBC ハ角 ABC ノ三分ノ一ナルコトヲ證セヨ.

* 若シ定理ノ雛形ナ

「A ガ B ナルトキハ C ハ D ナリ」トセバ [40 頁, 41 題]

「A ガ B ナラザルトキハ C ハ D ナラズ」ハ [65 頁, 16 題]

前ノ定理ノ**裏**ト云ヒ,或定理ガ眞ナルモ,其ノ裏ハ必ズシモ眞ナラズ.

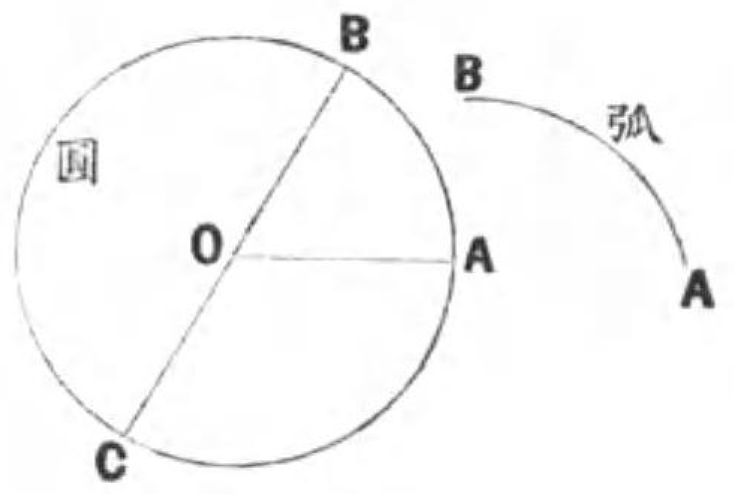
第二編　圓

第一節

弦　弧　中心角

71. **定義**　**圓**とは,**圓周**と稱する線を以て圍みたる平面形にして,形内の一定點より圓周まで引ける直線は,皆相等しき如きものを云ふ.

此ノ定點[O]ヲ圓ノ**中心**,中心ヨリ圓周マデノ直線[OA]ヲ**半徑**,中心ヲ過リ圓周ニ夾マルル直線[BC]ヲ**徑**ト云ヒ,圓周ノ一部[BA]ヲ**弧**ト云フ.



圓ノ半徑ハ皆相等シキユヱ,徑モ亦皆相等シ.

72. **定理**　圓の中心より一點までの距離は,其の點が圓内にあれば半徑より小さく,圓周上にあれば半徑に等しく,圓外にあれば半徑より大なり.　而して此の逆も亦眞なり.

證　[學生ヲシテ自ラ試ミシメヨ].

73. **系**1.　一ツノ圓ニハ,中心ハ唯一ツアルノミ.

系2.　圓ハ中心ニ關シテ對稱ナリ.

74. **定理**　相等しき半徑の圓は,全く相等し.

證　二ツノ圓ノ一ヲ取リ,其ノ中心ヲ他ノ圓ノ中心上ニ落ツルヤウニ,之ヲ重ヌルトキハ,

前ノ圓周上ノ各點ハ,後ノ圓周上ニアルベク,

逆ニ　後ノ圓周上ノ各點ハ前ノ圓周上ニアルベシ.

如何トナレバ　二ツノ圓ノ半徑ガ相等シケレバナリ.　[72款]

卽チ　二ツノ圓ハ相合スルユヱ,全ク相等シ.

75. **系**1.　相合スル二ツノ圓ノ半徑ハ相等シ.

系2.　圓ノ中心ヲ固定シ,此ノ圓ヲ自己ノ平面上ニテ廻轉セシムレバ,其ノ各位置ハ恒ニ原ノ圓ニ合ス.

系 3. 徑ヲ共有スル二ツノ圓ハ相合ス.

系 4. 半徑相等シカラズシテ,共通ノ中心ヲモツ圓ハ出會フコト能ハズ.

共通ノ中心ヲモツ圓ヲ**同心圓**ト云フ.

系 5. 周ガ出會フ處ノ二ツノ圓ハ,同心ナルコト能ハズ.

例題

※1. 矩形ノ四ツノ角頂ハ,同一ノ圓周上ニ在リ.

2. 平行四邊形ハ,如何ナル場合ニ,四ツノ角頂ガ同一ノ圓周上ニアルカ.

※3. 斜邊ヲ共有スル直角三角形ノ直角頂ハ,同一ノ圓周上ニアリ.

---

76. 定理 圓の徑は,之を全く相等しき二つの部分に分つ.

證 [徑ニテ分タレタル圓ノ一部ヲ,其ノ徑ヲ折目トシテ折返ストキハ,全ク他ノ一部ノ上ニ重ナリ合フコトニ依リテ證スベシ].

77. 系 1. 圓ハ其ノ任意ノ徑ニ關シテ對稱ナリ.

徑ニテ分タレタル圓ノ各部ヲ**半圓**ト云フ.

系 2. 互ニ垂直ナル二ツノ徑ハ圓ヲ四等分ス.

互ニ垂直ナル二ツノ徑ニテ分タレタル圓ノ各部ヲ**象限**ト云フ.

例題

※4. 圓ノ徑上ノ任意ノ點ニ於テ,之ト等角ヲナス二直線ヲ引クトキハ,此ノ點ヨリ圓周トノ交點マデノ距離ハ相等シ.

5. 一ノ定點ヲ過ル總テノ直線ニ關シテ對稱ナル平面形ハ,圓ナルコトヲ證セヨ.

---

78. 定義 圓の弧の兩端を結び付くる所の直線を**弦**,弦と弧とより成る平面形を**弓形**と云ふ.

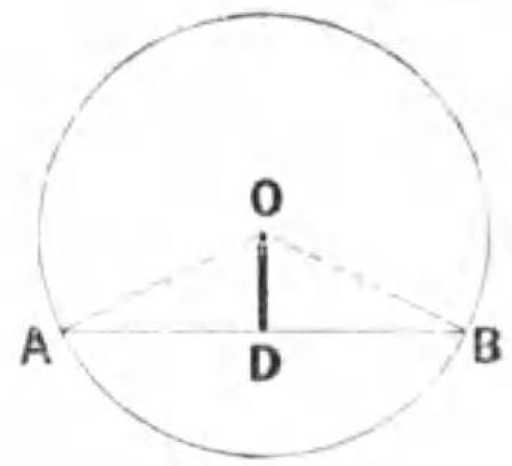
弦ハ圓周及ビ圓ヲ**共軛**ナル二部ニ分チ,其ノ小ナル方ヲ,ソレゾレ**劣弧**及ビ**劣弓形**ト云ヒ,其ノ大ナル方ヲ,ソレゾレ**優弧**及ビ**優弓形**ト云フ.

79. **定理** 圓の中心より弦へ引ける垂線は,弦を二等分すべし.

OD ハ中心 O ヨリ弦 AB ヘ引ケル垂線トスルトキハ

AD=BD

ナルコトヲ證セントス.



證 △OAD, △OBD ニ於テ

$$\left.\begin{array}{c} OA=OB \\ OD \text{ ハ共通} \\ \widehat{ADO}=\widehat{BDO}(=\hat{R}) \end{array}\right\} \quad \begin{array}{r}[71\text{ 款}] \\ \\ [\text{假 設}]\end{array}$$

故ニ △OAD≡△OBD. [61 款系 (1)]

依リテ AD=BD.

80. **系** 1. 本定理ノ逆モ亦眞ナリ. 卽チ圓ノ中心ヨリ弦ノ中點ヘ引ケル直線ハ,弦ニ垂直ナリ.

系 2. 弦ノ垂直二等分線ハ圓ノ中心ヲ過リ,且其ノ弦ニテ分タレタル共軛弧ノ中點ヲ過ル.

系 3. 平行二弦ノ間ニ夾マレタル二ツノ弧ハ,相等シ.

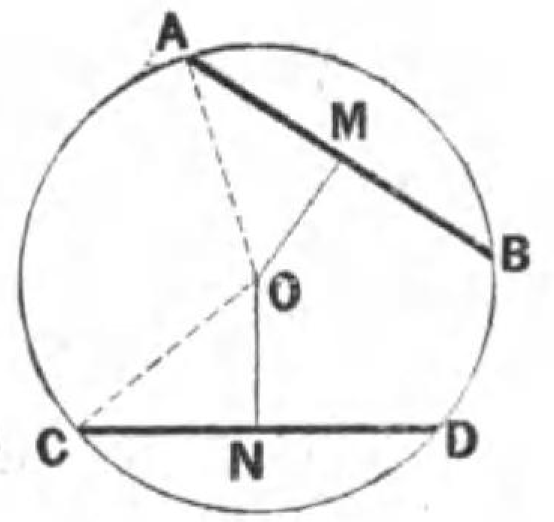
81. **定理** 同じ圓,或は相等しき圓に於て,相等しき弦は中心より等距離にあり.

中心 O ヨリ弦 AB, CD ヘ垂線 OM, ON ヲ引キ

弦 AB=弦 CD

トスルトキハ OM=ON

ナルコトヲ證セントス.



證 AO, CO ヲ結ビ付ケヨ.

サテ AM=MB,

CN=ND, [79 款]

然ルニ AB=CD [假 設]

$$\begin{array}{l} \text{ナルユヱ} \\ \text{而シテ} \\ \\ \end{array} \left.\begin{array}{c} AM=CN \\ AO=CO \\ \widehat{AMO}=\widehat{CNO}(=\hat{R}) \end{array}\right\} \quad [71\text{ 款}]$$

依リテ △AMO≡△CNO, [61 款系(1)]

∴ OM=ON.

82. **系** 本定理ノ逆モ亦眞ナリ. 卽チ同ジ圓,或ハ相等シキ圓ニ於テ,中心ヨリ等距離ニアル弦ハ相等シ.

注意 81, 82 款ハ,同ジ圓ノ圖ニ就キテ述ベタレ

ドモ,相等シキ圓ノ圖ニ就キテモ亦同ジ. 以下同ジ圓或ハ相等シキ圓ト云フトキハ,其ノ一方ニ就キテ述ブベシ.

例題

*6. 弦ニテ分タレタル共軛弧ノ中點ヲ結ビ付クル直線ハ,中心ヲ過リ,且弦ヲ直角ニ二等分ス.

*7. 弦ニテ分タレタル共軛弧ノ一ノ中點ヲ中心ニ結ビ付クル直線ハ,弦ヲ直角ニ二等分シ,且他ノ弧ノ中點ヲ過ル.

*8. 弦ニテ分タレタル共軛弧ノ一ノ中點ヨリ弦ニ下セル垂線ハ,其ノ弦ヲ二等分シ,且圓ノ中心ヲ過ル.

*9. 圓ノ平行セル諸弦ノ一ヲ,直角ニ二等分スル直線ハ,殘リノ弦ヲモ,直角ニ二等分ス.

*10. 二ツノ同心圓周ノ間ニ夾マレタル一直線ノ部分ハ相等シ.

---

83. 定義 圓の二つの半徑の間の角を**中心角**と云ふ.

中心角ハ其ノ二邊ナル半徑ノ夾ム弧ノ上ニ**立ツ**ト云ヒ,弧ハ中心角ニ**對ス**ト云フ.

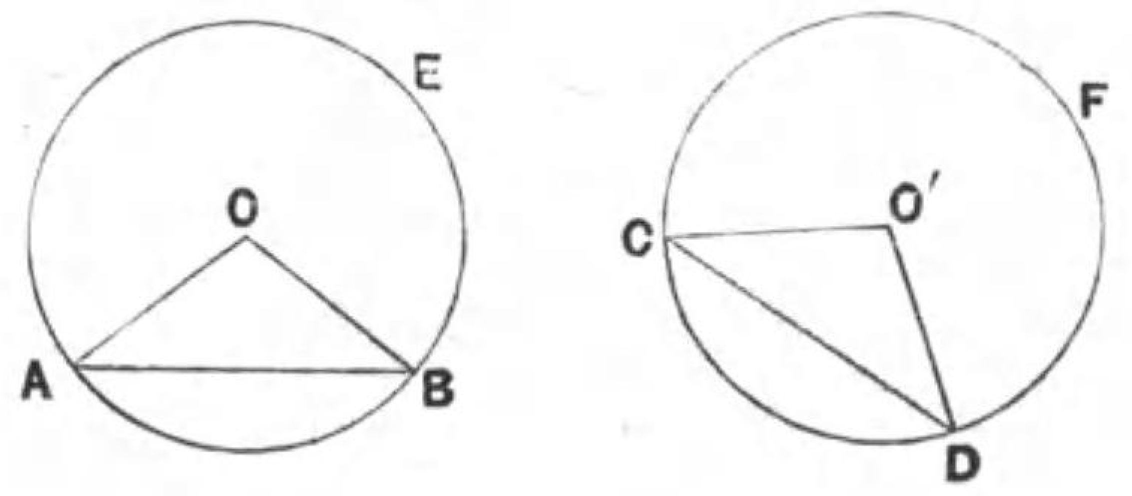
而シテ優弧ノ上ニ立ツ中心角ハ優角ニシテ,劣弧ノ上ニ立ツ中心角ハ劣角ナリ.

84. 定理 同じ圓,或は相等しき圓に於て,相等しき中心角は相等しき弧の上に立つ.

ABE, CDF ヲ相等シキ圓; O, O′ ヲソレゾレ其ノ中心トシ,

$$\widehat{AOB}=\widehat{CO'D}$$

トスルトキハ



$$弧\ AB=弧\ CD$$

ナルコトヲ證セントス.

證 [圓 O′ ヲ取リテ圓 O ノ上ニ重ネ,角 CO′D ヲ角 AOB ノ上ニ重ナラシムル如クシテ證スベシ].

85. 系 1. 本定理ノ逆モ亦眞ナリ. 卽チ同ジ圓,或ハ相等シキ圓ニ於テ,相等シキ弧ハ相等シキ中心角ニ對ス.

系 2. 同ジ圓,或ハ相等シキ圓ニ於テ,相等シキ弦ノ中心ニ於テ張ラルル角ハ相等シ. 而シテ此ノ逆モ亦眞ナリ.

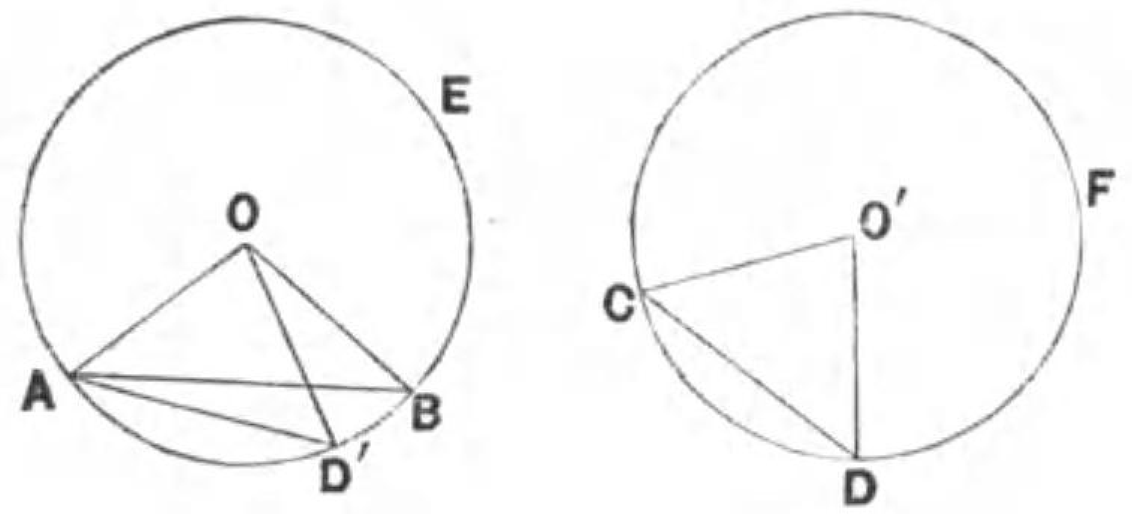
系 3. 同ジ圓,或ハ相等シキ圓ニ於テ,相等シキ弦ノ張ラルル弧ハ相等シ. 而シテ此ノ逆モ亦眞ナリ.

86. 定理 同じ圓,或は相等しき圓に於て,中心角が不等なれば,大なる中心角は大なる弧の上に立つ.

ABE, CDF ヲ相等シキ圓; O, O′ ヲソレゾレ其ノ中心トシ,

$$\widehat{AOB} > \widehat{CO'D}$$

トスルトキハ



$$弧\ AB > 弧\ CD$$

ナルコトヲ證セントス.

證 [圓 O′ ヲ取リテ圓 O ノ上ニ重ネ,角 CO′D ヲ角 AOD′ ノ如キ位置ニ置キテ證スベシ].

87. 系 1. 本定理ノ逆モ亦眞ナリ. 卽チ同ジ圓,或ハ相等シキ圓ニ於テ,弧ガ不等ナレバ,大ナル弧ハ大ナル中心角ニ對ス.

系 2. 同ジ圓,或ハ相等シキ圓ニ於テ,弦ガ不等ナレバ,大ナル弦ノ中心ニ於テ張ラルル角ハ,小ナル弦ノ中心ニ於テ張ラルル角ヨリ大ナリ. 而シテ此ノ逆モ亦眞ナリ.

系 3. 同ジ圓,或ハ相等シキ圓ニ於テ,大ナル劣弧ノ張ル弦ハ,小ナル劣弧ノ張ル弦ヨリ大ナリ. 而シテ此ノ逆モ亦眞ナリ.

注意 優弧ニ就キテハ之ニ反ス.

例題

*11. 同ジ圓,或ハ相等シキ圓ニ於テ,一ツノ弧ガ他ノ弧ノ二倍,三倍,四倍,……ナルニ從ヒテ,始ノ弧ノ上ニ立ツ中心角ハ,後ノ弧ノ上ニ立ツ中心角ノ二倍,三倍,四倍,……ナリ,而シテ此ノ逆モ亦眞ナリ.

中心角ハ,其ノ立ツ所ノ弧ニテ**測度セラル**ト云フ.

12. 圓ノ徑ハ圓周ヲ,相等シキ二ツノ弧ニ分ツコトヲ,84款ノ定理ニ依リテ證セヨ.

*13. 同ジ圓,或ハ相等シキ圓ニ於テ,一ノ弧ノ張ル

弦ノ二倍ハ,其ノ二倍ノ弧ノ張ル弦ヨリ大ナルコトヲ證セヨ.

---

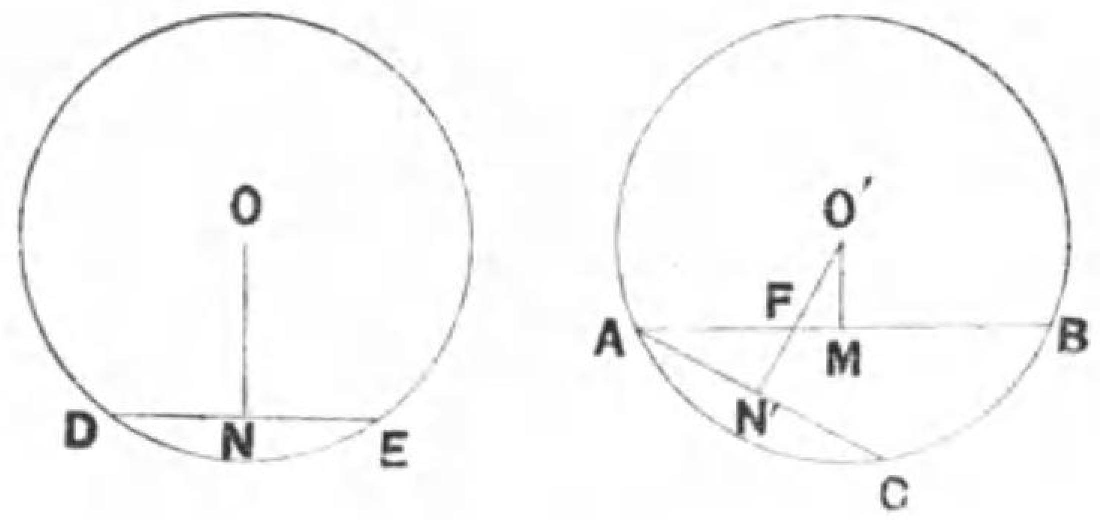
88. 定理 同じ圓,或は相等しき圓に於て,不等の二弦に就きて,其の大なる方は小なる方より中心に近し.

相等シキ圓 O, O′ ニ於テ,

$$弦\ AB > 弦\ DE$$

トシ,且 $O'M \perp AB$, 及ビ $ON \perp DE$

トスルトキハ



$$O'M < ON$$

ナルコトヲ證セントス.

證 圓 O ヲ圓 O′ ノ上ニ重ネ,點 D ヲ點 A ノ上ニ, AB, DE ヲ O′A ノ同ジ側ニ置クトキハ,

$$弧\ DE < 弧\ AB$$ [87 款系 3]

ナルユエ,點 E ハ弧 AB 上ニ落ツベク,其ノ位置ヲ C トセヨ.

而シテ ON ノ位置ヲ O′N′ トセバ, O′N′ ハ弦 AB ト F ニ於テ交ル.

故ニ $O'M < O'F < O'N'$,

卽チ $O'M < ON$.

89. 系 本定理ノ逆モ亦眞ナリ. 卽チ

同ジ圓,或ハ相等シキ圓ニ於テ,中心ニ近キ弦ハ遠キ弦ヨリ大ナリ.

例 題

※14. 圓ノ徑ハ,其ノ弦ノ最大ナルモノナリ.

※15. 圓內ノ一定點ヲ過ル弦ノ中,最小ナルモノハ,此ノ點ヲ中點トスルモノナリ.

16. 圓ノ相等シキ二ツノ弦ガ相交ルトキハ,交點ニテ分タレタル部分ハ二ツヅツ相等シ.

※17. 一直線ハ二ツヨリ多クノ點ニ於テ,圓ヲ截ル能ハザルコトヲ證セヨ.

※18. AB, AC ハ圓ノ相等シキ二ツノ弦ナルトキハ,角 BAC ノ二等分線ハ中心ヲ過ルコトヲ證セヨ.

---

90. 定義 **扇形**とは,圓の弧と其の兩端へ引ける半徑との間の平面形を云ふ.

扇形ノ弧ノ兩端ヘ引ケル二ツノ半徑ノ間ノ角ヲ**扇形ノ角**ト云ヒ,扇形ハ此ノ角ニ對スル弧ノ上ニ**立ツ**ト云フ.

例題

19. 圓ヲ六ツノ相等シキ扇形ニ分ツトキハ,其ノ一ニ於ケル扇形ノ角ハ幾度ナルカ.

第二節

圓周角

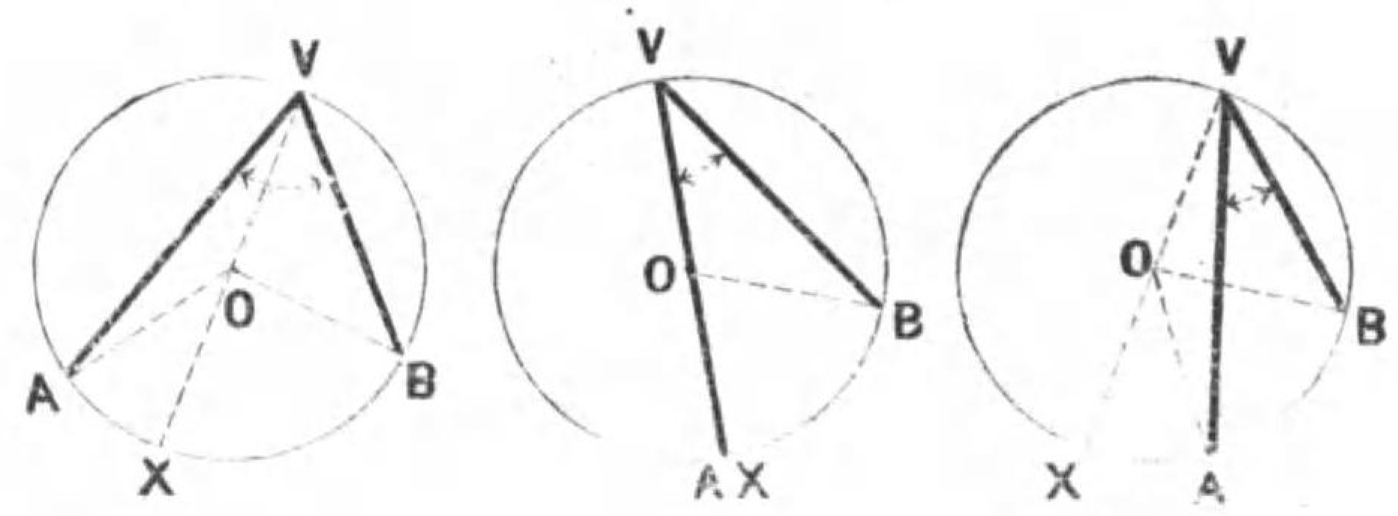
91. 定義 圓周上の一點より引ける二つの弦の間の角を**圓周角**と云ふ.

圓周角ハ其ノ二邊ナル弦ノ夾ム弧ノ上ニ**立ツ**ト云ヒ,弧ハ圓周角ニ**對ス**ト云フ.

92. 定理 圓周角は,同じ弧の上に立つ中心角の半分に等し.

AVB ハ圓周角, AOB ハ同ジ弧ノ上ニ立ツ中心角トスレバ

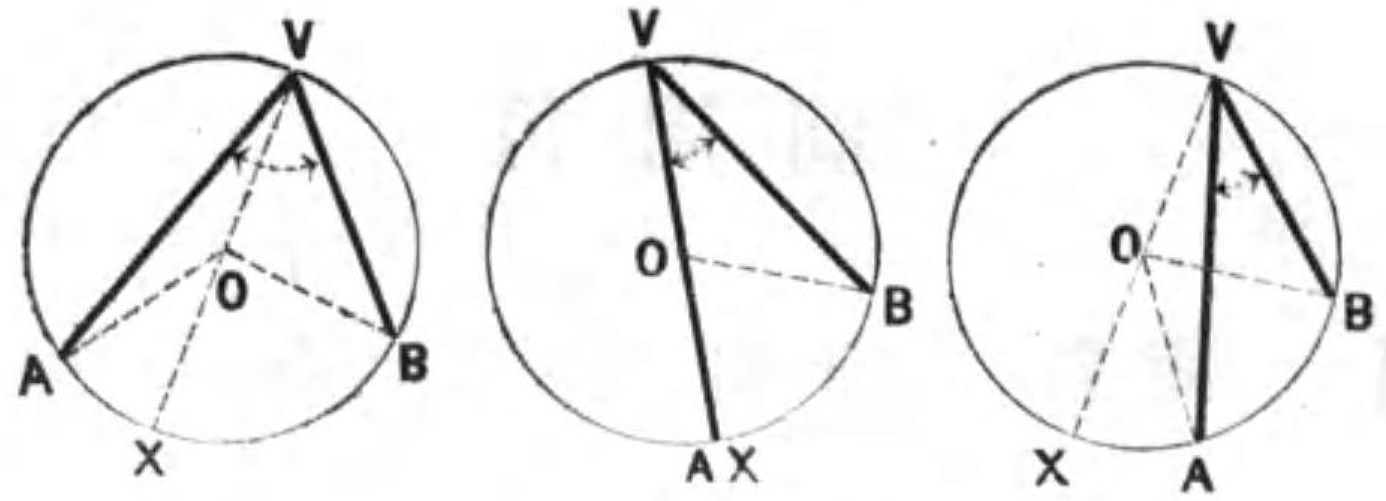
[1 圖] [2 圖] [3 圖]



$$\widehat{AVB}=\frac{1}{2}\widehat{AOB}$$

ナルコトヲ證セントス.

[1 圖] [2 圖] [3 圖]



證 中心 O ト V トヲ結ビ付ケ,之ヲ引キ延バシ,圓周ニ X ニ於テ交ラシメヨ.

サテ $X\hat{V}B = V\hat{B}O$, [50 款]

而シテ $X\hat{O}B = X\hat{V}B + V\hat{B}O$, [42 款系 1]

$= 2X\hat{V}B$,

$\therefore\ X\hat{V}B = \frac{1}{2}X\hat{O}B$, [12 款 VIII]

同様ニ $A\hat{V}X = \frac{1}{2}A\hat{O}X$, [2 圖ニ於テハ各=0]

故ニ $A\hat{V}B = \frac{1}{2}A\hat{O}B$. [12 款 III, IV]

93. 定義 圓の**弓形に於ける角**とは,弓形の弦の兩端より弓形の弧の上の任意の一點に引ける二直線間の角を云ふ.

94. 系1. 圓ノ同ジ弓形ニ於ケル角ハ相等シ.*

系2. 同ジ圓,或ハ相等シキ圓ニ於テ,相等シキ弧ノ上ニ立ツ圓周角ハ相等シ. 而シテ此ノ逆モ亦眞ナリ.

例 題

*20. 弦ニ對シテ弓形ト同ジ側ニアル一點ヨリ,弓形ノ弦ノ兩端ヘ引ケル二直線間ノ角ハ,其ノ點ガ弓形ノ內ニアレバ,弓形ニ於ケル角ヨリ大ニシテ,其ノ點ガ弓形ノ外ニアレバ,弓形ニ於ケル角ヨリ小ナリ. 而シテ此ノ逆モ亦眞ナリ.

*21. 弓形ト其ノ弦ノ同ジ側ニアル一點ヨリ,弓形ノ弦ノ兩端ヘ二直線ヲ引キ,其ノ間ノ角ガ其ノ弓形ニ於ケル角ニ等シケレバ,此ノ點ハ其ノ弓形ノ弧ノ上ニアリ.

*22. 一ノ圓ニ於テ, 平行セル二ツノ弦ヲ AB, CD トスレバ,弧 AC, BD ハ相等シ.

---

* 此ノ系ハひぽくらてす [Hippocrates of Chios, 西曆紀元前 470 年頃ノ希臘人,始メテ初等幾何學ノ書ヲ著ハセシ人ナリ] ノ考案ニ出ヅ.

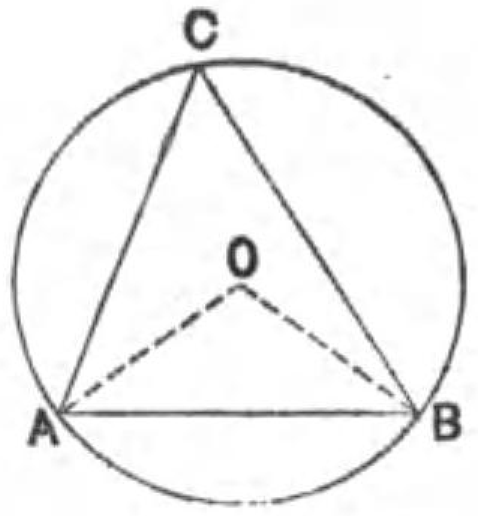
*23. 一ノ圓ニ於テ,弧 AC, DB ガ相等シケレバ,弦 AB ハ CD ニ等シキカ,或ハ AB, CD ハ互ニ平行ス.

*24. 圓內ニ於テ,相交ル二ツノ弦ノ間ノ角ハ,其ノ弦ガ夾ム二ツノ弧ノ和ノ半分ニテ測度セラルル中心角ニ等シ.

若シ二ツノ弦ハ,其ノ延線ガ相交ル如クナルトキハ如何.

---

95. 定理 弓形に於ける角は,其の弓形が半圓よりも大,或は之に等しく,又は之より小なるに從ひて;鋭角,或は直角,又は鈍角なり.



弓形 ACB ノ弦ヲ AB トシ, C ヲ弧上ノ任意ノ點トス.

弓形 ACB>=<半圓

ナルトキ

角 $ACB <=> \hat{R}$

ナルコトヲ證セントス.

證 中心ヲ O トシ; OA, OB ヲ結ビ付ケヨ.

弓形 ACB>半圓

ナレバ　弧 ACB ノ共軛弧ハ半圓周ヨリ小

ナルヲ以テ　$A\hat{O}B<2\hat{R}$.

然ルニ　$A\hat{C}B=\frac{1}{2}A\hat{O}B$.　[92 款]

$\therefore\ A\hat{C}B<\hat{R}$.

[他ノ場合ノ證明ハ學生ヲシテ自ラ試ミシメヨ].

96. 系 弓形ハソレニ於ケル角ガ,直角ヨリ小,或ハ之ニ等シク,又ハ之ヨリ大ナルニ從ヒテ,半圓ヨリ大,或ハ之ニ等シク,又ハ之ヨリ小ナリ.*

例題

25. 三角形ノ三ツノ角ノ頂點ヲ過リテ一ノ圓ガ畫カレタリトシ, 92 款ノ定理ヲ用ヒテ,三角形ノ各角ノ和ガ二直角ナルコトヲ證ス可シ.

*26. 三角形 ABC ノ二邊 AB, AC ヲ徑トシテ,其ノ上ニ畫キタル二ツノ圓周ハ,底邊又ハ底邊ノ延線上ニテ相交ルコトヲ證セヨ.

---

* 半圓ニ於ケル角ガ直角ナルコトハたーれすノ發見ナリ. たーれすハ直角三角形ノ直角ノ頂點ガ,斜邊ヲ徑トシテ其ノ上ニ畫キタル圓周上ニアルコトヲ發見セシトキ,牛ヲ供ヘテ神ヲ祭レリト云フ.

第三節

切線 及び 二圓の關係

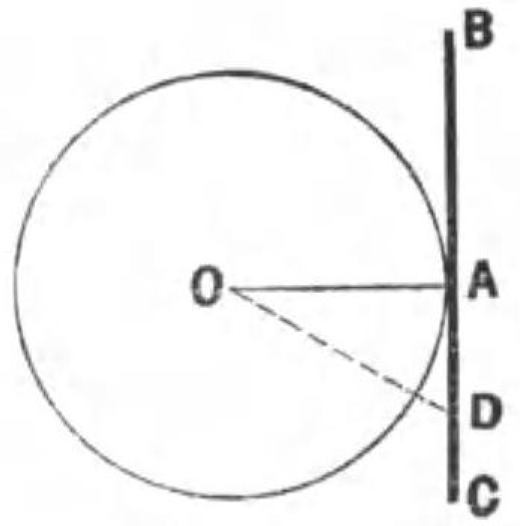
97. **定理** 圓周上の一點を過り,其の點へ引ける半徑に垂直なる直線は,圓周と唯一點に於て出會ふ.

Oヲ圓ノ中心,

Aヲ圓周上ノ一點トシ, $BAC \perp OA$ ナルトキハ

BCハ圓Oノ周ト唯一點Aニ於テ出會フコト

ヲ證セントス.



證 BC上ニAノ外ニ任意ノ點Dヲ取リ, ODヲ結ビ付ケヨ.

$OA \perp BC$ ナルユヱ $OA < OD$, [57款]

故ニ Dハ圓外ニアリ. [72款]

故ニ BCト圓Oノ周トハ唯一點Aニ於テ出會フ.

98. **定義** 圓周と直線とが,唯一點

のみにて出會ふときは,其の直線と圓とは**相切す**と云ひ,此の直線を圓の**切線**,その圓周に出會ふ點を**切點**と云ふ.

99. **系1.** Aヲ過リOAニ斜線ヲ引ケバ,Aノ外,亦他ノ一點ニ於テ圓周ニ出會フ.

圓周ト二點ニ於テ出會フ直線ヲ圓ノ**割線**ト云ヒ,其ノ直線ハ圓ニ**交ル**ト云フ.

系2. 圓周上ノ一點ニ於テ,其ノ圓ニ一ツノ切線ヲ引クコトヲ得,而シテ唯一ツニ限ル.

系3. 圓ノ切線ハ,其ノ切點ヘ引ケル半徑ニ垂直ナリ. 逆ニ 圓ノ中心ヨリ切線ヘ引ケル垂線ハ,切點ヲ過ル.

系4. 切點ヲ過リ切線ヘ引ケル垂線ハ,圓ノ中心ヲ過ル.

例題

27. 圓ノ弦ニ平行ナル切線ハ,切點ニ於テ,其ノ弦ノ弧ヲ二等分ス.

28. 一ツノ圓ノ相等シキ弦ハ,皆コレト同心ナル一ツノ圓ニ切ス.

29. 圓ノ平行ナル弦ノ中點ハ,之ニ平行ナル切線ノ切點ヲ過ル徑ノ上ニアリ.

---

100. 定理 切線と,其の切點より引ける弦との間の角は,隣の弓形に於ける角に等し.

AB ヲ點 C ニ於ケル切線,

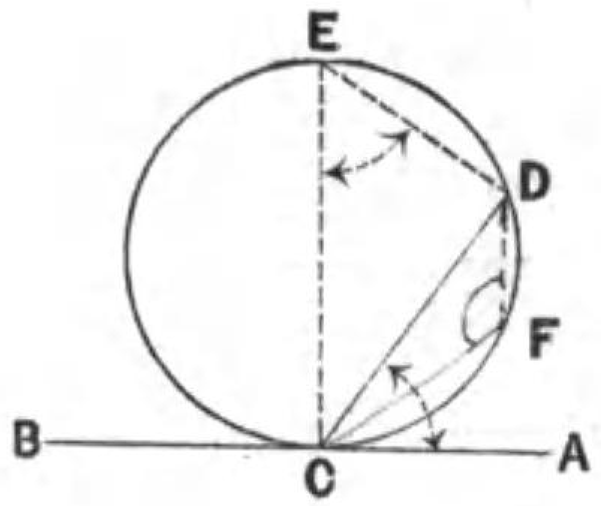
CD ヲ任意ノ弦

トスレバ

$\widehat{ACD}$=(弓形 CED ニ於ケル角)

$\widehat{BCD}$=(弓形 CFD ニ於ケル角)

ナルコトヲ證セントス.



證 C ヲ過ル徑ヲ CE トスレバ

$\widehat{ACD}$ ハ $\widehat{DCE}$ ノ餘角ナリ, [99 款系 3]

又 $\widehat{CDE}=\hat{R}$ [95 款]

ナルユエ $\widehat{CED}$ ハ $\widehat{DCE}$ ノ餘角ナリ. [41 款]

$\therefore$ $\widehat{ACD}=\widehat{CED}$,

即チ $\widehat{ACD}$=(弓形 CED ニ於ケル角).

同様ニ $\widehat{BCD}$=(弓形 CFD ニ於ケル角).

101. 系 1. 本定理ノ逆モ亦眞ナリ. 即チ

弓形ノ弦ノ一端ヲ過リテ,此ノ弦ニ對シテ弓形ノ反對ノ側ニ於テ,弓形ニ於ケル角ニ等シキ角ヲナス直線ハ,圓ニ切ス.

系 2. 圓外ノ一點ヨリ,圓ニ引ケル二ツノ切線ハ相等シ. [如何トナレバ此ノ二ツノ切線ト,切點ヲ結ビ付クル弦トニテ作レル三角形ノ二ツノ角ハ,本定理ニ依リテ相等シケレバナリ].

例 題

30. 100款ノ圖ニ於テ, P ヲ弧 CFD ノ中點トスレバ, P ハ CA 及ビ CD ヨリ等距離ニアルコトヲ證セヨ.

若シ P ヲ弧 CED ノ中點ナリトセバ如何.

*31. 圓ノ中心ヨリ一直線ニ至ル距離ガ,半徑ヨリ小,或ハ之ニ等シク,又ハ之ヨリ大ナルニ從ヒ,此ノ直線ハ圓ヲ截ル可ク,或ハ之ニ切ス可ク,又ハ之ニ出會ハザル可シ.

32. 中心ヲ O トスル圓周上ノ一點 A ニ於ケル切線ト,任意ノ半徑 OB ノ延線トノ交點ヲ C トシ, OB ニ垂線 AD ヲ引クトキハ, AB ハ角 DAC ヲ二等分ス.

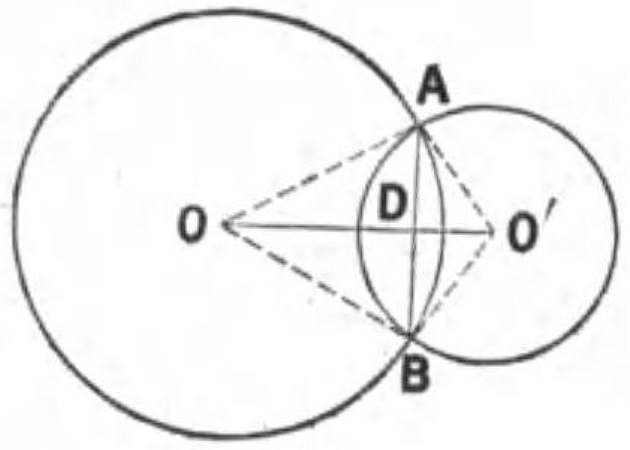
102.　**定義**　二つの圓の中心を結び付くる直線を,其の**中心線**と云ふ.

103.　**定理**　二つの圓周が,其の中心線外の一點に於て出會ふときは,尙他の一點に於て出會ふ.

中心 0, 0′ ナル二ツノ圓周ガ其ノ中心線外ノ點 A ニ於テ出會フトキハ

尙他ノ一點ニ於テ出會フ

コトヲ證セントス.



證　00′ ニ關スル A ノ對稱點ヲ B トスレバ,

直線 00′ ハ二ツノ圓ノ中心線ナルヲ以テ,二ツノ圓ノ徑ト重ナルベシ.

而シテ　A ハ圓 0 ノ周上ニアルユヱ,

點 B ハ亦圓 0 ノ周上ニアリ.　[77 款系 1]

同樣ニ　A ハ圓 0′ ノ周上ニアルユヱ,

點 B ハ亦圓 0′ ノ周上ニアリ.

故ニ　二圓 0, 0′ ハ又點 B ニ於テ出會フ.

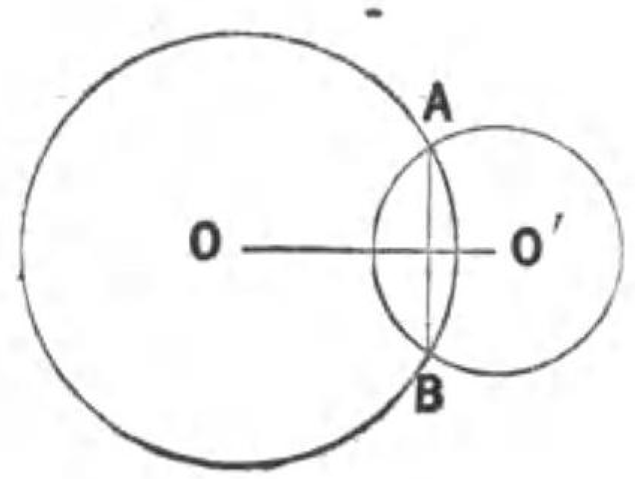
104.　**定義**　二つの圓周が二點に於て出會ふときは,此の二つの圓は**相交る**といふ.

二ツノ圓ガ相交ルトキハ,其ノ交點ヲ結ビ付クル線分ヲ**公弦**ト云ヒ,其ノ交點ニ於ケル各圓ノ切線ノ間ノ角ヲ,**二ツノ圓周ノ間ノ角**ト云フ.

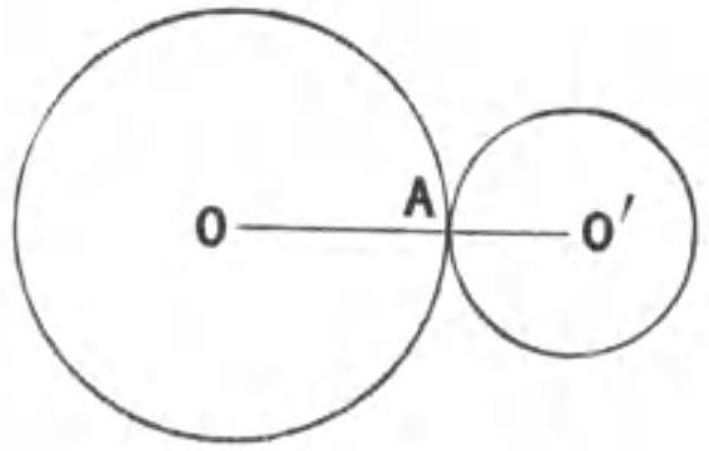
105.　**定義**　二つの圓周が,唯一點にて出會ふときは,此の二つの圓は**相切す**と云ふ.

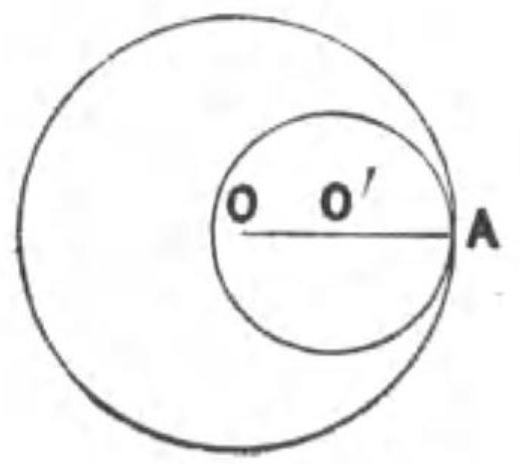
此ノ場合ニ,一ツノ圓ガ全ク他ノ內ニ在レバ**內切ス**ト云ヒ,二ツノ圓ガ互ニ他ノ外ニ在レバ**外切ス**ト云フ.

106.　**系 1.**　相交ル二圓ノ中心線ハ,其ノ公弦ノ垂直二等分線ナリ.



系 2.　00′ ハ恒ニ AB ヲ直角ニ二等分スルユヱ;





圓 O, O′ ガ漸々移動シ,唯一點ニ於テ出會フトキハ,點 A 及ビ B ハ相合シ, OO′ ハ二ツノ圓ノ切點ヲ過ル.

故ニ 圓ガ相切スルトキ,二ツノ圓ノ中心ト切點トハ,同一ノ直線上ニアリ.

系 3. 二ツノ圓周ガ中心線上ノ一點ニテ出會フトキハ,他ノ點ニテ出會フコトナシ.

例　題

*33. 二ツノ圓ガ相切スルトキハ,其ノ切點ニ於テ共通ノ切線ヲ有ス.

---

107. 定理 二圓の半徑を r, r' とし,其の中心間の距離を d とするときは,

(1) 二圓が全く相離れて,互に他の外にあれば $d>r+r'$.

(2) 二圓が外切するときは

$$d=r+r'.$$

(3) 二圓が相交るときは

$$r+r'>d>r\sim r'.$$

(4) 二圓が內切するときは

$$d=r\sim r'.$$

(5) 二圓が全く相離れて,其の一が他の一の內にあれば

$$d<r\sim r'.$$

證 [學生ヲシテ自ラ試ミシメヨ].

108. 系 本定理ノ逆モ亦眞ナリ. 卽チ

(1) $d>r+r'$ ナルトキハ,二圓ハ全ク相離レテ,互ニ他ノ外ニアリ.

(2) $d=r+r'$ ナルトキハ,二圓ハ外切ス.

(3) $r+r'>d>r\sim r'$ ナルトキハ,二圓ハ相交ル.

(4) $d=r\sim r'$ ナルトキハ,二圓ハ內切ス.

(5) $d<r\sim r'$ ナルトキハ,二圓ハ全ク相離レテ,其ノ一ハ他ノ一ノ內ニアリ.

例　題

34. 二ツノ圓ノ半徑ガ 7 尺ト 4 尺トニシテ,中心間ノ距離ガ 6 尺ナルトキ,此ノ二ツノ圓ノ比對位置如何.

35. 相等シキ三ツノ圓ガ,二ツヅツ互ニ相切スレバ,其ノ三ツノ中心モ,亦三ツノ切點モ正三角形ノ角頂ナリ.

36. 二ツノ圓ガ相切スレバ,切點ヲ過ル任意ノ二ツノ直線ガ,其ノ二ツノ圓周ヨリ截リ取ル所ノ弧ノ弦ハ平行ナリ. 而シテ此ノ逆モ亦眞ナリ.

37. 相切スル二ツノ圓ノ切點ヲ過リテ任意ノ割線ヲ引クトキ,其ノ交點ヲ過ル二ツノ半徑ハ,互ニ平行ナリ.

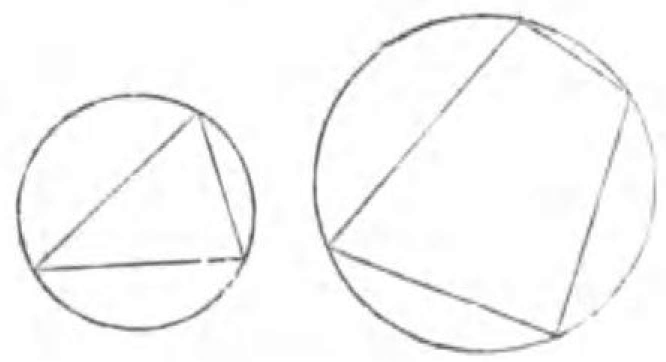
38. 二ツノ圓ガ點 P ニ於テ外切シ,直線 AB ハ A, B ヲ切點トスル二ツノ圓ノ共通切線ナルトキ, AB ヲ徑トスル圓ハ,點 P ヲ過リ,其ノ中心線ニ點 P ニ於テ切スルコトヲ證セヨ.

第四節

內接形 及び 外切形

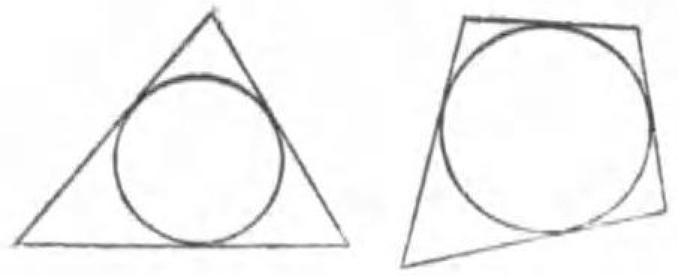
109. 定義 多角形の各角頂が,同一の圓周上にあるときは,多角形は圓に**內接す**と云ひ,圓は多角形に**外接す**と云ふ.

內接形及ビ外接圓



110. 定義 多角形の各邊が,同一の圓に切するときは,多角形は圓に**外切す**と云ひ,圓は多角形に**內切す**と云ふ.*

外切形及ビ內切圓

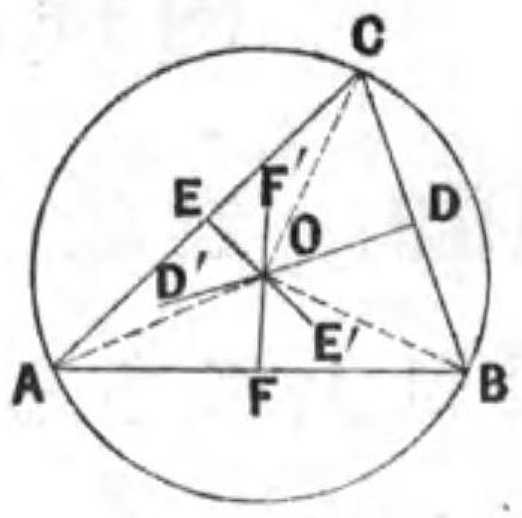


---

* 切ト接トノ異義ナルコトニ注意セヨ.

111. **定理** 任意の三角形に外接する圓を書くことを得.

△ABC ニ於テ A, B, C ヲ過ル一ツノ圓ヲ畫キ得ルコトヲ證セントス.



證 邊 BC ノ垂直二等分線 DD′ ト, 邊 CA ノ垂直二等分線 EE′ トハ,或點 O ニ於テ出會フベシ.

如何トナレバ,若シ DD′ ト EE′ トガ平行スルトキハ, BC, CA ハ同一ノ直線トナルベケレバナリ.

[32 款系 2]

OA, OB, OC ヲ結ビ付ケヨ.

サテ △AOE, △COE ニ於テ

$$\left.\begin{array}{c} AE=CE \\ EO \text{ ハ共通} \\ \widehat{AEO}=\widehat{CEO}(=\hat{R}) \end{array}\right\}$$

$\therefore$ AO=CO. [47 款]

同様ニ BO=CO.

依リテ AO=BO=CO.

故ニ O ヲ中心トシ, OA ヲ半徑トシテ畫ケル圓ハ,三

角形 ABC ノ外接圓ナリ.

112. **系** 同一ノ直線上ニアラザル三ツノ點ヲ過ル一ツノ圓ヲ畫クコトヲ得,而シテ唯一ツニ限ル.

換言スレバ同一ノ直線上ニアラザル三ツノ點ハ,一ツノ圓ヲ決定ス.

注意 點 O ハ三邊ノ垂直二等分線 DD′, EE′, FF′ ノ聚交スル點ナリ.

例題

*39. 正三角形ノ外接圓周上ノ任意ノ一點ヨリ,三ツノ角頂ニ引キタル線分ノ中,最モ長キモノハ,他ノ二ツノ和ニ等シ.

*40. 三角形ノ垂心ヨリ一邊ヘ垂線ヲ引キ,之ヲ外接圓周マデ引キ延バストキハ,其ノ線分ハ該邊ニテ二等分セラル.

*41. 圓ニ內接スル三角形ノ頂角ノ外二等分線ガ圓周ト交ル點ハ,底邊ノ兩端ヨリ等距離ニ在ルコトヲ證セヨ.

*42. 圓ニ內接スル四邊形ノ任意ノ角ノ內二等分

線ト,之ニ對スル角ノ外二等分線トハ,圓周上ニ於テ相交ルコトヲ證セヨ.

---

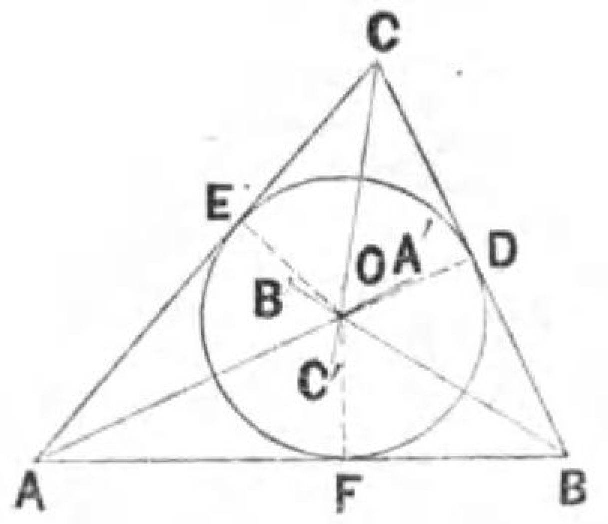
113. 定理 任意の三角形に內切する圓を畫くことを得.

△ABC ニ於テ

邊 AB, BC, CA ニ切スル圓

ヲ畫キ得ルコト

ヲ證セントス.



證 角 CAB ノ二等分線 AA′ ト,角 ABC ノ二等分線 BB′ トハ或點 O ニ於テ出會フベシ.

如何トナレバ,若シ AA′ ト BB′ トガ平行スルトキハ

$$A'\widehat{AB}+B'\widehat{BA}=2\hat{R}$$ [32 款系 1 (1)]

ナルベシ.

然ルニ三角形ノ二ツノ角ノ和ハ,二直角ヨリ小ナルユヱ,其ノ半分ノ和ハ二直角ニ等シキコト能ハザレバナリ. [41 款]

點 O ヨリ邊 BC, CA, AB ヘソレゾレ垂線 OD, OE, OF ヲ引ク.

サテ △BOD, △BOF ニ於テ

$$O\widehat{BD}=O\widehat{BF}$$ [假設]

$$O\widehat{DB}=O\widehat{FB}(=\hat{R})$$

BO ハ共通

$$\therefore\ OD=OF.$$ [48 款注意]

同樣ニ $OE=OF.$

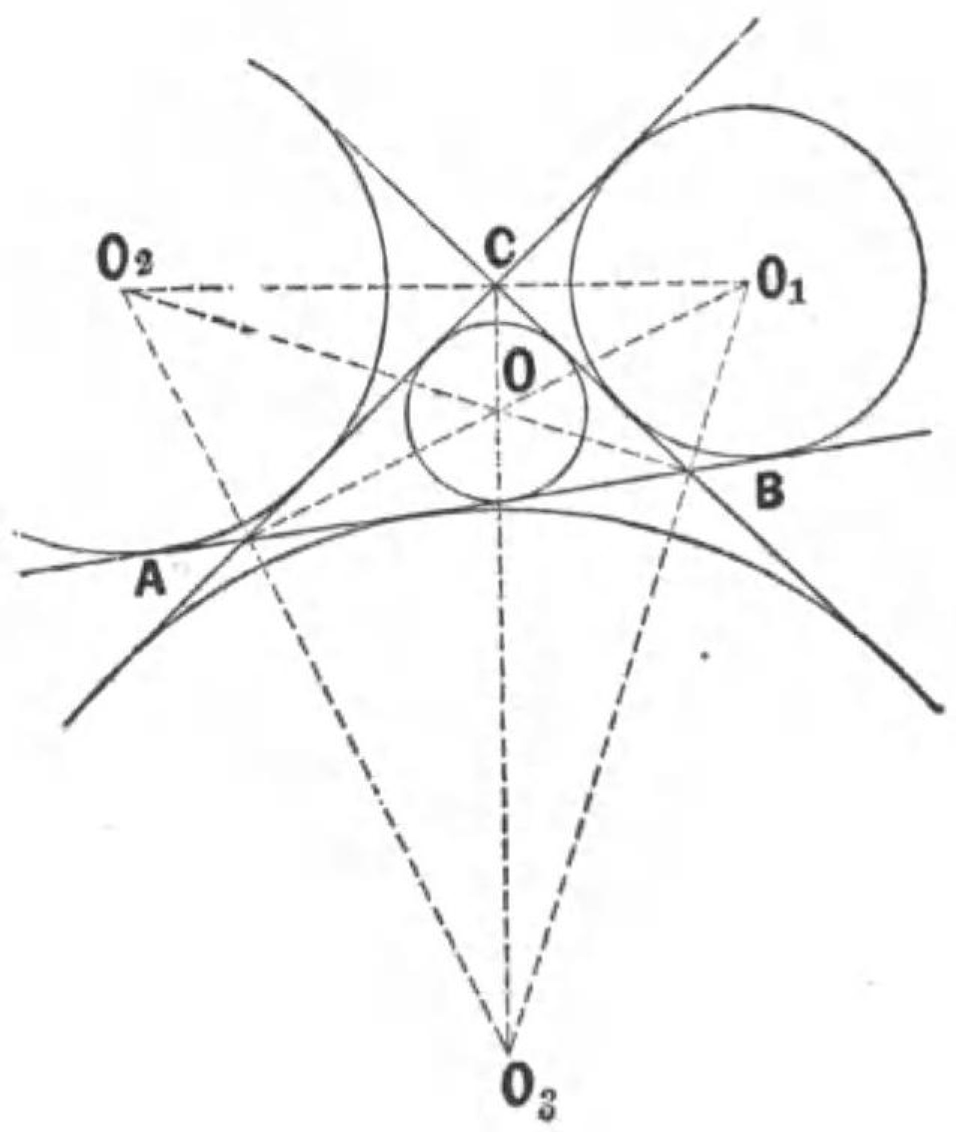
依リテ $OD=OE=OF.$

故ニ O ヲ中心トシ, OD ヲ半徑トシテ畫ケル圓ハ,三角形 ABC ノ內切圓ナリ.

114. 系 1. 三角形ノ三邊ニ切スル圓ハ,唯一ツアリ.

注意 點 O ハ三ツノ角ノ二等分線 AA′, BB′, CC′ ノ聚交スル點ナリ.

系 2. 三角形ノ一邊ト,他ノ二邊ノ延線トニ切スル圓ヲ畫クコトヲ得.



注意 斯ノ如キ圓ハ O_1, O_2, O_3 ノ如ク,總テ三ツアリ.

故ニ長サニ制限ナキ三ツノ直線ガ二

ツヅツ三ツノ點ニ於テ相交ルトキハ,此ノ三ツノ直線ニ切スル圓ハ,總テ四ツアルベシ.

115. 定義 三角形の何れかの一邊と,他の二邊の延線とに切する圓を**傍切圓**と云ふ.

例　　題

*43. 三角形ノ二ツノ傍心ヲ結ビ付クル直線ハ,三角形ノ一ツノ角頂ヲ過ル. 而シテ內心ト一ツノ傍心トヲ結ビ付クル直線ノ延線モ,亦三角形ノ一ツノ角頂ヲ過ル.

*44. 三角形ノ內心ハ,三ツノ傍心ヲ角頂トスル三角形ノ垂心ナリ.

45. 二ツノ平行線ト,一ツノ横截線トニ切スル圓ハ幾ツアルカ.

---

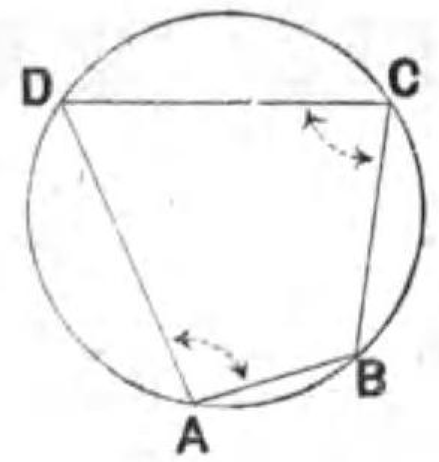
116. 定理 四邊形が,圓に內接するときは,其の相對する角は互に補角なり.

ABCD ヲ圓ニ內接スル四邊形

トスルトキハ

$\hat{A}+\hat{C}=2\hat{R}.$

$\hat{B}+\hat{D}=2\hat{R}$



ナルコトヲ證セントス.

證　$\hat{A}=\frac{1}{2}$(弧 BCD ノ上ニ立ツ中心角), [92 款]

同様ニ　$\hat{C}=\frac{1}{2}$(弧 BAD ノ上ニ立ツ中心角),

故ニ　$\hat{A}+\hat{C}=\frac{1}{2}$(全圓周ノ上ニ立ツ中心角)

$=2\hat{R}.$

同様ニ　$\hat{B}+\hat{D}=2\hat{R}$ ヲ證シ得可シ.

117. 系 圓ニ內接スル四邊形ノ外角ハ,其ノ隣リノ內角ニ對スル角ニ等シ.

注意 四邊形ノ外角ニ隣ル內角ノ對角ヲ指シテ,外角ノ**內對角**ト云フコトアリ.

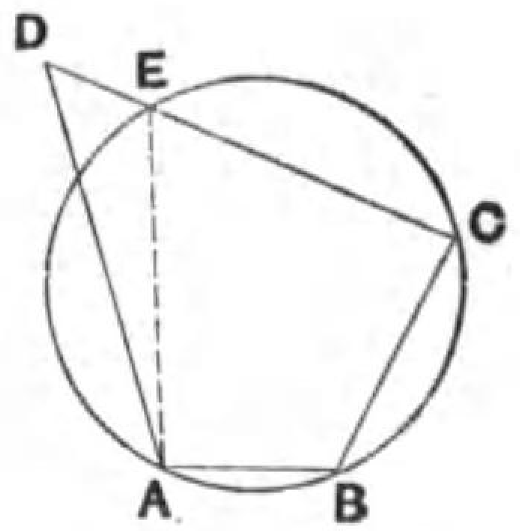
例　　題

46. 對角線 AC, BD ヲ引クコトニ依リテ, 116 款ノ定理ヲ證セヨ.

*47. 圓ニ內接スル平行四邊形ハ矩形ナリ.

---

118. 定理 四邊形の相對する角が互に補角なるときは,此の四邊形は圓に內接し得可し.



四邊形 ABCD ニ於テ

$\hat{A}+\hat{C}=2\hat{R}$, 從ヒテ $\hat{B}+\hat{D}=2\hat{R}$

ナルトキハ

ABCD ハ圓ニ內接シ得ルコト

ヲ證セントス.

證 A, B, C ヲ過ル圓ガ,若シ D ヲ過ラザルトキハ, CD ヲ E ニ於テ截ルトセヨ.

AE ヲ結ビ付ケヨ.

然ルトキハ $\hat{B}+\widehat{AEC}=2\hat{R}$, [116 款]

然ルニ $\hat{B}+\hat{D}=2\hat{R}$, [假設]

$\therefore\ \widehat{AEC}=\hat{D}$,

即チ △AED ノ外角 AEC ガ,之ニ隣ラザル內角 D ニ等シキニ至ル.

此ハ背理ナリ. [42 款系 1]

故ニ A, B, C ヲ過ル圓ハ CD ニ交ラズ.

同様ニシテ A, B, C ヲ過ル圓ハ,又 CD ノ延線ニモ交ラザルコトヲ證シ得可シ.

故ニ A, B, C ヲ過ル圓ハ亦 D ヲ過ル.

即チ ABCD ハ圓ニ內接シ得ベシ.

119. 系 四邊形ノ一外角ガ,其ノ內對角ニ等シキトキハ,此ノ四邊形ハ圓ニ內接シ得ベシ.

例題.

48. 81頁21題ヲ用ヒテ118款ノ定理ヲ證セヨ.

※49. 圓周ヲ任意ノ數ノ相等シキ弧ニ分ツトキハ,是等ノ弧ノ弦ノ成ス內接形ハ正多角形ナリ.

而シテ總テノ分點ニ於ケル切線ノナス外切形モ,亦正多角形ナリ.

※50. 正多角形ノ角ヲ二等分スル直線ハ,皆同一ノ點ニ於テ出會ヒ,此ノ點ハ總テノ角頂ヨリ相等シキ距離ニアリ,且總テノ邊ヨリ相等シキ距離ニアリ.

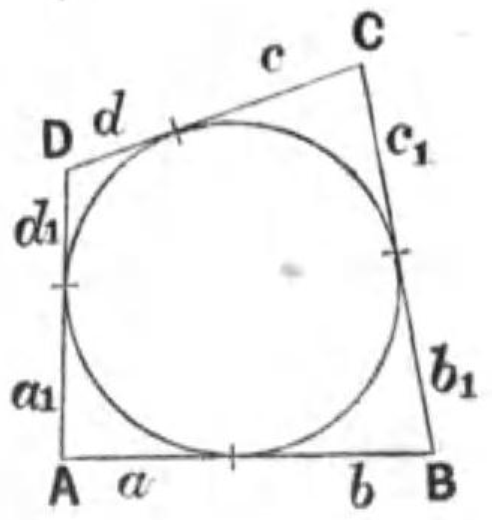
本題ニ於ケル如キ同一ノ點ヲ,正多角形ノ**中心**,其ノ外接圓ノ半徑ヲ正多角形ノ**半徑**,內切圓ノ半徑ヲ正多角形ノ**邊心距**ト云フコトアリ.

※51. 正多角形ハ圓ニ內接シ得可シ.

※52. 等角多角形ハ圓ニ內接シ得ルカ.

※53. 等邊多角形ハ圓ニ內接シ得ルカ.

120.′ 定理 圓に外切する四邊形の相對する二邊の和は,他の相對する二邊の和に等し.



圓ニ外切スル四邊形 ABCD

ニ於テ

AB+CD=AD+BC

ナルコトヲ證セントス.

證 圖ニ於テ $a=a_1,\ b=b_1$, [101 款系 2]

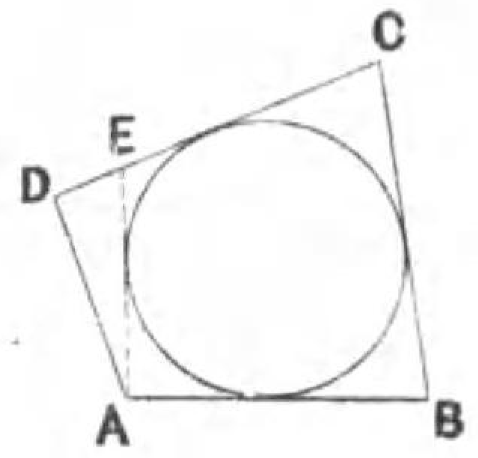
故ニ $AB=a+b=a_1+b_1$,

同様ニ $CD=c+d=c_1+d_1$.

故ニ $AB+CD=a_1+d_1+b_1+c_1$

$=AD+BC$.

121. 定理 四邊形の相對する二邊の和が,他の相對する二邊の和に等しければ,此の四邊形は圓に外切し得べし.



四邊形 ABCD ニ於テ

AB+CD=AD+BC

ナルトキハ

ABCD ハ圓ニ外切シ得ルコト

ヲ證セントス.

證 三邊 AB, BC, CD ニ切スル圓ガ,若シ AD ニ切セザルトキハ, A ヨリ切線 AE ヲ引キ, CD ニ E ニ於テ交ラシメヨ.

然ルトキハ AB+CE=BC+AE, [120 款]

然ルニ AB+CD=BC+AD, [假設]

∴ CD−CE=AD−AE, [12 款 IV]

卽チ DE=AD−AE,

然ルニ 此ハ背理ナリ. [40 款]

故ニ AE ハ CD ニ交ラズ.

同様ニシテ AE ハ CD ノ延線ニモ交ラザルコトヲ證シ得可シ.

依リテ AE ハ AD ニ合セザルベカラズ.

故ニ AD ハ三邊 AB, BC, CD ニ切スル圓ニ切ス.

卽チ ABCD ハ圓ニ外切シ得ベシ.

例題

*54. 正方形ハ圓ニ外切シ得可シ.

*55. 正多角形ハ圓ニ外切シ得可シ.

*56. 等邊多角形ハ圓ニ外切シ得ルカ.

*57. 等角多角形ハ圓ニ外切シ得ルカ.

雜　題

1. 圓ニ內接スル四邊形ノ兩對角線ガ,互ニ垂直ナルトキハ,其ノ交點ヨリ一邊ヘ引ケル垂線ハ,其ノ對邊ヲ二等分ス.

*2. 三角形ノ任意ノ一角ノ頂點ヨリ垂心マデノ距離ハ,外心ヨリ其ノ對邊マデノ距離ノ二倍ナリ.

*3. 三角形ノ各角頂ヨリ對邊ヘ引ケル垂線ハ,其ノ趾ヲ結ビ付ケテ生ズル三角形ノ各角ノ二等分線ナリ.

三角形ノ各角頂ヨリ對邊ヘ引ケル垂線ノ趾ヲ結ビ付ケテ生ズル三角形ヲ**垂趾三角形**ト云フ.

*4. 三角形ノ外接圓周上ノ任意ノ點ヨリ三邊[必要ナレバ其ノ延線]ヘ下セル垂線ノ趾ハ,同一ノ直線上ニアリ.**

此ノ直線ヲ**垂趾線**,或ハ**しむそん線**ト云フ.

* 之ヲぶらめぐぷた [Brahmegupta, 印度ノ數學家,西暦598年ニ生ル] ノ定理ト云フ.

** 之ヲしむそん [Simson, 蘇格蘭ノ數學者,西暦1687年ニ生レ,1768年ニ死ス] ノ定理ト云フ.

而シテ此ノ定理ノ逆モ亦眞ナリ.

5. 三角形 ABC ノ垂心ヲ O トスレバ,三角形 ABC, AOB, BOC, COA ノ外接圓ハ皆相等シ.

6. 三角形ノ垂趾三角形ノ外接圓ハ,元ノ三角形ノ各邊ノ中點ト,各角頂ト垂心トヲ結ビ付クル直線ノ中點トヲ過ルコトヲ證セヨ.

此ノ圓ヲモトノ三角形ノ**九點圓**ト云フ.

九點圓ノ半徑ハ,外接圓ノ半徑ノ半分ニ等シ.

7. 圓ニ內接スル任意ノ六角形ノ,一ツオキノ三ツノ角ノ和ハ四直角ニ等シ.

[對角線一ツヲ引キテ證セヨ].

8. 圓ニ內接スル任意ノ八角形ノ,一ツオキノ四ツノ角ノ和ハ六直角ニ等シ.

9. 圓ニ外切スル任意ノ六角形ノ,一ツオキノ三邊ノ和ハ,他ノ三邊ノ和ニ等シ.

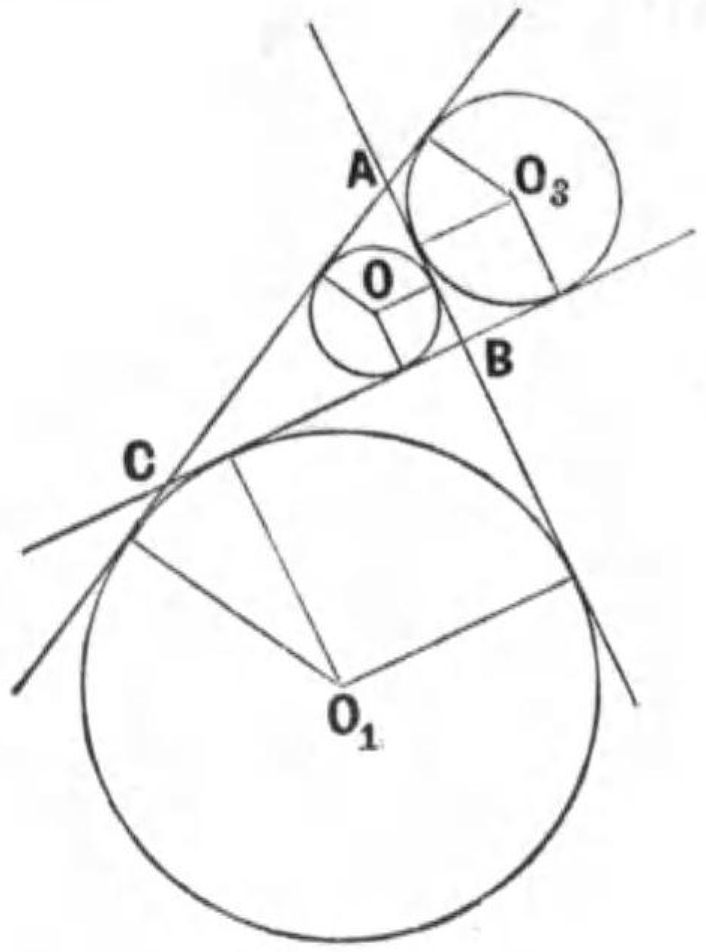
10. 圓ニ內接スル六角形ノ隣接シタル二邊ガ,ソレゾレ相對スル邊ニ平行スルトキハ,他ノ二邊モ亦互ニ平行ス.

11. 圓ニ內接スル四邊形ノ,二組ノ對邊ヲ引キ延

* 之ヲぽんすれー [Poncelet, 佛國ノ幾何學者,工學者ニシテ西暦1788年ニ生レ,1867年ニ死ス] ノ定理ト云フ.

バシテ相交ラシメテ生ズル二角ノ二等分線ハ,互ニ垂直ナリ.

※12. △ABC ニ於テ A_i ハ A ヨリ內切圓ガ邊 b, c ニ切スル點マデノ距離; A_a, A_b, A_c ハソレゾレ A ヨリ邊 a, b, c ニ切スル傍切圓ガ邊 b ノ延線, c ノ延線; c ノ延線, b; b ノ延線, c ニ切スル點マデノ距離トス. 其ノ他同樣ノ記法ヲ用フルトキハ,次ノ結果アリ.



$$A_a=B_b=C_c=s,$$

$$A_i=B_c=C_b=s-a,$$

$$B_i=C_a=A_c=s-b,$$

$$C_i=A_b=B_a=s-c.$$

但 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$.

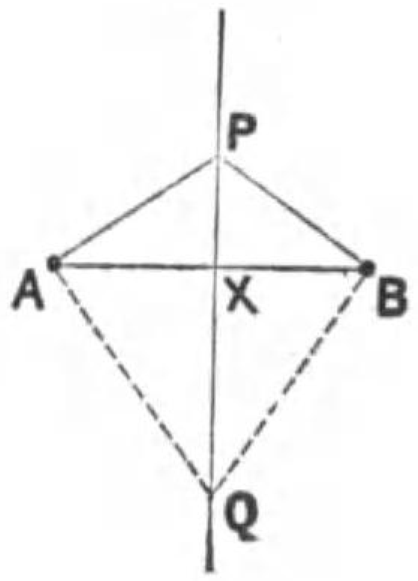
第五節

軌　跡

122. 補題 1. 二つの定點を結び付くる直線の垂直二等分線上の各點は,此の二點より等距離にあり,而して此の逆も亦眞なり.

A, B ヲ二ツノ定點トス.

I. AB ノ垂直二等分線 PXQ 上ノ各點ハ A, B ヨリ等距離ニアルコトヲ證セントス.



證 Q ヲ此ノ直線上ノ任意ノ點トシ; AQ, BQ ヲ結ビ付ケヨ.

然ルトキハ △AXQ, △BXQ ニ於テ

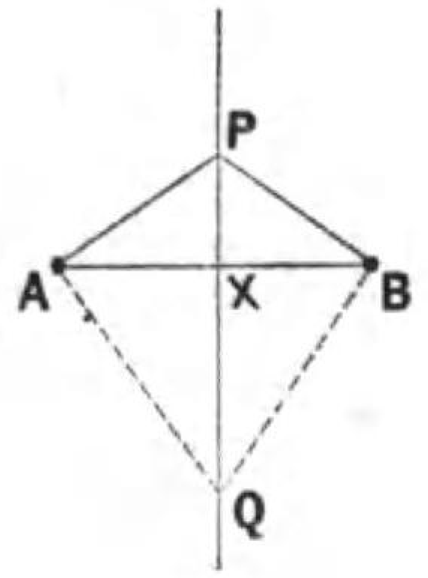
$$\left.\begin{array}{c} AX=BX \\ XQ\ \text{ハ共通} \\ \widehat{AXQ}=\widehat{BXQ}(=\hat{R}) \end{array}\right\}$$

$\therefore$ AQ=BQ. [47 款]

II. P ヲ A 及ビ B ヨリ等距離,即チ AP=BP ナル點トス. 然ルトキハ

P ハ AB ノ垂直二等分線上ニアルコト

ヲ證セントス.



證 AB ヲ X ニ於テ二等分シ,

PX ヲ結ビ付ケヨ.

然ルトキハ

$\triangle$AXP, $\triangle$BXP ニ於テ

$$\left.\begin{array}{r} AP=BP \\ AX=BX \\ PX\ \text{ハ共通} \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l}[\text{假 設}] \\ [\text{作 圖}] \\ \ \end{array}$$

$\therefore\ P\widehat{X}A=P\widehat{X}B,$ [59 款]

然ルニ $P\widehat{X}A+P\widehat{X}B=2\hat{R},$ [19 款]

$\therefore\ P\widehat{X}A=P\widehat{X}B=\hat{R}.$

$\therefore\ PX\perp AB.$

注意 是ニ依リテ AB ノ垂直二等分線上ノ各點ハ, A 及ビ B ヨリ等距離ニ在ルコト.

及ビ A, B ヨリ等距離ニ在ル點ハ,悉ク其ノ垂直二等分線上ニ在リテ,其ノ他ニハ一モ無キコト.

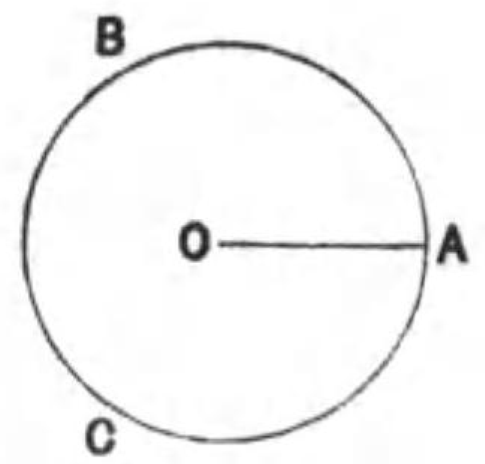
ヲ知ルベシ.

123. 補題2. 一定點を中心とし,一定の距離を半徑とする圓周上の各點は,該定點より該定距離に在り,而して此の定理の裏も亦眞なり.

一定點 O ヲ中心トシ,

一定ノ距離 OA ヲ半徑トシテ圓

ABC ヲ畫ク.



I. 圓周 ABC 上ノ各點ハ,點 O ヨリ一定ノ距離ニアリ. [71 款]

II. 圓周 ABC 上ニアラザル點ハ,點 O ヨリ一定ノ距離ニアラズ. [72 款]

注意 是ニ依リテ 一定點ヲ中心トシテ,一定ノ距離ヲ半徑トスル圓周上ノ各點ハ,該定點ヨリ該定距離ニ在ルコト.

及ビ 該定點ヨリ該定距離ニ在ル點ハ,悉ク該圓周上ニ在リテ,其ノ他ニハ一モコレ無キコト.

ヲ知ルベシ.

124. 122, 123 款ニ依リテ,或線上ノ各點ハ或要件ニ適シ,其ノ他ニハ該要件ニ適スル點,一モ無キ如キ場合アルコトヲ知ルベシ. 依リテ次ノ定義アリ.

或線上の總ての點は,或一定の要件に適し,其の他には該要件に適する點なければ,該線を該要件に適する點の**軌跡**と云ふ.*

依リテ補題1ハ,次ノ如ク述ブルコトヲ得ベシ.

二定點より等距離にある點の軌跡は,該二定點を結び付くる直線の垂直二等分線なり.

又補題2ハ,次ノ如ク述ブルコトヲ得.

一定點より一定の距離にある點の軌跡は,該點を中心とし,該定距離を半徑とする圓周なり.

注意 或要件ニ適スル點ノ軌跡ハ直線,曲線,或ハ其ノ一部分,又ハ其ノ群ナルコトアリ.

125. 或點ノ軌跡ヲ決定スルニハ,次ノ二ツノ

* 鉛筆ノ尖頭(サキ)ニテ直線,又ハ曲線ヲ或要件ニ從ヒテ畫クトキハ,鉛筆ノ尖頭ハ動點ニシテ,畫キタル直線,又ハ曲線ハ軌跡ノ觀念ヲ與フ.

代數學ニテハ,此ノ要件ヲ軌跡ノ方程式ニテ表ハス.

命題ヲ證明スルコトヲ要ス. 卽チ

I. 線Xの上にある點は,要件Aに適す.

II. 要件Aに適する點は,線Xの上にあり.

I, II ノ代リニ,ソレゾレ次ノ二ツヲ證明スルモ可ナリ.

III. 要件Aニ適セザル點ハ,線Xノ上ニアラズ.

IV. 線Xノ上ニアラザル點ハ,要件Aニ適セズ.

又IIトIII,或ハIトIVトヲ證明スルモ可ナリ.

例題

※1. 一定直線ヨリ,一定ノ距離ニアル點ノ軌跡ヲ求メヨ.

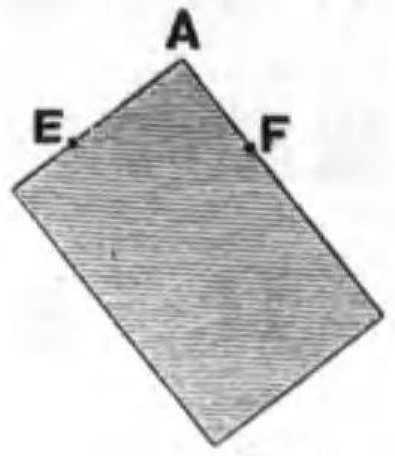
※2. 一定點ヨリ,一定直線マデ引ケル直線ノ中點ノ軌跡ヲ求メヨ.

※3. 圓ノ定長ノ弦ノ中點ノ軌跡ハ,一ノ同心圓ナリ.

※4. 三角形ノ一邊ガ一定ニシテ,之ニ對スル角ノ

大イサガ一定ナルトキ,其ノ角頂ノ軌跡如何.

5. 矩形ノ板ノ隣接シタル二邊ヲ二ツノ定點 E, F ニ附ケテ,此ノ矩形ヲ滑ラストキ,角頂 A ノ軌跡如何.



*5. 相交ル二直線ヨリ等距離ニアル點ノ軌跡如何.

若シ二直線ガ平行スルトキハ如何.

*7. 三角形ノ一邊ノ長サ,及ビ其ノ位置ガ一定ニシテ,之ニ對スル角ノ大イサガ一定ナルトキ

(1) 其ノ內心ノ軌跡如何.

(2) 其ノ傍心ノ軌跡如何.

(3) 底邊ノ一端ヨリ,頂角ノ外二等分線ニ引キタル垂線ノ趾ノ軌跡如何.

第六節

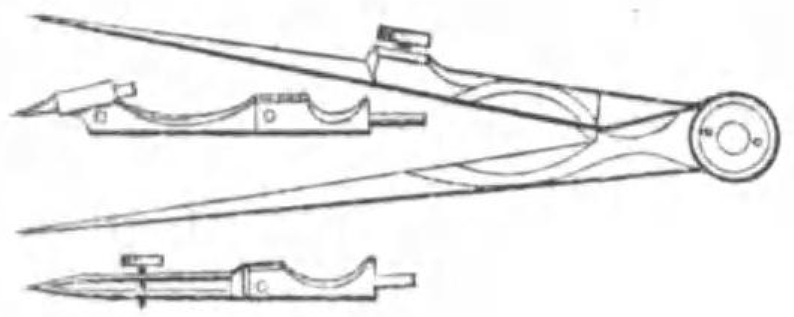
作圖題

126. 定義 幾何學に於て,既知件を以て圖形の作圖をなす命題を**作圖題**と云ひ,得る所の圖形を其の**解**と云ふ.

實用的作圖ニ於テハ,定木(ヂヤウギ)[矩]及ビ圓規(コムパス)[規]ヲ用フ. 定木ハ直線ヲ引キ,圓規ハ圓ヲ畫キ,距離ヲ移ス所以ノ具タリ.

圓規

(コムパス)



理論的作圖ニ於テハ,次ノ三條ヲ作シ得ルモノトシテ許容セラレタリ,之ヲ**作圖ノ公法**ト云フ.

127. 作圖の公法

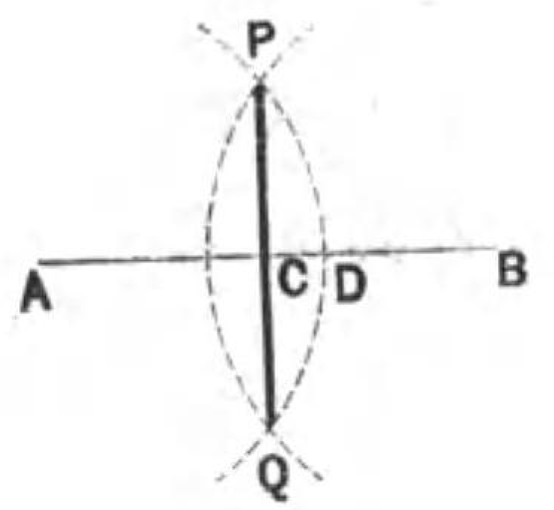
I. 任意ノ一點ヨリ,他ノ任意ノ一點ヘ直線ヲ引クコト.

II. 有限直線ヲ,任意ノ長サニ引キ延バスコト.

III. 任意ノ點ヲ中心トシ,任意ノ長サノ直線ヲ半徑トシテ圓ヲ畫クコト.

128. 作圖題 既知の線分の垂直二等分線を作ること.

ABヲ既知ノ線分トス.



作圖法 A及ビBヲ中心トシ,ABノ半分ヨリ少シク大ナルADヲ半徑トシテ,二ツノ圓ヲ畫キ,其ノ交點ヲP,Qトス.

然ルトキハ PQハ所要ノ垂直二等分線ナリ.

證 PAB, QABハ何レモ二等邊三角形ナルユヱ.

PQハABノ垂直二等分線ナリ. [122款]

注意1. 本文ノ作圖法ハ,又ABノ中點Cヲ與フ.

注意2. Cヲ既知點トシ,CA=CBヲ取リ,本文ノ作圖ヲナストキハ,PQハ既知直線上ノ既知點ニ於テ,之ニ垂線トナル,

例題

1. 128款ノ作圖ニ於テ,ADヲABノ半分ヨリ,少シク大キク取リタル理由如何.

*2. 既知ノ線分ヲ2^n等分セヨ. 但nハ任意ノ整數ナリ.

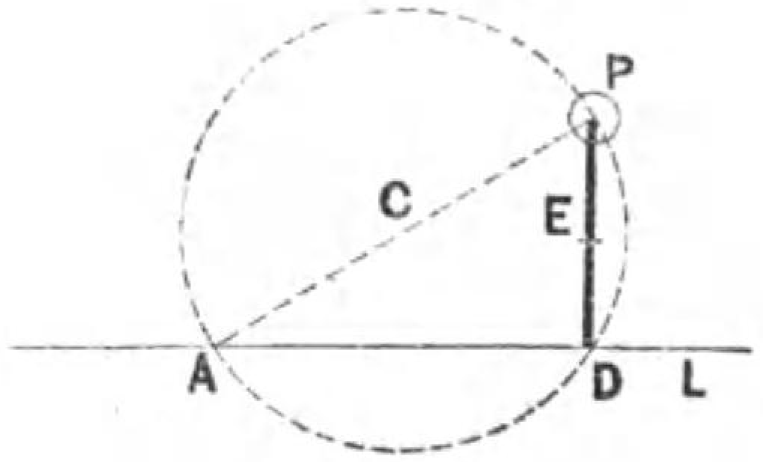
*3. 既知ノ三點ヲ過ル圓ヲ畫ケ.

---

129. 作圖題 既知一直線外の既知一點より,之に垂線を引くこと.*

Lヲ既知ノ直線,

Pヲ既知ノ點トス.



作圖法 Pヲ過リテ任意ノ直線ヲ引キ,直線Lニ點Aニ於テ出會ハシメ,APヲCニ於テ二等分シ, [128款注意1]

Cヲ中心トシ,CPヲ半徑トシテ圓ヲ畫ケ.

若シPAガLニ垂直ナラザルトキハ,圓ハ二點A, Dニ於テLニ交ル可シ.

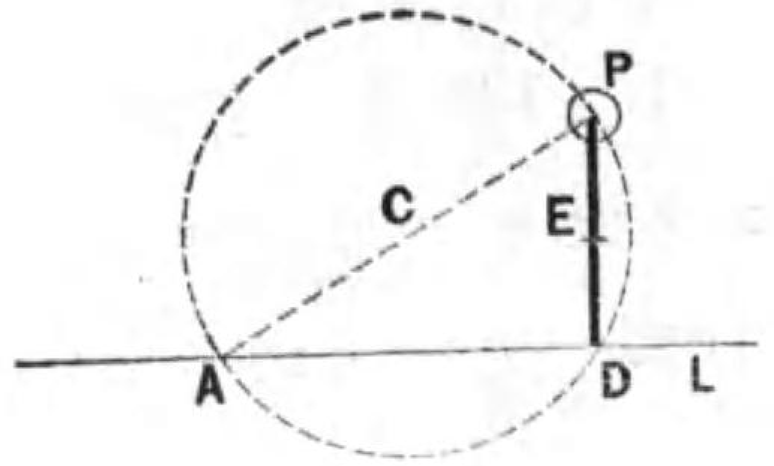
---

* 始メテ本題ヲ解キシハえのぴです[Œnopides, 希臘ノ幾何學者,約西暦紀元前465年頃ノ人]ナリ.

然ルトキハPDハ所要ノ垂線ナリ.

證 $\widehat{PDA}$ ハ半圓ニ於ケル角ナリ,

∴ $\widehat{PDA}=\hat{R}$. [95款]



注意 DハLノ上ノ既知ノ點トス.

任意ノ點Cヲ中心トシ,半徑CDヲ以テ圓ヲ畫キ,Lヲ再ビ點Aニ於テ截ラシメ,徑ACPヲ引キ,DPヲ結ビ付クレバ,DPハLニ垂直ナリ. 故ニ

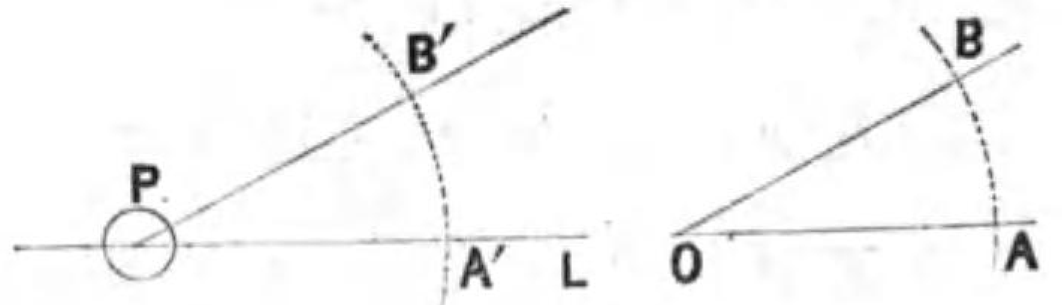
此ノ作圖法ハ'既知直線L上ノ既知一點Dヨリ,之ニ垂線ヲ作ルコト'ヲ與フ.

例題

4. 129款ノ圖ニ於テ,Cヲ既知點トシ,Lヲ既知直線トス,而シテPDヲEニ於テ二等分スレバ,CEハCヲ過リテLニ平行スル直線ヲ與フ可シ,之ヲ證セヨ.

130. 作圖題 既知直線上の既知一點を過りて,之と既知角をなす直線を引くこと.

Pヲ既知直線L上ノ既知點トシ,$\hat{O}$ヲ既知角トス.



作圖法 既知角ノ頂點Oヲ中心トシ,任意ノ半徑ヲ以テ圓ヲ畫キ,二邊ヲA, Bニ於テ截ラシム.

之ト同ジ半徑ヲ以テ,Pヲ中心トシテ圓ヲ畫キ,LトA′ニ於テ交ラシム.

次ニA′ヲ中心トシ,距離ABヲ半徑トスル圓ヲ畫キ,前ノ圓トB′ニ於テ交ラシメ,

PB′ヲ結ビ付クレバ,PB′ハ所要ノ直線ナリ.

證 $\triangle OAB \equiv \triangle PA'B'$ [59款]

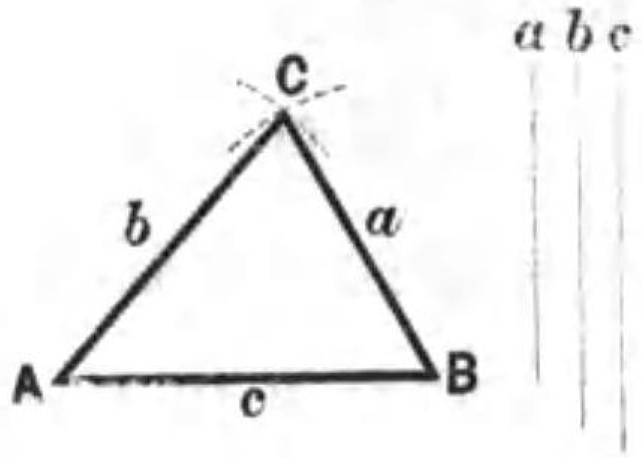
ナルコトヨリ明カナリ.

注意 本文ノ作圖ニ於テ,PA′ヲPヨリ左ニ取レバ,亦一ノ解ヲ得,又直線ノ他ノ側ニ二ツノ解アリ.

例題

*5. 既知一點ヲ過リ,既知一直線ニ平行スル直線ヲ引クコトヲ求ム.

131. 作圖題 三角形の三邊を既知して,本形を作ること.



a, b, c ヲ既知ノ三邊トス.

作圖法 c ニ等シキ直線 AB ヲ置キ, A ヲ中心トシ, b ヲ半徑トシテ弧ヲ畫キ, 又 B ヲ中心トシ, a ヲ半徑トシテ弧ヲ畫キ,前ノ弧ト點 C ニ於テ交ラシムレバ, ABC ハ所要ノ三角形ナリ.

證 △ABC ノ三邊ハ, ソレゾレ a, b, c ニ等シキコト明カナリ.

注意 1. 本文ノ作圖ニ於ケル弧ハ, 又 AB ヲ隔テテ C ト反對ノ傍ニ,點 C′ ニ於テ交ル可シ.

故ニ △ABC′ ハ亦一ノ解ナリ. 然レドモ △ABC′ ハ全ク △ABC ニ等シ.

注意 2. $c=a+b$, 又ハ $c=a\sim b$ ナル場合ニハ,二圓ハ外切,又ハ内切シ,又 $c>a+b$, 又ハ $c<a\sim b$ ナル場合ニハ,二圓ハ出會ハズ,何レモ三角形ハ不能ナリ. 故ニ本題ヲシテ成立セシメンニハ, $c<a+b$, 及ビ $c>a\sim b$ ナルコトヲ要ス. 而シテ此ノ場合ニハ全ク相等シキ二ツノ解アリ.

斯ク作圖題ノ解ノ數,及ビ能不能ノ限界,等ヲ論ズルコトヲ作圖題ノ**吟味**ト云フ.

例 題

*6. 既知角ヲ二等分スル法如何.

[49 頁 52 題ヲ參考セヨ]

從ヒテ又 既知角ヲ 2^n 等分セヨ. 但 n ハ任意ノ整數ナリ.

---

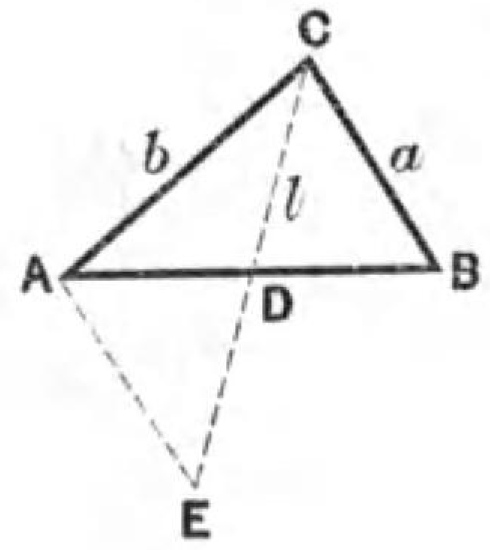
132. 以上述ベタル方法ハ,先ヅ作圖法ヲ與ヘ,次ニ之ヲ證明セリ,斯クスルコトヲ**組立法**ト云フ. 然レドモ稍困難ナル問題ニハ,概シテ**解析法**ヲ用フルヲ可ナリトス.

解析法トハ,先ヅ所要ノ圖形ヲ作リ得タリトシ,之ヨリ逆ニ推理シテ,既知件ト未知件トノ關係ヲ求メテ,容易ク作圖シ得ルモノ,又ハ既ニ爲シタル作圖ニ歸セシムル法ヲ云フ. 次ニ之ヲ例セン.

133. 作圖題 三角形の二邊と,第三邊へ引ける中線とを既知して,本形を作ること.

a, b ヲ既知ノ二邊, l ヲ未知ノ第三邊ヘ引ケル中線トス.

解析法 所要ノ三角形ABCヲ作リ得タリトシ, CDヲ既知ノ中線トス.



CD ヲ E ニ引キ延バシ, DE=CD ナラシメ, AE ヲ結ビ付ケヨ.

然ルトキハ　△ADE, △BDC ニ於テ

AD=BD	[假設]
DE=DC	[作圖]
$\widehat{ADE}=\widehat{BDC}$	[23款]
∴ AE=BC.	[47款]

依リテ　△ACE ハ既知ノ三邊 $2l$, a, b ヲ有ス.

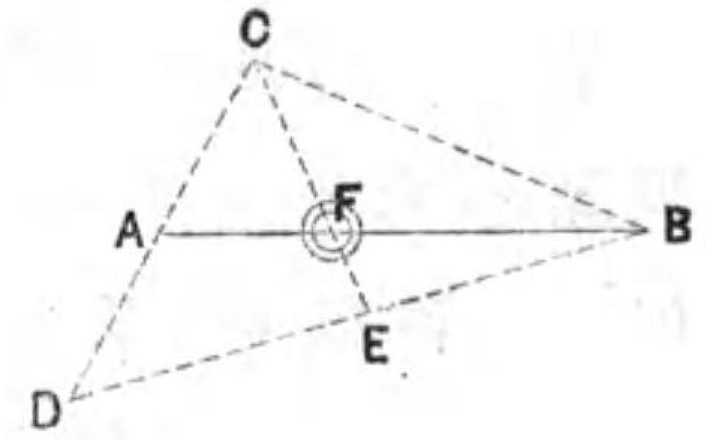
故ニ　本題ハ △ACE ヲ作ルコトニ歸ス.

而シテ　此ハ 131款ニ既ニ之ヲ爲セリ.

例題

7. 既知ノ線分ABノ三等分點Fヲ求ムル,次ノ作圖法ヲ證明セヨ.

任意ノ直線CADヲ引キ, AC=ADナラシメ; BC, BDヲ結ビ付ケ, BDヲEニ於テ二等分シ, CEヲ結ビ付ケ, ABニFニ於テ交ラシム.



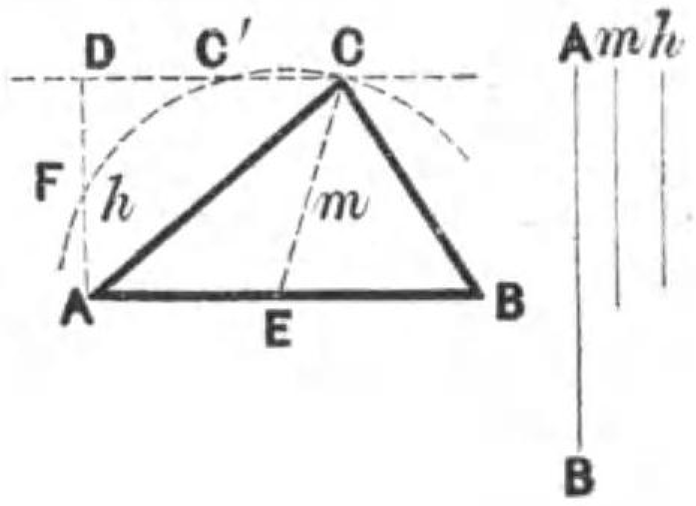
*8. 三角形ノ三ツノ中線ヲ既知シテ,本形ヲ作レ.

*9. 圓ニ内接スル正六角形ヲ作レ.

*10. 一周角ヲ三等分セヨ.

---

134. 作圖題 三角形の高さ,底邊及び此の底邊に引ける中線を與へて,本形を作ること.



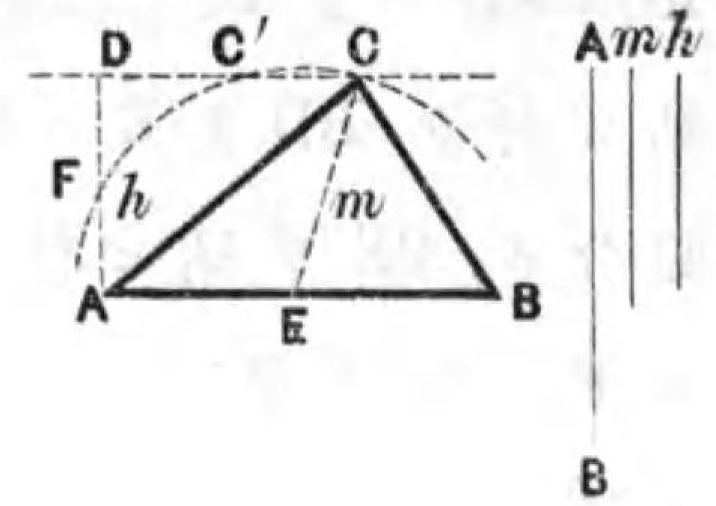
ABヲ與ヘラレタル底邊; h, m ヲソレゾレ高サ及ビ中線トス.

I. ABニ長サ h ナル垂線ADヲ作リ, Dヲ過リ, ABニ平行スル直線CC′ヲ引クトキハ

所要ノ三角形ノ頂點ハCC′ノ上ニアリ.

II. ABノ中點Eヲ中心トシ, m ヲ半徑トシテ圓CC′Fヲ畫ケバ,

所要ノ三角形ノ頂點ハ,圓周 CC'F ノ上ニアリ.



故ニ 所要ノ三角形ノ頂點ハ,此ノ二ツノ軌跡,卽チ 直線 CC' 及ビ圓周 CC'F ノ共通ノ點 C 及ビ C' ナリ.

吟味 若シ $h<m$ ナルトキハ,直線 CC' ハ圓周 CC'F ニ交リ,問題ノ要件ニ適スル三角形ハ二ツアリ.

若シ $h=m$ ナルトキハ,直線 CC' ハ圓周 CC'F ノ切線トナリ,要件ニ適スル唯一ツノ三角形アリ.

又 $h>m$ ナルトキハ,直線 CC' ハ圓周 CC'F ニ出會ハズ,而シテ三角形ハ不能ナリ.

注意 此ノ作圖題ノ如ク,作圖ヲ成功スルニハ,一點[卽チ C]ヲ求ムルニアリテ,此ノ一點ハ二ツノ軌跡ノ各ニ屬スルコトヲ述べ,其ノ交點ヲ取ル方法ヲ**軌跡ノ交リノ法**ト云フ.

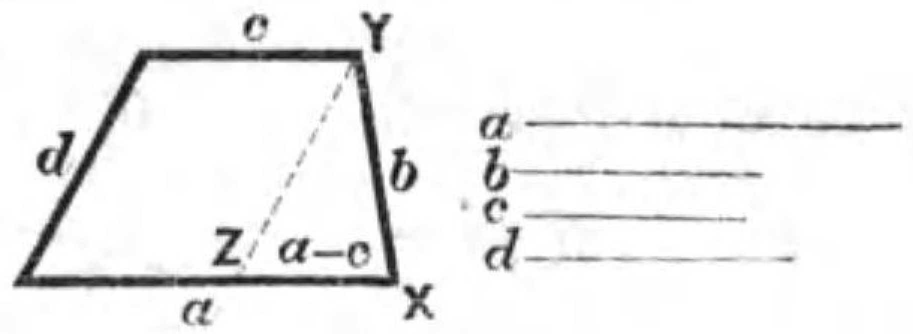
例 題

11. 既知ノ圓,又ハ弧ノ中心ヲ求メヨ

---

135. 作圖題 梯形の四邊を既知して,本形を作ること.

既知ノ四邊ヲ a, b, c, d トス.



解析法 梯形ヲ畫キ得タリトシ,邊 d ガソレ自身ニ平行シ,邊 a, c ノ間ヲ移動シテ YZ ノ位置ニ來ルトセヨ. 然ルトキハ三角形 XYZ ハ既知ノ三邊 $b, d, a-c$ ヲ有スルヲ以テ作圖シ得可シ. [131 款]

故ニ容易ニ本形ヲ作リ得可シ.

注意 斯ノ如ク作圖題ヲ解クコトヲ,**平行移動ノ法**ト云フ.

例 題

12. 既知ノ直線ニ平行シ,且既知ノ長サヲ有スル直線ヲ,既知二圓周ノ間ニ置ケ.

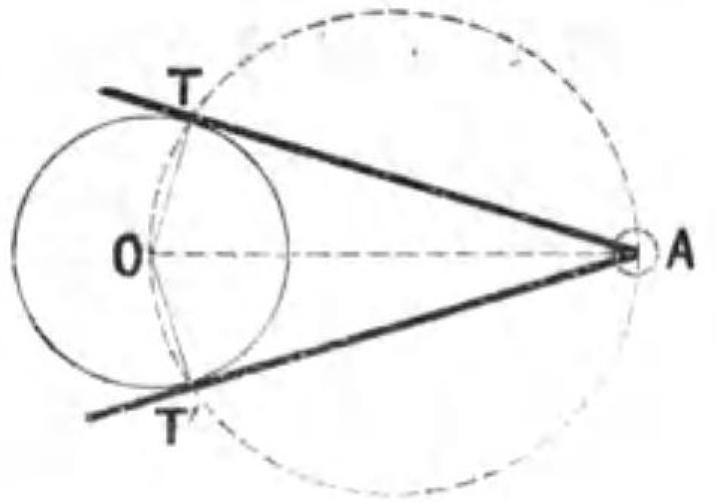
---

136. 作圖題 既知圓外の既知一點

より,之に切線を引くこと.

O ヲ既知ノ圓トシ, A ヲ其ノ外ノ既知ノ一點トス.

解析法 A ヨリ二ツノ切線 AT, AT′ ヲ引キ得タリトシ; OT, OT′ ヲ結ビ付クレバ, $\widehat{OTA}$, $\widehat{OT'A}$ ハ何レモ直角ナリ. [99 款系 3]



故ニ　T 及ビ T′ ハ, AO ヲ徑トシテ,其ノ上ニ畫キタル圓周上ニアリ.

故ニ　此ノ圓周ト既知圓周トノ交點ハ,所要ノ切線ノ切點ナリ.

137. 定義　二圓の共通切線を,其の公切線と云ふ.

二圓ガ公切線ノ同ジ側ニアルトキハ,其ノ公切線ヲ二圓ノ**外公切線**ト云ヒ,反對ノ側ニアルトキハ,**內公切線**ト云フ.

例　題

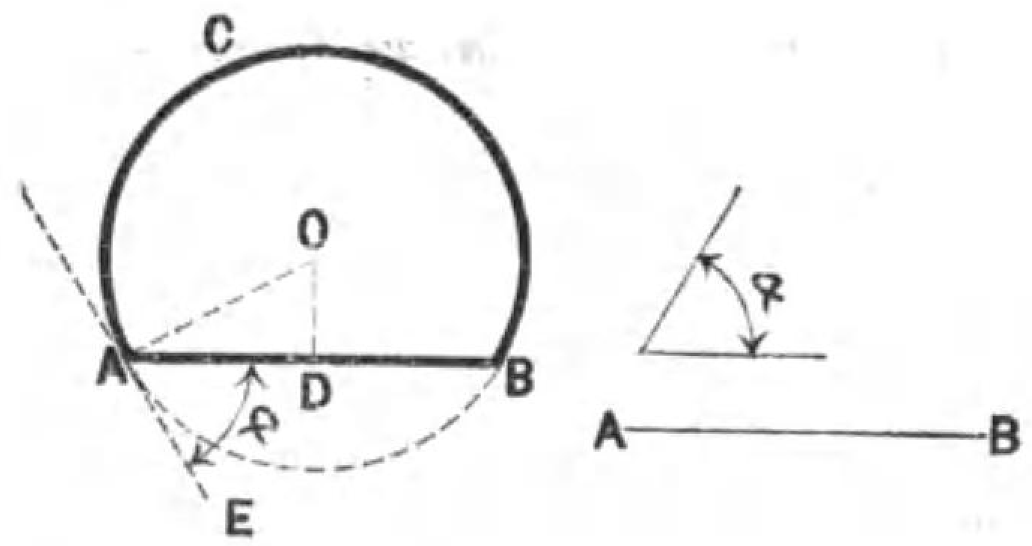
*13. 136 款ニ於テ,點 A ガ既知圓 O ノ周上ニアルトキハ如何.

*14. 既知二圓ニ公切線ヲ引ケ.

15. 既知ノ一點ヲ過リテ既知圓ニ割線ヲ引キ,其ノ圓內ニアル部分ヲ,既知ノ長サニ等シカラシメヨ.

138. 作圖題　既知直線上に弓形を畫き,此の弓形に於ける角を,既知角に等しからしむること.

AB ヲ既知ノ直線トシ, α ヲ既知ノ角トス.



解析法 ACB ハ所要ノ弓形ナリトシ, O ヲ其ノ弓形ノ弧ノ中心, AE ヲ A ニ於ケル切線トスレバ　$\widehat{EAB}=\alpha$, [100 款]

而シテ　中心 O ハ AE ノ垂線 AO 上ニアリ. [99 款系 4]

又　O ハ AB ノ垂直二等分線 DO ノ上ニアリ. [80 款系 2]

故ニ　中心 O ハ此ノ二直線ノ交點ナリ.

是ニ依リテ　AB ト角 α ヲナス直線 AE ヲ引キ, A ニ於テ AE ニ垂線 AO ヲ作リ,又 AB ノ垂直二等分線 DO ヲ作レバ,其ノ交點 O ハ,所要ノ弓形ノ弧ノ中心ナリ.

例　　題

*16. 既知一點ヲ過リテ一ノ直線ヲ引キ,既知圓ヨリ一ノ弓形ヲ截リ取リ,其ノ弓形ニ於ケル角ヲ,既知角ニ等シカラシメヨ.

17. 既知ノ三角形ト等角ナル三角形ヲ,既知ノ圓ニ內接セヨ. 又外切セヨ.

18. 三角形ノ底邊,高サ,及ビ頂角ノ大イサヲ知リテ本形ヲ作レ.

雜　　題

[106 頁ノ續]

13. 三角形ノ底邊,他ノ二邊ノ和,若シクハ差ト一底角トヲ知リテ,本形ヲ作レ.

14. 三角形ノ周圍ト,二ツノ角トヲ知リテ,本形ヲ作レ.

15. 既知ノ一點ヲ過リテ,既知ノ二平行直線ニ一ノ橫截線ヲ引キ,其ノ二平行直線間ニ夾マレタル線分ヲ,既知ノ長サニ等シカラシメヨ.
此ノ作圖題ヲ吟味セヨ.

16. 兄弟二家ニ住ス,其ノ間ニ一河アリテ,其ノ兩堤防ハ互ニ平行セリ. 今此ノ河ニ橋ヲ架スルニ,橋ノ長サヲ最モ短クシ,且二家ノ間ノ道ノ長サヲモ最モ近クセントス. 如何ニセバ可ナルカ.

17. 圓ノ平行セル諸弦ノ中點ノ軌跡ハ如何.

18. 既知ノ二直線ニ切スル,既知ノ半徑ノ圓ヲ畫ケ.

19. 既知ノ二圓ノ中心線上ノ如何ナル點ヨリ,此ノ二圓ガ相等シキ角ニ見ユルカ.

20. 既知ノ圓ヲ二ツノ弓形ニ分チ,其ノ一ニ於ケ

ル角ヲ,他ノ一ニ於ケル角ノ二倍ナラシメヨ.

21. 圓ニ內接セル三角形ノ各角ガ 30°, 50° 及ビ 100° ナルトキ,此ノ三ツノ角ノ二等分線ガ,圓周ニ交ル點ヲ A, B, C トセバ,三角形 ABC ノ各角ノ大イサ如何.

22. 既知ノ半徑ヲ以テ,既知ノ一直線ト,既知ノ圓トニ切スル圓ヲ畫ケ.

23. 梯形ノ兩對角線,及ビ其ノ夾角,竝ニ兩隣邊ノ和ヲ與ヘテ本形ヲ作レ.

24. 次ノ既知件ヲ以テ三角形ヲ作レ.

(1) 一邊 a ノ大イサ,及ビ位置,竝ニ內心ノ位置.

(2) 一邊 a ノ大イサ,及ビ位置,竝ニ垂心ノ位置.

(3) 一邊 a ノ大イサ,及ビ位置,竝ニ重心ノ位置.

第三編 面積

第一節

面積の比較

139. 本編ニ於テ論ズル所ノ量ハ,平面形ノ面積ナリ. 故ニ'二ツノ形ガ相等シ'ト云ヘルハ'二ツノ形ガ等積ナリ'ト云フニ同ジク,又'一ツノ形ガ他ノ形ノ若干倍,若シクハ若干分ナリ'ト云ヘルハ'一ツノ形ノ面積ガ他ノ形ノ面積ノ若干倍,若シクハ若干分ナリ'ト云フニ同ジ,卽チ是等ハ皆ソノ面積ニ就キテ云フナリ.

普通公理 [12 款] III 及ビ IV ニ依リ,幾何學公理 [13 款] II ヲ擴張スルコト次ノ如シ.

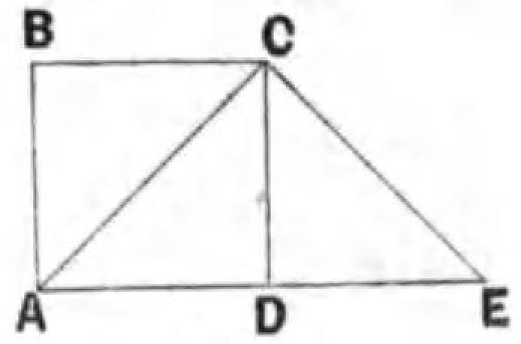
幾何學公理ノ擴張 全ク相等シキ[卽チ重ネ合スコトヲ得ル]量ノ和,或ハ差ハ,重ネ合スコト能ハザルモ亦相等シ.

140. 定義 平面形の**面積**とは,其の形內に含まれたる平面の廣さを云ふ.

全等形ハ勿論,面積相等シ,卽チ等積ナリ.

然レドモ　等積ナルモノ,必ズシモ全等ナラズ

例ヘバ ABCD ヲ正方形トス.



然ルトキハ　△ABC≡△ADC,

サテ AD ヲ E ニ引キ延バシ,

DE=AD ニ取リ, CE ヲ結ビ付ケヨ.

然ルトキハ　△CDE≡△ADC≡△ABC,

∴ □ABCD=△ACE.

卽チ等積ナルモ全等ナラザル兩形ヲ得タリ.

141. **定義**　三角形は,其の任意の一邊を底邊と見ることを得,然るときは,頂點より底邊までの距離は,其の**高さ**なり.

平行四邊形ニ於テモ,其ノ任意ノ一邊ヲ底邊ト見ルコトヲ得,然ルトキハ底邊ト對邊トノ距離ハ,其ノ**高サ**ナリ.　梯形ニ在リテハ,平行二邊ヲ**底邊**,其ノ間ノ距離ヲ**高サ**トス.

底邊ト高サトハ比對的名稱ナリ.

例ヘバ　三角形ハ三ツノ異ナリタル底邊ト,之ニ對應スル三ツノ高サトヲ有チ得ベシ.

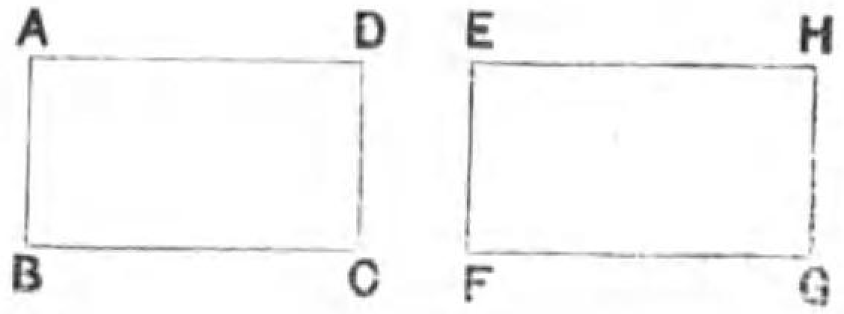
矩形ノ兩隣邊ハ互ニ垂直ナルユヱ,其ノ一邊ヲ底

邊ト見,之ニ隣ル邊ヲ高サト見ルコトヲ得.

既知ノ二線分ヲ底邊及ビ高サトスル矩形ハ,**是等ノ二線分ノ包ム矩形**ト稱ス.　而シテ二直線 AB, CD ノ包ム矩形ヲ AB.CD ト記ス.

142. **定理**　二つの矩形に於て,底邊及び高さがそれぞれ相等しきときは,是等の矩形は等積なり.

□ABCD, □EFGH ニ於テ　AB=EF,　BC=FG ナルトキハ



□ABCD=□EFGH

ナルコトヲ證セントス.

證　[二ツノ矩形ヲ重ネ合シテ,等積ナルコトヲ證明シ得可シ].

143. **系** 1.　等底[或ハ等高]ニシテ,等高[或ハ等底]ナラザル矩形ハ等積ナラズ,高サ[或ハ底邊]ノ大ナル方ノ矩形ガ,小ナル方ノ矩形ヨリ大ナリ.

系 2.　等底等積ノ矩形ハ高サ相等シ.

[高サ AB ガ高サ EF ニ等シカラズトセバ,背理ノ結果ヲ得ルコトニ依リテ證明ス可シ].

系3. 等高等積ノ矩形ハ底邊相等シ.

例　題

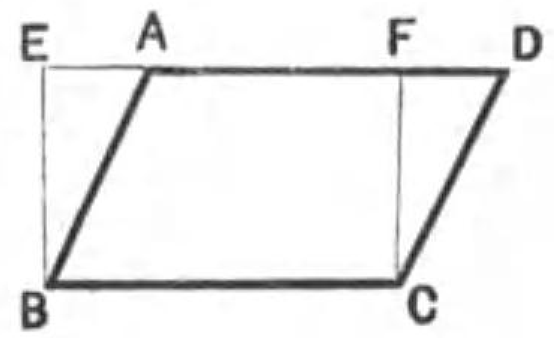
*1. 等底ノ二ツノ矩形アリ,其ノ一ノ高サガ他ノ一ノ高サノ二倍ナルトキハ,第一ノ矩形ハ,第二ノ矩形ノ二倍ニ等シ.

*2. 一ノ正方形ノ面積ハ,其ノ半分ノ邊ヲモツ正方形ノ四倍ニ等シ.

---

144. 定理 平行四邊形は,其の底邊と高さとの包む矩形と等積なり.

ABCD ハ BC ヲ底邊トシ, CF ヲ高サトスル平行四邊形ナルトキハ



▱ABCD = BC.CF

ナルコトヲ證セントス.

證 BC ニ垂線 BE ヲ引キ,矩形 CFEB ヲ完成セヨ.

然ルトキハ　AD = BC = EF,　[65 款]

故ニ　FD = EA,　[12 款 IV]

而シテ　FC = EB,　[65 款]

及ビ　$\widehat{CFD} = \widehat{BEA} (= \hat{R})$,

∴ △DFC ≡ △AEB,　[47 款]

∴ ▱ABCD = □EBCF,　[2 款 III, 或ハ IV]

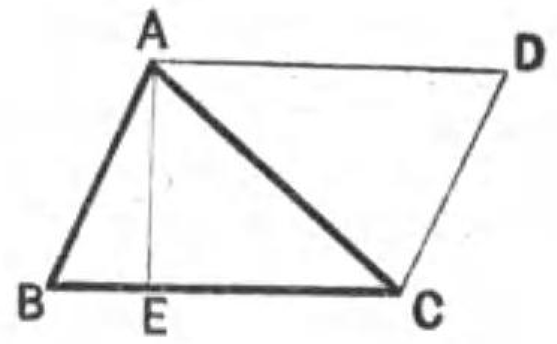
卽チ　▱ABCD = BC.CF.

145. 系1. 等底等高ノ平行四邊形ハ等積ナリ.

系2. 等底等積ノ平行四邊形ハ高サ相等シク,又 等高等積ノ平行四邊形ハ底邊相等シ.

146. 定理 三角形は,等底等高をもつ平行四邊形の半分と等積なり.

ABC ハ BC ヲ底邊トシ, AE ヲ高サトスル三角形,之ト等底等高ノ平行四邊形ヲ P トスレバ



$\triangle ABC = \frac{1}{2}P$

ナルコトヲ證セントス.

證 AB, BC ヲ兩隣邊トスル平行四邊形 ABCD ヲ完成スレバ　△ABC ≡ △CDA,　[66 款系 1]

∴ $\triangle ABC = \frac{1}{2}$▱$ABCD = \frac{1}{2}P$.　[145 款系 1]

147. 系1. 三角形ハ,其ノ底邊ト高サトノ包

ム矩形ノ半分ト等積ナリ.

系 2. 等底等高ノ三角形ハ等積ナリ.

系 3. 等高等積ノ三角形ハ底邊相等シク,

又　等底等積ノ三角形ハ高サ相等シ.

例　　題

3. 三角形ノ一ツノ中線ニテ,本形ヲ分テル二部ノ面積ヲ比較セヨ.

*4. 同ジ底邊ノ同傍ニアル二ツノ等積ノ三角形ノ頂點ヲ結ビ付クル直線ハ,底邊ニ平行ス.

又底邊ニ平行ナル任意ノ直線ヲ引キ,二ツノ三角形ノ邊ニ交ラシムレバ,各ノ二邊ガ此ノ直線ヨリ截リ取ル部分ハ相等シ.

*5. 二ツノ三角形ガ同ジ底邊ノ異傍ニアルトキ,

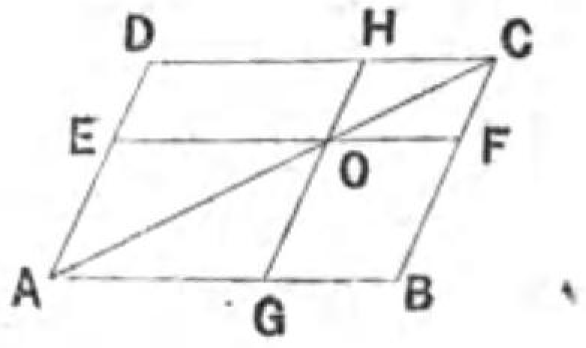
(1)　三角形ガ等積ナレバ,底邊ハ其ノ頂點ヲ結ビ付クル直線ヲ二等分ス.

(2)　底邊ガ頂點ヲ結ビ付クル直線ヲ二等分スルトキハ,三角形ハ等積ナリ.

*6. 二ツノ矩形ノ高サガ相等シケレバ,其ノ面積ノ和ハ底邊ノ和ト,共通ノ高サトノ包ム矩形ニ等シ.

148. **定理**　平行四邊形の對角線上の任意の一點を過りて,各邊に平行する二直線を引くとき,其の對角線の兩側に生ずる二つの平行四邊形は等積なり.

平行四邊形 ABCD ノ對角線 AC 上ノ任意ノ一點 O ヲ過リテ,ソレゾレ邊 AB, BC ニ平行スル直線 EF, GH ヲ引クトキハ



▱DEOH＝▱OGBF

ナルコトヲ證セントス.

證　[66款系1ニ依リテ證スベシ].

注意　平行四邊形 EG, HF ヲ平行四邊形 ABCD ノ**對角線ニ沿ウ平行四邊形**ト云ヒ,平行四邊形 DO, BO ハ之ヲ平行四邊形 ABCD ノ對角線 AC ニ沿ウ平行四邊形ノ**餘形**ナリト云フ.

例　　題

*7. 平行四邊形ノ兩對角線ノ交點ヲ過ル任意ノ直線ハ,本形ヲ二等分ス.

8. 平行四邊形 ABCD ノ對角線 AC 上ニアラザ

ル任意ノ一點ヲ P トシ, P ヨリ各邊ニ平行スル直線ヲ引キテ平行四邊形 PB, PD ヲ作リ, 又三角形 APC ヲ作ルトキハ

$$\triangle APC=\frac{1}{2}(\square PB\sim\square PD)$$

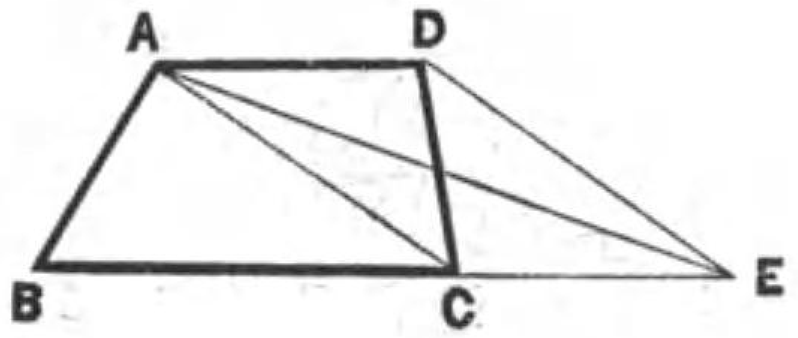
ナルコトヲ證セヨ.

---

149. 定理 梯形の面積は,之と等高にして,其の兩底邊の和を底邊とする三角形の面積に等し.

ABCD ヲ梯形トシ,其ノ一ツノ底邊 BC ヲ引キ延バシテ E ニ至リ,

CE=AD



ナラシムルトキハ

梯形 ABCD=△ABE

ナルコトヲ證セントス.

證 AC, DE ヲ結ビ付クルトキハ,

△ACD=△ACE, [147 款系 2]

此ノ兩邊ニ △ABC ヲ加フレバ

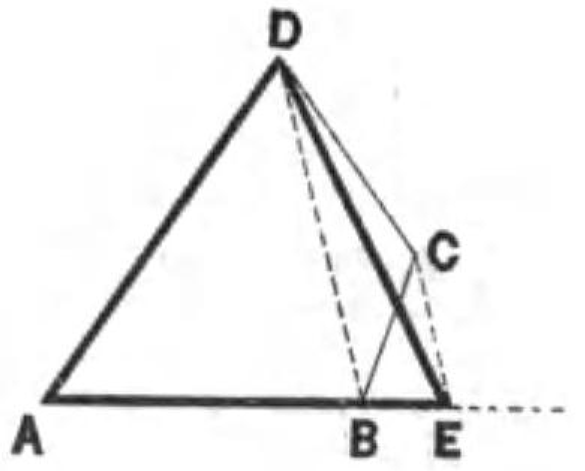
梯形 ABCD=△ABE.

150. 系 梯形ノ面積ハ,其ノ兩底邊ノ和ト高サトノ包ム矩形ノ半分ニ等シ.

151. 作圖題 既知の四邊形に等積なる三角形を作ること.

ABCD ヲ既知ノ四邊形トス.

作圖法 對角線 BD ヲ引キ, BD ニ平行シテ CE ヲ引キ, AB ノ延線ニ E ニ於テ交ラシメ, DE ヲ結ビ付クレバ, △ADE ハ所要ノ三角形ナリ.



證 [147 款系 2 ヨリ明カナリ].

注意 本文ノ作圖法ヲ反覆應用シテ,任意ノ直線形ニ等積ナル三角形ヲ作ルコトヲ得ベシ.

例題

9. 梯形ノ平行ナラザル二邊ノ一ヲ底邊トシ,對邊ノ中點ヲ頂點トスル三角形ハ,梯形ノ半分ニ等シ.

※10. 三角形ノ一邊上ノ既知一點ヲ過ル一直線ヲ

引キテ,本形ヲ二等分セヨ.

又該點ヲ過ル二直線ヲ引キテ,本形ヲ三等分スル法如何.

11. 次ノ要件ニ從ヒテ梯形ヲ二等分セヨ.

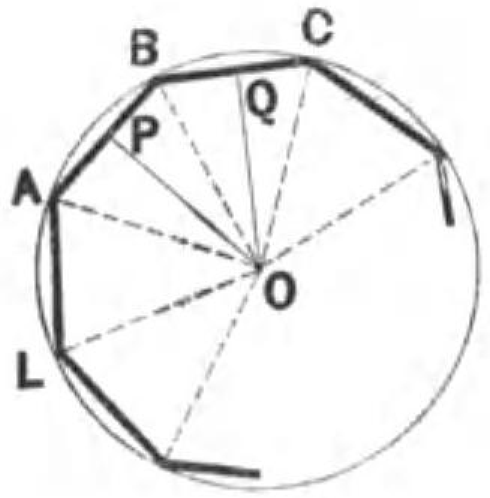
(1) 平行二邊ノ一ノ中點ヲ過ル直線ニテ.

(2) 一角頂ヲ過ル直線ニテ.

---

152. 定理 正多角形の面積は,其の邊心距と周との包む矩形の半分に等し.

ABC……L ヲ正多角形, O ヲ其ノ内切圓,外接圓共通ノ中心,卽チ其ノ中心; OP, OQ,……ヲ其ノ邊心距



トスレバ

$$正多角形\ ABC\ldots\ldots L=\frac{1}{2}OP.\overline{AB+BC+\ldots\ldots+LA}$$

ナルコトヲ證セントス.

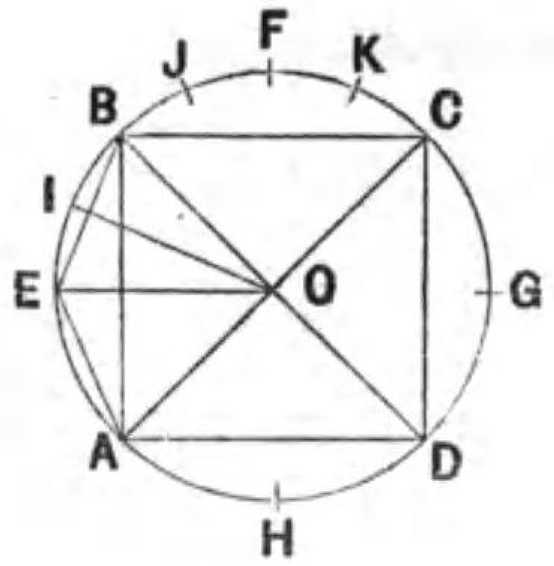
證 △AOB, △BOC,……, △LOA ノ高サハ,皆 OP ニ等シキ[101 頁 50 題]ヲ以テ,其ノ面積ノ和,卽チ

$$正多角形\ ABC\ldots\ldots L=\frac{1}{2}OP.\overline{AB+BC+\ldots\ldots+LA}.$$

[147 款系 1 及ビ 134 頁 6 題]

153. 極限に就きて.

ABCD ハ圓ニ内接スル正方形トシ; 弧 AB, BC, CD, DA ヲソレゾレ E, F, G, H ニ於テ二等分スレバ,内接正八角形ノ角頂ヲ得.



サテ正八角形ノ面積ハ,正方形ノ面積ヨリモ圓ノ面積ニ近ク,正八角形ノ周ハ,正方形ノ周ヨリモ圓周ニ近ク,又正八角形ノ邊心距ハ,正方形ノ邊心距ヨリモ圓ノ半徑ニ近シ.

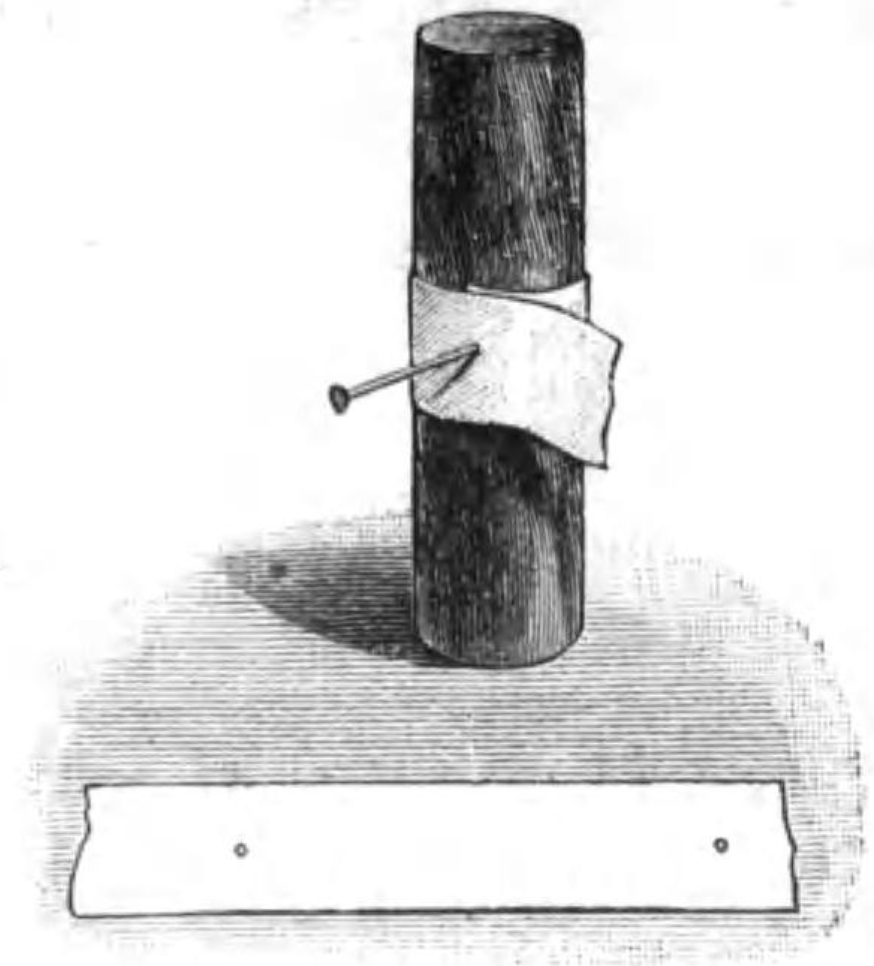
又弧 EB, BF, FC,……ヲソレゾレ點 I, J, K,……ニ於テ二等分スルトキハ,正十六角形ノ角頂ヲ得,而シテ正十六角形ノ面積,周,邊心距ハソレゾレ正八角形ノ面積,周,邊心距ヨリモ圓ノ面積,周,半徑ニ近シ.

斯ノ如ク次第ニ弧ヲ二等分シテ,正多角形ノ邊數ヲ限リナク增ストキハ,其ノ面積,周,邊心距ヲシテソレゾレ圓ノ面積,周,半徑ニ限リナク近寄ラシメ得可シ,然レドモ前ノモノハ,決シテ後ノモノヲ超過スルコトナシ.

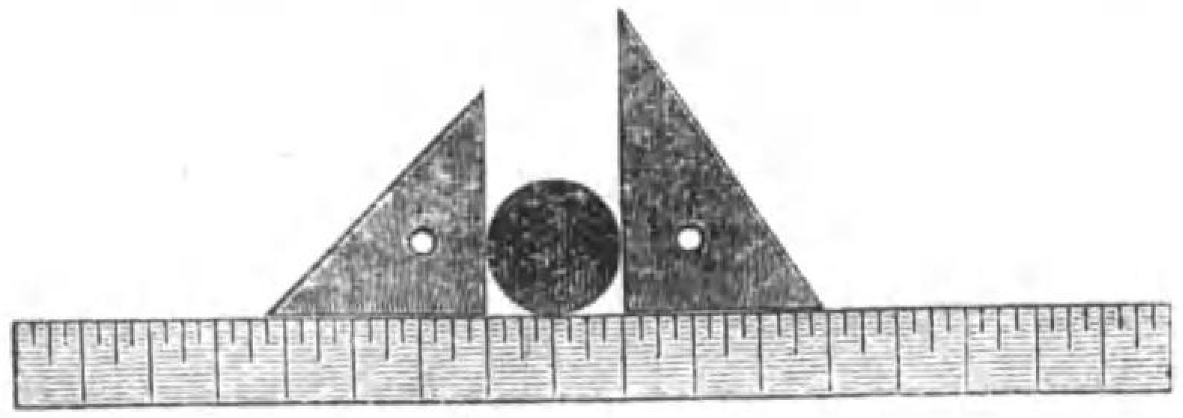
故ニ圓ノ面積,周,半徑ハソレゾレ内接正多角形ノ邊數ガ限リナク增シタルトキ其ノ面積,周,邊心距ノ

極限ナリト云フ.

注意　細長キ一枚ノ紙ヲ取リテ,丸柱ノ如キモノ＝卷附クルコト圖[上方ノ圖]ノ如クシ,之＝一本ノ留針[ぴん]ヲ刺シ,次＝其ノ留針ヲ拔キテ紙ヲ伸バスコト圖[下方ノ圖]ノ如クシ,其ノ留針ノ穴ト穴トノ距離ヲ目盛シタル定木[尺度]＝テ度レバ



丸柱ノ周[圓周ノ長サ]ヲ得ベシ.　而シテ其ノ柱ノ徑[圓徑]ノ長サヲ知ル＝ハ,圖ノ如ク目盛シタル定木＝丸柱ヲ當テテ,二枚ノ三角定木＝テ夾ミ,目盛ヲ



讀ムベシ.

斯クシテ圓周ハ其ノ徑ノ約ソ3倍ナルコトヲ知ル.*

* 圓周ト其ノ徑トノ比ハ後[210款]＝詳述スベシ.

154.　定理　圓は,其の半徑及び圓周と等長なる線分の包む矩形の半分と等積なり.

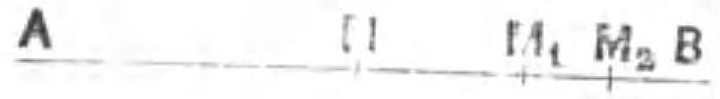
證　圓ノ面積ハ,其ノ内接正多角形ノ邊數ガ限リナク増シタルトキ,其ノ面積ノ極限＝シテ,半徑ハ正多角形ノ邊心距ノ極限ナリ.

然ル＝正多角形ハ,其ノ邊數ノ如何＝拘ラズ,邊心距ト周トノ包ム矩形ノ半分ト等積ナリ.　[152款]

故＝　圓ハ其ノ半徑,及ビ其ノ周ト等長ナル線分ノ包ム矩形ノ半分ト等積ナリ.

例　　題

12.　AB ハ定長ノ直線ナリトシ,一點ガ A ヨリ發シ,第一秒間＝ AB ノ半分 AM ヲ,第二秒間＝殘リノ半分 MM_1 ヲ進行スルトシ,逐テ斯ノ如クナルトキ,該點ノ進行シタル距離ノ極限如何.



※13.　圓＝外切スル正多角形ノ邊數ヲ限リナク増ストキ,其ノ周ノ極限ハ圓周ナリ.

14. 正多角形ノ邊數ガ限リナク增ストキ,其ノ一內角ノ極限ハ如何.

15. 正多角形ノ邊數ガ限リナク增ストキ,其ノ一外角ノ極限如何.

第二節

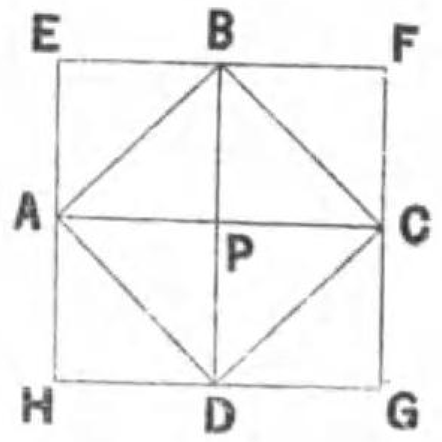
長さ及び面積の測度

155. 長サヲ測度スルニハ,**線單位**ヲ取ルヲ要ス. 例ヘバ實地ニハ測度ス可キ物ニ依リ,一寸,一尺,一間,一町,一里,又ハ一めｰとる,一哩,等ヲ用フルガ如シ.

併シ一ツノ所論中ハ,必ズ同ジ單位ヲ用フ可シ.

面積ヲ測度スルニハ,線單位ヲ一邊トスル正方形ヲ取リテ**面積單位**トス.

156. **定義** 二つの量が,或共通の單位にて整數又は分數にて表はさるるときは,之を**通約す可き量**といひ,然らざるときは,之を**通約す可からざる量**といふ.



例ヘバ ABCD ヲ正方形トシ; EBF, GDH ハ BD ニ垂直ニ; EAH, FCG ハ AC ニ垂直ニ引キ; AC, BD ノ交點ヲ P トスレバ, EFGH ハ亦正方形ニシテ三角形 ABE, ABP, BCF, BCP, ... ノ

如キハ,何レモ相等シキコト明カナリ.

若シ AB ヲ線單位トスレバ,正方形 ABCD ハ面積單位ニシテ,又 EF ヲ線單位トスレバ,正方形 EFGH ハ面積單位ナリ.

前ノ場合ニ於テハ □ABCD ノ測度ハ 1, □EFGH ノ測度ハ 2 ニシテ,後ノ場合ニ於テハ □EFGH ノ測度ハ 1, □ABCD ノ測度ハ $\frac{1}{2}$ ナリ.

故ニ □EFGH ト □ABCD トハ,通約ス可キ量ナリ.

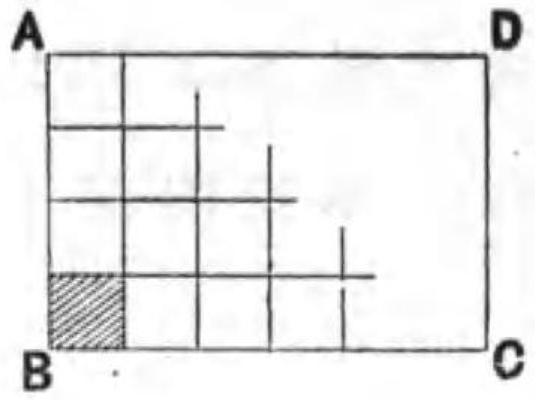
又 AB ヲ線單位トスレバ, EF ハ後ニ示ス如ク[154 頁 27 題],唯記號的ニ $\sqrt{2}$ トシテ表ハシ得ルノミニシテ,整數又ハ分數ニテ表ハス能ハズ. 斯ノ如キモノヲ**不盡數**ト云フ.*

故ニ AB 及ビ EF ハ,通約ス可カラザル量ナリ.

157. 定理 矩形に於ける面積單位の數は,其の兩隣邊に於ける線單位の數の積に等し.

* $\sqrt{2}$ ハ整數又ハ分數ニテ表ハス能ハザレドモ,望ム所ノ程度マデ,精密ニ近似値ヲ求メ得可シ.
例ヘバ $\sqrt{2}$ ノ近似値トシテ $\frac{14}{10}$, $\frac{141}{100}$, $\frac{1414}{1000}$,……ヲ得ルガ如シ.

I. 兩隣邊ノ測度ヲ整數ナリトス.



AB ハ線單位ヲ a 倍ダケ含ミ, BC ハ b 倍ダケ含ムトスレバ, AB ヲ a 等分シ, BC ヲ b 等分シテ,各分點ヨリ隣邊ニ平行スル直線ヲ引ケバ,

▭ABCD ニ於ケル面積單位ノ數ハ, ab ナルコト明カナリ.

II. 兩隣邊ノ測度ヲ分數ナリトス.

前ニ用ヒタル線單位ノ $\frac{1}{n}$ ヲ AB ハ p 倍ダケ, BC ハ q 倍ダケ含ムトスレバ,

元ノ線單位ノ $\frac{1}{n}$ ヲ線單位トスレバ, ▭ABCD ノ測度ハ pq ニシテ,

元ノ線單位ヲ用フレバ ▭ABCD ノ測度ハ

$$\frac{pq}{n^2},\ \text{即チ}\ \frac{p}{n}\times\frac{q}{n}$$

トナル. 依リテ本定理ノ如シ,今コレヲ略言シテ

矩形の面積は,其の兩隣邊の積に等し.

ト云フ.* [以下コノ略言ノ文體ヲ用フ].

* 矩形ノ兩隣邊ガ不盡數ナル場合ニハ,其ノ近似値ヲ取レバ II ニ屬ス. 然レドモ絕對的ニ不盡數ナル場合ハ,初等ノ書ニ不適當ナルユヱ,玆ニ之ヲ省ク. 併シ本定理ハ不盡數ニテモ亦眞ナリトス.

158. 前款ノ結果ヨリ,前節ニ記シタル定理ハ次ノ數條ヲ與フ.

(1) 平行四邊形ノ面積ハ,其ノ底邊ト高サトノ積ニ等シ. [144 款]

(2) 三角形ノ面積ハ,其ノ底邊ト高サトノ積ノ半分ニ等シ. [147 款系 1]

(3) 梯形ノ面積ハ,其ノ平行二邊ノ和ト高サトノ積ノ半分ニ等シ. [150 款]

(4) 正多角形ノ面積ハ,其ノ邊心距ト周トノ積ノ半分ニ等シ. [152 款]

(5) 圓ノ面積ハ,其ノ半徑ト周トノ積ノ半分ニ等シ. [154 款]

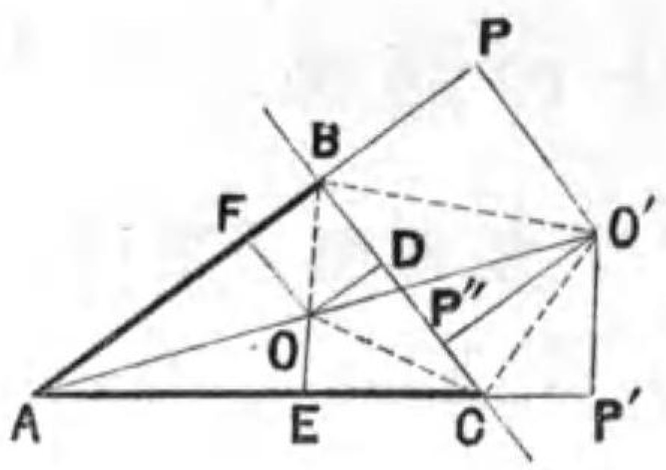
例題

*16. 三角形ノ三ツノ中線ハ,面積ヲ六等分スルコトヲ證セヨ.

17. 三角形ノ重心ヨリ三ツノ直線ヲ引キテ,本形ヲ等積ナル三ツノ四邊形ニ分テ.

*18. 三角形 ABC ノ三邊ヲ a, b, c トシ,其ノ和ノ半分ヲ s, 内切圓ノ半徑ヲ r; A, B, C ニ對スル傍切圓ノ半徑ヲソレゾレ r_1, r_2, r_3 トスレバ,

面積 Δ ハ sr, $r_1(s-a)$, $r_2(s-b)$, $r_3(s-c)$ ノ各ニ等シ.



[$\triangle ABC=\triangle AOB+\triangle BOC+\triangle COA=\triangle AO'B+\triangle AO'C-\triangle BO'C$ ニ依リテ證セヨ. 但 O ハ内切圓ノ中心, O′ ハ角 A ニ對スル傍切圓ノ中心ナリ].

19. $\frac{1}{r}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}$ ヲ證セヨ.

20. 三角形 ABC ノ各邊ヲ a, b, c トシ; $a=18$, $b=14$, $c=8$, $\Delta=24\sqrt{5}$ ナルトキ, $\Delta^2=rr_1r_2r_3$ ナルコトヲ證セヨ.

21. 等邊三角形ニ於テ,内切圓ノ半徑ト,傍切圓ノ半徑トノ關係如何.

*22. 圓ノ徑ヲ單位トシタルトキ,其ノ面積如何.

注意 圓ノ徑ヲ單位トスレバ,其ノ周 π ハ不盡數ナレドモ,通例近似値トシテ 3.1416 ヲ用フ.

23. $\triangle AEC$ ニ於テ, X ヲ BC 上ニ, Y ヲ CA 上ニ, Z ヲ AB 上ニ取リ, $BX=\frac{1}{3}BC$, $CY=\frac{1}{3}CA$, $AZ=\frac{1}{3}AB$ ナラシメ, $\triangle XYZ$ ノ面積ヲ $\triangle ABC$ ノ面積ニテ表ハセ.

159. 幾何學の定理と,代數學の定理との關係

幾何學ノ定理	代數學ノ定理
X, Y, …… ハ線分	a, b, …… ハ數
XY, XZ, …… ハソレゾレX及ビY, X及ビZ, ……ノ包ム矩形; X^2, Y^2, …… ハソレゾレXノ上ノ正方形, Yノ上ノ正方形, ……ヲ表ハストキハ	ab, ac, …… ハソレゾレa及ビb, a及ビc, ……ノ積; a^2, b^2, …… ハソレゾレaノ平方, bノ平方, ……ヲ表ハストキハ
1. $X(Y+Z)=XY+XZ.$	1. $a(b+c)=ab+ac.$
2. $(X+Y)^2=X^2+Y^2+2XY.$	2. $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab.$
3. $X^2=4\left(\frac{X}{2}\right)^2.$	3. $a^2=4\left(\frac{a}{2}\right)^2.$
4. $(X-Y)^2=X^2+Y^2-2XY.$	4. $(a-b)^2=a^2+b^2-2ab.$
5. $X^2-Y^2=(X+Y)(X-Y).$	5. $a^2-b^2=(a+b)(a-b).$

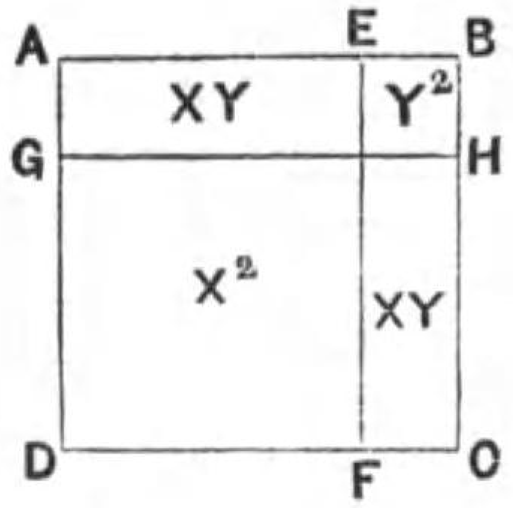
此ノ1ハ134頁例題6ニ同ジク,既ニ之ヲ證明セルモノトス.

又3ハ132頁例題2ニ同ジク,是亦既ニ證明セルモノトス.

依リテ　次ニ2ヲ證明セン.

今2ヲ幾何學的ニ說述スレバ,

二直線の和の上の正方形は,其の各の上の正方形と,各の包む矩形の二倍との和に等し.



ABCDヲ(X+Y)上ノ正方形トシ, AE=XトスレバEB=Y, AG=YトスレバGD=X.

サテEFヲ邊ADニ平行ニ, GHヲ邊ABニ平行ニ引ケバ

$$\square GF=X^2,\quad \square EH=Y^2,$$

$$\square GE=XY,\quad \square FH=XY,$$

而シテ　$\square ABCD=\square GF+\square EH+\square GE+\square FH,$

卽チ　$(X+Y)^2=X^2+Y^2+XY+XY$

$$=X^2+Y^2+2XY.$$

[4, 5ハ學生ヲシテ自ラ證明セシム可シ].

例　題

24. $(X+Y)^2+(X-Y)^2=2(X^2+Y^2)$ $[X>Y]$ ヲ幾何學的ニ說述シ,且コレヲ證明セヨ.

25. $(X+Y)^2-(X-Y)^2=4XY$ $[X>Y]$

ヲ幾何學的ニ說述シ,且コレヲ證明セヨ.

第三節

面積の關係

160. **定義** 一點より,一直線へ引ける垂線の趾を,該直線上に投ずる該點の**正射影**と稱す.

161. **定義** 一つの線分の兩端より,他の一直線に垂線を引くときは,其の垂線の趾の間の線分を前の線分が後の直線上に投ずる**正射影**と云ふ.

本書ニ於テハ,正射影ノミニ就キテ論ズルヲ以テ,正射影ヲ略シテ單ニ**射影**ト云フ.

162. **定理** 直角三角形の斜邊上の正方形は,他の二邊上の正方形の和に等し.*

* コレヲぴたごらす[Pythagoras]ノ定理ト云フ. 此ノ定理ハぴたごらす以前ヨリ世ニ知ラレタリシガ,正シク之ヲ證明セシハぴたごらすニ始ル.

ABC ハ C ヲ直角トスル三角形トセバ

$c^2=a^2+b^2$ ナルコトヲ證セントス.

證 $BLMC=a^2$, $ACKH=b^2$, $AEGB=c^2$ トシ,

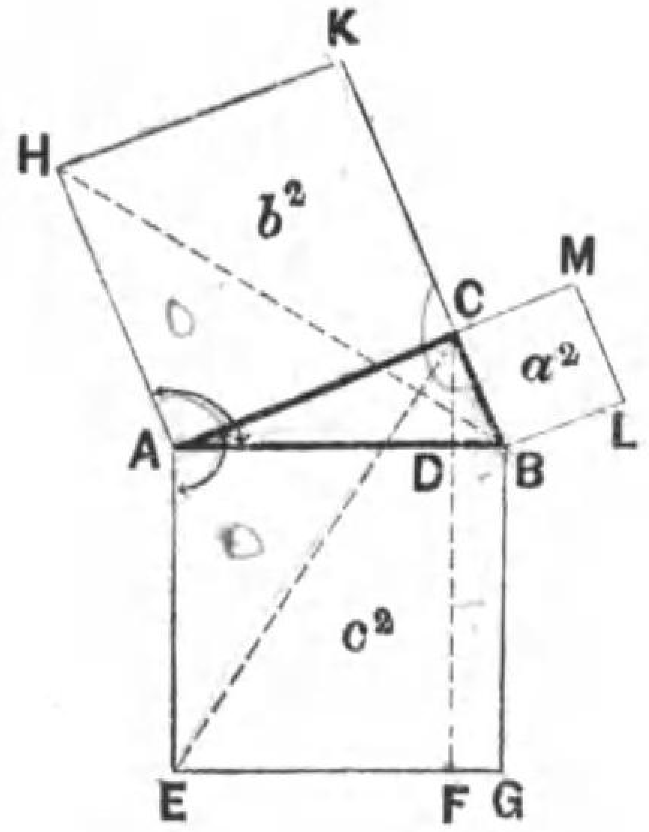
$CF \parallel AE$ トス.

而シテ　HB 及ビ CE ヲ結ビ付ケヨ.

サテ　$\widehat{KCA}$, $\widehat{ACB}$ ハ各直角ナルユエ

$$\widehat{KCA}+\widehat{ACB}=2\hat{R},$$

$\therefore$ BCK ハ一直線ナリ. [25 款]



サテ　$\widehat{CAH}=\widehat{EAB}(=\hat{R})$.

$$\left.\begin{aligned}\therefore\ \widehat{BAH}&=\widehat{EAC}\\ HA&=CA\\ BA&=EA\end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned}&[12\text{ 款 III}]\\ &[64\text{ 款}]\end{aligned}$$

$\therefore\ \triangle HAB\equiv\triangle CAE,$ [47 款]

然ルニ　BCK ハ一直線ニシテ AH ニ平行ス.

$$\therefore\ \triangle HAB=\frac{1}{2}\square ACKH,\qquad [146\text{ 款}]$$

又

$$\triangle CAE=\frac{1}{2}\square AF,$$

$$\therefore\ \square ACKH=\square AF.$$

同様ニ

$$\square BLMC=\square BF.$$

$$\therefore\ \square ACKH+\square BLMC=\square AEGB,$$

即チ

$$a^2+b^2=c^2.$$

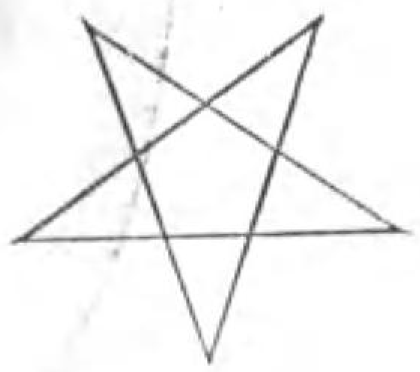
ピタゴラス氏肖像

PYTHAGORAS.

(c.582—c.501. B.C.)

ピタゴラス氏小話

南部伊太利くろとな＝於ケル有名ナルぴたごらす派ノ開祖，哲學者，神宣教ノ信者，幾何學者，音樂＝關スル書ノ著者＝シテ且希臘ノ整數論＝貢献セル最初ノ人ナリ． 紀元前約 582 年さむす＝生レ，同ジキ約 501 年＝めたぽんと＝死セルガ如シ． 氏ガ自ラ故國チ出デテ彷徨セシハ，恐ラクハぽりくらてすノ虐政＝起因セルモノナラン，而シテ氏ハ埃及及ビ東國チ遊歷シ，遂＝希臘ノまぐな＝定住シ，氏ノ有名ナル學校チ設立シタルモノノ如シ． 氏ノ時代チ去ル遠キ以前ヨリ實地＝知ラレタル定理，卽チ謂ハユルぴたごらすノ定理＝始メテ嚴正ナル證明チナセルハ，傳說ノ確言スル如ク，蓋シ氏ノ力＝依ルモノナルベシ． ぴたごらすハ何等ノ著作チモ殘サズ，サレバ氏ノ歿セラレタル頃，黨派ハ分レ，教理ハ散ジテ，僅＝傳說ト，其ノ後ノ著作家ノ證明ト＝依リテ知ル所アルノミ． 終＝氏ノ學徒ハ三重三角形，卽チ星形五角形チ徽章トシテ用ヒ，且之チ健康ノ記號ト信ゼリト云フ．



163. 系 直角三角形ノ直角傍ノ一邊上ノ正方形ハ，其ノ一邊ノ斜邊上＝投ズル射影ト，斜邊トノ包ム矩形＝等シ

注意 直角三角形ノ三邊ヲ表ハス整數ヲ求ムルコト．

此ノ問題ハ $x^2=y^2+z^2$ ナル要件＝適スル三ツノ整數ヲ求ムレバ可ナリ．

然ル＝150 頁 25 題＝依リ

$$(m^2+n^2)^2=(m^2-n^2)^2+(2mn)^2$$

ナルユヱ，所要ノ三邊ハ

m^2+n^2，m^2-n^2 及ビ $2mn$

＝テ適合ス可シ．

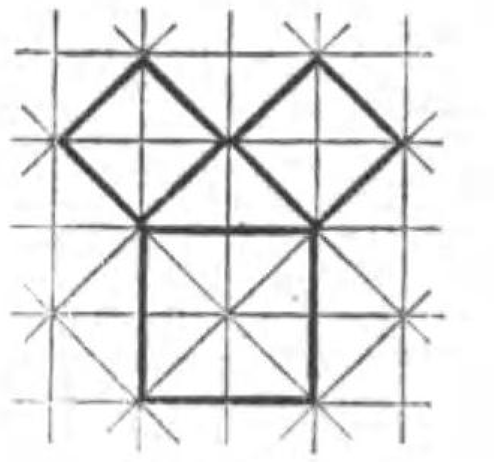
茲＝記スル表ハ，m 及ビ n ＝順次＝數ヲ與ヘテ何所マデモ擴張スルコトヲ得可シ．

n \ m	2	3	4	5	6	
1	5 3 4	10 8 6	17 15 8	26 24 10	37 35 12	
2		13 5 12	20 12 16	29 21 20	40 32 24	
3			25 7 24	34 16 30	45 27 36	

此ノ定理ハ要用ナルユヱ，次＝一ノ圖解チ示ス．

圖ハ敷瓦ヨリ實驗セルモノ＝シテ，直角二等邊三角形＝就キテ特別ノ場合ナリ． 古昔コノ定理＝氣付キシハ，此ノ圖＝基ヅキシト云フ．

又卷首挿圖ハ二ツトモ截リ接ギ證明ノ一種＝シテ，此ノ種ノ圖ハ數多アリ，今最モ面白キ二ツチ示ス． 學生自ラ證明チ試ミヨ．



例　題

*26. 162 款ノ圖ニ於テ, $\overline{CD}^2=AD.BD$ ナルコトヲ證セヨ.

27. 正方形ノ一邊ヲ a トスレバ,其ノ對角線ハ $a\sqrt{2}$ ナルコトヲ證セヨ.

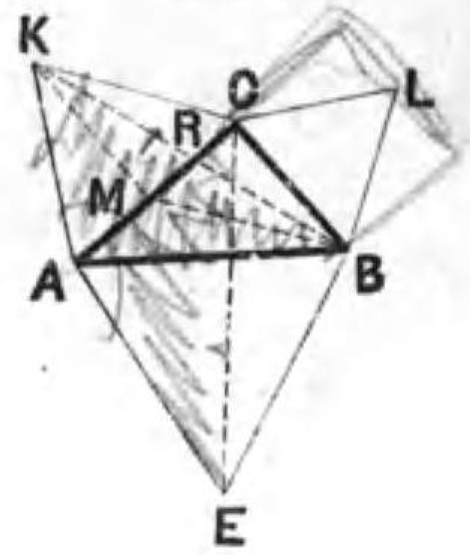
28. 既知二正方形ノ和[或ハ差]ニ等シキ正方形ノ一邊ヲ求メヨ.

29. 162 款ノ圖ニ於テ, BH ト CE トハ,互ニ垂直ナルコトヲ證セヨ.

30. 162 款ノ圖ニ於テ, AC 及ビ BH ノ交點ヲ P トシ, P ヨリ CB ニ平行スル PQ ヲ引キ, AB ニ Q ニ於テ交ラシムレバ, CP=PQ ナルコトヲ證セヨ.

31. 162 款ノ圖ニ於テ; AL, BH, CF ハ同一ノ點ニ於テ相交ルコトヲ證明ス可シ.

32. 直角三角形ノ斜邊上ニ畫キタル正三角形ハ,他ノ二邊上ニ畫キタル正三角形ノ和ニ等シキコトヲ證ス可シ.



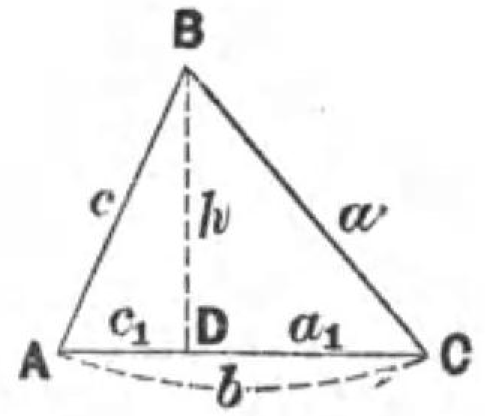
33. 直角三形形ノ斜邊ト他ノ一邊トノ和[或ハ差],竝ニ殘リノ一邊ヲ知リテ本形ヲ作レ.

---

* $\sqrt{2}$ ハ整數ニテ表ハス能ハザルコト明カナリ.
又 $\sqrt{2}$ ハ分數ニテ表ハス能ハズ. 如何トナレバ若シ $\sqrt{2}=\frac{m}{n}$ トシ, $\frac{m}{n}$ ハ最簡項ナナストセバ, $2n^2=m^2$ ナルユヱ, m^2 及ビ m ハ共ニ偶數ニシテ,從ヒテ n ハ奇數ナリ.
然ルニ m ガ偶數ナルトキハ $\frac{m^2}{2}$ ハ偶數ナルユヱ, 上ノ等式アル爲ニハ n^2 及ビ n ハ共ニ偶數ナル可シ, 併シ n ハ奇數ニシテ, 且偶數ナルコト能ハズ. 故ニ $\sqrt{2}$ ハ分數ニテ表ハスコト能ハズ.

---

164. 任意ノ三角形ノ三邊ヲ a, b, c トシ, a ヲ鋭角ニ對スル邊トス, b ヲ底邊ニ取リ, b ノ上ニ投ズル a 及ビ c ノ射影ヲソレゾレ a_1 及ビ c_1 トシ,高サヲ h トスレバ



(1) $b^2=c_1^2+a_1^2\pm 2c_1a_1,$ [159 款 2 或ハ 4]

(2) $c^2=c_1^2+h^2$

(3) $a^2=a_1^2+h^2$ [162 款]

(1) ト (2) トヲ相加ヘ, (3) ヲ減ジテ

$$b^2+c^2-a^2=2c_1^2\pm 2c_1a_1=2bc_1,$$

$$\therefore\ a^2=b^2+c^2-2bc_1 \ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ (A)$$

故ニ次ノ定理アリ.

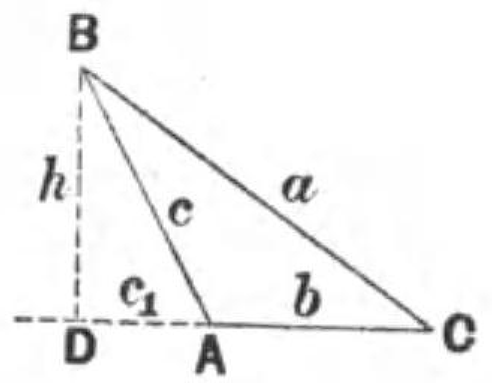
定理　任意の三角形に於て,鋭角に對する邊上の正方形は,他の二邊上の正方形の和より小なること,是等の二邊の一と,其の上に投ずる他の一邊の射影との包む矩形の二倍なり.

165.　**系**　三角形ノ頂點ヨリ底邊ヘ垂線ヲ下ストキハ,底邊ノ二部ノ上ノ正方形ノ差ハ,他ノ二邊上ノ正方形ノ差ニ等シ.　[$a^2 \sim c^2 = a_1^2 \sim c_1^2$].

166.　164款ノ圖ニ於テ,Aヲ鈍角ナリトセバ(*A*)ハ次ノ如ク變ズ.

$$a^2=b^2+c^2+2bc_1 \quad \dots \quad \dots \quad (B)$$

故ニ次ノ定理アリ.



定理　鈍角三角形に於て,鈍角に對する邊上の正方形は,他の二邊上の正方形の和より大なること,是等の二邊の一と,其の上に投ずる他の一邊の射影との包む矩形の二倍なり.

167.　**系**　$\hat{A}$ガ鋭角ナルトキハ $a^2<b^2+c^2$.　[164款]

$\hat{A}$ガ直角ナルトキハ $a^2=b^2+c^2$.　[162款]

$\hat{A}$ガ鈍角ナルトキハ $a^2>b^2+c^2$.　[166款]

故ニ是等ノ逆ハ眞ナリ [轉換法].

168.　**定理**　三角形の二邊上の正方形の和は,第三邊の半分上の正方形の二倍と,第三邊へ引ける中線上の正方形の二倍との和に等し.

證　[164, 166款ヲ用ヒ,學生ヲシテ自ラ證明セシムベシ].

169.　**定義**　有限直線上の一點は,此の直線を**內分**すと云ひ,又有限直線の延線上の一點は,此の直線を**外分**すと云ふ.

170.　**定理**　一直線を任意の點にて內分,或は外分するときは,其の二つの分の包む矩形は,直線の半分の上の正方形,及び分點と中點との間の部分の上の正方形の差に等し.

證　[159款5ニ依リテ,學生ヲシテ自ラ證明セシムベシ].

171. 系 二等邊三角形ABCノ底邊BC上ニ任意ノ一點Pヲ取ルトキハ, $\overline{AB}^2-\overline{AP}^2=BP.CP$ ナリ.

若シ點PガBCノ延線上ニアルトキハ次ノ如シ.

$$\overline{AP}^2-\overline{AB}^2=BP.CP.$$

172. 定理 一直線を任意の點にて內分,或は外分するときは,其の二つの分の上の正方形の和は,直線の半分の上の正方形,及び分點と中點との間の部分の上の正方形の和の二倍なり.*

證 [159款 2, 4 ニ依リテ,學生ヲシテ自ラ證明セシム可シ].

例　　題

*34. 三角形ABCノ角頂A, Bヨリ,其ノ對邊ニ垂線AD, BEヲ引クトキハ

$$\overline{AB}^2=AC.AE+BC.BD.$$

*35. 既知ノ周ヲモツ總テノ矩形ニ就キテ,正方形

* 168款ノ定理ニ於テ,三角形ノ頂點ガ底邊上ニ來リタル極限ノ場合ト考フルコトヲ得.

ガ最大ナルコトヲ證セヨ.

36. 既知ノ線分ヲ二分シ,其ノ各部ノ上ノ正方形ノ和ヲ最小ナラシメヨ.

37. △ABCノ面積Δハ $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ナルコトヲ證セヨ. 但 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$.

[164款ノ圖ニ於テ $h^2=c^2-c_1^2=(c+c_1)(c-c_1)$,

然ルニ $$c_1=\frac{b^2+c^2-a^2}{2b}, \qquad [164款]$$

$$\therefore\quad c+c_1=\frac{(b+c)^2-a^2}{2b}=\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2b},$$

$$c-c_1=\frac{a^2-(b-c)^2}{2b}=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2b},$$ 云々].

38. 三角形ノ三邊ガ4尺, 13尺, 15尺ナルトキ,其ノ面積如何.

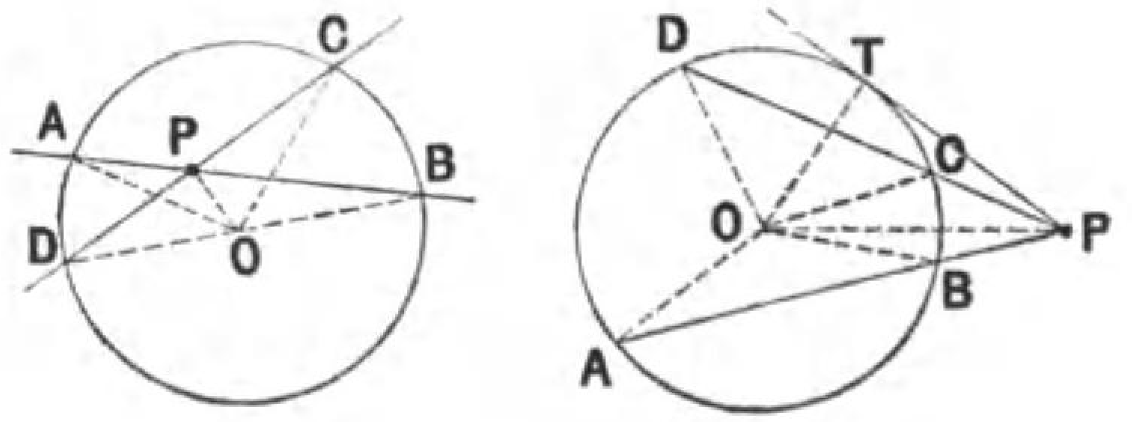
39. 正三角形ト正方形トノ周ガ相等シキトキ,何レガ面積大イナルカ.

40. 正八角形ノ面積ハ $2r^2\sqrt{2}$ ナリ,但 r ハ外接圓ノ半徑トス.

* あれくさんどりあノ住人へろん[Heron, 西暦紀元前120年乃至100年頃活動セシ人]ガ,氏ノ測地學ノ末編ニ始メテ掲載セシ公式ナリ. 併シ證明ハ氏ノ他ノ著書Dioptraニ記セリ.

173.　定理　圓の,一定點を過る總ての割線に就きて,其の圓周と交る二點より該定點までの線分の包む矩形は相等し.

AB, CD ハ點 P ニ於テ交ル二ツノ割線トスレバ



$$AP.BP = CP.DP$$

ナルコトヲ證セントス.

證　OA, OB, OC, OD 及ビ OP ヲ結ビ付クレバ

$$AP.BP = \overline{OA}^2 \sim \overline{OP}^2, \qquad [171 款]$$

同様ニ　$CP.DP = \overline{OC}^2 \sim \overline{OP}^2.$*

* 點 P ガ AB, CD 上ニアル場合ニハ同時ニ

$AP.BP = \overline{OA}^2 - \overline{OP}^2,\quad CP.DP = \overline{OC}^2 - \overline{OP}^2,$

又點 P ガ AB, DC ノ延線上ニアル場合ニハ,同時ニ

$AP.BP = \overline{OP}^2 - \overline{OA}^2,\quad CP.DP = \overline{OP}^2 - \overline{OC}^2.$

然ルニ　$OA = OC$

ナルユヱ　$AP.BP = CP.DP.$

174.　系 1.　PT ヲ P ヨリ引ケル切線トスルトキハ　$\overline{PT}^2 = \overline{OP}^2 - \overline{OT}^2 = \overline{OP}^2 - \overline{OA}^2 = AP.BP.$　卽チ

圓外ノ一點ヨリ圓ヘ引ケル切線上ノ正方形ハ,同ジ點ヨリ引ケル割線ノ二部ノ包ム矩形ニ等シ.

系 2.　173 款ノ定理ニ於テ,弦 CD ガ弦 AB ヲ二等分スルトキハ　$CP.DP = \overline{AP}^2 = \overline{BP}^2.$　卽チ

圓内ノ一定點ヲ過ル弦ノ二部ノ包ム矩形ハ,其ノ點ニテ二等分セラルル弦ノ半分ノ上ノ正方形ニ等シ.　此ハ又變形シテ次ノ如ク述ブルコトヲ得.

圓周上ノ一點ヨリ徑ヘ引ケル垂線ガ,其ノ徑ヲ分ツ所ノ二部ノ包ム矩形ハ,垂線上ノ正方形ニ等シ.

系 3.　173 款ノ定理ノ逆モ亦眞ナリ.　卽チ

二ツノ有限直線ヲ,其ノ交點ニテ內分,或ハ外分シタル二部ノ包ム矩形ガ相等シケレバ,二ツノ有限直線ノ四ツノ端ハ,同一ノ圓周上ニアリ.

系 4.　系 1 ノ逆モ亦眞ナリ.　卽チ

圓外ノ一點ヨリ圓ヘ引ケル割線ノ二部ノ包ム矩形ガ,其ノ點ヨリ圓マデ引ケル直線上ノ正方形ニ等シケレバ,此ノ直線ハ其ノ點ニ於テ圓ニ切ス.

例題

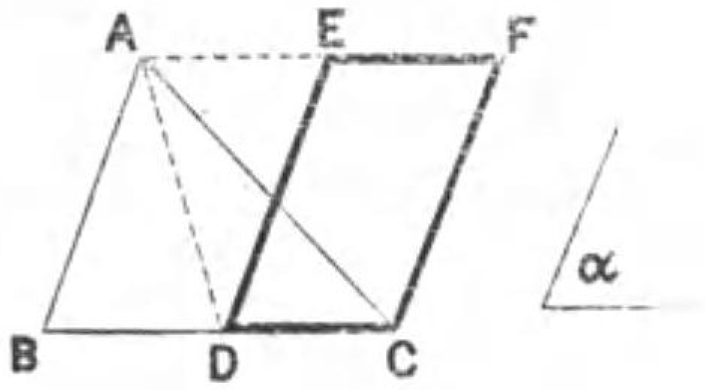
41. 圓ノ二弦 AB, CD ガ, 點 P ニ於テ互ニ直角ニ交ルトキハ $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2+\overline{DP}^2=$徑^2.

42. 地球ノ徑ヲ 7920 哩ナリトセバ, 海面上 h 呎ノ高サノ一點ヨリ, 海面上ヲ望見シ得可キ距離ハ $\sqrt{\dfrac{3h}{2}}$ 哩ナルコトヲ證セヨ[但近似數ナリ].

---

175. 作圖題 既知の三角形と等積なる平行四邊形を作り,其の一角を既知の角に等しからしむること.

ABC ヲ既知ノ三角形, α ヲ既知ノ角トス.



作圖法 BC ヲ D ニ於テ二等分シ, [128 款注意 1]

點 D ヨリ, CD ト α ニ等シキ角ヲナス直線 DE ヲ作リ, [130 款]

C ヲ過リ DE ニ平行シテ CF ヲ引キ, [117 頁 5 題]

又 A ヲ過リ BC ニ平行シテ AEF ヲ引キ; DE, CF

ニソレゾレ E, F ニ於テ交ラシムレバ, CDEF ハ所要ノ平行四邊形ナリ.

證 $\triangle ABD = \triangle ADC$, [147 款系 2]

故ニ $\triangle ABC = 2\triangle ADC$.

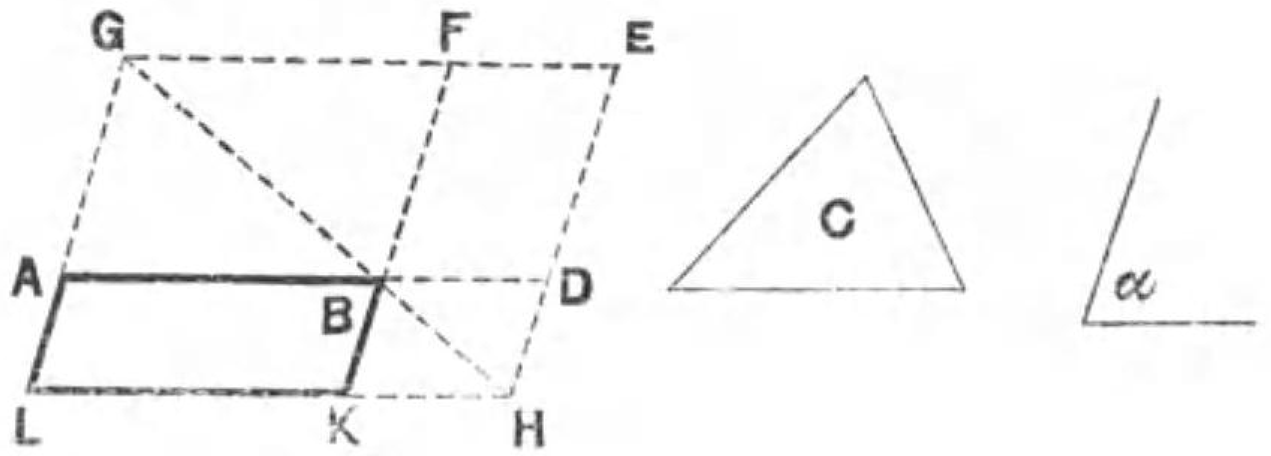
又 ▱CDEF $= 2\triangle ADC$. [146 款]

故ニ ▱CDFF $= \triangle ABC$.

而シテ ▱CDEF ハ既知角 α ヲモツ. [作圖]

176. 作圖題 既知の底邊上に,既知の三角形と等積なる平行四邊形を作り,其の一角を既知の角に等しからしむること.

AB ヲ既知ノ底邊, C ヲ既知ノ三角形トシ, α ヲ既知ノ角トス.

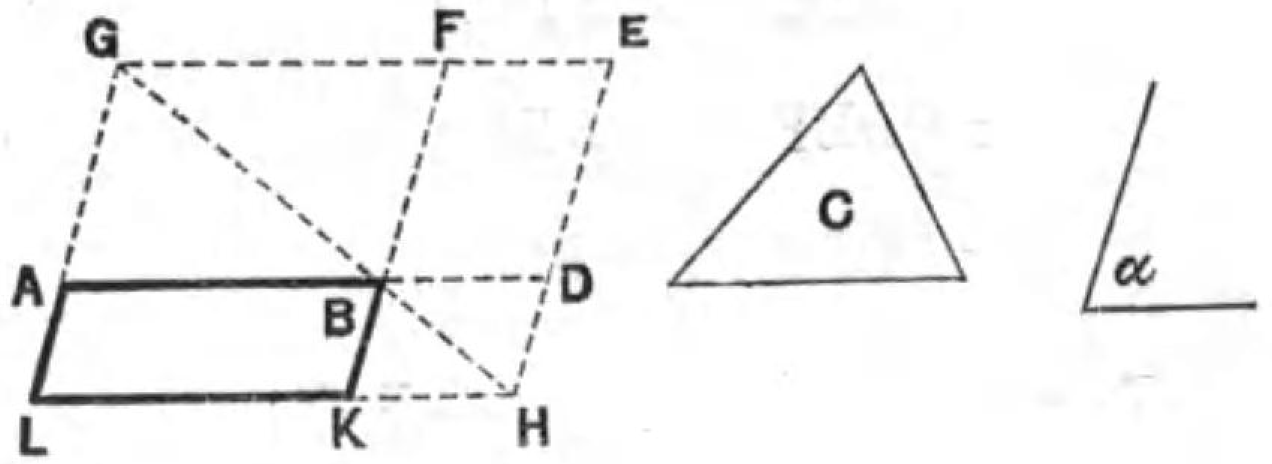


作圖法 三角形 C ト等積ナル平行四邊形 BDEF ヲ作リ,其ノ角 DBF ヲ α ニ等シカラシメ, [175 款]

且之ヲ BD ガ AB ト同一ノ直線ヲナス如ク置ケ.

A ヲ過リテ BF ニ平行スル直線 AG ヲ引キ,

[117 頁 5 題]



AG ヲ EF ノ延線ニ G ニ於テ交ラシメ,

GB ヲ結ビ付ケヨ.

GA ハ ED ニ平行シ, GB ハ ED ニ平行セザルユヱ,

GB ト ED トハ,之ヲ引キ延バセバ,出會フベシ.

但ソノ出會フ點ハ BD ノ下方ニアルベシ,

如何トナレバ GB ハ角 EGA ノ内ニアレバナリ.

此ノ GB ト ED トノ延線ノ交點ヲ H トシ,

H ヲ過リテ DA ニ平行スル直線 HKL ヲ引キ,

GA, FB ノ延線トソレゾレ L, K ニ於テ交ラシムレバ, ABKL ハ所要ノ平行四邊形ナリ.

證 ▱ABKL=▱BDEF, [148 款]

然ルニ ▱BDEF=△C, [作圖]

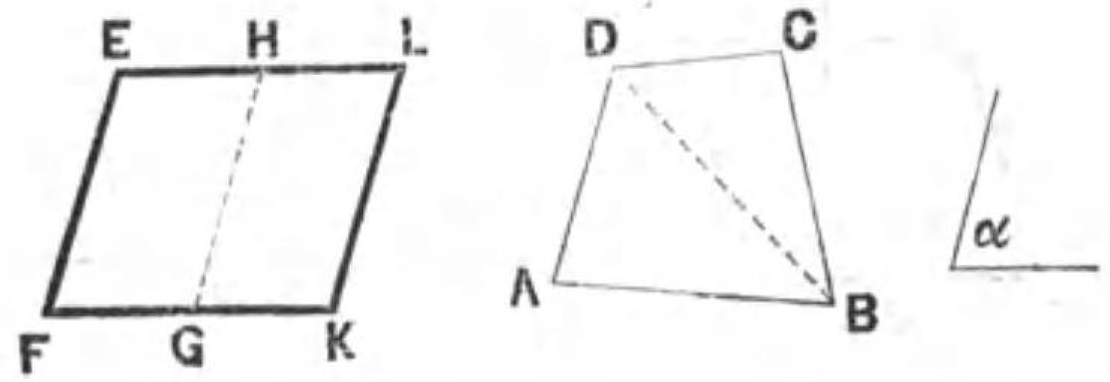
故ニ ▱ABKL=△C.

而シテ ▱ABKL ハ既知ノ底邊 AB 上ニアリ,

且 $\widehat{ABK}=\widehat{DBF}=\alpha$. [作圖]

177. 作圖題 既知の直線形と等積なる平行四邊形を作り,其の一角を既知の角に等しからしむること.

ABCD ヲ既知ノ直線形トシ, α ヲ既知ノ角トス.



作圖法 既知ノ直線形 ABCD ノ對角線 BD ヲ引キテ,之ヲ二ツノ三角形ニ分テ.*

三角形 ABD ト等積ナル平行四邊形 EFGH ヲ作リ,

其ノ一角 EFG ヲ α ニ等シカラシメ, [175 款]

邊 GH ノ上ニ三角形 CBD ト等積ナル平行四邊形 HGKL ヲ $\widehat{HGK}=\alpha$ ナル如ク作レバ, [176 款]

EFKL ハ一ノ平行四邊形ヲナシ,此ハ所要ノモノナリ.

證 $\widehat{EFG}=\alpha$, $\widehat{HGK}=\alpha$, [作圖]

* 玆ニ示シタル直線形ハ四邊形ナルユヱ,分チタル三角形ハ二ツナレドモ,何角形ニテモ同理ナリ.

故ニ　$\widehat{EFG}=\widehat{HGK}$.

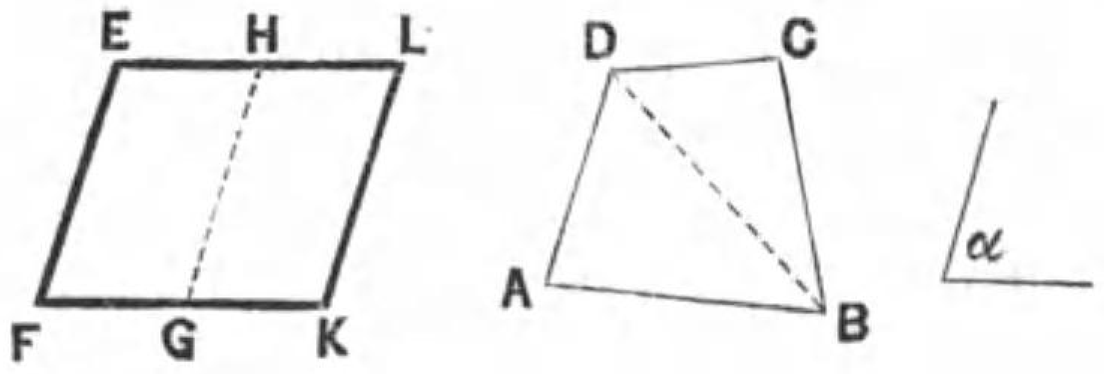
然ルニ　$\widehat{EFG}+\widehat{HGF}=2\widehat{R}$,　[32 款系 1 (1)]

故ニ　$\widehat{HGK}+\widehat{HGF}=2\widehat{R}$,

故ニ　FG, GK ハ同一ノ直線ヲナス.　[25 款]

又 EH, HL ハ何レモ直線 FGK ニ平行シ,且一ノ共通點 H ヲモツユヱ, EHL ハ同一ノ直線ヲナス.

[幾何學公理 V]



故ニ　$FK \parallel EL$.

而シテ　EF ト LK トハ何レモ HG ニ平行スルユヱ,

$EF \parallel LK$.　[幾何學公理 V (2)]

故ニ　EFKL ハ平行四邊形ナリ.

而シテ其ノ一角 EFK ハ既知ノ角 α ニ等シク,

且　▱EFGH＝△ABD,　[作圖]

及ビ　▱HGKL＝△CBD

ナルユヱ　▱EFKL＝△ABD＋△CBD

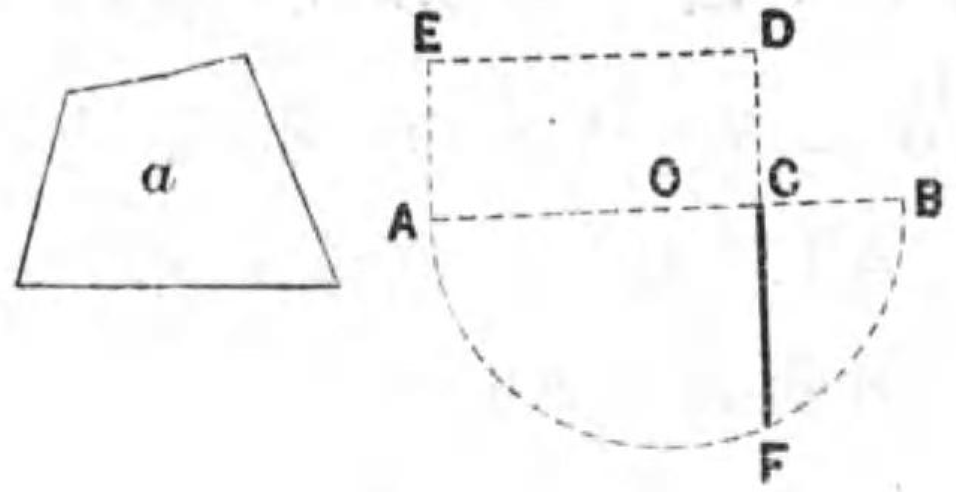
＝直線形 ABCD.

178. 作圖題　既知の直線形と等積

なる正方形を作ること.

α ヲ既知ノ直線形トス.

作圖法　α ト等積ナル矩形 ACDE ヲ作レ.　[177 款]



然ルトキ,若シ CD ガ AC ニ等シキトキハ,ACDE ハ所要ノ正方形ナリ.

然レドモ,若シ CD ガ AC ニ等シカラザルトキハ,

AC ヲ B ニ引キ延バシ, CB＝CD ナラシメ,

AB ヲ O ニ於テ二等分シ,　[128 款注意 1]

O ヲ中心トシ,OA ヲ半徑トシテ圓ヲ畫キ,　[127 款 III]

DC ヲ引キ延バシ,圓周ニ F ニ於テ交ラシムレバ,

CF ハ所要ノ正方形ノ一邊ナリ.

證　$AC.CB=\overline{CF}^2$,　[174 款系 2]

然ルニ　$CB=CD$,　[作圖]

故ニ　$AC.CD=\overline{CF}^2$.

然ルニ　AC.CD＝□ACDE,

而シテ　□ACDE＝直線形 α,

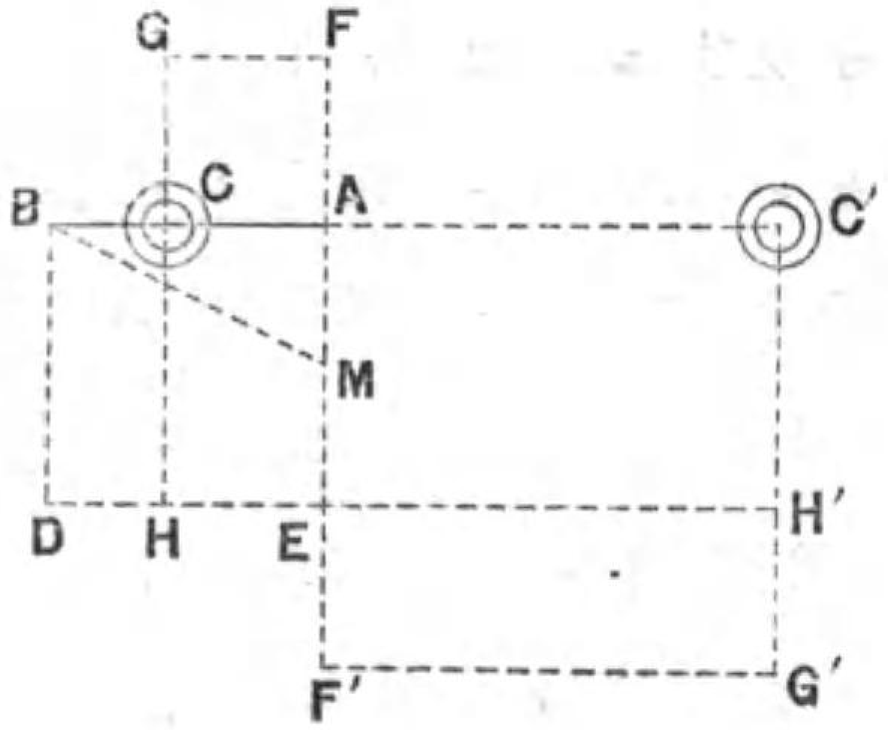
∴　$\overline{CF}^2$＝□ACDE

＝直線形 α.

179. **作圖題**　既知の直線を二分に內分若しくは外分し,其の一部と全線とにて包む矩形を,他の一部上の正方形に等しからしむること.*

AB ヲ既知ノ直線トス.

作圖法　AB ノ上ニ正方形 ABDE ヲ畫キ, AE ヲ M ニ於テ二等分シ, MB ヲ結ビ付ケ, M ヲ中心トシ, MB ヲ半徑トシテ圓ヲ畫キ, AE ノ双方ヘノ延線ト F 及ビ F′ ニ於テ交ラシメ, AF 及ビ AF′ ノ上ニソレゾレ正方形 AFGC, AF′G′C′ ヲ畫ケ.



然ルトキハ　$BC.BA=\overline{AC}^2$,

及ビ　$BC'.BA=\overline{AC'}^2$.

證　矩形 ACHE 及ビ EF′G′H′ ヲ完成セヨ.

* 本題ハ幾何學ニ於テ極メテ必要ナルモノニシテ,古昔希臘ノ數學者ハ之ヲ**黃金分割**ト稱ヘ,ぴたごらす時代ニハ能ク之ヲ知レリ.

然ルトキハ　$\overline{AB}^2=\overline{BM}^2-\overline{AM}^2$,　[162 款]

然ルニ　$\overline{BM}^2-\overline{AM}^2=EF.AF.$　[159 款 5]

故ニ　$\overline{AB}^2=EF.AF$,

卽チ　□ABDE=▭EFGH,

而シテ　同様ニ　□ABDE=▭EF′G′H′.

依リテ　▭BCHD=□ACGF,　[12 款 IV]

或ハ　▭BC′H′D=□AC′G′F′.　[12 款 III]

卽チ　$BC.BA=\overline{AC}^2$,

$BC'.BA=\overline{AC'}^2$.

注意　直線ヲ一點ニテ本題ノ如ク分ツコトヲ,**外中比**ニ分ツト云フ.

例　題

43. 三角形 ABC ノ邊 BC ノ延線上ノ一點ヲ D トス. 今邊 AB 上ニ一點 E ヲ求メ,三角形 EBD ヲ三角形 ABC ニ等シカラシメヨ.

44. 既知ノ一直線ヲ二分シ,其ノ各部ノ上ノ正方形ノ和ヲ,他ノ既知直線上ノ正方形ニ等シカラシメヨ.

45. 既知ノ一點ヲ過リテ一直線ヲ引キ,以テ既知

ノ平行四邊形ヲ二等分セシメヨ.

46. 既知ノ底邊上ニ矩形ヲ作リ,既知ノ正方形ニ等シカラシメヨ.

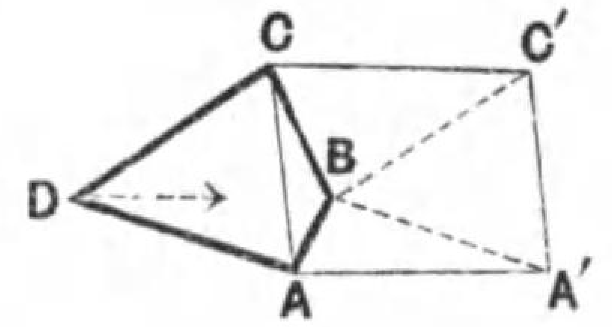
47. 既知ノ一直線上ニ一點ヲ求メ,既知ノ二點ヨリ此ノ點ニ至ル距離ノ上ノ正方形ノ和ヲ最小ナラシメヨ.

雜 題

*1. 三角形ノ各邊ノ中點ヲ二ツヅツ結ビ付クルトキハ,本形ヲ四等分ス.

2. 三角形ノ三ツノ中線ヲ三邊トスル三角形ノ面積ハ,前ノ三角形ノ面積ノ四分ノ三ナリ.

3. 四邊形 ABCD ニ於テ,CD 及ビ DA ハ,ソレゾレ各自ノ原位置ニ平行シテ C'B 及ビ BA' ニ移動セリトス. 然ルトキハ ▱AA'C'C ニ於テ次ノ件々アリ.



(1) B ヨリ ▱AA'C'C ノ各角ノ頂點マデノ距離ハ,四邊形 ABCD ノ各邊ニ等シ.

(2) B ノ周リノ各角ハ,四邊形 ABCD ノ各角ニ等シ.

(3) ▱AA'C'C ノ各邊ハ,四邊形 ABCD ノ對角線ニ等シ.

(4) ▱AA'C'C ノ各角ハ,四邊形 ABCD ノ兩對角線ノ間ノ角ニ等シ.

(5) ▱AA'C'C ノ各邊ト B ヨリ其ノ各角ノ頂點ヘ引ケル直線トノ間ノ角ハ,四邊形ノ各邊ト對角線

トノ間ノ角ニ等シ.

(6) $\square AA'C'C$ ノ面積ハ,四邊形 ABCD ノ面積ノ二倍ニ等シ.

※4. ABCD ハ平行四邊形ニシテ, O ハ形内ノ一點ナルトキハ

(1) $\triangle AOB+\triangle COD=\frac{1}{2}\square ABCD.$

(2) $\triangle AOC=\triangle AOD\sim\triangle AOB.$

若シ O ガ平行四邊形ノ外ニアルトキハ

(1) $\triangle AOB\pm\triangle COD=\frac{1}{2}\square ABCD.$

(2) $\triangle AOC=\triangle AOD\pm\triangle AOB.$

5. 一動點 P ヨリ,二定點 A, B マデノ距離ノ上ノ正方形ノ差ガ一定ナルトキ,點 P ノ軌跡如何.

※6. 既知ノ二點ヲ過リ,既知ノ一直線ニ切スル圓ヲ畫ケ.

7. $\triangle ABC$, $\triangle A'B'C'$ ハ對應シタル文字ニテ表ハシタル邊ガ相等シク,且同ジ向キニ平行ナルモノトス. 然ルトキハ對應シタル角ノ頂點ヲ二ツヅツ結ビ付ケテ生ズル三ツノ平行四邊形ニ就キテ,其ノ一ツハ他ノ二ツノ和ニ等シ. 又コレヨリぴたごらすノ定理ヲ誘求セヨ.

8. ABCD ハ矩形ニシテ, DE ハ DC ニ等シキ DA ノ一部分ナリ. AD ニ垂線 EF ヲ引キ, A ヲ中心トシ, AD ヲ半徑トスル圓周ニ,點 F ニ於テ交ラシムレバ, DF ハ矩形ト等積ナル正方形ノ對角線ニ等シ.

9. 直角三角形ノ斜邊ヲ二分シ,其ノ二部ノ上ノ正方形ノ差ヲ,一邊上ノ正方形ニ等シカラシメヨ.

10. C ハ直線 AB ノ延線上ノ點ナルトキハ, C ヨリ A, B ヲ過ル總テノ圓ニ引ケル切線ハ,相等シキコトヲ證明セヨ.

11. 廣原ノ鐵道上ニ,高サ $13\frac{1}{2}$ 尺ノ處ニ標識ヲ置ケリ,今每時36哩ノ速サヲ以テ,此ノ場所ヨリ遠隔スル汽車中ノ人ハ,幾分ノ後,此ノ標識ヲ地平上ニ見得ベキカ.

12. AB ハ半圓ノ徑ナルトキ, AB 上ニ一點 C ヲ求メ, C ヲ圓周上ノ定點 D ニ結ビ付ケ,又垂線 CE ヲ作リ, E ニ於テ圓周ニ交ラシメ, CE 上ノ正方形ヨリ CD 上ノ正方形ヲ引キ去リタル殘リヲ,既知ノ正方形ニ等シカラシメヨ.

13. OAB ハ OA=OB ナル如キ二等邊三角形ナリトシ, O ヲ過リテ P ニ於テ AB ヲ截リ, Q ニ於テ外接圓周ニ交ル直線ヲ引ケバ,矩形 OP.OQ ハ此ノ直線ノ方向ノ如何ヲ論ゼズ,相等シキコトヲ證明セヨ.