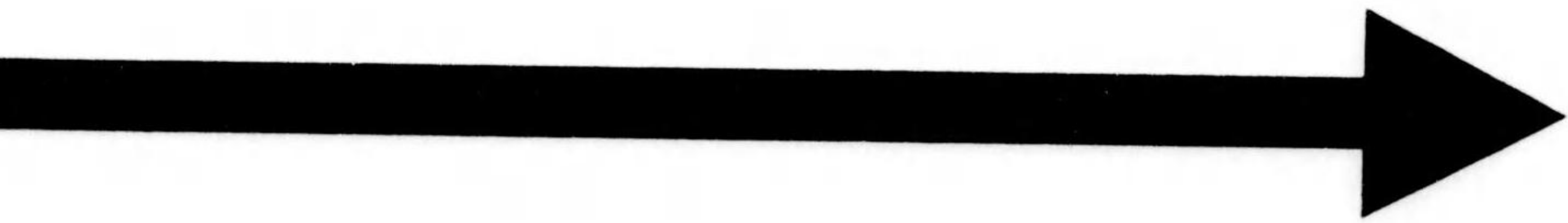


始

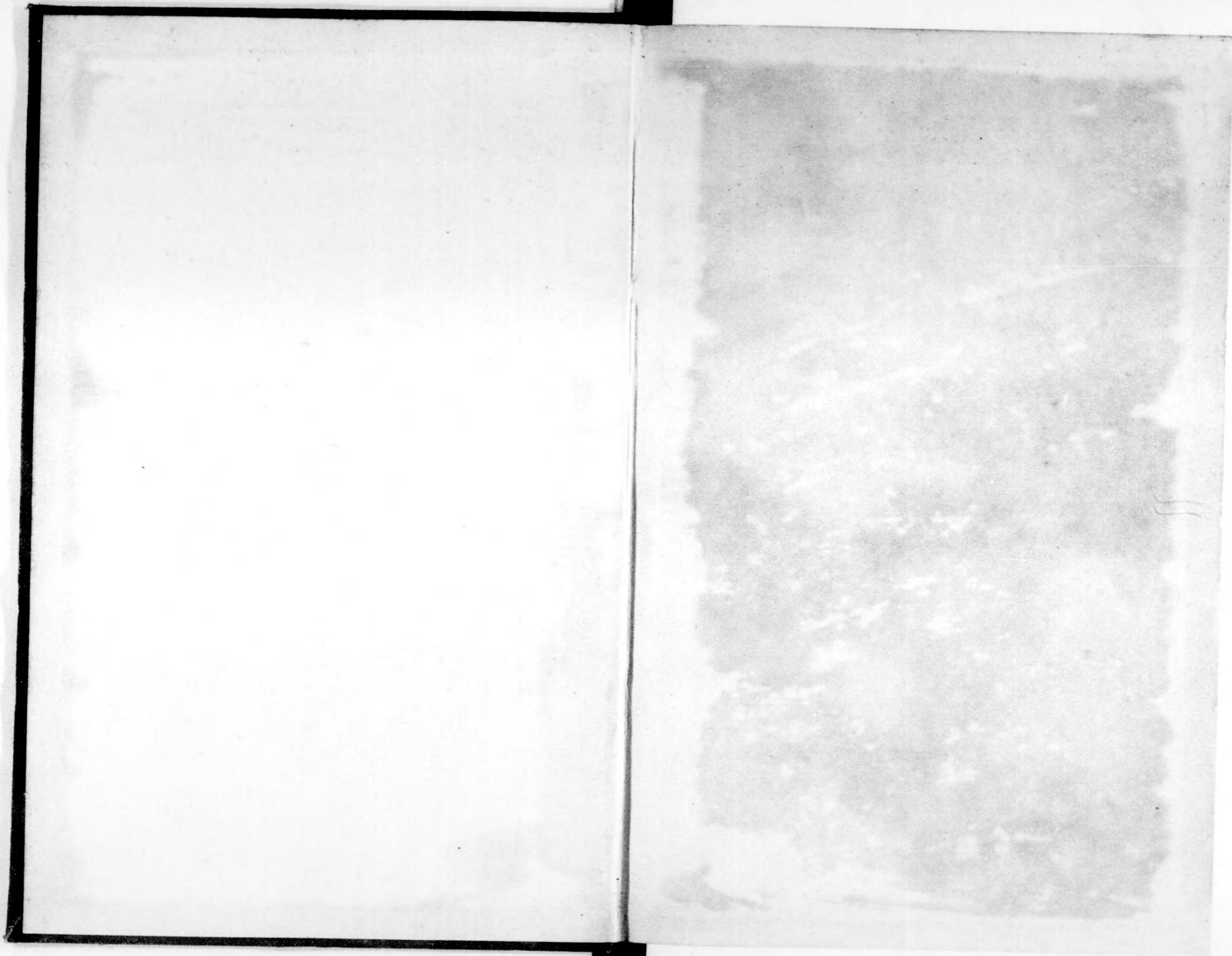


PLANE  
GEOMETRY

— — — — —  
K. HAKII

PLANE  
GEOMETRY

— — — — —  
K. HAKII



272  
330

特103  
859

中等教育  
**幾何學教科書**  
平面部

第三臨時教員養成所主事

波木井九十郎著



大正  
2. 11. 6  
内交

株式會社

同文館藏版

## 序

數學ガ普通教育ニ於テ重要ノ地位ヲ占ムルハ、其ノ推理力ノ練磨ニ最モ適スルト、同時ニ人生ニ密接ノ關係ヲ有シ、且諸科學ノ基礎タルニ由レリ。之ヲ以テ中等學校ニ於テ重キヲ之ニ置キ、生徒モ亦其ノ學修ニ多大海ノ心力ト時間トヲ費スモノ、洵ニ宜ナリト云フベシ。然ルニ我國ニ於ケル數學教授ノ成績ヲ見ルニ、實ニ寒心ニ堪ヘザルモノアリ。生徒ノ數學上ノ知識ハ頗ル不正確ニシテ、數學教授ノ目的ハ幾ンド之ヲ逸スルノ憾ナキニアラズ。余ハ數年來文部

省視學委員トシテ全國ノ中等  
 學校ヲ視察セラレタル波木井  
 教授ト、屢、此ノ事ヲ談ジテ歎聲  
 ヲ發スルヲ禁ズル能ハザリキ。  
 而シテ徒ラニ歎息スルノ事ニ  
 益ナキヲ顧ミ、其ノ由ツテ來ル  
 所ヲ原ネ、有效ナル救濟策ハ適  
 良ナル新教科書ノ編纂ニ在ル  
 ニ思ヒ至レリ。茲ニ於テ余ハ切  
 ニ波木井教授ニ勸ムルニ、舊套  
 ヲ脱却セル新教科書ヲ編シ、以  
 テ時弊ヲ救フコトヲ以テセリ。  
 聞ク歐米諸國ニ於ケル數學體裁  
 科書ニハ、我ノソレト大ニ波木井  
 教授モ亦多年ノ視察ト經驗ト  
 ニ基キ、腹案ノ既ニ熟スルアリ、

即チ意ヲ決シテ編セラレタル  
 モノ是ナリ。書成リテ序ヲ徵セ  
 ラル、義辭スルヲ得ズ、即チ一言  
 ヲ序ス。再說ス、從來ノ教科書ハ  
 其ノ種類少カラズト雖モ、皆一  
 定ノ形式ニ拘ハレ、且毫モ生徒  
 心力ノ發達ヲ顧ミズ、徒ラニ數  
 學的推理ノ嚴肅ニ泥ムモノ。余  
 ハ著者ニ要望スルニ、能ク生徒  
 心力ノ發育ニ留意シ、此ノ教育  
 上ノ大原則ノタメニハ、在來ノ  
 形式順序ノ如キハ棄テテ顧ミ  
 ザルベキヲ以テセリ。爰ニ余ハ諸  
 數學教授ノ重職ニ當ラレテ教授ノ  
 彥ガ、本書ヲ採ツテ之ヲ教授ノ  
 成績ニ徵シ、以テ得失ヲ明ニセ  
 ラレンコトヲ切望ス。思フニ本

書出デテ我數學教授上ニ一生  
面ヲ開カンカ、教育界ノ一慶事  
ナリ。

大正元年十月

澤柳政太郎

## 序

本書ハ中等教育教科用トシテ編纂セルモノナ  
リ、蓋シ我國中等學校ニ於ケル幾何學教授ノ  
成績ヲ觀ルニ生徒ノ知識極メテ不正確ニシテ  
簡易ナル問題スラ尙ホ能ク之ヲ解ク能ハズ、  
是從來徒ラニ論理ノ形式ニ馳セ推理ヲ主トシ  
單ニ量ニ就テノミ論ズルニ由ラズンバアラズ、  
今ヤ此ノ如キ多年ノ實驗上效果少キコト明ト  
ナレル舊套ヲ何時マデモ襲用スベキニアラズ、  
是非トモ數學内部ノ連絡ニ重キヲ置キ量ト數  
トノ密接ナル關係ヲ知ラシメ、之ニ依リテ理  
解ヲ確實ニシ而シテ更ニ推理ノ練磨ヲナサシ  
メザルベカラズト信ズ、本書編纂ノ方針モ亦  
茲ニ在リテ存ス、故ニ本書ヲ繙クニ際シテハ  
次ニ掲グル條項ニ就キ特ニ注意セラレシコト  
ヲ要ス。

一 努メテ算術及ビ代數學トノ連絡ヲ圖  
リ定理ノ適用ヲ計算問題ニ試ミ量ト數トノ  
關係ヲ知ラシメ、以テ理會ヲ確實ニ記憶ヲ  
鞏固ナラシメンコトヲ期セリ、隨テ計算問  
題ノ多キハ即チ此ノ趣旨ニ出デタリ。



二 今日ノ教授ニ於テハ一事項ヲ教ヘ次ノ事項ニ移ル其移リ日ガ早過ギル爲ニ生徒ハ其事項ヲ辛フジテ理會スルニ止リ確實ナル知識ヲ得ル能ハズ唯上スベリヲナスノ有様ナリ、因リテ之ガ弊ヲ救ハンガ爲定理又ハ作圖題等ニハ一簡單ナル問題ヲ附シ其應用ヲ知ラシメ確實ニ理會セシメント努メタリ、依テ一定理又ハ作圖題等ヲ教フレバ此趣旨ニヨリ其事項ヲ充分練習シ以テ次ノ教授ニ移ランコトヲ望ム。

三 第一篇ニ於テハ論理ノ筋道ヲ明瞭ニ理會セシメンガ爲メ定理ニハ一假設終結證明等ノ要目ヲ記入シタリ、然レドモ第二篇以後ニ於テハ最早其ノ必要ナシト認メ之ヲ省略セリ、若シ生徒自ラ之ヲ補充スル如キアラバーノ練習タルヲ失ハザルベシ。

四 幾何學ハ其論理及ビ言葉遣ヒヲ嚴格ニスベキコト論ヲ俟タザルベシト雖モ、數學者ノ言フ處ノ嚴格ト中等教育ニ於ケル嚴格トハ各其程度ヲ異ニセザルベカラズ、先ツ幾何學ノ何物タルヤヲ理會セシメザルニ於テハ言葉遣ヒモ嚴格モ得テ望ムベカラザ

ルモノナレバ、其ノ事項ヲ理會セシムルニ最簡單ナル方法ニヨラザルベカラズ、故ニ或點ハ生徒ノ常識ニヨリ之ヲ理會セシメ言葉ヲ少クシ又出來得ル限リ種種ノ符號ヲ用ヒ又記法ノ如キモ例ヘバ角ヲ表ハスニ三ツノ文字ヲ用フルトキハ複雑ニ陥リ易ク爲ニ生徒ヲシテ其事項全體ガ六ケ敷様ノ感ヲ起サシムルヲ以テ出來得ル限リ一ツノ文字ヲ用フルコトトセリ、時トシテハ數字ヲ用ヒタリ、又ヘバ例三角形ノ一邊ヲ表スニ二ツノ文字ヲ用フベキモ出來得ル限リ一ツノ文字ヲ以テセリ。

五 比ハ之ヲ數ト見テ取扱ヒ彼ノ挾ミ合ヒノ論法ヲ不完全ニ教ヘテ生徒ヲ迷ハシムルノ弊ヲ避ケタリ

六 教授ニ困難ナリト稱セラルル軌跡ハ生徒ノ學力並ニ年齡ヲ顧ミ之ヲ第六編ニ配置セリ、恐ラクハ些ノ困難ヲ見ルコトナク之ヲ授クルヲ得ンカ。

本書未ダ必ずしも完璧ナリト稱スベカラズ、今後教授ニ忠實熱心ナル諸賢ノ批評ニ依リ之ヲ完成センコトヲ期ス。

大正元年九月東京目黒近藤重藏氏舊宅ニ於テ

波木井九十郎識ス

**中 等 教 育**  
**幾 何 學 教 科 書**  
 平 面 部

目 次

第一篇 直線圖形.....	1—75
第一章 體面線點.....	1— 4
第二章 角.....	5— 13
第三章 平行線.....	14— 22
第四章 三角形.....	23— 53
第五章 直線形.....	54— 58
第六章 平行四邊形.....	59— 72
第一篇ノ問題.....	73— 75
第二篇 圓.....	76—114
第一章 弧弦.....	76— 93
第二章 弓形ニ於テノ角.....	94— 99
第三章 切線.....	100—103
第四章 ニツノ圓.....	104—106
第五章 內接形 外接形.....	107—111
第二篇ノ問題.....	112—114

第三篇	作圖題 .....	115—148
第四篇	面積 .....	149—176
第一章	定理 .....	149—168
第二章	作圖題 .....	169—173
	第四篇ノ問題 .....	174—176
第五篇	比例 .....	177—233
第一章	比 比例 .....	177—179
第二章	比例線 中心角 .....	180—186
第三章	相似直線形 .....	187—202
第四章	面積 .....	203—219
第五章	作圖題 .....	220—230
	第五篇ノ問題 .....	231—233
第六篇	軌跡 .....	234—248
第七篇	圓周 圓ノ面積 .....	249—256

中等教育  
幾何學教科書

平面部

第一篇

直線圖形

第一章

體面線點

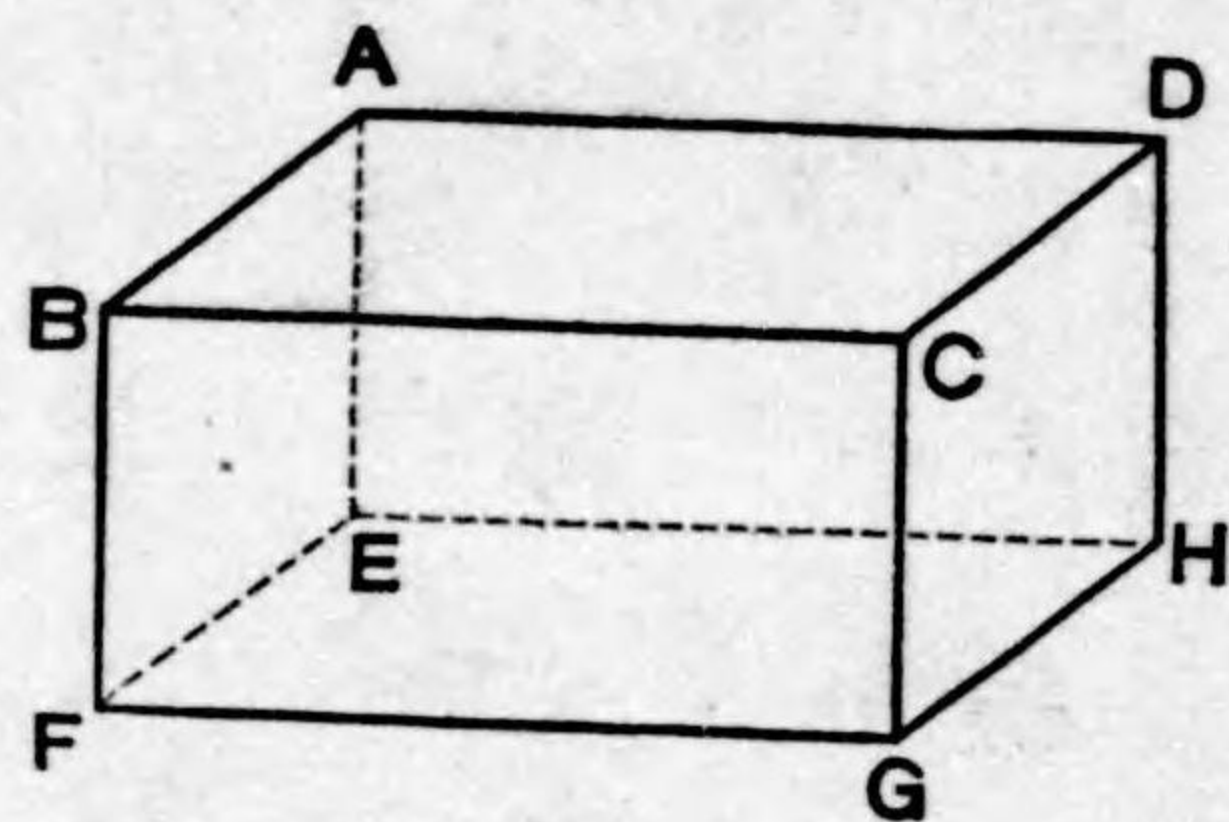
1. 物體ハ空間ノ一部分ヲ占有ス。  
物體ヲ組立ツル物質ノ如何ヲ問ハズ  
其ノ占有スル處ノ空間ノ一部分ノ形  
狀,大小,位置ノミヲ考フルトキハ之ヲ  
體ト稱ス。

體ハ長サ,幅,厚サヲ有ス。

## 2. 體ノ境界ヲ面ト稱ス。

面ハ長サ,幅アリト雖モ少シモ厚サナシ。

例ヘバ下圖 ABCD-EFGH ハ體ナリ,而シテ長サハ CB 幅ハ CD 厚サハ CG ナリ。



ABCD ハ體ノ一方ノ境界ニシテ面ナリ,而シテ長サハ CB 幅ハ CD ニシテ厚サナシ。

CDHG, CCFG 等モ亦面ナリ。

## 3. 二面ノ交ル處ヲ線ト稱ス。

線ハ唯長サヲ有スルノミ。

例ヘバ前ノ圖ニ於テ ABCD, CDHG ナル二面ノ交ル處 CD ハ即チ線ニシテ CD ナル長サヲ有スルノミ。

BC, CG 等モ亦線ナリ。

## 4. 二線ノ交ル處ヲ點ト稱ス。

點ハ長サモ幅モ厚サモ有スルコトナシ,唯位置アルノミナリ。

例ヘバ前ノ圖ニ於テ, CD, CB ナル二線ノ交ル處 C ハ即チ點ナリ,而シテ唯位置アルノミ。

D, H 等モ亦點ナリ。

## 5. 直線トハ二點間ノ最短距離ヲ表ハス處ノ線ナリ。

A 點ト B 點トノ間ニ引ケル直線ヲ直線 AB ト呼ブ。

時トシテハ直線 AB トハ A 點ト B 點トヲ通り双方ノ向ヘ限リナク延ビタル線ヲ云フコトアリ。

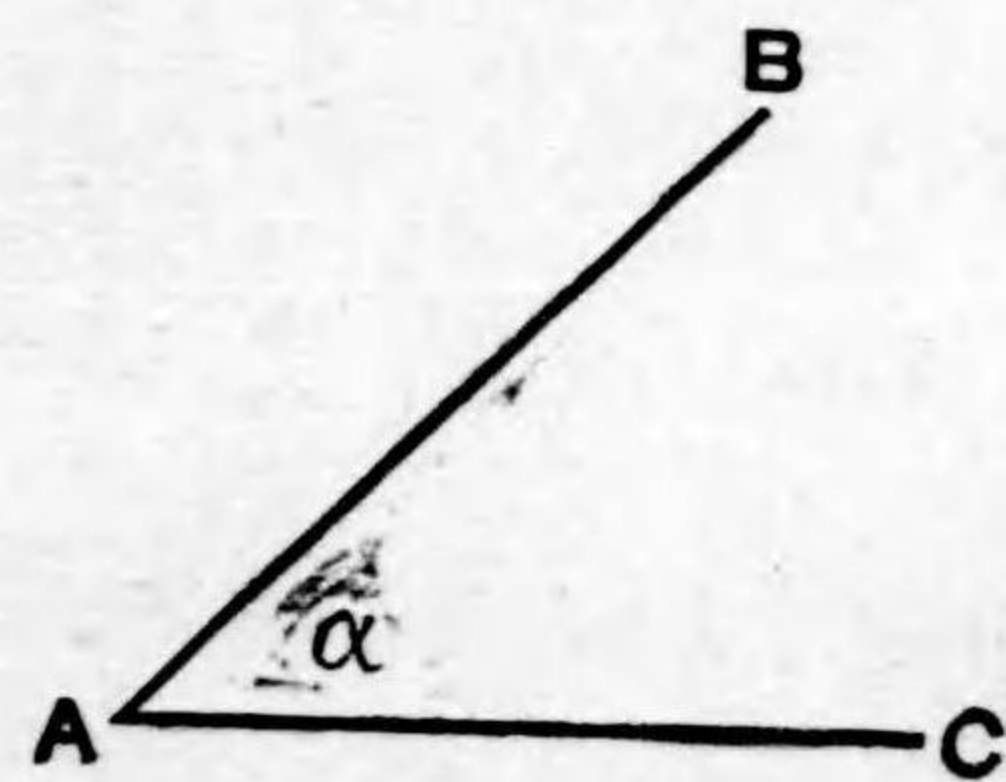
## 6. 平面トハ面上任意ノ二點ヲ取り,之ヲ連結スル直線ガ全ク其ノ上ニアル處ノ面ナリ。

7. 平面幾何學ハ平面上ニ畫キタル圖形ニ就イテ論ズル處ノ學科ナリ。本篇ニ於テハ直線ノ集合ニヨリテナレル圖形即チ直線圖形ト稱スル處ノモノニ就イテ論ズ。

## 第二章 角

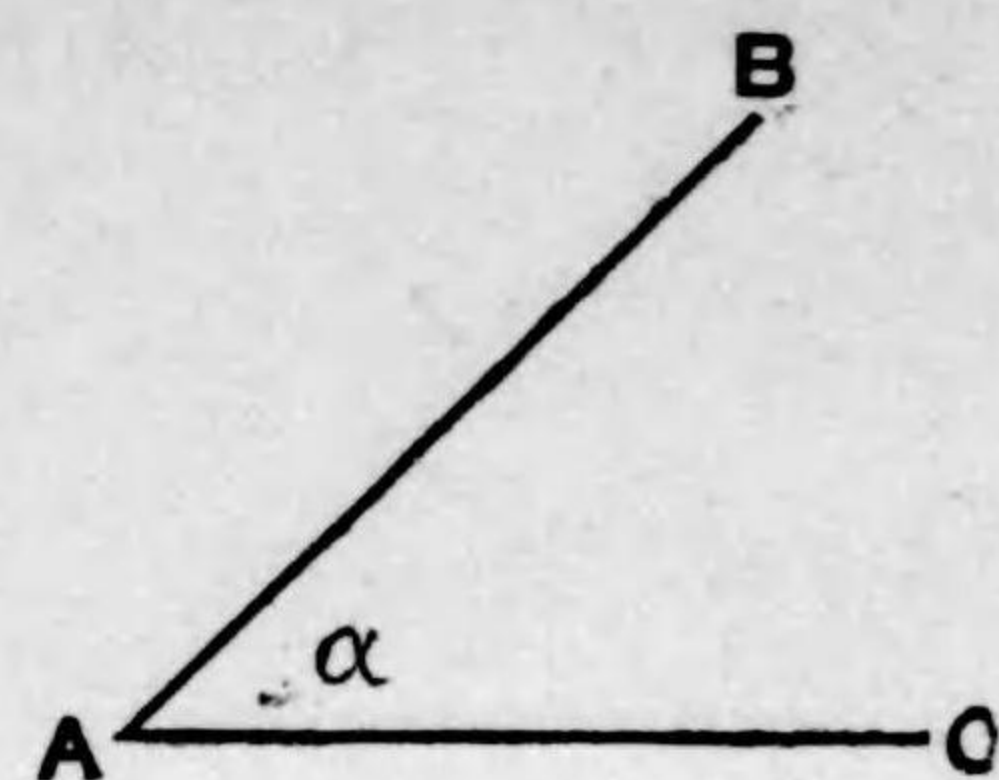
8. 同一ノ點ヨリ引ケルニツノ直線ハ、角ヲ夾ム、或ハ角ヲナスト云フ。

其ノ點ヲ角ノ頂點、其ノ二直線ヲ角ノ邊ト稱ス。



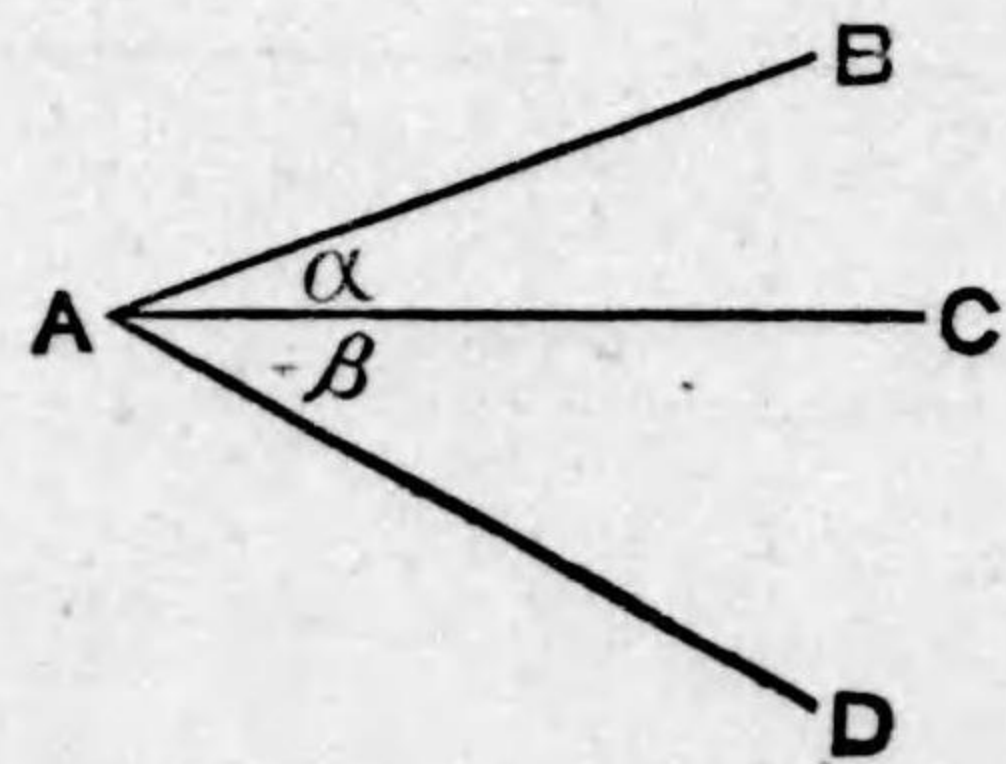
圖ニ於テ A ハ頂點ニシテ AB, AC ハ邊ナリ。而シテ之ヲ角 BAC, 或ハ角 CAB, 或ハ角 A ト呼ブ、或ハ二邊ノ間ニ置カレタル一ツノ文字又ハ數字ヲ以テスルコトアリ、例ヘバ角  $\alpha$  ト呼ブガ如シ。

而シテ之ヲ書キ表スニハ、 $\angle$  ナル記號ヲ用フ。例ヘバ  $\angle ABC$ ,  $\angle A$ ,  $\angle \alpha$  等トナスガ如シ。



初メ邊  $AB$  が邊  $AC$  と合スル位置ニアリテ、夫ヨリ其ノ頂點  $A$  ヲ中心トシテ其ノ平面上ニ廻轉シ、圖ノ如ク  $AB$  ノ位置ニ達セルモノト考フルトキハ、其ノ直線ハ角  $CAB$  ダケ廻轉シタリト云フ。故ニ角ノ大サハ廻轉ノ多少ニヨルモノニシテ、邊ノ長短ニ關スルモノニアラズ。

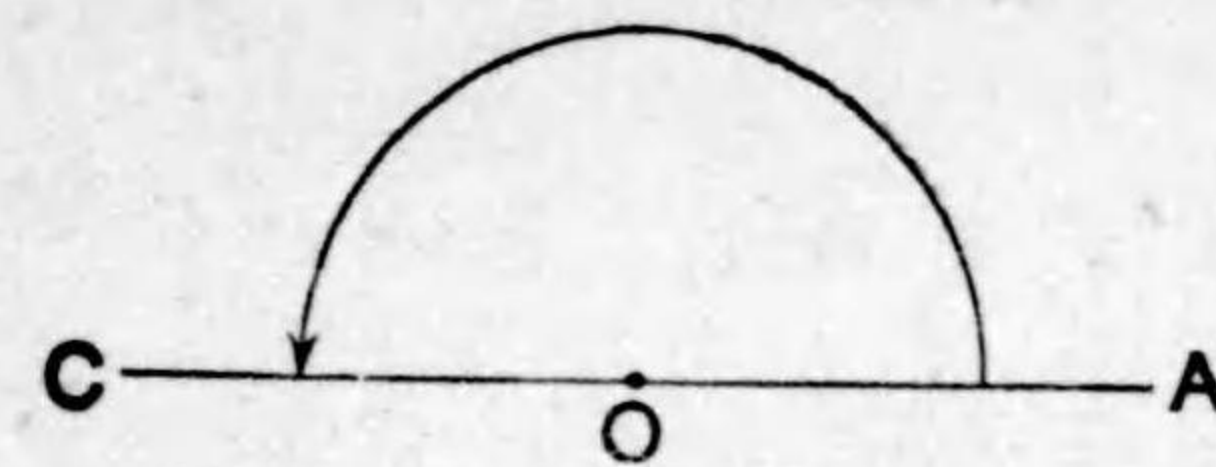
9. 接角トハ頂點及ビ一邊ヲ共有シ、且此ノ共有邊ノ兩側ニアル二角ナリ。



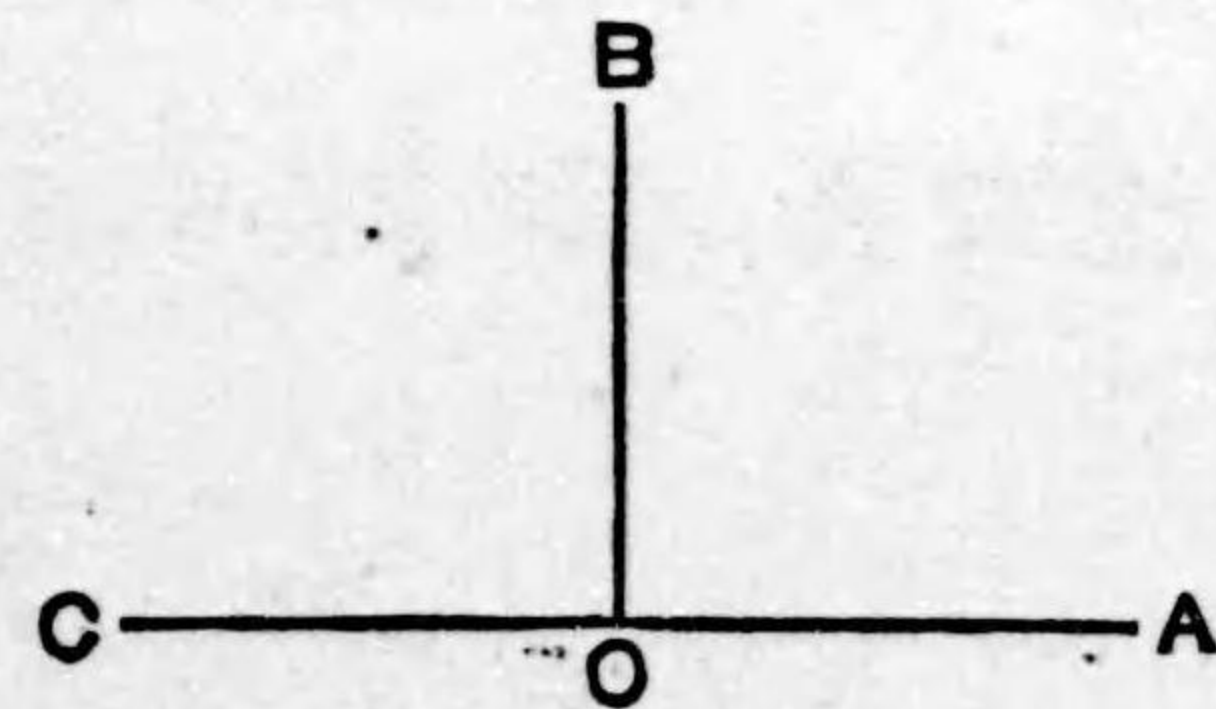
例ヘバ角  $\alpha$  ト角  $\beta$  トハ接角ナリ

10. 角ノ二邊ガ一直線ヲナスモノヲ平角ト稱ス。

例ヘバ  $\angle AOC$  ノ如シ。



11. 一ツノ直線ガ他ノ一ツノ直線ト交リ之ト相等シキ接角ヲナストキハ、各ノ角ヲ直角ト稱ス。



例ヘバ  $\angle AOB$ ,  $\angle COB$  ノ如シ。

12. 一ツノ直線ニ垂線ナル直線トハ、之ト直角ヲナスモノナリ。

其ノ出會フ處ノ點ヲ**垂線ノ足**ト稱ス。

例ヘバ前圖ニ於テ  $BO, CA$  ハ互ニ垂線ナリ、  
又ハ之ヲ互ニ垂直ナリト稱ス。

之ヲ  $BO \perp CA$  ト記ス。O 點ハ垂線  $BO$  ノ足ナリ。

13. **銳角**トハ一直角ヨリ小ナル角  
ナリ。

14. **鈍角**トハ一直角ヨリ大ニシテ  
二直角ヨリ小ナル角ナリ。

15. 二ツノ角ノ和ガ一直角ニ等シ  
キトキハ各ノ角ヲ他ノ角ノ**餘角**ト稱  
ス。

16. 二ツノ角ノ和ガ二直角ニ等シ  
キトキハ各ノ角ヲ他ノ角ノ**補角**ト稱  
ス。

17. **角ノ大サヲ測ルコト。**

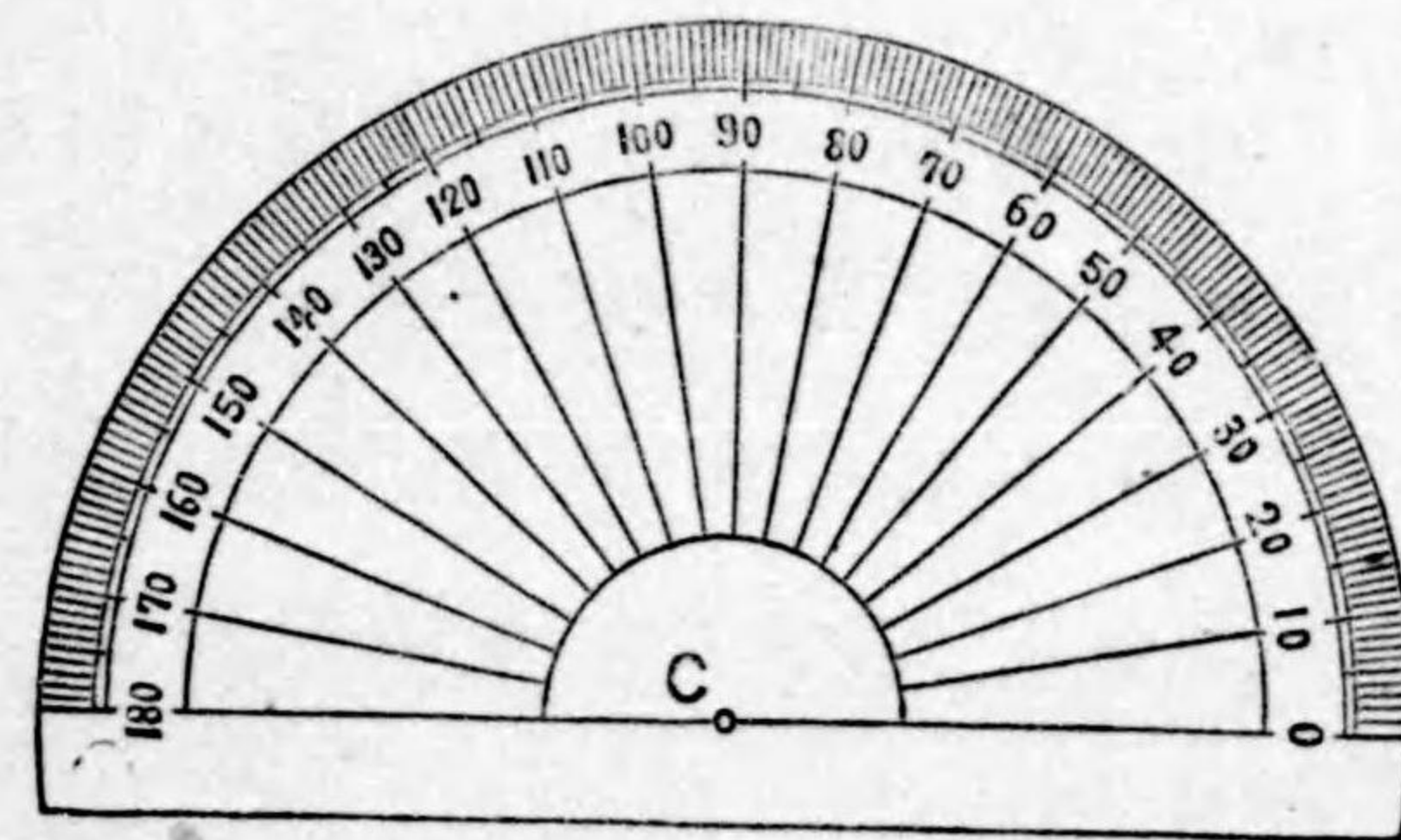
實用上ニハ角ノ單位ヲ**度**トス、一度

ハ一直角ノ九十分ノ一ナリ、而シテ一  
度ノ六十分ノ一ヲ**分**、一分ノ六十分ノ  
一ヲ**秒**ト稱ス。

度、分、秒ノ記號トシテ  $^{\circ}$ 、 $'$ 、 $''$  ヲ用フ。

例ヘバ七十五度四十二分三十六秒ヲ  $75^{\circ} 42' 36''$   
ト記スガ如シ。

角ノ大サヲ測ルニハ**分度器**ヲ用フ。



圖ニ示スハ其ノ一種ニシテ、縁ニ  $0^{\circ}$  ヨリ  $180^{\circ}$  マ  
デノ目盛アリ。之ヲ以テ角ヲ測ルニハ、中心  $C$  ヲ  
頂點ニ置キ、 $0$  ト記サレタル線ガ角ノ一邊上ニ重  
ナル様ニスルトキハ他ノ邊ノ指示スル目盛ハ即  
チ角ノ大サヲ示ス。

問題 1. 互ニ補角ヲナス二角アリ,其ノ一ガ他ノ四倍ナルトキ各ノ角ノ大サ如何。

問題 2. 互ニ餘角ヲナス接角ノ二等分線ノ間ノ角ノ大サ如何。

問題 3. 或角ノ餘角ト補角トノ和ガ  $120^\circ$  ナルトキ,其ノ角ノ大サヲ計算セヨ。

問題 4. 一點ヨリ出ヅル五ツノ直線ノ作ル角ガ悉ク相等シキトキ,其ノ各ハ一直角ノ五分ノ四ナリ。

問題 5. 次ノ時刻ニ於ケル時計ノ兩針ノ間ノ角ヲ一直角ヲ單位トシテ云ヒ表セ。

(i) 五時。 (ii) 八時。

問題 6. 二時廿四分ノトキ,時針分針ノ夾ム角度ヲ求ム。

18. 一ツノ事項ノ陳述ヲ命題ト稱ス。

一ツノ語ノ定義トハ其語ハ何ヲ表

ハスモノナルカヲ陳ブル所ノ命題ナリ。

吾人ノ經驗ニヨリテ眞ナリト認定シタル命題ヲ公理ト稱ス。

19. 幾何學公理ノ主ナルモノハ下ノ如シ。

1. 二點ヲ通ル直線ハ一ツアリ,而シテ唯一ツニ限ル。
2. 全ク重ネ合ハスコトヲ得ルモノノ大サハ相等シ。

20. 定理トハ定義公理或ハ既ニ眞ナリト知レル命題ニ依リテ證明スル處ノ命題ナリ。

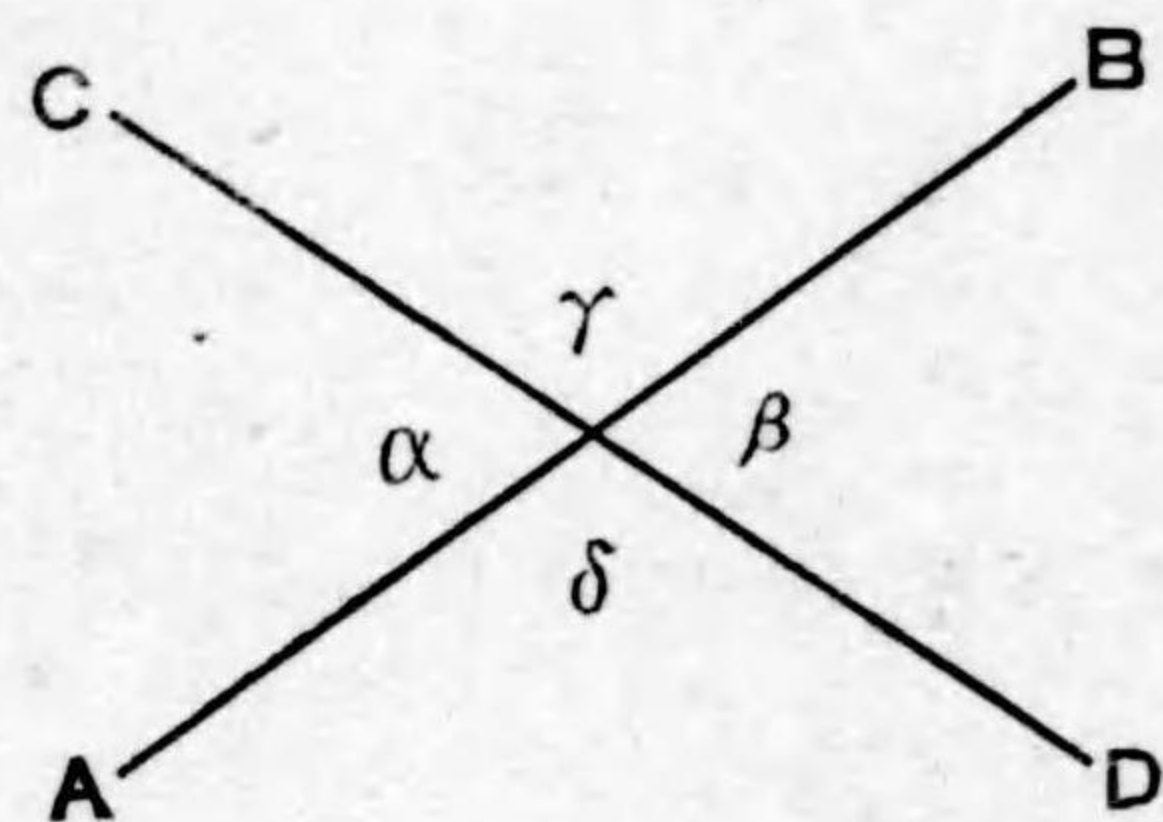
定理ハ假設及ビ終結ナル二ツノ部分ヨリナル。假設トハ假ニ然リトスルコトニシテ,終結トハ即チ假設ヨリ



起り來ル結論ナリ。

21. 相交ル二直線ガナス處ノ向ヒ合ノ二角ヲ對頂角ト稱ス。

22. 定理一 二直線相交ルトキ對頂角ハ相等シ。



假設 直線 AB ト直線 CD ガ相交リ, 對頂角  $\angle \alpha$  ト  $\angle \beta$ , 及  $\angle \gamma$  ト  $\angle \delta$  フナストス。

終結  $\angle \alpha = \angle \beta$

$$\angle \gamma = \angle \delta$$

證明 CD ハ直線ナル故

$$\angle \beta + \angle \gamma = 180^\circ$$

同様 =  $\angle \alpha + \angle \gamma = 180^\circ$

$$\therefore \angle \alpha = \angle \beta$$

$$\text{同様} = \angle \gamma = \angle \delta$$

問題 7. 上ノ圖ニ於テ  $\angle \alpha = 42^\circ$  ナルトキ, 他ノ角ノ大サ如何。

問題 8. 直線 AOB ノ反對ノ側ニ在ルニツノ角 AOP, BOQ ガ相等シキトキハ POQ ハ一直線ヲナス。

問題 9. 四直線 OA, OB, OC, OD, ガ一點 O ニ會シ, 且  $\angle AOB = \angle COD$ ,  $\angle BOC = \angle DOA$  ナラバ AOC 及ビ BOD ハ夫々一直線ヲナス。

問題 10. 或角ノ二等分線ハ其ノ對頂角ヲ二等分ス。

問題 11. 二双ノ對頂角ノ二等分線ハ互ニ垂直ナリ。

### 第三章 平行線

23. 平行線トハ同一ノ平面上ニ在リテ如何程遠ク双方へ延長スルトモ、相交ラザル二直線ナリ。

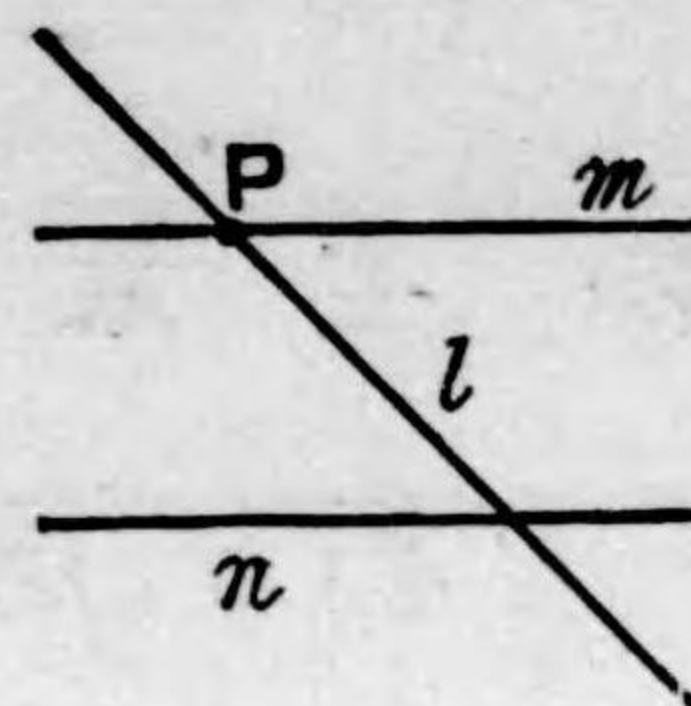
二直線  $AB, CD$  ガ平行ナルコトヲ  $AB \parallel CD$  ト記ス。

24. 平行線公理 一ツノ與點ヲ通り、一ツノ與直線ニ平行ナル直線ハ唯一ツニ限ル。

25. 定理二 二ツノ平行線ノ一ツニ交ル直線ハ必ズ他ノ直線ニモ交ル。

假設  $m$  線ト  $n$  線ガ平行ニシテ  $l$  線ガ  $m$  線ト一點  $P$  ニ於テ交ルトセヨ。

終結 然ルトキハ  $l$  線ハ又  $n$  線ト交ルベシ。

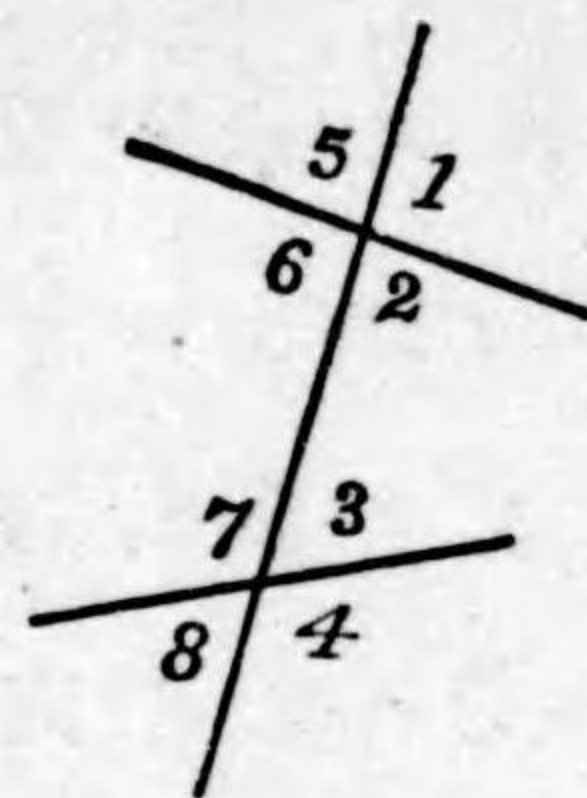


證明  $l$  ハ  $n$  ト交ルカ、或ハ交ラザルカイヅレカナリ。若シ交ラズトスレバ  $n$  ニ平行ナリ。然ラバ  $P$  點ヨリ  $n$  ニ二ツノ平行線ヲ引クコトヲ得、是不合理ナリ。故ニ  $l$  ハ  $n$  ト交ル。

26. 定理二ノ如ク甲ハ乙ナルコトヲ證明セントスルトキ、甲ハ乙ナルカ乙ナラザルカノイヅレカナルトキ、甲ガ乙ナラズトシテ不合理ヲ生ズルナラバ、甲ガ乙ナルコトヲ知ル。

斯ノ如キ論法ヲ名ヅケテ歸謬法ト稱ス。

27. 一ツノ直線ガ二ツノ他ノ直線ト交リ八ツノ角ヲナストキ、之ニ次ノ如キ名稱ヲ附ス。



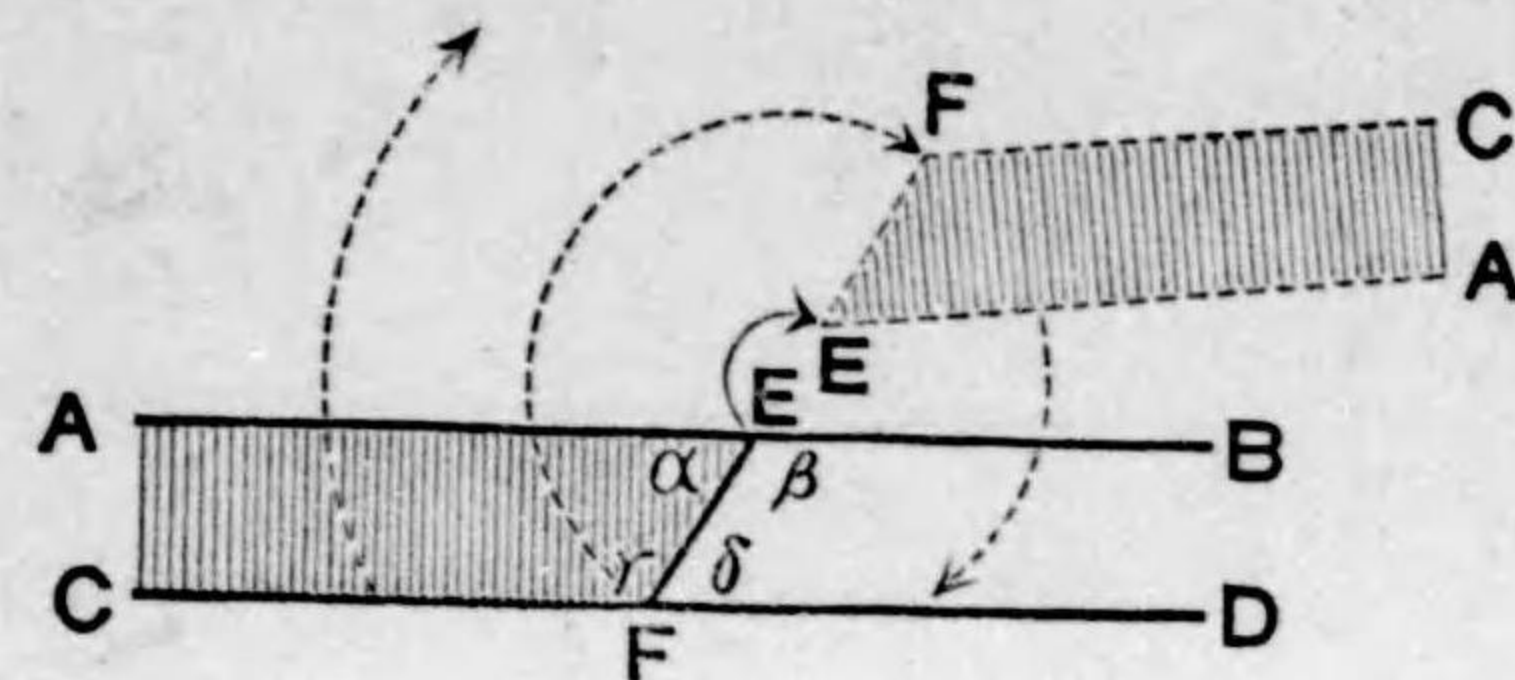
1, 5, 4, 8 ヲ各外角ト稱ス。

2, 6, 3, 7 ヲ各内角ト稱ス。

2 ト 7 又ハ 3 ト 6 ヲ各錯角ト稱ス。

1 ト 3, 2 ト 4, 5 ト 7, 6 ト 8 トヲ各同位角ト稱ス。

28. 定理三 一ツノ直線ガ他ノ二ツノ直線ト交リ、其ノ錯角相等シケレバ二ツノ直線ハ平行ナリ。



假設 EF ナル直線ガ AB, CD ナル二直線ト E, F ニ於テ交リ  $\angle\alpha = \angle\delta$

從ツテ  $\angle\beta = \angle\gamma$  ナリトス。

終結  $AB \parallel CD$

證明 AEFC ナル部分ヲ廻轉シテ BEFD ナル部分ニ重ヌルニ、E ガ F ト合スルト同時ニ F ガ E ニ合ス。而シテ  $\angle\alpha = \angle\delta$  ナルヲ以テ EA ハ FD ニ、又  $\angle\beta = \angle\gamma$  ナルヲ以テ FC ガ EB ニ重ナル。

故ニ若シ EB ト FD ヲ B ト D ノ方ニ延長スルトキ交ルモノトセバ、EA ト FC ヲ A ト C ノ方ニ延長スルトキモ亦相交ラザル可ラズ。

然ラバ、二點ヲ通り二ツノ直線ヲ引キ得ルコトトナル、是不合理ナリ。故ニ交ルコトヲ得ズ。

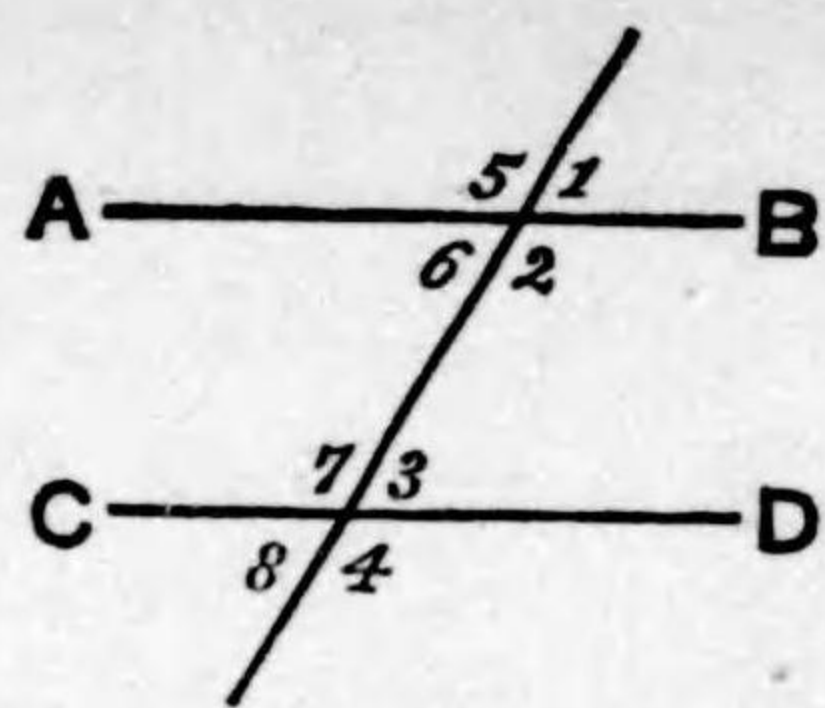
即チ平行ナリ。

系一 一ツノ直線ガ他ノ二ツノ直線ト交リ、同

位角相等シキトキハ二ツノ直線ハ平行ナリ

$\angle 1 = \angle 3$  ナレバ

$AB \parallel CD$



證明

$$\angle 1 = \angle 3$$

$$\angle 1 = \angle 6$$

$\therefore$

$$\angle 3 = \angle 6$$

即チ錯角相等シキヲ以テ平行ナリ。

此ノ如ク一ツノ定理ヨリ直ニ推定シ得ベキ定理ヲ系ト稱ス。

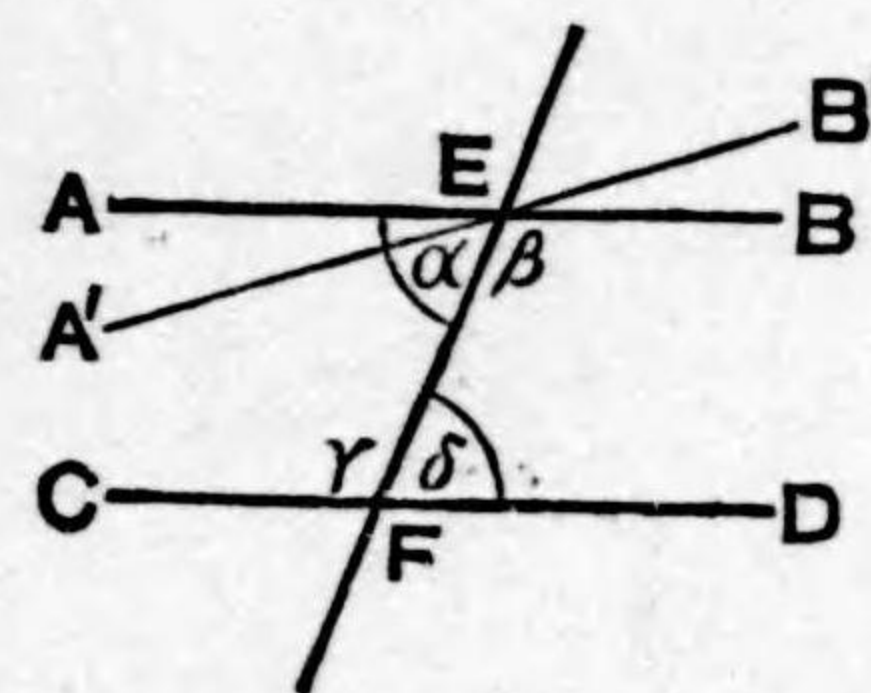
系二 一ツノ直線ガ他ノ二ツノ直線ト交リ、其ノ同側ニアル内角ノ和二直角ニ等シキトキハ、其ノ二ツノ直線ハ平行ナリ。

問題 12. 同一ノ直線ニ垂直ナル直線ハ互ニ平行ナリ。

問題 13. 與直線外ノ一點ヨリ之ニ一ツヨリ多クノ垂線ヲ引クコトヲ得ズ。

此ノ垂線ヲ其ノ點ト其ノ直線トノ間ノ距離ト稱ス。

29. 定理四 一ツノ直線ガ二ツノ平行線ト交レバ、其ノ錯角ハ相等シ。



假設 直線 EF ガ AB, CD ナル平行線ト交ルトス。

終結

$$\angle \alpha = \angle \delta$$

$$\angle \beta = \angle \gamma$$

證明  $\angle \alpha \neq \angle \delta$  トセヨ。E 點ヲ通リ  $\angle \delta$  ニ等シキ角ヲ作リーツノ直線 A'B' ヲ引ケバ

$A'B' \parallel CD$

故ニ  $A'B'$  ハ  $AB$  ト一致ス。

$$\therefore \angle\alpha = \angle\delta$$

$$\text{同様ニ} \quad \angle\beta = \angle\gamma$$

**系** 一ツノ直線ガ二ツノ平行線ト交レバ、其同位角ハ相等シク、同ジ側ニアル内角ハ互ニ補角ナリ。

**問題 14.** 上ノ圖ニ於テ  $\angle\alpha = 75^\circ$  ナラバ他ノ角ノ大サ如何。

**問題 15.** 二ツノ平行線ノ一ニ垂直ナル直線ハ他ノ一ニモ亦垂直ナリ。

**問題 16.** 相交ル直線ノ各ニ垂直ナル二直線ハ相交ル。

**30.** 一ツノ定理ノ假設ト終結トヲ逆ニセル定理ヲ前ノ定理ニ對シテ**逆定理**ト稱ス。

例ヘバ定理四ハ定理三ノ逆ニシテ、定理三ハ定理四ノ逆ナリ。

一ツノ定理ガ證明サレタルトキ其**逆定理**ハ直ニ真ナリト云フベカラズ。

例ヘバ馬ハ動物ナリトテ動物ハ馬ナリト云フヲ得ザルガ如シ。

**逆定理**ハ更ニ證明ヲ要スルモノナリ。

**31. 定理五** 同一ノ直線ニ平行ナル二ツノ直線ハ平行ナリ。

**假設** 二ツノ直線  $a, b$  ヲ各  $c$  ニ平行ナリトス。

**終結**  $a \parallel b$

**證明**  $a \parallel b$  ナラズトスレバ之ヲ延長スレバ相交ハル。然ラバ其ノ交點ヲ通り  $c$  ニ平行ナル二直線ヲ引クヲ得、是不合理ナリ。故ニ交ルコトナシ、即チ平行ナリ。

**問題 17.** 二ツノ平行線  $AB, CD$  ノ間ニ夾マレタル一點ヲ  $P$  トスレバ

$$\angle BPD = \angle ABP + \angle CDP$$

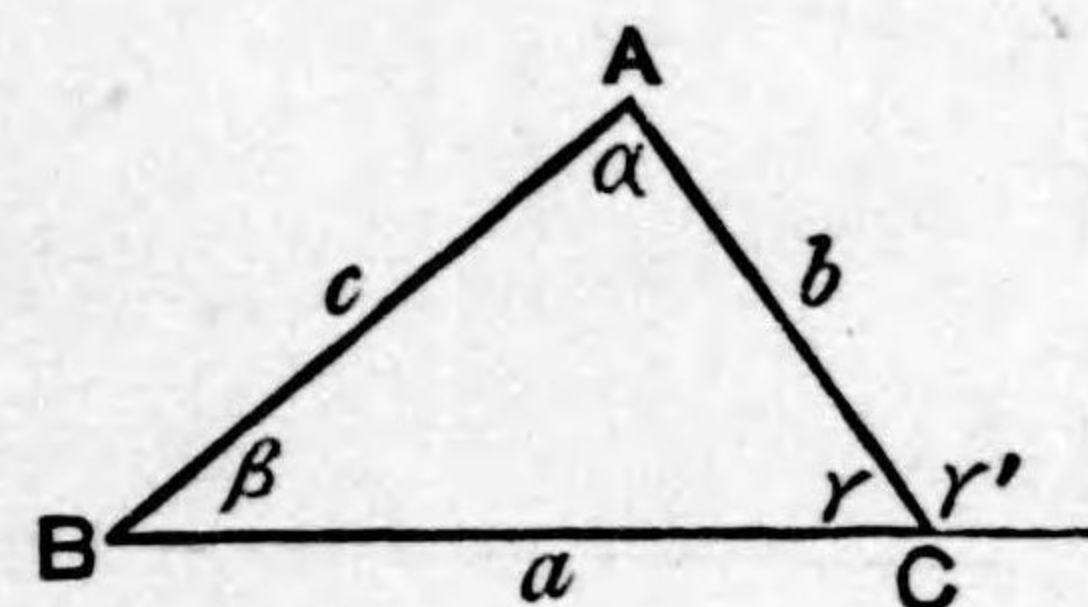
問題 18. ニツノ角ノ二邊ガ夫々平行ナルトキハ、其ノ二ツノ角ハ相等シキカ、又ハ互ニ補角ナリ。

問題 19. ニツノ角ノ二邊ガ夫々垂直ナルトキハ其ノ二ツノ角ハ相等シキカ、又ハ互ニ補角ナリ。

## 第四章

## 三角形

32. 三角形トハ三ツノ直線ニテ圍ミタル平面ノ一部分ナリ。



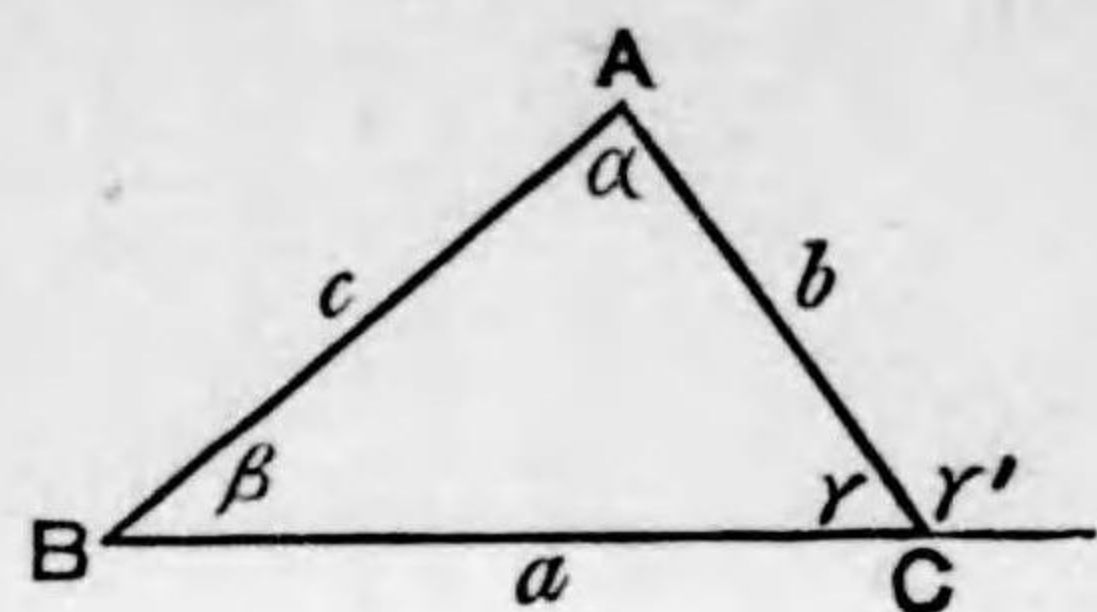
例ヘバ三角形ABCノ如シ、之ヲ $\triangle ABC$ ト記ス。  
A, B, Cナル點ヲ頂點ト稱ス。

AB, BC, CAナル三ツノ直線ヲ邊ト稱ス。

頂點ハ必ズ大文字ヲ以テ之ヲ表シ、相對スル處ノ邊ハ其ノ頂點ノ文字ト同ジキ小文字ヲ以テ之ヲ表ス。

例ヘバA, B, Cナル頂點ニ對スル邊ハ、 $a, b, c$ ニテ表スガ如シ。

二邊間ノ角ヲ内角ト稱ス。



例へば  $\angle\alpha, \angle\beta, \angle\gamma$  ノ如シ。

一邊ト之ニ隣レル邊ノ延長トニテ夾ム角ヲ外角ト稱ス。

例へば  $\angle\gamma'$  ノ如シ。

33. 三角形ノ一邊ヲ底ト稱シ、其ノ兩端ニ於ケル角ヲ底角ト稱シ、底ニ對スル角ヲ頂角ト稱スルコトアリ。

34. 二邊相等シキ三角形ヲ二等邊三角形ト稱ス。

二等邊三角形ノ頂角トハ二ツノ相等シキ邊ノ夾角ナリ。

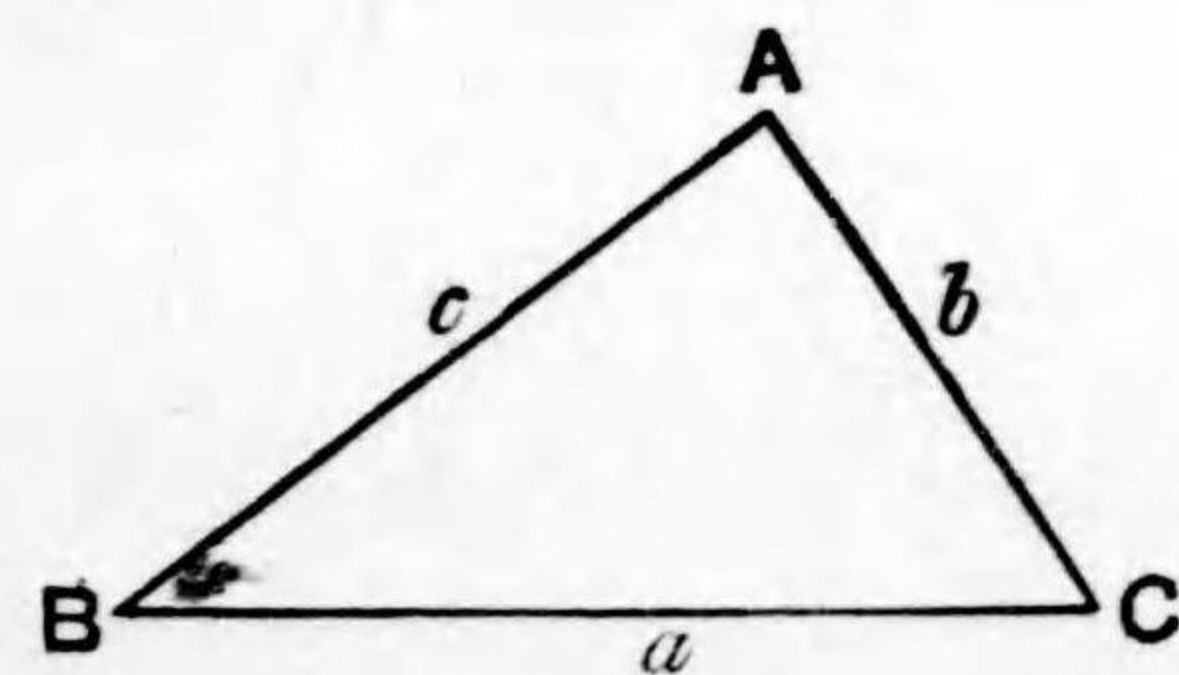
二等邊三角形ノ頂點トハ頂角ノ頂點ナリ。

二等邊三角形ノ底トハ頂角ニ對スル邊ナリ。

二等邊三角形ノ底角トハ底ノ兩端ニ於ケル角ナリ。

三邊相等シキ三角形ヲ等邊三角形又ハ正三角形ト稱ス。

35. 定理六 三角形ノ二邊ノ和ハ他ノ一邊ヨリ大ナリ。



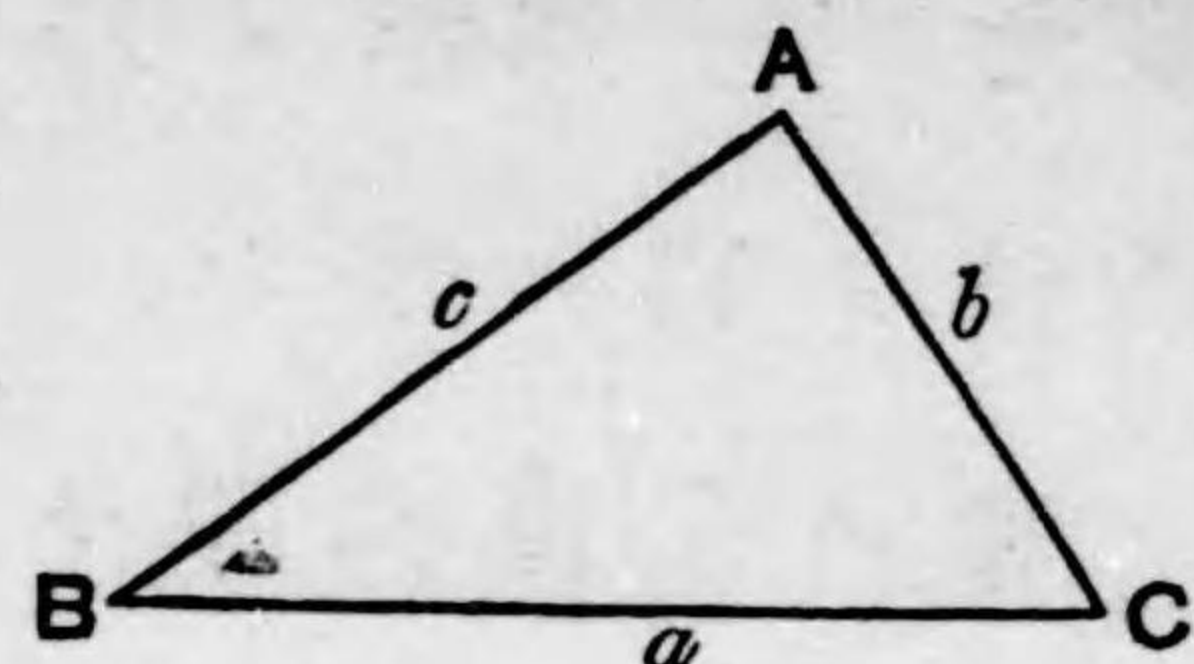
假設 ABC ヲ三角形トセヨ。

終結  $a+b>c, b+c>a, c+a>b$

證明  $c$  ハ A, B 二點間ノ最短距離ナラバ

$$a+b>c$$

同様ニ  $b+c>a$



同様ニ  $c+a > b$

系 三角形ノ二邊ノ差ハ他ノ一邊ヨリ小ナリ

問題 20. 下ニ記ス長サノ直線ヲ邊トスル三角形ハ有リ得ベキカ。

a. 3尺, 7尺, 5尺.

b. 20尺, 38尺, 10尺.

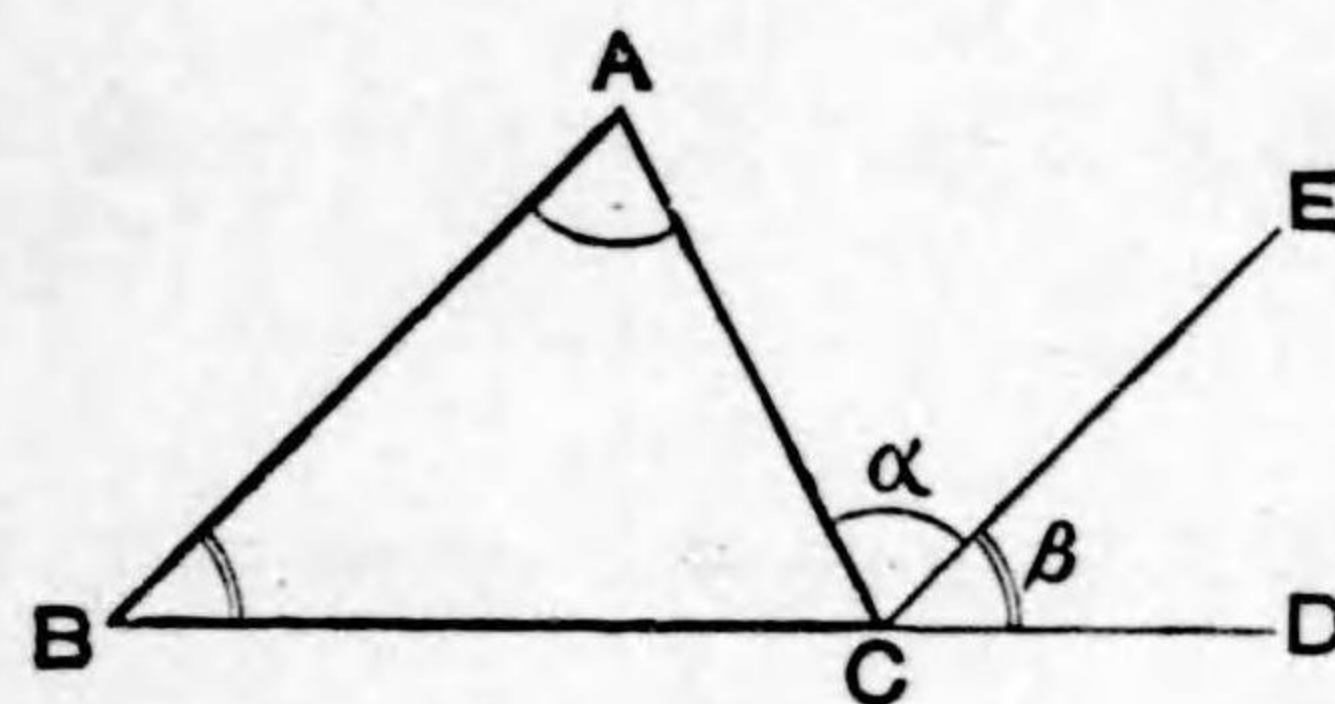
c. 3寸, 11寸, 9寸.

問題 21.  $\triangle ABC$  内ノ一點ヲ  $O$  トスレバ

$$2(AO + BO + CO) > a + b + c$$

36. 三角形ニ於テ一ツノ外角ニ接セザル二ツノ内角ヲ各其ノ外角ノ内對角ト稱ス。

37. 定理七 三角形ノ外角ハ其ノ二ツノ内對角ノ和ニ等シ。而シテ三ツノ内角ノ和ハ二直角即チ百八十度ニ等シ。



假設  $\triangle ABC$  ノ一ツノ外角ヲ  $ACD$  トセヨ。

終結 1.  $\angle A + \angle B = \angle ACD$

終結 2.  $\angle A + \angle B + \angle ACB = 180^\circ$

證明  $C$  ヲ通り  $AB$  ニ平行ニ  $CE$  ヲ引ケ。

然ラバ  $\angle A = \angle \alpha$

$\angle B = \angle \beta$

$\therefore \angle A + \angle B = \angle \alpha + \angle \beta$

$\therefore \angle A + \angle B = \angle ACD$

又  $\angle A + \angle B + \angle ACB = \angle ACD + \angle ACB = 180^\circ$



問題 22. 三角形ノ二ツノ角ガ夫々  $75^{\circ} 15' 47''$  及  $83^{\circ} 51' 16''$  ナルトキ, 第三ノ角ヲ見出セ。

問題 23.  $\triangle ABC$  ニ於テ  $\angle B$  ハ  $\angle C$  ヨリ  $5^{\circ}$  大ニシテ  $\angle A$  ハ  $\angle B$  ヨリモ亦  $5^{\circ}$  大ナルトキ, 各ノ角ノ度数ヲ計算セヨ。

問題 24.  $\triangle ABC$  ニ於テ  $\angle B = \angle C$  而シテ  $2\angle A = \angle B$  ナルトキ, 各角ノ度数ヲ計算セヨ。

38. 直角三角形トハ一ツノ角ガ直角ナル三角形ナリ。而シテ直角ニ對スル邊ヲ斜邊ト稱ス。

銳角三角形トハ其ノ三ツノ角ガ皆銳角ナル三角形ナリ。

鈍角三角形トハ其ノ一ツノ角ガ鈍角ナル三角形ナリ。

問題 25. 直角三角形ノ二角ハ各銳角ニシテ互ニ餘角ナリ。

問題 26. 鈍角三角形ノ二角ハ各銳角ナリ。

39. 二ツノ三角形ガ合同ナル場合ハ次ノ如シ。

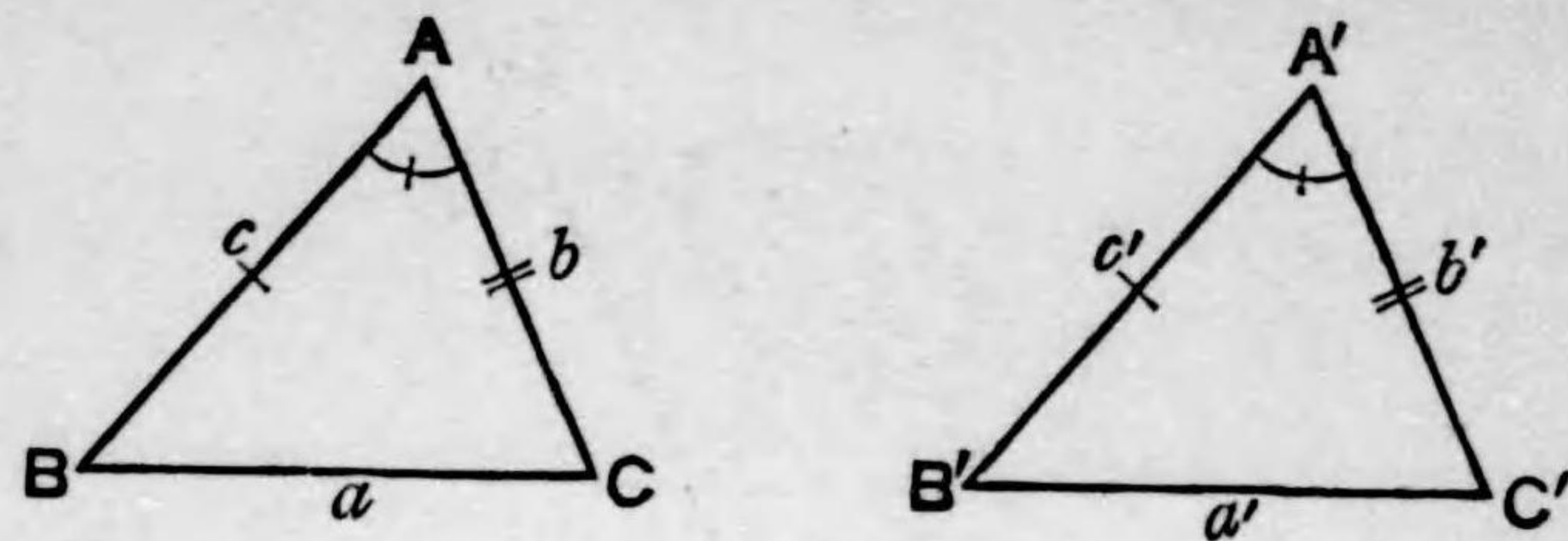
第一. 二邊ト其ノ夾角ガ夫々相等シキトキ。

第二. 一邊ト其ノ兩端ノ角ガ夫々相等シキトキ。

第三. 三邊ガ夫々相等シキトキ。

$\triangle ABC$  ト  $\triangle A'B'C'$  トガ合同ナルコトヲ表スニハ  $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$  ト記ス。

40. 定理八 一ツノ三角形ノ二邊ト其ノ夾角ガ夫々他ノ一ツノ三角形ノ二邊ト其ノ夾角ニ等シケレバ二ツノ三角形ハ合同ナリ。



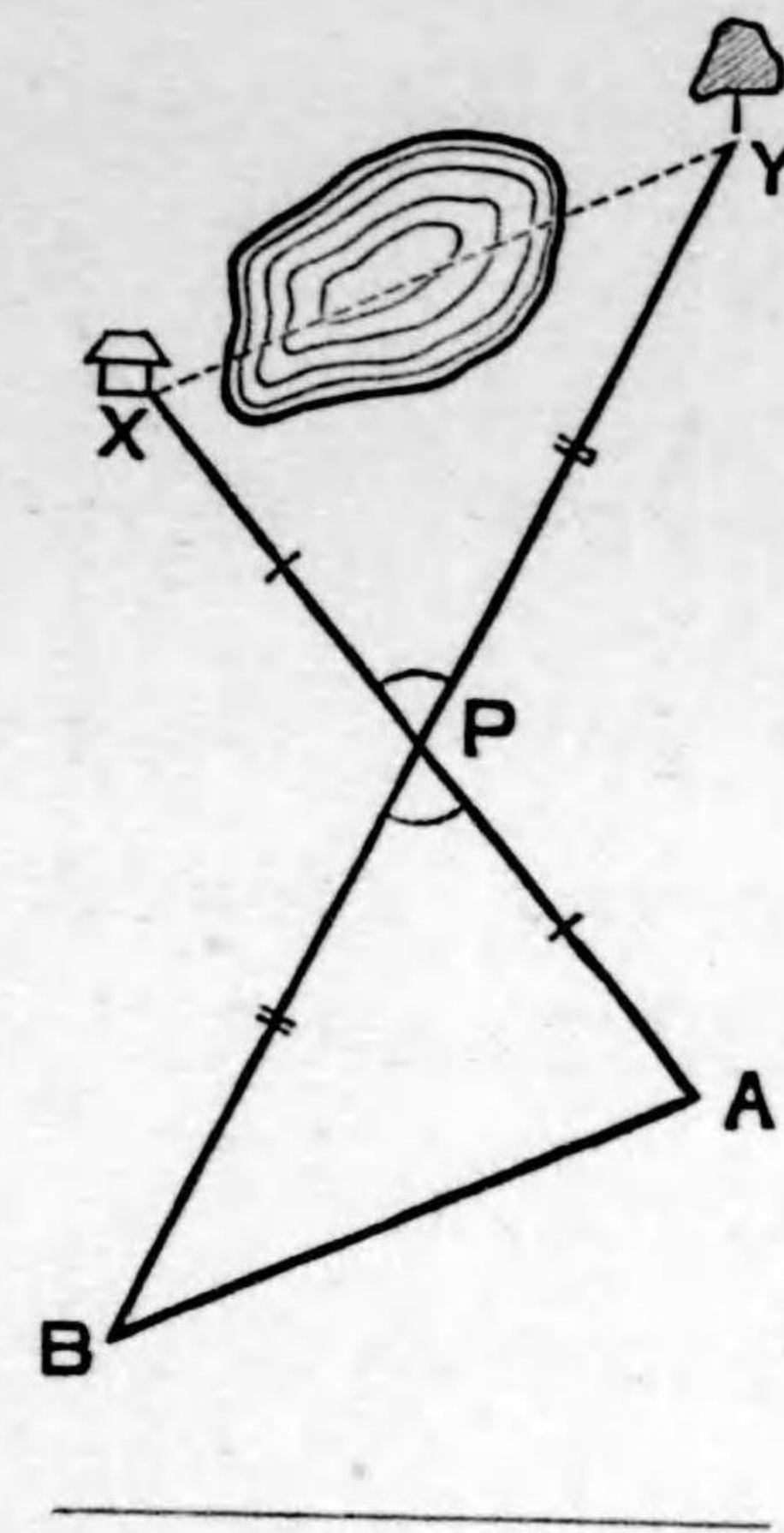
假設  $\triangle ABC, \triangle A'B'C' =$  於テ  
 $b=b' \quad c=c' \quad \angle A = \angle A'$

終結  $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$

證明  $\triangle A'B'C'$  ヲ  $\triangle ABC$  ノ上ニ重ヌルニ,  
 $\angle A' = \angle A$  ナルニヨリ  $c'$  ト  $b'$  トハ夫々  $c$  ト  $b$  トノ  
 上ニ重ナリ, 兩三角形ハ全ク相合ス, 故ニ合同ナリ。

此ノ定理ヲ應用スレバ間接ニ二點間ノ距離ヲ  
 測ルコトヲ得ベシ。

例ヘバ池ニヨリテ隔テラレタル二點  $X, Y$  ノ  
 間ノ距離ヲ求ムルニハ,  $X$  及ビ  $Y$  マデ眞直ニ歩  
 ミ得ベキ位置ニ一點  $P$  ヲ定メ,  $X$  ヲ發シ眞直ニ  
 $P$  ヲ經テ  $A$  ニ至リ,  $PX=PA$  ナラシメ次ニ  $Y$  ヲ  
 發シ眞直ニ  $P$  ヲ經テ  $B$  ニ至リ,  $PY=PB$  ナラシ  
 メ,  $AB$  ヲ測レバ即チ求ムル距離ヲ得ベシ。



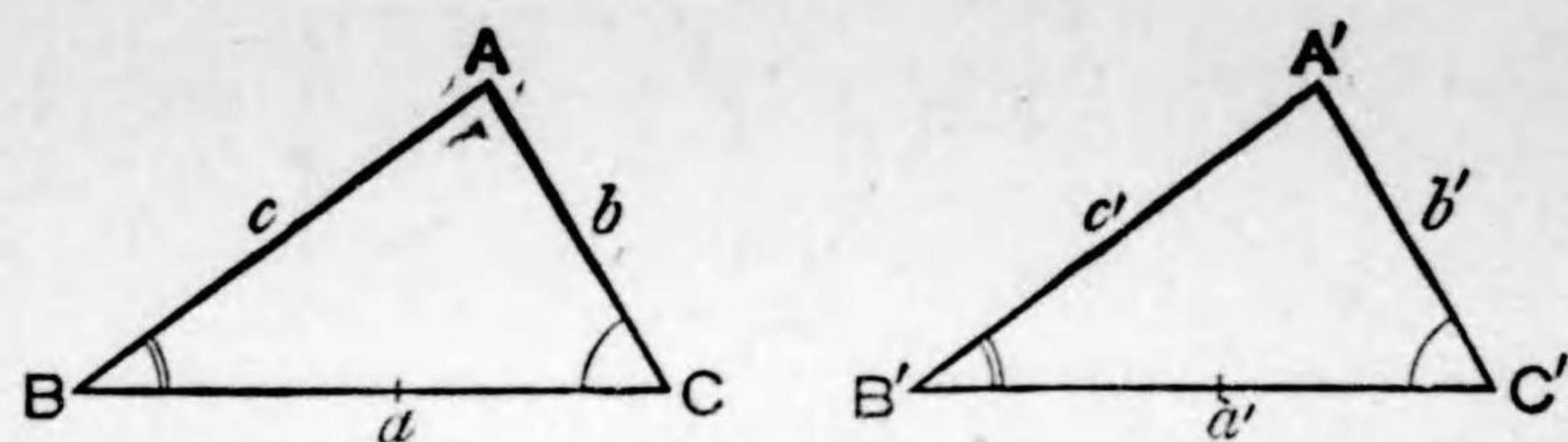
問題 27. 直線  $AB$  ノ中點ニ於テ之ニ垂線ヲ立  
 テ, 其ノ上ノ任意ノ一點ヲ  $D$  トスレバ

$$AD=BD$$

問題 28.  $A, B$  ヲ直線  $CD$  ノ同ジ側ニ在ル二  
 點トス。若シ  $AC=BD, \angle ACD = \angle BDC$  ナラバ  
 $A$  ト  $B$  トハ  $CD$  ノ中點ヨリ等距離ニアリ。

41. 定理九 一ツノ三角形ノ一邊  
 及ビ其ノ兩端ノ角ガ夫々他ノ一ツノ

三角形ノ一邊及ビ其ノ兩端ノ角ニ等シケレバニツノ三角形ハ合同ナリ。



假設  $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$  ニ於テ

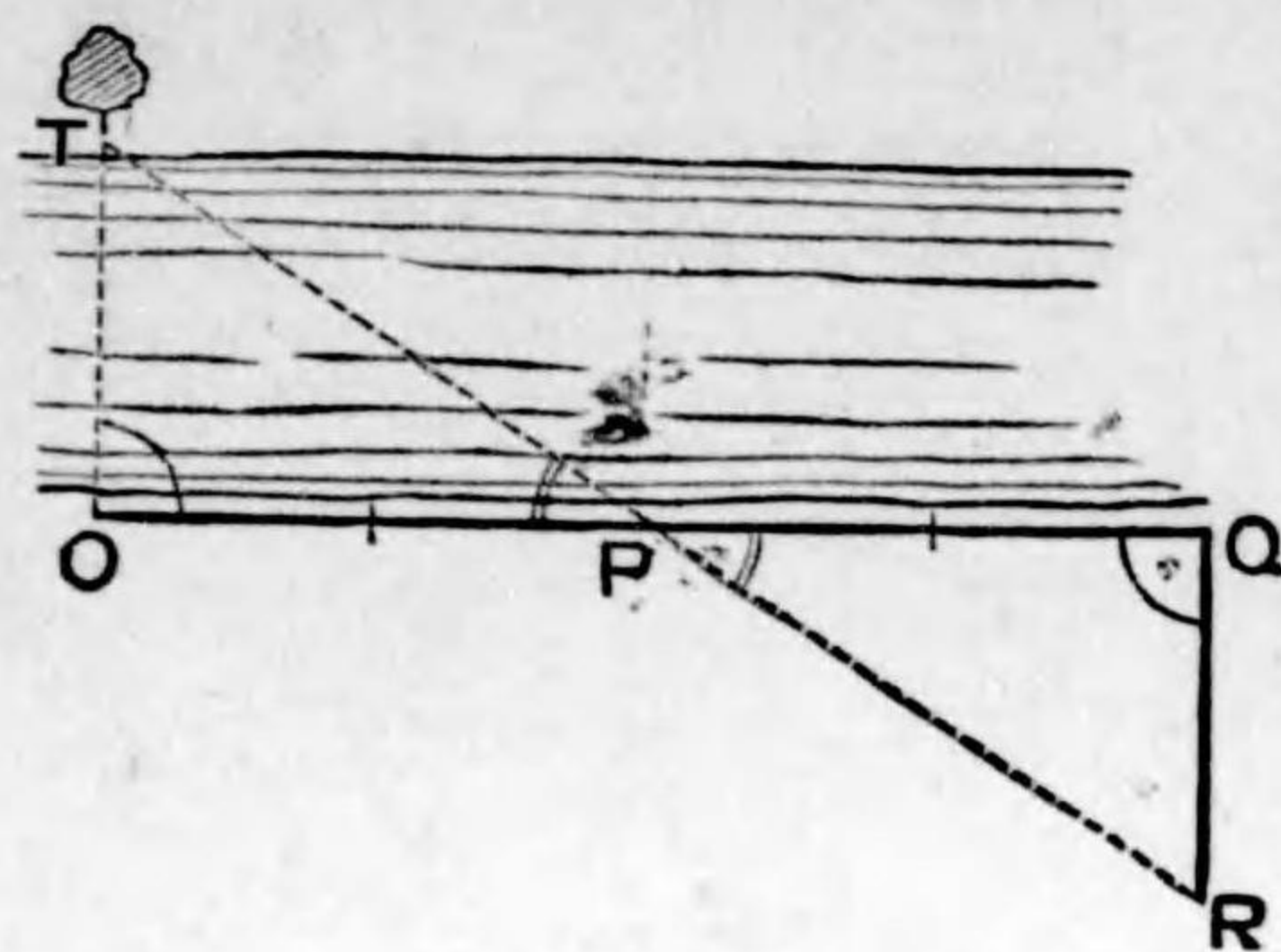
$$\angle B = \angle B', \angle C = \angle C', a = a'$$

終結  $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$

證明  $a'$  ヲ  $a$  ノ上ニ置キ,  $\triangle A'B'C'$  ヲ  $\triangle ABC$  ノ上ニ重ヌルニ  $\angle B' = \angle B, \angle C' = \angle C$  ナルニヨリ  $c'$  ハ  $c$  ニ,  $b'$  ハ  $b$  ニ重リ, 兩三角形全ク相合ス。故ニ合同ナリ。

河幅ヲ測ルニハ, 此ノ定理ヲ應用スルコトヲ得ベシ。

先ヅ對岸ニ一點  $T$  ヲ見定メ,  $OT$  ガ河流ノ方向ニ直角ナル如ク  $O$  ヲ撰ミ,  $O$  ヲ發シ  $OT$  ニ直角ニ任意ノ點  $P$  マデ歩ミテ此ノ點ニ印ヲ付ケ,

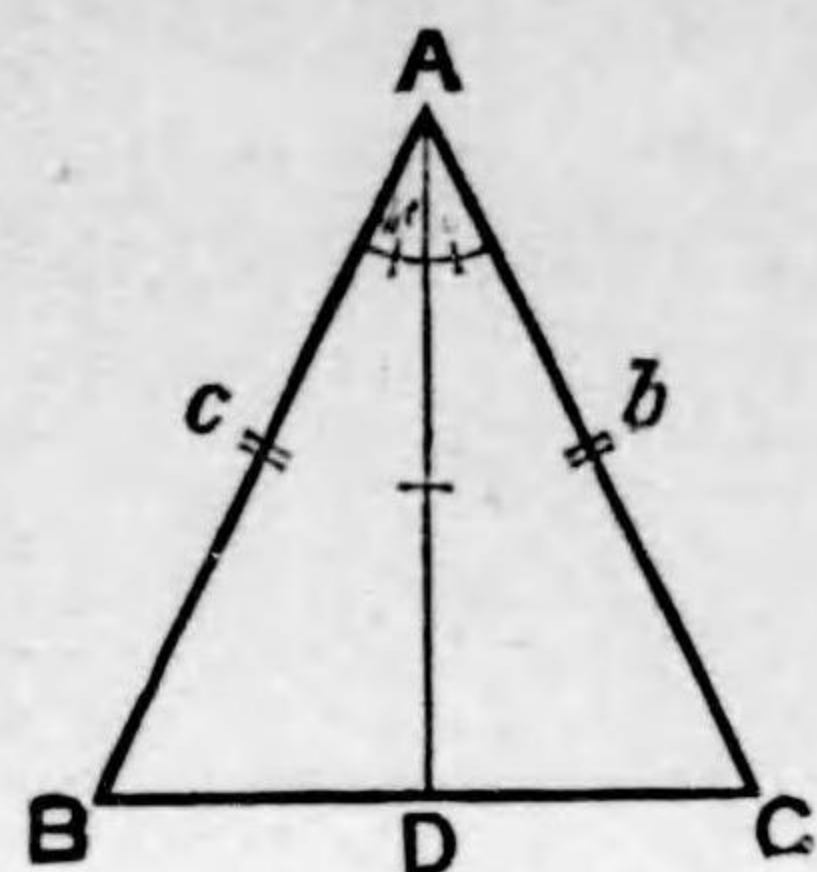


更ニ歩ミ續ケテ  $Q$  ニ至リ,  $OP = PQ$  ナラシムベシ。

次ニ,  $OQ$  ニ直角ニ  $R$  ニ至リ,  $T, P, R$  ガ一直線ニ見ユル位置ニ達シタリトスレバ,  $QR$  ハ求ムル河幅ナリ。

問題 29. 三角形ノ一ツノ角ノ二等分線ガ對邊ニ垂線ナルトキハ, 此ノ三角形ハ二等邊三角形ナリ。

42. 定理十 二等邊三角形ノ二ツノ底角ハ相等シ。



假設  $\triangle ABC$  = 於テ

$$b=c$$

終結

$$\angle B = \angle C$$

證明 頂角 A ノ二等分線ヲ AD トスレバ, 二邊及ビ其ノ夾角相等シキ故

$$\triangle ADB \equiv \triangle ADC$$

∴

$$\angle B = \angle C$$

系 等邊三角形ノ三ツノ角ハ相等シ。

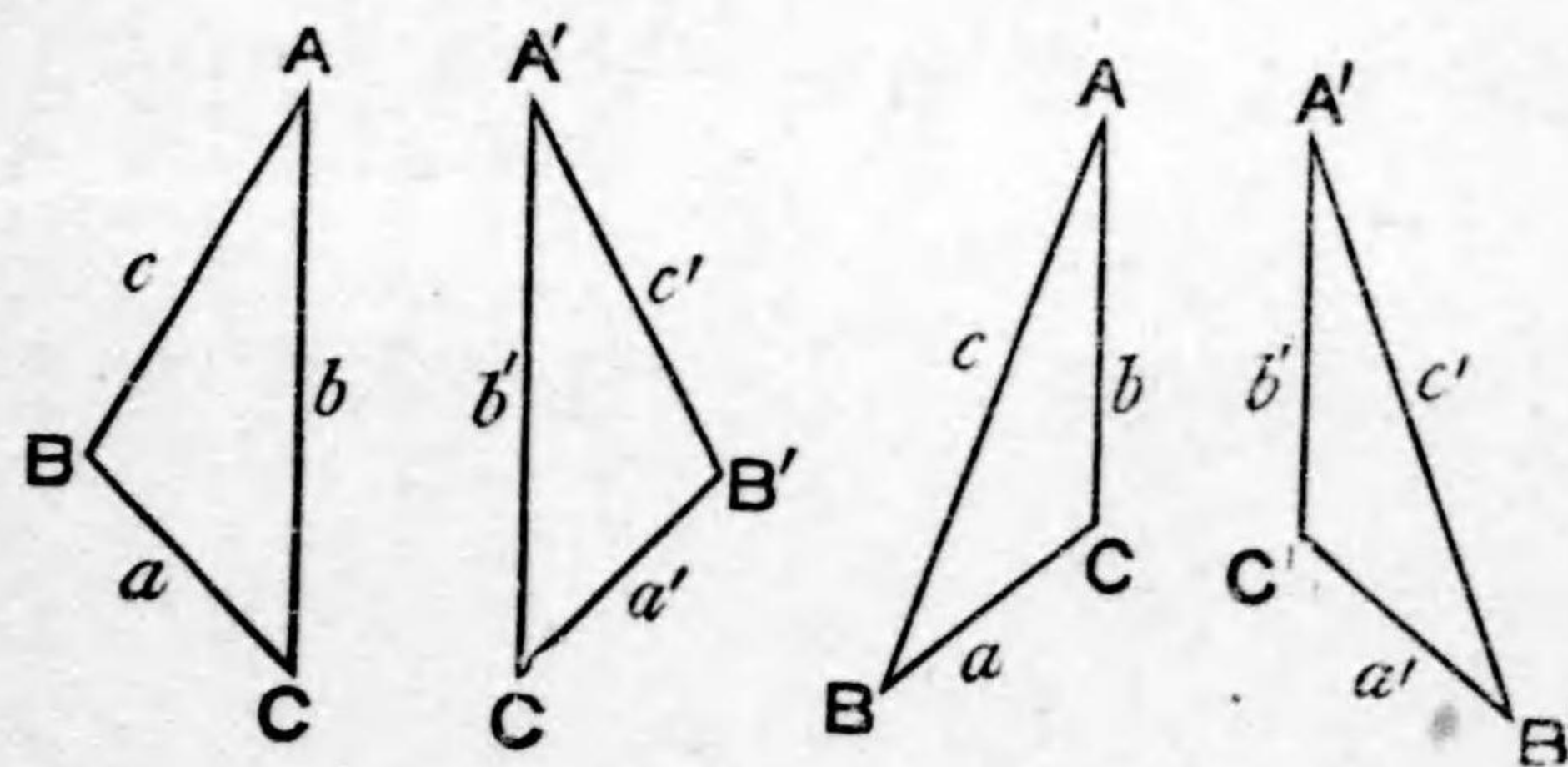
問題 30. 二等邊三角形ノ頂角ガ底角ノ  $\frac{4}{7}$  ナルトキ, 底角ノ大サ如何。

問題 31. 二等邊三角形ノ頂角ノ二等分線ハ底ニ直角ニ交リ之ヲ二等分ス。

問題 32. 同底上ニ立ツ處ノ二ツノ二等邊三角形ノ頂點ヲ結ブ直線ハ各ノ頂角ヲ二等分ス。

問題 33. 二等邊三角形ノ頂角ニ隣ル外角ノ二等分線ハ底ニ平行ス。

43. 定理十一 一ツノ三角形ノ三邊ガ夫々他ノ一ツノ三角形ノ三邊ニ等シケレバ, 二ツノ三角形ハ合同ナリ。



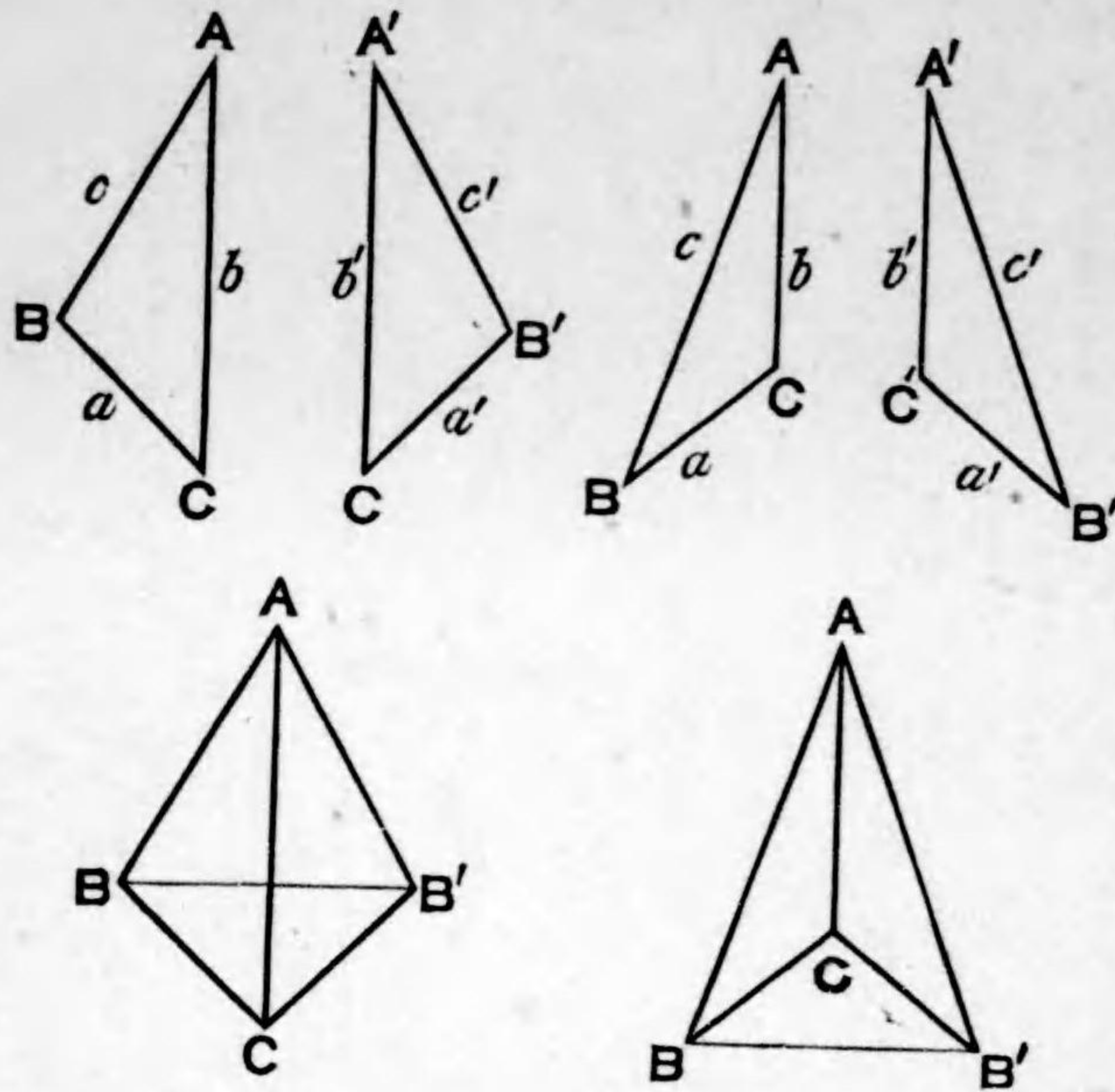
假設  $\triangle ABC$  ト  $\triangle A'B'C'$  ト = 於テ

$$a=a', b=b', c=c'$$

終結

$$\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$$

證明 圖ノ如ク並ベ  $BB'$  ヲ結ブ。然ラバ二



ツノ二等邊三角形  $BAB'$ ,  $BCB'$  ヲ得。

故 =  $\angle ABB' = \angle AB'B$

$\angle CBB' = \angle CB'B$

$\therefore \angle ABC = \angle AB'C$

而シテ  $a = a'$   $c = c'$

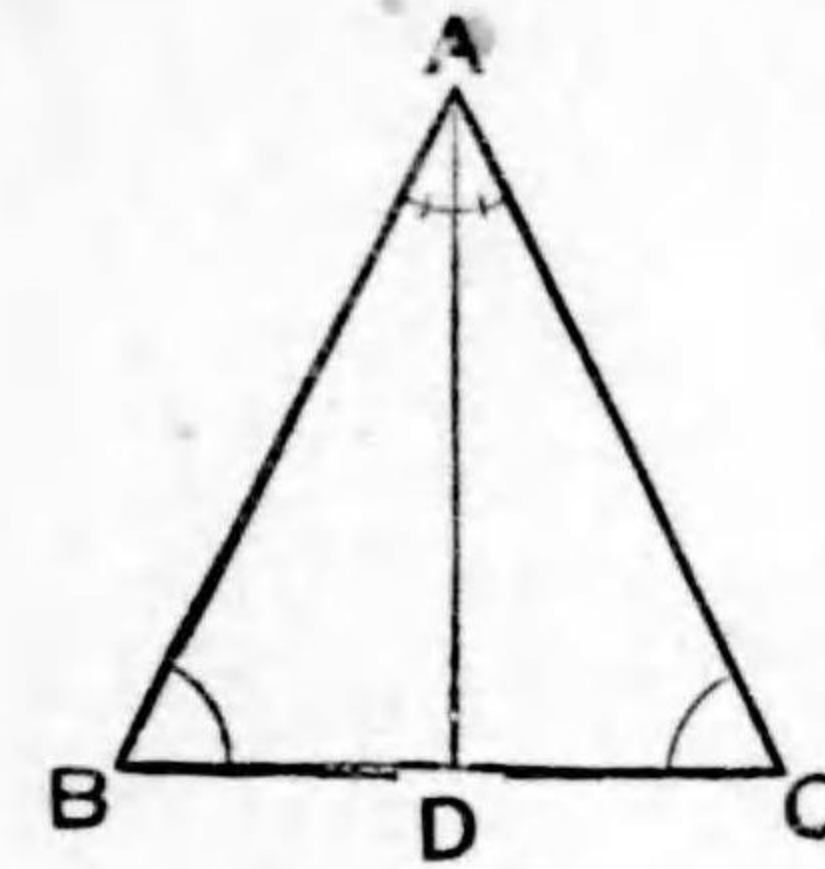
$\therefore \triangle ABC \equiv \triangle AB'C$

$\therefore \triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$

問題 34. 二等邊三角形ノ底邊ノ中點ヲ頂點 =

結フ直線ハ之ヲ合同ナルニツノ直角三角形ニ分ツ。

44. 定理十二 二ツノ角ノ相等シキ三角形ハ二等邊三角形ナリ。



假設  $\triangle ABC$  = 於テ

$\angle B = \angle C$

終結 此三角形ハ二等邊三角形ニシテ

$b = c$

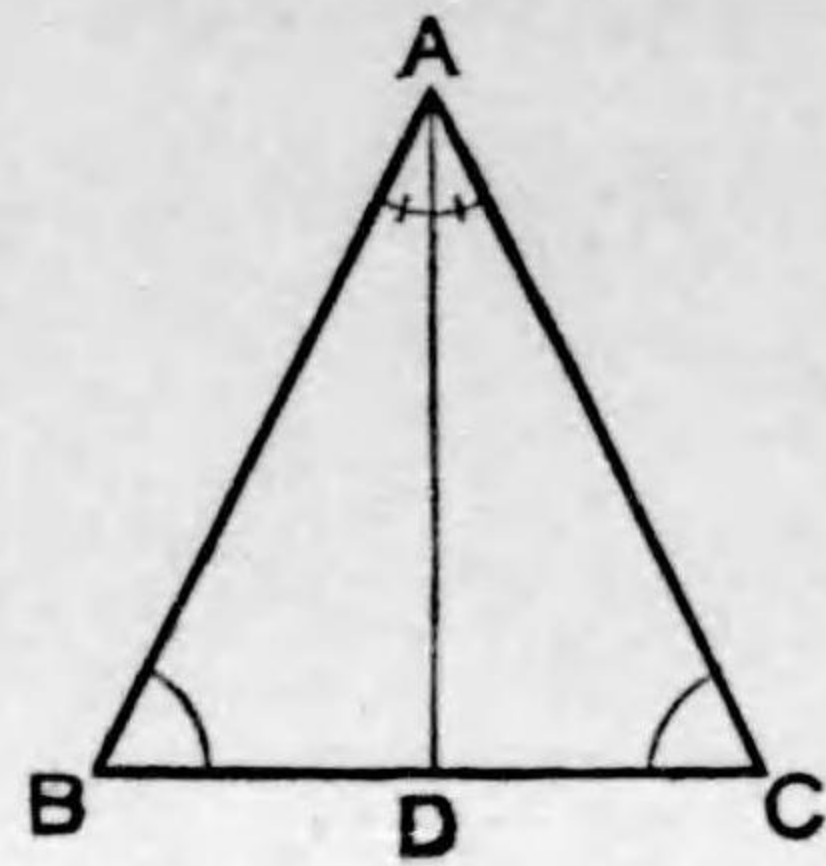
證明  $\angle A$  ノ二等分線ヲ  $AD$  トスレバ

$\angle BAD = \angle CAD$

又  $\angle B = \angle C$

$\therefore \angle ADB = \angle ADC$

而シテ  $AD$  ヲ共通トスル故



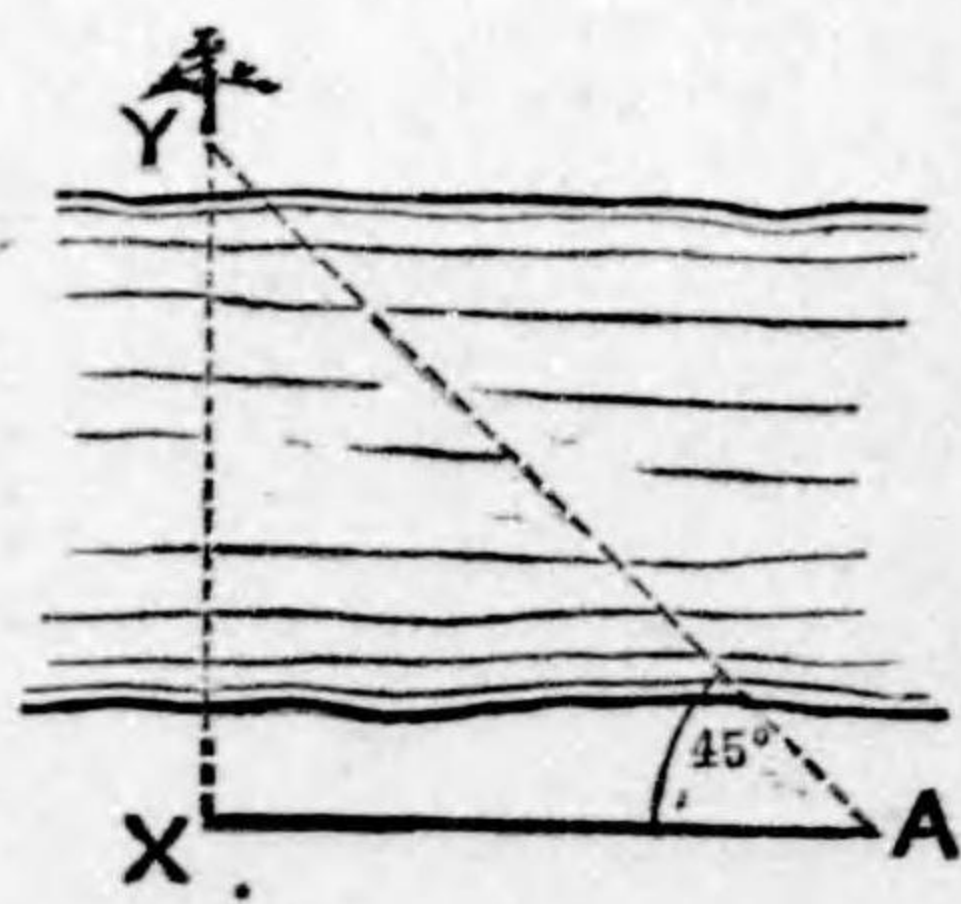
$$\triangle ABD \cong \triangle ACD$$

$$\therefore b = c$$

系 一ツノ三角形ノ三ツノ角ガ相等シケレバ  
其ノ三ツノ邊モ亦相等シ。

此ノ定理ヲ應用シテ間接ニ二點間ノ距離ヲ求  
ムル一ノ例ヲ示スベシ。

i 一點ニノミ近付キ得ベキ場合。 X ヲ近付

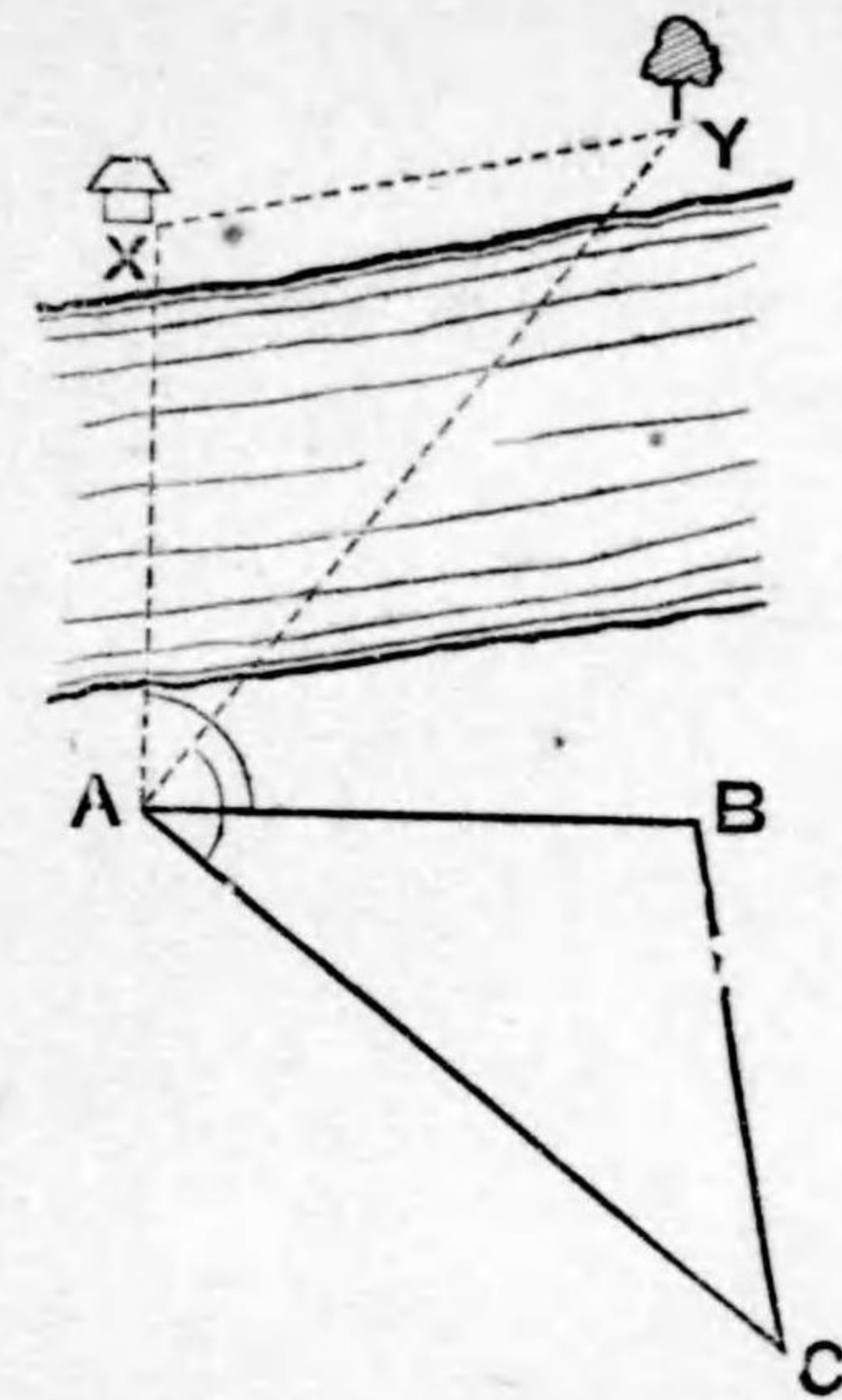


キ得ベキ點トシ, Y ヲ河向ヒノ一點トス。

XY ノ距離ヲ求ムルニハ XY ニ直角ナル方向

ニ向テ進ミ,  $\angle XAY = 45^\circ$  ナルニ至リテ止ルベシ。  
然ラバ AX ハ求ムル距離 XY ニ等シ。

ii 二點共ニ近付クヲ得ザル場合。 X, Y 共ニ  
河向ヒニ在リトス。



先ヅ i ノ方法ニヨリ  $AX = AB, AY = AC$  ナル二  
點 B, C ヲ定ムベシ。然ラバ  $\triangle AXY$  ト  $\triangle ABC$   
トハ二邊ト夾角相等シキヲ以テ合同ナリ。從ツ  
テ BC ハ求ムル距離 XY ニ等シ。

問題 35. 二等邊三角形ノ兩底角ノ二等分線ノ交點ヲ頂點ニ結ブ直線ハ、頂角ヲ二等分ス。

問題 36.  $\triangle ABC$ ニ於テ  $\angle B=30^\circ$ ,  $\angle C=90^\circ$ ナルトキ  $\angle A$ ノ大サ如何。又  $b=12$ 尺ナルトキ  $c$ ノ長サ如何。

問題 37.  $\triangle ABC$ ノ二角  $B$  及  $C$ ノ二等分線ノ交點ヲ  $P$ トス。  $P$ ヲ通り  $BC$ ニ平行ナル直線ガ  $AB$  及  $AC$ ト夫々  $X, Y$ ニ於テ交ルトキハ

$$XY = BX + CY$$

問題 38. 定理十ト定理十二トハ如何ナル關係アルカ。

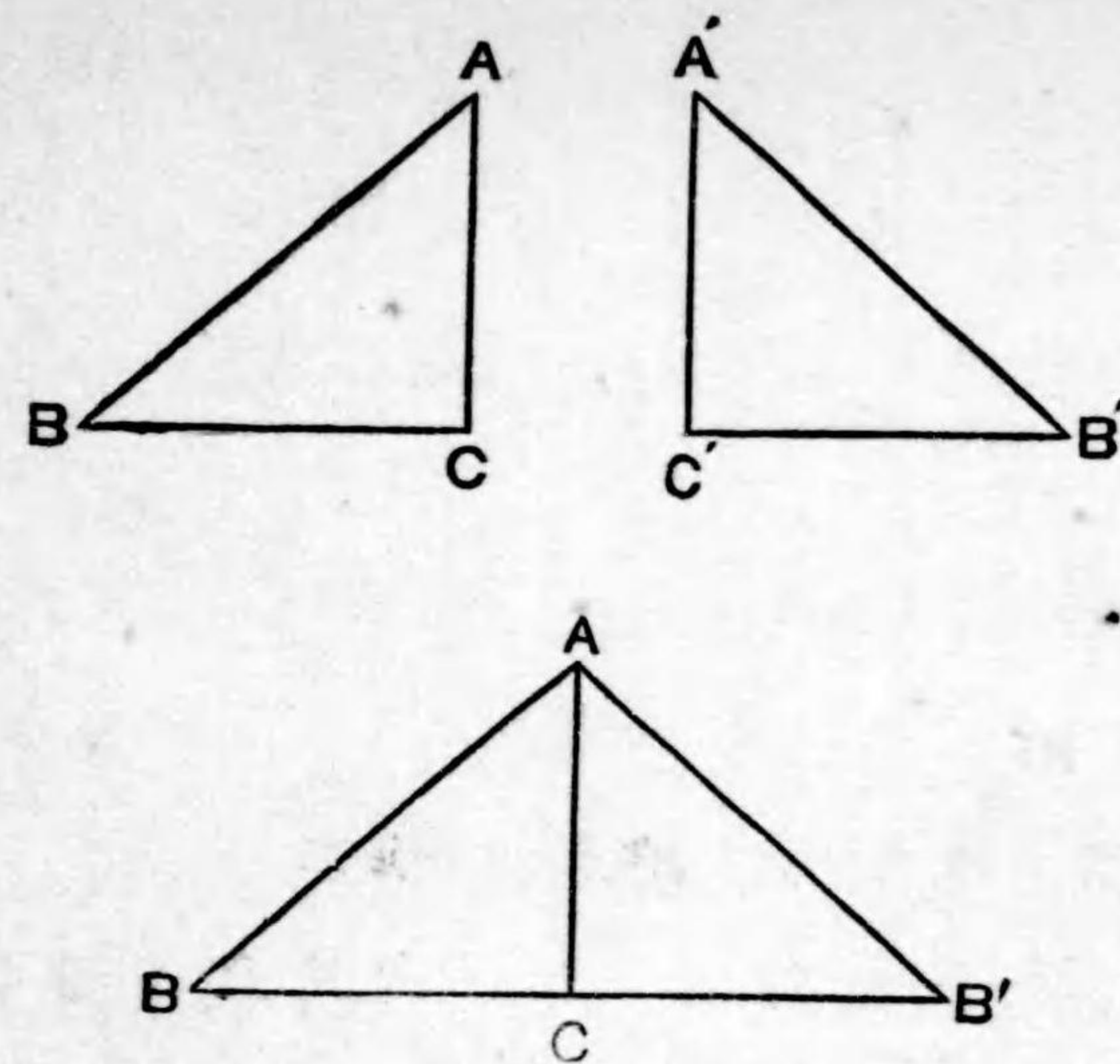
45. 定理十三 二ツノ直角三角形ハ次ノ場合ニ合同ナリ。

第一 一邊及ビ其邊ノ一端ニ於ケル一銳角夫々相等シキトキ。

此一邊ハ斜邊ニテモ他ノ邊ニテモ可ナリ定理七及ビ定理九ニヨリテ明ナリ。

第二 二邊夫々相等シキトキ。

直角ヲ夾ム二邊ナルトキハ定理八ニヨリ明ナリ。斜邊及ビ他ノ一邊ナルトキハ次ノ如シ。



假設 此ノ二ツノ直角三角形ニ於テ  
 $AB = A'B', AC = A'C'$

終結  $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$

證明 圖ノ如ク此ノ二ツノ三角形ヲ並ブルトキハ、兩三角形ニ於テ  $\angle C$  及ビ  $\angle C'$ ハ直角ナルヲ以テ、 $BCB'$ ハ一直線ヲナシ、 $ABB'$ ナル二等邊三角形ヲ得。

$\therefore \angle B = \angle B'$

故ニ第一ノ場合ニ歸着スルヲ以テ合同ナリ。

問題 39. 相交ハルニツノ直線ハ其ノ夾ム角ノ二等分線上ノ點ヨリ等シキ距離ニ在リ。

問題 40. 三角形ノニツノ頂點ヨリ對邊ヘ下セル垂線ガ相等シケレバ、其ノ三角形ハ二等邊三角形ナリ。

問題 41. 三角形ノ三ツノ角ノ二等分線ハ各邊ヨリ等距離ナル一點ニ會ス。

此ノ點ヲ三角形ノ**内心**ト稱ス。

問題 42. 三角形ノ一ツノ内角及ビ他ノニツノ角ノ外角ノ二等分線ハ、各邊ヨリ等距離ナル一點ニ會ス。

此ノ點ヲ三角形ノ**傍心**ト稱ス。

46. 一ツノ直線ヲ折目トシテ一ツノ部分ヲ折返セバ、全ク他ノ部分ノ上ニ重リ合フ圖形ハ、其ノ直線ニ關シテ

**對稱**ナリト稱ス。其ノ直線ヲ**對稱ノ軸**ト稱シ、其ノ直線ハ其ノ圖形ヲ**對稱ニ分ツ**ト稱ス。

一ツノ直線ヲ折目トシテ折返セバ一ツノ圖形ガ他ノ一ツノ圖形ト重ナルトキハ其ニツノ圖形ヲ其ノ直線ニ關シテ**對稱**ナリト云ヒ其直線ヲ**對稱ノ軸**ト稱ス。

ニツノ點ハ之ヲ結ブ直線ノ中點ニ關シテ**對稱**ナリト云ヒ其中點ヲ**對稱ノ中心**ト稱ス。

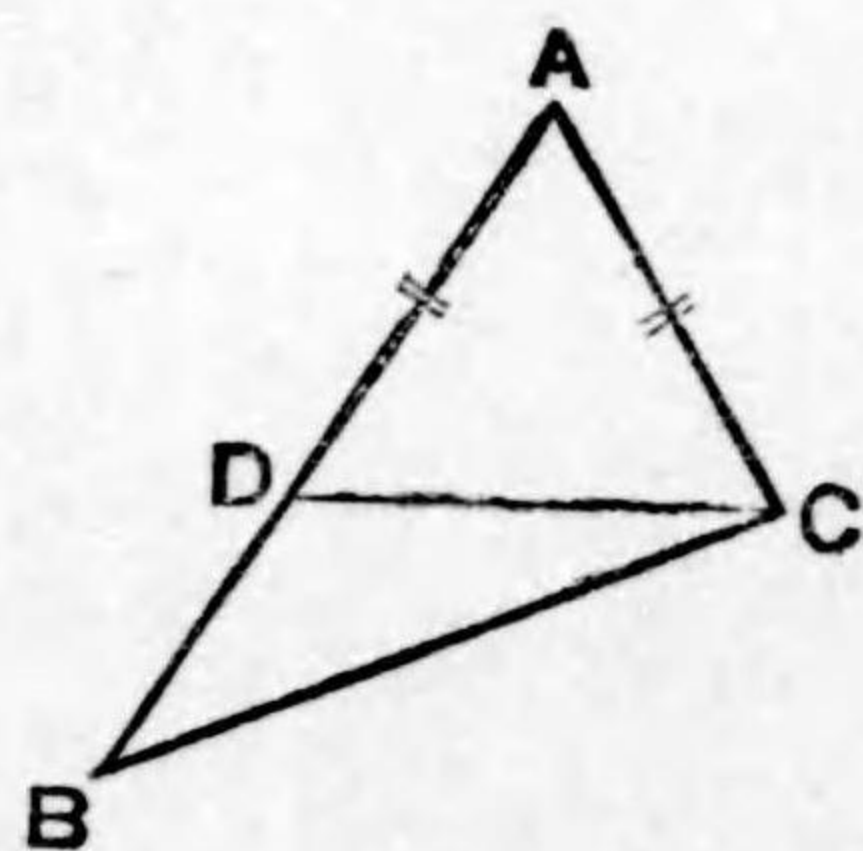
ニツノ圖形或ハ一ツノ圖形ニ於テ其各對應ノ點ガ總テ一ツノ點ニ關シテ**對稱**ナルトキハ其ニツノ圖形或ハ其一ツノ圖形ヲ其點ニ關シテ**對稱**ナリト云ヒ其點ヲ**對稱ノ中心**ト稱ス。



問題 43. 二等邊三角形ハ頂點ヨリ底ニ下シタル垂線ヲ軸トシテ對稱ニ分タル。

問題 44. A ト A', B ト B', C ト C' ガ何レモ點 O ニ關シテ對稱ナラバ  $\triangle ABC$  ト  $\triangle A'B'C'$  トモ亦點 O ニ關シテ對稱ナリ。

47. 定理十四 三角形ノ二ツノ邊ガ相等シカラザルトキハ、大邊ニ對スル角ガ小邊ニ對スル角ヨリモ大ナリ。



假設  $\triangle ABC$  ニ於テ

$$AB > AC$$

終結  $\angle ACB > \angle B$

證明 AB 邊上ニ AC ト等シク AD ヲ取リ C,

D ヲ結ブ。然ラバ  $\triangle ADC$  ハ二等邊三角形ナルヲ以テ

$$\angle ADC = \angle ACD$$

又  $\angle ACD$  ハ  $\triangle BCD$  ノ外角ナルヲ以テ

$$\angle ADC > \angle B$$

故ニ  $\angle ACD$  ヨリ大ナル  $\angle ACB$  ハ尙更  $\angle B$  ヨリ大ナリ。

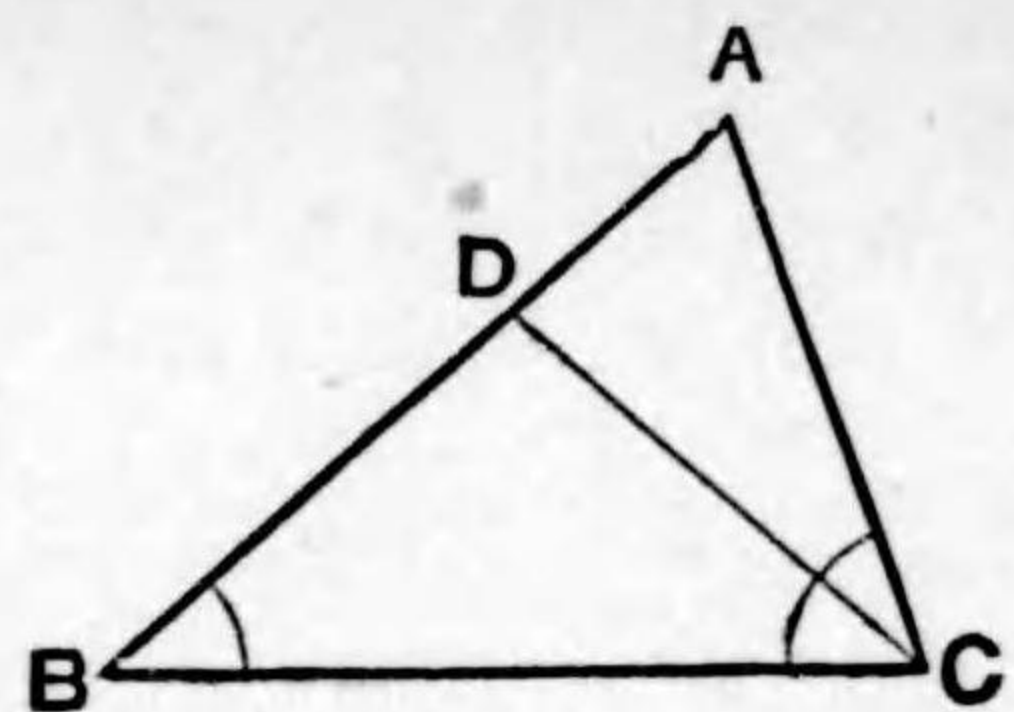
問題 45. 三角形ノ一ツノ邊ガ他ノ邊ヨリ小ナラバ、小ナル邊ニ對スル角ハ必ズ銳角ナリ。

問題 46.  $\triangle ABC$  ニ於テ AC ハ AB ヨリモ小ナラズトス。邊 BC 上ノ一點 D ヲ A ニ結ベバ  $\angle ADB$ ,  $\angle ADC$  ハイヅレモ  $\angle ACB$  ヨリ大ナリ。

48. 三角形ノ一ツノ頂點ヨリ對邊ノ中點ニ引ケル直線ヲ中線ト稱ス。

問題 47. 三角形ノ一ツノ中線ガ相隣レル邊トナス角ノ中ニテ、小ナル邊トナス角ハ大ナル邊トナス角ヨリモ大ナリ。

49. 定理十五 三角形ノ二ツノ角  
ガ相等シカラザルトキハ、大角ニ對ス  
ル邊ハ小角ニ對スル邊ヨリモ大ナリ。



假設  $\triangle ABC$ ニ於テ

$$\angle ACB > \angle B$$

終結

$$c > b$$

證明 Cヨリ  $\angle B$ ニ等シキ角ヲ作リテ CDヲ  
引クトキハ、 $\triangle DBC$ ハ二等邊三角形ナルヲ以テ

$$BD = CD$$

然ルニ

$$AD + DC > b$$

∴

$$AD + DB > b$$

∴

$$c > b$$

問題 48. 直角三角形ノ斜邊ハ他ノイヅレノ邊  
ヨリモ大ナリ。

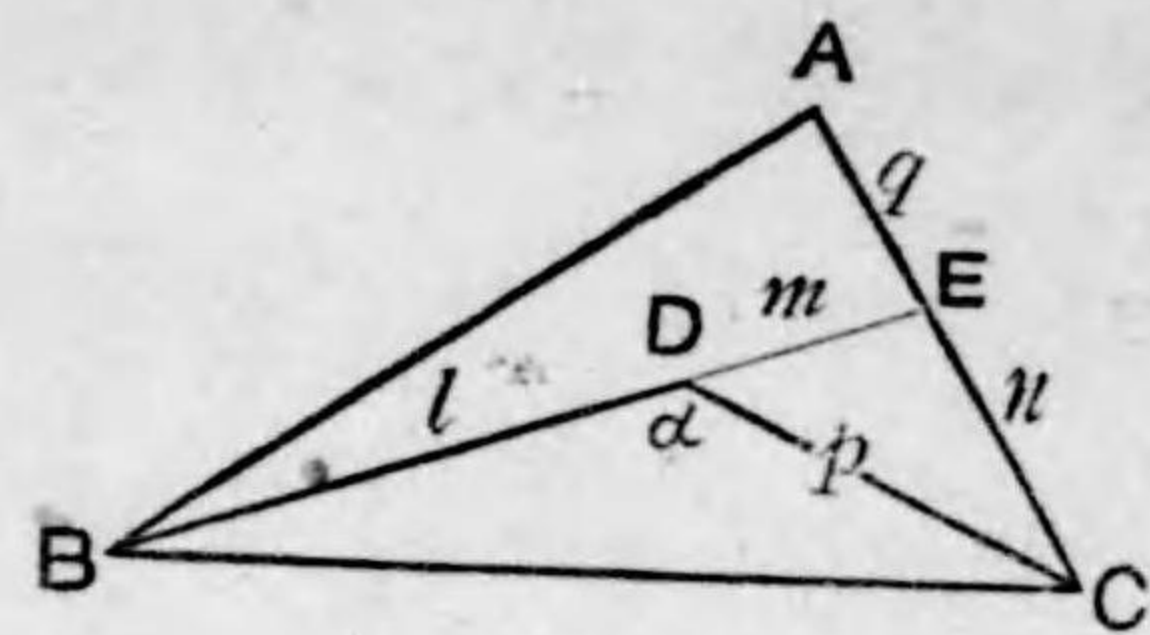
問題 49. 一點ヨリ一直線ニ引ケル總ベテノ直  
線中、垂線ハ最モ短シ。

問題 50. 一點ヨリ一直線ニ引ケル直線中、垂線  
ト等シキ角ヲナスモノハ相等シ。

問題 51. 一點ヨリ一直線ニ引ケル直線中、垂線  
ト大ナル角ヲナスモノハ之ト小ナル角ヲナスモ  
ノヨリモ大ナリ。

問題 52. 等邊三角形 ABC 内ノ一點ヲ O トス  
レバ、OA, OB, OC ノイヅレカニツノ和ハ残ノ  
一ツヨリモ大ナリ。

50. 定理十六 三角形ノ内部ニ一  
點ヲ取り之ヨリ一ツノ邊ノ兩端ニ直  
線ヲ引ケバ、此ニツノ直線ノ和ハ他ノ  
二邊ノ和ヨリ小ニシテ之ヨリ大ナル  
角ヲ夾ム。



假設  $\triangle ABC$  の内部に D 點ヲトリ, DB, DC  
ヲ結ブ。

終結 1.  $c+b > l+p$

終結 2.  $\angle \alpha > \angle A$

證明 BD ヲ延長シ AC ト E に於テ交ラシム。  
然ラバ

$$c+q > l+m$$

又  $n+m > p$

$\therefore c+q+n+m > l+m+p$

$\therefore c+b > l+p$

次ニ  $\angle DEC > \angle A$

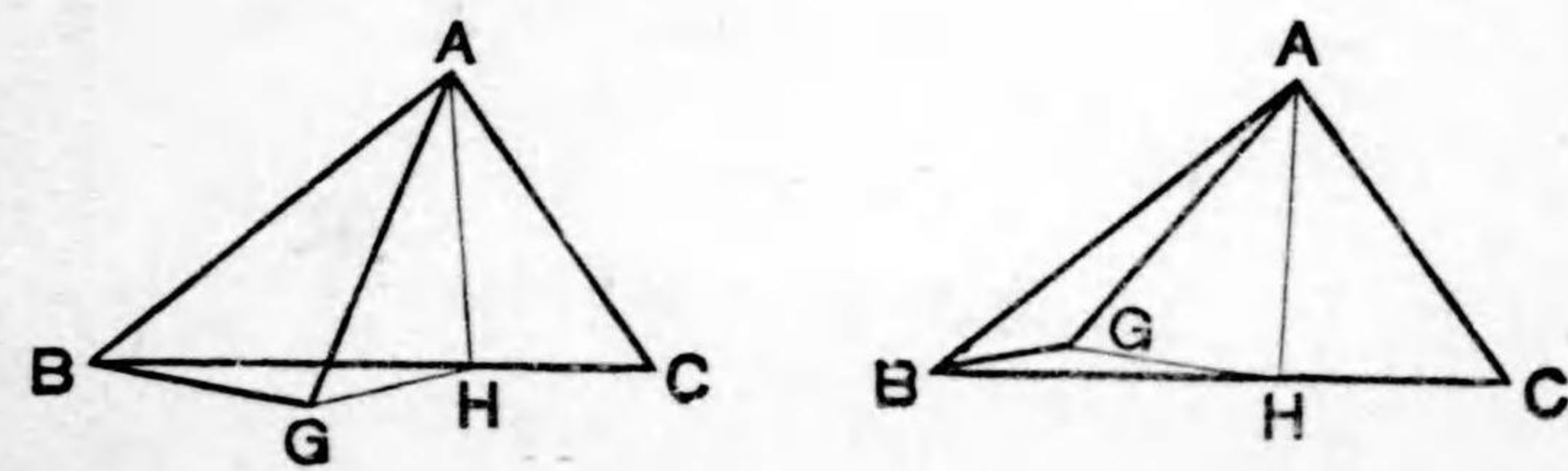
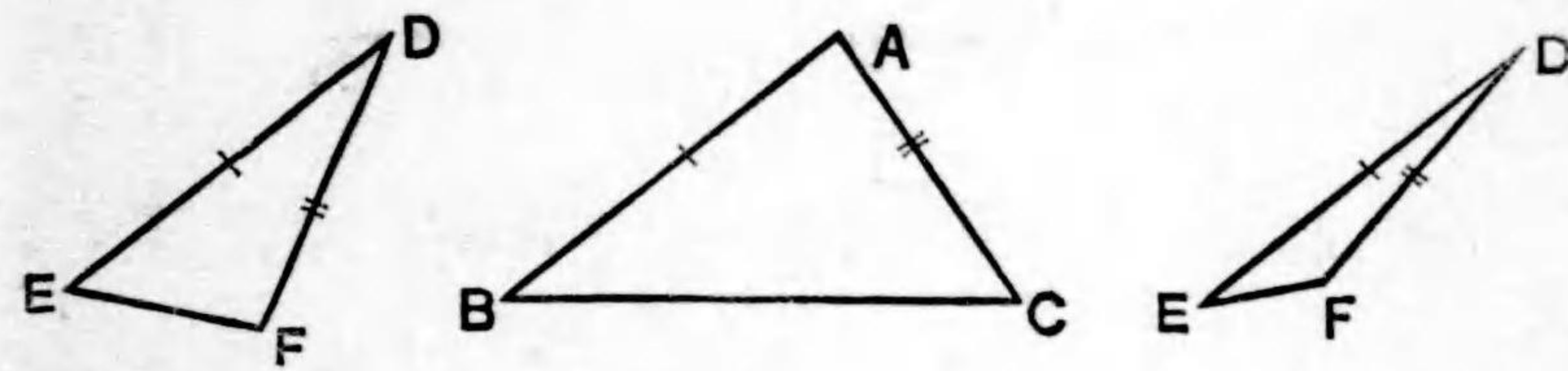
又  $\angle \alpha > \angle DEC$

$\therefore \angle \alpha > \angle A$

問題 53. 三角形 ABC 内ノ一點ヲ D トスレバ

$$2(AD+BD+CD) > a+b+c > AD+BD+CD.$$

51. 定理十七 一ツノ三角形ノ二  
邊ガ夫々他ノ一ツノ三角形ノ二邊ニ  
等シク,而シテ此ノ二邊ノ夾ム角ガ相  
等シカラザレバ,角ノ大ナルモノノ第  
三邊ハ他ヨリモ大ナリ。



假設  $\triangle ABC$  ト  $\triangle DEF$  トニ於テ

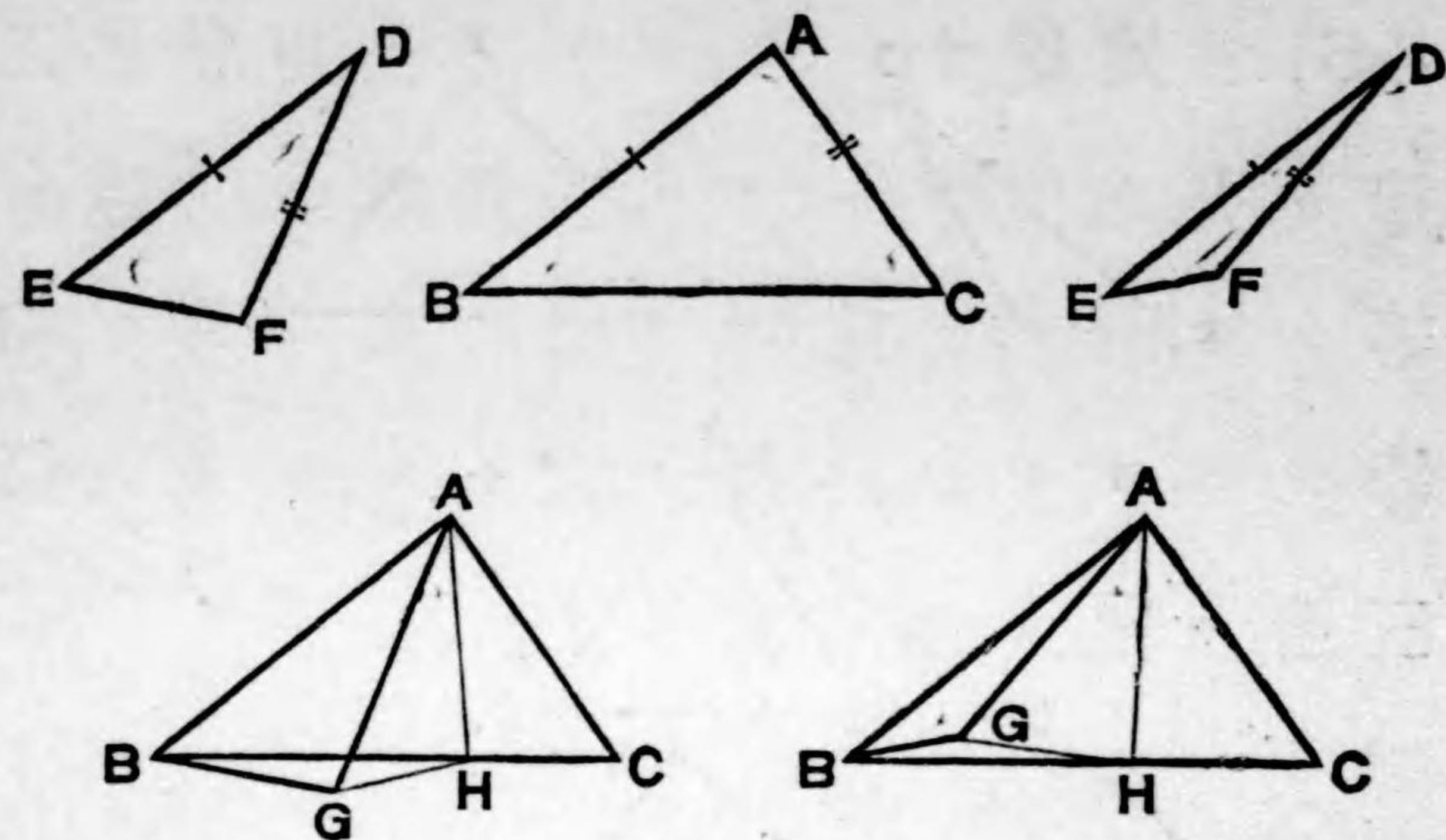
$$AB=DE$$

$$AC=DF$$

$$\angle A > \angle D$$

終結  $BC > EF$

證明 DE ヲ AB 上ニ置キ,  $\triangle DEF$  ヲ  $\triangle ABC$



ニ重ヌルトキハ、 $\triangle DEF$  ハ  $\triangle ABG$  ノ位置ヲ取ルベシ。

$\angle GAC$  ノ二等分線ガ  $BC$  ト  $H$  ニ於テ交ルトシ  $H, G$  ヲ結ブ。

然ラバ二邊夾角相等シキヲ以テ

$$\triangle AHG \equiv \triangle AHC$$

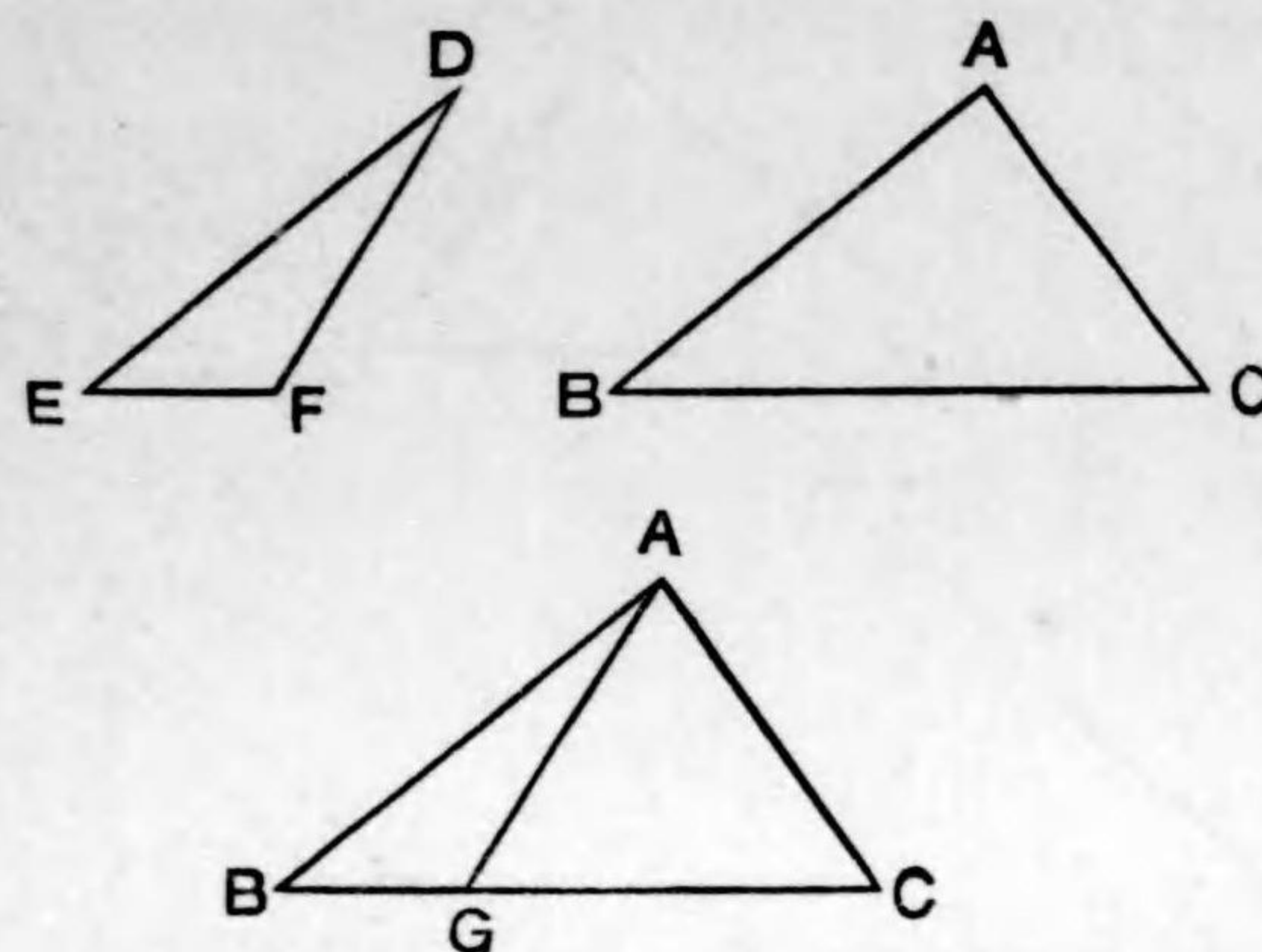
$$\therefore GH = CH$$

$$\text{然ルニ } BH + HG > BG$$

$$\therefore BH + HC > BG$$

$$\therefore BC < EF$$

若シ  $\triangle DEF$  ヲ  $\triangle ABC$  ニ重ヌルトキ次ノ圖ノ如ク  $G$  ガ  $BC$  ノ上ニ落ツルトキハ



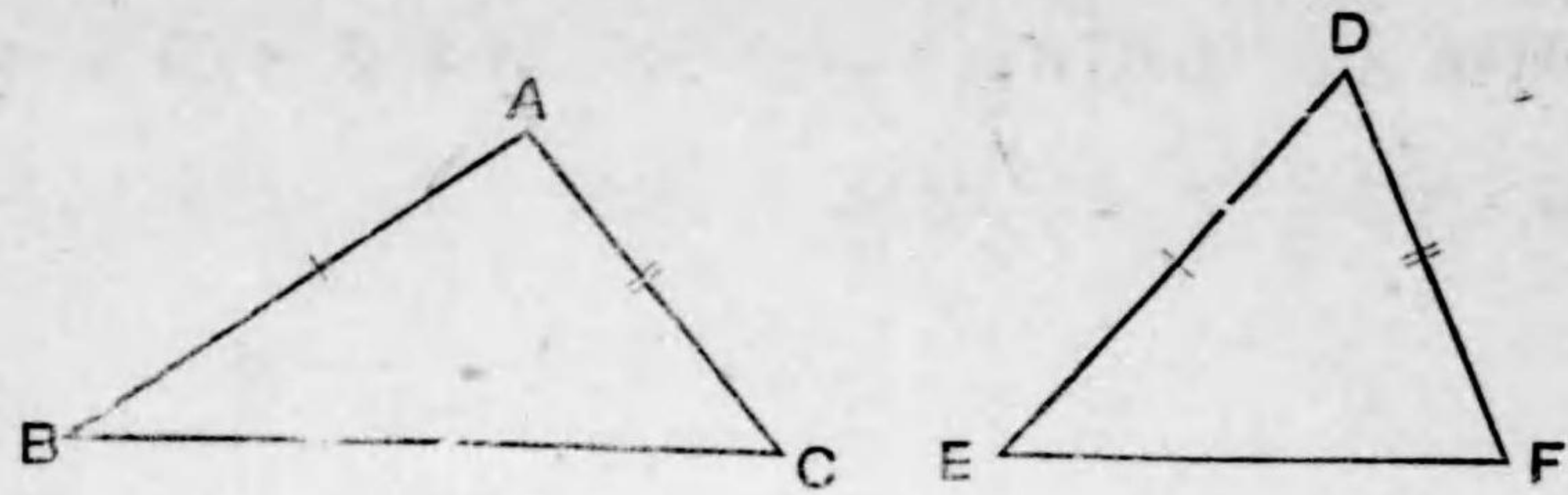
$$BC > BG$$

$\therefore$

$$BC > EF$$

問題 54.  $\triangle ABC$  ノ一邊  $BC$  ノ中點ヲ  $D$  トス。若シ  $\angle ADB > 90^\circ$  ナラバ  $AB > AC$  ナリ。

52. 定理十八 一ツノ三角形ノ二邊ガ夫々他ノ一ツノ三角形ノ二邊ニ等シク、第三邊ガ相等シカラザレバ第三邊ノ大ナルモノニ對スル角ハ他ヨリモ大ナリ。



假設  $\triangle ABC, \triangle DEF$  に於テ

$$AB = DE$$

$$AC = DF$$

$$BC > EF$$

終結  $\angle A > \angle D$

證明 若シ  $\angle A \neq \angle D$  ナラバ

$\angle A = \angle D$  ナルカ,

或ハ  $\angle A < \angle D$  ナラザルベカラズ。

$\angle A = \angle D$  トスレバ

定理八ニヨリ  $BC = EF$

故ニ  $\angle A = \angle D$  ナルコトナシ。

$\angle A < \angle D$  トスレバ

定理十七ニヨリ  $BC < EF$

故ニ  $\angle A < \angle D$  ナルコトナシ

$\therefore \angle A > \angle D$

問題 55.  $\triangle ABC$  ノ一邊  $BC$  ノ中點ヲ  $D$  トス。  
 $AB > AC$  ナラバ  $\angle ADB$  ハ鈍角ナリ。

## 第五章 直線形

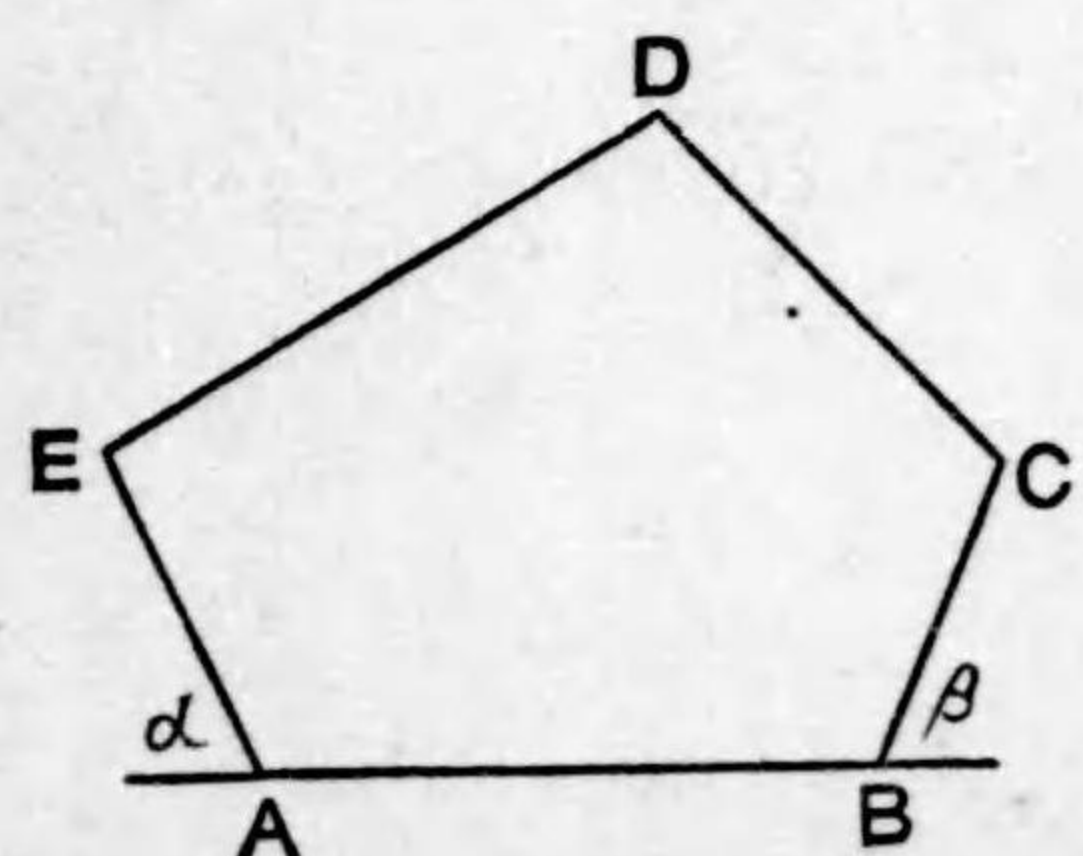
53. 直線形トハ數多ノ直線ヲ以テ圍ミタル平面ノ一部分ナリ。

直線形ハ又多角形トモ稱ス。

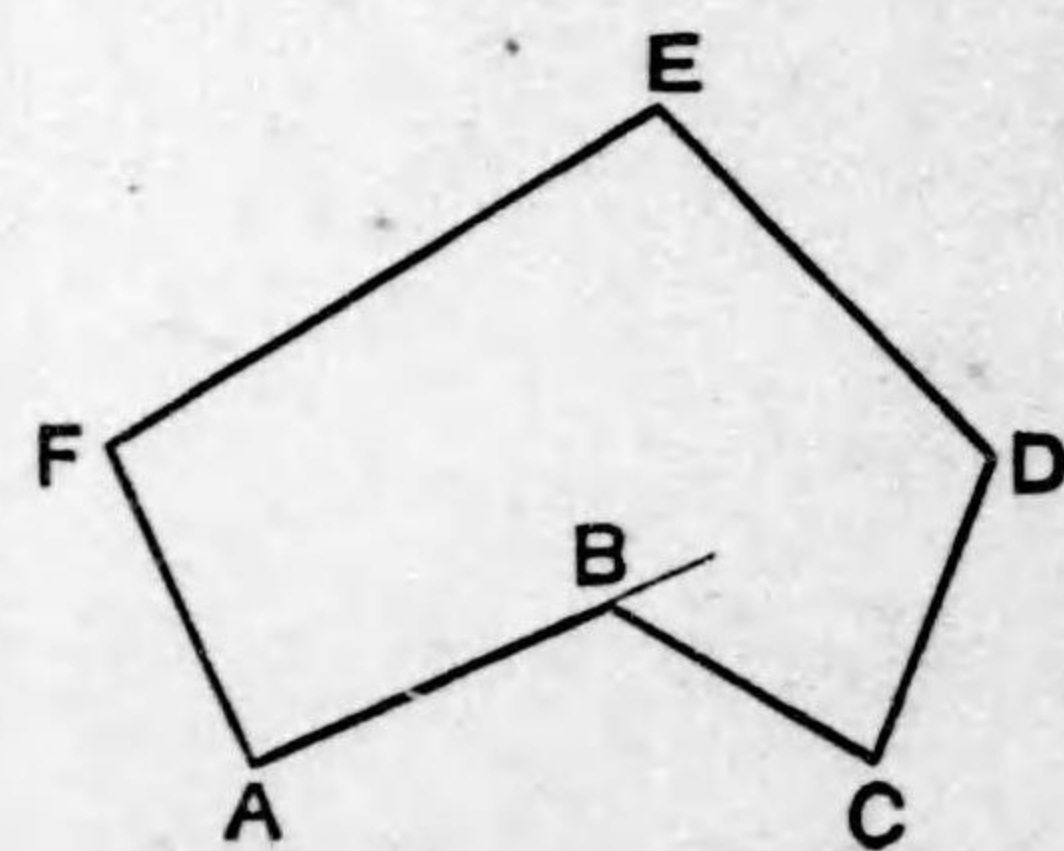
三角形ハ多角形ノ最モ簡單ナルモノナリ。

多角形ヲ圍ム直線ヲ邊ト稱ス。

頂點トハ多角形ノ連續セル二邊ノ夾ム角ノ頂點ノコトナリ。



第一圖



第二圖

凸多角形トハイヅレノ邊ヲ延長スルモ形内ニ入ラザルモノナリ。例ヘバ第一圖ノ如シ。

イヅレカノ邊ヲ延長スレバ形内ニ入ルモノハ凹多角形ト稱ス。例ヘバ第二圖ノ如シ。

凹多角形トイフ名稱アレドモタゞ多角形ト云ヘバ常ニ凸多角形ヲ示スモノト知ルベシ。

連續セル二邊ノ夾ム角ニシテ形内ニアルモノヲ内角ト稱ス。

一邊ト之ニ隣レル邊ノ延長トニテ夾ム角ヲ外角ト稱ス。例ヘバ $\angle\alpha$ ,  $\angle\beta$ ノ如シ。

相隣ラザル任意ノ二ツノ頂點ヲ結ブ直線ヲ對角線ト稱ス。

各邊相等シク、各角相等シキ多角形  
ヲ**正多角形**ト稱ス。

四邊ヨリナル多角形ヲ**四邊形**或ハ  
**四角形**、五邊ヨリナル多角形ヲ**五邊形**  
或ハ**五角形**ト稱ス。其ノ他之ニ準ズ。

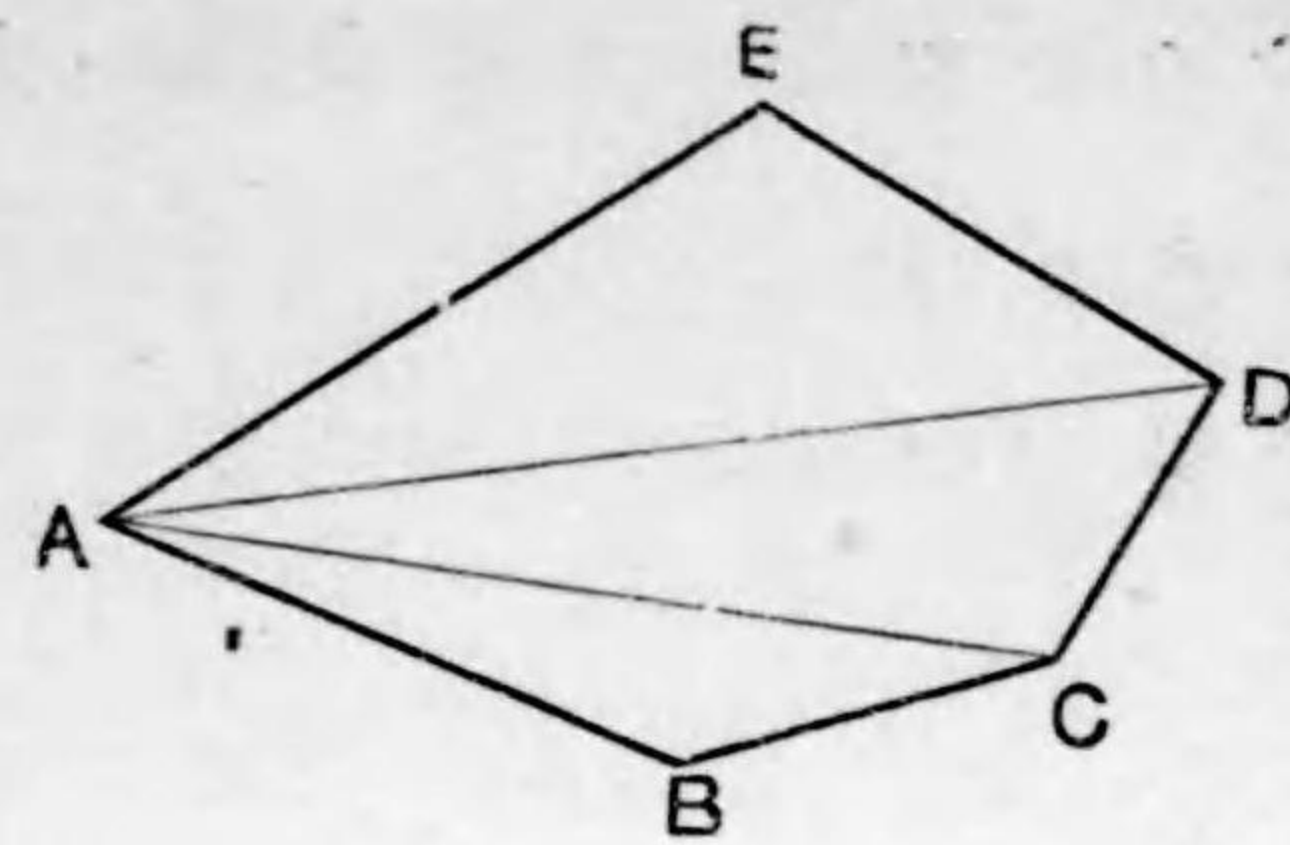
問題 56. 六邊形ノ一ツノ頂點ヨリ出ヅル對角  
線ノ數ハ如何。

問題 57.  $n$  邊形ノ一ツノ頂點ヨリ出ヅル對角  
線ノ數ハ如何。

問題 58. 五邊形ニハ幾本ノ對角線アルカ。

問題 59.  $n$  邊形ノ凡テノ對角線ノ數ヲ求ム。

54. **定理十九** 多角形ノ内角ノ和  
ハ、邊數ノ二倍ヨリ四ヲ減ジタル數ニ  
テ直角ヲ倍セルモノニ等シ。



假設  $ABCD\dots\dots$ ヲ  $n$  邊形トス。

終結  $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \dots\dots = 90^\circ \times (2n - 4)$

證明 圖ノ如ク一ツノ頂點  $A$  ヨリ他ノ各頂點  
ニ直線ヲ引クトキハ、此ノ多角形ヲ邊數ヨリ二ツ  
少キ三角形ニ分ツ。

今邊數ヲ  $n$  トスレバ、三角形ノ數ハ  $n - 2$  ナリ。  
而シテ各三角形ノ内角ノ和ハ  $180^\circ$  ナルヲ以テ、多  
角形ノ内角ノ和ハ  $90^\circ \times (2n - 4)$  ナリ。

系 多角形ノ各邊ヲ順次ニ延長シテ得ルトコ  
ロノ外角ノ和ハ四直角ニ等シ。

問題 60. 四邊形ノ内角ノ和如何。

問題 61. 正六邊形ノ一ツノ内角ノ大サ如何。

問題 62. 正  $n$  邊形ノ一ツノ内角ノ大サ及ビ外  
角ノ大サ如何。

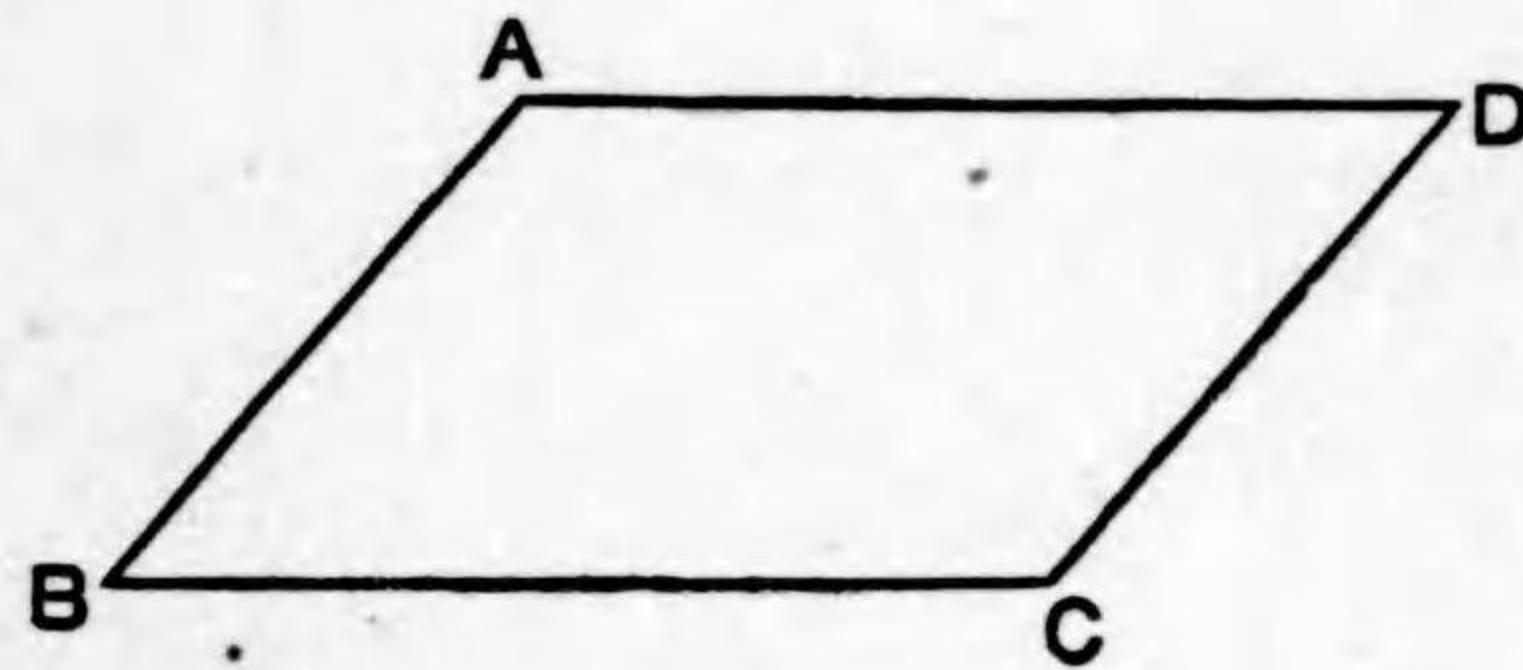
問題 63. 正多角形ノ一ツノ内角ノ大サ  $135^\circ$  ナルトキ、邊數ヲ求ム。

問題 64. 邊數ガ四ヨ大ナル正多角形ノ内角ハ必ズ鈍角ナリ。

## 第六章

## 平行四邊形

55. 平行四邊形トハ二双ノ對邊互ニ平行ナル四邊形ナリ。



ABCD ナル平行四邊形ハ之ヲ  $\square ABCD$  ト記ス。

或ハ略シテ相對スル處ノ角ノ頂點ノニツノ文字ヲ以テ之ヲ表スコトアリ。例ヘバ  $\square AC$  ノ如シ。

平行四邊形ノ四邊相等シキモノヲ菱形ト稱ス。

平行四邊形ノ各角ガ直角ナルモノヲ矩形ト稱ス。

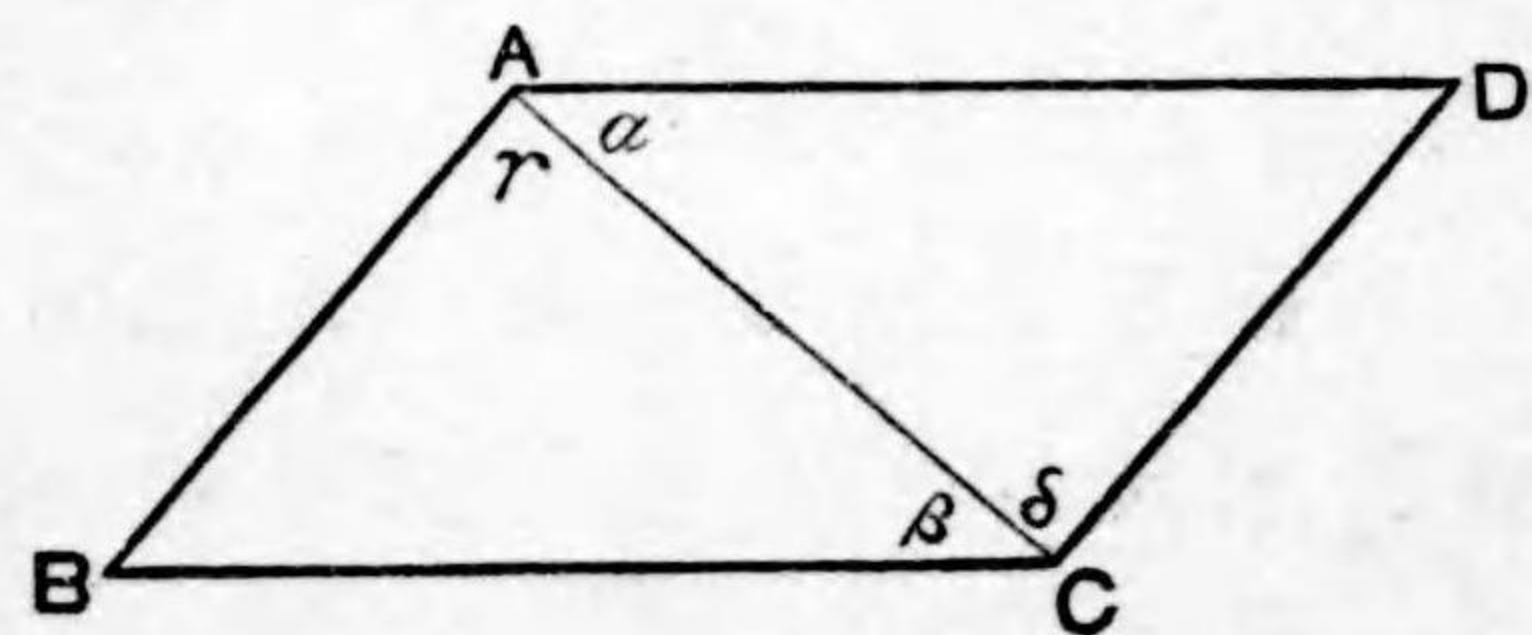


ABCD ナル矩形ヲ矩形 ABCD 或ハ時トシテ  
ハ之ヲ略シテ矩形 AC ト記ス。

ABCD ナル正方形ヲ正方形 ABCD 或ハ時ト  
シテハ之ヲ略シテ正方形 AC ト記ス。

矩形ノ四邊相等シキモノヲ**正方形**  
ト稱ス。

56. **定理二十** 平行四邊形ニ於テ  
各ノ對角線ハ之ヲ合同ナルニツノ三  
角形ニ分ツ。



**假設**  $\square ABCD$  ニ於テ對角線 AC ヲ引ク。

**終結**  $\triangle ABC \equiv \triangle ADC$

**證明**  $\angle \alpha = \angle \beta$

$\angle \gamma = \angle \delta$

而シテ AC ハ共通ナリ。

$\therefore \triangle ABC \equiv \triangle ADC$

BC 對角線ニ付キテモ同様ナリ。

系一 平行四邊形ノ相對スル邊ハ相對シ。

系二 平行四邊形ノ相對スル角ハ相等シ。

問題 65. 平行四邊形ノ相隣レルニツノ角ハ互  
ニ補角ナリ。

問題 66. 平行四邊形ノ一ツノ角ガ  $60^\circ$  ナルトキ,  
他ノ角ノ大サ如何。

問題 67. 平行四邊形ノ一ツノ角ガ直角ナラバ  
矩形ナリ。

問題 68. 平行四邊形ノ相隣レル二邊ガ相等シ  
ケレバ菱形ナリ。

問題 69. 平行四邊形ノ各ノ對角線ハ互ニ他ヲ  
二等分ス。

問題 70. 菱形ノ對角線ハ其ノ端ニ於ケル角ヲ  
二等分ス。

57. ニツノ平行線間ノ距離トハ、之  
= 垂直ナル直線ノ其ノ平行線ノ間ニ  
在ル部分ノ長サナリ。

問題 71. ニツノ平行線間ノ距離ハ何處ニ於テ  
モ相等シ。

58. 定理二十一 四邊形ガ平行四  
邊形ナル場合ハ次ノ如シ。

第一. 相對スル邊ガ各相等シキトキ。

第二. 相對スル角ガ各相等シキトキ。

第三. 相對スル一雙ノ邊ガ相等シク且平行  
ナルトキ。

第四. ニツノ對角線ガ互ニ二等分スルトキ。

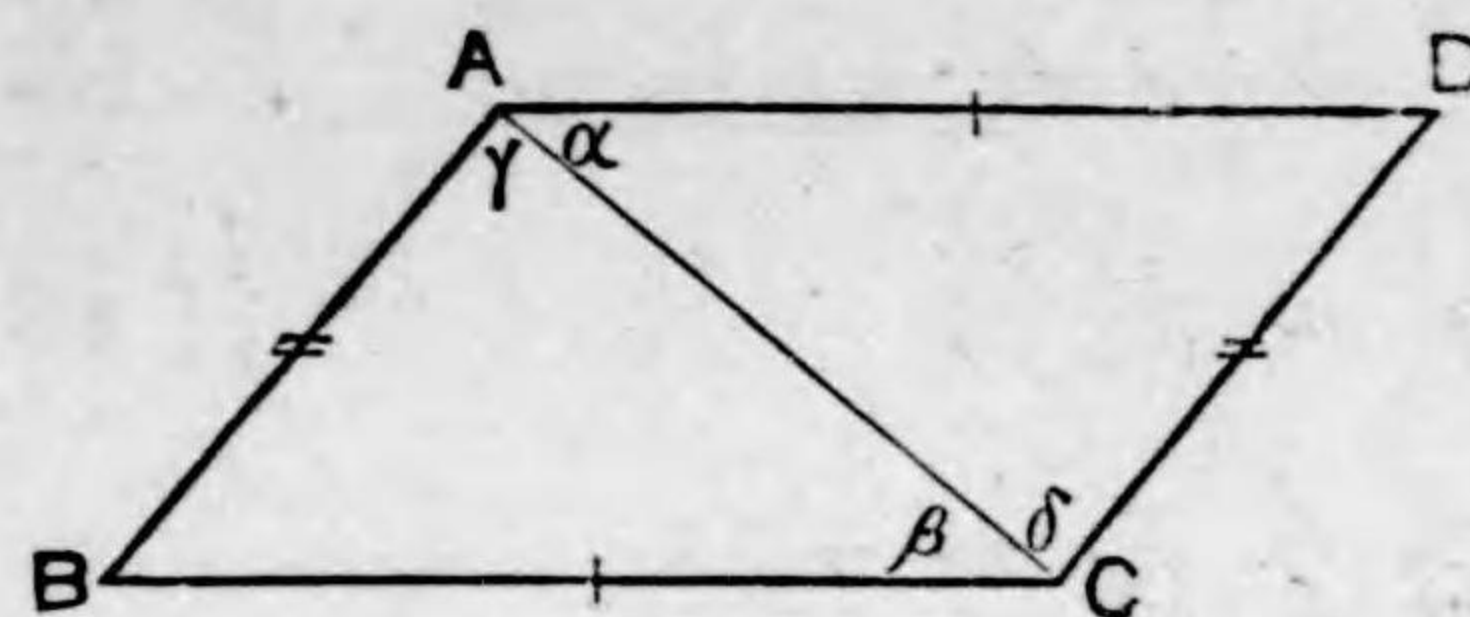
第一ノ場合。

假設 四邊形 ABCD = 於テ

$$AD = BC$$

$$AB = DC$$

終結 此ノ四邊形ハ平行四邊形ナリ。



證明

$$AD = BC$$

$$AB = DC$$

而シテ AC ハ共通ナリ。

$$\therefore \triangle ABC \equiv \triangle ADC$$

$$\therefore \angle \alpha = \angle \beta$$

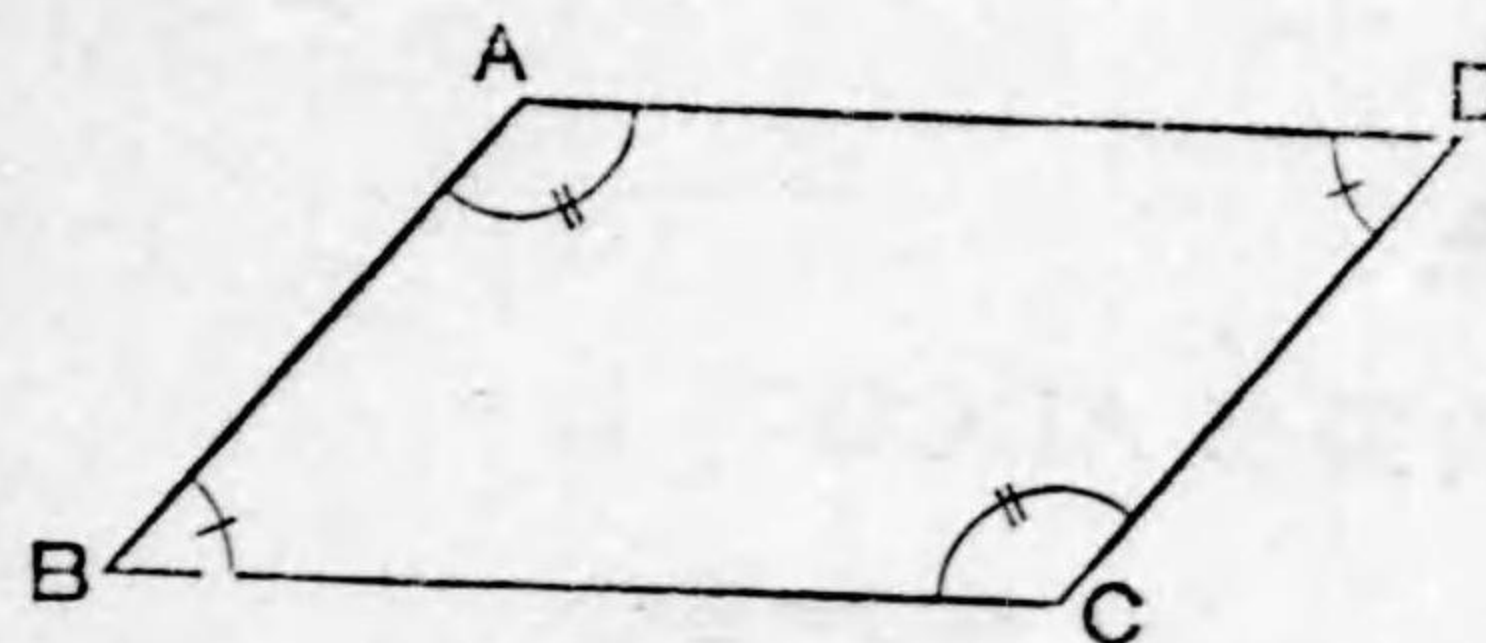
$$\angle \gamma = \angle \delta$$

$$\therefore AD \parallel BC$$

$$AB \parallel DC$$

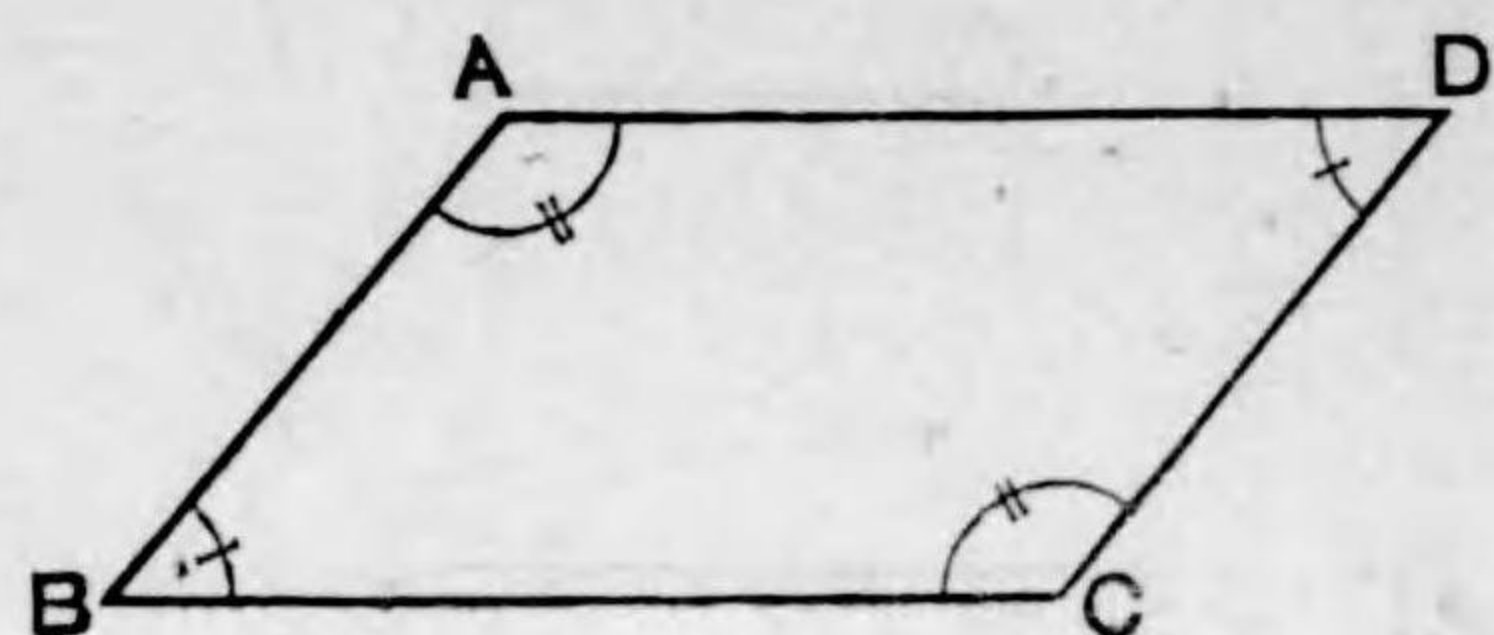
故ニ此ノ四邊形ハ平行四邊形ナリ。

第二ノ場合。



假設 四邊形 ABCD = 於テ

$$\angle A = \angle C$$



$$\angle B = \angle D$$

終結 此ノ四邊形ハ平行四邊形ナリ。

證明  $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$

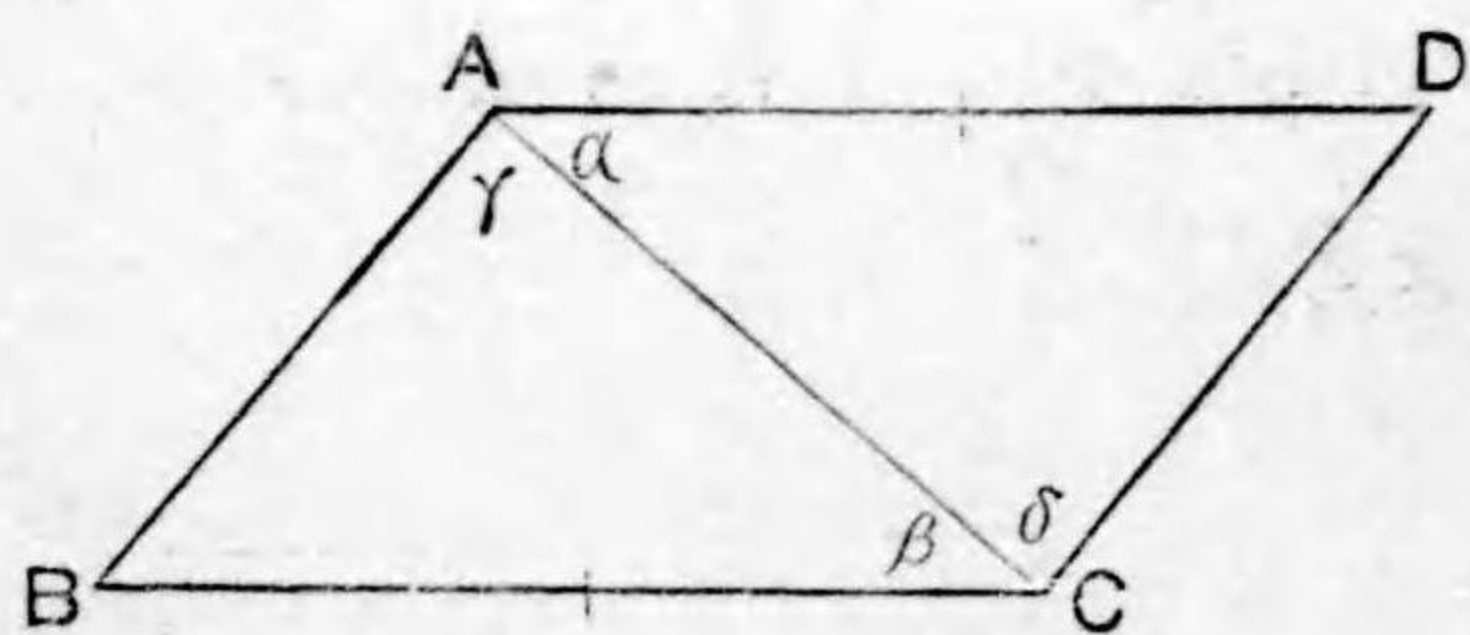
$$\therefore \angle A + \angle B = 180^\circ$$

$$\therefore AD \parallel BC$$

同様ニ  $AB \parallel CD$

故ニ此ノ四邊形ハ平行四邊形ナリ。

第三ノ場合。



假設 四邊形 ABCD ニ於テ

$$AD = BC$$

$$AD \parallel BC$$

終結 此ノ四邊形ハ平行四邊形ナリ。

證明  $AD = BC$

$$AD \parallel BC$$

$$\therefore \angle \alpha = \angle \beta$$

而シテ AC ハ共通ナリ。

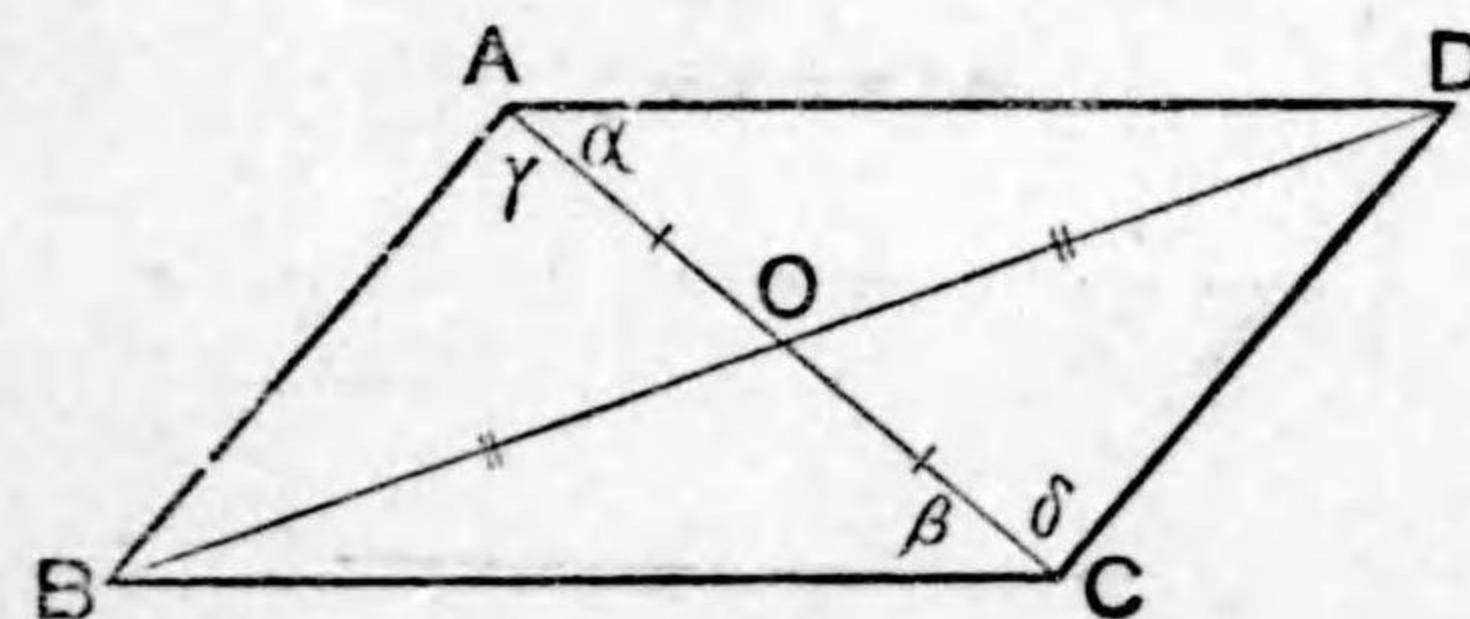
$$\therefore \triangle ABC \equiv \triangle ADC$$

$$\therefore \angle \gamma = \angle \delta$$

$$\therefore AB \parallel CD$$

即チ二双ノ對邊平行ナルヲ以テ此ノ四邊形ハ平行四邊形ナリ。

第四ノ場合。

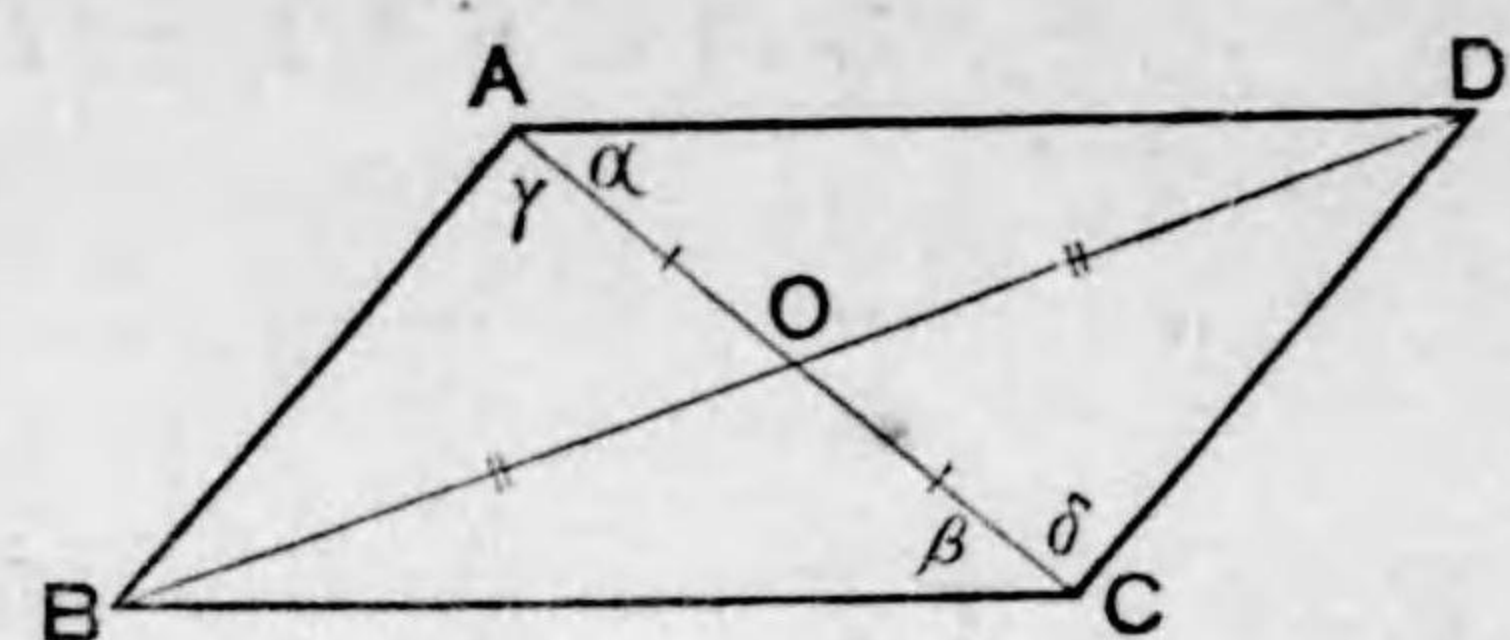


假設 四邊形 ABCD ノ二ツノ對角線ガ O ニ於テ交リ

$$OA = OC$$

$$OB = OD$$

終結 此ノ四邊形ハ平行四邊形ナリ。



證明

$$OA=OC$$

$$OB=OD$$

$$\angle AOB = \angle COD$$

∴

$$\triangle AOB \cong \triangle COD$$

∴

$$\angle \gamma = \angle \delta$$

∴

$$AB \parallel CD$$

同様 =

$$AD \parallel BC$$

故 = 此ノ四邊形ハ平行四邊形ナリ。

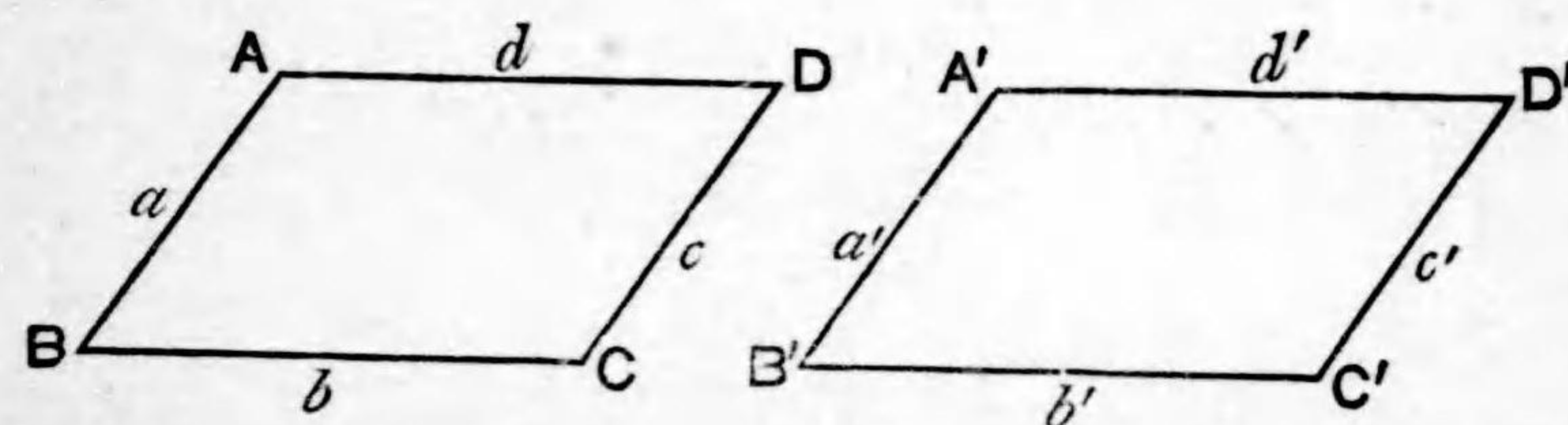
問題 72. 平行四邊形ノ各邊ノ中點ヲ順次ニ結ビツケテ得ル四邊形ハ平行四邊形ナリ。

問題 73. 平行四邊形ノ各角ノ二等分線ノナス四邊形ハ矩形ナリ。

問題 74. 四邊形ノ對角線ガ互ニ他ヲ直角ニ二

等分スルトキハ、此ノ四邊形ハ菱形ナリ。

59. 定理二十二 一ツノ平行四邊形ノ相隣レル二邊及ビ夾角ガ夫々他ノ一ツノ平行四邊形ノ相隣レル二邊及ビ夾角ニ等シケレバ、此二ツノ平行四邊形ハ合同ナリ。



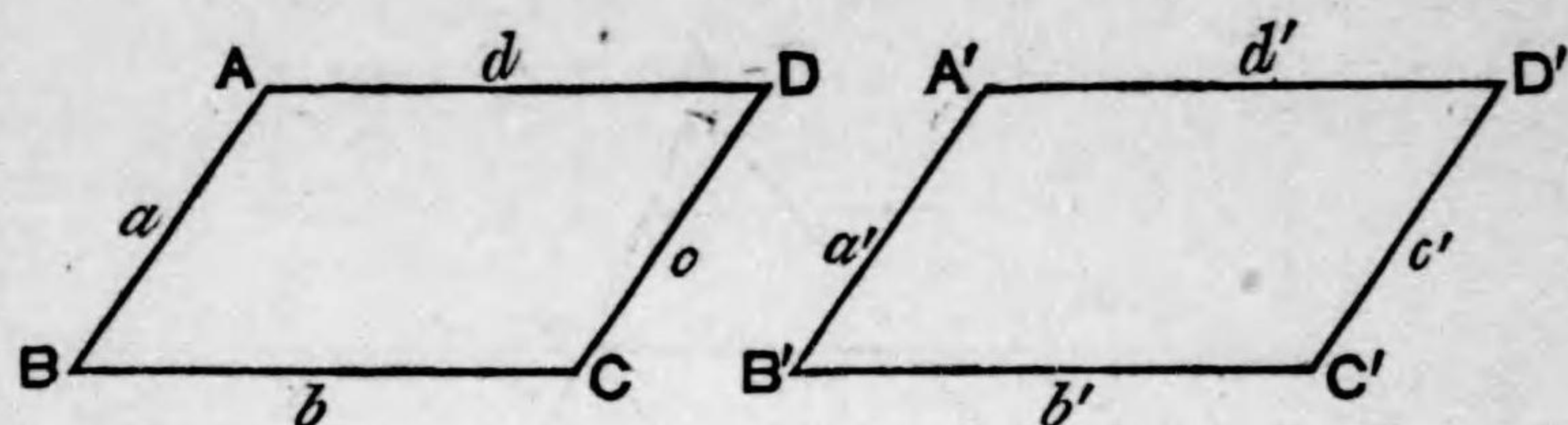
假設  $\square AC, \square A'C' =$  於テ

$$a=a', b=b', \angle B = \angle B'$$

終結

$$\square AC \cong \square A'C'$$

證明 邊  $a'$  ヲ邊  $a$  上ニ置キ、 $\square A'C'$  ヲ  $\square AC$  ノ上ニ重ヌルニ、 $\angle B = \angle B'$  ナルヲ以テ、 $b'$  ハ  $b$  ト重ナル、而シテ  $A$  ヲリ  $b =$ 、 $C$  ヲリ  $a =$  夫々唯一ツ



ノ平行線ヲ引キ得ルヲ以テ、 $d' \wedge d = c' \wedge c =$   
重ナル。

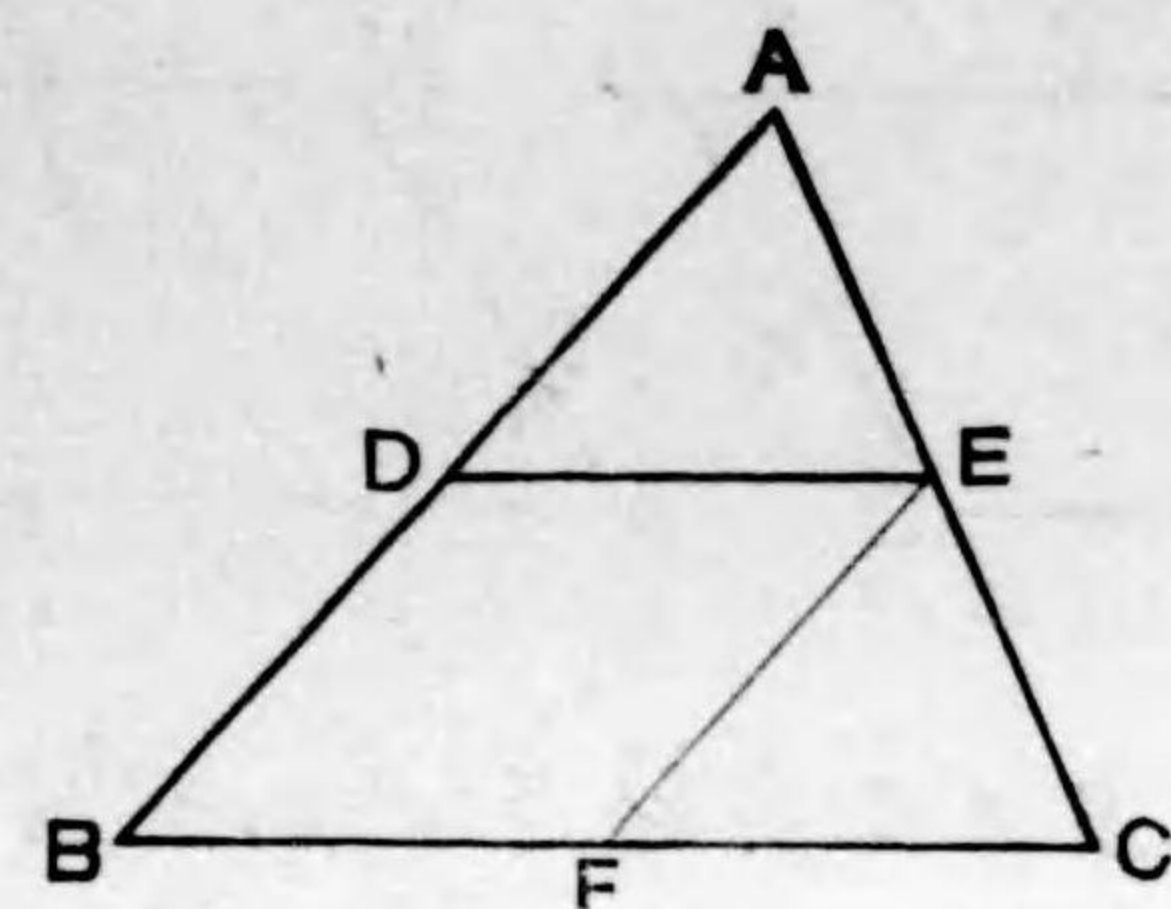
$$\therefore \square AC \equiv \square A'C'$$

系一 二ツノ矩形ハ其ノ一ツノ相隣レル二邊  
ガ夫々他ノ相隣レル二邊ニ等シケレバ合同ナリ。

系二 二ツノ正方形ハ其ノ一ツノ一邊ガ他ノ  
一邊ニ等シケレバ合同ナリ。

問題 75. 平行四邊形ノ對邊ノ中點ヲ結ブ直線  
ハ之ヲ合同ナル二ツノ平行四邊形ニ分ツ。

60. 定理二十三 三角形ノ一邊ノ  
中點ヨリ他ノ一邊ニ平行ニ引ケル直  
線ハ第三邊ノ中點ヲ通ル。



假設  $\triangle ABC$  ノ一邊  $AB$  ノ中點  $D$  ヨリ  $BC$   
ニ平行ニ引ケル直線ハ  $AC$  ト  $E$  ニ於テ交ル。

終結  $AE = EC$

證明  $E$  ヲ通り  $AB$  ニ平行ニ引キタル直線ト  
 $BC$  トノ交點ヲ  $F$  トス。

$DEFB$  ハ平行四邊形ナルヲ以テ

$$AD = DB = EF$$

$$\angle ADE = \angle B = \angle EFC$$

$$\angle A = \angle FEC$$

$$\therefore \triangle ADE \equiv \triangle EFC$$

$$\therefore AE = EC$$

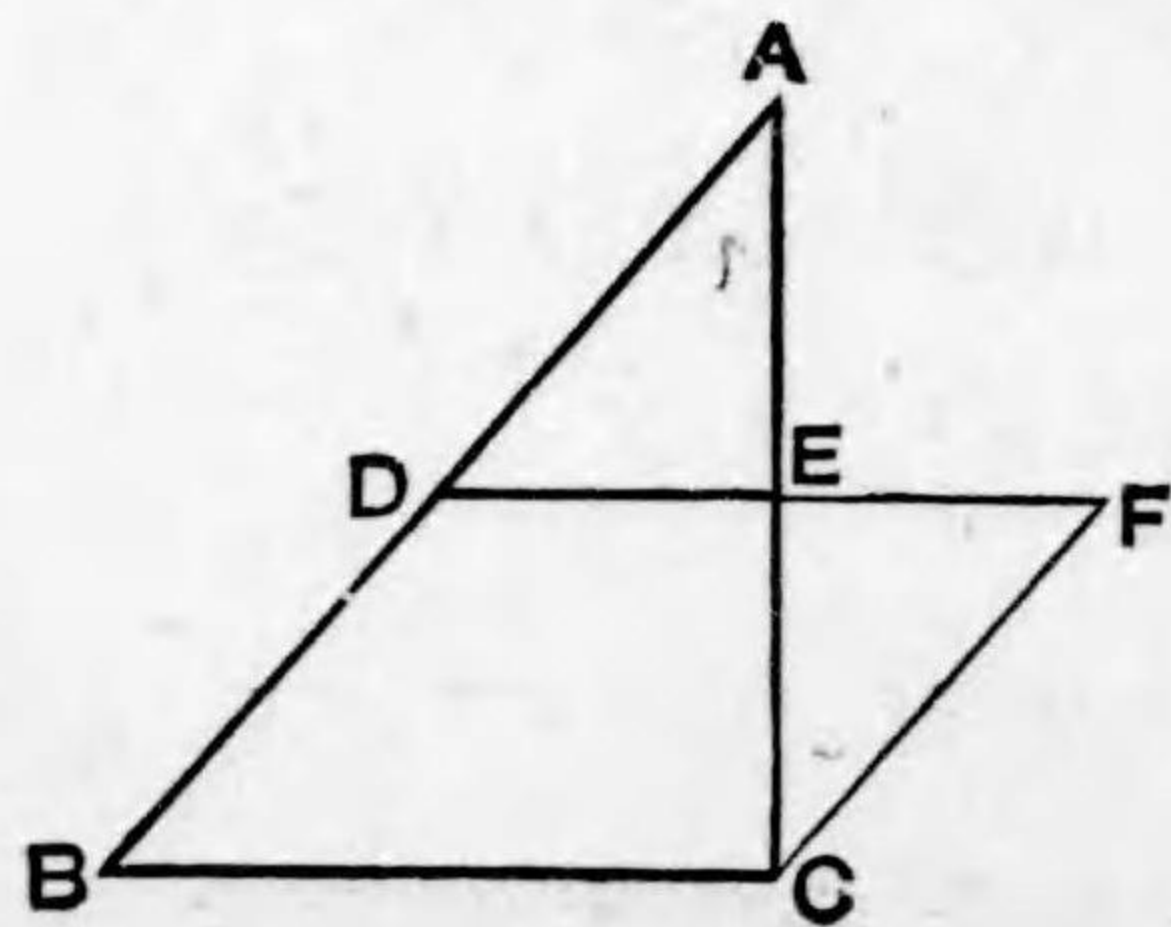
問題 76. 平行四邊形  $ABCD$  ノ二ツノ邊  $AB,$

CD, ノ中點ヲ夫々 F, G トスレバ, DF, BG, ハ  
對角線 AC ヲ三等分ス。

問題 77. 直角三角形ノ斜邊ノ中點ヲ直角頂ニ  
結ブ直線ハ, 斜邊ノ半ニ等シ。

問題 78. 數多ノ平行線ガーツノ直線ニ交リ之  
ヲ相等シキ部分ニ切斷スレバ, イヅレノ直線ト交  
ルモ亦之ヲ相等シキ部分ニ切斷ス。

61. 定理二十四 三角形ノ二ツノ  
邊ノ中點ヲ結ブ直線ハ, 他ノ邊ニ平行  
シ且其ノ半ニ等シ。



假設  $\triangle ABC$  ニ於テ

$$AD = DB$$

$$AE = EC$$

而シテ D ト E トヲ結ブ

終結 1.  $DE \parallel BC$

終結 2.  $DE = \frac{1}{2}BC$

證明 DE ヲ F マデ延長シ  $DE = EF$  ナラシメ  
C ト F トヲ結ブ。

然ルトキハ, 二邊夾角相等シキニヨリ

$$\triangle AED \equiv \triangle FEC$$

$$\therefore \angle ADE = \angle F$$

$$\therefore BD \parallel CF$$

$$\text{而シテ } DB = DA = CF$$

故ニ四邊形 DBCF ハ平行四邊形ナリ。

$$\therefore DE \parallel BC$$

$$\text{而シテ } DE = \frac{1}{2}DF = \frac{1}{2}BC$$

問題 79. 四邊形ノ各邊ノ中點ヲ順次ニ結ビテ  
得ル四邊形ハ平行四邊形ナリ。

問題 80.  $\triangle ABC$  ノ邊  $AC, AB,$  ノ中點ヲ夫々  $E$  及ビ  $F$  トシ,  $BE, CF$  ノ交點ヲ  $G$  トス。  $C$  ヲ通リ  $BE$  ニ平行ナル直線ト  $AG$  トノ交點ヲ  $H$  トスレバ,  $AG=GH$  ナルコトヲ證シ,  $GC$  ト  $BH$  トガ平行ナルコトヲ證セヨ。

問題 81. 三角形ノ三中線ハ同一ノ點ニ於テ出會ヒ, 其ノ點ト各頂點トノ距離ハ其ノ頂點ヲ通ル中線ノ三分ノ二ニ等シ。

三角形ノ三ツノ中線ノ出合フ點ヲ其ノ重心ト稱ス。

## 第一篇ノ問題

問題 82. 平行四邊形ノ對角線ノ交點ヲ通ル直線ハ, 之ヲ合同ナルニツノ四邊形ニ分ツ。

問題 83.  $\triangle ABC$  ノ一ツノ邊及ビ其ノ兩端ニ於ケル外角ノ二等分線ニテ成ル三角形ノ三ツノ角ハ  $\frac{1}{2}(\angle B + \angle C), \frac{1}{2}(\angle C + \angle A), \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$  ニ等シ。

問題 84. 三角形ノ二邊相等シカラザレバ, 小ナル邊ニ引ケル中線ハ大ナル邊へ引ケル中線ヨリモ大ナリ。

問題 85. 三角形ノ各邊ノ中點ニ立テタル垂線ハ同一ノ點ニテ交ハル。

此ノ點ヲ三角形ノ外心ト稱ス。外心ハ三ツノ頂點ヨリ等距離ニアリ。

問題 86.  $\triangle ABC$  ノ各頂點ヲ通り對邊ニ平行ニ引ケル三線ノナス三角形ノ邊ノ中點ハ  $A, B, C$  ナリ。

問題 87. 三角形ノ三ツノ頂點ヨリ對邊ニ下セル垂線ハ同一ノ點ニ會ス。

此ノ點ヲ三角形ノ垂心ト稱ス。

問題 88. 三角形ノ頂角ノ二等分線ニ垂線ヲ引ク、然ラバ

1. 此ノ垂線ガ頂角ヲ夾ム邊トナス銳角ハ、ニツノ底角ノ和ノ半ナリ。
2. 此ノ垂線ガ底トナス銳角ハ、ニツノ底角ノ差ノ半ナリ。

問題 89. 正三角形内ノ任意ノ一點ヨリ各邊ニ下セル垂線ノ和ハ一定ナリ。

若シ點ヲ邊上ニ取ラバ如何。

又點ヲ形外ニ取ラバ如何。

問題 90.  $D, E, F$  ヲ三角形ノ邊  $BC, CA, AB$  ノ中點トスレバ、

$$2(AD + BE + CF) > a + b + c > AD + BE + CF$$

問題 91.  $\triangle ABC$  ニ於テ、 $AD$  ヲ  $BC$  へノ垂線、 $AE$  ヲ  $\angle A$  ノ二等分線トス。

若シ  $\angle B = 60^\circ$ ,  $\angle C = 40^\circ$  ナラバ  $\angle DAE$  ノ大サ如何。

一般ニ  $\angle DAE = \frac{1}{2}(\angle B \sim \angle C)$  ナルコトヲ證明スベシ。

問題 92.  $\angle A$  ヲ直角トスル  $\triangle ABC$  ノ邊  $AC$

ニ  $C$  ニ於テ垂線  $CD$  ヲ  $B$  ノ反對ノ側ニ立ツ。直線  $BD$  ガ  $AC$  ト  $E$  ニ於テ出會ヒ、 $ED = 2BC$  ナルトキハ、

$$\angle ABE = \frac{1}{3} \angle ABC.$$

問題 93.  $A, B$  ヲニツノ定點、 $XY$  ヲ定直線トス。今  $XY$  上ニ  $P$  點ヲ取リ、 $AP, BP$  ガ  $XY$  トナス角ヲ等シカラシム。然ラバ

1.  $A, B$  ガ  $XY$  ノ同ジ側ニアルトキハ、 $XY$  上ノ一點ヨリ  $A, B$  ニ至ル距離ノ和ノ中  $AP + BP$  ハ最小ナリ。

2.  $A, B$  ガ  $XY$  ノ反對ノ側ニアルトキハ、 $XY$  上ノ一點ヨリ  $A, B$  ニ至ル距離ノ差ノ中  $AP \sim BP$  ハ最大ナリ。

問題 94. 川ノ兩側ニ二軒ノ家アリ。其ノ通路ヲ最モ近クセンニハ如何ニ道ヲ作ルベキカ。但シ川ハ屈曲セズ又橋ハ川流ニ斜ニ架セザルモノトス。

問題 95. 上ノ場合ニ若シ兩家ヨリ橋マデノ距離ヲ等シカラシムルニハ如何ナル位置ニ架橋スベキカ。



## 第二篇

### 圓

#### 第一章

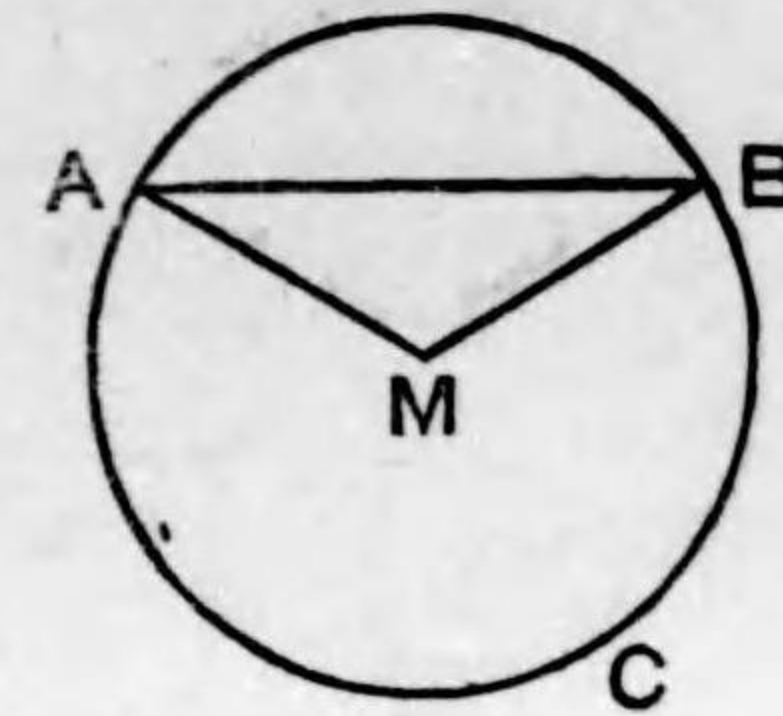
#### 弧 弦

62. 圓トハ一ツノ閉曲線ニシテ一定點ヨリ此ノ線上ノイヅレノ點ヘ引ケル直線モ皆相等シキモノナリ。

此ノ定點ヲ**中心**ト稱ス。

圓ヲ時トシテ**圓周**ト稱スルコトアリ。

圓ヲ表スニハ圓上ノ三點或ハ中心ヲ以テス。



例ヘバ圓 ABC, 圓 M トスルガ如シ。

圓周ノ一部ヲ**弧**ト稱ス。

弧 AB ヲ  $\widehat{AB}$  ト記ス。

合セテ一圓周ヲ成ス二ツノ弧ヲ**共軛弧**ト稱シ, 大ナル方ヲ**優弧**, 小ナル方ヲ**劣弧**ト稱ス。

圓ト二ツノ點ニ於テ交ル直線ヲ**割線**ト稱シ, 其ノ圓内ニ在ル部分ヲ**弦**ト稱ス。

弦ニシテ中心ヲ通ルモノヲ**直徑**ト稱シ, 直徑ノ半分ヲ**半徑**ト稱ス。

圓ノ半分ヲ**半圓**ト稱ス。

圓ノ四分ノ一ヲ象限ト稱ス。

同中心ノ圓ヲ同心圓ト稱ス。

弧及ビ其ノ兩端へ引ケル半徑ヲ以テ圍ミタル圖形ヲ扇形ト稱ス。

扇形ノ角トハ其ノ弧ノ上ニ立ツ處ノ中心ニ於テノ角ナリ。

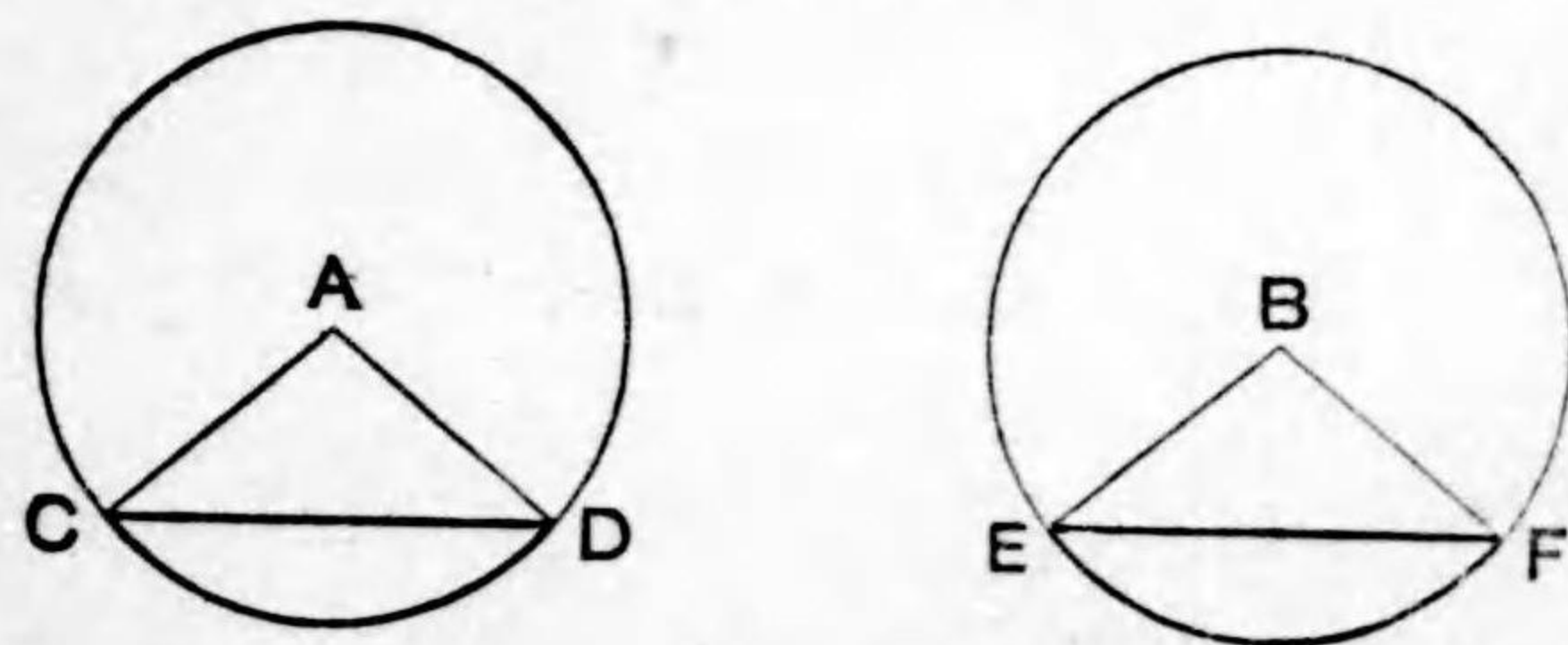
問題 1. 扇形ノ弧ガ一象限ナルトキ,其ノ角ノ大サ如何。

問題 2. 弧 AB ヲ全圓周ノ六分ノ一ニ等シトスレバ,弦 AB ハ半徑ニ等シ。

問題 3. 一ツノ點ガ圓外ニアルカ,圓上ニアルカ,又ハ圓内ニアルカニ從ヒテ,中心ヨリ其ノ點マデノ距離ハ半徑ヨリ大ナルカ,半徑ニ等シキカ,又ハ半徑ヨリ小ナリ。

問題 4. 圖ニ於テ  $\angle AMB = 30^\circ$  ナルトキハ弧 AB ハ圓ノ何分ノ一ナルカ。

63. 定理一 同ジ圓或ハ相等シキ圓ニ於テ,相等シキ弧ニ對スル弦ハ相等シク,相等シカラザル劣弧ノ中,大ナル劣弧ニ對スル弦ハ他ヨリモ大ナリ



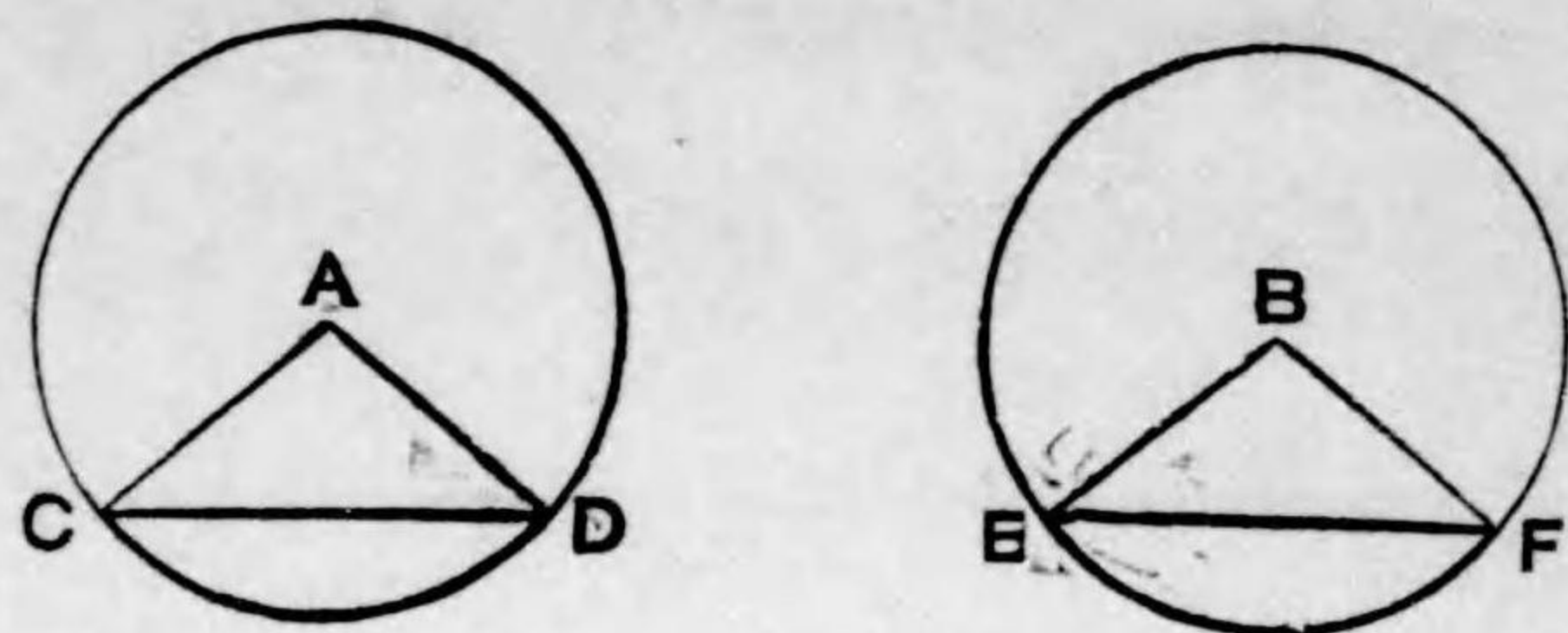
i  $\widehat{CD} = \widehat{EF}$  ナラバ  $CD = EF$

ii  $\widehat{CD} > \widehat{EF}$  ナラバ  $CD > EF$

iii  $\widehat{CD} < \widehat{EF}$  ナラバ  $CD < EF$

證明  $\widehat{CD} = \widehat{EF}$  ナラバ

$$\angle A = \angle B$$



故ニ二邊夾角相等シキヲ以テ

$$\triangle ACD \equiv \triangle BEF$$

∴

$$CD = EF$$

又  $\widehat{CD} \geq \widehat{EF}$  ナラバ  $\angle A \geq \angle B$

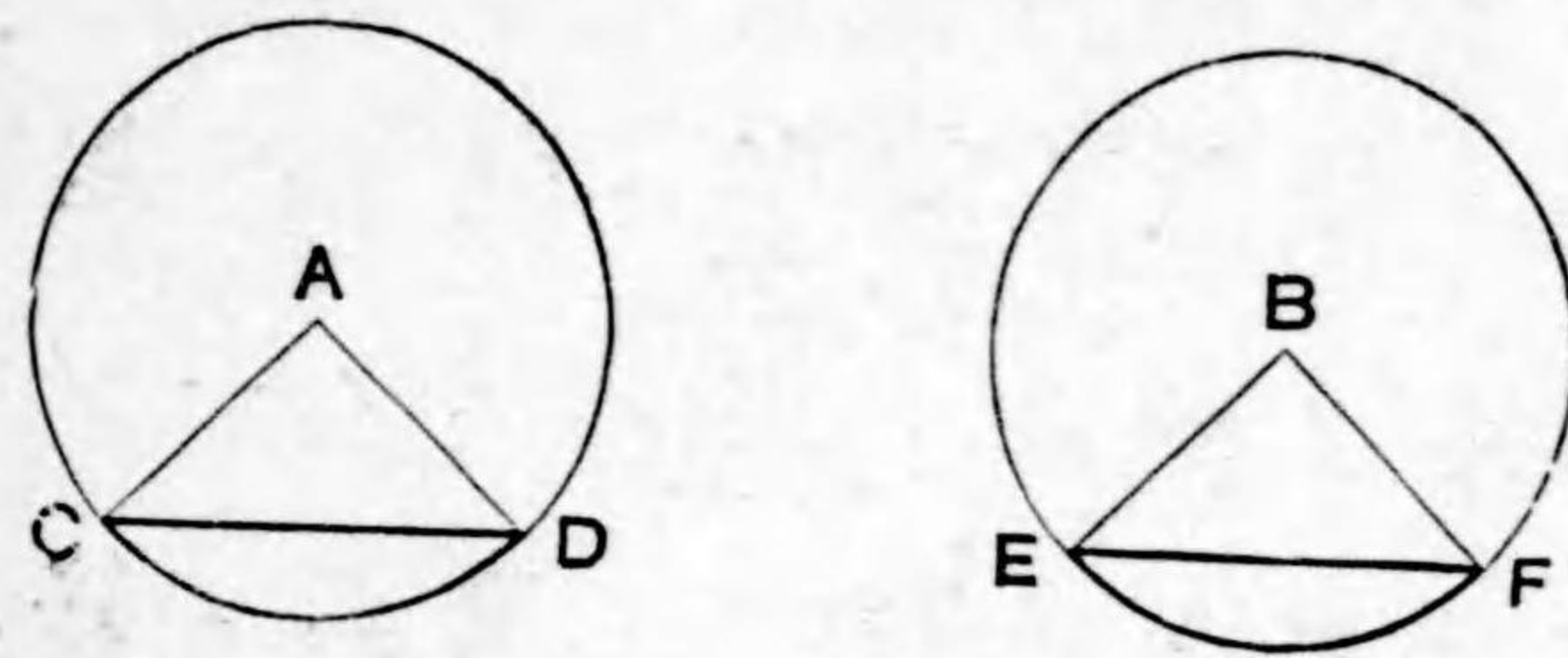
而シテ  $\triangle ACD$ ,  $\triangle BEF$  ハ二邊互ニ相等シク其夾角等シカラズ。故ニ  $\widehat{CD} \geq \widehat{EF}$  ナルニ從ヒテ  $CD \geq EF$

問題 5. 圓 O ノ弦ヲ AB トシ,  $\widehat{AB}$  ノ中點ヲ C トス。然ラバ

1.  $\angle CAB = \angle CBA$
2. OC ハ AB ヲ直角ニ二等分ス。

問題 6. 圓上ニ四ツノ點 A, B, C, D アリ。  
 $\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CD}$  ナルトキハ  $AC = BD$  ナリ。

64. 定理二 同ジ圓或ハ相等シキ圓ニ於テ, 相等シキ弦ニ對スル弧ハ相等シク, 相等シカラザル弦ノ中, 大ナル弦ニ對スル劣弧ハ他ヨリモ大ナリ。



- i  $CD = EF$  ナラバ  $\widehat{CD} = \widehat{EF}$
- ii  $CD > EF$  ナラバ  $\widehat{CD} > \widehat{EF}$
- iii  $CD < EF$  ナラバ  $\widehat{CD} < \widehat{EF}$

證明  $CD = EF$  ナルトキ  $\widehat{CD} = \widehat{EF}$  ナリトスレバ,

$\widehat{CD} \geq \widehat{EF}$  ナラザルベカラズ。

然ルニ  $\widehat{CD} \geq \widehat{EF}$  ナラバ  $CD \geq EF$

故ニ  $\widehat{CD} = \widehat{EF}$  ナラザルベカラズ。

同様ニ ii, iii ヲ證明スルコトヲ得ベシ。

定理一ニ於テ三ツノ假設ノ中一ツハ必ズ真ナ

リ。又終結ハ互ニ相容レズ、然シテ其ノ逆タル定理ニハ上ノ如クシテ皆眞ナルコトヲ證明シ得ベシ。

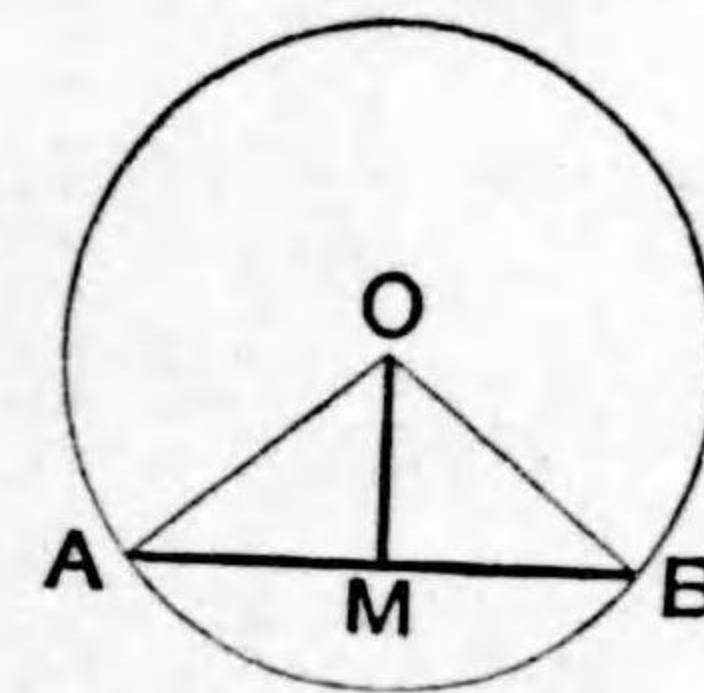
65. 定理二ノ證明ノ如ク、各眞ナリト證明シタル定理ノ一群アリテ、其ノ假設ハ或事ニ就イテ起リ得ヘキ總テノ場合ヲ盡シ、其ノ一ツハ必ず眞ナラザルヲ得ズ。又其ノ終結ハ互ニ相容レザルモノナリトス。

然ルトキハ此ノ群ノ定理ノ逆モ亦眞ナリ。

此ノ如キ一群ノ定理ノ眞ナルコトヨリ、其ノ逆ノ眞ナルコトヲ推定スル論法ヲ轉換法ト稱ス。

問題 7. 互ニ直角ニ交ルニツノ直徑ハ圓周ヲ四ツノ等シキ部分ニ分ツ。

66. 定理三 中心ヨリ弦ノ中點ニ引ケル直線ハ弦ニ垂線ナリ。



圓 O ノ一ツノ弦ヲ AB トス。

然ルトキハ O ト AB ノ中點 M トヲ結ベバ

$$OM \perp AB$$

證明 O ヲ A ト B トニ結ブ。然ルトキハ

$$OA = OB$$

$$AM = BM$$

而シテ OM ハ共通ナリ。

$$\therefore \triangle AOM \equiv \triangle BOM$$

$$\therefore OM \perp AB$$

此定理ニ於テハ、假設ハ(中心ヨリ)、(弦ノ中點ニ引ケル直線)ナルニツヨリ成リ、終結ハ(弦ニ垂線)ナリ。

此ノ如ク

一ツノ終結ニ對シテニツ或ハニツヨリ多クノ假設アルトキハ、其ノ逆定理ハ假設ノ數ダケ起ルモノナリ。

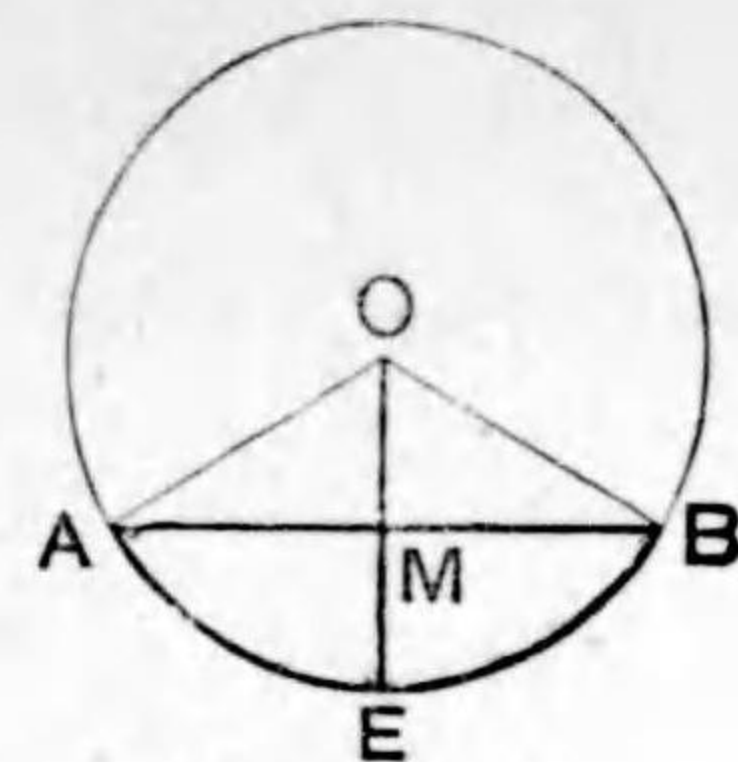
例ヘバ此ノ定理ノ逆ハ即チ次ノ二定理トナル。

i 中心ヨリ弦ニ引ケル垂線ハ其ノ弦ノ中點ヲ通ル。

ii 弦ノ中點ニ引ケル垂線ハ中心ヲ通ル。

問題 8. 圓ノ二ツノ弦ガ直徑ニアラザル限リハ互ニ他ヲ二等分スルコト能ハズ。

67. 定理四 中心ヨリ弦ニ引ケル垂線ハ其ノ弦ノ中點ヲ通ル。



圓 O ノ弦 AB へ垂線 OM ヲ引ケバ

$$AM = BM$$

證明 O ヲ A ト B トニ結ブ、然ルトキハ

$\triangle OAM$  ト  $\triangle OBM$  ハ各直角三角形ニシテ OA, OB ナル斜邊相等シク OM ハ共通ナルヲ以テ合同ナリ。

$$\therefore AM = BM$$

系 中心ヨリ弦ニ引ケル垂線ハ弧ヲ二等分ス。

$$\triangle OAM \cong \triangle OBM$$

$$\therefore \angle AOM = \angle BOM$$

$$\therefore AE = BE$$

$$\therefore \widehat{AE} = \widehat{BE}$$

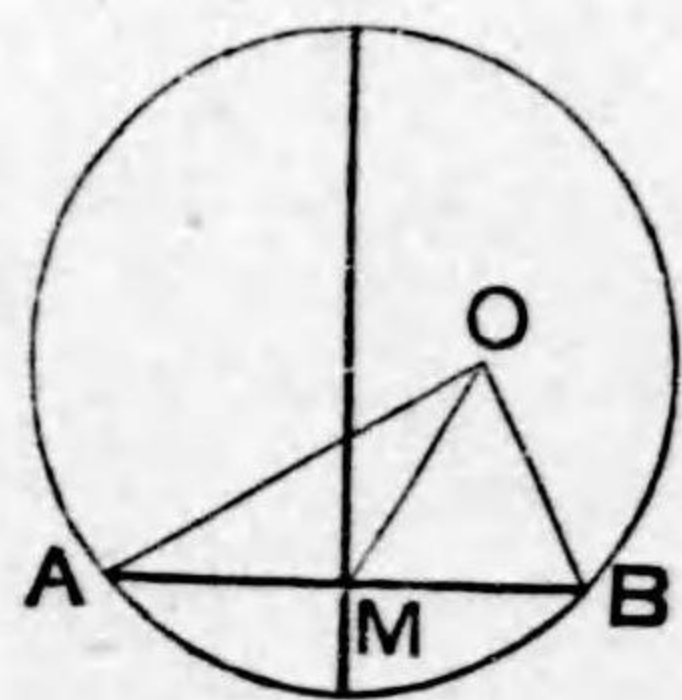
問題 9. 一ツノ直線ガ二ツノ同心圓ト交レバ、其ノ間ニ切り取ラルル部分ハ相等シ。

問題 10. 圓ノ中心ヨリ一ツノ弦ニ引ケル垂線ハ、其ノ弦ニ平行ナル凡テノ弦ヲ直角ニ二等分ス。

問題 11. 二ツノ平行弦ノ間ニ切り取ラルル弧ハ相等シ。

問題 12.  $\widehat{AB}$  ガ  $\widehat{CD}$  ノ二倍ナルトキハ、弦  $AB$  ハ弦  $CD$  ノ二倍ナリヤ。

68. 定理五 弦ノ中點ニ引ケル垂線ハ中心ヲ通ル。



弦  $AB$  ノ中點  $M$  ヨリ之ニ直角ニ引ケル直線ハ中心  $O$  ヲ通ル。

證明 中心  $O$  ガ弦  $AB$  ノ中點  $M$  ニ於ケル垂線上ニアラズトスレバ、 $O$  ヲ  $A, M, B$  ニ結ビテ作リタル  $\triangle AOM$  ト  $\triangle BOM$  ハ二邊夫々相等シク、夾角相等シカラズ。

$$\therefore AO \neq BO$$

是不合理ナリ。故ニ中心  $O$  ハ此ノ垂線上ニアルベシ。

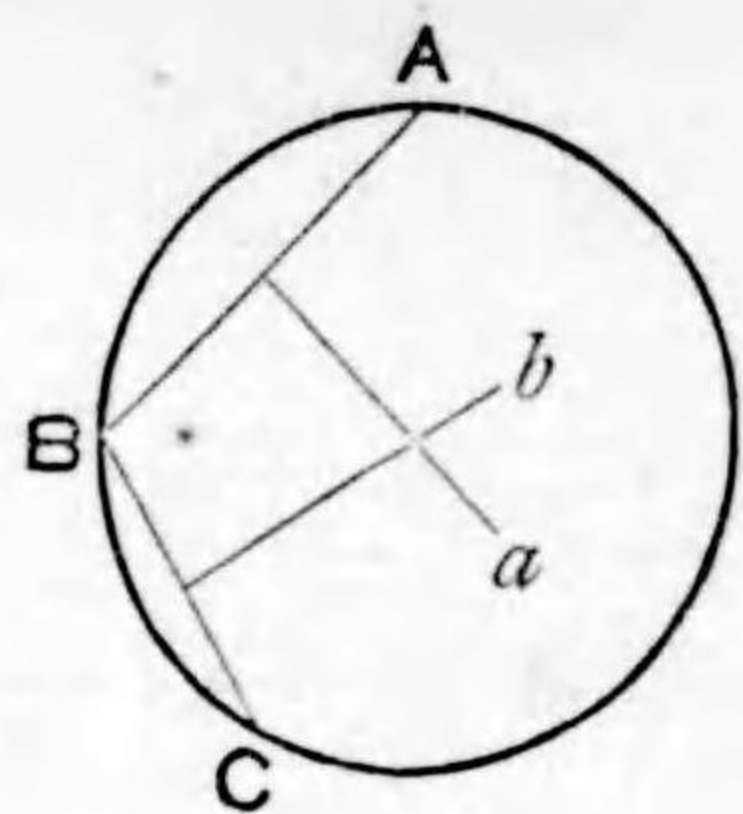
問題 13. 圓周上ニ四ツノ點  $A, B, C, D$  アリ。直線  $AB, CD$  ヲ夫々直角ニ二等分スル二ツノ直線ハ中心ニ於テ交ル。

問題 14. 二ツノ平行ナル弦ノ一ツノ中點ニ立テタル垂線ハ、他ノ弦ヲ直角ニ二等分ス。

問題 15. 圓内ノ一點ヨリ圓周ニ二ツヨリ多クノ等シキ直線ヲ引キ得ル時ハ、其ノ點ハ中心ナリ。

問題 16. 圓ノ二ツノ平行弦ヲ二等分スル直線又ハ其ノ延長ハ中心ヲ通ル。

69. 定理六 同一ノ直線上ニアラザル三ツノ點ヲ通ル圓ハ一ツアリ、而シテ唯一ツニ限ル。



A, B, C ヲ同一ノ直線上ニアラザル三ツノ點トセヨ。

然ルトキハ、A, B, C ヲ通ル圓ハ一ツアリ。而シテ唯一ツニ限ルベシ。

證明 AB, BC ヲ結べ。然ルトキハ AB ノ中點ニ引ケテ垂線  $a$  ハ、A, B 二點ヲ通レル圓ノ中心ヲ通ル。同様ニ BC ノ中點ニ引ケル垂線  $b$  ハ B, C 二點ヲ通レル圓ノ中心ヲ通ル。

故ニ A, B, C 三點ヲ通ル圓ノ中心ハ、 $a$  ノ上ニアリ又  $b$  ノ上ニモアリ。

故ニ其ノ中心ハ  $a$  ト  $b$  トノ交點ナラザルベカラズ。

而シテ  $a$  ト  $b$  トノ交點ハ唯一ツニ限ル。

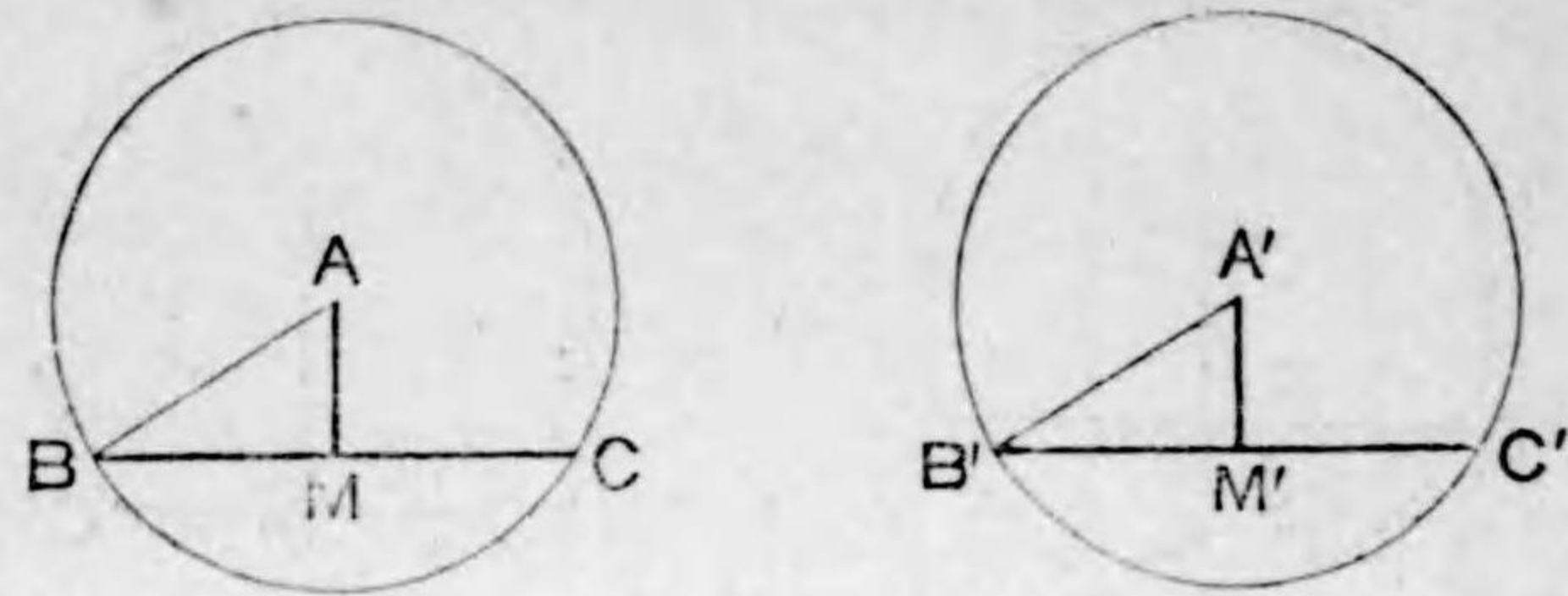
故ニ三點ヲ通ル圓ハ一ツアリ。而シテ唯一ツニ限ル。

問題 17. 本定理ニ於テ三ツノ點ガ一直線上ニアラザルコトヲ要スル理由如何。

問題 18. 二ツノ圓ハ全ク重ナリ合フニアラザレバ三ツノ共通ナル點ヲ有スルコト能ハズ。

問題 19. 三角形ノ三ツノ頂點ヲ通リテ圓ヲ畫ガクコトヲ得。而シテ其ノ中心ハ即外心ナリ。

70. 定理七 同ジ圓或ハ相等シキ圓ニ於テ、相等シキ弦ハ中心ヨリノ距離相等シ。而シテ相等シカラザル弦ノ内大ナルモノハ、小ナルモノヨリモ中心ニ近シ。



圓 A.ト圓 A'ヲ相等シトス。Aヨリ弦 BCニ、  
A'ヨリ弦 B'C'ニ引ケル垂線ヲ夫々 AM, A'M'  
トス。然ルトキハ  $BC \cong B'C'$  ナルニ從ヒテ  
 $AM \cong A'M'$  ナリ。

證明

i 上圖ニ於テ  $BC = B'C'$  ナリトス。

此場合ニ於テハ

$$\angle AMB = \angle A'M'B' = 90^\circ$$

$$BM = B'M'$$

$$AB = A'B'$$

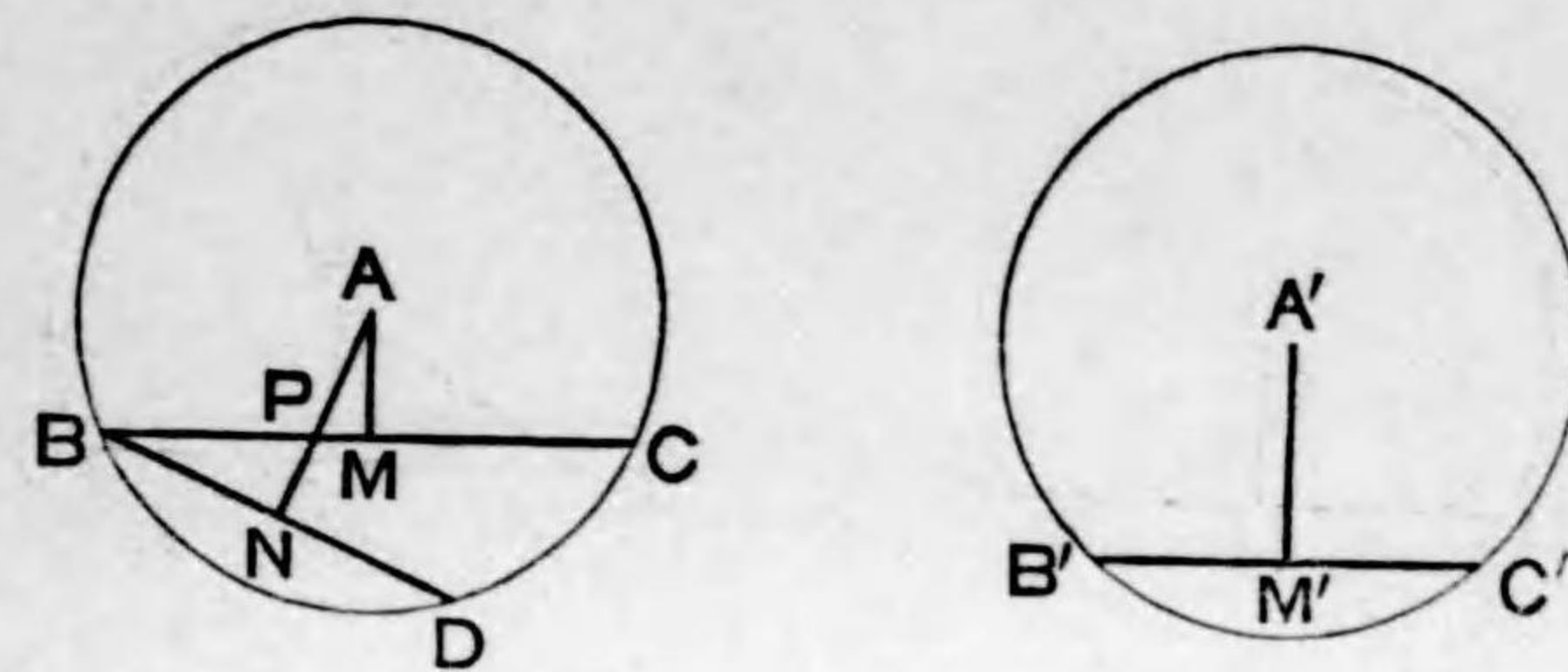
$$\therefore \triangle AMB \cong \triangle A'M'B'$$

$$\therefore AM = A'M'$$

ii  $BC > B'C'$  ナリトス。

此ノ場合ニ於テハ  $\widehat{B'C'}$  ハ  $\widehat{BC}$  ヨリ小ナリ。

故ニ  $\widehat{BC}$  上ニ Dヲ取り、 $\widehat{BD}$  ヲ  $\widehat{B'C'}$  ニ等シカラ



シムレバ、 $BD = B'C'$

而シテ BD 上ノ各點ハ、Bヲ除ク外悉ク BC  
ニ對シテ Aノ反對ノ側ニアリ。

故ニ BD へノ垂線 ANハ必ズ BCト交ル。其  
ノ交點ヲ Pトス。

然ラバ  $AM < AP < AN$

然ルニ  $AN = A'M'$

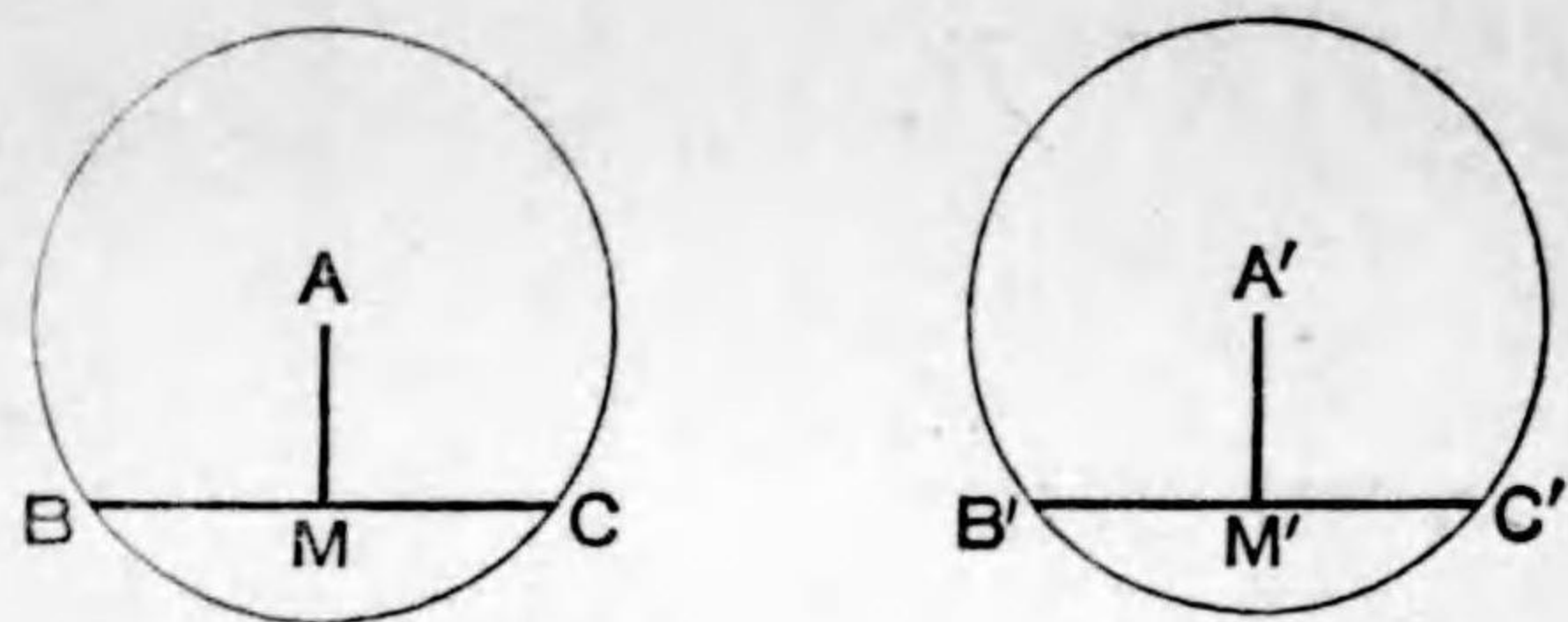
$\therefore AM < A'M'$

iii 同様ニ  $BC < B'C'$  ナラバ  $AM > A'M'$  ナル  
コト明ナリ。

71. 定理八 同ジ或ハ相等シキ圓  
ニ於テ、中心ヨリ等シキ距離ニアル弦  
ハ相等シク、相等シカラザル距離ニア



ル弦ノウチ,中心ニ近キモノハ他ヨリ  
モ大ナリ。



圓 A ト圓 A' ヲ相等シトシ, A ト A' ヨリ夫々  
弦 BC, B'C' ニ引ケル垂線ヲ AM, A'M' トス。

然ルトキハ  $AM \cong A'M'$  ナルニ從ヒテ  $BC \cong B'C'$   
ナリ。

**證明** 前ノ定理ニヨリ,

$$BC > B'C' \text{ ナラバ } AM < A'M'$$

$$BC = B'C' \text{ ナラバ } AM = A'M'$$

$$BC < B'C' \text{ ナラバ } AM > A'M'$$

此ノ三ツノ假設ノ内一ツハ必ズ真ナリ。

又終結ハ互ニ相容レザルモノナリ。

故ニ前定理ノ逆ハ皆真ナリ。

故ニ  $AM \cong A'M'$  ナルニ從ヒテ  $BC \cong B'C'$

**問題 20.** 直徑ハ最大弦ナリ。

**問題 21.** 内心ト外心トガ一致スル三角形ハ正  
三角形ナリ。

**問題 22.** 圓内ノ一定點ヲ通ル弦ノ中,其ノ點ヲ  
通ル直徑ニ垂直ナルモノハ最モ短シ。

## 第二章

## 弓形ニ於テノ角

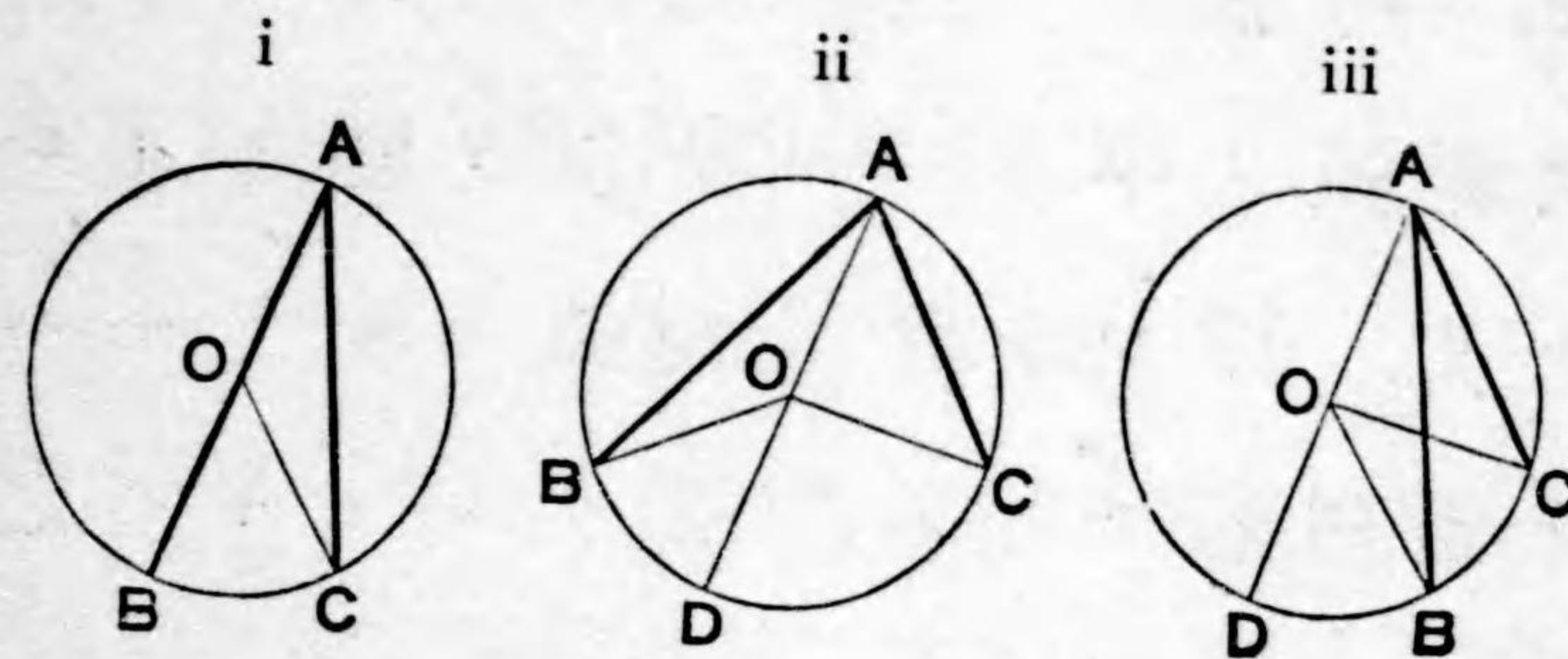
72. 弓形トハ弦ト之ニ對スルニツノ共軌弧ノ中ノ一ツヲ以テ圍ミタル形ナリ。而シテ弧ガ優弧ナルトキハ之ヲ優弓形ト稱シ、劣弧ナルトキハ之ヲ劣弓形ト稱ス。

周ニ於テノ角トハ圓周上ノ一點ヨリ引ケルニツノ弦ノ夾ム角ニシテ、此ノ角ハ其ノ二邊ノ間ニアル弧ノ上ニ立ツト稱ス。

弓形ニ於テノ角トハ弓形ノ弧ノ上ノ一點ヨリ其ノ弧ノ兩端ニ引ケルニツノ直線ノ夾ム角ニシテ、其ノ弓形ハ

此ノ角ヲ含ムト稱ス。

73. 定理九 周ニ於テノ角ハ同ジ弧ノ上ニ立テル中心ニ於テノ角ノ半ナリ。



$\angle BAC$  ヲ周ニ於テノ角トシ、 $\angle BOC$  ヲ同ジ弧ノ上ニ立テル中心ニ於テノ角トセヨ。

然ルトキハ  $\angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC$

證明 i 中心ガ  $\angle BAC$  ノ一邊ノ上ニアル場合。

ii 中心ガ  $\angle BAC$  ノ内ニアル場合。

iii 中心ガ  $\angle BAC$  ノ外ニアル場合。

iニ於テハ、 $\triangle AOC$  ハ二等邊三角形ナルヲ以テ

$$\angle A = \angle C$$

而シテ  $\angle A + \angle C = \angle BOC$  ナルヲ以テ

$$\angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC$$

ii, iii = 於テハ, A ト O ヲ結ビ之ヲ延長シテ圓ト D = 於テ交ラシム。然ルトキハ

$$\angle CAD = \frac{1}{2} \angle COD$$

$$\angle BAD = \frac{1}{2} \angle BOD$$

$$\therefore \angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC$$

系一 同ジ弓形ニ於テノ角ハ相等シ。

系二 弓形ニ於テ其ノ弦ニ對シ弓形ト同ジ側ニアル點ヲ弦ノ兩端ニ結ブトキ,其ノ二直線ノ夾ム角ハ,點ガ弓形ノ内或ハ外或ハ上ニアルニ從ヒテ,弓形ニ於テノ角ヨリ大或ハ小或ハ之ニ等シ。ソノ逆モ亦真ナリ。

系三 弓形ニ於テノ角ハ其ノ弧ガ半圓ヨリ小或ハ大或ハ之ニ等シキニ從ヒテ,直角ヨリ大或ハ小或ハ之ニ等シ。ソノ逆モ亦真ナリ。

系四 二ツノ弦ガ圓内ニテ交レバ,其夾メル角ハ其ノ二邊及ビ其ノ對頂角ノ二邊ガ夾ム弧ノ和

ニ等シキ弧ノ上ノ周ニ於ケル角ニ等シ。

系五 二ツノ弦ノ延長ガ圓外ニテ交レバ其ノ夾メル角ハ其ノ二邊ガ夾ム弧ノ差ニ等シキ弧ノ上ノ周ニ於ケル角ニ等シ。

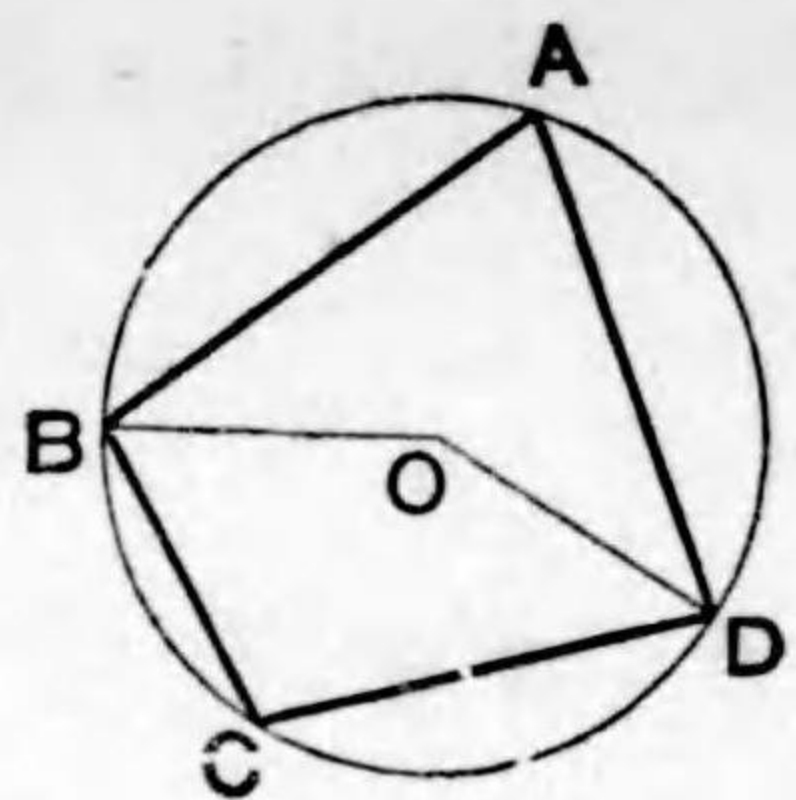
問題 23. 二等邊三角形ノ相等シキ邊ノ一ツヲ直徑トシテ畫ケル圓ハ,底ノ中點ヲ通ル。

問題 24. 三角形ノ二ツノ邊ヲ夫々直徑トシテ畫ケル圓ハ,第三邊又ハ其ノ延長ノ上ニ於テ交ル。

74. 一ツノ四邊形ノ頂點ガ皆同一圓上ニアルトキハ,其ノ四邊形ハ圓ニ内接スト稱シ,圓ハ之ニ外接スト稱ス。

75. 四邊形ノ或外角ノ内對角トハ,其ノ外角ニ隣レル内角ニ對スル内角ヲ云フ。

76. 定理十 圓ニ内接スル四邊形ノ相對スル角ハ互ニ補角ナリ。



四邊形 ABCD ヲ内接四邊形トスレバ

$$\angle A + \angle C = 180^\circ$$

證明  $\angle A$  ハ劣弧 BCD ノ上ニ立ツ中心角 BOD ノ半ニ等シ。

$\angle C$  ハ優弧 BAD ノ上ニ立ツ中心角 BOD ノ半ニ等シ。

$$\therefore \angle A + \angle C = 180^\circ$$

系一 四邊形ノ對角ガ互ニ補角ナラバ、之ニ外接スル圓ヲ畫クコトヲ得。

系二 圓ニ内接スル四邊形ノ外角ハ、其ノ内對角ニ等シ。ソノ逆モ亦真ナリ。

問題 25. 圓ニ内接スル平行四邊形ハ必ズ矩形ナリ。

問題 26. 圓ニ内接スル四邊形ノ相對スル角ガ相等シキトキハ、其ノ頂點ヲ通ラザル對角線ハ直径ナリ。

問題 27.  $\triangle ABC$  ノ頂點 A, B, C ヨリ邊 BC, CA, AB 又ハ其ノ延長ニ下セル垂線ノ足ヲ夫々 D, E, F トシ、垂心ヲ H トス。然ラバ次ノ四點ヲ通ル圓アリ。

1. H, F, B, D.
2. H, D, C, E.
3. H, E, A, F.
4. F, B, C, E.
5. D, C, A, F.
6. E, A, B, D.

$\triangle DEF$  ヲ  $\triangle ABC$  ノ垂足三角形ト稱ス。

問題 28. 銳角三角形ノ垂足三角形ノ内心ハ、原三角形ノ垂心ト一致ス。

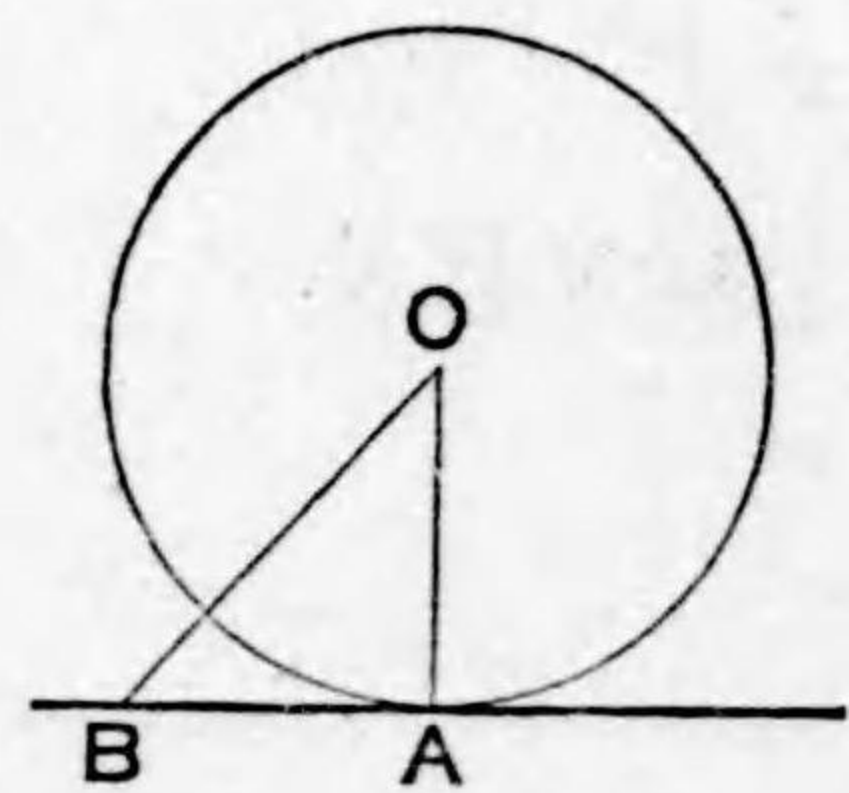
鈍角三角形ノ場合ハ如何。

## 第三章

## 切線

77. 圓ト唯一点ヲ共有スル直線ヲ切線ト稱シ、此ノ點ヲ切點、此ノ直線ハ此ノ點ニ於テ圓ニ切スト稱ス。

78. 定理十一 圓上ノ一点ヲ通り此ノ點ニ引ケル半径ニ垂直ナル直線ハ、再ビ其ノ圓ト交ラズ。



圓 O ノ上ノ一点ヲ A トスレバ A ヨリ OA ニ引ケル垂線ハ再ビ圓ト交ラズ。

證明 AB 上ニ於テ任意ノ點 B ヲ取レバ OA ハ AB ニ垂直ナルヲ以テ、 $OB > OA$  故ニ B ハ圓外ニアリ、從ツテ A ノ外ニ圓ト直線トハ交ルコトナシ。

系 圓周上ノ一点ニ於テ一ツノ切線ヲ引クコトヲ得。而シテ唯一ツニ限ル。

問題 29. ニツノ切線ガ平行ナラバ其ノ切點ハ直径ノ兩端ニアリ。

問題 30. ニツノ同心圓ノ内圓ニ切スル外圓ノ弦ハ、凡テ相等シ。

問題 31. 一ツノ圓ニ引ケルニツノ切線ハ切點ヲ結ブ弦ト等シキ角ヲナス。

問題 32. AB, AC ヲ圓 O ノ上ニ二點 B 及ビ C ニ於ケル切線トス。

1.  $AB = AC$

2.  $\angle BAO = \angle CAO$

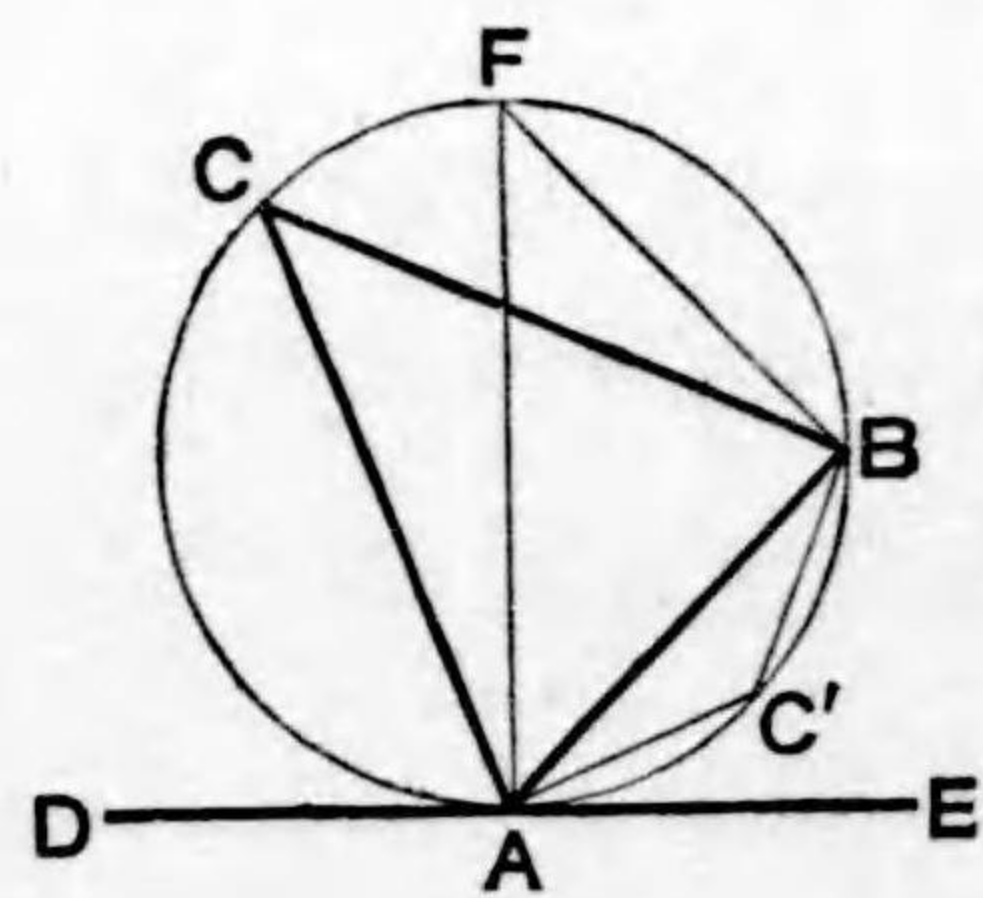
3. AO ハ BC ヲ直角ニ二等分ス。

問題 33. ニツノ平行切線ガ第三ノ切線ト交ル

トキ、其ノ交點ト中心トヲ結ブ直線ハ互ニ垂直ナリ。

問題 34. 圓ノ二ツノ切線ノナス角ガ  $60^\circ$  ニシテ其ノ角頂ヨリ中心マデノ距離 20 尺ナルトキ、圓ノ半徑ヲ求ム。

79. 定理十二 切線及ビ切點ヨリ引ケル弦ノ夾ム角ハ其隣ノ弓形ニ於テノ角ニ等シ。



DE ヲ A ニ於テノ切線トシ、AB ヲ A ヨリ引ケル弦トス。然ルトキハ

$$\angle BAE = \angle C \quad \angle BAD = \angle C'$$

證明 A ヨリ直徑 AF ヲ引キ F ト B ヲ結ベバ、 $\angle ABF$  ハ直角ナルヲ以テ  $\angle F$  ハ  $\angle BAF$  ノ餘角ニシテ  $\angle BAE$  モ亦  $\angle BAF$  ノ餘角ナリ。

$$\therefore \angle BAE = \angle F = \angle C$$

又  $\angle BAD$  ハ  $\angle BAE$  ノ補角ニシテ、 $\angle C'$  ハ  $\angle BAE$  ニ等シキ  $\angle C$  ノ補角ナルヲ以テ

$$\angle BAD = \angle C'$$

系 其ノ逆定理モ亦真ナリ。

問題 35. 直線 ABC ガ圓ト二點 B 及ビ C ニ於テ交リ、且 AD ヲ D ニ於ケル切線トスレバ、 $\triangle ADB$ 、 $\triangle ADC$  ノ角ハ夫々相等シ。

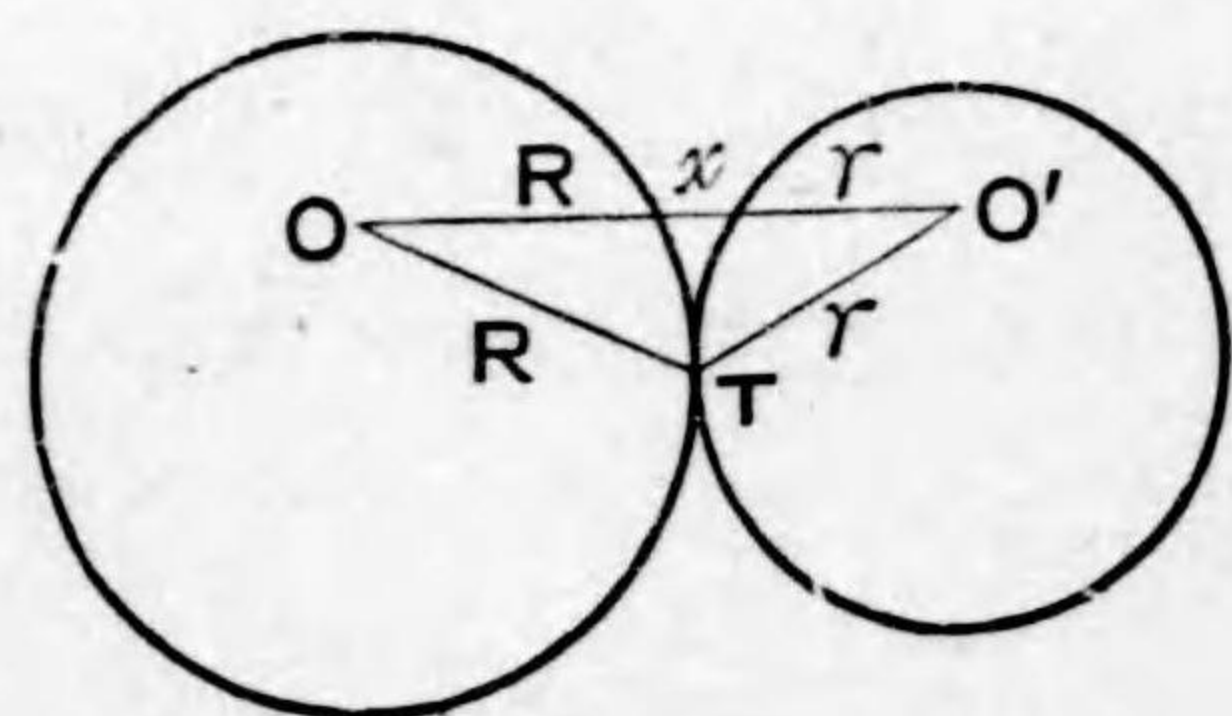
問題 36. AC ヲ弦トシ、D ヲ弧 AC ノ中點トシ、C ニ於ケル切線ト AD トノ交點ヲ B トス、DC ハ  $\angle ACB$  ヲ二等分ス。

## 第四章

## 二つの圓

80. 二つの圓が唯一つの點ヲ共有スルトキハ**相切スト**稱ス、而シテ一ツノ圓ガ他ノ外ニアレバ**外切スト**稱シ、内ニアレバ**内切スト**稱ス。

81. **定理十三** 外切シタル二圓ノ中心ヲ結ブ直線ハ切點ヲ通ル。



二圓  $O, O'$  ガ  $T$  ニ於テ外切スルトキ、直線  $OO'$  ハ  $T$  ヲ通ル。

**證明**  $OO'$  ガ  $T$  ヲ通ラズトスレバ

$$OT + O'T > OO'$$

$$\therefore R + r > R + r + x$$

是即チ不合理ナリ。故ニ  $OO'$  ハ  $T$  ヲ通ル。

**系一** 内切スル二圓ノ中心ヲ結ブ直線ハ切點ヲ通ル。

**系二** 二つの圓ガ相切スレバ、其ノ切點ニ於テ同一ノ切線ヲ有ス。

**系三** 二つの圓ノ大ナル方ノ半徑ヲ  $R$  トシ、小ナル方ノ半徑ヲ  $r$  トシ、中心間ノ距離ヲ  $d$  トスレバ

i 互ニ外方ニ離ル、トキハ  $d > R + r$

ii 外切スルトキハ  $d = R + r$

iii 相交ルトキハ  $R + r > d > R - r$

iv 内切スルトキハ  $d = R - r$

v 一ツガ全ク他ノ内ニアリテ相切セザルトキハ  $d < R - r$

**系四** 系三ノ逆ハ皆眞ナリ。

**問題 37.** 二圓内切スルトキ、一ツノ圓ノ直徑ガ他ノ圓ノ半徑ナラバ、切點ヲ通リテ外圓ニ引ケル

弦ハ皆内圓ニヨリテ二等分セラル。

問題 38. 相交ルニツノ圓ノ中心ヲ結ブ直線ハ、其ノ共通ナル弦ヲ直角ニ二等分ス。

問題 39. ニツノ圓ガ A ニ於テ外切シ、二直線 PAX, QAY ガ夫々ニツノ圓ト P, Q ニ於テ他ノ圓ト X, Y ニ於テ交ルトス。然ラバ PQ ト XY トハ平行ナリ。

問題 40. ニツノ圓ガ A ニ於テ内切シ二直線 APX, AQY ガ内圓及ビ外圓ト P 及ビ X, Q 及ビ Y ニ於テ交レバ、PQ ハ XY ニ平行ナリ。

問題 41. ニツノ圓ガ外切スルトキ、其ノ切點ニ於ケル切線上ノ任意ノ點ヨリニツノ圓ヘ引ケル切線ハ相等シ。

問題 42. ニツノ圓ガ外切スルトキ、其ノ切點ニ於ケル共通切線ハ他ノ一ツノ共通切線ノ切點間ノ距離ヲ二等分ス。

## 第五章

### 内接形 外接形

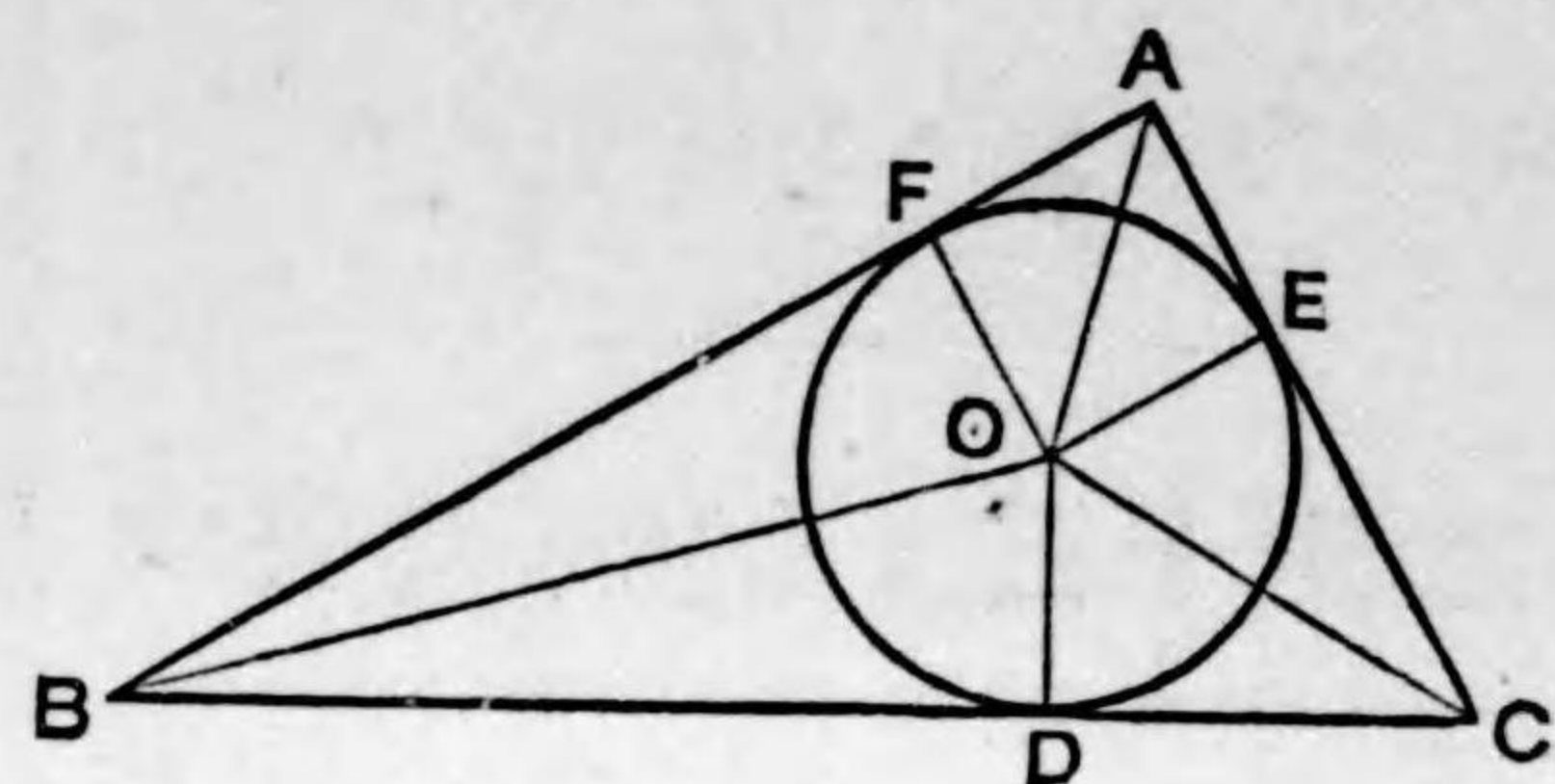
82. 多角形ノ頂點ガ皆同一圓上ニアルトキハ、此ノ多角形ハ圓ニ内接スト稱シ、圓ガ多角形ニ外接スト稱ス。

多角形ノ邊ガ皆同一ノ圓ニ切スルトキハ此ノ多角形ハ圓ニ外接スト稱シ、圓ガ多角形ニ内接スト稱ス。

83. 定理十四 三角形ニ内接スル圓ハ一ツアリ。而シテ唯一ツニ限ル。

$\triangle ABC$ ニ内接スル圓ハ一ツアリ。而シテ唯一ツニ限ル。





**證明**  $\triangle ABC$  ノ各角ノ二等分線ハ一點ニ會シ、而シテ其ノ點ヨリ各邊ニ至ル距離相等シ。故ニ此ノ點ヲ中心トスル一ツノ内接圓アルベシ。然ルニ  $\triangle ABC$  ノ各角ノ二等分線ハ唯一點ニ於テ會スルヲ以テ内接圓ハ唯一ツアルノミ。

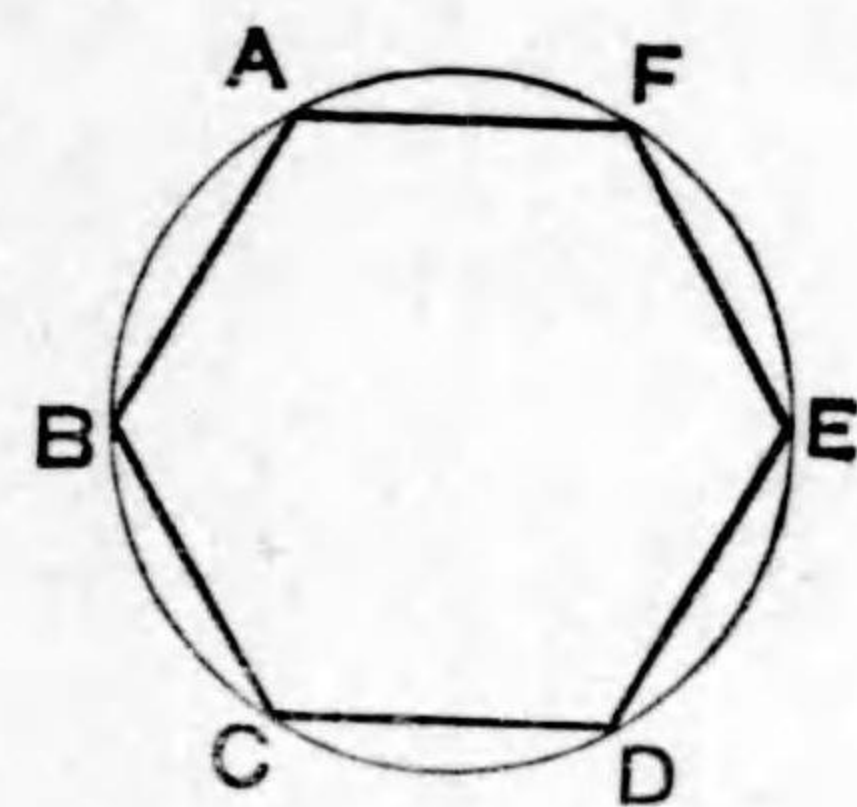
**系** 三角形ノ各邊ノ延長ト各邊トニ切スル圓ハ三ツアリ。而シテ唯三ツニ限ル。

**84.** 三角形ノ二邊ノ延長ト他ノ一邊トニ切スル圓ヲ傍接圓ト稱ス。

三角形ノ内接圓ノ中心ヲ**内心**ト稱シ、傍接圓ノ中心ヲ**傍心**ト稱ス。

**問題 43.** 直角三角形ノ三邊ガ夫々 6 尺, 8 尺, 及 10 尺ナルトキ、内接圓ノ半徑ヲ求ム。

**85. 定理十五** 圓周ガ三ツ以上ノ弧ニ等分セラレルトキハ、此等ノ弧ノ弦ノナス内接形ハ正多角形ナリ。



圓周ガ  $AB, BC, CD$  等ノ如ク若干等分セラレルトキ、 $AB, BC, CD$  等ナル弦ノナス内接形ハ正多角形ナリ。

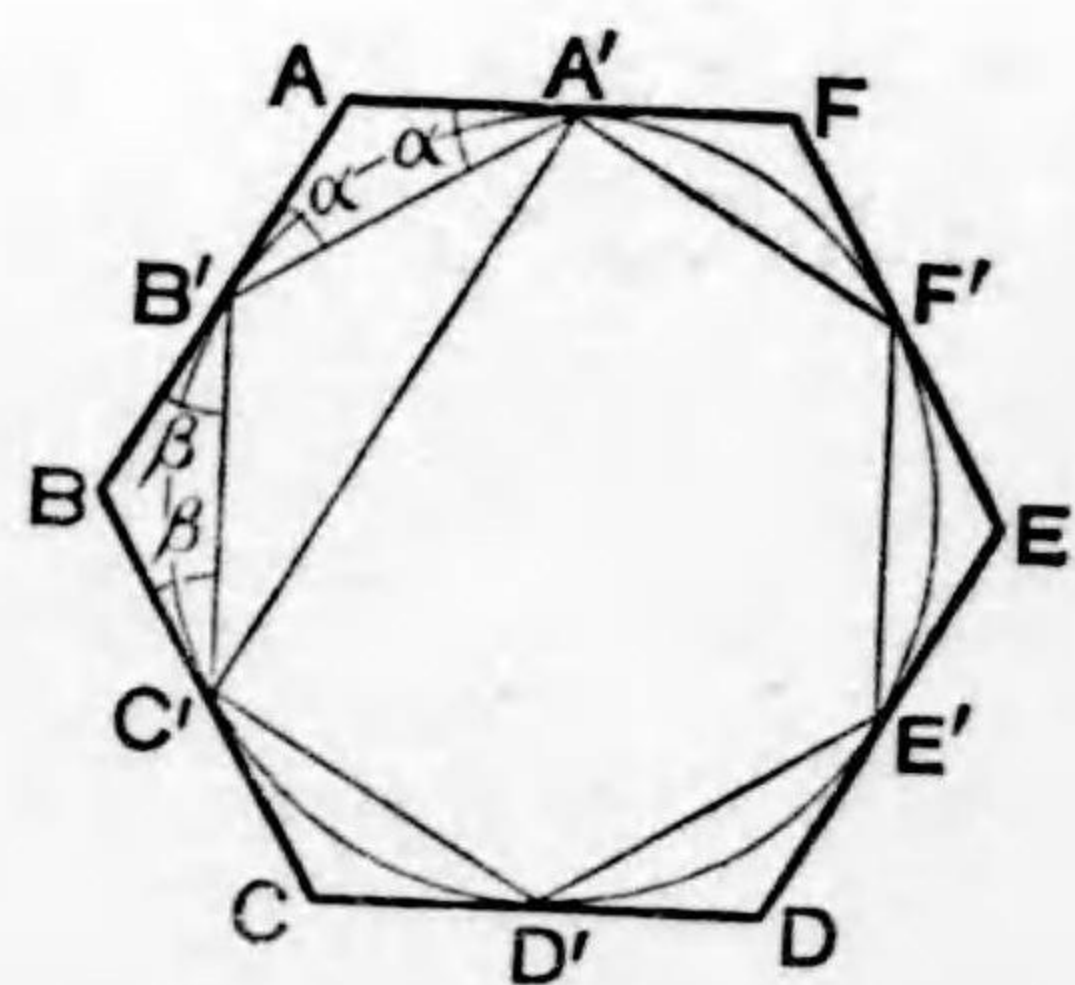
**證明**  $AB, BC, CD$  等ノ弧ハ皆相等シキヲ以テ、其ノ弦モ亦相等シ。故ニ内接形ノ各邊相等シ。

内接形ノ各角ハ等分サレタル弧ノ中ニツダケテ圓周ヨリ引キ去リタル弧ノ上ニ立ツ。依ツテ各角ハ等弧ノ上ニ立ツヲ以テ相等シ。

故ニ此ノ内接形ハ正多角形ナリ。

問題 44. 多角形ノ各邊ヲ直角ニ二等分スル凡テノ直線ガ同一點ニ於テ交ルトキハ、之ニ外接スル圓ヲ畫クコトヲ得。

86. 定理十六 圓周ガ三ツ以上ノ弧ニ等分セラルルトキハ、此等ノ等分點ニ引ケル切線ノナス外接形ハ正多角形ナリ。



圓周ガ  $A'B', B'C', C'D'$  等ノ如ク若干等分セラ  
ルルトキハ、 $A', B', C', D'$  等ノ點ニ引ケル切線

ノナス外接形ハ正多角形ナリ。

證明  $A'$  ト  $C'$  ヲ結ベバ

$$A'B' = B'C'$$

而シテ  $\angle \alpha = \angle A'C'B' = \angle B'A'C' = \angle \beta$

$$\therefore \angle A = \angle B$$

又  $A'A = AB' = B'B = BC' = C'C = CD' = \dots$

$$\therefore AB = BC$$

同様ニシテ、各角相等シク、各邊相等シキコトヲ知ル。

故ニ正多角形ナリ。

問題 45. 多角形ノ各角ノ二等分線ガ同一ノ點ニ於テ交ルトキハ、之ニ内接スル圓ヲ畫クコトヲ得。

## 第二篇ノ問題

問題 46. 圓内ノ一與點ヨリ圓ニ引ケル凡テノ直線ノ中

1. 最大ナルモノハ中心ヲ通ル。
2. 最小ナルモノハ其ノ延長ガ中心ヲ通ル。

與點ガ圓外ニアラバ如何。

問題 47. 四邊形 ABCD ガ圓ニ外接スルトキハ

$$AB+CD=BC+DA$$

而シテ逆モ亦真ナリ。

問題 48.  $\triangle ABC$  ノ一邊 AB ヲ直徑トスル圓ヲ畫キ, BC ニ平行ナル直徑 XY ヲ引ク。然ラバ XB, YB ハ B ニ於ケル外角及内角ヲ二等分ス。

問題 49.  $\triangle ABC$  ヲ圓ニ内接スル正三角形トス。劣弧 BC 上ニ一點 P ヲ取レバ

$$PA=PB+PC$$

問題 50.  $\triangle ABC$  ノ垂心ヲ H トシ, 此ノ三角形ノ外接圓ノ直徑ヲ AP トス。然ラバ BC, HP ハ互ニ他ヲ二等分ス。

問題 51.  $\triangle ABC$  ノ内接圓ガ BC ト D ニ, CA

ト E ニ, AB ト F ニ於テ切ストス。然ラバ

$$AF=AE=s-a$$

$$BF=BD=s-b$$

$$CD=CE=s-c$$

但シ  $2s=a+b+c$

問題 52.  $\triangle ABC$  ノ傍接圓ガ AB, AC ノ延長ト夫々 F 及ビ E ニ於テ切ストスレバ

$$AF=AE=s$$

又 BC トノ切點ヲ D トスレバ

$$BD=s-c$$

$$CD=s-b$$

但シ  $2s=a+b+c$

問題 53. 相交ルニツノ圓ノ交點ノ一ツヨリニツノ圓ニ夫々直徑ヲ引クトキ, 其ノ端ヲ連スル直線ハ他ノ交點ヲ通ル。

問題 54. 相交ルニツノ圓ノ交點ヲ通り, ニツノ圓ニテ終ル直線中最大ナルモノハ, 二圓ノ中心ヲ結ブ直線ニ平行ナリ。

問題 55. 三角形ノ外接圓上ノ任意ノ一點ヨリ各邊ヘ下シタル垂線ノ足ハ一直線上ニアリ。

之ヲ Simson (スコットランドノ數學者 1687—1768)ノ定理ト稱シ、此ノ直線ヲ Simson 線ト稱ス。

問題 56.  $\triangle ABC$  ノ外心  $O$  ヨリ  $BC$  へ垂線  $OL$  ヲ下ス。  $H$  ヲ垂心トスルトキハ

$$2OL = AH$$

問題 57. 圓  $C$  外ノ一點  $T$  ヨリ之ニ切線  $TP$  ヲ引ク。  $CT$  ト圓トノ交點ヲ  $A$  トシ、 $P$  ヨリ  $CT$  ニ垂線  $PN$  ヲ下セバ  $AP$  ハ  $\angle TPN$  ヲ二等分ス。

問題 58.  $X$  ニ於テ内切スルニツノ圓アリ。内圓ノ  $A$  ニ於ケル切線ガ外圓ト  $P, Q$  ニ於テ交ルトス。然ラバ  $AX$  ハ  $\angle PXQ$  ノ二等分線ナリ。

問題 59.  $\triangle ABC$  ノ外側ニ正三角形  $BDC, CEA, AFB$  ヲ畫ク、然ルトキハ各ノ正三角形ニ外接スルニツノ圓ハ一點ニ會ス。又  $AD, BE, CF$  モ一點ニ會ス。

問題 60. 三角形ノ各邊ノ中點、各角頂ヨリ對邊ニ引ケル垂線ノ足、及ビ垂心ト各角頂トヲ結ビタル直線ノ中點ヲ通リテ一ノ圓ヲ畫クヲ得ベシ。

此ノ圓ヲ其ノ三角形ノ九點圓ト稱ス。

### 第三篇

### 作圖題

87. 作圖題トハ與條件ヲ満足スル處ノ圖形ヲ畫クコトヲ求ムル問題ナリ。

初等幾何學ノ作圖ニ於テ用フルコトヲ許サレタル器械ハ定木及ビ兩脚器ニ限ル。

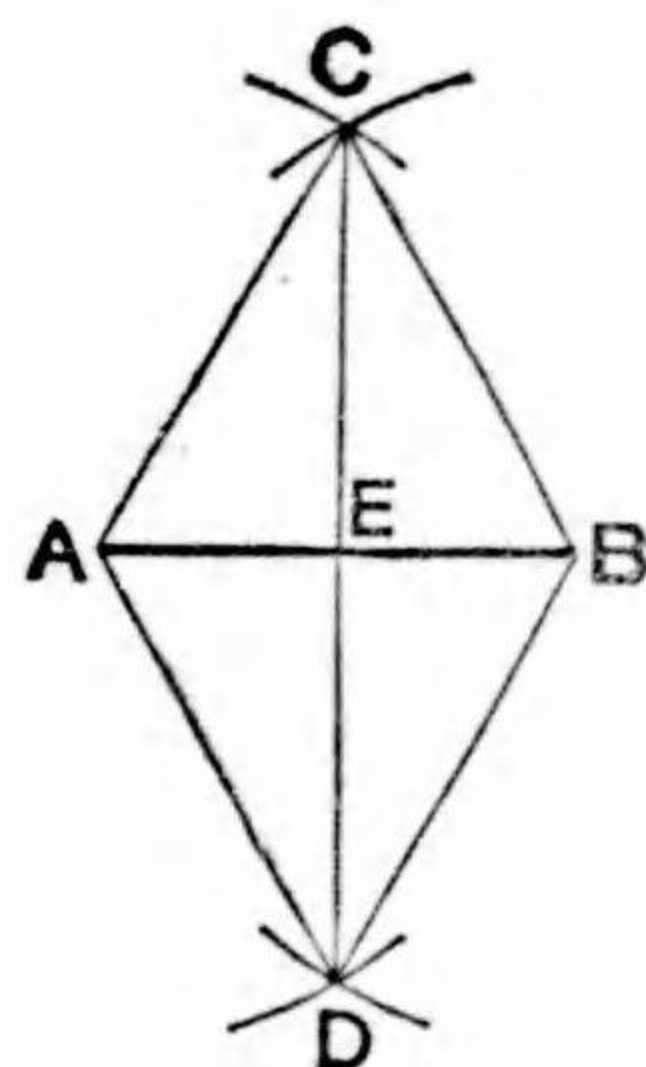
定木ハ直線ヲ引ク爲ニ用フルモノニシテ兩脚器ハ圓ヲ畫キ又ハ距離ヲ移ス爲ニ用フルモノナリ。

次ノ三ヶ條ハ最初ヨリ出來得ルモノトシテ承認セラル。之ヲ作圖ノ公法ト稱ス。

1. 二點間ニ直線ヲ引クコト。
2. 有限ナル直線ヲ任意ニ延長スルコト。
3. 一點ヲ中心シテ任意ノ半徑ヲ以テ圓ヲ畫クコト。

### 88. 作圖題一 與直線ヲ二等分ス

ルコト。



作圖 ABヲ與直線トス。

A及ビBヲ中心トシ、ABヲ半徑トシテニツノ圓ヲ畫ケ。其ノ交點ヲC及ビDトス。CトDトヲ結ブ直線ガABト出會ヒタル點Eガ即チ二等分點ナリ。

證明 A及ビBヲCトDトニ結ベ。

然ラバ對邊相等シキ故 ACBDハ平行四邊形

ナリ。

故ニCDナル對角線ハABヲEニ於テ二等分ス。

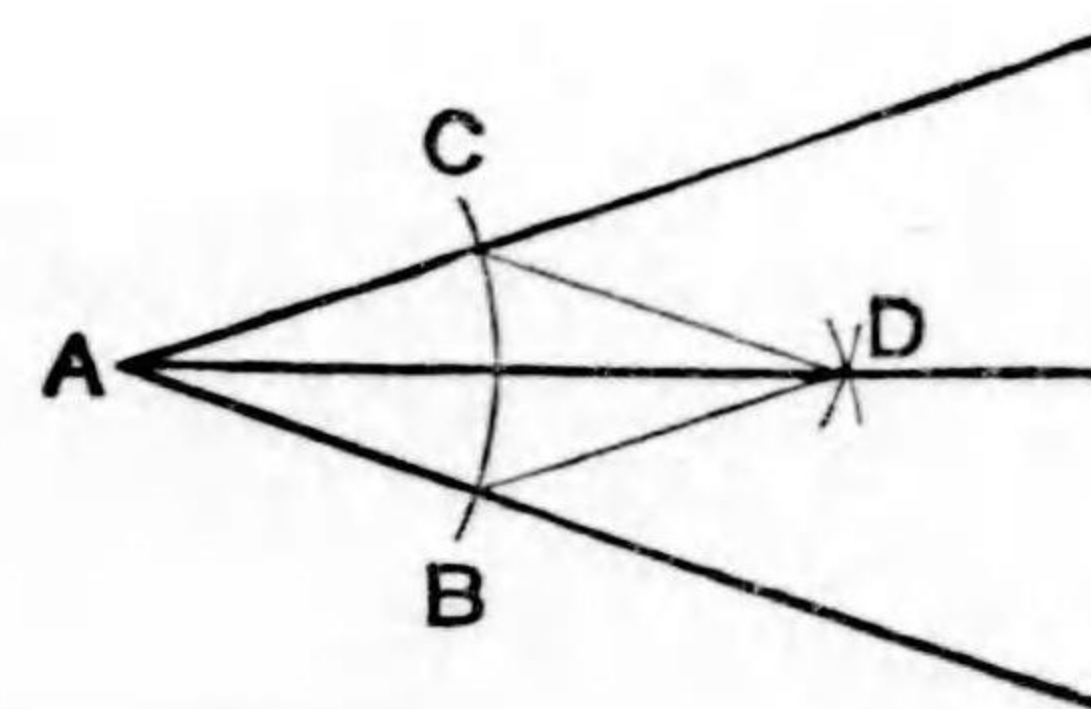
問題 1. 與直線ヲ $2^n$ 等分セヨ。但シ $n$ ハ任意ノ整數トス。

問題 2. 二等邊三角形ノ頂點ヨリ底ヘ垂線ヲ引ケ。

問題 3. 與直線ノ中點ニ於テ垂線ヲ立テヨ。

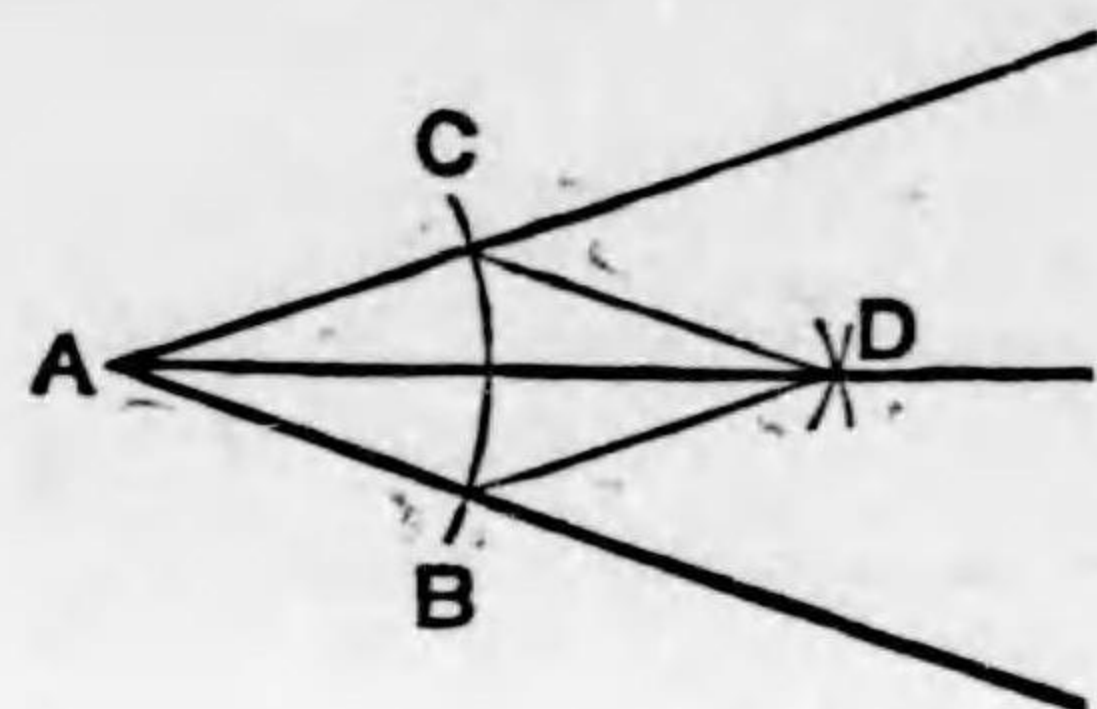
### 89. 作圖題二 與角ヲ二等分スル

コト。



作圖  $\angle BAC$ ヲ與角トス。

Aヨリ任意ニ相等シクAB, ACヲトリ、B及ビCヲ中心トシ、ABヲ半徑トシテ圓ヲ畫キ、其



ノ交點 D ト A トヲ結ビ付クレバ, AD ハ  $\angle BAC$  ヲ二等分ス。

**證明** CD, DB ヲ引ケバ三邊相等シキヲ以テ

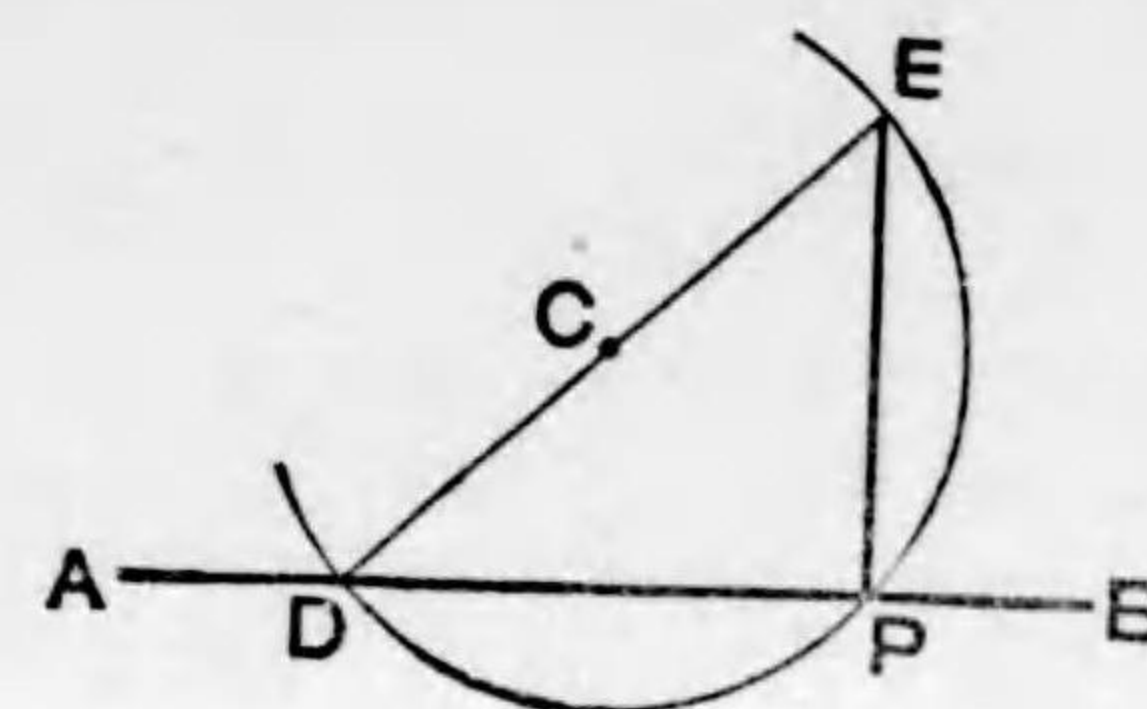
$$\triangle ABD \equiv \triangle ACD$$

$$\therefore \angle BAD = \angle CAD$$

**問題 4.** 與角ヲ  $2^n$  等分ヨセ。但シ  $n$  ハ任意ノ整數トス。

**問題 5.**  $\triangle ABC$  ノ底 BC 上ヨリ AB, AC ニ引ケル垂線ガ等シクナル點ヲ, BC 上ニ見出セ。

**90. 作圖題三** 與直線上ノ與點ヨリ之ニ垂線ヲ引クコト。



**作圖** 與直線 AB 上ノ與點ヲ P トス。

AB 直線外任意ノ點 C ヲトリ, CP ヲ半徑トシテ圓ヲ畫キ, 再ビ D ニ於テ AB ニ交ラシメ DC ヲ引キ E ニ於テ此ノ圓ト交ラシム。然ラバ EP ハ求ムル處ノ垂線ナリ。

**證明** 半圓ニ於ケル角ナルヲ以テ

$$\angle DPE = 90^\circ$$

$$\therefore PE \perp AB$$

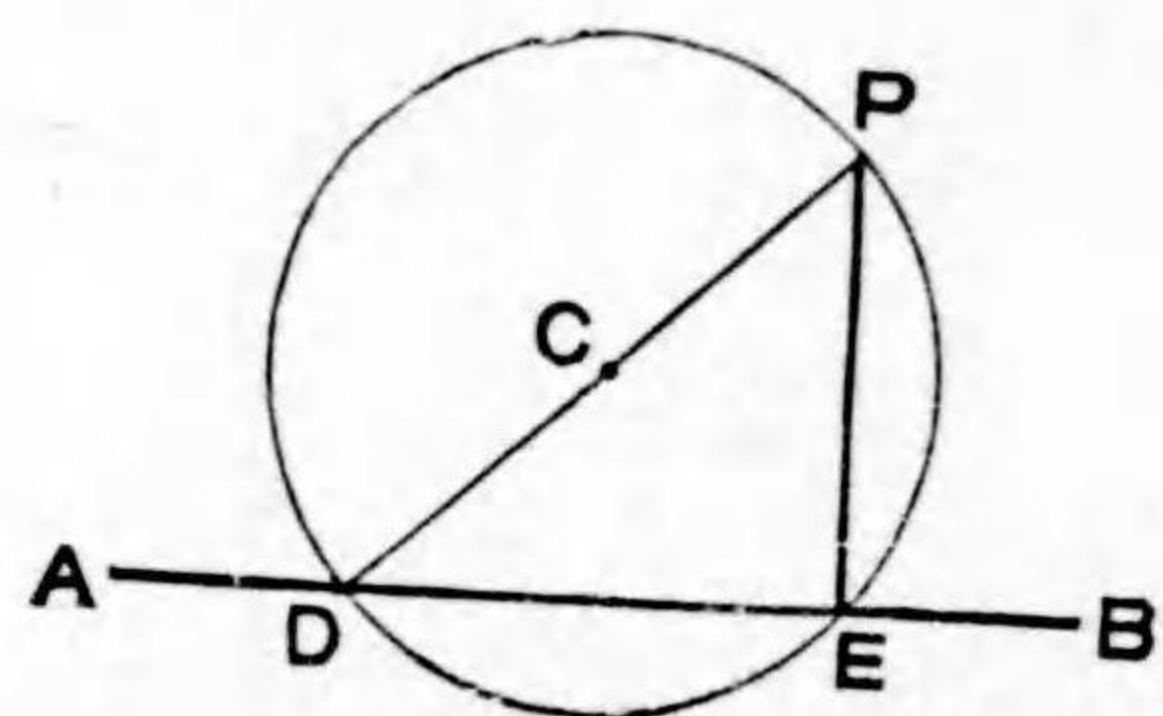
**問題 6.** 此ノ作圖法ニ於テ圓ガ直線ト再ビ他ノ點ニ於テ出會ハザルトキハ如何ニスベキカ。

**問題 7.** 二等邊三角形ノ性質ヲ應用シテ之ト異ナル方法ニテ作圖セヨ。

**問題 8.** ニツノ與點ヨリノ距離ガ等シキ點ヲ與直線上ニ求ム。

問題 9.  $45^\circ$  の角ヲ作レ。

91. 作圖題四 與直線外ノ與點ヨリ之ニ垂線ヲ引クコト。



作圖 與直線 AB 外ノ與點ヲ P トス。

P ト AB 線上ノ任意一點 D トヲ結ビ之ヲ直徑トシテ圓ヲ畫キ, 再ビ E ニ於テ AB ニ交ラシム。

然ラバ PE ハ AB ニ垂線ナリ。

證明 半圓ニ於ケル角ナルヲ以テ

$$\angle DEP = 90^\circ$$

∴

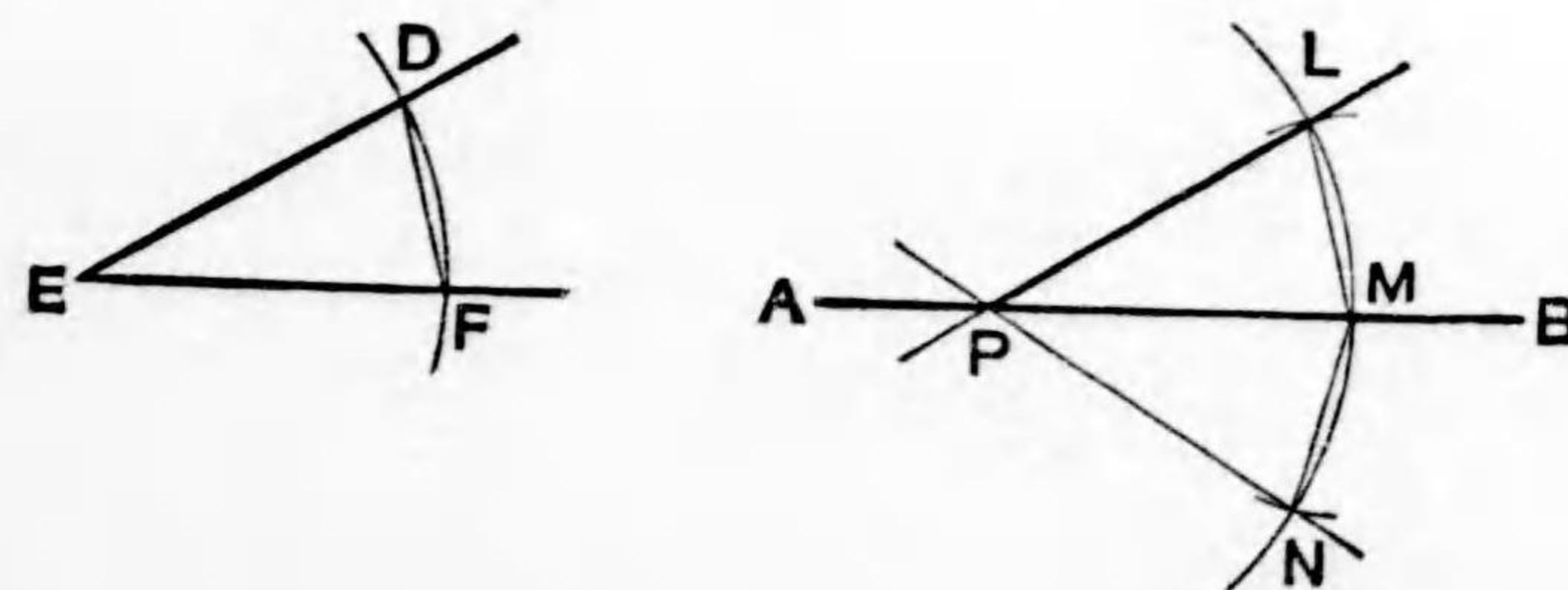
$$PE \perp AB$$

問題 10. 此ノ作圖法ニ於テ圓ガ直線ト再ビ他ニ點ニ於テ出會ハザルトキハ如何ニスベキカ。

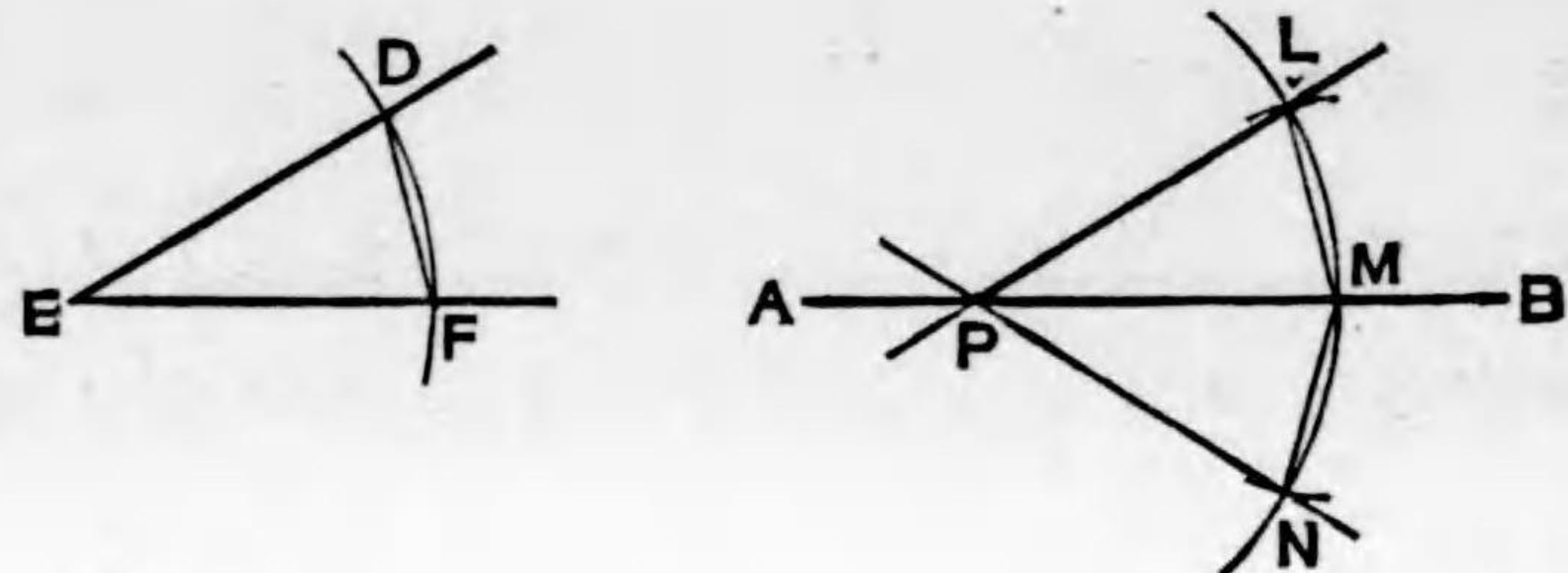
問題 11. 二等邊三角形ノ性質ヲ應用シテ, 之ト異ル方法ニテ作圖セヨ。

問題 12. 與直線 CD ノ兩側ニ二點 A, B アリ, CD 上ニ一點 P ヲ求メ, 直線 CD ヲシテ  $\angle APB$  ノ二等分線タラシメヨ。

92. 作圖題五 與直線上ノ與點ニ於テ之ト與角ニ等シキ角ヲナス直線ヲ引クコト。



作圖  $\angle E$  ヲ與角トシ, 與直線 AB 上ノ與點ヲ P トス。



∠Eノ頂點Eヲ中心トシ任意ノ半徑ヲ以テ圓ヲ畫キ、二邊トD, Fニ於テ交ラシム。

次ニP點ヲ中心トシ同ジ半徑ヲ以テ圓ヲ畫キ、之トABトノ交點Mヲ中心トシ、FDニ等シキ半徑ヲ以テ圓ヲ畫キ、前ノ圓トL及ビNニ於テ交ラシム。然ラバPL, PNハ求ムル直線ナリ。

證明 三邊相等シキヲ以テ

$$\triangle DEF \equiv \triangle LPM \equiv \triangle NPM$$

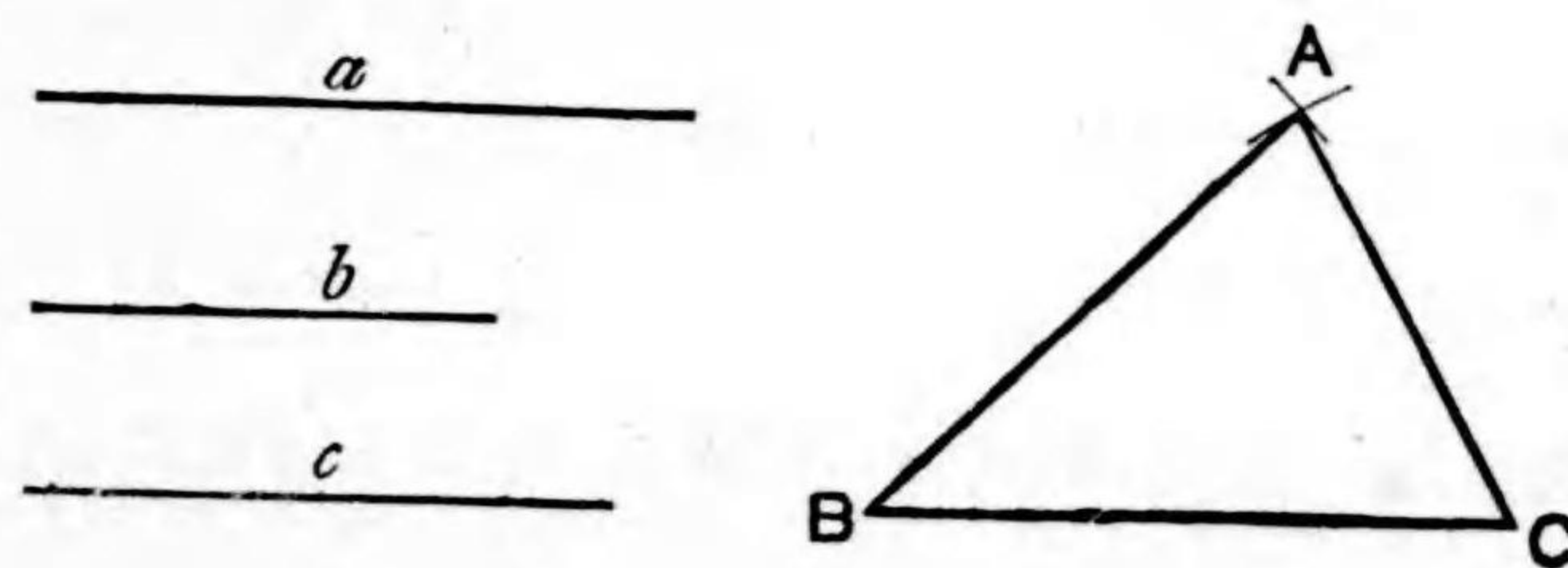
$$\therefore \angle LPM = \angle NPM = \angle E$$

問題 13. 與點ヲ通り與直線ニ平行ナル直線ヲ引ケ。

問題 14. 與點ヨリ與直線ニ直線ヲ引キ、其ノ間ノ角ヲ與角ニ等シカラシメヨ。

問題 15. 位置ノ與ヘラレタル二直線アリ。之ヲ延長シテ交ラシムルコトナシニ其ノ角ヲ見出セ。

### 93. 作圖題六 三邊ヲ與ヘテ三角形ヲ作ルコト。



作圖 與直線 a, b, cヲ三邊トセヨ。

BCヲaニ等シクトリ、B, Cナル兩端ヲ中心トシ、c, bヲ半徑トシテ圓ヲ畫キ、Aニ於テ交ラシム。然ラバ△ABCハ求ムル三角形ナリ。

證明 AB=c, AC=b, BC=a

故ニ△ABCハ與條件ニ適ス。



吟味  $a, b, c$  ノ中ニツノ和ハ他ノ一ツヨリ大ナラザレバ、此ノ作圖ハ不能ナリ。何トナレバ三角形ノ二邊ノ和ハ他ノ一邊ヨリ大ナレバナリ。

問題 16. 五寸、七寸、一尺五寸ナル三邊ヲ有スル三角形ヲ作レ。

問題 17.  $x$  寸、 $y$  寸、 $z$  寸ノ邊ヲ有スル三角形ヲ作レ。但シ  $x+y=10$ ,  $2x=3y$ ,  $z=3$ .

問題 18. 一邊ヲ與ヘテ正三角形ヲ作レ。

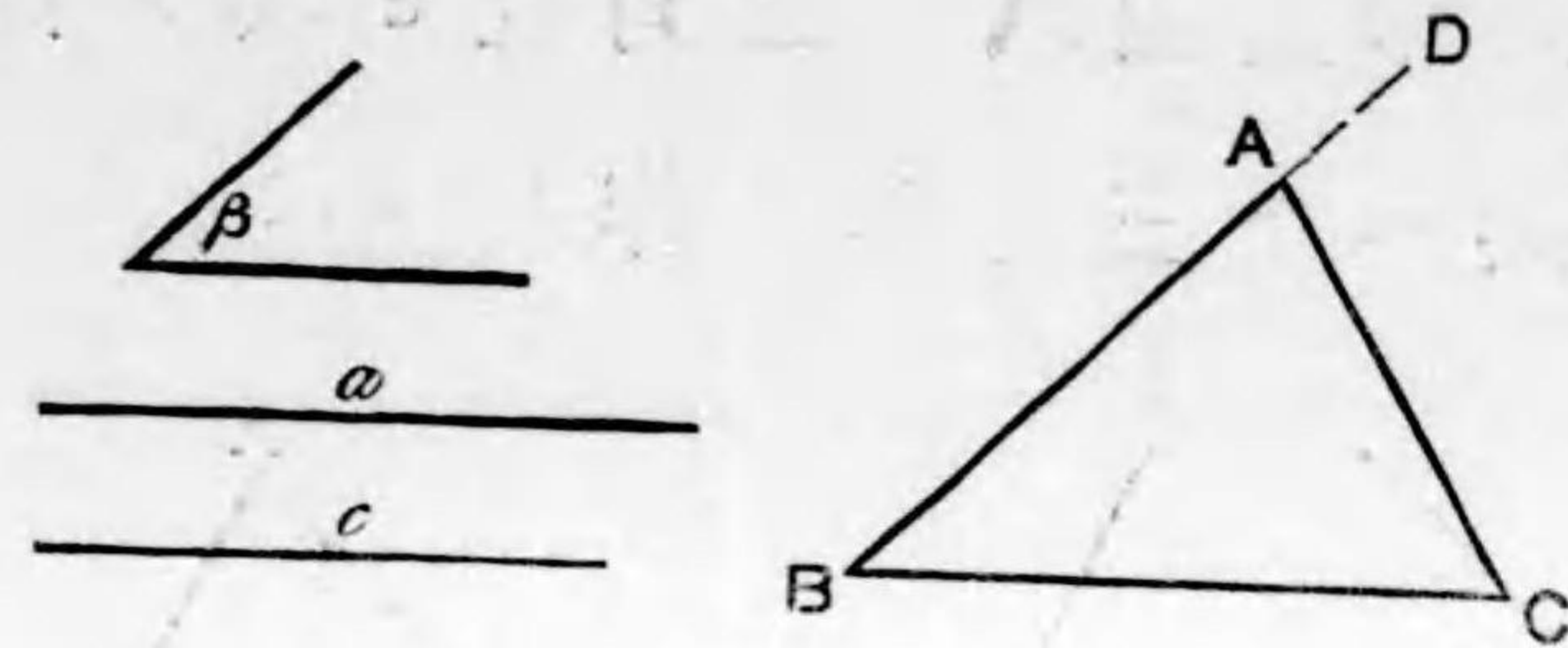
問題 19.  $30^\circ$ ,  $75^\circ$  ノ角ヲ作レ。

問題 20. 直角ヲ三等分セヨ。

問題 21. 一邊ノ長サ 3 寸斜邊ノ長サ 6 寸ナル直角三角形ヲ作レ。

94. 作圖題七 二邊及ビ其ノ夾角ヲ與ヘテ三角形ヲ作ルコト。

作圖  $a, c$  ヲ二邊トシ  $\angle\beta$  ヲ夾角トス。



BC ヲ  $a$  ニ等シクトリ、B ニ於テ  $\angle\beta$  ニ等シキ角ヲナス直線 BD ヲ引キ  $c$  ニ等シク BA ヲトレバ  $\triangle ABC$  ハ求ムル三角形ナリ。

證明  $\angle B = \angle\beta$ ,  $BA = c$ ,  $BC = a$

故ニ  $\triangle ABC$  ハ與條件ニ適ス。

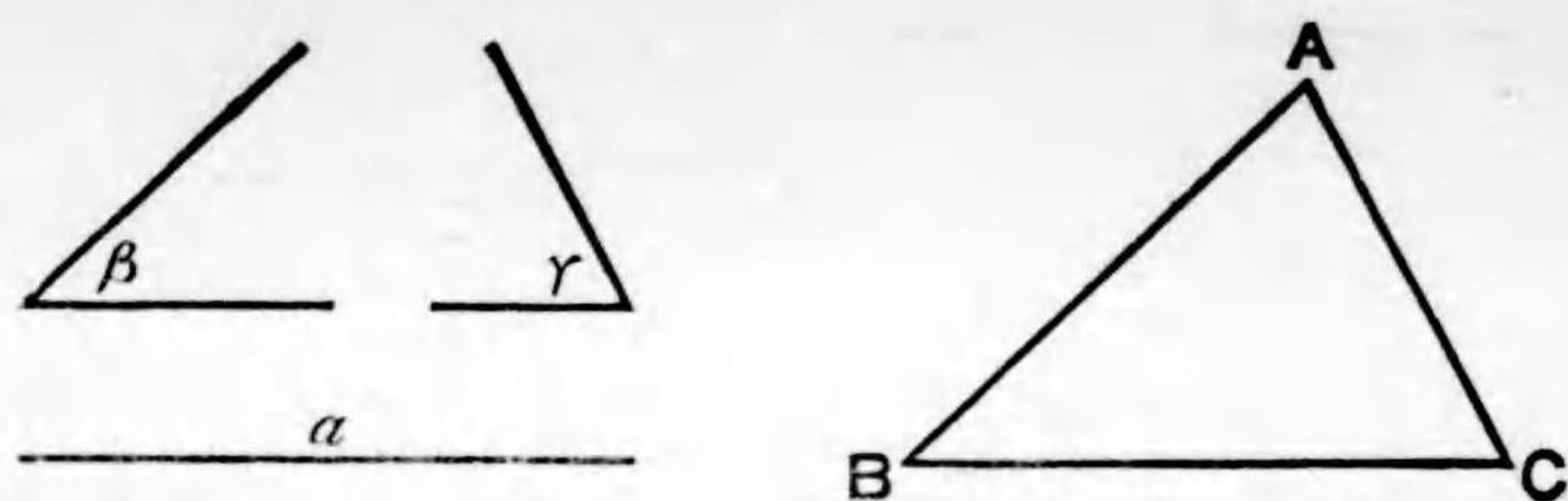
吟味  $\angle\beta$  ハ二直角ヨリ小ナラザレバ不能ナリ。何トナレバ三角形ノ内角ノ和ハ二直角ニ等シケレバナリ。

問題 22. 二邊ト夾角トヲ知リテ平行四邊形ヲ作レ。

問題 23. 二邊ヲ知リテ直角三角形ヲ作レ。

問題 24. ニツノ對角線ト其ノ夾ム處ノ角ヲ知リテ、平行四邊形ヲ作レ。

95. 作圖題八 二角及ビ其ノ間ノ邊ヲ與ヘテ三角形ヲ作ルコト。



作圖  $\angle B$  及  $\angle C$  ヲ二ツノ角トシ,  $a$  ヲ其ノ間ノ邊トス。

BC ヲ  $a$  ニ等シクトリ, B ニ於テ BC ト  $\angle B$  ニ等シキ角ヲナス直線 BA ヲ引キ, C ニ於テ CB ト  $\angle C$  ニ等シキ角ヲナス直線ヲ引キ, BA ト A ニ於テ出會ハシムレバ,  $\triangle ABC$  ハ求ムル所ノ三角形ナリ。

證明  $\angle B = \angle \beta$   $\angle C = \angle \gamma$   $BC = a$

故ニ  $\triangle ABC$  ハ與條件ニ適ス。

吟味  $\angle \beta + \angle \gamma$  ハ二直角ヨリ小ナラザルヲ得ズ。何トナレバ三角形ノ三ツノ内角ノ和ハ二直角ニ等シケレバナリ。

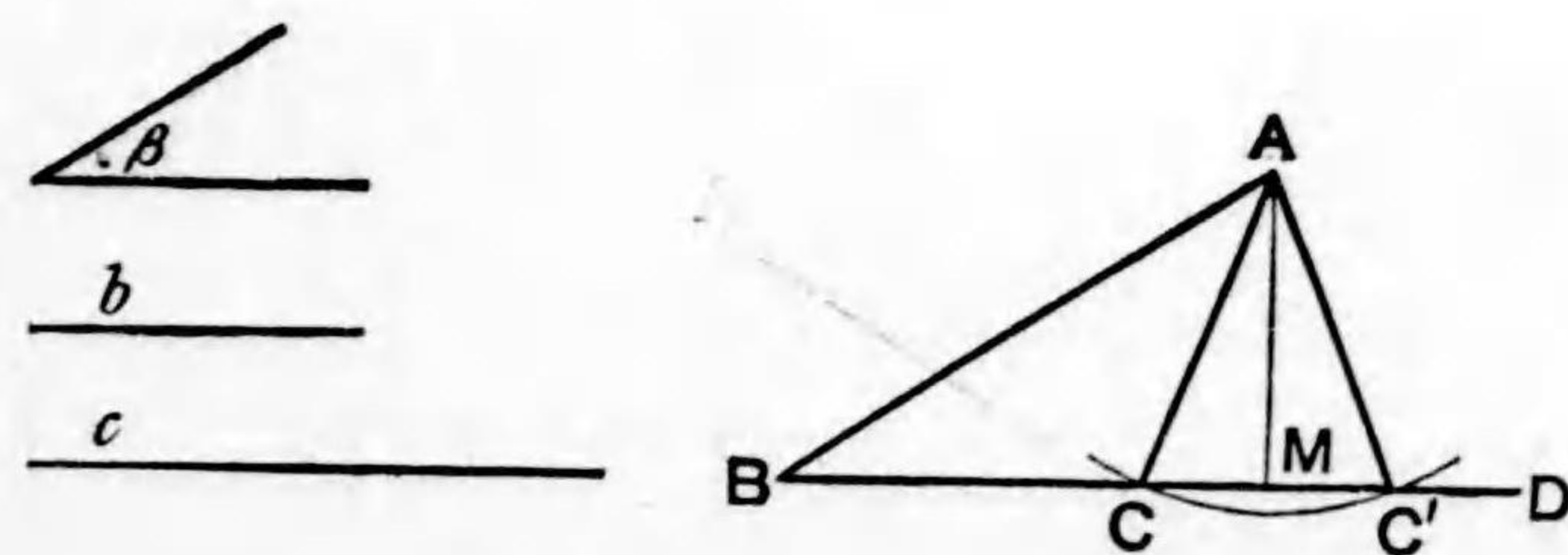
問題 25. 二角及ビ其一ツニ對スル邊ヲ與ヘテ三角形ヲ作レ。

問題 26. 斜邊ト一ツノ銳角トヲ知リテ直角三角形ヲ作レ。

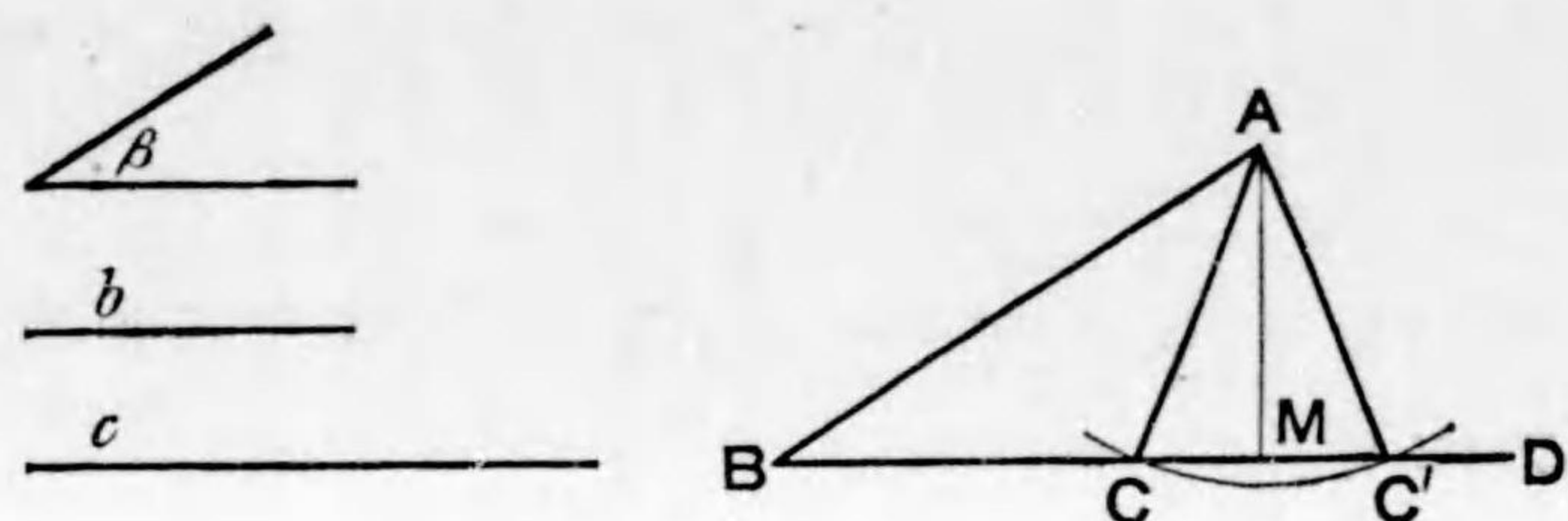
問題 27. 底ト頂角トヲ知リテ二等邊三角形ヲ作レ。

問題 28. 一ツノ頂點ヨリ對邊ヘ下セル垂線ヲ與ヘテ正三角形ヲ作レ。

96. 作圖題九 二邊及ビ其ノ一ツニ對スル角ヲ與ヘテ三角形ヲ作ルコト。



作圖  $c$  ヲ一邊トシ  $\angle B$  ヲ一角トシ,  $\angle B$  ニ等シキ角ニ對スル邊ヲ  $b$  トス。



$\angle B$ ニ等シク  $\angle ABD$ ヲ作り、 $AB$ ヲ  $c$ ニ等シクシ、 $A$ ヲ中心トシ  $b$ ヲ半徑トシテ圓ヲ畫クトキハ、 $BD$ ト  $C, C'$ ナル二點ニ於テ交ル。

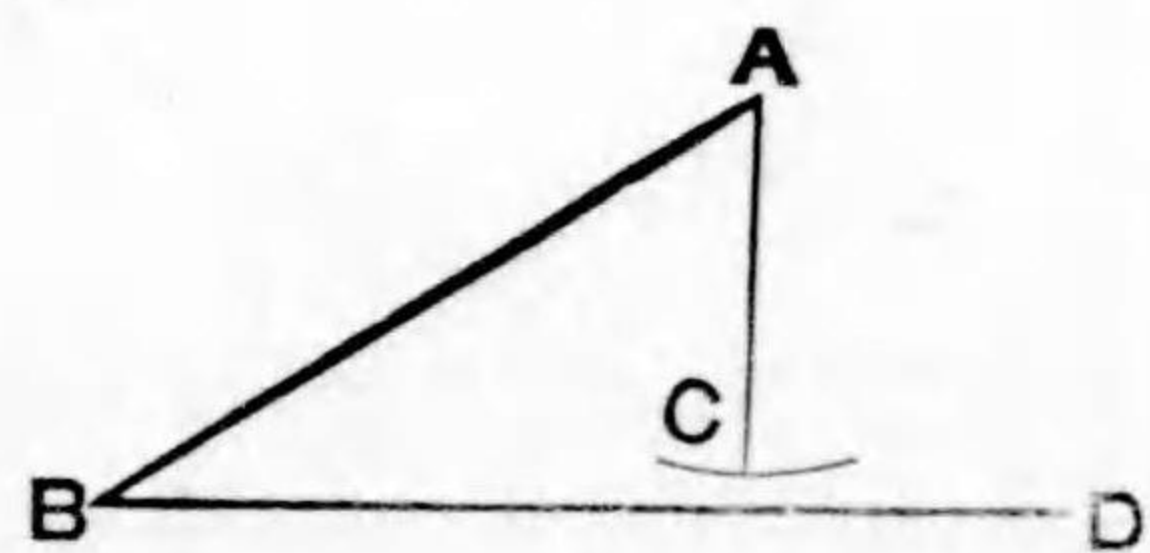
然ルトキ  $\triangle ABC$  及ビ  $\triangle ABC'$ ハ求ムル所ノ三角形ナリ。

證明  $\angle B = \angle \beta$   $AB = c$   $AC = b$   $AC' = b$   
故ニ  $\triangle ABC$  及ビ  $\triangle ABC'$ ハ各與條件ニ適ス。

吟味 i. 與角ガ銳角ナルトキ、

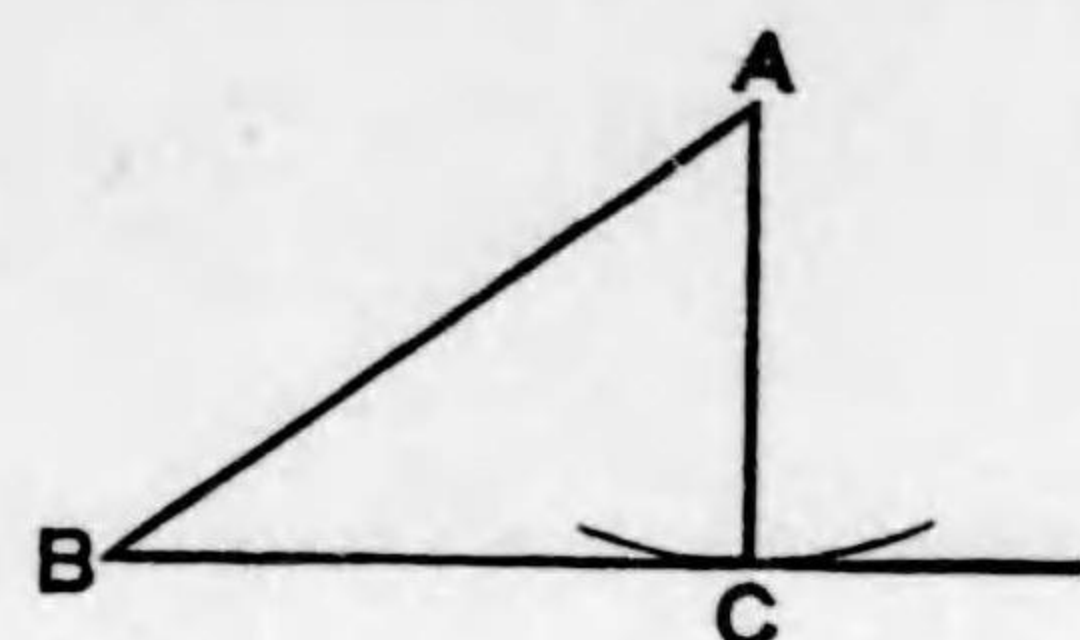
$A$ ヨリ  $BD$ ニ引ケル垂線  $AM$ ヲ  $d$ トス。

第一ノ場合。

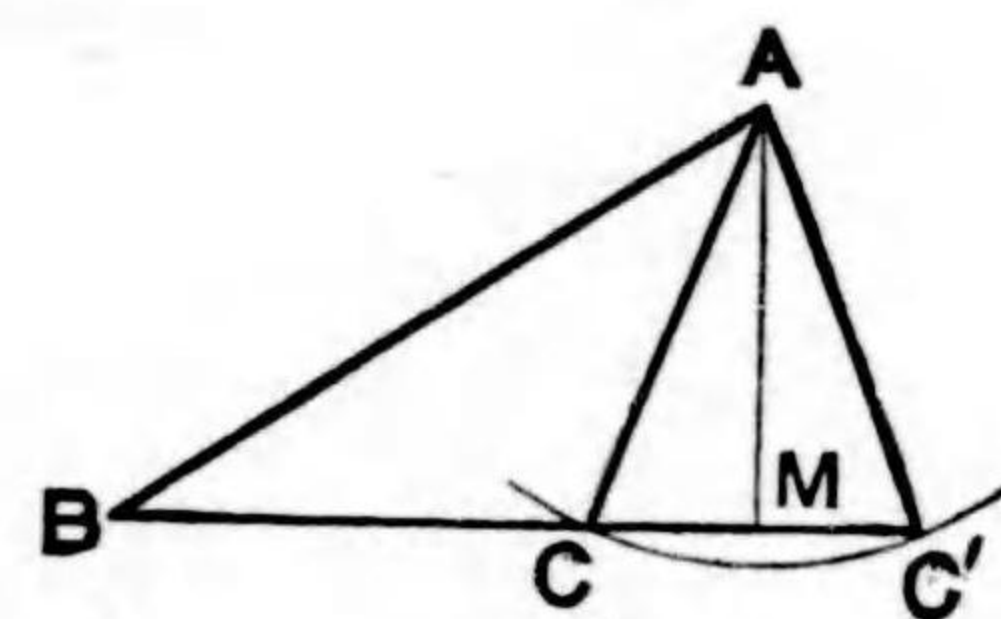


$b < d$  ナラバ不能ナリ。

第二ノ場合。

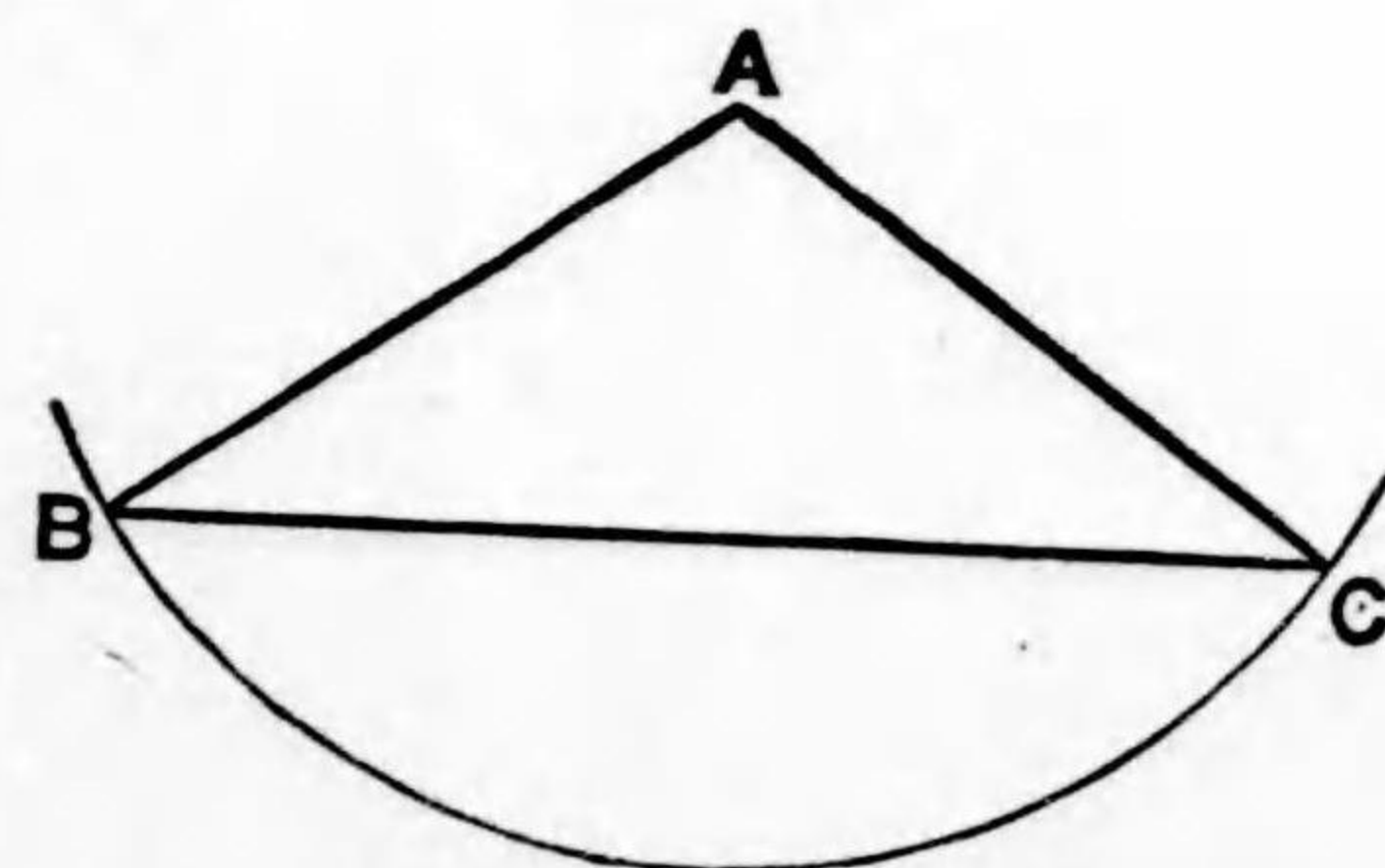


$b = d$  ナラバ  $\triangle ABC$  ナル一ツノ直角三角形ヲ得。  
第三ノ場合。



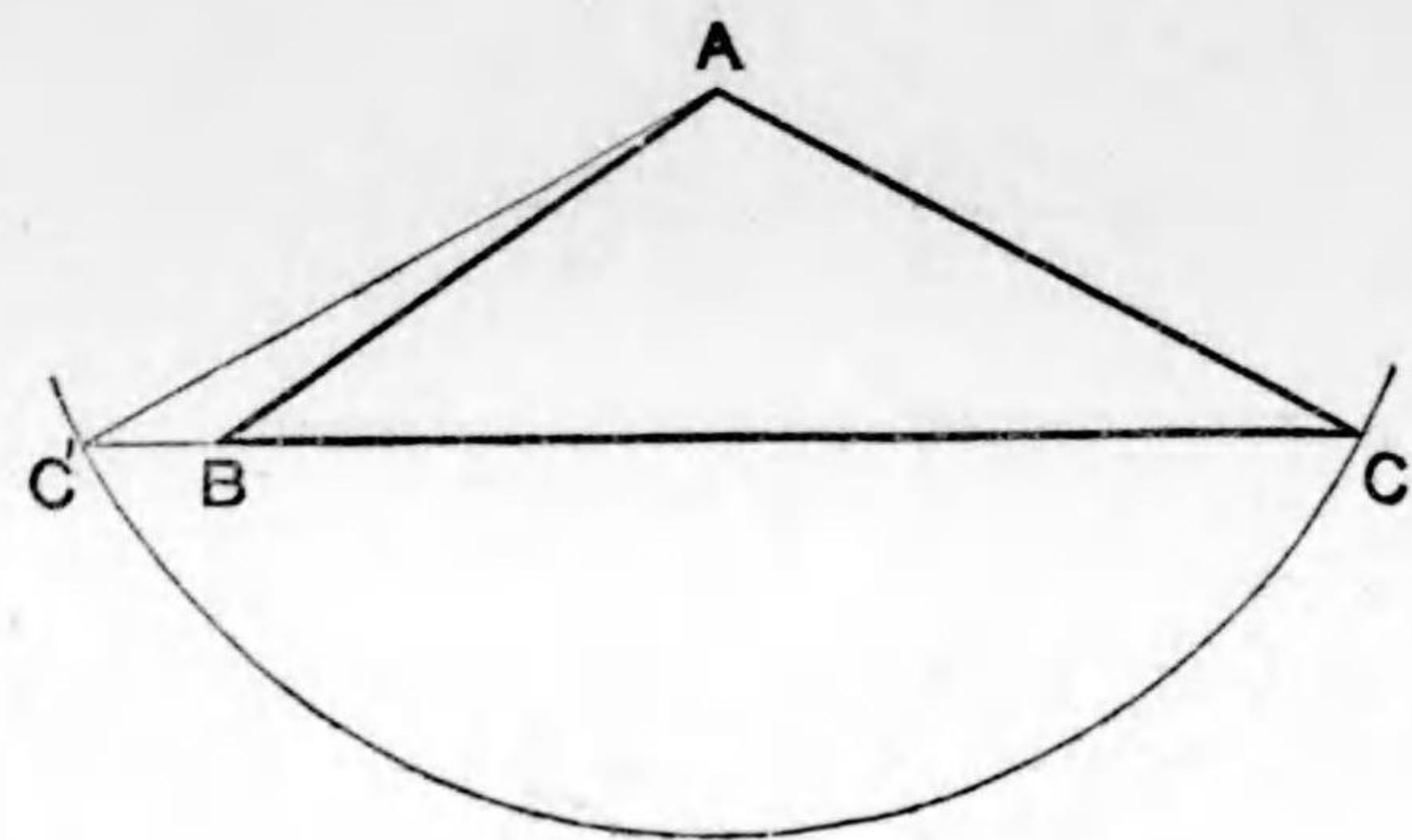
$c > b > d$  ナラバ圖ノ如ク  $\triangle ABC, \triangle ABC'$  ナル二ツノ解ヲ得。之ヲ名ヅケテ三角形ノ兩意ノ場合ト稱ス。

第四ノ場合。



$b = c$  ナラバ  $\triangle ABC$  ナル一ツノ解ヲ得。

第五ノ場合。

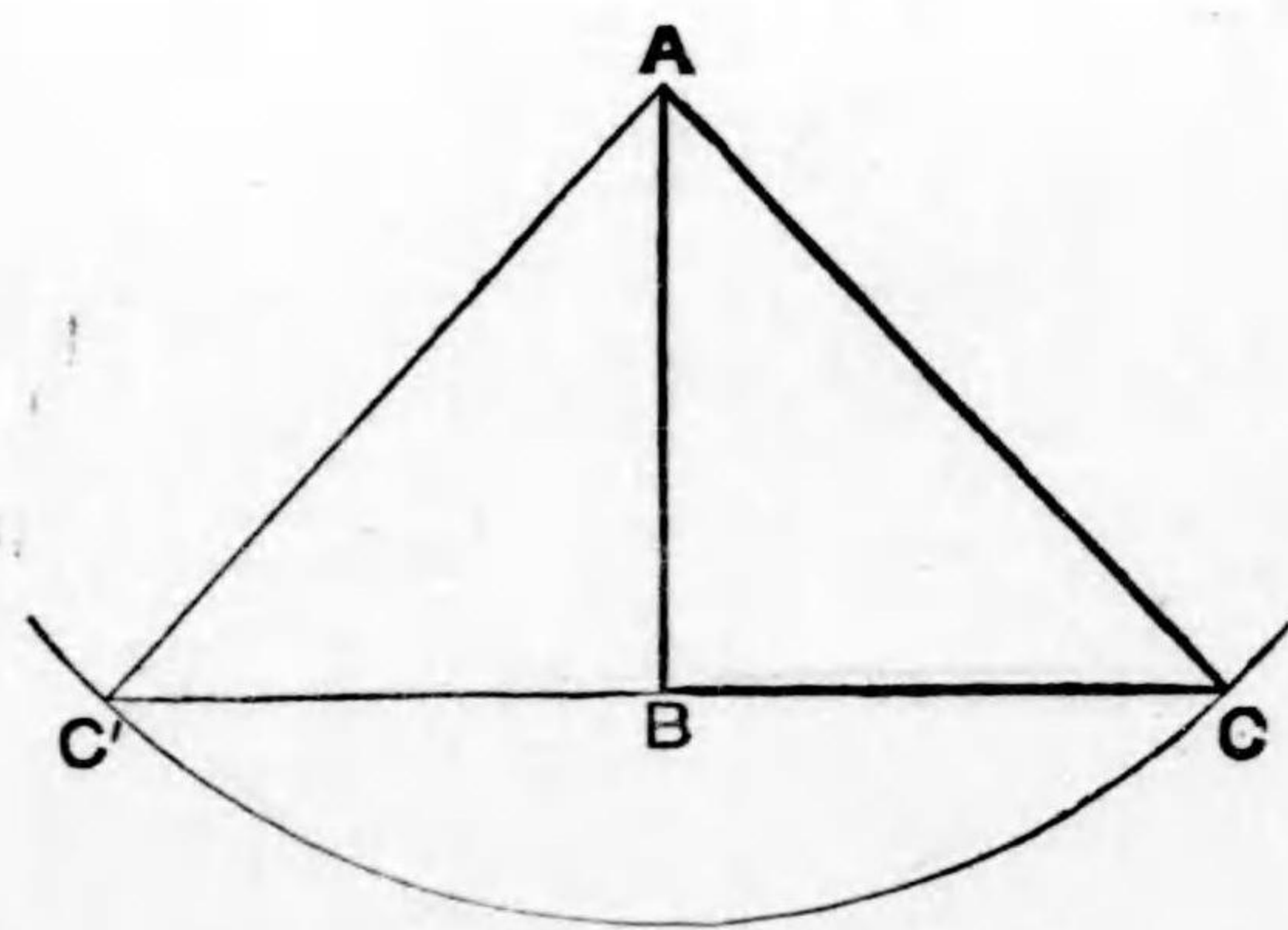


$b > c$  ナラバ  $\triangle ABC$  ナルーツノ解ヲ得。

$\triangle ABC'$  = 於テ  $b$  ノ對角ガ  $\angle \beta$  ノ補角ナリ。

故ニ與條件ニ適セズ。

吟味 ii. 與角ガ直角ナルトキ、



此ノ場合ニ於テハ  $c = d$

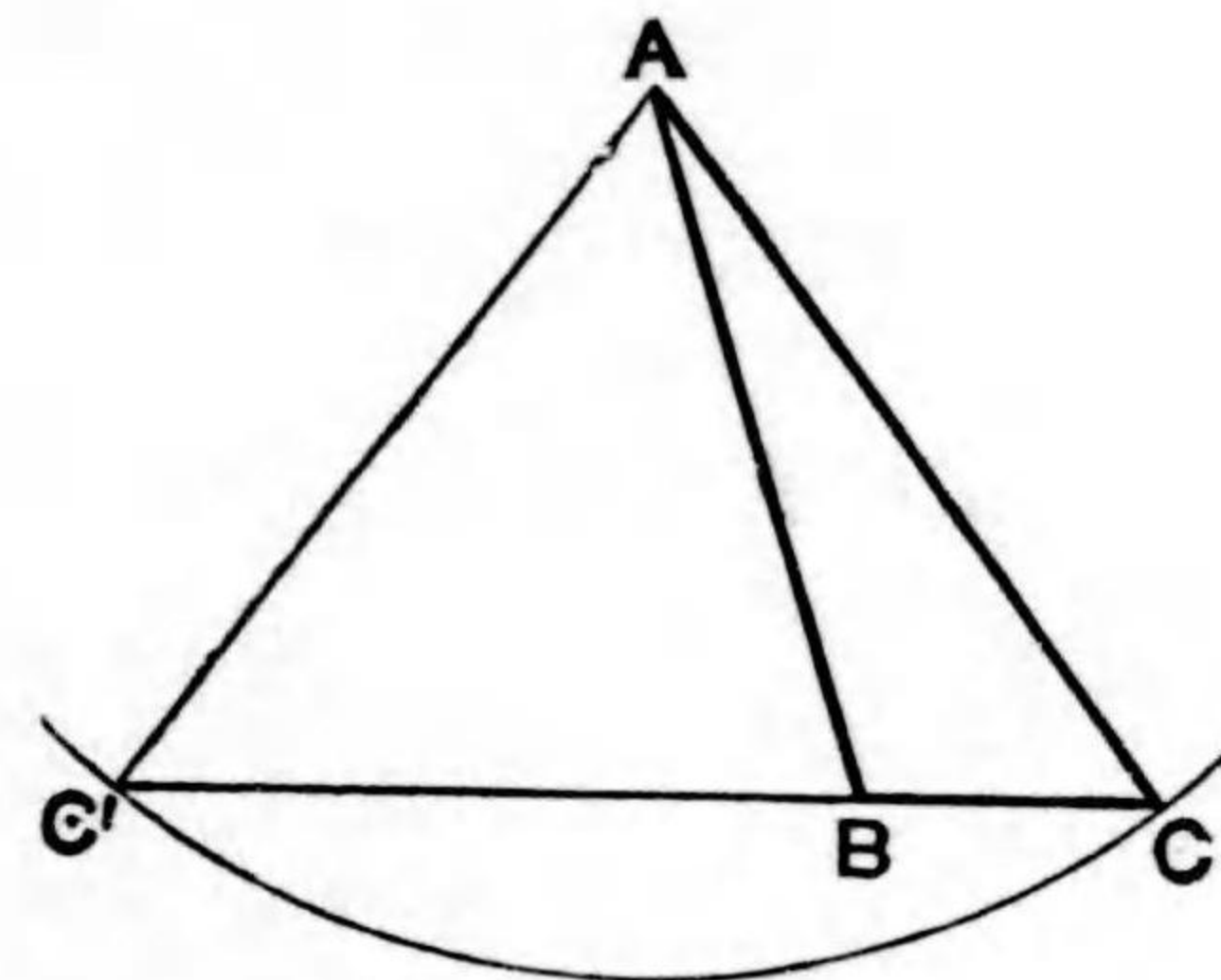
故ニ  $b$  ハ斜邊トナルヲ以テ、 $b > d$  ナラバ

$\triangle ABC$  ナルーツノ解ヲ得。

$\triangle ABC'$  ハ  $\triangle ABC$  ト同ジモノナリ。

其ノ他ノ場合ニハ不能ナリ。

吟味 iii. 與角ガ鈍角ナルトキ、



此ノ場合ニ於テハ  $b$  ガ  $c$  ヨリ大ナルヲ要ス。

故ニ  $b > c$  ナラバ  $\triangle ABC$  ナルーツノ解ヲ得。

$\triangle ABC'$  ハ  $b$  ノ對角ガ  $\angle \beta$  ノ補角ナリ。

故ニ與條件ニ適セズ。

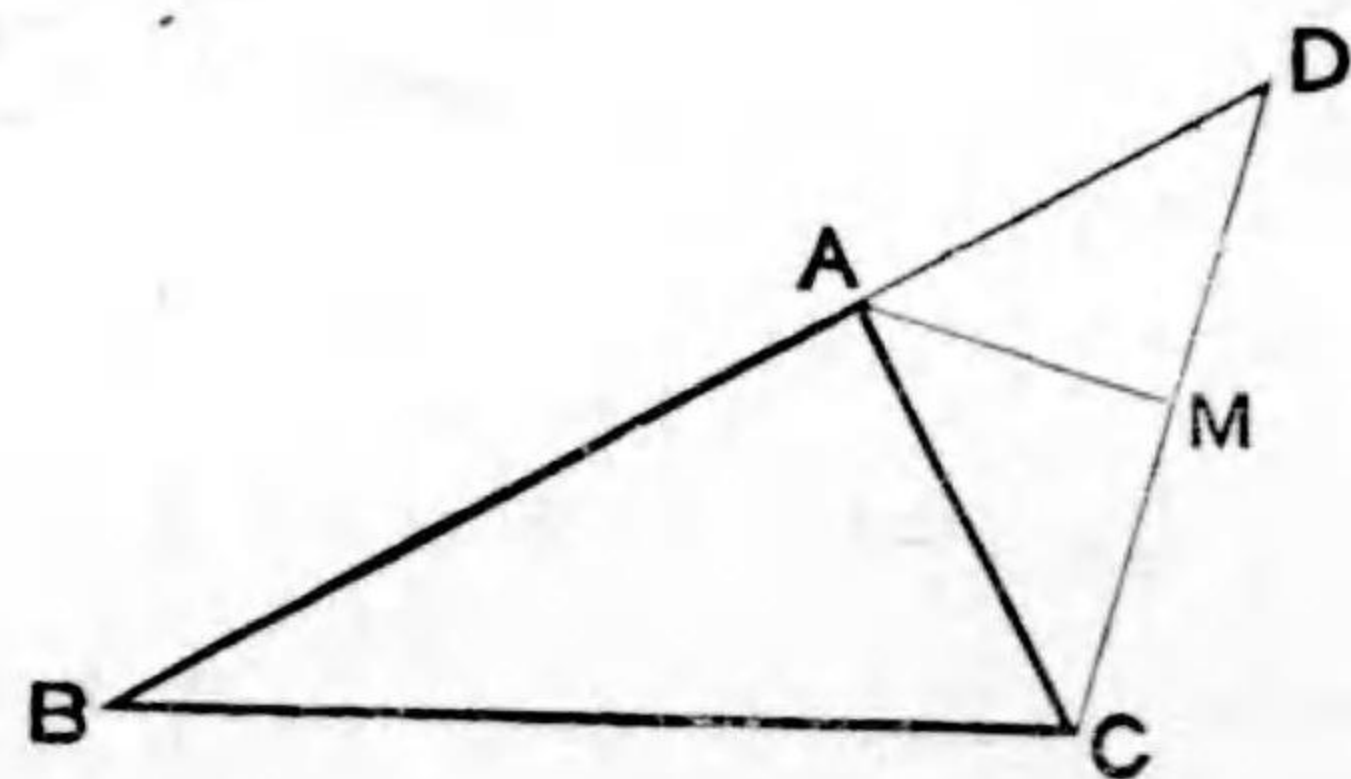
其ノ他ノ場合ニハ不能ナリ。

問題 29. 三角形ノ兩意ノ場合ニ於テ、

$2BM = BC + BC'$  ナルコトヲ證セヨ。

97. 作圖題ヲ解クニ當リ容易ニ其ノ解法ヲ得ザルトキハ、マヅ之ヲ解キ得タルモノトシテ求ムル所ノ圖ヲ畫キ、之ヨリ作圖ニ必要ナル性質ヲ考案シ、之ニヨリテ作圖ノ方法ヲ得、之ヲ作圖題ノ解析ト稱ス。

例ヘバ二邊ノ和、底及ビ底角ノ一ツヲ知リテ三角形ヲ畫カンニ、



解析  $\triangle ABC$  ヲ畫キ得タリトス。然ルトキハ  $BA$  ヲ延長シ  $AD=AC$  トスレバ  $\triangle ACD$  ハ二等邊三角形ナリ。故ニ  $CD$  ノ中點  $M$  ト  $A$  トヲ結ブ直線ハ  $CD$  ニ垂線ナリ。由リテ次ノ作圖法ヲ得。

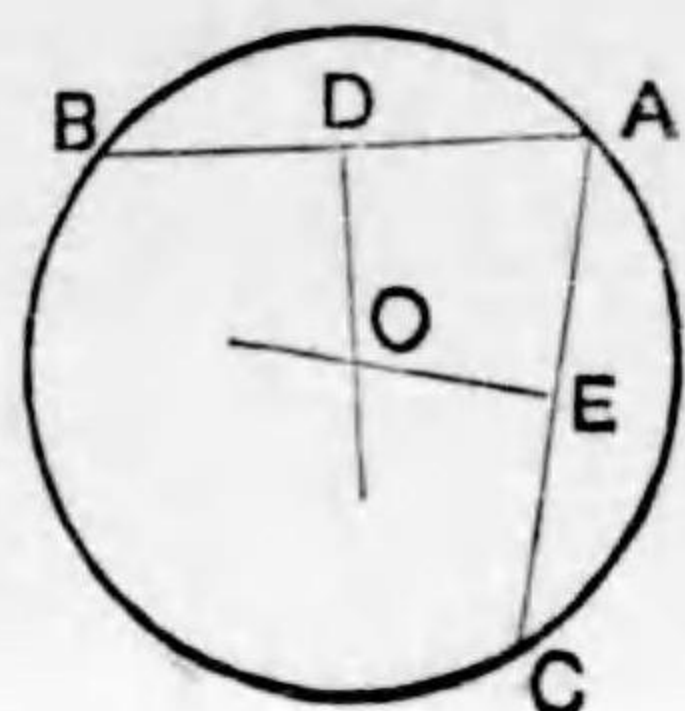
作圖 與底  $BC$  ヲ引キ  $B$  點ニ與底角ニ等シキ角ヲ作ル直線  $BD$  ヲ引キ、之ヲ二邊ノ和ニ等シカラシム。次ニ  $D$  ト  $C$  トヲ結ビ  $DC$  ノ中點  $M$  ニ垂線ヲ引キ、 $BD$  トノ交點  $A$  ヲ  $C$  ニ結ベバ  $\triangle ABC$  ハ求ムル所ノモノナリ。

證明  $\angle B$  ハ與角ニ等シク、 $BC$  ハ與底ニ等シク、二邊ノ和ハ與ヘラレタルモノニ等シ。故ニ與條件ニ適ス。

此ノ如ク解析ニ於テ作圖ニ必要ナル性質ヲ考案シ之ヨリ全ク逆ノ筋途ニヨリテ作圖ノ方法ヲ得。之ヲ作圖題ノ總合ト稱ス。

作圖題一ヨリ九マデハ皆總合ノ方法ニヨレリ。是ヨリ解析ノ方法ニヨリ作圖題ヲ解カントス。

98. 作圖題十 與圓ノ中心ヲ求ムルコト。



**解析** 與圓ヲ  $ABC$  トシ、中心ヲ  $O$  トス。  $O$  ヨリ弦  $AB$  弦  $AC$  ニ垂線ヲ引ケバ其ノ足  $D, E$  ハ各弦ノ中點ナリ。由リテ次ノ作圖法ヲ得。

**作圖** 弦  $AB, AC$  ヲ引キ各ノ中點ニ垂線ヲ引クトキ、其ノ交點  $O$  ハ即チ求ムル中心ナリ。

**證明**  $O$  ヲ  $A, B, C$  ニ結ベバ

$$OB = OA = OC$$

ナレバナリ。

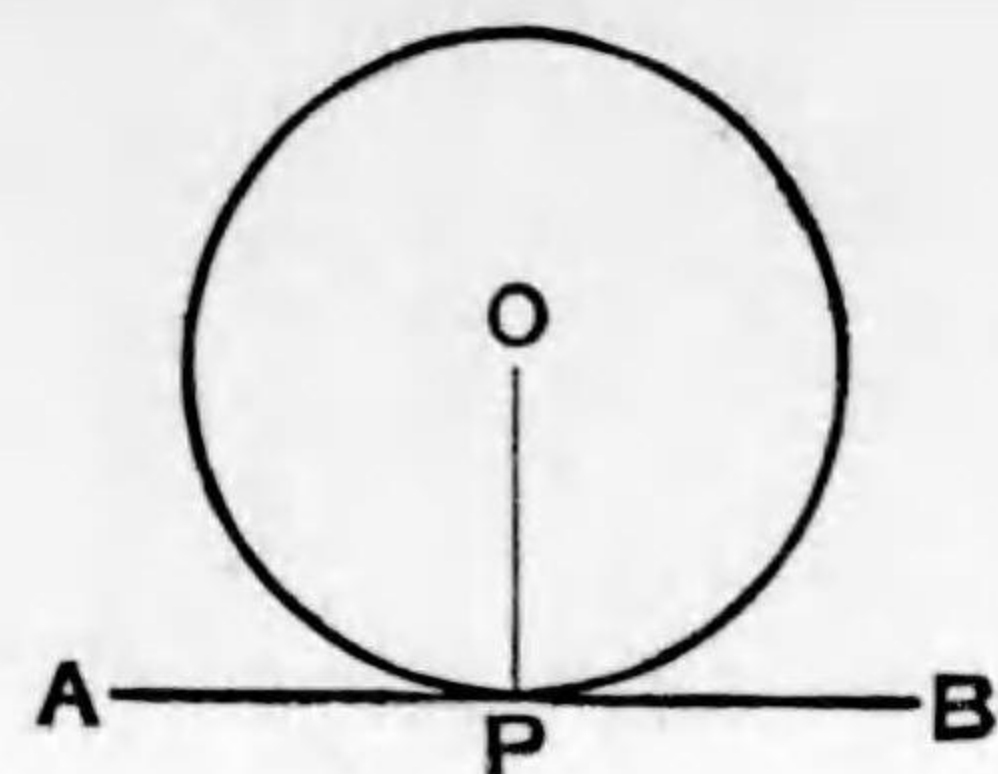
---

問題 30. 與弧ヲ二等分セヨ。

問題 31. 與弧ヲ其ノ一部トスル圓ヲ畫ケ。

---

99. 作圖題十一 與圓上ノ與點ニ於テ、其圓ニ切線ヲ引クコト。



**解析** 與圓  $O$  ノ上ノ與點  $P$  ニ切線  $APB$  ガ引カレタリトセヨ。然ルトキハ半徑  $OP$  ハ  $AB$  ニ垂線ナリ。由リテ次ノ作圖法ヲ得。

**作圖**  $O$  ト  $P$  トヲ結ビ  $P$  ヨリ  $OP$  ニ垂線  $AB$  ヲ引ケバ  $AB$  ハ求ムル所ノ切線ナリ。

**證明**  $AB$  ハ  $P$  ニ於テ半徑  $OP$  ニ直角ニ交レバナリ。

---

問題 32. 與直線ニ平行ニシテ與圓ニ切スル直線ヲ引ケ。

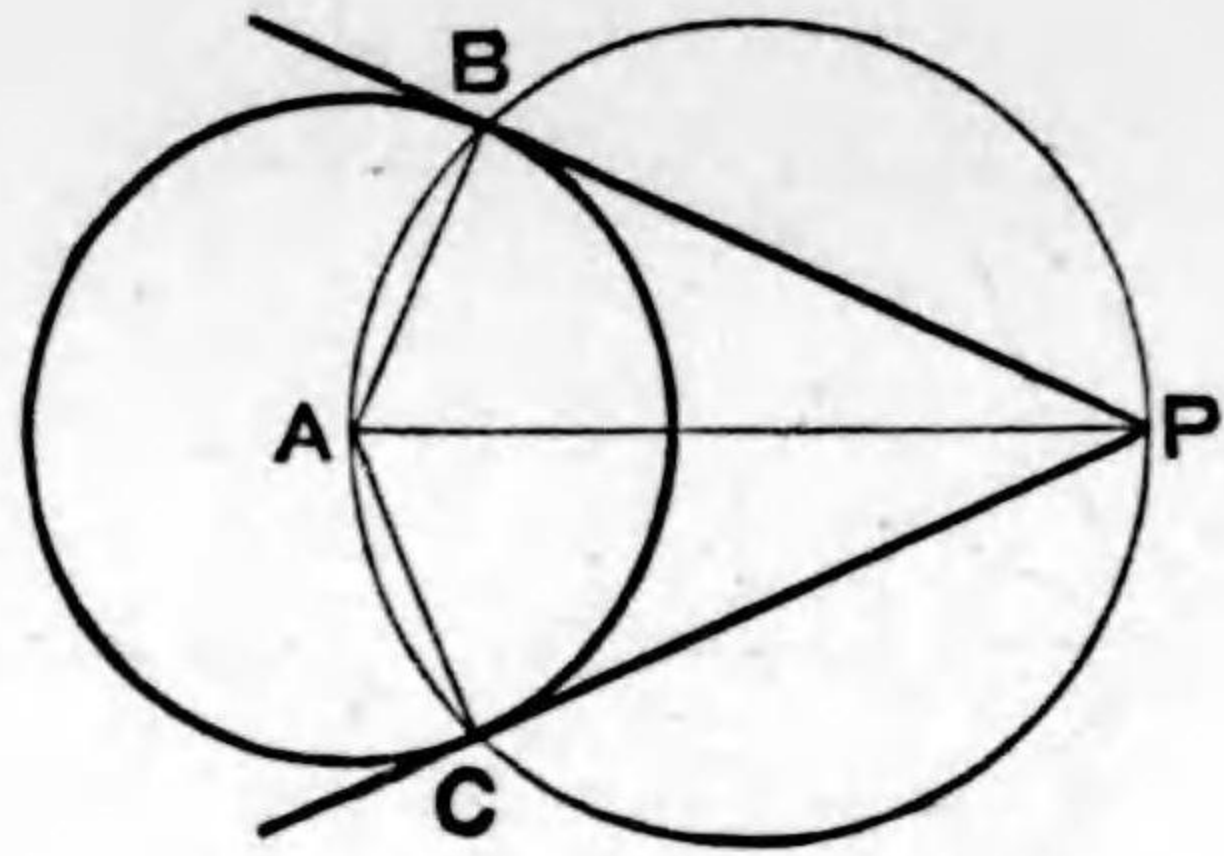
問題 33. 與半徑ヲ以テ與直線上ノ與點ニ於テ之ニ切スル圓ヲ畫ケ。

問題 34. 與半徑ヲ以テ與圓上ノ與點ニ於テ之ニ切スル圓ヲ畫ケ。

問題 35. 與直線上ノ與點ニ於テ之ニ切シ且與直線外ノ與點ヲ通ル圓ヲ畫ケ。

---

100. 作圖題十二 與圓外ノ一與點ヨリ其ノ圓ニ切線ヲ引クコト。



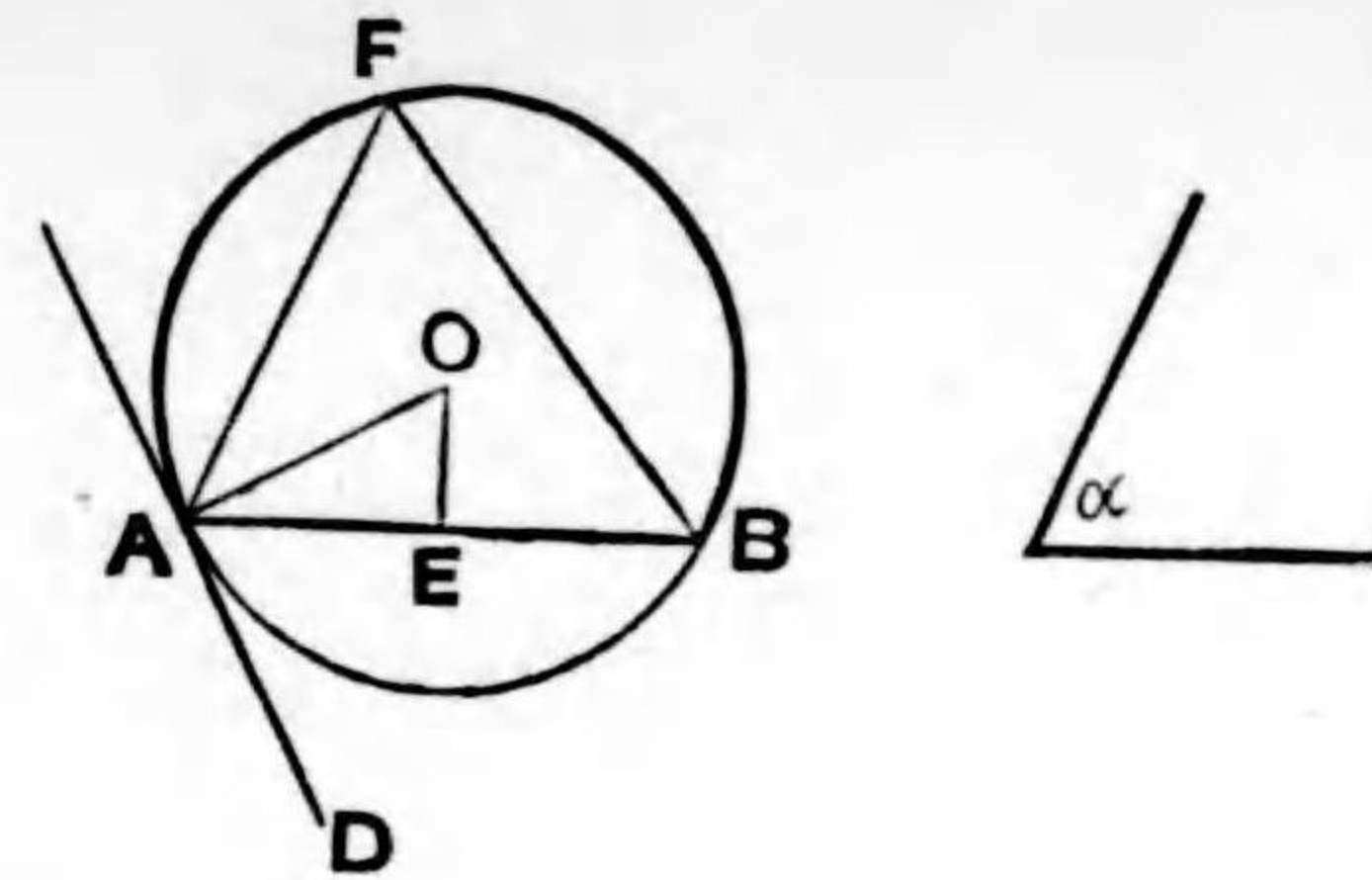
解析 與點 P ヨリ圓 A = B ト C = 於テ切スル處ノ PB, PC ナル切線ガ引カレタリトス。然ルトキハ PB, PC ハ夫々 AB, AC = 垂直ナリ。由リテ次ノ作圖法ヲ得。

作圖 A ト P トヲ結ビ之ヲ直徑トシテ圓ヲ畫キ、與圓ト B ト C トニ於テ交ラシム、P ヲ B ト C トニ結ベバ PB, PC ガ求ムル所ノ切線ナリ。

證明  $\angle ABP$ ,  $\angle ACP$  ハ各半圓内ノ角ナルヲ以テ直角ナレバナリ。

問題 36. 與圓内ノ一定點ヲ通り與長ノ弦ヲ引ケ。

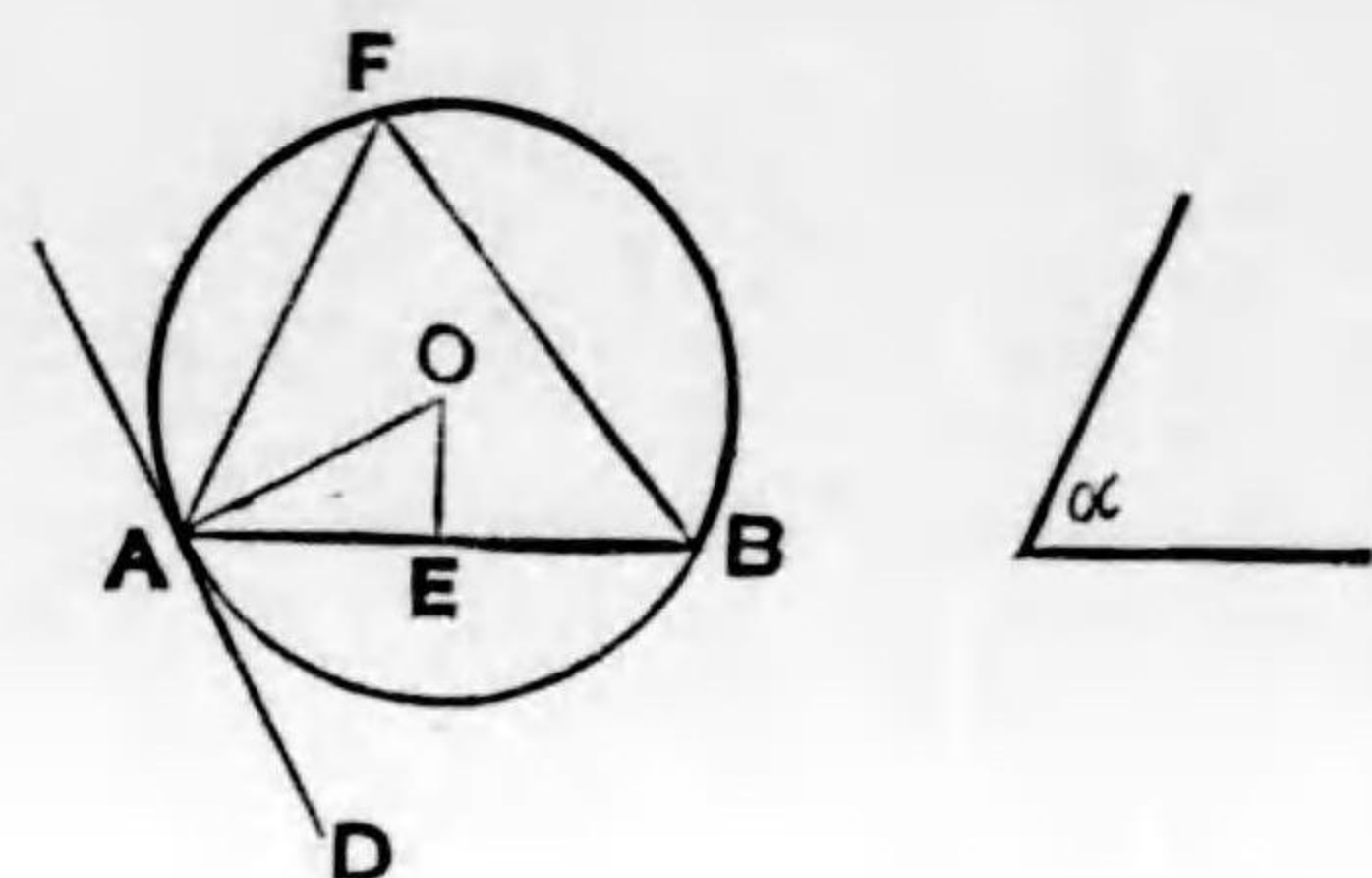
101. 作圖題十三 與直線上ニ與角ニ等シキ角ヲ含ム弓形ヲ畫クコト。



解析 與直線 AB 上ニ  $\angle \alpha$  ニ等シキ角ヲ含ム弓形ガ畫カレタリトス。然ラバ A = 於ケル切線ガ AB トナス角 BAD ハ  $\angle \alpha$  ニ等シ。

中心 O ト AB ノ中點 E トヲ結ブ直線ハ AB = 垂直ナリ。又中心 O ト A トヲ結ブ直線ハ AD = 垂直ナリ。由リテ次ノ作圖法ヲ得。

作圖 AB ト  $\angle \alpha$  ヲ作ル直線 AD ヲ引キ、A ヲリ之ニ垂直線 AO ヲ引キ、AB ヲ直角ニ二等分スル直線 EO ト O = 於テ交ラシメ、O ヲ中心トシ OA ヲ半徑トシテ畫カレタル弓形 AFB ハ求ムル所ノモノナリ。



證明  $OA=OB$  ナルヲ以テ  $OA$  ヲ半徑トスル圓ハ  $B$  ヲ通ル。又  $\angle DAO$  ハ直角ナルヲ以テ  $AD$  ハ切線ナリ。

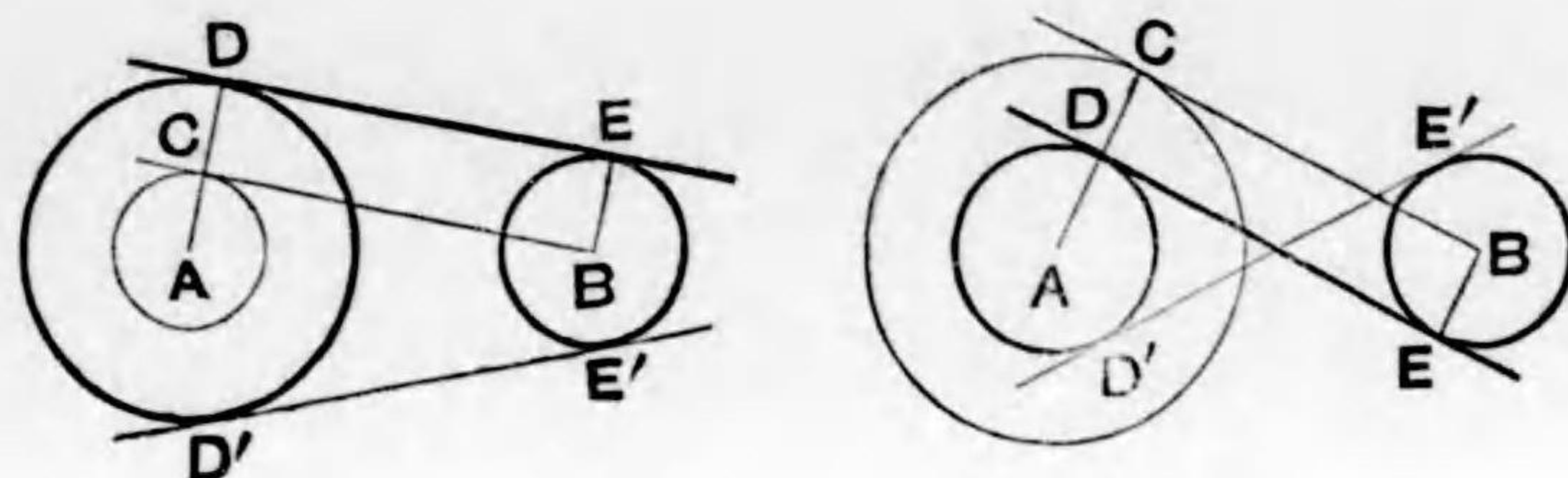
$$\therefore \angle AFB = \angle BAD = \angle \alpha$$

問題 37. 底、頂角及ビ頂角ヨリ下シタル垂線ノ足ヲ知リテ三角形ヲ畫ケ。

問題 38. 與圓ニ内接シ與三角形ト等シキ角ノ三角形ヲ作レ。

問題 39. 與圓ニ外接シ與三角形ト等シキ角ノ三角形ヲ作レ。

102. 作圖題十四 二ツノ圓ニ共通切線ヲ引クコト。



解析 二ツノ圓  $A, B$  ニ共通切線  $DE$  ヲ畫キタリトセヨ。  $B$  ヨリ之ニ平行線ヲ引キ,  $AD$  或ハ其ノ延長ト  $C$  ニ於テ交ラシムレバ,  $BEDC$  ハ矩形ナリ。故ニ  $AC$  ハ兩半徑ノ差或ハ和ニシテ,  $BC$  ハ兩圓ノ半徑ノ差或ハ和ヲ半徑トセル圓ニ切ス。由リテ次ノ作圖法ヲ得。

作圖  $A$  ヲ中心トシ二圓ノ半徑ノ差或ハ和ニ等シキ半徑ヲ以テ圓ヲ畫キ,  $B$  ヨリ此ノ圓ニ切線  $BC$  ヲ引キ,  $A$  ト  $C$  トヲ結ブ直線ヲ引キ,  $D$  ニ於テ與圓ト交ラシメ,  $B$  ヨリ  $AC$  ニ平行ナル半徑  $BE$  ヲ引キ,  $D$  ト  $E$  トヲ結ブトキハ是レ即チ求ムル所ノ共通切線ナリ。

證明  $BEDC$  ハ矩形ナルヲ以テ  $\angle BED$  及ビ  $\angle CDE$  ハ直角ナリ。

故ニ  $ED$  ハ兩圓ニ切ス。



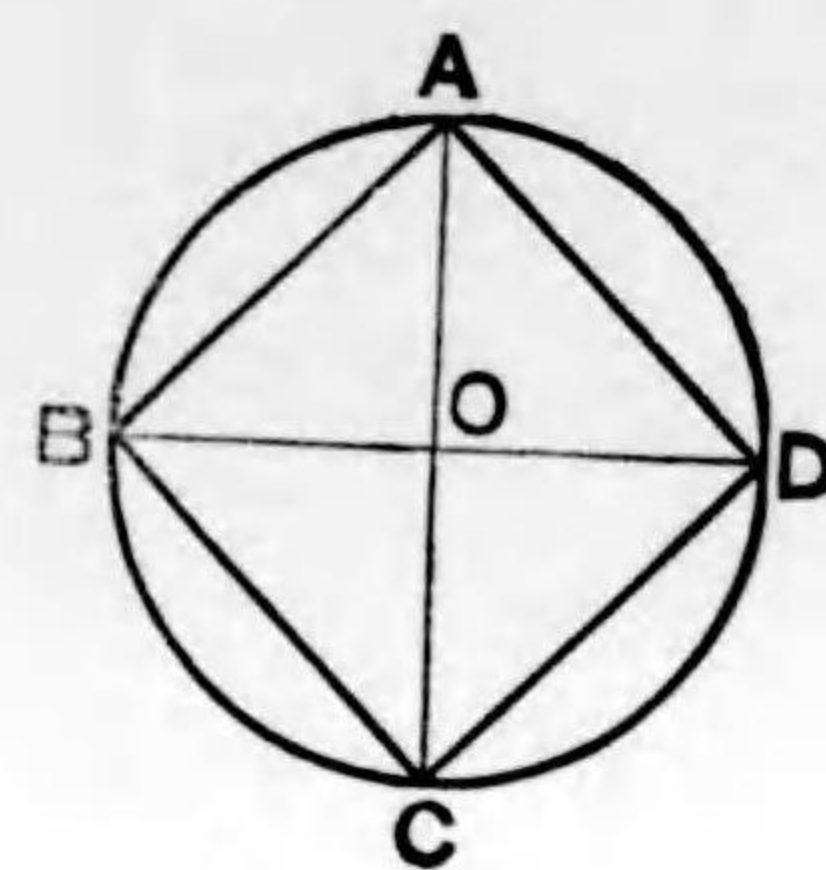
**吟味** 圓外ノ一點ヨリ之ニニツノ切線ヲ引クコトヲ得。故ニ  $DE$  ノ外ニ尙  $D'E'$  ナル共通切線ヲ引クコトヲ得。

**問題 40.** 二圓ガ次ノ位置ニアルトキハ幾本ノ共通切線ヲ引キ得ルカ。

- (a) 二圓互ニ外方ニ離ル、トキ。
- (b) 二圓外切スルトキ。
- (c) 二圓相交ルトキ。
- (d) 二圓内切スルトキ。
- (e) 一圓ガ他ノ一圓ノ内部ニアリテ相切セザルトキ。

**問題 41.** ニツノ圓ガ相等シキトキハ如何ニ作圖スルカ。

**103. 作圖題十五** 與圓ニ内接スル正方形ヲ畫クコト。



**解析** 與圓  $O$  ニ正方形  $ABCD$  ガ内接セラレタリトセヨ。然ラバ二對角線ハ各中心ヲ通り、且互ニ直角ニ交ル。由リテ次ノ作圖法ヲ得。

**作圖** 互ニ直角ニ交ルニツノ直徑ヲ引キ、 $A, C, B, D$  ニ於テ與圓ト交ラシム。然ルトキハ  $ABCD$  ハ求ムル處ノ正方形ナリ。

**證明**  $O$  ニ於テノ角ハ皆直角ナルヲ以テ弧  $AB, BC, CD, DA$  ハ相等シ。故ニ各角各邊相等シキニヨリ  $ABCD$  ハ正方形ナリ。

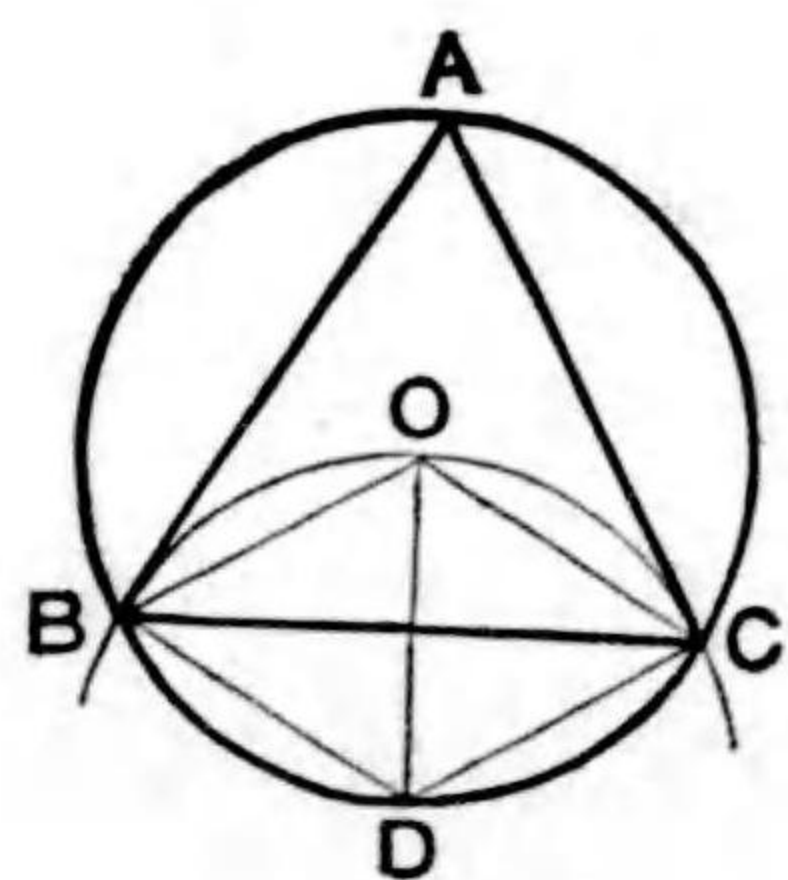
**問題 42.** 與圓ニ外接スル正方形ヲ作レ。

**問題 43.** 與圓ニ内接スル正  $2^n$  邊形ヲ作レ。

但シ  $n$  ハ一ヨリ大ナル整數ナリ。

問題 44. 與圓ニ外接スル正  $2^n$  邊形ヲ作レ。  
但シ  $n$  ハ一ヨリ大ナル整數ナリ。

104. 作圖題十六 與圓ニ内接スル正三角形ヲ畫クコト。



解析 圓  $O$  =  $ABC$  ナル正三角形ガ内接セラレタリトス。然ラバ  $A, B, C$  ニテ全圓周ガ三等分セラル。故ニ  $\angle BOC$  ハ  $120^\circ$  ナリ。由リテ次ノ作圖法ヲ得。

作圖 與圓上ニ  $D$  ナル一ノ點ヲトリ、之ヲ中心ト

シ、此ノ圓ノ半徑ヲ以テ圓ヲ畫キ、 $B$  ト  $C$  トニ於テ此ノ圓ト交ラシム。  $B$  ヲ中心トシ  $BC$  ヲ半徑トシテ畫キタル圓ガ圓  $O$  ト  $A$  ニ於テ交ルトス。

然ラバ  $\triangle ABC$  ハ求ムル所ノ内接正三角形ナリ。

證明  $\triangle BOD, \triangle COD$  ハ各正三角形ナリ。故ニ  $\angle BOD$  モ  $\angle COD$  モ各  $60^\circ$  ナリ。

故ニ  $\angle BOC$  ハ  $120^\circ$  ナリ。

故ニ  $BC$  ハ求ムル正三角形ノ一邊タルベシ。

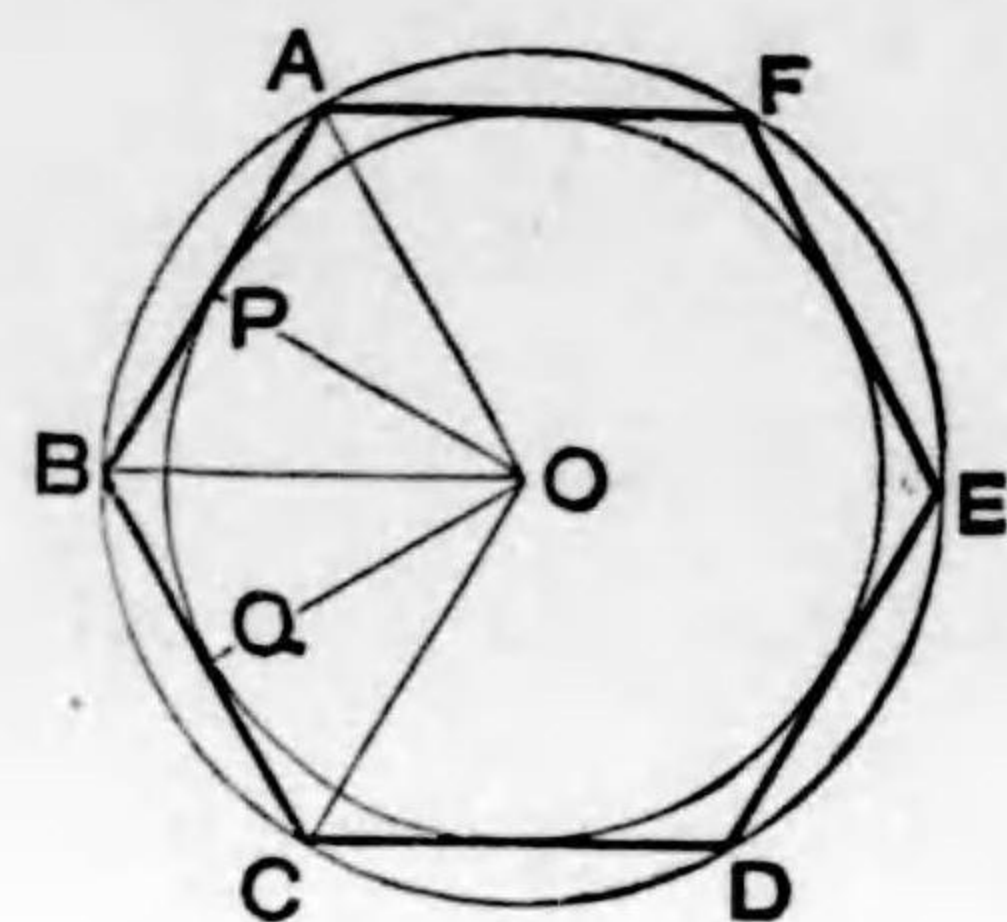
故ニ  $\triangle ABC$  ハ求ムル所ノ正三角形ナリ。

問題 45. 與圓ニ外接スル正三角形ヲ畫ケ。

問題 46. 與圓ニ内接スル正  $3 \times 2^n$  邊形ヲ畫ケ。  
但シ  $n$  ハ一ヨリ大ナル整數ナリ。

問題 47. 與圓ニ外接スル正  $3 \times 2^n$  邊形ヲ畫ケ。  
但シ  $n$  ハ一ヨリ大ナル整數ナリ。

105. 作圖題十七 正多角形ニ内接或ハ外接スル圓ヲ畫クコト。



**解析** 正多角形  $ABCDEF$  = 内接及ビ外接スル所ノ圓  $O$  ヲ畫ケリトス。

然ルトキハ、各邊ハ外接圓ノ弦ナルヲ以テ其ノ中心  $O$  ヨリ各邊ニ引ケル垂線  $OP, OQ$  等ハ皆相等シ。

又外接圓ノ中心  $O$  ヲ  $A, B, C$  等ニ結ベバ、直角三角形  $AOP, BOP, BOQ, COQ$  等ハ斜邊及ビ他ノ一邊相等シキヲ以テ合同ナリ。

故ニ  $AO, BO, CO$  等ハ夫々外接形ノ各角ヲ二等分ス。由リテ次ノ作圖法ヲ得。

**作圖**  $\angle A, \angle B$  ノ二等分線ノ交點  $O$  ヲ中心トシ、 $OP$  ヲ半徑トシテ畫キタル圓ハ求ムル所ノ内接圓ナリ。

又  $O$  ヲ中心トシ、 $OA$  ヲ半徑トシテ畫キタル

圓ハ求ムル所ノ外接圓ナリ。

**證明**  $O$  ハ各角ノ二等分線ノ交點ナルヲ以テ之ヨリ各邊ヘノ距離皆相等シ。故ニ  $O$  ヲ中心トシ、 $OP$  ヲ半徑トスル圓ハ此ノ多角形ニ内接ス。

又  $O$  ヨリ各頂點ニ至ル距離相等シキヲ以テ、 $O$  ヲ中心トシ  $OA$  ヲ半徑トスル圓ハ之ニ外接ス。

## 第三篇ノ問題

問題 48. 一邊ト二ツノ對角線トヲ與ヘテ平行四邊形ヲ作レ。

問題 49. 一點ニ交ル三直線アリ。其ノイヅレカーツノ上ノ一點ヲ通りテ直線ヲ引キ、ソレガ三直線ニヨリテ切ラル、部分ヲ等シカラシメヨ。

問題 50. 三ツノ與點 A, B, C アリ。AトBトヨリノ距離等シク、且Cヨリノ距離ガ與ヘラレタル長サニ等シキ點ヲ求ム。

問題 51. 一邊ト頂點ヨリ底ニ下セル垂線トノ和及ビ底ヲ知リテ二等邊三角形ヲ畫ケ。

問題 52. 底ト其ノ一端ニ於ケル角並ビニ他ノ二邊ノ差ヲ與ヘテ三角形ヲ作レ。

問題 53. 二角ト三邊ノ和トヲ與ヘテ三角形ヲ作レ。

問題 54. 位置ニ於テ與ヘラレタル二ツノ直線アリ。之ヲ延長シテ交ラシムルコトナシニ其ノ角ノ二等分線ヲ引ケ。

問題 55. 二邊及ビ第三邊ヘノ中線ヲ與ヘテ三角形ヲ作レ。

問題 56. 三ツノ中線ヲ與ヘテ三角形ヲ作レ。

問題 57. 一ツノ角ト他ノ二ツノ角頂ヨリ對邊ヘ引ケル垂線ノ長サトヲ知リテ三角形ヲ作レ。

問題 58. 二邊ノ和及ビ斜邊ヲ知リテ直角三角形ヲ畫ケ。

問題 59. 二ツノ與圓ニ切スル與半徑ノ圓ヲ畫ケ。

問題 60. 一ツノ與點ヲ通り、一ツノ與圓ト與點ニ於テ切スル圓ヲ畫ケ。

問題 61. 相交ル二圓ノ交點ノ一ツヲ通り、兩圓周ニ終ル直線ヲ引キ、之ヲ與長ニ等シカラシメヨ。

問題 62. 相交ル二圓ノ交點ノ一ツヲ通り、兩圓周ニ終ル直線ヲ引キ、其ノ點ニテ二等分セララル様ニセヨ。

問題 63. 同一直線上ニアラザル三ツノ與點ヲ中心トシテ互ニ相切スル三ツノ圓ヲ畫ケ。

問題 64. 相切スル相等シキ二ツノ圓ノ周上ニ  
 兩端及ビ二ツノ三等分點ノアル直線ヲ引ケ。

問題 65. 與直線ニ切シ且與圓上ノ與點ニ於テ  
 之ニ切スル圓ヲ畫ケ。

## 第四篇

### 面積

#### 第一章

#### 定理

106. 長サ四尺幅三尺ノ矩形ノ面積ハ  $4 \times 3$  平方尺ナリ。之ヲ 4尺 $\times$ 3尺トスルハ全ク無意味ナリ。サレド本篇ニ於テハ矩形ノ面積ノ單位ノ數ハ、長サノ單位ノ數ト幅ノ單位ノ數トノ積ナルコトヲ略シテ、矩形ノ面積ヲ長 $\times$ 幅ト記ス。

例ヘバ  $a$  ト  $b$  トヲ二邊トスル矩形ノ面積ヲ  $ab$  トシ、 $a$  ヲ一邊トスル正方形ノ面積ヲ  $a^2$  トスルガ

如シ。

又  $AB$  と  $CD$  とヲ二邊トスル矩形ノ面積ヲ  $AB \cdot CD$  トシ,  $AB$  ヲ一邊トスル正方形ノ面積ヲ  $\overline{AB}^2$  トスルガ如シ。

問題 1. 次ノ矩形ノ面積ヲ計算セヨ。

- a. 縦 13間 横 27間  
b. 長サ 5.6 尺 幅 3.45 尺

問題 2. 次ノ正方形ノ面積ヲ求ム。

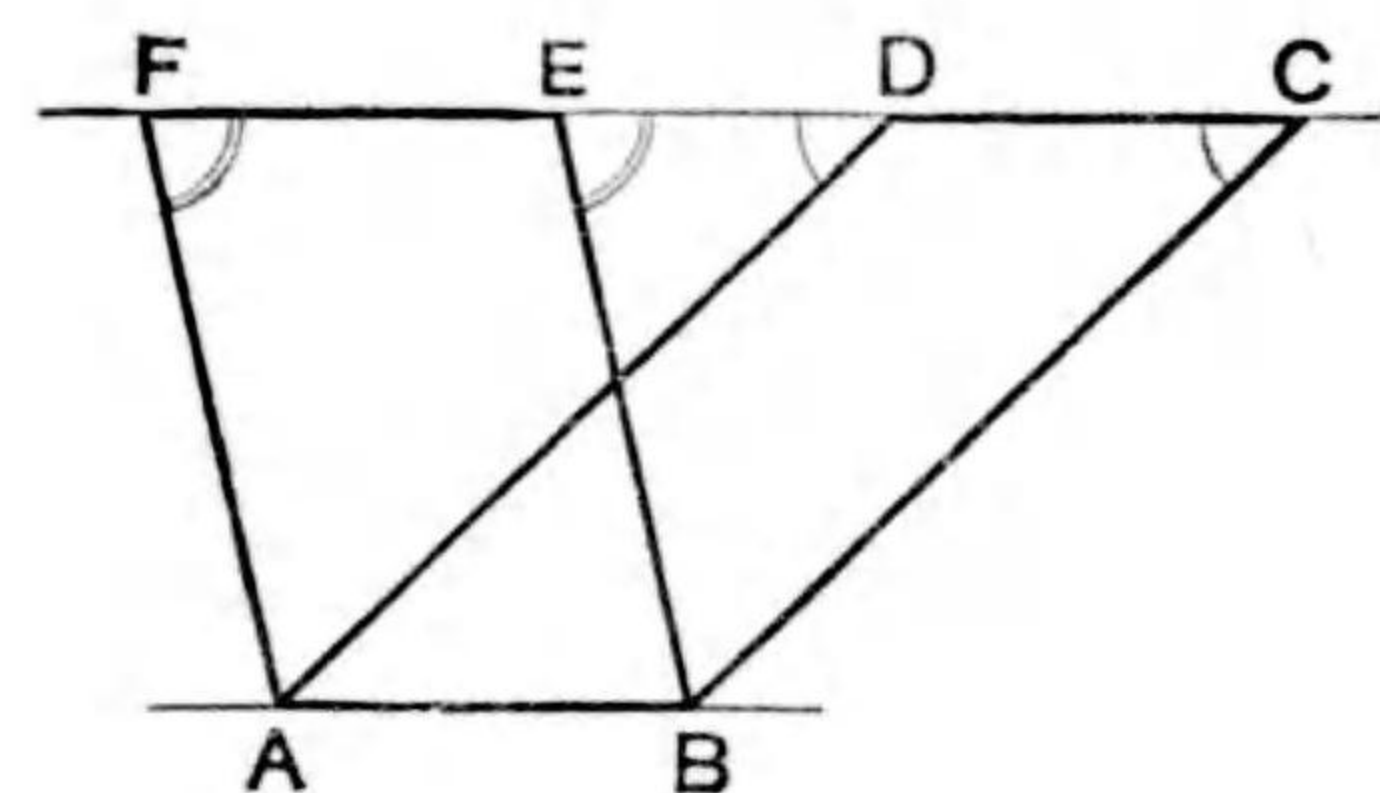
- a. 一邊ノ長サ 23間 2 尺  
b. 一邊ノ長サ 3.5 寸

107. 本篇ニ於テハ面積ヲ論ズルモノナレバ二ツノ形相等シト云フハ皆其ノ面積ニ付キテ云フモノナリ。

108. 平行四邊形ノ高サトハ底ト見做ス一邊ト之ニ對スル邊トノ間ノ距離ナリ。

三角形ノ高サトハ底ト見做ス一邊ト之ニ對スル頂點トノ距離ナリ。

109. 定理一 同底ニシテ同平行線間ニアル二ツノ平行四邊形ハ相等シ。



同平行線間ニアリテ  $AB$  ナル同底ヲ有スル  $\square AC$  と  $\square AE$  トハ相等シ。

證明  $FE = DC$

$\therefore FD = EC$

而シテ  $FD, EC$  ノ兩端ノ角ハ夫々相等シ。

$\therefore \triangle FAD \equiv \triangle EBC$

此ノ兩三角形ヲ四邊形  $ABCF$  ヨリ取り去ルトキハ,  $\square AC$  と  $\square AE$  ヲ得。故ニ此ノ兩平行四邊形ハ相等シ。

系一 平行四邊形ハ之ト等底,等高ノ矩形ニ等シ。

系二 三角形ハ之ト等底等高ノ矩形ノ半ニ等シ。

由リテ次ノ公式ヲ得。

平行四邊形ノ面積 = 底 × 高

三角形ノ面積 =  $\frac{1}{2}$  × 底 × 高

問題 3. 直角三角形ノ二邊ガ夫々1.5尺及8寸ナルトキ,其ノ面積ヲ求ム。

問題 4. 6.5平方寸ノ面積ヲ有スル三角形ノ底ガ2.5寸ナルトキ,ソノ高サヲ求ム。

問題 5. 22.75平方寸ノ面積ヲ有スル平行四邊形ノ底ガ6.5寸ナルトキ,此ノ平行四邊形ノ高サヲ求ム。

問題 6. 三角形ノ中線ハ之ヲ相等シキ二ツノ三角形ニ分ツ。

問題 7. 三角形ノ重心ヲ各頂點ニ結ビテ得ル所ノ三ツノ三角形ノ面積ハ皆相等シ。

問題 8. 四邊形ノ二ツノ對角線ニヨリテ分タレタル四ツノ三角形相等シケレバ,此ノ四邊形ハ平行四邊形ナリ。

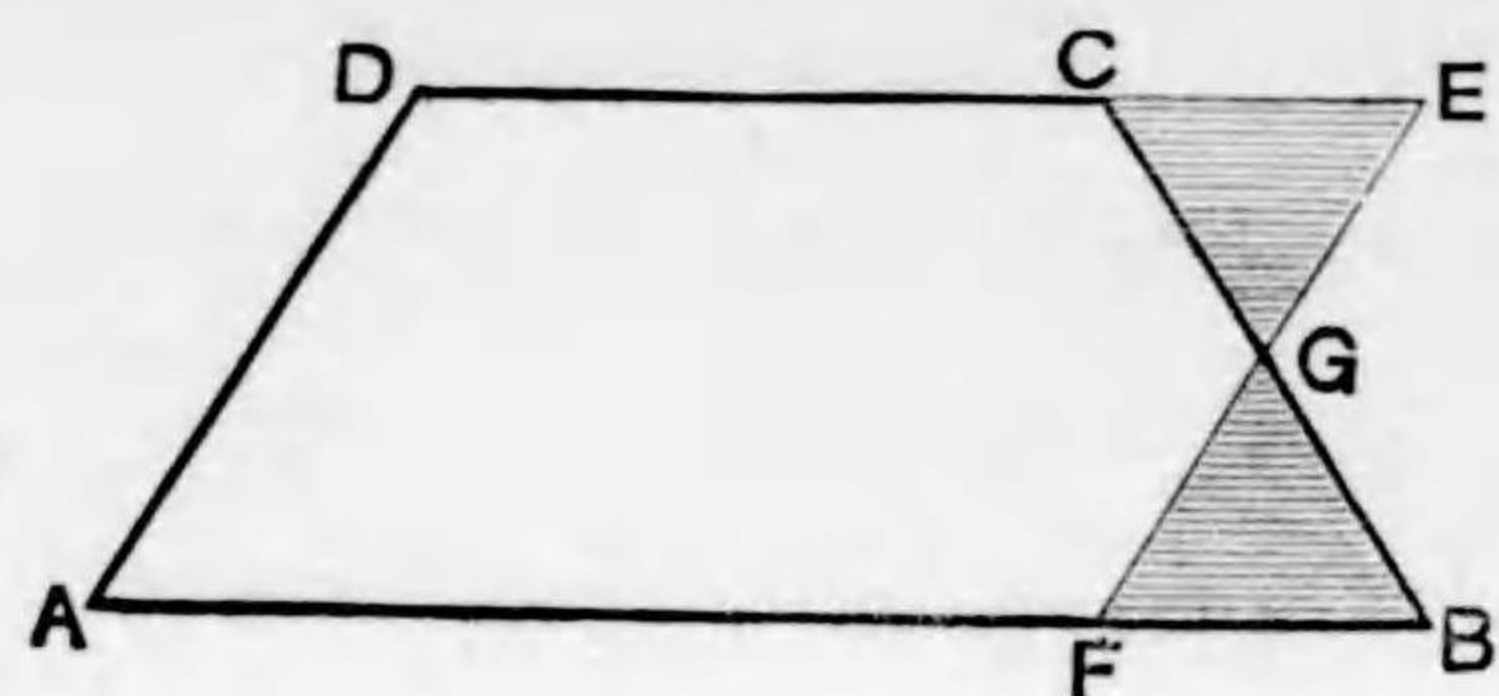
問題 9.  $\square ABCD$  内ノ一點ヲ  $P$  トスレバ  
 $\triangle ABP + \triangle CDP = \triangle BCP + \triangle DAP$

問題 10. 等高ノ二ツノ平行四邊形ニ於テ,底ノ大ナルモノガ他ヨリモ大ナリ。

問題 11. 等底ノ二ツノ平行四邊形ニ於テ高サノ大ナルモノガ他ヨリモ大ナリ。

110. 一雙ノ相對スル邊ノミ平行ナル四邊形ヲ**梯形**ト稱シ,二ツノ平行線間ノ距離ヲ**高サ**ト稱シ,平行二邊ヲ**上底及下底**ト稱ス。

111. **定理二** 梯形ハ之ト等高ニシテ,兩底ノ和ノ半ニ等シキ底ヲ有スル平行四邊形ニ等シ。



梯形  $ABCD$  ハ之ト等高ニシテ  $\frac{1}{2}(AB+CD)$   
ヲ底トスル平行四邊形ニ等シ。

證明  $CB$  ノ中點  $G$  ヲ通り  $AD$  ニ平行線ヲ引  
キ  $\square AE$  ヲ作レ。然ルトキハ

$$\angle ECG = \angle GBF$$

$$\angle CGE = \angle BGF$$

$$CG = BG$$

$$\therefore \triangle CEG \cong \triangle BFG$$

故ニ此ノ二ツノ三角形ノ各ハ同ジ形  $AFGCD$   
ヲ付ケ加フレバ

$$\text{梯形 } ABCD = \square AE$$

$$\text{而シテ } AF = \frac{1}{2}(CD + AB)$$

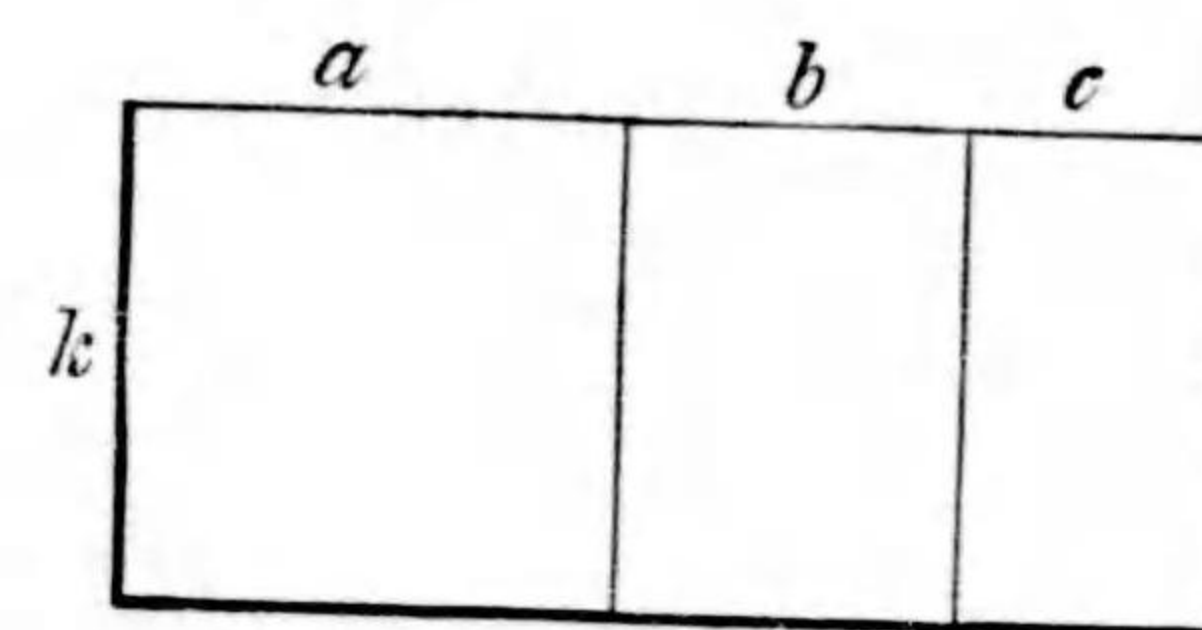
由リテ次ノ公式ヲ得。

$$\text{梯形ノ面積} = \frac{1}{2} \times \text{高} \times (\text{上底} + \text{下底})$$

問題 12. 平行二邊ガ夫々 2 寸及ビ 6 寸ニシテ  
高サ 1.7 寸ナル梯形ノ面積ヲ求ム。

問題 13. 梯形ハ不平行二邊ノ中點ヲ結ブ直線  
ト高サトヨリナル矩形ニ等シ。

112. 定理三 二ツノ與直線ヨリ  
ナル矩形ハ、其ノ一ツト他ヲ分チタル  
諸部分トヨリナル矩形ノ和ニ等シ。



$$(a+b+c)k = ak + bk + ck$$

證明 一ツノ邊ヲ分チタル分點ヨリ  $k$  ニ平行  
線ヲ引クトキハ、 $ak, bk, ck$  ナル面積ノ矩形ヲ得ル  
ヲ以テナリ。

系

$$(a+b)a = a^2 + ab$$



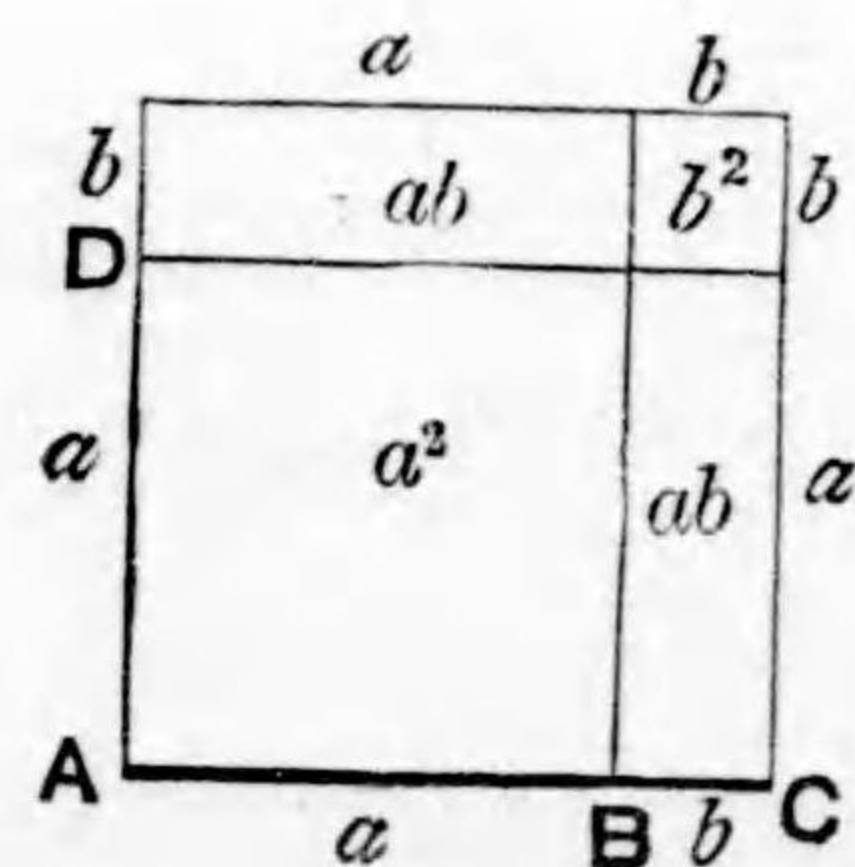
問題 14.  $(a-b)c=ac-bc$

問題 15. 直線 AB 上ノ一點 P ヲ取ル。然ラバ  
 $\overline{AB}^2 = AB \cdot AP + AB \cdot BP$

問題 16. 一直線上ニ A, B, C, D ナル四點ガ此  
 ノ順ニ並ブトキハ

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$$

113. 定理四 二ツノ直線ノ和ノ  
 上ノ正方形ハ各ノ直線上ノ正方形ト  
 此ノ二直線ヨリナル矩形ノ二倍トノ  
 和ニ等シ。



二直線 a ト b トノ和ヲ AC トスルトキハ

$$\overline{AC}^2 = (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

證明 AC ノ上ニ正方形ヲ畫キ AD ヲ AB ニ  
 等シクトリ, B 及ビ D ヨリ各邊ニ平行線ヲ引ケ  
 バ, 全形ヲ四部分ニ分ツ。

$$\therefore (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

系 一ツノ直線ノ上ノ正方形ハ其ノ半分ノ上  
 ノ正方形ノ四倍ナリ。

問題 17. 一直線上ニ四點 A, B, C, D アリテ,  
 AB, BC, CD ガ互ニ等シケレバ

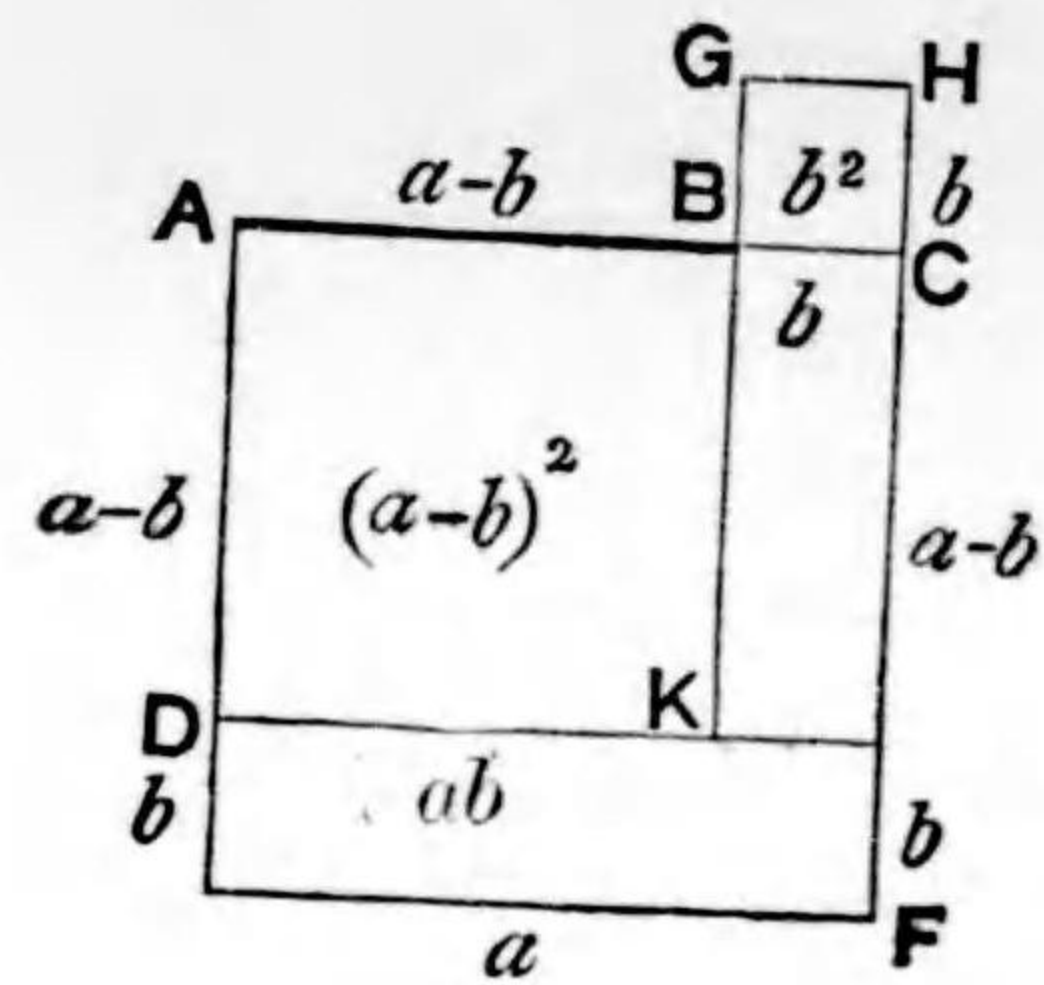
$$\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + 2\overline{AC}^2 = 9\overline{AB}^2$$

問題 18. 一直線上ニ四點 A, B, C, D ヲトリ,  
 AB=a, BC=b, CD=c トスレバ

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

114. 定理五 二ツノ直線ノ差ノ  
 上ノ正方形ハ, 各ノ直線ノ上ノ正方形

ノ和ト二ツノ直線ヨリナル矩形ノ二倍トノ差ニ等シ。



二直線  $a$  と  $b$  とノ差ヲ  $AB$  トスレバ

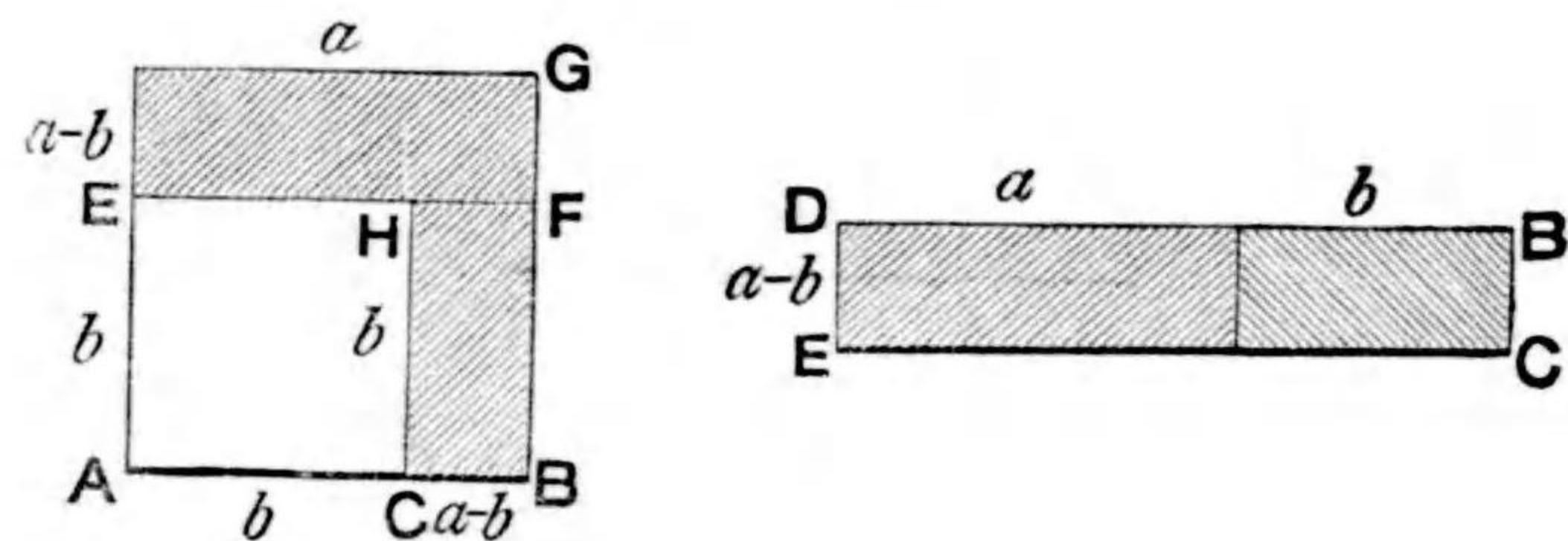
$$\overline{AB}^2 = (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

證明  $AC$  ノ上ニ正方形  $AF$  又  $BC$  ノ上ニ正方形  $BH$  ヲ畫キ  $AD$  ヲ  $AB$  ニ等シクトリ,  $D$  ヨリ  $AC$  ニ平行線ヲ引キ, 又  $GB$  ヲ延長スレバ, 正方形  $AK$  ヲ得。又矩形  $DF, KH$  ヲ得。而シテ此ノ二ツノ矩形ハイヅレモ  $ab$  ニ等シ。

$$\therefore (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

問題 19. 二ツノ直線ノ各ノ上ノ正方形ノ和ハ其ノ二直線ヨリナル矩形ノ二倍ヨリ小ナルコトナシ。

115. 定理六 二ツノ直線ノ上ノ正方形ノ差ハ, 二ツノ直線ノ和ト差トヨリナル矩形ニ等シ。



$AB, AC$  ヲ  $a, b$  トスレバ  $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

證明  $AB, AC$  ノ上ニ正方形  $AG, AH$  ヲ畫キ  $EH$  ヲ延長シテ  $F$  ニ於テ  $BG$  ト交ラシムレバ二ツノ矩形ヲ得。其ノ和  $DECB$  ハ  $(a+b)(a-b)$  ニ等シ。

$$\therefore a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

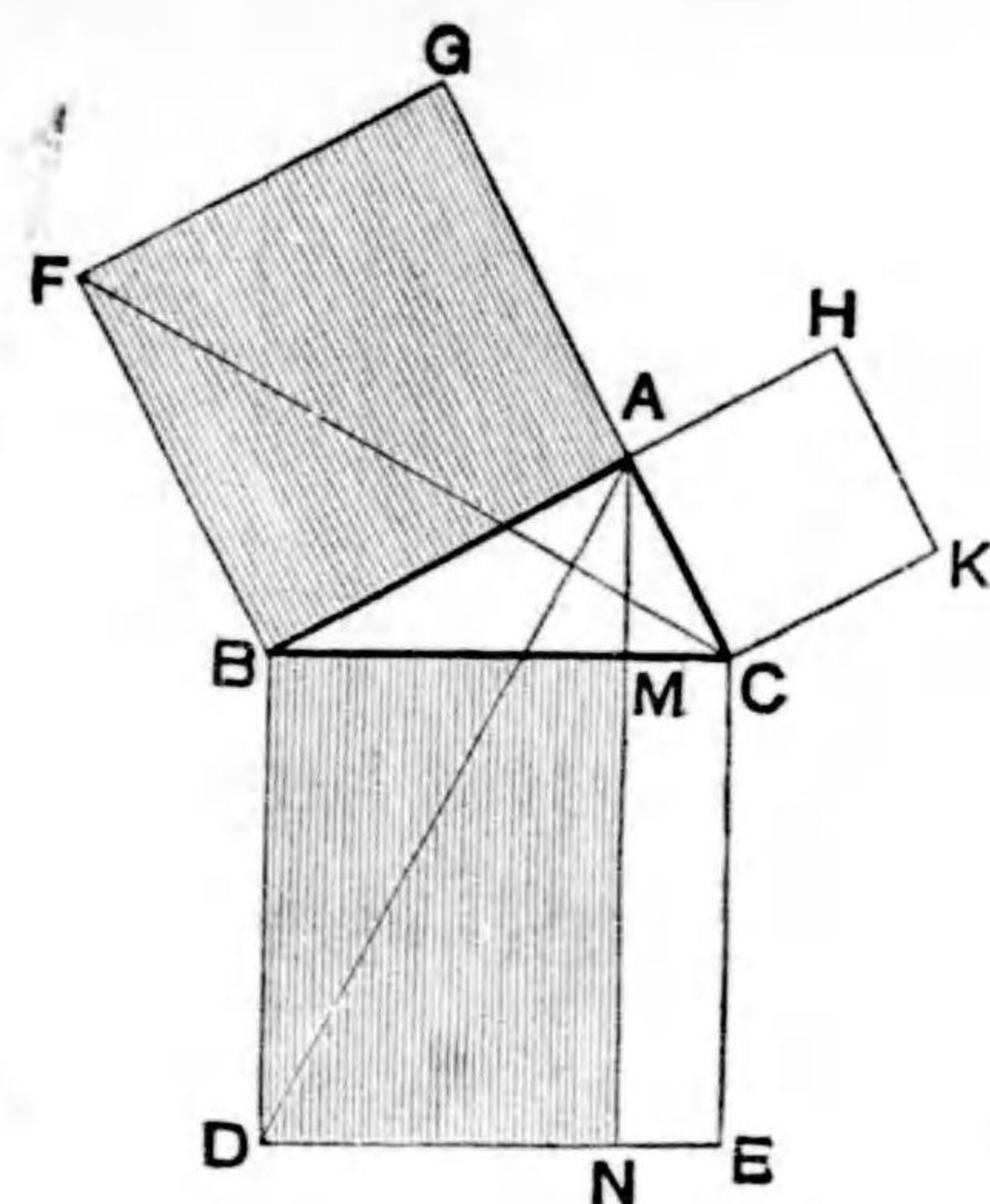
問題 20. 一邊ノ長サ九百四十五間ノ正方形ハ  
一邊ノ長サ五十五間ノ正方形ヨリ幾坪廣キカ。

116. 直線上ノ一點ハ之ヲ内分スト稱シ。其ノ延長上ノ一點ハ之ヲ外分スト稱ス。而シテイツレノ場合ニモ直線ノ兩端ヨリ分點マデノ距離ヲ其ノ分ト稱ス。

問題 21. 一ツノ直線ガ任意ノ一點ニ於テ内分或ハ外分セラル、トキハ、其ノ二ツノ分ヨリナル矩形ハ直線ノ半分ノ上ノ正方形及ビ其ノ分點ト中點トノ間ニアル部分ノ上ノ正方形ノ差ニ等シ。

問題 22. 一ツノ直線ヲ任意ノ點ニ於テ内分或ハ外分スレバ、二ツノ分ノ上ノ正方形ノ和ハ直線ノ半分ノ上ノ正方形及ビ分點ト中點トノ間ノ部分ノ上ノ正方形ノ和ノ二倍ナリ。

117. 定理七 直角三角形ニ於テ斜邊ノ上ノ正方形ハ他ノ二邊ノ上ノ正方形ノ和ニ等シ。



$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$$

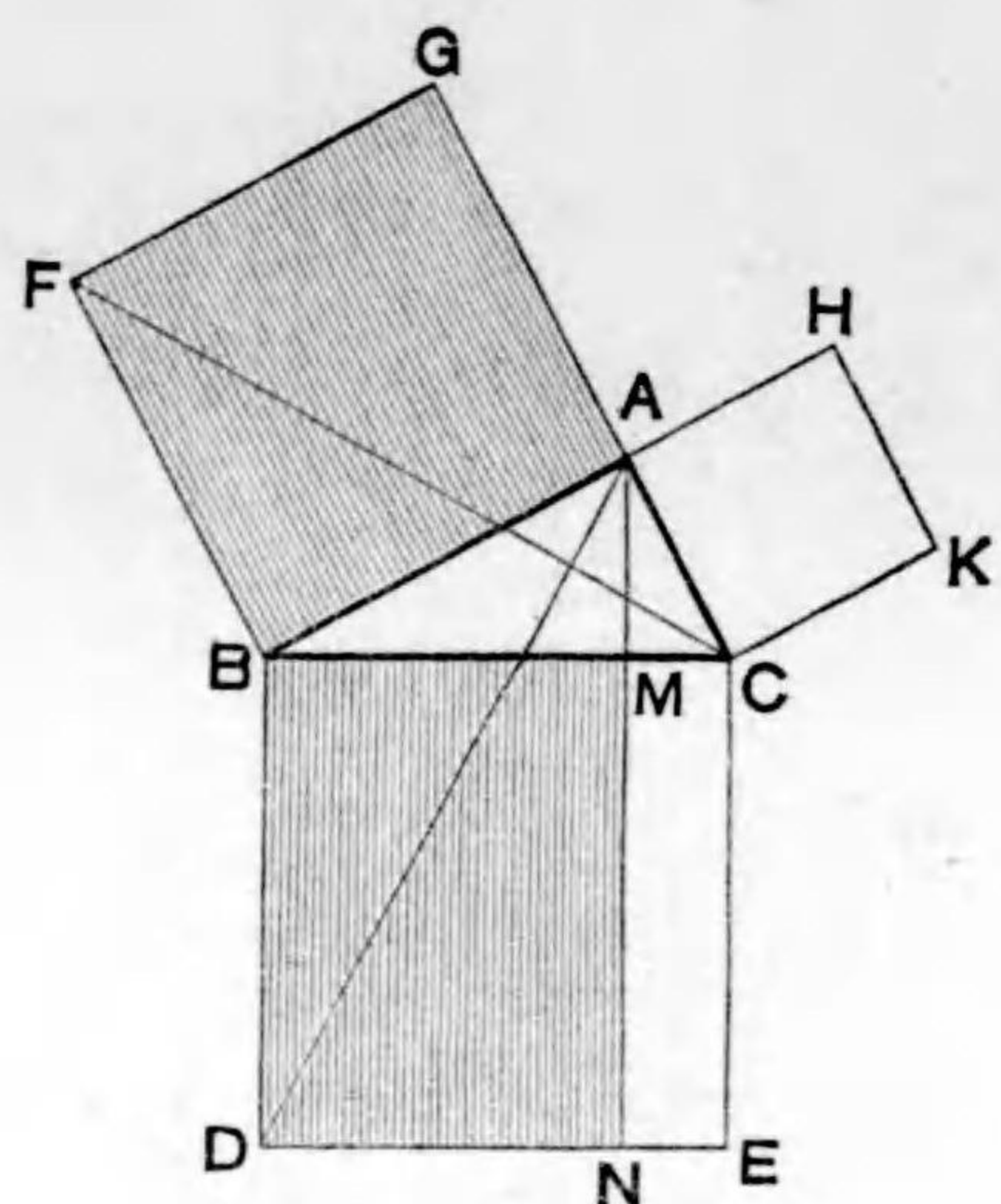
證明 Aヨリ垂線 ANヲ引キ、FトC、DトAヲ結ベバ、等底等高ナルヲ以テ

$$\text{正方形 } BG = 2\triangle BFC$$

$$\text{同様ニ 矩形 } BN = 2\triangle BDA$$

$$\text{而シテ } BF = BA$$

$$BC = BD$$



$$\angle FBC = \angle ABD$$

∴

$$\triangle BFC \cong \triangle BDA$$

∴

正方形 BG = 矩形 BN

同様 =

正方形 AK = 矩形 CN

∴

$$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$$

Pythagoras (ギリシャノ數學者, 紀元前約 569—500) ノ定理ト稱スルモノ即チ是ナリ。

問題 23. 二邊ガ夫々 3 尺及ビ 4 尺ナル直角三角形ノ斜邊ノ長サヲ求ム。

問題 24. 一邊ノ長サ 20 間ナル正三角形ノ面積

ヲ求ム。

問題 25. 直角三角形ノ直角ヲ夾ム二邊ガ 4 寸及ビ 5 寸ナルトキ, 内接圓ノ半徑ヲ求ム。

問題 26. 圓 O 外ノ一點 T ヨリ切線 TP ヲ引ク,  $OP = 3.5$  寸,  $TO = 3.7$  寸ナルトキ, TP ノ長サハ如何。

問題 27. 半徑 5 寸及ビ 7 寸ノ圓ガ直交スルトキ, 中心距離ヲ求ム。

二圓互ニ直交ストハ其ノ一ツノ交點ニ於ケル二ツノ切線ガ直角ニ交ルコトナリ。

問題 28. 正三角形ノ邊ノ長サヲ  $a$ , 高サヲ  $p$  トスレバ  $3a^2 = 4p^2$  ナリ。

問題 29. 四邊形ノ對線線ガ互ニ直交スレバ一雙ノ對邊ノ上ノ正方形ノ和ハ他ノ一雙ノ對邊ノ上ノ正方形ノ和ニ等シ。

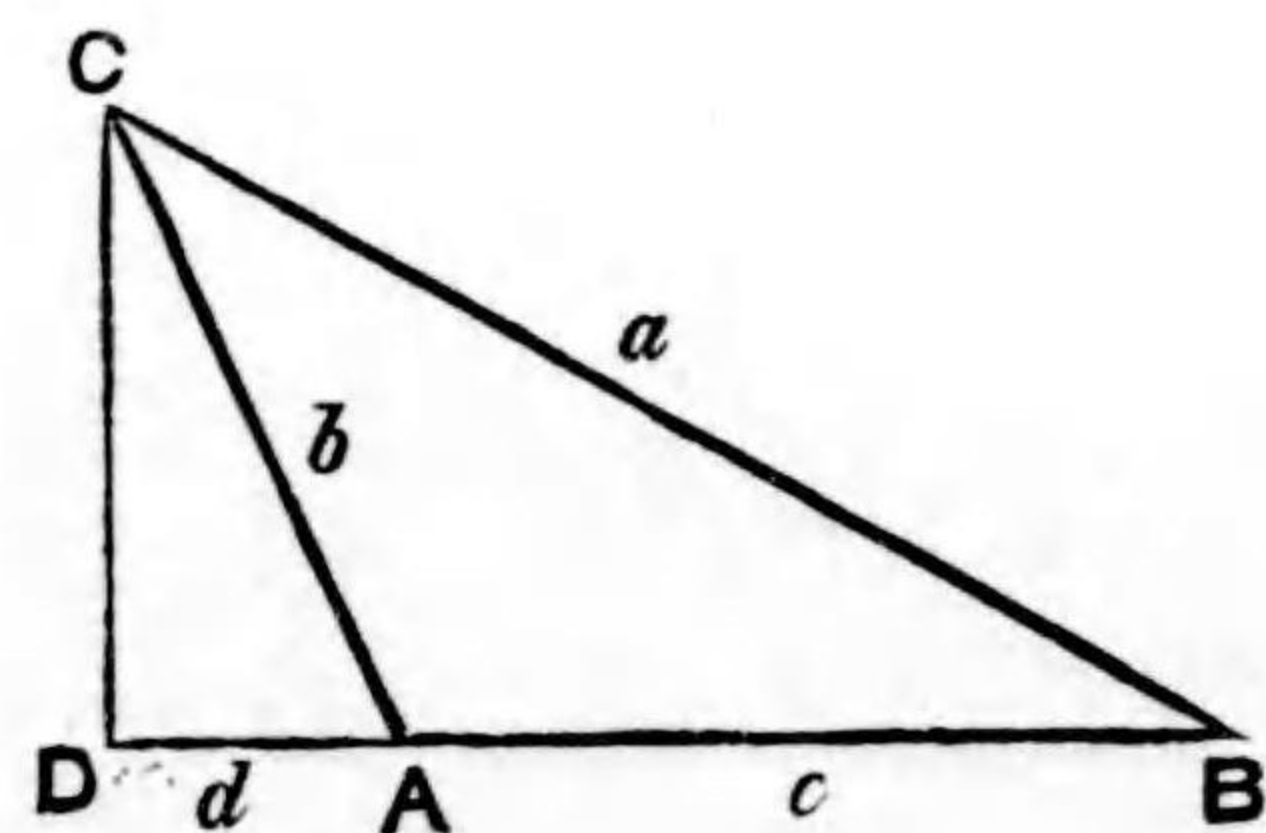
問題 30.  $\triangle ABC$  ノ高サヲ AD トスレバ

$$\overline{AB}^2 \sim \overline{AC}^2 = \overline{BD}^2 \sim \overline{DC}^2$$

問題 31.  $(a^2 + b^2)^2 - (a^2 - b^2)^2 = 4a^2b^2$  ナル關係ヲ利用シ直角三角形ノ三邊ノ長サヲ整數ニテ表ス方法ヲ考ヘヨ。

118. 一ツノ直線ガ他ノ一ツノ直線ノ上ニ投ズル正射影トハ、前ノ直線ノ兩端ヨリ後ノ直線ニ引ケル垂線ノ足ノ間ノ距離ナリ。

119. 定理八 鈍角三角形ニ於テ鈍角ノ對邊ノ上ノ正方形ハ、他ノ二邊上ノ正方形及ビ其ノ一邊ト之ニ投ズル他ノ邊ノ正射影ヨリナル矩形ノ二倍ノ和ニ等シ。



Aガ鈍角ナル三角形ABCノc邊ニ投ズルb邊ノ正射影ヲdトスレバ

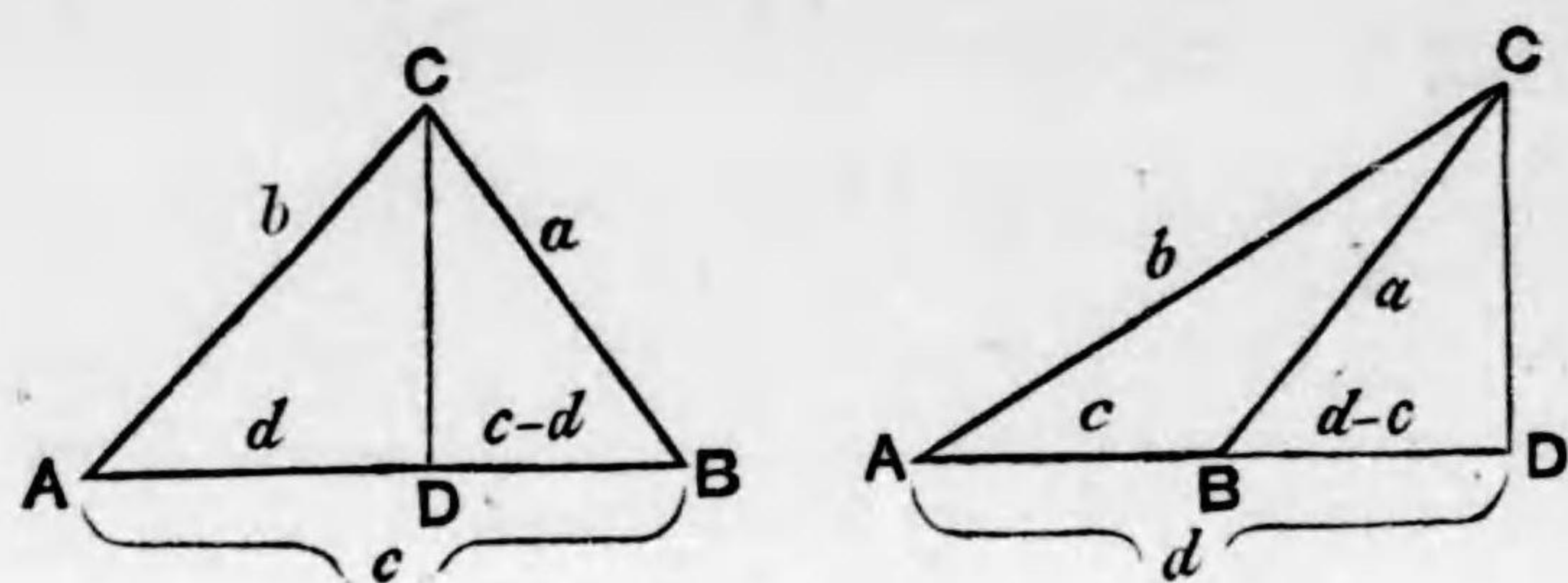
$$a^2 = b^2 + c^2 + 2cd$$

證明  $\overline{DB}^2 = (d+c)^2 = d^2 + c^2 + 2cd$   
 $\therefore \overline{CD}^2 + \overline{DB}^2 = \overline{CD}^2 + d^2 + c^2 + 2cd$   
 $\therefore a^2 = b^2 + c^2 + 2cd$

問題 32.  $\angle A = 120^\circ$  ナラバ  $a^2 = b^2 + c^2 + bc$

問題 33.  $\triangle ABC$  ニ於テ  $\angle B = 90^\circ$ ,  $AB = BC = 2$  尺トス、今  $AC$  ヲ  $E$  マデ延長シ、 $CE = BC$  ナラシムルトキ、 $BE$  ノ長サハ如何。

120. 定理九 三角形ニ於テ銳角ノ對邊ノ上ノ正方形ハ、他ノ二邊ノ上ノ正方形ノ和ヨリ其ノ一邊ト之ニ投ズル他ノ邊ノ正射影ヨリナル矩形ノ二倍ヲ引キタルモノニ等シ。



A が鋭角ナル三角形 ABC に於テ c = 投ズル b ノ正射影ヲ d トスレバ

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cd$$

證明

$$\overline{DB}^2 = (d - c)^2 = d^2 + c^2 - 2cd$$

$$\overline{CD}^2 + \overline{DB}^2 = \overline{CD}^2 + d^2 + c^2 - 2cd$$

∴

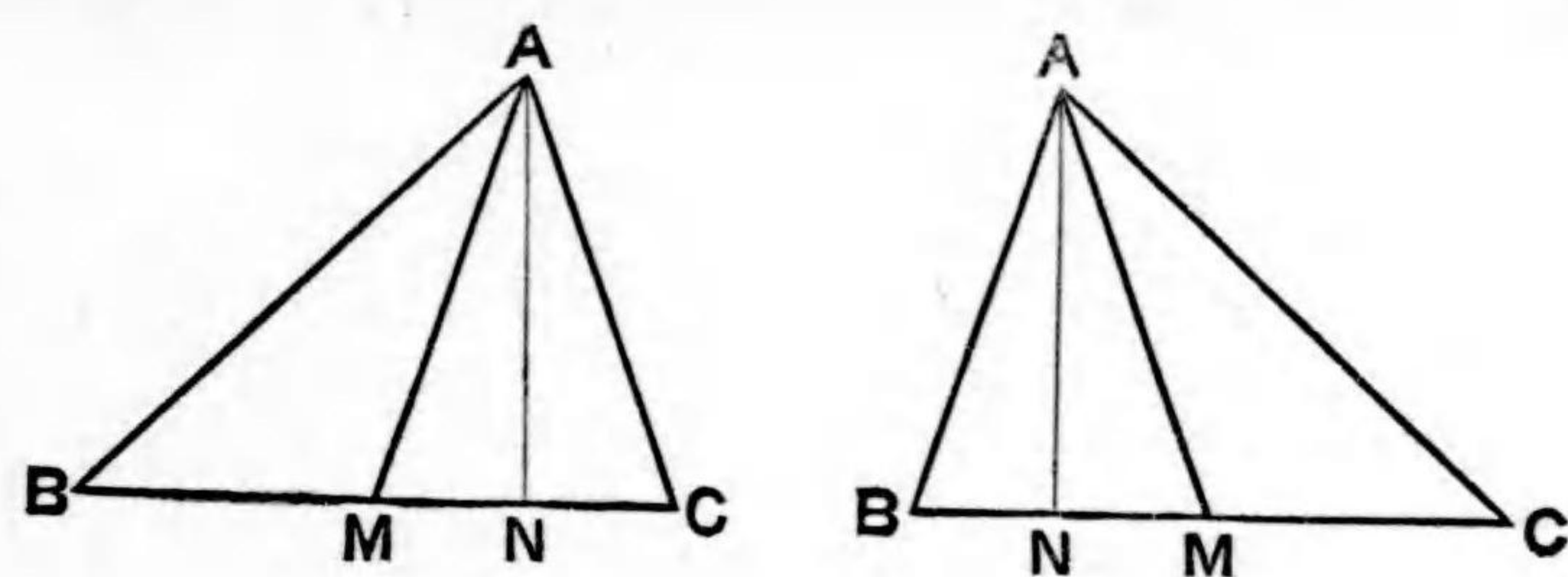
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cd$$

系 三角形ノ一邊 = 對スル角ハ其ノ邊ノ上ノ正方形ガ他ノ二邊ノ上ノ正方形ノ和 = 等シキカ, 又ハ之ヨリ大ナルカ, 又ハ之ヨリ小ナルカ = 從ヒテ直角又ハ鈍角又ハ鋭角ナリ。

問題 34.  $\triangle ABC$  ノ一ツノ中線ヲ AD トシ, 之ガ BC 上ニ投ズル正射影ヲ DE トスレバ

$$\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 = 2BC \cdot DE$$

121. 定理十 三角形ノ二邊ノ上ノ正方形ノ和ハ, 底ノ半分ノ上ノ正方形ト頂點ヨリ引ケル中線ノ上ノ正方形トノ和ノ二倍 = 等シ。



$\triangle ABC$  ノ一邊 BC ノ中點ヲ M トスレバ

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{MC}^2)$$

證明 BC = 投ズル AM ノ正射影ヲ MN トスレバ

$$\overline{AB}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{MB}^2 \pm 2 \cdot MB \cdot MN$$

$$\overline{AC}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{MC}^2 \mp 2 \cdot MC \cdot MN$$

然ルニ

$$MC = MB$$

∴

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AM}^2 + \overline{MC}^2)$$

問題 35.  $\triangle ABC$  に於て  $AB=5$  尺,  $AC=7$  尺 而シテ  $A$  ヨリノ中線ガ 3 尺ナルトキ,  $BC$  ノ長サハ如何。

問題 36. 三角形ノ三邊ガ夫々 4 寸, 6 寸, 8 寸ナルトキ, 三ツノ中線ノ長サヲ計算セヨ。

問題 37. 平行四邊形ノ各邊ノ上ノ正方形ノ和ハ對角線ノ上ノ正方形ノ和ニ等シ。

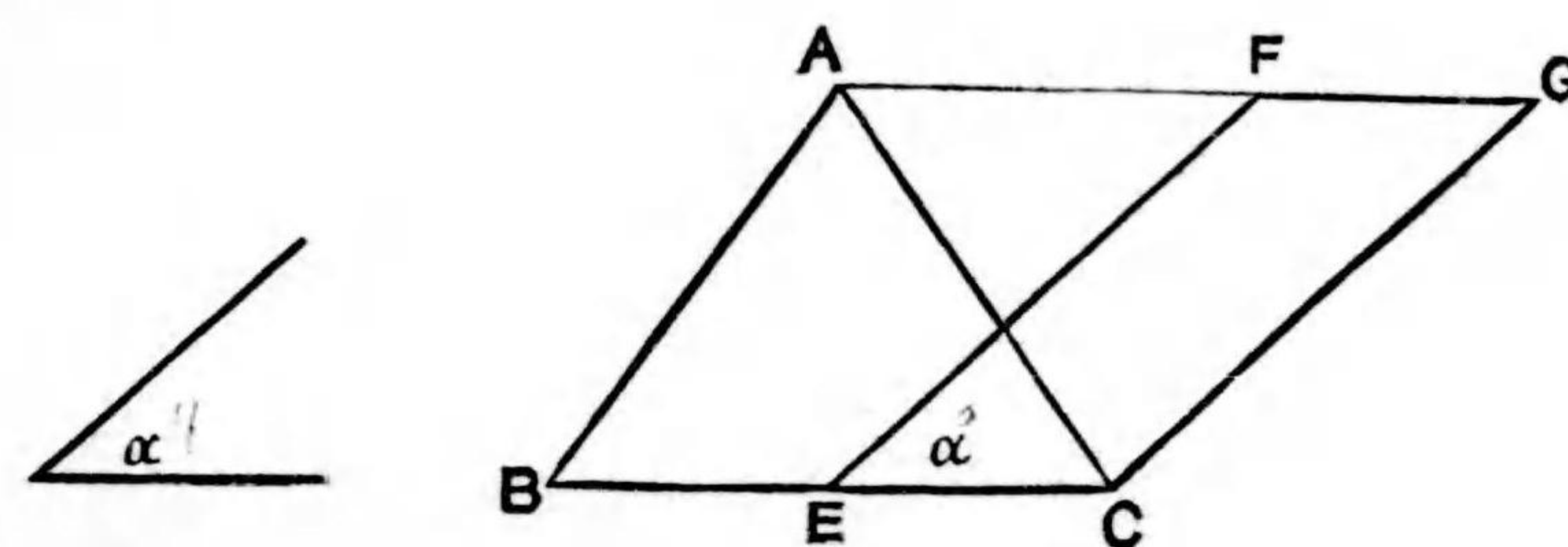
問題 38.  $\triangle ABC$  ノ三ツノ中線ヲ夫々  $AD, BE, CF$  トスレバ

$$3(\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 + \overline{CA}^2) = 4(\overline{AD}^2 + \overline{BE}^2 + \overline{CF}^2)$$

## 第二章

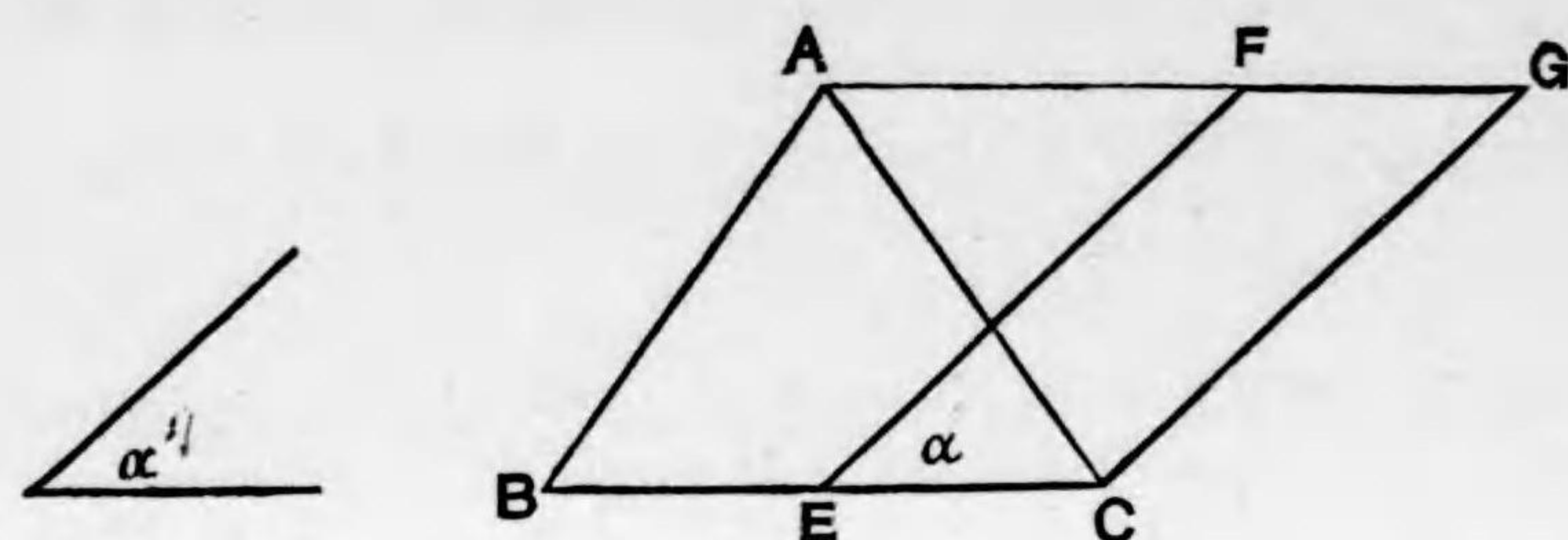
## 作圖題

122. 作圖題一 與三角形ニ等シク其ノ一ツノ角ガ與角ニ等シキ平行四邊形ヲ作ルコト。



作圖 與三角形ヲ  $\triangle ABC$  トシ, 與角ヲ  $\angle \alpha$  トス。  
 $BC$  ノ中點  $E = EC$  ト  $\angle \alpha$  ヲナス直線  $EF$  ヲ引キ,  $C$  ヨリ  $EF$  ニ平行ニ  $CG$  ヲ引キ,  $A$  ヨリ  $BC$  ニ平行ニ引キタル直線ト  $F, G$  ニ於テ交ラシム。

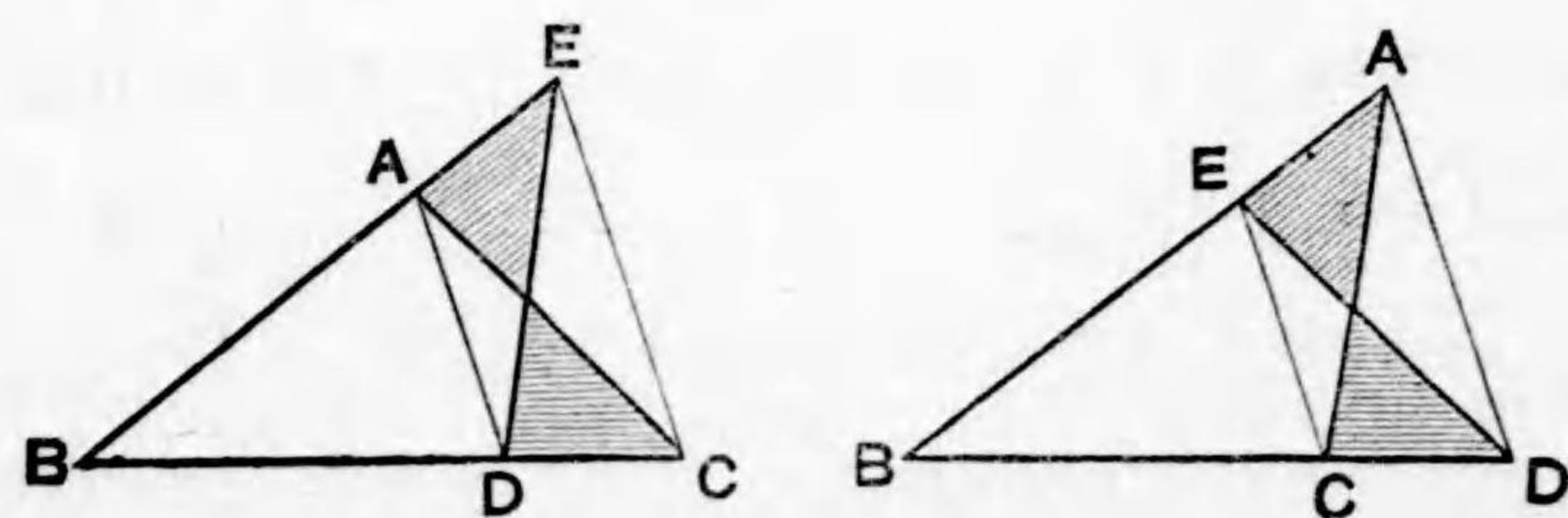
然ラバ  $\square BEGF$  ハ求ムル所ノモノナリ。



證明  $\square EG$  と  $\triangle ABC$  とハ同平行線間ニアリ  
 ナル故面積相等シク, 又  $\angle FEC = \angle \alpha$   
 ナルヲ以テ與條件ニ適ス。

問題 39. 高さ相等シキニツノ三角形ノ和又ハ  
 差ニ等シキ矩形ヲ作レ。

123. 作圖題ニ 與三角形ト等シ  
 ク且與底ヲ有スル三角形ヲ作ルコト。



解析 與三角形  $ABC$  ト等シク與底  $BD$  ヲ有

スル  $\triangle BDE$  ガ畫カレタリトセヨ。然ルトキハ  
 $AD, EC$  ヲ結ベバ互ニ平行ナルベシ。

由リテ次ノ作圖法ヲ得。

作圖  $BC$  又ハ其ノ延長上ニ  $BD$  ヲ與底ニ等  
 シクトリ,  $D$  ト  $A$  トヲ結ビ,  $C$  ヨリ  $DA$  ニ平行ニ  
 $CE$  ヲ引キ,  $E$  ト  $D$  トヲ結ベバ  $\triangle BDE$  ハ求ムル  
 處ノ三角形ナリ。

證明  $EC \parallel AD$

$\therefore \triangle AEC = \triangle DEC$

故ニ  $\triangle BCE$  ニ夫々此ノニツノ三角形ヲ付ケ  
 加フルカ或ハ之ヨリ取去レバ

$\triangle ABC = \triangle BDE$

故ニ  $\triangle BDE$  ハ與條件ニ適ス。

吟味  $E$  ヨリ  $BD$  ニ平行線ヲ引キ, 其ノ線上  
 ニ任意ノ一點ヲトリ, 之ヲ  $B$  ト  $D$  トニ結ビテ得  
 ル處ノ三角形ハ皆  $\triangle BDE$  ニ等シ。故ニ解ハ無數  
 ニアルベシ。

問題 40. 與三角形ノ一邊上ノ一與點ヨリ直線  
 ヲ引キ, 之ヲ二等分セヨ。

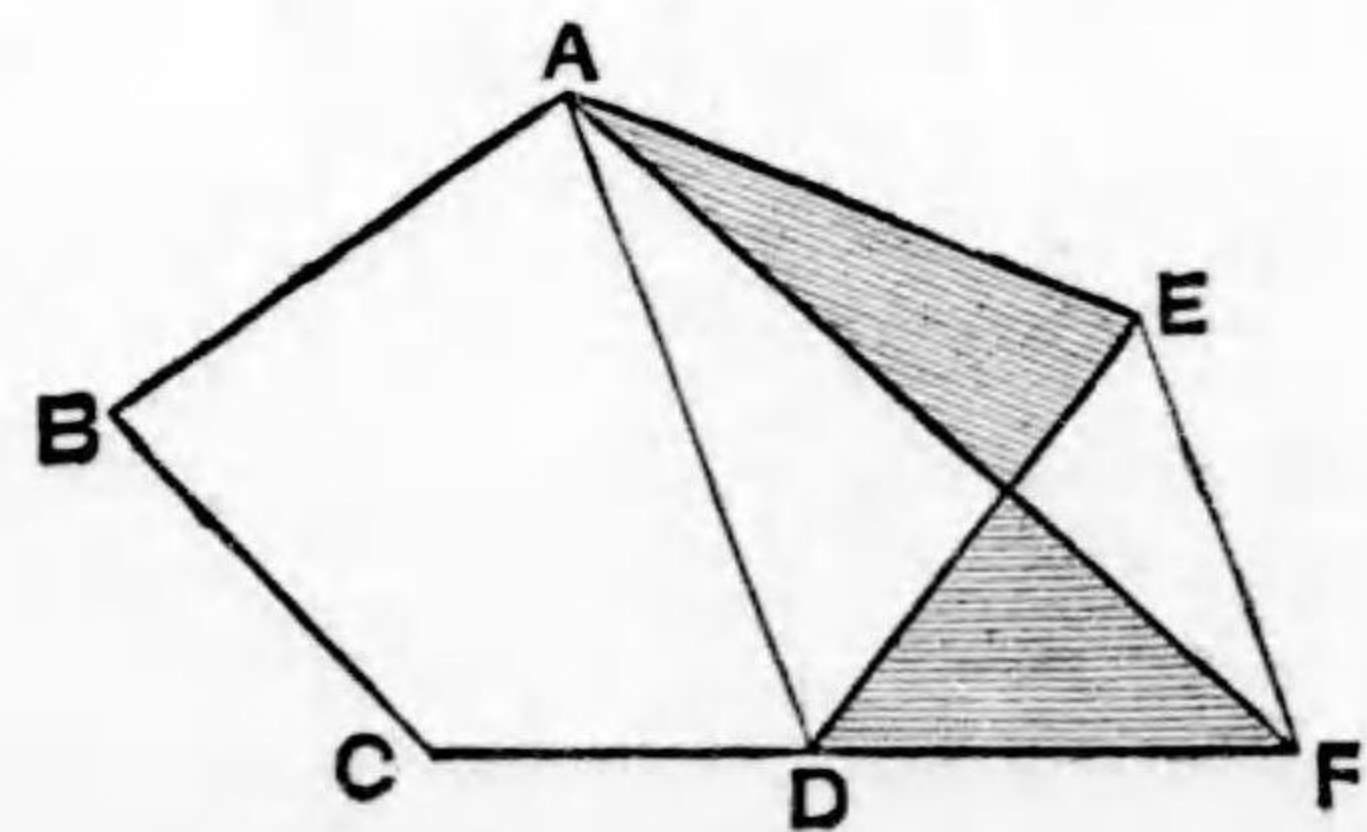


124. 作圖題三 與底上 = 與三角形 = 等シク其ノ一角ガ與角 = 等シキ平行四邊形ヲ作ルコト。

作圖 作圖題二ニヨリテ與底上 = 與三角形ト等シキ三角形ヲ畫キ, 作圖題一ニヨリテ此ノ三角形 = 等シク一ツノ角ガ與角 = 等シキ平行四邊形ヲ畫キ, 其ノ底ノ二倍ヲ底トシ高サノ半ヲ高サトシ一角ガ與角 = 等シキ平行四邊形ヲ畫ケバ可ナリ。

證明 畫カレタル平行四邊形ハ與三角形 = 等シク, 底ハ與底 = 等シク其ノ一角ハ與角 = 等シクシテ與條件 = 適ス。

125. 作圖題四 與多角形 = 等シクシテ邊ノ數一ツダケ少キ多角形ヲ



作ルコト。又與多角形 = 等シキ三角形ヲ作ルコト。

作圖 ABCDE ヲ與多角形トス。AD ヲ結ビ E ヨリ AD = 平行 = EF ヲ引キ, CD ノ延長ト F = 會セシム。

F ヲ A = 結ベバ四邊形 ABCF ガ求ムル所ノ邊數一ツ少キ多角形ナリ。

證明  $\triangle AED = \triangle AFD$

故 = 此ノ二ツノ三角形 = 多角形 ABCD ヲ付ケ加フレバ多角形 ABCF ガ多角形 ABCDE = 等シク, 且邊ノ數ハ一ツ少シ。故 = 與條件 = 適ス。

同様ニシテ又邊數一ツ少キ多角形ヲ作り, 終ニ三角形ニ導クコトヲ得。

問題 41. 與多角形 = 等シク且ツ一角ガ與角 = 等シキ平行四邊形ヲ作レ。

問題 42. 四邊形 ABCD = 等シク且  $\angle A$  ヲ共有スル三角形ヲ AB 上 = 畫ケ。

## 第四篇ノ問題

問題 43. 二邊ガ夫々4寸及ビ6寸ニシテ其ノ間ノ角ガ $30^\circ$ ナル三角形ノ面積ヲ計算セヨ。

問題 44. 四邊形ノ對角線ガ夫々30尺及ビ40尺ニシテ且ツ $30^\circ$ ニ於テ相交ルトキ,其ノ面積ヲ求ム。

問題 45. 125平方尺ノ面積ヲ有スル直角三角形ノ一邊ガ他ノ邊ノ二倍ナルトキ,斜邊及ビ直角頂ヨリ斜邊ヘ下セル垂線ノ長サヲ求ム。

問題 46. 半徑6尺ノ圓ニ内接スル正六邊形ノ面積ヲ求ム。

問題 47. 直徑8尺ノ圓ニ内接スル正三角形ノ面積ヲ計算セヨ。

問題 48. 直徑1尺2寸ノ圓ニ4寸ノ弦ヲ容レ此ノ弦ニ切スル同心圓ノ半徑ヲ求ム。

問題 49. 梯形ノ平行二邊ガ夫々4尺及10尺ニシテ不平行邊ハ各5尺ナルトキ,其ノ面積ヲ求ム。

問題 50. 梯子ヲ道ノ片側ノ家ニ立テ掛ケタルニ,地上ヨリ24尺ノ點ニ達シタリ。下端ヲ其ノ儘

ニシテ一直角ダケ回轉シ道ノ他ノ側ノ家ニ立テ掛ケタルニ,地上ヨリ18尺ノ點ニ達シタリト云フ。道幅及ビ梯子ノ長サハ如何。

問題 51. 多クノ與正方形ノ和ニ等シキ正方形ヲ作レ。

問題 52. 與正方形ノ三四五倍ノ正方形ヲ作レ。

問題 53. 平行四邊形ノ一ツノ對角線上ノ點ヲ通り相隣レル二ツノ邊ニ平行線ヲ引クトキ,此ノ對角線ノ兩側ニ生ズル二ツノ平行四邊形ハ相等シ。

問題 54.  $\square ABCD$  内ノ一點  $O$  ヲ通り各邊ニ平行ニ二ツノ直線ヲ引キ,之ガ  $AB, CD, BC, DA$  ト交ル點ヲ夫々  $E, F, G, H$  トスレバ

$$2\triangle AOC = \square OB \sim \square OD$$

問題 55. 同底上ニ立ツ等積ノ三角形中ニ於テ,周圍ノ最小ナルモノハ二等邊三角形ナリ。

問題 56. 二點  $A, B$  ト一直線トガ與ヘラレタルトキ,此ノ直線上ニ一點  $P$  ヲ求メ,  $\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2$  ヲシテ最小ナラシメヨ。

問題 57. 3尺6寸ノ長サノ繩ヲ以テ最大ナル

矩形ヲ圍ムニハ如何ニスベキカ。

問題 58. 一ツノ直線ヲ二ツノ分ニ分チ、各分ノ上ノ正方形ノ和ヲ最小ナラシメヨ。

問題 59. 矩形 ABCD 内ノ一點ヲ O トスレバ

$$\overline{OA}^2 + \overline{OC}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{OD}^2$$

問題 60.  $\square ABCD$  及ビ一點 P ガ與ヘラレタルトキハ  $\triangle PAB$  ト  $\triangle PBC$  トノ和或ハ差ハ  $\triangle PBD$  = 等シ。

## 第五篇

### 比 例

#### 第一章

### 比 比例

126. 同種類ノ二ツノ量ニ就キテ第一ノ量ハ第二ノ量ノ幾倍ナルカト云フ關係ヲ比ト稱ス。而シテ其ノ幾倍ナルカヲ表ス數ヲ比ノ値、或ハ略シテ單ニ比ト稱ス。

比ハ整數ナルコトアリ、分數ナルコトアリ、或ハ整數ニテモ分數ニテモナク即チ不盡數ナルコトモアルベシ。例ヘバー邊ノ長サー尺ナル正方形ノ對角線ノ長サ $\sqrt{2}$ 尺ナレバ、對角線ハ一邊ノ $\sqrt{2}$ 倍ニ等シキガ如シ。

第一ノ量ヲ前項ト稱シ、第二ノ量ヲ後項ト稱ス。

A, B 二量ノ比ガ C, D 二量ノ比ニ等シキトキハ、此ノ四ツノ量ハ比例ヲナスト云フ。

比例ヲナス四ツノ量 A, B, C, D ハ必ズ皆同種類タルヲ要セザルナリ。A ト B ガ同種類ニシテ C ト D ガ同種類ナラバ可ナリ、

比例ハ之ヲ次ノ如ク記ス。

$$A:B=C:D$$

或ハ

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$$

A ト D ヲ外項ト稱シ、B ト C ヲ内項ト稱シ、D ヲ A, B, C ノ第四比例項ト稱ス。

同種類ノ三ツノ量 A, B, C ガ比例ヲナストハ、 $A:B=B:C$  ナルコトナリ。而シテ C ヲ A, B ノ第三比例項ト稱シ、B ヲ A ト C ノ比例中項ト稱ス。

比ノ前項ト後項トヲ交換シタル比ヲ、先ノ比ニ對シテ反比ト稱ス。

127. 二ツノ量ノ比ハ一ノ數ナルヲ以テ代數學ニ於テ比例ニ就キテ論ズル事項ハ、其ノ儘量ノ比例ニ關スル定理ニ改ムルコトヲ得。今主ナルモノヲ次ニ掲グ。

1.  $A:B=C:D$  ナラバ  $A:C=B:D$
2.  $A:B=C:D$  而シテ  $A \leq C$  ナラバ  $B \leq D$
3.  $A:B=C:D=E:F=\dots\dots$  ナラバ  
 $A:B=A+C+E+\dots\dots : B+D+F+\dots\dots$
4.  $A:B=C:D$  ナラバ  $A+B : B = C+D : D$
5.  $A:B=C:D$  ナラバ  $A \sim B : B = C \sim D : D$