Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2019/2020**

Bündel, Garben und Kohomologie

Arbeitsblatt 28

Übungsaufgaben

Aufgabe 28.1. Beschreibe die Kegelabbildung

$$\mathbb{A}_K^{d+1} \setminus \{(0,0,\ldots,0)\} \longrightarrow \mathbb{P}_K^d$$

mit Hilfe eines linearen Systems in einer invertierbaren Garbe.

Aufgabe 28.2. Beschreibe die Projektion weg von einem Punkt mit Hilfe eines linearen Systems in einer invertierbaren Garbe.

Aufgabe 28.3. Es sei K ein Körper und $\mathbb{P}_K^n$ der zugehörige projektive Raum. Es sei $\varphi\colon K^{n+1} \to K^{n+1}$ eine bijektive lineare Abbildung.

(1) Zeige, dass φ einen Automorphismus

$$\varphi\colon \mathbb{P}_K^n \longrightarrow \mathbb{P}_K^n,\ (x_0, x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \varphi(x_0, x_1, \ldots, x_n),$$

induziert.

(2) Bestimme das Urbild von $D_+(X_i)$ in der in (1) beschriebenen Situation. Wie sieht der Morphismus für diese affinen Mengen aus?

(3) Zeige, dass φ_1 und φ_2 genau dann den gleichen Automorphismus auf dem projektiven Raum induzieren, wenn sie durch Multiplikation mit einem Skalar $\neq 0$ ineinander überführbar sind.

(4) Induziert jede lineare Abbildung $\varphi\colon K^{n+1} \to K^{n+1}$ einen Morphismus $\varphi\colon \mathbb{P}_K^n \to \mathbb{P}_K^n$?

In der vorstehenden Situation spricht man von einem *projektiv-linearen Automorphismus*.

Aufgabe 28.4. Beschreibe einen projektiv linearen Automorphismus

$$\mathbb{P}_K^d \longrightarrow \mathbb{P}_K^d$$

mit Hilfe eines linearen Systems in einer invertierbaren Garbe.

Aufgabe 28.5. Es seien $P, Q \in \mathbb{P}_K^n$ Punkte im projektiven Raum über einem Körper K. Zeige, dass es einen Automorphismus $\varphi\colon \mathbb{P}_K^n \to \mathbb{P}_K^n$ mit $\varphi(P) = Q$ gibt.

Aufgabe 28.6.*

Es sei V ein zweidimensionaler Vektorraum über einem Körper K. Es seien v_1, v_2, v_3 und w_1, w_2, w_3 Vektoren in V, die jeweils paarweise linear unabhängig seien. Zeige, dass es eine bijektive lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$ derart gibt, dass

$$\varphi(v_i) \in K w_i$$

für $i = 1, 2, 3$ gilt.

Aufgabe 28.7. Es seien $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{P}^1_K$ und $Q_1, Q_2, Q_3 \in \mathbb{P}^1_K$ jeweils drei (untereinander verschiedene) Punkte auf der projektiven Geraden über einem Körper K. Zeige, dass es einen K-Automorphismus $\varphi\colon \mathbb{P}^1_K \to \mathbb{P}^1_K$ mit $\varphi(P_i) = Q_i$ für $i = 1, 2, 3$ gibt.

Aufgabe 28.8. Es sei K ein Körper. Zeige, dass jeder K-Automorphismus des projektiven Raumes $\mathbb{P}^n_K$ in sich projektiv-linear ist.

Verwende, dass die zurückgezogene Garbe zu $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_K}(1)$ ebenfalls $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_K}(1)$ sein muss.

Aufgabe 28.9. Es sei X ein Schema über einem Körper K, es sei $\mathcal{L}$ eine invertierbare Garbe auf X und es seien $s_0, s_1, \ldots, s_n \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ globale Schnitte auf X, die das lineare System $\langle s_0, s_1, \ldots, s_n \rangle \subseteq \Gamma(X, \mathcal{L})$ festlegen. Es sei $t_0, t_1, \ldots, t_n$ ein weiteres Erzeugendensystem dieses linearen Systems. Zeige folgende Aussagen.

(1) Es ist $\bigcup_{i=0}^n X_{s_i} = \bigcup_{i=0}^n X_{t_i}$.
(2) Für die durch diese Erzeugendensysteme gegebenen Morphismen gibt es einen projektiv-linearen Automorphismus

$$\theta\colon \mathbb{P}^n_K \longrightarrow \mathbb{P}^n_K$$

mit

$$\theta \circ \varphi_{s_0, s_1, \ldots, s_n} = \varphi_{t_0, t_1, \ldots, t_n}.$$

Aufgabe 28.10. Wir betrachten die projektive Gerade $\mathbb{P}^1_K$ und das volle lineare System

$$L := \langle s, t \rangle = \Gamma\Big(\mathbb{P}^1_K, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_K}(1)\Big).$$

Zeige, dass die Fixierung eines Erzeugendensystems von L aus drei Elementen (bis auf Streckung) einer Einbettung der projektiven Geraden in die projektive Ebene als Gerade entspricht. Wie kann man dabei die Bildgerade beschreiben?

Aufgabe 28.11. Wir betrachten die projektive Gerade $\mathbb{P}^1_K$ und das volle lineare System

$$L := \langle s^2, st, t^2 \rangle = \Gamma\Big(\mathbb{P}^1_K, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_K}(2)\Big).$$

Zeige, dass die Fixierung einer Basis von L (bis auf Streckung) einer Einbettung der projektiven Geraden in die projektive Ebene entspricht. Wie kann man dabei die Bildkurve beschreiben?

Aufgabe 28.12. Wir betrachten die projektive Gerade $\mathbb{P}^1_K$ und das volle lineare System

$$L := \langle s^3, s^2t, st^2, t^3 \rangle = \Gamma\Big(\mathbb{P}^1_K, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_K}(3)\Big).$$

Zeige, dass die zugehörige Abbildung

$$\mathbb{P}^1_K \longrightarrow \mathbb{P}^3_K$$

einer Einbettung der projektiven Geraden in den projektiven Raum ergibt. Man gebe möglichst viele Gleichungen an, die die Bildkurve erfüllt.

Aufgabe 28.13. Es sei X ein Schema über einem kommutativen Ring R, es sei $\mathcal{L}$ eine invertierbare Garbe auf X und es seien $s_0, s_1, \ldots, s_n \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ globale Schnitte auf X. Es sei $L \to X$ das Geradenbündel im Sinne von Satz 17.10 zur dualen invertierbaren Garbe $\mathcal{L}^*$ derart, dass man die s_i als Morphismen

$$L \longrightarrow X \times \mathbb{A}^1_R \longrightarrow \mathbb{A}^1_R$$

auffassen kann. Zeige, dass dann ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} L & \stackrel{(s_0,s_1,\ldots,s_n)}{\longrightarrow} & \mathbb{A}^{n+1}_R \supseteq \bigcup_{i=1}^n D(x_i) \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ X \supseteq \bigcup_{i=1}^n X_{s_i} & \stackrel{\varphi_{s_0,s_1,\ldots,s_n,\mathcal{L}}}{\longrightarrow} & \mathbb{P}^n_R \end{array}$$

vorliegt, wobei rechts die Kegelabbildung steht.

Aufgabe 28.14. Es sei X ein Schema über einem kommutativen Ring R, es sei $\mathcal{L}$ eine invertierbare Garbe auf X und es seien $s_0, s_1, \ldots, s_n \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ globale Schnitte auf X. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(1) Es ist $X = \bigcup_{i=0}^n X_{s_i}$.
(2) Der durch das lineare System $(s_0, s_1, \ldots, s_n)$ definierte Morphismus nach $\mathbb{P}^n_R$ ist auf ganz X definiert.
(3) Das lineare System $(s_0, s_1, \ldots, s_n)$ ist basispunktfrei.

Abbildungsverzeichnis