**Prof. Dr. H. Brenner** **Osnabrück WS 2016/2017**

# Grundkurs Mathematik I

## Arbeitsblatt 12

### Die Pausenaufgabe

Aufgabe 12.1. Bestimme die Anzahl der Teiler der Zahlen

$$1, 2, 3, \ldots, 20\,.$$

### Übungsaufgaben

Aufgabe 12.2. Skizziere ein Teilerdiagramm für die Zahlen $25, 30, 36$ sowie all ihrer positiven Teiler.

Aufgabe 12.3. Es sei $M$ eine Menge von $n$ Äpfeln und $P$ eine Menge von $t$ Personen. Begründe, dass man die Apfelmenge genau dann gerecht auf die Personen aufteilen kann, wenn $t$ ein Teiler von $n$ ist.

Aufgabe 12.4. Bringe die Teilbarkeit einer natürlichen Zahl $n$ durch eine natürliche Zahl $t$ mit dem Begriff der Produktmenge in Zusammenhang.

Aufgabe 12.5. Es seien $a, b, c$ natürliche Zahlen und es gelte, dass $bc$ ein Vielfaches von $ac$ sei. Ferner sei $c \neq 0$. Zeige, dass dann $b$ ein Vielfaches von $a$ ist.

Aufgabe 12.6. Es seien $a \leq b$ natürliche Zahlen, die beide von $c$ geteilt werden. Zeige, dass auch die Differenz $b - a$ von $c$ geteilt wird.

Aufgabe 12.7. Es sei $n$ eine natürliche Zahl und $r$ sei die kleinste natürliche Zahl mit $r^2 \geq n$. Zeige, dass bei einer Faktorzerlegung $n = ab$ stets $a \leq r$ oder $b \leq r$ gilt.

Aufgabe 12.8. Es seien $a, b$ positive natürliche Zahlen. Stifte eine Bijektion zwischen der Menge aller Vielfachen von $a$ und der Menge aller Vielfachen von $b$.

Aufgabe 12.9.*

Es seien drei verschiedene Zahlen $a, b, c > 1$ gegeben. Wie viele Teiler besitzt das Produkt $a \cdot b \cdot c$ minimal?

Aufgabe 12.10. Es sei

$$Z = \{1, 2, 4, 8, 16, \ldots\}$$

die Menge aller Zweierpotenzen. Definiere eine Bijektion

$$\varphi \colon \mathbb{N} \longrightarrow Z$$

derart, dass $k \leq n$ genau dann gilt, wenn $\varphi(k)$ die Zahl $\varphi(n)$ teilt.

Aufgabe 12.11. Beschreibe Analogien zwischen der Größergleichbeziehung und der Teilerbeziehung auf den natürlichen Zahlen.

Die folgende Aufgabe beschreibt, wie sich in Lemma 12.3 unter den gegebenen Teilbarkeitsvoraussetzungen die Brüche verhalten.

Aufgabe 12.12.

(1) Für jede natürliche Zahl $a$ gilt $\frac{a}{1} = a$ und bei $a \neq 0$ gilt auch $\frac{a}{a} = 1$.

(2) Für jede natürliche Zahl $a \neq 0$ gilt $\frac{0}{a} = 0$.

(3) Gilt $a \,|\, b$ und $b \,|\, c$, so gilt auch $a \,|\, c$ und es ist (bei $a, b \neq 0$)

$$\frac{c}{a} = \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{b}.$$

(4) Gilt $a \,|\, b$ und $c \,|\, d$, so gilt auch $ac \,|\, bd$ und es ist (bei $a, c \neq 0$)

$$\frac{bd}{ac} = \frac{b}{a} \cdot \frac{d}{c}.$$

(5) Gilt $a \,|\, b$, so gilt auch $ac \,|\, bc$ für jede natürliche Zahl $c$, und es ist (bei $a, c \neq 0$)

$$\frac{bc}{ac} = \frac{b}{a}$$

(6) Gilt $a \,|\, b$ und $a \,|\, c$, so gilt auch $a \,|\, (rb + sc)$ für beliebige natürliche Zahlen $r, s$, und es ist (bei $a \neq 0$)

$$\frac{rb + sc}{a} = r\frac{b}{a} + s\frac{c}{a}.$$

Die folgende Aufgabe sollte man in Analogie zu Lemma 10.12 sehen.

Aufgabe 12.13. Es seien $a, b, c, d$ natürliche Zahlen. Zeige die folgenden Aussagen.

(1) Es sei $b$ ein Teiler von $a$. Dann ist

$$b \cdot c \cdot \frac{a}{b} = c \cdot a$$

für $b \neq 0$.

(2) Es sei $b$ ein Teiler von $a$ und $d$ ein Teiler von $c$ mit $b, d \neq 0$. Dann ist
$$\frac{ac}{bd} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}.$$
Insbesondere gelten, wenn $b$ ein Teiler von $a$ ist, die Beziehungen ( $b, c \neq 0$)
$$\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$$
und
$$\frac{ac}{b} = \frac{a}{b} \cdot c.$$

(3) Es sei $b \neq 0$ ein Teiler von $a \neq 0$ und $a$ ein Teiler von $bc$. Dann ist $\frac{a}{b}$ ein Teiler von $c$ und es ist
$$\frac{c}{\frac{a}{b}} = \frac{cb}{a}.$$

Aufgabe 12.14.*

Es gibt 24 Schokoriegel und 16 Äpfel. Auf wie viele Kinder kann man diese Sachen gerecht verteilen?

Aufgabe 12.15. Bestimme den größten gemeinsamen Teiler und das kleinste gemeinsame Vielfache von 105 und 150.

Aufgabe 12.16. Es sei $t$ ein Teiler von $n$. Was ist der größte gemeinsame Teiler von $t$ und $n$ und was ist das kleinste gemeinsame Vielfache von $t$ und $n$?

Aufgabe 12.17. Berechne den Ausdruck
$$n^2 + n + 41$$
für $n = 0, 1, 2, \ldots$. Handelt es sich dabei um Primzahlen?

Aufgabe 12.18. Zeige, dass man jede natürliche Zahl $n \geq 12$ als Summe
$$n = a + b$$
schreiben kann, wobei sowohl $a$ als auch $b$ zusammengesetzte Zahlen sind.

Aufgabe 12.19.*

Bestimme die Primfaktorzerlegung von 1728.

Aufgabe 12.20. Bestimme die Primfaktorzerlegung von 1025.

Aufgabe 12.21.*

Es sei $n$ eine natürliche Zahl. Wann ist die Zahl $n^2 - 1$ eine Primzahl?

Aufgabe 12.22. Finde die kleinste Zahl $N$ der Form $N = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r + 1$, die keine Primzahl ist, wobei $p_1, p_2, \ldots, p_r$ die ersten $r$ Primzahlen sind.

Aufgabe 12.23. Finde einen Primfaktor der Zahl $2^{25} + 1$.

Aufgabe 12.24. Finde einen Primfaktor der folgenden drei Zahlen

$$2^{33} - 1,\ 2^{91} - 1,\ 2^{13} + 1\,.$$

Aufgabe 12.25.*

Man gebe zwei Primfaktoren von $2^{35} - 1$ an.

## Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 12.26. (3 Punkte)

Skizziere ein Teilerdiagramm für die Zahlen $12, 15, 16, 20$ sowie all ihrer positiven Teiler.

Aufgabe 12.27. (2 Punkte)

Es sei $n \neq 0$ eine natürliche Zahl mit zwei Faktorzerlegungen

$$n = ab = cd.$$

Es sei $a \geq c$. Zeige, das dann $b \leq d$ sein muss.

Aufgabe 12.28. (2 Punkte)

Es sei $b \neq 0$ ein Teiler von $a$ und $d \neq 0$ ein Teiler von $c$. Zeige, dass $bd$ ein Teiler von $ad + cb$ ist und dass

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd}$$

gilt.

Aufgabe 12.29. (3 Punkte)

Man bestimme das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\,.$$

Aufgabe 12.30. (3 Punkte)

Finde einen Primfaktor der Zahl $2^{25} - 1$.

Aufgabe 12.31. (4 Punkte)

Zeige, dass es außer $3, 5, 7$ kein weiteres Zahlentripel der Form $p, p+2, p+4$ gibt, in dem alle drei Zahlen Primzahlen sind.