MATHEMATISCHE ANNALEN.

IN VERBINDUNG MIT C. NEUMANN

BEGRÜNDET DURCH

RUDOLF FRIEDRICH ALFRED CLEBSCH.

Unter Mitwirkung der Herren

Prof. P. GORDAN zu Erlangen, Prof. C. NEUMANN zu Leipzig,
Prof. K. VONDERMÜHLL zu Basel

gegenwärtig herausgegeben

von

Prof. **Felix Klein**
zu Göttingen.

Prof. **Walther Dyck**
zu München.

Prof. **Adolph Mayer**
zu Leipzig.

XL. Band.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1892.

1892, [illegible] 7 – Oct. 2[illegible]
[illegible]

Inhalt des vierzigsten Bandes.

(In alphabetischer Ordnung.)

MATHEMATISCHE ANNALEN.

IN VERBINDUNG MIT C. NEUMANN

BEGRÜNDET DURCH

RUDOLF FRIEDRICH ALFRED CLEBSCH.

Unter Mitwirkung der Herren

Prof. P. GORDAN zu Erlangen, Prof. C. NEUMANN zu Leipzig,
Prof. K. VONDERMÜHLL zu Basel

gegenwärtig herausgegeben

von

Prof. Felix Klein
zu Göttingen.

Prof. Walther Dyck
zu München.

Prof. Adolph Mayer
zu Leipzig.

XL. Band. 1. Heft.

c'

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1892.

Zur Erzeugung der rationalen Raumcurven.

Von

Wilhelm Stahl in Aachen.

Für die rationalen Raumcurven R_n giebt es zwei Arten von Gebilden, welche zu ihnen perspectiv sein können. Das sind die Regelschaaren und die Ebenenbüschel. Sie stehen in innigem Zusammenhang mit einander; je zwei der einen Art liefern uns ein Gebilde der andern Art. Die Regelschaaren entstehen als Schnitte entsprechender Ebenen zweier Ebenenbüschel und die Ebenenbüschel durch Verbindung entsprechender Strahlen zweier Regelschaaren. Beide Gebilde müssen deshalb gleichzeitig betrachtet werden. Man kommt dabei auf eine übersichtliche Darstellung der Vertheilung der zu R_n perspectiven Regelflächen im Raume. Viele Beispiele sollen den Gegenstand erläutern. Die Behandlung desselben schliesst sich enge an meinen früheren Aufsatz „*Zur Erzeugung der ebenen rationalen Curven*"*) an und ich kann mich deshalb in manchen Entwicklungen kürzer fassen. Den Beweis einiger algebraischer Hülfssätze habe ich, um den Gang der Untersuchungen nicht zu unterbrechen, in einen Anhang verwiesen.

§ 1.

1) Bei veränderlichem μ seien die Coordinaten der Punkte einer rationalen Raumcurve gegeben in:

$$(1)\qquad \varrho x_i = \varphi_i(\mu) = \sum_0^n {}_p\, a_{ip}\,\mu^{n-p} \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Es giebt $(n-3)$ linear unabhängige zu den Functionen $\varphi_i(\mu)$ conjugirte Formen n^{ter} Ordnung, welche wir mit

$$f_k(\mu) \quad \big(k = 1, 2 \ldots (n-3)\big)$$

bezeichnen. Ist:

*) Diese Annalen Bd. 38, S. 561.

(2) $$f_k(\mu) = \sum_0^n {}_p \binom{n}{p} b_{kp}\,\mu^{n-p},$$

dann gelten die Gleichungen:

(3) $$\sum_0^n {}_p (-1)^p\, a_{ip}\, b_{k,n-p} = 0$$

für

$$\big(i = 1, 2, 3, 4;\quad k = 1, 2 \ldots (n-3)\big).$$

Die correspondirenden Determinanten der beiden Formenreihen φ_i und f_k sind einander proportional; d. h. es ist:*)

(4) $$|a_p\, a_q\, a_r\, a_s| = \tau\,|b_0\, b_1 \ldots b_{p-1}\, b_{p+1} \ldots b_{q-1}\, b_{q+1} \ldots b_{r-1}\, b_{r+1} \ldots b_{s-1}\, b_{s+1} \ldots b_n|$$

wenn

$$p < q < r < s$$

und τ einen constanten Factor bedeutet.

Die durch einen Punkt z des Raumes gelegten Ebenen schneiden auf R_n ∞^2 Punktgruppen aus, welche ein durch drei Formen bestimmtes lineares System bilden. Diesen sind $(n-2)$ linear unabhängige Formen n^{ter} Ordnung f_k $\big(k = 1 \ldots (n-2)\big)$ conjugirt, von welchen $(n-3)$ in den $f_1 \ldots f_{n-3}$ gegeben sind. Die Coefficienten der $(n-2)^{\text{ten}}$ aber genügen den Bedingungen:

(5) $$\varrho z_i = \sum_0^n {}_p (-1)^p\, a_{ip}\, b_{n-2,\,n-p}.$$

In Verbindung mit (2) erhalten wir daher die Proportionalität der Determinanten:

(6) $$|z\, a_p\, a_q\, a_r| = \pi\,|b_0\, b_1 \ldots b_{p-1}\, b_{p+1} \ldots b_{q-1}\, b_{q+1} \ldots b_{r-1}\, b_{r+1} \ldots b_n|.$$

2) Wählt man den Punkt z auf der Curve R_n in dem zu dem Parameterwerthe $\mu = \lambda$ gehörenden Punkte, so erhalten die „ebenen Schnitte" des Bündels z den gemeinsamen Factor $(\mu - \lambda)$, weshalb unter den conjugirten Formen f die n^{te} Potenz $(\mu - \lambda)^n$ sich befindet. Als Bedingung hierfür folgt das Verschwinden aller $(n-2)$-reihigen Determinanten folgender Matrix:

(7) $$\left\|\begin{matrix} b_{10}\,\lambda + b_{11} & b_{11}\,\lambda + b_{12} & \cdots & b_{1,n-1}\,\lambda + b_{1,n} \\ b_{20}\,\lambda + b_{21} & \cdots & \cdots & b_{2,n-1}\,\lambda + b_{2,n} \\ \vdots & & & \\ b_{n-2,0}\,\lambda + b_{n-2,1} & \cdots & \cdots & b_{n-2,n-1}\,\lambda + b_{n-2,n} \end{matrix}\right\| = 0.$$

*) Vergl. Brill. Ueber binäre Formen und d. Gl. 6^{ten} Grades. Diese Annalen Bd. 20, S. 330.

Jede Determinante dieser Matrix ist eine Function $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung in λ, deren Coefficienten homogene lineare Functionen sind von Determinanten, wie sie auf der rechten Seite der Gleichung (6) auftreten. Ersetzt man diese durch die Determinanten der linken Seite von (6), so erhalten wir jedesmal die Gleichung eines Ebenenbüschels $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, welcher perspectiv ist zu R_n; d. h. jede Ebene des Büschels enthält den ihr entsprechenden Punkt von R_n, wenn in Gl. (1) $\mu = \lambda$ gesetzt wird.

Wir erhalten so $\frac{n(n-1)}{2}$ solcher Ebenenbüschel, welche aber nicht mehr linear unabhängig von einander sind. Fügt man nämlich zu der Matrix (7) als die beiden letzten Horizontalreihen hinzu:

$$\begin{array}{cccc} \sum g_k b_{k0} & \sum g_k b_{k1} & \cdots & \sum g_k b_{k,n-1}, \\ \sum g_k b_{k1} & \sum g_k b_{k2} & \cdots & \sum g_k b_{kn}, \end{array}$$
$$k = 1, 2 \ldots (n-3),$$

wobei die g_k beliebige Werthe haben, so verschwindet die nun vollständige n-reihige Determinante. Producte und Potenzen der g_k zur zweiten Ordnung giebt es $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$, folglich erhalten wir:

$$\frac{n(n-1)}{2} - \frac{(n-2)(n-3)}{2} = 2n - 3$$

linear unabhängige oder ∞^{2n-4} Ebenenbüschel $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche perspectiv zu R_n sind.

3) Es sei $\overset{n+r}{F}(\lambda)$ eine Function $(n+r)^{\text{ter}}$ Ordnung in $\lambda\ (r \leqq n-4)$, deren r^{te} Polaren sämmtlich conjugirt sind den vier Formen φ_i. Für $r=0$ ist $\overset{n}{F}$ eine der Formen f_k $\big(k = 1 \ldots (n-3)\big)$, für $r = -1$ sei $\overset{n-1}{F}$ eine ganz beliebige Function $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung.

Ist nun:

$$\overset{n+r}{F}(\lambda) = \sum_{0}^{n+r} {}_p \binom{n+r}{p} m_p \lambda^{n+r-p}, \tag{8}$$

so fügen wir zu der Matrix (7) als $(n-1)^{\text{te}}$ Horizontalreihe hinzu:

$m_0 s_{r+1} + m_1 s_r + \cdots + m_{r+1} s_0, \ \cdots, \ m_{n-1} s_{r+1} + m_n s_r + \cdots + m_{n+r} s_0,$

wodurch wir n Determinanten erhalten, von welchen jede den Factor:

$$\sum_{0}^{r+1} {}_p (-1)^p s_p \lambda^{r+1-p}$$

hat.

Nach Wegheben desselben bleibt folgende Matrix übrig:

$$\left\| \begin{array}{cccc} m_0 & m_1 & \cdots & m_{n-1} \\ m_1 & m_2 & \cdots & m_n \\ \vdots & & & \vdots \\ m_{r+1} & \cdots & \cdots & m_{n+r} \\ b_{r+2,0}\,\lambda + b_{r+2,1} & \cdots & \cdots & b_{r+2,n-1}\,\lambda + b_{r+2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n-2,0}\,\lambda + b_{n-2,1} & \cdots & \cdots & b_{n-2,n-1}\,\lambda + b_{n-2,n} \end{array} \right\| = 0. \tag{9}$$

Hierdurch sind n Ebenenbüschel $(n-r-3)^{\text{ter}}$ Ordnung dargestellt, zwischen deren Gleichungen aber lineare Relationen mit constanten Coefficienten bestehen. Fügt man nämlich zur Matrix (9) als letzte Horizontalreihe hinzu:

$$m_{k+1}\ m_{k+2}\ \ldots\ m_{k+n} \quad (k = -1,\ 0,\ \ldots\ r),$$

so verschwindet die nun vollständige n-reihige Determinante und wir erhalten somit

$$n-(r+2) = n-r-2$$

linear unabhängige zu R_n perspective Ebenenbüschel $(n-r-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche zu einer Form $\overset{n+r}{F}(\lambda)$ gehören.

Ausser diesen Relationen zwischen den Gleichungen der n Ebenenbüschel, giebt es aber noch $(n-r-4)$ andere, deren Coefficienten lineare Functionen von λ sind. Man erhält dieselben, wenn zur Matrix (9) als letzte Horizontalreihe hinzugefügt wird:

$$b_{k0}\,\lambda + b_{k1},\ \ldots\ b_{k,n-1}\,\lambda + b_{kn}$$

für

$$k = (r+2),\ (r+3)\ \ldots\ (n-3).$$

Die Gesammtheit der von den $b_{n-2,p}$ unabhängigen linearen Gleichungen zwischen den n Ebenenbüscheln ist demnach:

$$n-r-4+r+2 = n-2,$$

d. h. aber: Die einander entsprechenden Ebenen aller dieser Büschel enthalten dieselbe Gerade oder die n Ebenenbüschel sind perspectiv zu *derselben Regelfläche*, welche selbst *perspectiv* zu R_n ist. Die Gleichung dieser Regelfläche erhalten wir leicht, indem wir aus den Gleichungen von $(n-r-2)$ linear unabhängiger Ebenenbüschel die Grössen $1,\ \lambda\ \ldots\ \lambda^{n-r-3}$ eliminiren. Die Ordnung der Fläche ist somit gleich $(n-r-2)$. Wir haben den Satz:

Zu jeder Function $\overset{n+r}{F}(\lambda)$ $(n+r)^{\text{ter}}$ Ordnung, deren sämmtliche r^{ten} Polaren conjugirt sind den vier Formen $\varphi_i(\lambda)$, gehört eine zu R_n perspective Regelschaar $(n-r-2)^{\text{ter}}$ Ordnung.

Fügen wir zu der Matrix (9) als letzte Horizontalreihe hinzu:

$$b_0\lambda + b_1,\ \ b_1\lambda + b_2,\ \ldots,\ b_{n-1}\lambda + b_n$$

und ist:

$$\varrho z_i = \sum_0^n {}_p (-1)^p\, a_{ip}\, b_{n-p},$$

so erhalten wir die Gleichung des „Punkt-Ebenenbüschels", welcher aus dem Punkte z die Regelschaar $(n-r-2)^{\text{ter}}$ Ordnung projicirt.

§ 2.

Ueber die Formen $\overset{n+r}{F}(\lambda)$.

1) Unter der Voraussetzung, dass zwischen den a_{ip} keine wesentlichen Relationen bestehen, also die R_n allgemeiner Natur ist, möge bei gegebenem r die Zahl der linear unabhängigen Functionen $\overset{n+r}{F}(\lambda)$ bestimmt werden.

Es ist:

$$\overset{n+r}{F}(\lambda) = \sum_0^{n+r} {}_p \binom{n+r}{p} m_p\, \lambda^{n+r-p}$$

und es gelten die Gleichungen:

$$\sum_0^n {}_r (-1)^p\, m_{t+p}\, a_{i,n-p} = 0 \tag{10}$$

für

$$t = 0, 1 \ldots r; \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Zwischen den $(n+r+1)$ Coefficienten m_p giebt es also $4(r+1)$ homogene lineare Gleichungen. Es giebt *folglich* $(n-3r-3)$ *linear unabhängige Functionen* $\overset{n+r}{F}(\lambda)$ oder ∞^{n-3r-4} derselben, welche *ein lineares System* bilden. Ferner ergeben die Gleichungen (10) den Satz:

Die $(n-3r-3)$-*reihigen Determinanten, welche aus den Coefficienten der linear unabhängigen* $\overset{n+r}{F}(\lambda)$ *gebildet werden können, sind proportional Functionen* $(r+1)^{\text{ter}}$ *Ordnung der vierreihigen Determinanten* $|a_p a_q a_r a_s|$.

Es giebt nun auch im Allgemeinen ∞^{n-3r-4} zu R_n perspective Regelflächen $(n-r-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, wobei $3r \leq n-4$. Die Ebenenbüschel, durch welche diese Regelflächen aus einem Punkte z des Raumes projicirt werden, bilden im Allgemeinen kein (§ 9, 4) lineares System.

Kann $r > \frac{n-4}{3}$ sein, so haben wir es mit speciellen R_n zu thun und zwischen den a_{ip} müssen gewisse Relationen bestehen.

2) *Unter den Functionen* $\overset{n+r}{F}(\lambda)$ *können in jedem Falle drei* $\overset{n+r_1}{F}, \overset{n+r_2}{F}, \overset{n+r_3}{F}$, *ausgewählt werden, so dass* $r_1 + r_2 + r_3 = n - 6$ *ist und zwischen den Polaren* $(n-1)^{ter}$ *Ordnung dieser Functionen keine lineare Relation besteht, deren Coefficienten unabhängig von* λ *sind.* Hierbei sei $r_1 \geqq r_2 \geqq r_3 \geqq -1$ und eine $\overset{n-1}{F}(\lambda)$ eine ganz beliebige Function $(n-1)^{ter}$ Ordnung.

Die drei Functionen $\overset{n+r}{F}(\lambda)$ bestimmen dann die R_n oder die zu ihr collinearen Curven vollständig, da wir in den Polaren n^{ter} Ordnung derselben gerade $(n-3)$ linear unabhängige zu den $\varphi_i(\lambda)$ conjugirte Formen besitzen.

Um diese Auswahl zu treffen, nehmen wir für r_1 den grössten zu R_n gehörenden Werth. Es ist dann:

$$n - 4 \geqq r_1 \geqq \frac{n-4}{3},$$

weil die $(n-4)^{ten}$ Polaren einer Form $\overset{2n-4}{F}(\lambda)$ alle $(n-3)$ Formen $f_k(\lambda)$ erschöpfen und weil für $r_1 = \frac{n-4}{3}$ die Gleichungen (10) lösbar sind. Ist $r_1 = n - 4$, so wählen wir $r_2 = r_3 = -1$. Ist aber $r_1 < n - 4$, so wählen wir für $r_2 \leqq r_1$ die zu R_n gehörende der Zahl r_1 am nächsten stehende Zahl, so aber, dass die Function $\overset{n+r_2}{F}(\lambda)$ nicht Polare von $\overset{n+r_1}{F}(\lambda)$ ist. Es können dann die Functionen $\overset{n+r_1}{F}(\lambda)$ und $\overset{n+r_2}{F}(\lambda)$ keine gemeinsame Polare $(n-1)^{ter}$ Ordnung haben, weil sonst diese Functionen die $(r_2+1)^{te}$ resp. $(r_1+1)^{te}$ Polaren einer Form $\overset{n+r_1+r_2+1}{F}(\lambda)$ wären, deren sämmtliche Polaren n^{ter} Ordnung conjugirt den 4 Functionen $\varphi_i(\lambda)$ sein müssten. r_1 könnte dann nicht die grösste zu R_n gehörende Zahl sein. Jedenfalls ist $r_1 + r_2 + 2 \leqq n - 3$; weil die Polaren n^{ter} Ordnung der beiden Formen $\overset{n+r_1}{F}(\lambda)$ und $\overset{n+r_2}{F}(\lambda)$ höchstens die $(n-3)$ Functionen $f_k(\lambda)$ erschöpfen dürfen. Es ist aber ferner

$$r_1 - r_2 + 1 \overline{\gtrless} n - 3r_2 - 5,$$

weil die $(r_1 - r_2)^{ten}$ Polaren von $\overset{n+r_1}{F}(\lambda)$ nur $(r_1 - r_2 + 1)$ Functionen $\overset{n+r_2}{F}(\lambda)$, deren es im Allgemeinen $(n - 3r_2 - 3)$ linear unabhängige giebt, absorbiren. Folglich ist:

$$n - r_1 - 5 \geqq r_2 \geqq \frac{n - r_1 - 6}{2}.$$

Ist nun $r_1 + r_2 = n - 5$, so wählen wir $r_3 = -1$.

Ist aber $r_1 + r_2 < n - 5$, so giebt es sicher eine Function $\overset{n+r_3}{F}(\lambda)$ $r_3 = n - 6 - r_1 - r_2$; da die Polaren $(n + r_3)^{\text{ter}}$ Ordnung der Formen $\overset{n+r_1}{F}$ und $\overset{n+r_2}{F}$ nur $(r_1 + r_2 - 2r_3 + 2)$ Functionen $\overset{n+r_3}{F}(\lambda)$, deren es im Allgemeinen $(n - 3r_3 - 3)$ linear unabhängige giebt, absorbiren. Es ist dann in der That $r_1 + r_2 + r_3 = n - 6$.

Zwischen den Polaren $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung der drei Formen $\overset{n+r_1}{F}$, $\overset{n+r_2}{F}$ und $\overset{n+r_3}{F}$ kann nun keine lineare Relation, deren Coefficienten von λ unabhängig sind, bestehen, denn sonst müssten sich diese drei Functionen aus den Polaren zweier anderen $\overset{n+s_1}{F}(\lambda)$ und $\overset{n+s_2}{F}(\lambda)$, wobei $s_1 + s_2 = n - 5$ ist, zusammensetzen lassen und die Polaren n^{ter} Ordnung der beiden letzten Formen müssten übereinstimmen mit dem System der Formen $f_k(\lambda)$.*) Die Zahlen r_1 und r_2 wären in diesem Falle nicht die grössten zu R_n gehörenden Zahlen.

Hiermit ist unser Satz bewiesen; die drei Functionen $\overset{n+r_1}{F}(\lambda)$, $\overset{n+r_2}{F}(\lambda)$ und $\overset{n+r_3}{F}(\lambda)$ bestimmen die Curve R_n vollständig und können unter der Bedingung, dass $r_1 + r_2 + r_3 = n - 6$ ist, beliebig angenommen werden. Man kann hiernach ebensoviele Gattungen von Curven R_n unterscheiden, als die Zahl n sich in eine Summe von drei ganzen positiven Zahlen, welche grösser als Null sind, zerfällen lässt. Diese Zahl der Gattungen ist also die grösste ganze Zahl, welche in $\frac{n^2 + 3}{12}$ enthalten ist.

Zur Curve R_n giebt es stets drei perspective Regelflächen von den Ordnungen l_1, l_2 und l_3, so dass

$$l_1 = n - r_1 - 2,$$
$$l_2 = n - r_2 - 2,$$
$$l_3 = n - r_3 - 2,$$

also $l_1 + l_2 + l_3 = 2n$ ist. Diese drei Regelflächen sind, wie wir später sehen werden, nicht perspectiv zu demselben Ebenenbüschel.

3) Ist die Curve R_n allgemeiner Natur, so folgt:

für $n \equiv 1 \pmod{3}$ $\quad r_1 = \frac{n-4}{3}$; $\; r_2 = r_3 = \frac{n-7}{3}$.

Es giebt *eine* Regelschaar $\frac{2(n-1)}{3}$. Ordnung und ∞^3 Regelschaaren $\frac{2n+1}{3}$. Ordnung, welche perspectiv zu R_n sind.

Für $n \equiv 2 \pmod{3}$ ist $\quad r_1 = r_2 = \frac{n-5}{3}$; $\; r_3 = \frac{n-8}{3}$.

*) Siehe Anhang.

Es giebt ∞^1 Regelschaaren $\frac{2n-1}{3}$ Ordnung und ∞^4 Regelschaaren $\frac{2n+2}{3}$ ter Ordnung, welche perspectiv zu R_n sind.

Für $n \equiv 0$ (mod. 3) ist $r_1 = r_2 = r_3 = \frac{n-6}{3}$.

Es giebt ∞^2 zu R_n perspective Regelschaaren $\frac{2n}{3}$ ter Ordnung.

§ 3.

Ueber die Curven C_w.

1) Folgender Satz giebt uns den wichtigsten Zusammenhang zwischen Eigenschaften der $\overset{n+r}{F}(\lambda)$ und der zu dieser Form gehörenden zu R_n perspectiven Regelschaar.

Lässt sich eine Function $\overset{n+r}{F}(\lambda)$ $(n+r)^{\text{ter}}$ *Ordnung, deren* r^{te} *Polaren conjugirt den vier Functionen* $\varphi_i(\lambda)$ *sind, darstellen als eine Summe der* v $(n+r)^{\text{ten}}$ *Potenzen der linearen Functionen* $(\lambda - \mu_q)$, *so lässt sich durch die Punkte* μ_q *von* R_n *eine zu* R_n *projective rationale Curve* C_w $(w = v - r - 2)$ w^{ter} *Ordnung legen, welche mit* R_n *diese* v *Punkte entsprechend gemein hat. Die Verbindungslinien entsprechender Punkte beider Curven liefern die Regelschaar* $(n-r-2)^{\text{ter}}$ *Ordnung, welche zu* $\overset{n+r}{F}(\lambda)$ *gehört oder* C_w *ist auch perspectiv zu dieser Regelschaar.*

Der Beweis dieses Satzes ist ebenso zu führen wie derjenige des analogen Satzes bei den ebenen Curven und kann deshalb übergangen werden.*) Der Satz ist umkehrbar und heisst dann:

Giebt es eine zu R_n *projective Curve* C_w w^{ter} *Ordnung, welche mit* R_n v *sich selbst entsprechende Punkte* μ_q *gemein hat, so giebt es eine Function* $\overset{n+r}{F}(\lambda)$ $(r = v - w - 2)$, *deren* r^{te} *Polaren conjugirt den Functionen* $\varphi_i(\lambda)$ *sind und welche sich darstellen lässt als eine Summe der* v *Potenzen* $(\lambda - \mu_q)^{n+r}$. *Die zu* $\overset{n+r}{F}(\lambda)$ *gehörende Regelschaar* $(n-r-2)^{\text{ter}}$ *Ordnung ist perspectiv zu* C_w.

2) Betrachten wir den Fall $r = -1$; $\overset{n-1}{F}(\lambda)$ ist eine beliebige Function $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, zu welcher eine Regelschaar $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung gehört. Ist n gerade, so giebt es im Allgemeinen eine Darstellung von $\overset{n-1}{F}$ durch eine Summe von $\frac{n}{2}$ Potenzen. C_w ist von der Ordnung $\frac{n-2}{2}$ und ist die zur Regelschaar perspective Curve niederster Ordnung.

---

*) Erz. rat. ebener Curven. Diese Annalen Bd. 38, S. 567.

Ist n ungerade, so giebt es im Allgemeinen ∞^1 Darstellungen von $\overset{n-1}{F}$ durch eine Summe von $\frac{n+1}{2}$ Potenzen. Auf der Regelfläche liegen ∞^1 Curven C_w $\frac{n-1}{2}$ ter Ordnung.

Ist bei ungeradem n die Function $\overset{n-1}{F}$ darstellbar als Summe von $\frac{n-1}{2}$ Potenzen oder verschwindet die Katalektikante von $\overset{n-1}{F}$, so ist die Regelschaar $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung so specialisirt, dass es *eine* zu ihr perspective Curve $\frac{n-3}{2}$ ter Ordnung giebt.

Ist $\overset{n-1}{F}$ die Summe von drei Potenzen, so liegt auf der Regelfläche ein Kegelschnitt. Ist $\overset{n-1}{F}$ die Summe zweier Potenzen, so hat die Regelfläche eine einfache Leitgerade (Sehne von R_n); und ist endlich $\overset{n-1}{F}$ selbst eine Potenz, so ist $w=0$ und die Regelfläche ist in den Kegel $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung übergegangen, welcher R_n aus einem ihrer Punkte projicirt.

3) *Es giebt im Allgemeinen ∞^1 zu R_n projective Curven C_w w^{ter} Ordnung, welche mit R_n $(2w+1)$ Punkte entsprechend gemein haben.* Es möge die Ordnung der Correspondenzgleichung zwischen den Parametern zweier solcher Punkte bestimmt werden. Es ist hier zu setzen:

$$v = 2w+1; \quad r = v - w - 2 = w - 1.$$

Da es nun ∞^{n-3r-4} Functionen $(n+r)^{\text{ter}}$ Ordnung $\overset{n+r}{F}(\lambda)$ giebt, welche sich durch $(n-3r-3)$ derselben linear ausdrücken lassen, so muss nach 1) folgende Gleichung bestehen:

$$\sum_1^{n-3w} {}_p\, h_p \overset{n+w-1}{F_p}(\lambda) + \sum_1^{2w+1} {}_q\, g_q (\lambda - \mu_q)^{n+w-1} = 0.$$

Wir polarisiren diese Gleichung nach den $(2w+1)$ Grössen μ_q und erhalten durch Nullsetzen der Coefficienten der Potenzen von λ dadurch $(n-w-1)$ Gleichungen. Sie sind linear in den $(n-3w)$ Grössen h_p und den symmetrischen Functionen der μ_q. Wir eliminiren aus ihnen die $(n-3w)$ Grössen h_p und erhalten:

$$t' = \binom{n-w-1}{2w-1}$$

Gleichungen, welche in den symmetrischen Functionen der μ_q von der Ordnung $(n-3w)$ sind. Lösen wir μ_1 und μ_2 von dem Systeme der μ_q ab, so haben wir t' Gleichungen von der Ordnung $(n-3w)$ in den Grössen 1, $(\mu_1+\mu_2)$, $\mu_1\mu_2$ und den symmetrischen Functionen der $\mu_3 \ldots \mu_{2w+1}$, deren es $2w$ giebt. Nun ist die Zahl der Producte und Potenzen $(n-3w)^{\text{ter}}$ Ordnung dieser $2w$ Functionen ebenfalls gleich t', weshalb sie aus den gegebenen Gleichungen eliminirt werden können. Es folgt zwischen μ_1 und μ_2 eine Correspondenzgleichung von der Ordnung

$$t_w = (n-3w)\binom{n-w-1}{2w-1}. \tag{11}$$

Hieraus findet man als Zahl der Curven C_w, welche durch einen Punkt der R_n gehen: $\binom{n-w-1}{2w}$. Ist $3w = n-1$, so liegen alle C_w auf der Regelfläche $\frac{2(n-1)}{3}^{\text{ten}}$ Ordnung, welche perspectiv ist zu R_n.

4) Für $w = 1$ folgt $t_0 = (n-2)(n-3)$ gleich der doppelten Zahl der dreifachen Secanten von R_n, welche durch einen Punkt dieser Curve gehen. Es giebt ∞^1 zu R_n perspective Regelflächen $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung mit einfacher Leitgeraden. Unter den ∞^{n-4} Functionen f_k giebt es ∞^1, welche sich als Summe von drei Potenzen darstellen lassen.*) Für die R_3 muss die Bedingung erfüllt sein, dass es überhaupt eine Function f_k giebt, dann aber ist R_3 eine ebene Curve und es giebt ∞^2 gerade Linien, welche mit R_3 in der gesuchten Lage sind. Für die R_4 giebt es nur eine Function f_1 vierter Ordnung, welche sich aber auf ∞^1 Arten als Summe von drei Potenzen darstellen lässt. Bei der R_5 giebt es ∞^1 Functionen f_k fünfter Ordnung; jede ist die Summe von drei fünften Potenzen.

5) Für $w = 2$ erhalten wir Folgendes.

Unter den ∞^{n-7} Functionen $\overset{n+1}{F}(\lambda)$ giebt es im Allgemeinen ∞^1, welche als Summe von fünf Potenzen linearer Functionen von λ darstellbar sind. Jede solche Darstellung liefert einen zu R_n projectiven Kegelschnitt, welcher mit R_n fünf Punkte entsprechend gemein hat.

Für die R_5 giebt es im Allgemeinen keine $\overset{6}{F}(\lambda)$. Existirt aber eine solche, wozu zwei Bedingungen erforderlich sind, so ist R_5 perspectiv zu einer Regelschaar zweiter Ordnung, welche von jeder Ebene in einem der gesuchten Kegelschnitte getroffen wird.

Für die R_6 giebt es im Allgemeinen keine $\overset{7}{F}(\lambda)$. Existirt aber eine solche, wozu eine Bedingung erforderlich ist, so giebt es ∞^2 der gesuchten Kegelschnitte, welche alle perspectiv zu einer zu R_6 perspectiven Regelschaar dritter Ordnung liegen.

Bei der R_7 giebt es im Allgemeinen *eine* Function $\overset{8}{F}(\lambda)$, welche sich aber auf ∞^1 Arten durch eine Summe von fünf Potenzen darstellen

*) Vergl. Meyer, Apolarität. S. 356.

lässt. Wir erhalten ∞^1 Kegelschnitte, welche auf der zu R_7 perspectiven Regelschaar vierter Ordnung liegen.

Für die R_n ($n > 7$) finden wir: Es giebt unter den ∞^{n-7} zu R_n perspectiven Regelschaaren $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung deren ∞^1, welche perspectiv zu einem Kegelschnitt sind.

Aehnliches folgt, wenn $w = 3$ ist.

6) Giebt es eine zu R_n projective Curve C_w w^{ter} Ordnung, welche mit R_n $(3w+2)$ Punkte entsprechend gemein hat, so muss zwischen den Grössen a_{ip} eine Bedingungsgleichung bestehen, deren Ordnung in den Determinanten $|a_p a_q a_r a_s|$ bestimmt werden soll. Wir haben hier zu setzen:

$$v = 2w + 2; \qquad r = w.$$

Dann muss folgende Gleichung bestehen:

$$\sum_1^{n-3w-3} {}^p h_p \overset{n+w}{F_p}(\lambda) + \sum_1^{2w+2} {}^q g_q (\lambda - \mu_q)^{n+w} = 0.$$

Nachdem letztere nach den $(2w+2)$ Parametern μ_q polarisirt worden ist, erhalten wir $(n-w-1)$ in den Coefficienten h_p und den symmetrischen Functionen der μ_q lineare Gleichungen. Durch Elimination der h_p ergeben sich hieraus

$$T' = \binom{n - w - 1}{2w+2}$$

Gleichungen, welche in den symmetrischen Functionen der μ_q von der Ordnung $(n - 3w - 3)$ sind. Aus ihnen können die Producte und Potenzen der letzteren gerade eliminirt werden. Das Resultat ist in den $(n-3w-3)$-reihigen Determinanten, welche aus den Coefficienten der $\overset{n+w}{F}(\lambda)$ gebildet werden können, von der Ordnung T'. Diese Determinanten sind aber nach (§2, 1) proportional Functionen $(r+1)^{\text{ter}}$ oder hier $(w+1)^{\text{ter}}$ Ordnung der vierreihigen Determinanten $|a_p a_q a_r a_s|$. Demnach ist das Resultat in diesen Determinanten von der Ordnung:

$$(12) \qquad T_w = (w+1)\binom{n - w - 1}{2w+2}.$$

Ist die Bedingungsgleichung erfüllt, so giebt es unter den ∞^{n-3w-4} zu R_n perspectiven Regelschaaren $(n-w-2)^{\text{ter}}$ Ordnung *eine* mit einer Leitcurve w^{ter} Ordnung.

7) Für $w = 0$ folgt $v = 2$, $r = 0$. C_w reducirt sich auf einen Punkt, welcher mit zwei Punkten von R_n zur Deckung kommt; d. h. R_n hat einen Doppelpunkt. Die Bedingungsgleichung für einen Doppelpunkt der R_n ist also in den vierreihigen Determinanten $|a_p a_q a_r a_s|$ von der Ordnung $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$.

Ist $n = 3$, so muss es eine f_1 geben oder R_3 ist eben.

Ist $n = 4$ so muss die eine Form f_1 als Summe zweier vierter Potenzen darstellbar sein oder sie ist eine harmonische Form.

8) Für $w = 1$ folgt $r = 1$, $v = 4$.

Ist $n = 4$ so folgt, dass R_4 eben ist und einen dreifachen Punkt besitzt, was drei Bedingungen erfordert. Dann giebt es aber ∞^2 solcher gerader Linien.

Ist $n = 5$, so muss eine Function $\overset{6}{F}(\lambda)$ existiren, was zwei Bedingungen erfordert. Dann aber giebt es ∞^1 der gesuchten Geraden, da $\overset{6}{F}(\lambda)$ auf ∞^1 Arten durch eine Summe von vier Potenzen darstellbar ist.

Ist $n = 6$, so muss es eine $\overset{7}{F}(\lambda)$ geben, was eine Bedingung erfordert. $\overset{7}{F}(\lambda)$ lässt sich auf eine Art durch eine Summe von vier Potenzen darstellen. R_6 ist perspectiv zu einer Regelschaar dritter Ordnung, deren einfache Leitlinie die gesuchte Gerade ist.

Ist $n = 7$, so giebt es im Allgemeinen *eine* Form $\overset{8}{F}(\lambda)$, deren Katalektikante hier verschwinden muss. R_7 liegt dann auf einer Regelfläche vierter Ordnung mit einer einfachen geraden Leitlinie.

9) Für $w = 2$ folgt $r = 2$; $v = 6$.

Ist $n = 10$, so giebt es im Allgemeinen *eine* Form $\overset{12}{F}(\lambda)$, deren Katalektikante hier verschwinden muss. R_{10} ist dann perspectiv zu einer Regelschaar sechster Ordnung mit einer vierfachen Tangentialebene.

§ 4.

Die Curven C_w sind eben.

1) Wir haben in § 3 rationale zu R_n projective Curven C_w betrachtet, welche eine bestimmte Zahl von Punkten mit R_n entsprechend gemein haben. Dabei war keine besondere Voraussetzung über die Natur der C_w getroffen worden. Es soll jetzt angenommen werden, C_w sei eine *ebene Curve*. Wir bestimmen zunächst die Zahl der Bedingungen, welche den v Punkten μ_q der R_n hierdurch auferlegt werden.

Zu Grunde legen wir wieder die Gleichung:

$$\sum_1^{n-3r-3}{}^p\, h_p \overset{n+r}{F_p}(\lambda) + \sum_1^{v}{}^q\, g_q(\lambda - \mu_q)^{n+r} = 0$$

für jeden Werth von λ, es ist dann:

$$w = v - r - 2.$$

Durch Polarisiren nach den v Parametern μ_q ergeben sich hieraus $(n + r - v + 1)$ Gleichungen, welche linear sind in den $(n - 3r - 3)$

Grössen h_p und den symmetrischen Functionen der μ_q. Eliminiren wir aus denselben die Grössen h_p, so erhalten wir eine Matrix von $(n+r-v+1)$ Verticalreihen und $(n-3r-3)$ Horizontalreihen, deren Elemente linear sind in den symmetrischen Functionen der μ_q. Alle $(n-3r-3)$-reihigen Determinanten dieser Matrix müssen verschwinden. Die Zahl der Bedingungen für die v Parameter μ_q ist demnach:*)

$$(n+r-v+1)-(n-3r-3)+1=4r-v+5.$$

Damit nun ferner die Curve C_w eben sei, müssen $(w+1)$ Punkte derselben einer Ebene angehören. Dazu sind aber:

$$(w+1)-4+1=(w-2)$$

Bedingungen erforderlich.

Die Gesammtzahl der Bedingungen, welche wir den v Grössen μ_q auferlegen, ist demnach:

$$(4r-v+5)+(w-2)=3r+1.$$

2) Damit die Zahl der ebenen Curven eine endliche sei, muss $v=3r+1$ sein. Es ist dann ferner:

$$r=\frac{w+1}{2}; \quad v=\frac{3w+5}{2}.$$

Die Ordnung von C_w ist ungerade. Es soll jetzt die Anzahl dieser ebenen Curven C_w bestimmt werden.

Wir haben zwei Systeme von Punktgruppen auf R_n; erstens dasjenige von je v Elementen, welche durch die oben angegebene Matrix bestimmt sind und zweitens dasjenige von je n Elementen, welche einer Ebene angehören. Bestimmen wir die Zahl von je $(w+1)$ Elementen, welche zu Gruppen beider Systeme gehören, und dividiren dieselbe durch $\binom{v}{w+1}$, so erhalten wir die Zahl der in Frage stehenden Curven C_w.

Zu diesem Zwecke werfen wir unsre Punktgruppen auf eine Curve T_{w+1} $(w+1)^{\text{ter}}$ Ordnung in einer Mannigfaltigkeit von $(w+1)$ Dimensionen und suchen die Ordnung des Gebildes der linearen Mannigfaltigkeiten w^{ter} Dimension, welche sowohl durch Verbindung von je $(w+1)$ Elementen einer jeden Gruppe des ersten Systems als auch des zweiten Systems entstehen. Das Product der Ordnungen beider Gebilde ist dann die Zahl von je $(w+1)$ Elementen, welche zu Gruppen beider Systeme gehören.

a) Wir betrachten das erste System. Die Zahl der Bedingungen ist:

$$4r-v+5=\frac{w+9}{2}.$$

*) S. Anhang.

Die Zahl der Elemente einer Gruppe:

$$v = \frac{3w+5}{2}.$$

Daher können von einer Gruppe stets:

$$\frac{3w+5}{2} - \frac{w+9}{2} = w - 2$$

Elemente beliebig gewählt werden. Es ist nun die Zahl der Verticalreihen der in 1) angegebenen Matrix gleich:

$$n - r - v + 1 = n - w - 1$$

und diejenige der Horizontalreihen gleich:

$$n - 3r - 3 = n - \frac{3w+9}{2}.$$

Werden somit $(w-2)$ Elemente einer Gruppe beliebig gewählt, so giebt es noch:*)

$$\binom{n-w-1}{n-\frac{3w+9}{2}-1} = \binom{n-w-1}{\frac{w+9}{2}}$$

Gruppen von v Elementen, welche diese $(w-2)$ Elemente enthalten. $v-(w-2)$ giebt uns die Zahl der noch übrigen Elemente einer Gruppe an.

$$\binom{v-(w-2)}{3}$$

ist demnach die Zahl von je $(w+1)$ Elementen, von welchen $(w-2)$ beliebig gewählt werden und welche in einer Gruppe von v Elementen enthalten sind. Da nun $2v = 3w+5$ ist, so erhalten wir

$$p' = \binom{n-w-1}{\frac{w+9}{2}} \binom{\frac{w+9}{2}}{3}$$

Gruppen von je $(w+1)$ Elementen, von welchen $(w-2)$ beliebig gewählt werden und welche Theile von Gruppen von je v Elementen des ersten Systems sind. Durch eine lineare Mannigfaltigkeit $(w-3)^{\text{ter}}$ Dimension lassen sich daher p' lineare Mannigfaltigkeiten w^{ter} Dimension legen, welche je $(w+1)$ zu einer Gruppe von v Elementen des ersten Systems gehörende Punkte auf T_{w+1} ausschneiden. p' ist die Ordnung des ersten Gebildes.

b) Wir betrachten das zweite System von je n Punkten.

Hier ist durch Annahme dreier Elemente die Gruppe bestimmt. Durch eine Mannigfaltigkeit von zwei Dimensionen lassen sich demnach $\binom{n-3}{w-2}$ lineare Mannigfaltigkeiten w^{ter} Dimension legen, welche

*) S. Anhang.

je $(w+1)$ zu einer Gruppe des zweiten Systems gehörende Punkte auf T_{w+1} ausschneiden. $\binom{n-3}{w-2}$ ist folglich die Ordnung des zweiten Gebildes.

Da nun $(w-2)$ die Dimension des ersten Gebildes und 3 diejenige des zweiten Gebildes ist und

$$w-2+3=w+1,$$

so haben beide Gebilde die endliche Zahl:

$$p'\binom{n-3}{w-2}$$

von Mannigfaltigkeiten w^{ter} Dimension gemein.

Die gesuchte Zahl der ebenen Curven C_w ist daher:

$$p_w=\binom{n-3}{w-2}\binom{n-w-1}{\frac{w+9}{2}}\binom{\frac{w+9}{2}}{3}:\binom{\frac{3w+5}{2}}{w+1}$$

oder nach einer einfachen Umformung:

$$p_w=\binom{n-3}{\frac{3w+5}{2}}\binom{w+1}{3}. \tag{13}$$

Es giebt bei der allgemeinen R_n stets p_w ebene zu R_n projectiven Curven C_w w^{ter} Ordnung, welche mit R_n $\frac{3w+5}{2}$ Punkte entsprechend gemein haben, w ist eine ungerade Zahl.

3) Schliesen wir an 1) dieses Paragraphen an, so erhalten wir für

$$v=3r+2,\quad r=\frac{w}{2},\quad v=\frac{3w+4}{2}$$

noch ∞^1 ebene Curven C_w. Ein ähnliches Verfahren, wie es in 2) eingeschlagen wurde, führt zu dem Satze:

Die Zahl der durch einen beliebigen Punkt gehenden Ebenen der zu R_n projectiven ebenen Curven C_w w^{ter} Ordnung, welche mit R_n $\frac{3w+4}{2}$ Punkte entsprechend gemein haben, ist gleich:

$$p'_w=\binom{n-2}{\frac{3w+4}{2}}\binom{w+1}{2}. \tag{14}$$

Die Ordnung von C_w muss hier eine gerade Zahl sein.

Die Zahl der Curven C_w, welche durch einen Punkt der R_n gehen, ist gleich:

$$\binom{n-3}{\frac{3w+2}{2}}\binom{w}{2}.$$

4) Setzen wir ferner:

$$v = 3r + 3; \quad r = \frac{w-1}{2}; \quad v = \frac{3w+3}{2},$$

so finden wir:

Es giebt ∞^2 ebene zu R_n projective Curven C_w w^{ter} Ordnung, welche mit R_n je $\frac{3w+3}{2}$ Punkte entsprechend gemein haben. Durch eine Gerade gehen

$$(15) \qquad p''_w = \binom{n-1}{\frac{3w+3}{2}} \binom{w+1}{1}$$

Ebenen dieser Curven; w ist eine ungerade Zahl.

5) Ist endlich:

$$v = 3r + 4; \quad r = \frac{w-2}{2}; \quad v = \frac{3w+2}{2},$$

so finden wir:

Es giebt ∞^3 ebene zu R_n projective Curven C_w, welche mit R_n je $\frac{3w+2}{2}$ Punkte entsprechend gemein haben. Jede Ebene enthält

$$(16) \qquad p'''_w = \binom{n}{\frac{3w+2}{2}} \binom{w+1}{0} = \binom{n}{\frac{3w+2}{2}}$$

solcher Curven C_w; w ist eine gerade Zahl.

§ 5.

Folgerungen aus dem Vorhergehenden, die mehrfachen Tangentialebenen der zu R_n perspectiven Regelschaaren.

Mit Hülfe der Sätze des vorhergehenden Paragraphen sind wir im Stande, das Verhalten der zu R_n perspectiven Regelschaaren gegenüber den Ebenen des Raumes anzugeben. Die projectiven Curven R_n und C_w erzeugen durch die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte eine Regelfläche von der Ordnung $k = n - r - 2 = n + w - v$.

Die Ebene der Curve C_w ist aber eine d-fache Tangentialebene der Regelfläche, wenn:

$$d = n - v.$$

1) Ist nun

$$v = \frac{3w+5}{2}$$

so erhalten wir:

$$r = \frac{n-d-1}{3}; \quad w = \frac{2n-2d-5}{3}; \quad v = n - d; \quad k = \frac{2n+d-5}{3}$$

und nach (§ 4, (13)) folgt: *Die Zahl der d-fachen Tangentialebenen der zu R_n perspectiven Regelflächen k^{ter} Ordnung ist gleich*

$$(13\text{b})\quad p_d = \binom{n-3}{d-3}\binom{\frac{2n-2d-2}{3}}{3};\quad n-d-1\equiv 0 \pmod{3}.$$

Ist insbesondere $d=3$, so erhalten wir die Zahl der dreifachen Tangentialebenen.

$$r=\frac{n-4}{3};\quad w=\frac{2n-11}{3};\quad v=n-3;\quad k=\frac{2(n-1)}{3}.$$

Wir haben es, da r den grössten Werth annimmt, mit *einer* Regelfläche zu thun; die Zahl ihrer dreifachen Ebenen ist:

$$p_3=\binom{\frac{2n-8}{3}}{3}=\frac{(k-2)}{1}\frac{(k-3)}{2}\frac{(k-4)}{3},$$

wie bekannt.

Für $d=4$ erhalten wir:

$$r=\frac{n-5}{3};\quad w=\frac{2n-13}{3};\quad v=n-4;\quad k=\frac{2n-1}{3}$$

und:

$$p_4=\frac{n-8}{3.3.3}\;\frac{(2n-10)}{1}\frac{(2n-13)}{2}\frac{(2n-16)}{3}.$$

Unter den ∞^1 zu der allgemeinen R_{11} perspectiven Regelschaaren 7^{ter} Ordnung giebt es also 32, welche eine vierfache Tangentialebene besitzen.

2) Setzen wir:

$$v=\frac{3w+4}{2}$$

so erhalten wir:

$$r=\frac{n-d-2}{3};\quad w=\frac{2n-2d-4}{3};\quad v=n-d;\quad k=\frac{2n+d-4}{3}$$

und nach (§ 4, (14)) folgt: *die d-fachen Tangentialebenen der zu R_n perspectiven Regelflächen k^{ter} Ordnung bilden einen Ebenenbüschel der Ordnung:*

$$(14\text{b})\quad p'_d=\binom{n-2}{d-2}\binom{\frac{2n-2d-1}{3}}{2};\quad n-d-2\equiv 0 \pmod{3}.$$

Setzen wir $d=2$, so ist:

$$r=\frac{n-4}{3};\quad w=\frac{2n-8}{3};\quad v=n-2;\quad k=\frac{2(n-1)}{3}.$$

Da r den grössten Werth annimmt, haben wir es mit *einer* Regelfläche zu thun. Ihre Doppeltangentialebenen bilden einen Büschel der Ordnung:

$$p_2'=\binom{\frac{2n-5}{3}}{2}=\frac{(k-1)(k-2)}{2},$$

wie bekannt.

Setzen wir $d = 3$, so ist:

$$r = \frac{n-5}{3}; \quad w = \frac{2n-10}{3}; \quad v = n-3; \quad k = \frac{2n-1}{3}$$

und ferner:

$$p_3' = \frac{n-2}{3.3} \cdot \frac{(2n-7)(2n-10)}{1.2}$$

Die dreifachen Tangentialebenen der zu der allgemeinen R_8 perspectiven Regelflächen 5^{ter} Ordnung bilden einen Büschel 18^{ter} Ordnung.

3) Wir setzen

$$v = \frac{3w+3}{3}$$

und erhalten:

$$r = \frac{n-d-3}{3}; \quad w = \frac{2n-2d-3}{3}; \quad v = n-d; \quad k = \frac{2n+d-3}{3}$$

und nach (§ 4, (15)) folgt: *Die d-fachen Tangentialebenen der zu R_n perspectiven Regelflächen k^{ter} Ordnung umhüllen eine Fläche der Classe:*

(15b) $$p_d'' = \frac{2(n-d)}{3}\binom{n-1}{d-1}; \quad n-d \equiv 0 \text{ (mod. 3)}.$$

Setzen wir hier $d = 1$, so ist:

$$r = \frac{n-4}{3}; \quad w = \frac{2n-5}{3}: \quad v = n-1; \quad k = \frac{2(n-1)}{3}.$$

Da r den grössten Werth annimmt, so haben wir es mit den Tangentialebenen einer Regelfläche zu thun, ihre Classe ist

$$p_1'' = \frac{2(n-1)}{3} = k.$$

Setzen wir $d = 2$, so ist

$$r = \frac{n-5}{3}; \quad w = \frac{2n-7}{3}; \quad v = n-2; \quad k = \frac{2n-1}{3}$$

und

$$p_2'' = \frac{2(n-1)(n-2)}{3}.$$

Die Doppeltangentialebenen der zu der allgemeinen R_8 perspectiven Regelflächen 5^{ter} Ordnung umhüllen eine Fläche 28^{ter} Classe.

Setzen wir:

$$d = n-3,$$

so ist:

$$r = 0; \quad w = 1; \quad v = 3; \quad k = n-2$$

und ferner:

$$p_{n-3}'' = 2\binom{n-1}{3} = \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3}.$$

Wir erhalten in diesem Falle die Fläche der dreifachen Sekanten von R_n.

4) Wir setzen

$$v = \frac{3w+2}{2}$$

und erhalten:

$$r = \frac{n-d-4}{3}; \quad w = \frac{2n-2d-2}{3}; \quad v = n - d; \quad k = \frac{2n+d-2}{3}$$

und nach (§ 4, (16)) folgt: *Jede Ebene des Raumes ist d-fache Tangentialebene von p_d''' zu R_n perspectiven Regelflächen k^{ter} Ordnung und es ist:*

(16b) $$p_d''' = \binom{n}{d}; \quad n - d - 1 \equiv 0 \text{ (mod. 3)}.$$

Setzen wir hier $d = 0$ so ist:

$$r = \frac{n-4}{8}; \quad w = \frac{2n-2}{2}; \quad v = n; \quad k = \frac{2n-2}{3}.$$

Da $d = 0$ ist, wird, was selbstverständlich ist, die Fläche k^{ter} Classe nicht von jeder beliebigen Ebene berührt. —

5) *Zusätzliche Bemerkung über ebene Curven.* Bei der ebenen R_n kann man fragen nach den d-fachen Tangenten der zu R_n perspectiven Strahlenbüschel k^{ter} Ordnung. Man erhält in ähnlicher Weise wie oben folgende Resultate: Ist $k = \frac{n+d-3}{2}$ so giebt es

$$\pi_d = \binom{n-2}{d-2}\binom{\frac{n-d-1}{2}}{2}$$

Strahlenbüschel k^{ter} Classe, welche eine d-fache Tangente haben.

Ist aber: $k = \frac{n+d-2}{2}$, so bilden die d-fachen Tangenten der zu R_n perspectiven Strahlenbüschel k^{ter} Ordnung einen Büschel der Ordnung:

$$\pi_d' = \frac{n-d}{2}\binom{n-1}{d-1}.$$

Ist endlich $k = \frac{n+d-1}{2}$, so ist jede Gerade der Ebene d-fache Tangente von $\binom{n}{d}$ Strahlenbüscheln k^{ter} Ordnung. —

§ 6.

Ueber besondere Punkte auf R_n.

1) Projicirt man R_n aus einem ihrer Punkte μ auf eine Ebene, so entsteht eine ebene Curve R'_{n-1} $(n-1)^{ter}$ Ordnung, zu deren „geraden Schnitten" $(n-3)$ linear unabhängige Formen $f_k'(\lambda)$ $(n-1)^{ter}$ Ordnung conjugirt sind. Kann R'_{n-1} auf besondere Weise erzeugt werden, so erhalten wir auch besondere Projectionscentren μ auf R_n.

Zunächst möge das System der Formen $f_k'(\lambda)$ bestimmt werden.

Es sei R'_{n-1} dargestellt durch

$$\tau y_\varrho = \varphi'_\varrho(\lambda) = \sum_0^{n-1}{}^p\, a'_{\varrho p}\lambda^{n-1-p} \quad (\varrho = 1, 2, 3).$$

Die zu den vier Formen $\varphi_i(\lambda)$ conjugirten Formen $f_k(\lambda)$ n^{ter} Ordnung sind dann auch conjugirt zu den drei Formen:

$$(\lambda - \mu)\varphi'_\varrho(\lambda) = -\mu \sum_0^{n-1}{}^p\, a'_{\varrho p}\lambda^{n-1-p} + \sum_0^{n-1}{}^p\, a'_{\varrho p}\lambda^{n-p}.$$

Ist nun

$$f_k(\lambda) = \sum_0^n{}^p \binom{n}{p} b_{kp}\lambda^{n-p}$$

so folgt:

$$\sum_0^{n-1}{}^p (-1)^p (b_{kp}\mu + b_{k,p+1})\, a'_{\varrho, n-p-1} = 0$$

d. h. aber: *die Functionen $f'_k(\lambda)$ $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung sind identisch mit den $(n-3)$ nach μ polarisirten Formen $f_k(\lambda)$ n^{ter} Ordnung.**)

2) Wir haben bei der Betrachtung der ebenen rationalen Curven folgenden Satz gefunden:**)

Kann eine zu R'_{n-1} projective Curve C_w w^{ter} Ordnung so liegen, dass sie mit R'_{n-1} $(3w + 3)$ Punkt entsprechend gemein hat, so besteht zwischen den $(n-3)$-reihigen Determinanten, welche aus den Coefficienten der zu den $\varphi'_\varrho(\mu)$ conjugirten Formen gebildet werden können, eine Gleichung von der Ordnung:

$$2(w+1)\binom{n-w-2}{3w+3}.$$

Ist nun R'_{n-1} das perspective Bild von R_n und μ das Projectionscentrum, so sind alle $(n-3)$-reihigen Determinanten Functionen $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung von μ. Es giebt daher:

$$2(w+1)(n-3)\binom{n-w-2}{3w+3} \tag{17}$$

Punkte auf R_n, von welchen aus diese Curve in eine ebene R'_{n-1} mit oben angegebener Eigenschaft projicirt wird.

3) Für $w = 0$ folgt hieraus: Es giebt

$$\frac{(n-2)(n-3)^2(n-4)}{3}$$

Punkte auf R_n, von welchen aus diese Curve in eine ebene R'_{n-1} mit dreifachem Punkte projicirt wird. Diese Punkte von R_n liegen des-

*) Vergl. Fr. Meyer. Ueber Discriminanten etc. Diese Annal. Bd. 38, S. 379.
**) Erz. rat. ebener Curven. Diese Ann. Bd. 38, S. 572.

halb auf vierfachen Sekanten der R_n und die *Zahl dieser vierfachen Sekanten ist gleich:**)

$$\frac{(n-2)(n-3)^2(n-4)}{3.4}.$$

4) Für $w=1$, erhalten wir:

$$\frac{4(n-3)^2(n-4)(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{1.2.3.4.5.6}$$

Punkte auf R_n, von welchen aus R_n in eine ebene R'_{n-1} projicirt wird, welche perspectiv zu einem Strahlenbüschel $(n-6)^{\text{ter}}$ Ordnung mit einer $(n-7)$-fachen Tangente ist.

5) Setzen wir $w=\frac{n-5}{4}$, so finden wir $\frac{(n-1)(n-3)}{2}$ Punkte auf R_n, welche Mittelpunkte der zu R_n perspectiven Punkt-Ebenenbüscheln $\frac{n-3}{2}^{\text{ter}}$ Ordnung sind. Dies gilt für jedes ungerade n, also auch wenn $(n-5)$ nicht durch 4 theilbar ist; denn die Bedingung, dass für ungerades n zu der ebenen R'_{n-1} eine Form $\overset{\frac{3n-5}{2}}{F}(\lambda)$ gehört, ist in den $(n-3)$-reihigen Determinanten der $(b_{kp}\mu+b_{kp+1})$ von der $\frac{n-1}{2}^{\text{ten}}$ Ordnung.

§ 7.

Die zu R_n perspectiven Ebenenbüschel.

1) Wir betrachten zunächst einen zu R_n perspectiven Ebenenbüschel g^{ter} Ordnung in Verbindung mit einer zu R_n perspectiven Regelschaar $(n-s-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, zu welcher die Function $\overset{n+s}{F}(\lambda)$ gehören möge. Beide Gebilde erzeugen in den Schnitten entsprechender Elemente eine rationale Curve $(g+n-s-2)^{\text{ter}}$ Ordnung. Diese ist aber die Curve R_n selbst und der Rest kann nur aus solchen Strahlen der Regelschaar bestehen, welche in den ihnen entsprechenden Ebenen des Büschels liegen. Die Zahl dieser Geraden ist also gleich $(g-s-2)$. Wir wollen die Parameter dieser Geraden als Elemente der Regelschaar bestimmen.

Die Gleichung des Ebenenbüschels sei gegeben in:

$$\overset{g}{\Psi}(\lambda)=0.$$

Die linke Seite derselben ist eine ganze Function g^{ter} Ordnung in λ, deren Coefficienten lineare homogene Functionen der Coordinaten x_i eines veränderlichen Punktes sind.

*) Herr Fr. Meyer hat diese Zahl auf anderem Wege gefunden und hieraus die Ordnung der Fläche der dreifachen Sekanten abgeleitet. Vgl. Discriminanten etc. Diese Annalen Bd. 38, S, 380.

Setzen wir hier die Ausdrücke für die Coordinaten der R_n ein, also $\varrho x_i = \varphi_i(\mu)$, so muss der Factor $(\lambda - \mu)$ heraustreten und wir erhalten nach Wegheben desselben eine Gleichung:

$$\overset{n-1}{X}(\mu) = \sum_0^{n-1} {}^p \overset{g-1}{\Psi_p^s}(\lambda)\, \mu^{n-1-p} = 0$$

in λ von $(g-1)^{\text{ter}}$, in μ von $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung. Die Wurzeln von $\overset{n-1}{X}(\mu) = 0$ geben die $(n-1)$ Punkte von R_n, in welchen die Ebene λ des Büschels, abgesehen von diesem Punkte λ die Curve R_n noch schneidet. Enthält aber diese Ebene λ zugleich den Strahl λ der Regelschaar, so schneidet sie dieselbe ausserdem in einer zu R_n projectiven Curve $(n-s-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche mit R_n die durch $X(\mu) = 0$ bestimmten $(n-1)$ Punkte entsprechend gemein hat. Es muss sich daher nach (§ 3, 1) $\overset{n+s}{F}$ darstellen lassen als eine Summe der $(n-1)$ Potenzen $(\lambda - \mu_q)^{n+s}$, wenn μ_q die Wurzeln von $X(\mu) = 0$ sind. Es ist demnach $\overset{n-1}{X}(\mu)$ conjugirt zu allen $(s+1)^{\text{ten}}$ Polaren von $\overset{n+s}{F}(\mu)$. Polarisiren wir nun die Form:

$$\overset{n+s}{F}(\mu) = \sum_0^{n+s} {}^p \binom{n+s}{p} m_p \mu^{n+s-p}$$

nach den Wurzeln einer beliebigen Gleichung $(s+1)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$\overset{s+1}{\chi}(\mu) = \sum_0^{s+1} (-1)^p \chi_p \mu^{s+1-p} = 0.$$

so erhalten wir:

$$\sum_0^{n-1} {}^q \left\{ \binom{n-1}{q} \mu^{n-1-q} \sum_0^{s+1} {}^p m_{p+q} \chi_{s+1-q} \right\}.$$

Diese Form ist conjugirt zu $\overset{n-1}{X}(\mu)$, weshalb folgt:

$$\sum_0^{n-1} {}^q \left\{ (-1)^q \overset{g-1}{\Psi}_{n-1-q}(\lambda) \sum_0^{s+1} {}^p m_{p+q} \chi_{s+1-q} \right\} = 0,$$

eine Gleichung $(g-1)^{\text{ter}}$ Ordnung in λ, deren Wurzeln zum Theile mit den $(g-s-2)$ gesuchten Parametern übereinstimmen. Da nun die Form $\overset{n-1}{X}(\mu)$ conjugirt ist zu allen $(s+1)$ Polaren der $\overset{n+s}{F}(\mu)$, sobald unter den $(s+1)$ Parametern, nach welchen $\overset{n+s}{F}(\mu)$ polarisirt wurde, der Parameter λ enthalten ist (§ 6, 1), so hat die letzte Gleichung $\overset{s+1}{\chi}(\lambda)$

als Factor. Nach Wegheben desselben finden wir eine von $\overset{s+1}{\chi}(\mu)$ unabhängige Gleichung:

$$\overset{g-s-2}{\Phi}(\lambda) = 0$$

$(g-s-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, deren Wurzeln die gesuchten Parameter der Geraden sind. Die Function Φ kann, wenn $\overset{n+s}{F}(\lambda)$ und die Gleichung $\overset{g}{\Psi}(\lambda)$ des Ebenenbüschels gegeben sind, stets leicht aufgestellt werden. Ihre Coefficienten sind lineare Functionen der Coefficienten m_p von $\overset{n+s}{F}$ und der Constanten, welche in $\overset{g}{\Psi}(\lambda)$ auftreten. Verschwindet $\Phi(\lambda)$ identisch, so ist der Ebenenbüschel perspectiv zur Regelschaar.

2) Zu Gleichungen der zu R_n perspectiven Ebenenbüschel kommen wir, indem wir die zu zweien zu R_n perspectiven Regelschaaren perspectiven Ebenenbüschel bestimmen. Die zu den beiden Regelflächen gehörenden Formen seien:

$$\overset{n+r}{F}(\lambda) = \sum_{0}^{n+r} {}_p \binom{n+r}{p} m_p \lambda^{n+r-p}$$

und

$$\overset{n+s}{F}(\lambda) = \sum_{0}^{n+s} {}_p \binom{n+s}{p} m'_p \lambda^{n+s-p}.$$

Sie dürfen nicht Polaren einer höheren Form, welche zu den $\varphi_i(\lambda)$ conjugirt ist, sein; sie dürfen also keine gemeinsame Polare $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung haben. Dann erhalten wir nach (§ 1, (9)) die Gleichung des zu beiden Regelschaaren perspectiven Ebenenbüschels in:

$$\begin{vmatrix}
m_0 & \cdots & m_{n-1} \\
m_1 & \cdots & m_n \\
\vdots & \cdots & \vdots \\
m_{r+1} & \cdots & m_{n+r} \\
m'_0 & \cdots & m'_{n-1} \\
\vdots & \cdots & \vdots \\
m'_{s+1} & \cdots & m'_{n+s} \\
b_{r+s+3,0}\lambda + b_{r+s+3,1} & \cdots & b_{r+s+3,n-1}\lambda + b_{r+s+3,n} \\
\vdots & \cdots & \vdots \\
b_{n-2,0}\lambda + b_{n-2,1} & \cdots & b_{n-2,n-1}\lambda + b_{n-2,n}
\end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist die Gleichung eines zu R_n perspectiven Ebenenbüschels $(n-r-s-4)^{\text{ter}}$ Ordnung, welcher perspectiv ist zu den beiden Regelschaaren $(n-r-2)^{\text{ter}}$ und $(n-s-2)^{\text{ter}}$ Ordnung. Sind drei Functionen

$\overset{n+r}{F}(\lambda)$ gegeben, so kann man durch Combination von je zweien derselben, die Gleichungen dreier verschiedener Ebenenbüschel ableiten, sobald zwischen den Polaren $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung derselben keine lineare Relation besteht. Im andern Falle sind die drei Regelschaaren perspektiv zu demselben Ebenenbüschel.

3) In (§ 2, 2) haben wir gezeigt, dass unter allen Umständen drei Functionen $\overset{n+r_1}{F}, \overset{n+r_2}{F}, \overset{n+r_3}{F}$ gefunden werden können, so dass

$$r_1 + r_2 + r_3 = n - 6$$

ist und zwischen den Polaren $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung dieser Formen keine lineare Relation besteht. Dabei ist $r_1 \geqq r_2 \geqq r_3 \geqq -1$. Die drei Functionen bestimmen die R_n vollständig und zugleich drei Regelflächen, welche nicht perspectiv zu demselben Ebenenbüschel sind. Je zwei dieser Regelflächen sind perspectiv zu einem Ebenenbüschel, dessen Ordnung mit g_1 resp. g_2 oder g_3 bezeichnet werden möge. Dann ist nach 2)

$$\begin{aligned}
n - r_1 - r_2 - 4 &= r_3 + 2 = g_3; \quad & g_1 + g_2 &= n - r_3 - 2 = l_3,\\
n - r_2 - r_3 - 4 &= r_1 + 2 = g_1; \quad & g_2 + g_3 &= n - r_1 - 2 = l_1,\\
n - r_3 - r_1 - 4 &= r_2 + 2 = g_2; \quad & g_3 + g_1 &= n - r_2 - 2 = l_2,
\end{aligned}$$

$$g_1 \geqq g_2 \geqq g_3 \geqq 1$$

und

$$g_1 + g_2 + g_3 = n.$$

Die Gleichungen dieser drei Ebenenbüschel schreiben wir:

$$\overset{g_1}{\Psi}_1(\lambda) = 0; \quad \overset{g_2}{\Psi}_2(\lambda) = 0; \quad \overset{g_3}{\Psi}_3(\lambda) = 0.$$

4) Wir können nun zeigen, dass die Gleichung eines jeden zu R_n perspectiven Ebenenbüschels sich durch Addition der drei letzten Gleichungen, nachdem diese mit gewissen ganzen Functionen von λ multiplicirt worden sind, herstellen lässt. Die Gleichung eines beliebigen zu R_n perspectiven Büschels g^{ter} Ordnung sei gegeben in:

$$\overset{g}{\Psi}(\lambda) = 0.$$

Nach 1) liegen $(g - r_t - 2)$ Strahlen der Regelschaar l_t^{ter} Ordnung in den ihnen entsprechenden Ebenen dieses Büschels, deren Parameter durch eine aufstellbare Gleichung $\overset{g-g_t}{\Phi}(\lambda) = 0$ gegeben sind.

Wir bilden nun die Gleichung eines zu R_n perspectiven Ebenenbüschels Ω g^{ter} Ordnung in folgendem Ausdrucke:

$$\overset{g}{\Omega}(\lambda) = k_1 \overset{g-g_1}{\Phi_1}(\lambda)\,\overset{g_1}{\Psi}_1(\lambda) + k_2 \overset{g-g_2}{\Phi_2}(\lambda)\,\overset{g_2}{\Psi}_2(\lambda) + k_3 \overset{g-g_3}{\Phi_3}(\lambda)\,\overset{g_3}{\Psi}_3(\lambda).$$

Die Constanten k_1, k_2, k_3 können wir ferner so bestimmen, dass der Büschel $\overset{g}{\Omega}$ mit dem Büschel $\overset{g}{\Psi}$ die dem Parameterwerthe μ zukommende

Ebene entsprechend gemein hat. Entweder ist nun $\overset{g}{\Psi}$ mit $\overset{g}{\Omega}$ identisch oder nicht. In dem letzteren Falle erzeugen die beiden Ebenenbüschel eine zu R_n perspective Regelschaar der Ordnung $(2g-1)$, welche mit den Regelschaaren $l_1, l_2, l_3^{\text{ter}}$ Ordnung $(g-g_1)$ resp. (g_1-g_2) und $(g-g_3)$ Erzeugende entsprechend gemein hat. Die Regelschaaren $(2g-1)^{\text{ter}}$ Ordnung und l_1^{ter} Ordnung sind perspectiv zu R_n und deshalb perspectiv zu einem Ebenenbüschel

$$(2g-1)+(g_2+g_3)-(g-g_1)-n=(g-1)^{\text{ter}} \text{ Ordnung } \overset{g-1}{\omega}.$$

Dieser Büschel aber enthält $(g-g_2)$ Ebenen, in welchen die ihnen entsprechenden Strahlen der Regelschaar l_2^{ter} Ordnung liegen. Da aber:

$$(g-1-g_2)<g-g_2,$$

so ist dieser Büschel ω perspectiv zur Regelschaar l_2^{ter} Ordnung und aus demselben Grunde auch perspectiv zur Regelschaar l_3^{ter} Ordnung. Die drei Regelschaaren l_1, l_2 und l_3^{ter} Ordnung müssten also perspectiv zu einem und demselben Ebenenbüschel sein, was nicht der Fall ist.

Es ist folglich $\overset{g}{\Psi}(\lambda)$ mit $\overset{g}{\Omega}(\lambda)$, abgesehen von einem constanten Factor, identisch; und folglich kann die Gleichung eines jeden zu R_n perspectiven Ebenenbüschels g^{ter} Ordnung dargestellt werden in:

$$(18)\qquad \overset{g}{\Psi}(\lambda)=k_1\overset{g-g_1}{\Phi_1}(\lambda)\overset{g_1}{\Psi_1}(\lambda)+k_2\overset{g-g_2}{\Phi_2}(\lambda)\overset{g_2}{\Psi_2}(\lambda)+k_3\overset{g-g_3}{\Phi_3}(\lambda)\overset{g_3}{\Psi_3}(\lambda).$$

In dem Ausdrucke rechts treten $(3g-n+3)$ Constante auf; *es giebt deshalb* $(3g-n+3)$ *linear unabhängige zu* R_n *perspective Ebenenbüschel* g^{ter} *Ordnung oder es giebt* ∞^{3g-n+2} *derselben, welche ein lineares System bilden, da ihre Gleichungen durch Addition von* $(3g-n-3)$ *linear unabhängigen Gleichungen gefunden werden.*

§ 8.

Ueber besondere zu R_n covariante Punktgebilde.

1) Aus dem Punkte z des Raumes wird R_n in eine ebene Curve R_n' projicirt, welche auf besondere Weise erzeugt werden kann, wenn z besondere Lagen im Raume annimmt. Bei der Betrachtung der ebenen rationalen Curven haben wir den Satz gefunden:*)

„Kann eine zu R_n' projective Curve C_w w^{ter} Ordnung so liegen, dass beide Curven $(3w+3)$ Punkte entsprechend gemein haben, so besteht zwischen den $(n-2)$-reihigen Determinanten der b_{kp} eine Gleichung von der Ordnung:

$$2(w+1)\binom{n-w-1}{3w+3}.$$

*) Diese Annalen Bd. 38, S. 572.

Mit Hülfe von (§ 1, (6)) schliessen wir hieraus: *der Ort der Punkte z aus welchen R_n in eine ebene R_n' projicirt wird, die mit einer zu ihr projectiven C_w* $(3w+3)$ *Punkte entsprechend gemein hat, ist eine Fläche von der Ordnung:*

$$2(w+1)\binom{n-w-1}{3w+3}.$$

2) Für $w=0$ erhalten wir wie früher als Ordnung der Fläche der dreifachen Sekanten von R_n wieder:

$$\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3}.$$

Für $w=1$ kann man die sechs auf R_n sich ergebenden Punkte durch eine rationale ebene Curve C_3 verbinden, welche in z einen Doppelpunkt hat und so projectiv zu R_n ist, dass diese 6 Punkte sich selbst entsprechen. Es ist also der Ort der Doppelpunkte der zu R_n projectiven ebenen C_3, welche mit R_n sechs Punkte entsprechend gemein haben, eine Fläche von der Ordnung $4\binom{n-2}{6}$, während die Ebenen dieser C_3 eine Fläche von der Classe $4\binom{n-1}{6}$ umhüllen. (§ 4, (15)). Beide Flächen sind eindeutig auf einander bezogen.

3) Ist $w=\frac{n-4}{4}$, so finden wir eine *Fläche* $\frac{n}{2}$ter *Ordnung, welche die Mittelpunkte der zu R_n perspectiven Punkt-Ebenenbüschel* $\frac{n-2}{2}$ter *Ordnung enthält.* Dies gilt auch noch, wenn n nicht durch 4 theilbar ist. *R_n liegt auf dieser Fläche.*

4) Bei geradem n fragen wir weiter nach den Mittelpunkten der zu R_n perspectiven Punkt-Ebenenbüschel $\frac{n-4}{2}$ter Ordnung.

Nach (§ 7, 4) wissen wir, dass es

$$3\,\frac{n-4}{2}-n+3=\frac{n-6}{2}$$

linear unabhängige zu R_n perspective Ebenenbüschel $\frac{n-4}{2}$ter Ordnung gibt, aus deren Gleichungen sich die Gleichungen aller übrigen linear zusammensetzen lassen. Die Coordinaten der Ebenen eines dieser Büschel seien gegeben in:

$$\varrho u_i=\alpha_{i0}\lambda^{\frac{n-4}{2}}+\alpha_{i1}\lambda^{\frac{n-6}{2}}+\cdots+\alpha_{i,\frac{n-4}{2}}.$$

Hierbei sind die α_{ip} lineare Functionen von $\frac{n-6}{2}$ gegebenen Grössen, deren Coefficienten so bestimmt werden müssen, dass alle Ebenen des

Büschels durch einen Punkt gehen. Es verschwinden somit alle vierreihigen Determinanten der Matrix:

$$\left\| \begin{matrix} \alpha_{10} & \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1,\frac{n-4}{2}} \\ \alpha_{20} & \cdot & & \cdot \\ \alpha_{30} & \cdot & & \cdot \\ \alpha_{40} & & \cdots & \alpha_{4,\frac{n-4}{2}} \end{matrix} \right\| = 0.$$

Das sind $\frac{n-4}{2}+1-3=\frac{n-8}{2}$ Bedingungen für die $\frac{n-6}{2}$ Coefficienten, welche demnach bestimmbar sind.*) Wir finden somit

$$\frac{(n-2)(n-4)(n-6)}{2.4.6}$$

Punkt-Ebenenbüschel, $\frac{n-4}{2}$ ter Ordnung, welche perspectiv zu R_n sind.

Die Mittelpunkte derselben liegen auf der Fläche $\frac{n}{2}$ ter Ordnung, welche in 3) gefunden wurde, und sind Knotenpunkte derselben.

Für $n=8$ enthält die Fläche vierter Ordnung die Doppelcurven aller zu R_8 perspectiven Regelschaaren fünfter Ordnung.

Für $n=10$ hat die Fläche fünfter Ordnung vier Knotenpunkte und enthält die Doppelcurve 10ter Ordnung der zu R_{10} perspectiven Regelfläche sechster Ordnung. Letztere hat in den vier Knotenpunkten der ersten Fläche dreifache Punkte.

5) Wir nehmen jetzt an, n sei ungerade und fragen nach den zu R_n perspectiven Punkt-Ebenenbüscheln $\frac{n-3}{2}$ ter Ordnung. Es giebt im Allgemeinen nach (§ 7, 4) $\frac{3(n-3)}{2}-n+3=\frac{n-3}{2}$ linear unabhängige zu R_n perspective Ebenenbüschel $\frac{n-3}{2}$ ter Ordnung. Die Coordinaten der Ebenen eines dieser Büschel lassen sich demnach ausdrücken in:

$$\varrho u_i = \alpha_{i0}\lambda^{\frac{n-3}{2}} + \alpha_{i1}\lambda^{\frac{n-5}{2}} + \cdots + \alpha_{i,\frac{n-3}{2}}\,,$$

wobei die α_{ip} lineare Functionen von $\frac{n-3}{2}$ gegebenen Grössen sind, deren Coefficienten wir so bestimmen wollen, dass alle Ebenen des Büschels mit einer beliebig angenommenen Ebene v durch einen Punkt gehen. Es müssen dann alle vierreihigen Determinanten der folgenden Matrix verschwinden:

*) S. Anhang.

$$\left\|\begin{matrix} v_1 & \alpha_{10} & \cdots & \alpha_{1,\frac{n-3}{2}} \\ v_2 & \alpha_{20} & & \cdot \\ v_3 & \alpha_{30} & & \cdot \\ v_4 & \alpha_{40} & & \alpha_{4,\frac{n-3}{2}} \end{matrix}\right\| = 0.$$

Das sind für die $\frac{n-3}{2}$ zu bestimmenden Coefficienten $\frac{n-5}{2}$ Bedingungen. Wir finden somit*) in jeder Ebene $\frac{(n-1)(n-3)}{2.4}$ Mittelpunkte solcher Büschel.

Die Mittelpunkte der zu R_n perspectiven Punkt-Ebenenbüschel $\frac{n-3}{2}$ ter Ordnung erfüllen demnach eine Curve $\frac{(n-1)(n-3)}{2.4}$ ter Ordnung, welche (§ 6, 5) *mit R_n $\frac{(n-1)(n-3)}{2}$ Punkte gemein hat.* Diese Curve werden wir später noch durch sie enthaltende Flächen näher bestimmen.

Für $n = 7$ erhalten wir eine cubische Raumcurve, die Doppelcurve der zu R_7 perspectiven Regelschaar vierter Ordnung.

§ 9.

Ebenenbüschel und Regelschaaren in perspectiver Lage.

1) In (§ 7, 1) haben wir eine Gleichung:

$$\overset{g-s-2}{\Phi}(\lambda) = 0$$

aufgestellt, deren Wurzeln die Parameter der Ebenen eines zu R_n perspectiven Ebenenbüschels g^{ter} Ordnung sind, welche die ihnen entsprechenden Strahlen einer zu R_n perspectiven Regelschaar $(n-s-2)^{\text{ter}}$ Ordnung enthalten. Die Coefficienten von λ^p sind bilineare Functionen der Coefficienten von $\overset{n+s}{F}$ und der Constanten, welche in der Gleichung des Ebenenbüschels $\overset{g}{\Psi}(\lambda) = 0$ auftreten. Verschwinden alle Coefficienten der λ^g, so ist der Ebenenbüschel perspectiv zur Regelschaar. Es sind in diesem Falle $(g-s-1)$ Gleichungen zu erfüllen. Wir fragen nun: kann der Büschel g^{ter} Ordnung perspectiv zu irgend einer Regelschaar $(n-s-2)^{\text{ter}}$ Ordnung sein? Es giebt (§ 2, 1) $(n-3s-3)$ linear unabhängige Functionen $\overset{n+s}{F}(\lambda)$, durch welche alle übrigen linear ausdrückbar sind. Wir ersetzen deshalb $\overset{n+s}{F}(\lambda)$ durch

*) Anhang.

$$\sum_1^{n-3s-3} h_p \overset{n+s}{F_p}(\lambda)$$

und erhalten für die $(n - 3s - 3)$ Grössen h_p $(g - s - 1)$ lineare Bedingungsgleichungen. Ist also:

$$n - 3s - 3 \geqq g - s$$

oder

$$n - g - 3 \geqq 2s,$$

so ist der beliebig angenommene zu R_n perspective Büschel g^{ter} Ord. auch perspectiv zu einer oder unendlich vielen Regelschaaren $(n - s - 2)^{\text{ter}}$ Ordnung.

2) Wir setzen nun voraus, dass

$$n - g - 3 < 2s$$

sei.

Dann kann nicht jeder Büschel g^{ter} Ordnung perspectiv zu einer Regelschaar $(n - s - 2)^{\text{ter}}$ Ordnung sein. Eliminiren wir jetzt aus den $(g - s - 1)$ Gleichungen die $(n - 3s - 3)$ Grössen h_p, so entsteht eine Matrix mit $(g - s - 1)$ Verticalreihen und $(n - 3s - 3)$ Horizontalreihen, deren sämmtliche $(n - 3s - 3)$ reihigen Determinanten verschwinden müssen. Die Zahl der Bedingungen, welche sich hierdurch ergeben, ist deshalb:

$$g - s - 1 - (n - 3s - 3) + 1 = g - n + 2s + 3.$$

Es giebt aber $(3g + 3 - n)$ linear unabhängige Ebenenbüschel g^{ter} Ordnung, durch deren Gleichungen alle übrigen linear sich ausdrücken lassen. Ersetzen wir deshalb $\overset{g}{\Psi}(\lambda)$ durch:

$$\sum_1^{3g+3-n} k_q \overset{g}{\Psi}_q(\lambda)$$

so sind alle Elemente unserer Matrix lineare Functionen der $(3g + 3 - n)$ Grössen k_q. *Die zu Regelschaaren* $(n - s - 2)^{\text{ter}}$ *Ordnung perspectiven Ebenenbüschel* g^{ter} *Ordnung bilden demnach eine Mannigfaltigkeit von*

$$(3g + 3 - n) - (g - n + 2s + 3) - 1 = 2g - 2s - 1$$

Dimensionen und der Ordnung:

$$\binom{g - s - 1}{n - 3s - 4}.^{*)}$$

d. h.: jede lineare Mannigfaltigkeit von $(g - n + 2s + 3)$ Dimensionen, welche in der Mannigfaltigkeit von $(3g + 2 - n)$ Dimensionen aller zu R_n perspectiven Ebenenbüschel g^{ter} Ordnung enthalten

*) S. Anhang.

ist, liefert $\binom{g-s-1}{n-3s-4}$ Ebenenbüschel, welche auch perspectiv zu Regelschaaren $(n-s-2)^{\text{ter}}$ Ordnung sind.

3) Wir betrachten nun insbesondere die zu R_n perspectiven Punkt-Ebenenbüschel g^{ter} Ordnung und finden dann leicht folgende Sätze:

Alle zu R_n perspectiven Punkt-Ebenenbüschel g^{ter} Ordnung bilden eine Mannigfaltigkeit von $(2g-n+4)$ Dimensionen von der Ordnung $\binom{g+1}{3}$.

Alle zu R_n perspectiven Punkt-Ebenenbüschel g^{ter} Ordnung, deren Mittelpunkte auf einer bestimmten Ebene liegen, bilden eine Mannigfaltigkeit von $(2g-n+3)$ Dimensionen von der Ordnung $\binom{g+1}{2}$.

Alle zu R_n perspectiven Punkt-Ebenenbüschel g^{ter} Ordnung, deren Mittelpunkte einer gegebenen Geraden angehören, bilden eine Mannigfaltigkeit von $(2g-n+2)$ Dimensionen von der Ordnung

$$\binom{g+1}{1}=(g+1).$$

Alle zu R_n perspectiven Punktebenbüschel g^{ter} Ordnung, deren Mittelpunkte in einen gegebenen Punkt fallen, bilden eine Mannigfaltigkeit von $(2g-n+1)$ Dimensionen von der Ordnung $\binom{g+1}{0}=1$.

4) Wir combiniren nun die beiden Bedingungen; erstens, dass der Ebenenbüschel g^{ter} Ordnung perspectiv ist zu einer Regelschaar $(n-s-2)^{\text{ter}}$ Ordnung und zweitens, dass der Ebenenbüschel ein Punkt-Ebenenbüschel ist und erhalten folgende Sätze:

Alle zu R_n perspectiven Punkt-Ebenenbüschel g^{ter} Ordnung, welche perspectiv zu Regelschaaren $(n-s-2)^{\text{ter}}$ Ordnung sind, bilden eine Mannigfaltigkeit von

$$(g-2s+1) \textit{ Dimensionen}$$

und der

$$\binom{g+1}{3}\binom{g-s-1}{n-3s-4}^{\textit{ten}} \textit{ Ordnung,}$$

wenn über die Lage des Mittelpunktes des Büschels keine Voraussetzung gemacht wird; von

$$(g-2s) \textit{ Dimensionen}$$

und der

$$\binom{g+1}{2}\binom{g-s-1}{n-3s-4}^{\textit{ten}} \textit{ Ordnung,}$$

wenn der Mittelpunkt des Büschels einer bestimmten Ebene angehört, von

$$(g-2s-1) \textit{ Dimensionen}$$

und der

$$\binom{g+1}{1}\binom{g-s-1}{n-3s-4}^{\textit{ten}} \textit{ Ordnung,}$$

wenn der Mittelpunkt des Büschels auf einer gegebenen Geraden liegt; *von*

$$(g - 2s - 2) \text{ Dimensionen}$$

und der

$$\binom{g+1}{0}\binom{g-s-1}{n-3s-4}^{\text{ten}} \text{ Ordnung},$$

wenn der Mittelpunkt des Büschels ein gegebener Punkt ist.

§ 10.

Ueber die Vertheilung der zu R_n perspectiven Regelschaaren im Raume.

1) In § 8 haben wir Punktgebilde betrachtet, welche für die Projection der R_n aus einem Punkte des Gebildes in eine ebene R'_n von Bedeutung sind. Wir werden hier noch andere zu R_n gehörende Punktgebilde kennen lernen, welche zwar für die R'_n von keiner Bedeutung sind, aber wichtige Aufschlüsse über die Eigenschaften der zu R_n perspectiven Regelschaaren geben. Die Beziehung zwischen s und g soll nun der Art angenommen werden, dass die Dimensionen der in (§ 9, 4) betrachteten Mannigfaltigkeiten von Ebenenbüscheln g^{ter} Ordnung gleich Null sind, sodass wir in den Ordnungszahlen endliche Zahlen von Büscheln erhalten. Von dem Mittelpunkt des Büschels aus wird die Regelschaar $(n-s-2)^{\text{ter}}$ Ordnung projicirt durch einen Ebenenbüschel g^{ter} Ordnung, weshalb er ein $d = (n - s - 2 - g)$-facher Punkt der Regelfläche ist. Aus (§ 9, 4) ergeben sich dann folgende Sätze.

2) Wir setzen:

$$g - 2s + 1 = 0; \quad d = n - 3s - 1$$

oder:

$$s = \frac{n-d-1}{3}; \quad k = n - s - 2 = \frac{2n+d-5}{3}; \quad g = \frac{2n-2d-5}{3}$$

und finden:

Es giebt:

$$\binom{\frac{2n-2d-2}{3}}{3}\binom{\frac{n-d-7}{3}}{d-3} \text{ Punkte},$$

in welchen Regelflächen k^{ter} Ordnung einen d-fachen Punkt haben. Hierbei ist $n - d - 1 \equiv 0 \pmod{3}$ und $d \geqq 3$.

Für $d = 3$ erhalten wir:

$$s = \frac{n-4}{3}; \quad k = \frac{2n-2}{3}; \quad g = \frac{2n-11}{3}.$$

Wir haben es mit *einer* Regelfläche zu thun; für die Zahl ihrer dreifachen Punkte finden wir

$$\frac{\frac{2n-8}{3}\cdot\frac{2n-11}{3}\cdot\frac{2n-14}{3}}{1\cdot 2\cdot 3}=\frac{(k-2)(k-3)(k-4)}{1\cdot 2\cdot 3}$$

wie bekannt.

Für gerades n haben wir in (§ 8, 4) eine endliche Anzahl von Punkten gefunden, von welchen aus R_n in eine ebene R'_n projicirt wird, die perspectiv zu einem Strahlenbüschel $\left(\frac{n}{2}-2\right)^{\text{ter}}$ Ordnung ist. Diese Punkte erhalten wir auch hier, wenn wir setzen:

$$d=\frac{n+2}{4}$$

dann ist:

$$s=\frac{n-2}{4};\quad k=\frac{3n-6}{4};\quad g=\frac{n-4}{2}$$

und für die Zahl der Punkte folgt:

$$\frac{(n-2)(n-4)(n-6)}{2\cdot 4\cdot 6}$$

wie früher.

Setzen wir ferner bei geradem n:

$$d=\frac{n-4}{4},$$

so ist:

$$s=\frac{n}{4};\quad k=\frac{3n-8}{4};\quad g=\frac{n-2}{2}$$

und für die Zahl der Punkte folgt:

$$\frac{n(n-2)(n-4)}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{(n-8)(n-12)}{4\cdot 8}.$$

Diese Punkte liegen auf der in (§ 8, 3) gefundenen Fläche $\frac{n}{2}^{\text{ter}}$ Ordnung. Ist $g\geqq\frac{n}{2}$, so haben die Punkte keine für das Bild R'_n charakteristische Lage.

Für ungerades n haben wir in (§ 8, 5) als Ort der Mittelpunkte der zu R_n *perspectiven* Punkt-Ebenenbüscheln $\frac{n-3}{2}^{\text{ter}}$ Ordnung eine Curve $\frac{(n-1)(n-3)}{2\cdot 4}^{\text{ter}}$ Ordnung gefunden. Die hier betrachteten Punkte liegen auf dieser Curve, wenn wir setzen:

$$d=\frac{n-1}{4}.$$

Dann ist:

$$s=\frac{n-1}{4};\quad k=\frac{3n-7}{4};\quad g=\frac{n-3}{2}$$

und für die Zahl der Punkte erhalten wir:

$$\frac{(n-1)(n-3)(n-5)}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{n-9}{4}.$$

2) Wir setzen nun:

$$g - 2s = 0; \quad d = n - 3s - 2$$

oder:

$$s = \frac{n-d-2}{3}; \quad k = \frac{2n+d-4}{3}; \quad g = \frac{2n-2d-4}{3}$$

und finden:

Der Ort der d-fachen Punkte der zu R_n perspectiven Regelschaaren k^{ter} Ordnung ist eine Curve der $\binom{\frac{2n-2d-1}{3}}{2}\binom{\frac{n-d-5}{3}}{d-2}^{ten}$ *Ordnung.* Hierbei ist $n - d - 2 \equiv 0$ (mod. 3) und $d \geqq 2$.

Ist $d = 2$ so folgt:

$$s = \frac{n-4}{3}; \quad k = \frac{2n-2}{3}; \quad g = \frac{2n-8}{3}.$$

Wir haben es mit der zu R_n perspectiven Regelschaar niederster Ordnung zu thun; ihre Doppelcurve ist von der Ordnung:

$$\frac{\frac{2n-5}{3} \cdot \frac{2n-8}{3}}{1 \cdot 2} = \frac{(k-1)(k-2)}{1 \cdot 2}$$

wie bekannt.

Für *gerades* n liegt unsere Curve auf der in (§ 8, 3) betrachteten Fläche $\frac{n}{2}^{\text{ter}}$ Ordnung, wenn:

$$d = \frac{n-2}{4},$$

dann ist:

$$s = \frac{n-2}{4}; \quad k = \frac{3n-6}{4}; \quad g = \frac{n-2}{2}.$$

Die Ordnung unserer Curve ist dann:

$$\frac{n(n-2)}{2 \cdot 4} \cdot \frac{n-6}{4}.$$

Für *ungerades* n fällt unsere Curve mit der in (§ 8, 5) gefundenen Curve $\frac{(n-1)(n-3)}{2 \cdot 4}^{\text{ter}}$ Ordnung zusammen, wenn:

$$d = \frac{n+1}{4}$$

ist; denn es folgt:

$$s = \frac{n-3}{4}; \quad k = \frac{3n-5}{4}; \quad g = \frac{n-3}{2}$$

und für die Ordnung der Curve $\frac{(n-1)(n-3)}{2 \cdot 4}$.

3) Wir setzen

$$g - 2s - 1 = 0; \quad d = n - 3s - 3,$$

also

$$s = \frac{n-d-3}{3}; \quad k = \frac{2n+d-3}{3}; \quad g = \frac{2n-2d-3}{3}$$

und finden nach (§ 9, 4):

Der Ort der d-fachen Punkte der zu R_n perspectiven Regelschaaren k^{ter} Ordnung ist eine Fläche

$$\frac{2n-2d}{3}\binom{\frac{n-d-3}{3}}{d-1} = 2d\binom{\frac{n-d}{3}}{d}^{ter} \text{ Ordnung.}$$

Hierbei ist $n - d \equiv 0 \pmod{3}$ und $d \geqq 1$.

Ist $d = 1$ so folgt:

$$s = \frac{n-4}{3}; \quad k = \frac{2n-2}{3}; \quad g = \frac{2n-5}{3}.$$

Wir haben es wieder mit der zu R_n perspectiven Regelschaar niederster Ordnung zu thun, für deren Ordnung:

$$2\binom{\frac{n-1}{3}}{1} = k \quad \text{folgt.}$$

Für gerades n erhalten wir die in (§ 8, 3) gefundene Fläche $\frac{n}{2}^{\text{ter}}$ Ordnung, wenn wir setzen $d = \frac{n}{4}$, dann ist

$$s = \frac{n-4}{4}; \quad k = \frac{3n-4}{4}; \quad g = \frac{n-2}{2}.$$

4) Wir setzen schliesslich

$$g - 2s - 2 = 0; \quad d = n - 3s - 4$$

oder:

$$s = \frac{n-d-4}{3}; \quad k = \frac{2n+d-2}{3}; \quad g = \frac{2n-2d-2}{3}$$

und finden nach (§ 9, 4):

Jeder Punkt des Raumes ist d-facher Punkt von

$$\binom{\frac{n-d-1}{3}}{d}$$

zu R_n perspectiven Regelschaaren k^{ter} Ordnung. Hierbei ist $n - d - 1 \equiv 0 \pmod{3}$ und $d \geqq 0$.

Für $d = 1$ folgt

$$s = \frac{n-5}{3}; \quad k = \frac{2n-1}{3}; \quad g = \frac{2n-4}{3}.$$

Durch jeden Punkt des Raumes gehen somit $\frac{n-2}{3}$ Regelschaaren $\frac{2n-1}{3}^{\text{ter}}$ Ordnung.

Setzen wir $d = \frac{n-1}{4}$, so ist

$$s = \frac{n-5}{4}; \quad k = \frac{3n-3}{4}; \quad g = \frac{n-1}{2}; \quad \binom{\frac{n-d-1}{3}}{d} = 1.$$

Jeder Punkt des Raumes ist also $\frac{n-1}{4}$-facher Punkt *einer* zu R_n perspectiven Regelschaar $\frac{3n-3}{4}$ter Ordnung. Die zu R_5 perspectiven Regelschaaren dritter Ordnung bilden daher einen Flächenbüschel. Die Doppelcurven der zu R_9 perspectiven Regelschaaren sechster Ordnung erfüllen den Raum der Art, dass durch jeden Punkt nur eine solche Curve geht.

§ 11.

Verhalten einer Geraden zu R_n und den Regelschaaren.

1) Die Ebenen eines Büschels erster Ordnung mit dem Träger $\overline{yz}$ schneiden R_n^4 in ∞^1 Punktgruppen, welchen ∞^1 Formen $\varphi_i(\lambda)$ entsprechen. Diesen sind nun conjugirt $(n-1)$ linear unabhängige Functionen $f_k(\lambda)$, welche bekanntlich im Allgemeinen die $(n-2)$ten Polaren einer bestimmten Form $\overset{2n-2}{F}(\lambda)$ $(2n-2)$ter Ordnung in λ sind.*) Aus der Beziehung $\big(§ 1, (5)\big)$.

$$\varrho z_i = \sum_0^n {}_p (-1)^p a_{ip} b_{n-2, n-p}$$

folgt nun, wenn:

$$\overset{2n-2}{F}(\lambda) = \sum_0^{2n-2} {}_p \binom{2n-2}{p} M_p \lambda^{2n-2-p}$$

$$\varrho_t y_i + \sigma_t z_i = \sum_0^n {}_p (-1)^p M_{t+p} a_{i, n-p}$$

für

$$t = 0, 1, 2 \ldots (n-2); \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Wir haben somit $(4n-4)$ lineare Gleichungen zwischen den $2(n-1)$ Grössen ϱ_t und σ_t und den $(2n-1)$ Grössen M_p. Hierdurch ist die Function $\overset{2n-2}{F}$ bestimmt. Es folgt:

---

*) Vgl. Fr. Meyer, Apolarität. Tübingen 1883. S. 365.

$$(10)\quad \overset{2n-2}{F}(\lambda)=\begin{vmatrix} 0 & 0 & . & . & . & . & . & 1 & -(2n-2)\lambda & . & . & . & . & . & . & \lambda^{2n-2} \\ y & z & 0 & . & . & . & . & a_0 & a_1 & . & . & a_n & 0 & . & 0 & \\ 0 & 0 & y & z & 0 & . & . & . & a_0 & a_1 & . & . & a_n & 0 & 0 & \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & y & z & . & . & . & a_0 & . & . & . & a_n & \end{vmatrix}.$$

Die Coefficienten von λ^p sind Functionen $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung der Determinanten $|y\, z\, a_p\, a_q|$.

Für jede Gerade $\overline{yz}$ des Raumes ist die Form $\overset{2n-2}{F}(\lambda)$ im Allgemeinen eindeutig bestimmt. Schneidet die Gerade $\overline{yz}$ die Curve R_n in dem Punkte μ, so wird $\overset{2n-2}{F}(\lambda)$ gleich der Potenz $(\lambda-\mu)^{2n-2}$. Ist $\overline{yz}$ eine mehrfache Sekante von R_n, welcher die Parameterwerthe $\mu_1 . \mu_2 \ldots \mu_q$ zukommen, so ist $\overset{2n-2}{F}(\lambda)$ nicht mehr vollständig bestimmt, sondern es ist:

$$\overset{2n-2}{F}(\lambda)=\sum_1^q{}_p\, k_p(\lambda-\mu_p)^{2n-2}$$

wobei die k_p ganz beliebige Constante sind.

2) Die Gleichung:

$$\overset{2n-2}{F}(\lambda)=0$$

stellt uns einen Liniencomplex K_{n-1} von der Ordnung $(n-1)$ dar, dessen Kegel die Curve R_n in ihren Punkte λ in $(2n-2)$ unendlich benachbarten Punkten schneiden. Alle Sehnen von R_n gehören diesem Complexe an. Wird $\overset{2n-2}{F}(\lambda)=0$ polarisirt nach den $(2n-2)$ Wurzeln einer Gleichung $\chi(\mu)=0$, so erhält man die Gleichung eines Complexes $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, welcher ebenfalls alle Sehnen von R_n enthält und ausserdem in den Punkten von R_n, welche den Parametern $\chi(\mu)=0$ entsprechen, Strahlenbündel besitzt.*) Setzt man in die Gleichung dieses Complexes $z_i=\varphi_i(\mu)$ ein, so ergiebt sich nach Fortheben des Factors $\chi(\lambda)$ die Gleichung des Kegels $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, durch welchen R_n von ihrem Punkte μ aus projicirt wird. *Es giebt also* ∞^{2n-2} *Complexe* $(n-1)^{ter}$ *Ordnung, welche das Sehnensystem von* R_n *enthalten.*

3) Unter den Polaren der $\overset{2n-2}{F}(\lambda)$ befinden sich auch alle Functionen $\overset{n+r}{F}(\lambda)$, deren sämmtliche r^{ten} Polaren conjugirt sind zu den vier Functionen $\varphi_i(\lambda)$, und zwar gilt folgender Satz, dessen Beweis ich übergehe:

*) Vergl. d. Ann, Bd. 38, S. 580.

Polarisirt man $\overset{2n-2}{F}(\lambda)$ nach den $(n-r-2)$ Parametern der Erzeugenden, in welchen die Gerade $\overline{yz}$ eine zu R_n perspective Regelschaar schneidet, so erhält man die Function $\overset{n+r}{F}(\lambda)$, zu welcher diese Regelschaar gehört. Dies gilt auch noch für $r=-1$. Die $(n-r-2)$ Parameter, nach welchen wir polarisiren, sind deshalb so zu bestimmen, dass die resultirende $\overset{n+r}{F}(\lambda)$ conjugirt ist den Functionen $\varphi_i(\lambda)$.

4) Polarisirt man $\overset{2n-2}{F}(\lambda)=0$ nach den n Parametern von Punkten der R_n, welche in einer Ebene u liegen, so folgt:

$$(uy)\overset{n-2}{F_1}(\lambda)+(uz)\overset{n-2}{F_2}(\lambda)=0$$

weil diese Polare verschwinden muss, sobald u die Gerade $\overline{yz}$ enthält. Wollen wir also die $(n-r-2)$ Parameter der Erzeugenden einer zu R_n perspectiven Regelschaar, welche von $\overline{yz}$ geschnitten werden, bestimmen, so haben wir die nach ihnen polarisirten Functionen $\overset{n-2}{F_1}(\lambda)$ und $\overset{n-2}{F_2}(\lambda)$ identisch gleich Null zu setzen. Wir haben somit für die symmetrischen Functionen dieser Parameter $2(r+1)$ lineare Gleichungen; d. h.: Die Gruppen dieser Parameter bilden eine Involution $(n-r-2)^{\text{ter}}$ Ordnung $(n-3r-4)^{\text{ter}}$ Stufe. Letztere hat bekanntlich $(n-3r-3)(2r+2)$ Gruppen mit je einem $(n-3r-3)$-fachen Elemente. Dies gilt nur für $r>-1$.

Jede Gerade des Raumes, welche R_n nicht schneidet, hat folglich mit $(n-3r-3)(2r+2)$ zu R_n perspectiven Regelschaaren $(n-r-2)^{\text{ter}}$ Ordnung $(n-3r-3)$ unendlich nahe Punkte gemein. Ist z. B. $r=1$, $n=9$, so folgt: Jede Gerade osculirt 12 zu R_9 perspective Regelschaaren 6^{ter} Ordnung.

§ 12.

Curven ungerader Ordnung.

1) Die Ebenen eines Bündels mit dem Mittelpunkte z schneiden R_n in ∞^2 Punktgruppen, zu welchen ∞^2 Formen $\varphi_i(\lambda)$ gehören. Diesen ist nun stets *eine* Form $\frac{3n-3}{2}^{\text{ter}}$ Ordnung conjugirt, sobald n ungerade ist.*) Sie liefert uns den zu R_n perspectiven Punkt-Ebenenbüschel $\frac{n-1}{2}^{\text{ter}}$ Ordnung, welcher z zum Mittelpunkte hat. Ist z ein $\frac{n-2r-3}{2}$-facher Punkt einer zu R_n perspectiven Regelschaar $(n-r-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, so ist die zu letzterer gehörende Function $\overset{n+r}{F}(\lambda)$ eine

*) Vergl. Erz. ebener Curven. Diese Annal. Bd. 38, S. 565.

$\frac{n-2r-3}{2}$te Polare der Form $\frac{3n-3}{2}$ter Ordnung, genommen nach den Parametern der durch z gehenden Erzeugenden der Fläche.

Ist die Form gegeben in:

$$\overset{\frac{3n-3}{2}}{\Phi}(\lambda) = \sum_0^{\frac{3n-3}{2}} {}_p \binom{\frac{3n-3}{2}}{p} M_p \lambda^{\frac{3n-3}{2}-p},$$

so finden wir für die Coefficienten M_p nach (§ 1, (5)) folgende Gleichungen:

$$\varrho_t z_i = \sum_0^n {}_p (-1)^p M_{t+p} a_{i,n-p}$$

für

$$t = 0, 1 \dots \frac{n-3}{2}; \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Wir haben also $2(n-1)$ Gleichungen für die $\frac{n-1}{2}$ Grössen ϱ_t und die $\frac{3n-1}{2}$ Grössen M_p. Unsere Function Φ ist somit bestimmt; ihre Coefficienten M_p sind Functionen $\frac{n-1}{2}$ter Ordnung der Determinanten $|z a_p a_q a_r|$.

Für jeden Punkt z des Raumes ist Φ im Allgemeinen eindeutig bestimmt. Liegt z in dem Punkte μ von R_n, so ist:

$$\Phi(\lambda) = (\lambda - \mu)^{\frac{3n-3}{2}}.$$

Liegt aber z auf der Curve D $\frac{(n-1)(n-3)}{2 \cdot 4}$ter Ordnung, welche wir in (§ 9, 5) bestimmt haben, so erhalten wir ∞^1 Functionen $\Phi(\lambda)$, welche sämmtlich die ersten Polaren einer Form $\frac{3n-1}{2}$ter Ordnung sind.

2) Die Gleichung:

$$\Phi(\lambda) = 0$$

stellt uns bei gegebenem λ eine Fläche $\frac{n-1}{2}$ter Ordnung dar, welche die Curve D enthält und welche daher die R_n in den $\frac{(n-1)(n-3)}{2}$ festen Punkten schneidet, welche jene Curve mit R_n gemein hat. Die übrigen $\frac{3n-3}{2}$ Schnittpunkte der Fläche mit R_n vereinigen sich in dem Punkte λ von R_n. Polarisirt man $\Phi = 0$ nach den Wurzeln einer Gleichung $\chi(\mu) = 0$ $\frac{3n-3}{2}$ter Ordnung, so erhält man die Gleichung einer Fläche, welche R_n schneidet in $\frac{3n-3}{2}$ Punkten, deren Parameter durch $\chi(\mu) = 0$ gegeben sind.

3) Die Form $\Phi(\lambda)$ ist $\frac{n-1}{2}$ te Polare von ∞^2 Formen $\overset{2n-2}{F}(\lambda)$, welche (§ 11, 1) zu den Geraden des Strahlenbündels s gehören. Die Parameter, nach welchen eine der letzteren Functionen polarisirt werden muss, entsprechen den $\frac{n-1}{2}$ Ebenen des zu $\Phi(\lambda)$ gehörenden Punkt-Ebenenbüschels, welche durch den betrachteten Strahl des Bündels gehen.

4) Polarisirt man $\Phi(\lambda)$ nach den n Parametern von Punkten, in welchen eine Ebene u die Curve R_n schneidet, so löst sich der Factor (us) ab, da $\Phi(\lambda)$ conjugirt ist zu allen durch s gehenden ebenen Schnitten der R_n. Der Restfactor ist eine Function $\Phi_1(\lambda)$ von der Ordnung $\frac{n-3}{2}$ in λ und den Coordinaten s_i.

$$\Phi_1(\lambda) = 0$$

ist die Gleichung einer Fläche Δ, welche die Curve D enthält und mit R_n den Punkt λ $\frac{n-3}{2}$-fach gemein hat. Polarisirt man $\Phi_1(\lambda) = 0$ nach beliebigen $\frac{n-3}{2}$ Parametern, so erhält man die Gleichung einer Fläche Δ $\frac{n-3}{2}$ ter Ordnung, welche R_n abgesehen von den $\frac{(n-1)(n-3)}{2}$ Punkten der Curve D in den $\frac{n-3}{2}$ Punkten schneidet, zu welchen diese Parameter gehören. Wir haben somit $\infty^{\frac{n-3}{2}}$ Flächen $\frac{n-3}{2}$ ter Ordnung, welche die Curve D enthalten.

5) Durch $\frac{n-5}{2}$ feste Punkte auf R_n gehen noch ∞^1 Flächen Δ, welche einen zu R_n perspectiven Flächenbüschel bilden. Die Grundcurve dieses Büschels besteht aus D und einer Curve δ $\frac{(n-3)(n-5)}{2.4}$ ter Ordnung, welche $\frac{n-5}{2}$ Punkte mit R_n gemein hat. Die Punkte dieses zweiten Theiles δ der Grundcurve haben eine besondere geometrische Bedeutung.

Sind nämlich die Parameter der $\frac{n-5}{2}$ Punkte auf R_n identisch mit den Parametern von $\frac{n-5}{2}$ Strahlen einer Regelschaar $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche durch den Punkt s gehen, so ist die nach diesen Parametern genommene Polare der Function $\Phi(\lambda)$ $\frac{3n-3}{2}$ ter Ordnung eine Function $\overset{n+1}{F}(\lambda)$, zu welcher die Regelschaar $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung gehört. Die nach diesen $\frac{n-5}{2}$ Parametern genommene Polare von $\Phi_1(\lambda)$ verschwindet demnach identisch. Wir schliessen hieraus: Der zweite

Theil δ der Grundcurve ist der Ort der $\frac{n-5}{2}$-fachen Punkten von zu R_n perspectiven Regelschaaren $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, deren $\frac{n-5}{2}$ in einem Punkte von δ zusammenstossenden Strahlen den $\frac{n-5}{2}$ auf R_n angenommenen Punkten entsprechen, also diese Punkte enthalten. Die $\frac{n-3}{2}$-fachen Punkte dieser Regelschaaren liegen aber auf der Curve D.

Für $n = 7$ ist D dritter und δ erster Ordnung; δ liegt auf der zu R_7 perspectiven Regelschaar 4^{ter} Ordnung.

6) Zwei zu R_n perspective Flächenbüschel erzeugen eine Fläche $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, auf welcher R_n liegt und welche D zur Doppelcurve hat. Auf ihr liegen zwei Schaaren von Curven $\left(\frac{(n-3)(n-5)}{2.4}\right)^{\text{ter}}$ Ordnung. Die Curven der einen Schaar sind Curven δ und schneiden R_n je $\frac{n-5}{2}$ mal, die Curven der andern Schaar haben mit R_n nur je einen Punkt gemein. Zu jeder Involution $\frac{n-5}{2}^{\text{ter}}$ Ordnung erster Stufe auf R_n gehört eine solche Fläche $(n-3)^{\text{ter}}$ Ordnung.

7) Hat R_n eine $\frac{n-1}{2}$-fache Secante, so schneidet der Ebenenbüschel, welcher diese Secante zum Träger hat, eine Involution $\frac{n+1}{2}^{\text{ter}}$ Ordnung erster Stufe auf R_n aus. Letzterer ist nun sets eine bestimmte Form $\overset{n-1}{F}(\lambda)$ $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung conjugirt. Die Form $\overset{n-1}{F}(\lambda)$ liefert eine zu R_n perspective Regelschaar $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche von den Ebenen des Büschels in ∞^1 ebenen Curven $\frac{n-1}{2}^{\text{ter}}$ Ordnung (§ 3, 2) geschnitten wird. Die $\frac{n-1}{2}$-fache Secante einer R_n ist deshalb auch $\frac{n-1}{2}$-fache Erzeugende der Regelschaar. Alle Punkt-Ebenenbüschel $\frac{n-1}{2}^{\text{ter}}$ Ordnung, welche perspectiv zu R_n sind und ihre Mittelpunkte auf der Secante haben, sind auch perspectiv zu der Regelschaar $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung und bilden ein lineares System erster Stufe.

Für $n = 3$ liefert jede einfache Secante eine Regelschaar zweiter Ordnung. Jede Sehne der R_5 ist Doppellinie einer Regelschaar vierter Ordnung, deren übrigen Doppellinien zwei dreifache Secanten sind. Für $n = 7$ finden sich noch ∞^1 dieser Regelschaaren 6^{ter} Ordnung; für $n = 9$ aber nur noch 105 Regelschaaren 8^{ter} Ordnung; für $n > 9$ giebt es solcher Regelschaaren $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung im Allgemeinen nicht.

§ 13.

Curven dritter Ordnung.

In einigen Beispielen möge das Vorstehende etwas näher ausgeführt werden. Wir beginnen mit Curven ungerader Ordnung. Es sei R_3 gegeben in:

$$\varrho x_i = a_{i,0}\lambda^3 + a_{i,1}\lambda^2 + a_{i,2}\lambda + a_{i,3} \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Wählen wir nach (§ 1, 1) eine beliebige Form dritter Ordnung

$$f_1 = b_{10}\lambda^3 + 3b_{11}\lambda^2 + 3b_{12}\lambda + b_{13},$$

so erhalten wir für die zu R_3 perspectiven Ebenenbüschel erster Ordnung die Gleichungen:

$$b_{10}\lambda + b_{11} = 0; \quad b_{11}\lambda + b_{12} = 0; \quad b_{12}\lambda + b_{13} = 0,$$

wobei nur einzusetzen ist:

$$b_{10} = |z a_1 a_2 a_3|; \quad b_{11} = |z a_0 a_2 a_3|; \quad b_{12} = |z a_0 a_1 a_3|; \quad b_{13} = |z a_0 a_1 a_2|.$$

Die Matrix:

$$\left\| \begin{matrix} b_{10} & b_{11} & b_{12} \\ b_{11} & b_{12} & b_{13} \end{matrix} \right\| = 0 \;{}^{*})$$

giebt die ∞^2 Flächen zweiter Ordnung, auf welchen R_3 liegt.

Die Ebenenbüschel:

$$\left\| \begin{matrix} b_{10}\lambda + b_{11} & b_{11}\lambda + b_{12} & b_{12}\lambda + b_{13} \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{matrix} \right\| = 0$$

sind perspectiv zu *einer* Fläche zweiter Ordnung, deren Gleichung

$$\left| \begin{matrix} b_{10} & b_{11} & b_{12} \\ b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ c_0 & c_1 & c_2 \end{matrix} \right| = 0$$

ist.

Zu jeder solchen Fläche gehört eine quadratische Form:

$$c_0\lambda^2 + 2c_1\lambda + c_2 = 0,$$

deren conjugirte Formen auf R_3 eine Involution bestimmen, deren Punktpaare durch die Leitlinien der Fläche verbunden sind. (§ 2, 2).

Ist:

$$f_2 = b_{20}\lambda^3 + 3b_{21}\lambda^2 + 3b_{22}\lambda + b_{23}$$

eine beliebige Form dritter Ordnung, so hat man in:

$$\left| \begin{matrix} b_{10}\lambda + b_{11} & b_{11}\lambda + b_{12} & b_{12}\lambda + b_{13} \\ b_{20} & b_{21} & b_{22} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{matrix} \right| = 0$$

---

*) Vergl. Meyer, Apolarität. S. 21.

die Gleichung eines zu R_3 perspectiven Ebenenbüschels, dessen Träger eine Sehne von R_3 ist. Die Parameter der Punkte von R_3, welche diese Sehne verbindet, sind die Wurzeln der Hesse'schen Form von f_2. Alle Formen f_2, welche dieselbe Hesse'sche Form haben, alsoeine besondere Involution dritter Ordnung bilden, liefern denselben Ebenenbüschel.*)

Setzen wir symbolisch:

$$f_1 = \alpha_\lambda^3; \quad f_2 = \beta_\lambda^3 = \beta_\lambda'^3,$$

so ist:

$$(\beta\beta')^2 (\alpha\beta)(\alpha\beta')\alpha_\lambda = 0$$

die Gleichung des Ebenenbüschels; oder auch wenn H die Hesse'sche Form von f_2 bedeutet, in bekannter Schreibart:

$$(f_1, H)_2 = 0.$$

§ 14.

Curven fünfter Ordnung.

Nach § 12 bilden wir zunächst die zu einem beliebigen Punkte z gehörende Function $\Phi(\lambda)$. Ist R_5 gegeben in:

$$\varrho x_i = \sum_0^5 {}_p\, a_{ip}\, \lambda^{5-p},$$

so folgt:

$$\overset{6}{\Phi}(\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -6\lambda & 15\lambda^2 & -20\lambda^4 & 15\lambda^4 & -6\lambda^5 & \lambda^6 \\ z & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & 0 \\ 0 & z & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{vmatrix}.$$

Hierbei sind die beiden letzten Horizontalreihen unter Hinzufügen der Indices i je viermal zu schreiben. Aus $\Phi(\lambda)$ bilden wir $\Phi_1(\lambda)$ und finden in

$$\overset{1}{\Phi}_1(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda z & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & 0 \\ z & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \end{vmatrix} = 0$$

die Gleichung des zu R_5 perspectiven Büschels erster Ordnung.

Polarisirt man $\overset{6}{\Phi}(\lambda) = 0$ nach der Wurzel von $\Phi_1(\mu) = 0$, so erhält man eine Gleichung: $\overset{5}{\Psi}(\lambda) = 0$ fünfter Ordnung in λ und dritter Ordnung in den Coordinaten z_i. Bleibt λ constant, so ist $\overset{5}{\Psi}(\lambda) = 0$ die Gleichung einer Regelschaar dritter Ordnung, welche perspectiv ist zu R_5. Hält man den Punkt z fest, so ist $\overset{5}{\Psi}(\lambda)$ eine Form f_k, welche conjugirt ist allen ebenen Schnitten der R_5 und zu welcher die Regelschaar dritter Ordnung gehört, auf der z liegt.

*) Vergl. Sturm: Darst. binärer Formen auf der cub. Raumcurve. Journal für Math. Bd. 86, S. 116.

Die Gleichung $\overset{5}{\Psi}(\lambda)=0$ ändert sich nicht, wenn man sie polarisirt nach den Wurzeln von ∞^4 Formen fünfter Ordnung, welche conjugirt sind derjenigen f_k, welche λ zur Wurzel hat.

Setzt man die Katalektikante von $\overset{6}{\Phi}(\lambda)$ gleich Null, so erhält man die Gleichung der von den dreifachen Secanten der R_5 gebildeten Fläche achter Ordnung.

§ 15.

Curven siebenter Ordnung.

Für die Punkte der R_7 haben wir die Darstellung:

$$\varrho x_i = \sum_0^7{}_p\, a_{ip}\, \lambda^{7-p}.$$

Für die Form $\overset{8}{F}(\lambda)$, deren erste Polaren conjugirt sind allen ebenen Schnitten der R_7, finden wir (§ 2, 1):

$$\overset{8}{F}(\lambda)=\begin{vmatrix} 1 & -8\lambda & 28\lambda^2 & \cdots & -8\lambda^7 & \lambda^8 \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_7 & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & \cdot & a_7 \end{vmatrix}.$$

Zu dieser Form gehört die zu R_7 perspective Regelschaar vierter Ordnung. Verschwindet die Katalektikante von $\overset{8}{F}(\lambda)$, so hat diese Regelschaar eine einfache gerade Leitlinie. (§ 3, 8). Die Doppelcurve D derselben hat mit R_7 12 Punkte gemein. (§ 12, 4). *)

Um die Gleichung der Regelfläche zu erhalten, bilden wir nach § 12 die Form $\Phi(\lambda)$ neunter Ordnung. Wir finden:

$$\overset{9}{\Phi}(\lambda)=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -9\lambda & 36\lambda^2 & \cdots & \cdots & -36\lambda^7 & 9\lambda^8 & \lambda^9 \\ z & 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & \cdots & a_7 & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 & 0 & a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & \cdot & a_7 & 0 \\ 0 & 0 & z & 0 & 0 & a_0 & a_1 & \cdots & \cdot & \cdot & a_7 \end{vmatrix}$$

und hieraus folgt:

$$\overset{2}{\Phi}_1(\lambda)=\begin{vmatrix} -1 & 2\lambda & -\lambda^2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ z & 0 & 0 & a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_7 & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 & 0 & a_0 & \cdots & \cdots & \cdot & a_7 & 0 \\ 0 & 0 & z & 0 & 0 & a_0 & \cdots & \cdot & \cdot & a_7 \end{vmatrix}.$$

*) Vergl. Schumacher. Zur Eintheilung der Strahlencongr. Diese Annal. Bd. 38, S. 306.

Polarisirt man $\Phi_1(\lambda) = 0$ einmal nach μ, das andere mal nach ν, so erhalten wir zwei zu R_7 und der Regelschaar vierter Ordnung perspective Flächenbüschel (§ 12, 5). *Die Gleichung dieser Regelfläche ist also die gleich Null gesetzte Discriminante der Form* $\Phi_1(\lambda)$. Für jeden Punkt derselben ist eine erste Polare von $\Phi(\lambda)$ gleich der Form $\overset{8}{F}(\lambda)$ (§ 12, 1). Die letzte Form lässt sich auf ∞^7 Arten durch eine Summe von acht Potenzen linearer Functionen von λ darstellen. Jedesmal erhalten wir (§ 3, 1) eine zu der Regelschaar vierter Ordnung perspective Curve C_5 fünfter Ordnung, welche auch perspectiv zu einem Ebenenbüschel erster Ordnung ist. Die acht Punkte, welche R_7 mit C_5 entsprechend gemein hat, sind folglich diejenigen Punkte, welche in den ihnen entsprechenden Ebenen eines beliebigen zu R_7 projectiven Büschels erster Ordnung liegen.

2) Aus der Form $\Phi(\lambda)$ erhält man eine f_k, wenn man sie nach zweien solchen Parametern polarisirt, nach welchen $\Phi_1(\lambda)$ polarisirt verschwindet. Diese Parameterpaare bilden daher eine durch den Punkt s bestimmte Involution zweiter Ordnung. Durch s gehen demnach ∞^1 Doppelcurven der ∞^3 zu R_7 perspectiven Regelschaaren fünfter Ordnung (§ 12, 1).

Zwei verschiedene Formen f_k liefern zwei Regelflächen fünfter Ordnung, welche perspectiv zu einem Ebenenbüschel dritter Ordnung sind. Soll letzterer ein Punkt-Ebenenbüschel sein oder sollen die Doppelcurven beider Regelflächen sich schneiden, so müssen die beiden f_k die zweiten Polaren *einer* Form neunter Ordnung sein.

Zwischen den Coefficienten der f_k besteht daher die Beziehung:

$$\begin{vmatrix} b_{k0} & b_{k1} & \cdots & b_{k5} \\ b_{k1} & & \cdots & b_{k6} \\ b_{k2} & & \cdots & b_{k7} \\ b_{q0} & b_{q1} & \cdots & b_{q5} \\ b_{q1} & & \cdots & b_{q6} \\ b_{q2} & & \cdots & b_{q7} \end{vmatrix} = 0.$$

3) Die rationalen Curven gewinnen an Interesse, wenn sie in Zusammenhang mit den Untersuchungen des Herrn Reye über lineare Mannigfaltigkeiten collinearer Ebenenräume betrachtet werden.*)

Nach (§ 8, 4) giebt es ∞^4 zu R_7 perspective Ebenenbüschel dritter Ordnung, welche ∞^4 unter einander collineare Ebenenräume bestimmen, die einer linearen Mannigfaltigkeit $|\Sigma_4|$ angehören.

*) Reye, Ueber lin. Mannigfaltigkeiten etc. Journal für die reine u. ang. Math. Bd. 108, S. 90.

„Die Mannigfaltigkeit $|\Sigma_4|$ enthält ∞^3 singuläre in Ebenenbündel ausgeartete Räume; jeder Punkt der Hauptcurve C^{10} von $|\Sigma_4|$ ist von ∞^1, jeder andere Punkt ist von einem dieser Räume der Doppelpunkt."

Dem entsprechend fanden wir: Jeder Punkt des Raumes ist Mittelpunkt eines zu R_7 perspectiven Punkt-Ebenenbüschels dritter Ordnung, während jeder Punkt von D_3 und R_7 Mittelpunkt von ∞^1 solcher Büschel ist. Die Hauptcurve C^{10} zerfällt hier in D_3 und R_7. „Die ∞^4 Kernflächen eines Gebüsches von $|\Sigma_4|$ enthalten die Hauptcurve und schneiden sich zu je zweien in den ∞^6 Kerncurven C^6." In unsrem Falle giebt es ∞^3 Kerncurven c^6, welche in D_3 und eine beliebige andre der Regelfläche vierter Ordnung angehörende cubische Raumcurve zerfällt. Jede andere C^6 hat mit der Hauptcurve C^{10} nach Herrn Reye 20 Punkte gemein, von welchen hier 2 auf D_3 und 18 auf R_7 fallen.

„Die singulären Räume von $|\Sigma_4|$, deren Doppelpunkte mit drei Punkten von C^{10} in einer Geraden liegen, bilden einen Raumbüschel."

Hier haben wir drei Arten dreifacher Secanten von C^{10}. Erstens, „die dreifachen Secanten von R_7" und wir fanden: Die Punkt-Ebenenbüschel dritter Ordnung, deren Mittelpunkte auf einer solchen Secante liegen, sind perspectiv zu *einer* Regelschaar sechster Ordnung und bilden ein Büschel (§ 12, 7). Zweitens, „die Sehnen von R_7, welche D_3 treffen"; die Punkt-Ebenenbüschel haben eine sich selbst entsprechende Ebene gemein und sind perspectiv zu einer Regelschaar fünfter Ordnung. Drittens, „die Sehnen von D_3, welche R_7 treffen"; die Punkt-Ebenenbüschel haben zwei Ebenen entsprechend und sind perspectiv zu einer Regelschaar vierter Ordnung.

„In der Mannigfaltigkeit $|\Sigma_4|$ giebt es i. A. 20 zweifach singuläre Räume, deren Ebenen nämlich durch je eine Axe gehen. Diese Axen haben mit C^{10} je vier Punkte gemein." Die R_7 hat in der That 20 vierfache Secanten (§ 6, 3).

§ 16.

Curven neunter Ordnung.

1) Zu der Curve R_9 gehören ∞^2 Formen $\overset{10}{F}(\lambda)$, deren erste Polaren conjugirt sind zu den drei $\varphi_i(\lambda)$. (§ 2, 1). Jede derselben liefert eine zu R_9 perspective Regelschaar sechster Ordnung. Je zwei der Letzteren sind perspectiv zu einem Ebenenbüschel dritter Ordnung. Der Ort der Mittelpunkte der zu R_9 perspectiven Punkt-Ebenenbüschel dritter Ord. ist eine Curve D_6 sechster Ordnung, welche mit R_9 24 Punkte gemein hat (§ 8, 5).

2) Jeder Punkt z des Raumes liefert eine Form $\overset{12}{\Phi}(\lambda)$ zwölfter Ordnung in λ, vierter Ordnung in den z_i. Hieraus folgt eine Form $\Phi_1(\lambda)$ dritter Ordnung in λ und den Coordinaten z_i (§ 12, 2, 4).

Soll die Polare von $\overset{12}{\Phi}(\lambda)$ nach den Parametern λ_1 und λ_2 eine Form $\overset{10}{F}(\lambda)$ ergeben, so muss die Polare von $\Phi_1(\lambda)$ nach diesen Parametern identisch verschwinden. Für $(\lambda_1 + \lambda_2)$ und $\lambda_1 \lambda_2$ folgen demnach zwei Gleichungen. Eliminirt man aus ihnen und den gleich Null gesetzten zweiten Polaren von $\overset{12}{\Phi}(\lambda)$ nach diesen Parametern die symmetrischen Functionen derselben, so erhält man eine Gleichung:

$$\overset{10}{U}(\lambda) = 0$$

zehnter Ordnung in λ und den Coordinaten z_i. Die linke Seite dieser Gleichung, die zweite Ueberschiebung von $\Phi(\lambda)$ über die Hesse'sche Form von $\overset{8}{\Phi}_1(\lambda)$, ist dann eine Form $\overset{10}{F}(\lambda)$. Letztere giebt uns *eine* Regelschaar sechster Ordnung, deren Doppelcurve durch den Punkt z geht (§ 12, 5) und (§ 10, 4). Unsere Gleichung stellt bei festem λ eine Fläche U_{10} 10ter Ordnung dar, welche die Curve D_6 dreimal und die R_9 zweimal enthält. Sie ist der Ort von ∞^1 Doppelcurven d_{10} zehnter Ordnung von Regelschaaren sechster Ordnung und zwar gehören zu letzteren diejenigen Formen $\overset{10}{F}(\mu)$, welche λ zur Wurzel haben. Polarisirt man $\overset{10}{U}(\lambda) = 0$ nach beliebigen 10 Parametern, so erhalten wir die Gleichung einer Fläche 10ter Ordnung des Ortes von ∞^1 Curven d_{10}, deren Formen $\overset{10}{F}(\lambda)$ ein lineares System bilden.

Zwei Flächen U_{10} schneiden sich stets in einer d_{10} und ausserdem in der 9 mal zählenden D_6 und der 4 mal zählenden R_9. Hieraus folgt leicht, dass jede d_{10} mit R_9 32 Punkte gemein hat.

3) Fallen die beiden Parameter λ_1 und λ_2, nach welchen $\overset{12}{\Phi}(\lambda)$ zu polarisiren ist, wenn wir eine $\overset{10}{F}(\lambda)$ erhalten wollen, zusammen, so ist der Punkt z Schnittpunkt von zwei unendlich nahen Erzeugenden einer Regelschaar sechster Ordnung. Der Ort des Punktes z wird demnach gegeben in einer Gleichung, deren linke Seite die Discriminante von $\Phi_1(\lambda)$ ist und ist daher eine Fläche zwölfter Ordnung. Sie enthält die Curve D_6 viermal und hat R_9 zur Rückkehrkante. Eine d_{10} hat mit der Fläche abgesehen von Punkten auf D_6 und R_9 noch 8 Punkte gemein.

4) Es giebt ∞^2 zu R_9 perspective Ebenenbüschel dritter Ordnung, welche ∞^2 unter einander collinearer Räume einer linearen Mannigfaltigkeit oder eines Raumbündels $|\Sigma_2|$ liefern.*) Man erkennt leicht,

*) Vergl. Reye, lineare Mannigfalt. Journal für Math. Bd. 104, S. 227 und Schur, Ueber die durch coll. Grundgebilde erzeugten Curven. Diese Annal. Bd. 18, S. 7.

dass die Kerncurve c^6 von $|\Sigma_2|$ in unserem Falle mit D_6 zusammenfällt und dass die Ordnungsflächen F^3 durch die Gleichungen $\Phi_1(\lambda)=0$ resp. deren Polaren gegeben sind. Der Raumbündel $|\Sigma_2|$ wird gestützt von ∞^3 collinearen Ebenenbündeln eines linearen Complexes $|S_3|$. In unserem Falle folgt, dass die Punkte der R_9 die Mittelpunkte von ∞^1 collinearen Ebenenbündeln sind, wenn die denselben Ebenenbüscheln dritter Ordnung angehörenden Ebenen als homologe bezeichnet werden. Der Raumbündel ist ganz allgemeiner Natur.

Die Anwendung der Reye'schen Untersuchungen über lineare Mannigfaltigkeiten projectiver und collinearer Grundgebilde auf rationale Raumcurven lässt sich stets durchführen, sobald zu R_n perspective Ebenenbüschel der Ordnung 1, 2 oder 3 existiren.

§ 17.

Curven vierter Ordnung.

Von den Curven grader Ordnung will ich nur die R_4 behandeln.

1) Die Coordinaten von R_4 seien gegeben durch:

$$\varrho x_i = a_{i0}\lambda^4 + a_{i1}\lambda^3 + a_{i2}\lambda^2 + a_{i3}\lambda + a_{i4} = \varphi_i(\lambda).$$

Es giebt hier eine zu den 4 Functionen $\varphi_i(\lambda)$ conjugirte Form $f_1(\lambda)$. Wir nehmen eine zweite Form $f_2(\lambda)$ hinzu und erhalten in den zweireihigen Determinanten der Matrix

$$\left\| \begin{matrix} b_{10}\lambda + b_{11} & b_{11}\lambda + b_{12} & b_{12}\lambda + b_{13} & b_{13}\lambda + b_{14} \\ b_{20}\lambda + b_{21} & b_{21}\lambda + b_{22} & b_{22}\lambda + b_{23} & b_{23}\lambda + b_{24} \end{matrix} \right\| = 0$$

die Gleichungen der zu R_4 perspectiven Ebenenbüschel zweiter Ordnung, wenn wir für $|b_1 b_2|$ setzen $|x a_0 a_3 a_4|$ etc.

Für die zu R_4 perspectiven Ebenenbüschel erster Ordnung erhalten wir die Matrix:

$$\left\| \begin{matrix} b_{20}\lambda + b_{21} & b_{21}\lambda + b_{22} & b_{22}\lambda + b_{23} & b_{23}\lambda + b_{24} \\ b_{10} & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \end{matrix} \right\| = 0.$$

Diese Ebenenbüschel sind sämmtlich perspectiv einer Regelschaar zweiter Ordnung, für deren Gleichung

$$\left| \begin{matrix} b_{10} & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{20} & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \end{matrix} \right| = 0$$

folgt.

Oder ausgerechnet:

$$- |b_1 b_3|^2 + |b_1 b_4|\,|b_1 b_2| + |b_2 b_3|\,|b_0 b_2| - |b_2 b_4|\,|b_0 b_2| + |b_3 b_4|\,|b_0 b_1| + |b_1 b_2|\,|b_2 b_3| = 0. \text{*)}$$

Die Form $f_1(\lambda)$ lässt sich auf ∞^1 Arten durch eine Summe von drei Potenzen linearer Functionen $(\lambda - \mu_q)$ darstellen. Die drei Punkte μ_q von R_4 liegen jedesmal auf einer Geraden (§ 3, 1), einer dreifachen Secante der R_4, welche perspectiv zur Regelschaar zweiter Ordnung ist. Diese Geraden sind zugleich die Träger der zu R_4 perspectiven Ebenenbüschel erster Ordnung. Die Formen dritter Ordnung, durch welche die drei Punkte der R_4 auf einer solchen Secante bestimmt werden, sind die ersten Polaren einer Form vierter Ordnung, welche mit $f_1(\lambda)$ dieselbe Hesse'sche Form hat und dadurch bestimmt ist. Wir bezeichnen sie symbolisch mit a_λ^4.

2) Jede beliebige Form $\overset{3}{F}(\lambda)$ liefert eine zu R_4 perspective Regelschaar dritter Ordnung, zu welcher ein Ebenenbüschel erster Ordnung perspectiv ist. Setzen wir symbolisch:

$$f_1(\lambda) = \alpha_\lambda^4 = \alpha_\lambda'^4; \quad f_2(\lambda) = \beta_\lambda^4; \quad \overset{3}{F}(\lambda) = \gamma_\lambda^3,$$

so erhalten wir die Gleichung dieses Ebenenbüschels in:

$$(\alpha\alpha')^2\,(\alpha\beta)\,(\alpha\gamma)\,(\alpha'\beta)\,(\alpha'\gamma)\,(\beta\gamma)\,\beta_\lambda = 0.$$

Es ist dann ferner durch $(a\gamma)^3\,a_\nu = 0$ der Parameter ν bestimmt, nach welchem a_λ^4 polarisirt werden muss, damit wir in den Wurzeln der Polaren die drei Punkte erhalten, welche der Träger des Ebenenbüschels mit R_4 gemein hat. Wir können dann die Gleichung des Ebenenbüschels auch schreiben:

$$(\alpha\alpha')^2\,(\alpha a)\,(\alpha' a)\,(\alpha\beta)\,(\alpha'\beta)\,(a\beta)\,a_\nu\,\beta_\lambda = 0.$$

Zu den Polaren $a_\lambda^3 a_\nu$ der Form a_λ^4 gehören besondere Regelschaaren dritter Ordnung, zu welchen allen *ein* Ebenenbüschel zweiter Ordnung perspectiv ist. Die Gleichung des Letzteren ist:

$$(a a')^2\,(a\alpha)\,(a\beta)\,(a'\alpha)\,(a'\beta)\,(\alpha\beta)\,\alpha_\lambda\,\beta_\lambda = 0.$$

Der Mittelpunkt dieses Büschels ist der dreifache Punkt der Steiner'schen Fläche, für welche R_4 eine Haupttangentencurve ist.

§ 19.

Ueber die Gattungen rationaler Curven von gegebener Ordnung.

1) In (§ 2, 1) haben wir gezeigt, dass es für jede R_n drei Formen: $\overset{n+r_1}{F}(\lambda)$; $\overset{n+r_2}{F}(\lambda)$; $\overset{n+r_3}{F}(\lambda)$ giebt, zwischen deren Polaren $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung

*) Vergl. Meyer, Apolarität. S. 20.

keine lineare Relation besteht und wobei $r_1 + r_2 + r_3 = n - 6$. Diese drei Formen bestimmen die R_n in projectivem Sinne vollständig. Aus ihnen folgen drei zu R_n perspective Regelschaaren und Ebenenbüschel. Sind die Ordnungen der Regelschaaren l_1, l_2, l_3, diejenigen der Ebenenbüschel g_1, g_2, g_3, so haben wir (§ 7, 3) gefunden:

$$\left.\begin{array}{ll} g_1 = r_1 + 2; & l_1 = g_2 + g_3 \\ g_2 = r_2 + 2; & l_2 = g_3 + g_1 \\ g_3 = r_3 + 2; & l_3 = g_1 + g_2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} l_1 + l_2 + l_3 = 2n, \\ g_1 + g_2 + g_3 = n. \end{array}$$

Wir haben dann ebensoviele Gattungen einer R_n von einander unterscheiden können, als die Zahl n in eine Summe dreier ganzen positiven Zahlen, grösser als Null, zerlegt werden kann. Die Zahl dieser Gattungen ist die grösste ganze Zahl, welche in $\frac{n^2+3}{12}$ sich vorfindet. Selbstverständlich sind alle diese Gattungen der allgemeinsten unter ihnen untergeordnet.

2) Als Beispiel möge die Curve siebenter Ordnung dienen. Wir haben vier Gattungen, welche durch folgende Tabelle veranschaulicht werden:

	r_1	r_2	r_3	l_1	l_2	l_3	g_1	g_2	g_3
I	1	0	0	4	5	5	3	2	2
II	1	1	-1	4	4	6	3	3	1
III	2	0	-1	3	5	6	4	2	1
IV	3	-1	-1	2	6	6	5	1	1

I. Wir haben es mit der allgemeinen R_7 zu thun. Unterarten finden wir in:

a) $\overset{8}{F}(\lambda)$ ist eine Summe von vier Potenzen. Die zu R_7 perspective Regelschaar 4ter Ordnung hat eine einfache gerade Leitlinie.

b) $\overset{8}{F}(\lambda)$ ist eine Summe von drei Potenzen. R_7 hat einen dreifachen Punkt, welcher Spitze eines Kegels ist, in welchen die Regelfläche vierter Ordnung übergeht.

c) $\overset{8}{F}(\lambda)$ ist eine Summe von zwei Potenzen. R_7 erniedrigt sich auf eine R_6.

II. Es giebt ∞^1 zu R_7 perspective Regelschaaren vierter Ordnung, welche alle perspectiv zu demselben Ebenenbüschel erster Ordnung sind. Der Träger des letzteren ist dreifache Linie jeder dieser Regelschaaren und hat mit R_7 sechs Punkte gemein. Sind die Parameter der sechs Punkte gegeben durch $c_\lambda^6 = 0$ und ist ferner:

$$\overset{8}{F}_1(\lambda) = a_\lambda^8; \quad \overset{8}{F}_2(\lambda) = b_\lambda^8,$$

so verschwinden identisch die Beziehungen:

$$(ac)^6 a_\lambda^2 \equiv 0 \quad \text{und} \quad (bc)^6 b_\lambda^2 \equiv 0,$$

wodurch die Coefficienten von c_λ^6 bestimmt sind.

Unter den ∞^1 Formen $\overset{8}{F}(\lambda)$ finden sich, da die Katalektikante von $\overset{8}{F}_1(\lambda) + \mu \overset{8}{F}_2(\lambda)$ in μ von der fünften Ordnung ist, fünf Formen, von welchen jede als Summe von vier Potenzen darstellbar sind. Unter den ∞^1 Regelschaaren vierter Ordnung giebt es daher auch 5, welche eine einfache gerade Leitlinie besitzen.

a) Eine der Formen $\overset{8}{F}(\lambda)$ ist eine Summe von drei Potenzen. Diese liefert einen Kegel vierter Ordnung, welcher zwei Regelschaaren vierter Ordnung mit einer einfachen geraden Leitlinie absorbirt.

b) Zwei der Formen $\overset{8}{F}(\lambda)$ sind je eine Summe von drei Potenzen. R_7 hat zwei dreifache Punkte. Ausser der Verbindungslinie derselben giebt es nur *eine* einfache Secante der R_7.

III. R_7 liegt auf einer Regelschaar dritter Ordnung und ∞^3 Regelschaaren fünfter Ordnung. Alle sind perspectiv zu einem Ebenenbüschel erster Ordnung, dessen Träger R_7 in sechs Punkten schneidet. Die Parameter dieser Punkte seien gegeben in $c_\lambda^6 = 0$. Ist ferner:

$$\overset{9}{F}(\lambda) = a_\lambda^9; \quad \overset{7}{F}(\lambda) = b_\lambda^7,$$

so verschwinden identisch die Beziehungen:

$$(ac)^6 a_\lambda^3 \equiv 0 \quad \text{und} \quad (bc)^6 b_\lambda \equiv 0,$$

wodurch c_λ^6 bestimmt ist.

$\overset{9}{F}(\lambda)$ ist im Allgemeinen eine Summe von fünf Potenzen, die den fünf Punkten entsprechen, welche die einfache Leitgerade der Regelschaar dritter Ordnung mit R_7 gemein hat.

a) Ist $\overset{9}{F}(\lambda)$ eine Summe von vier Potenzen, so hat R_7 einen vierfachen Punkt. Die Regelschaar dritter Ordnung ist ein Kegel.

b) Ist $\overset{9}{F}(\lambda)$ Summe dreier Potenzen, so erniedrigt sich R_7 auf eine R_4.

IV. R_7 liegt auf einer Fläche zweiter Ordnung und hat ∞^1 sechsfache Secanten.

a) Ist $\overset{10}{F}(\lambda)$ eine Summe von fünf Potenzen, so hat R_7 einen fünffachen Punkt; die Regelfläche zweiter Ordnung ist ein Kegel.

b) Ist $\overset{10}{F}(\lambda)$ Summe von vier Potenzen, so erniedrigt sich R_7 auf eine R_3.

Anhang.

1) Wiederholt sind in der vorstehenden Arbeit Matrices von p Horizontalreihen und q Verticalreihen ($p > q$) aufgetreten, deren sämmtliche q-reihigen Determinanten verschwinden. Dabei waren die Elemente der Matrix lineare homogene Functionen einer bestimmten Zahl n von Veränderlichen. Es handelte sich darum die Systeme der Veränderlichen, welche den Gleichungen genügen, zu ermitteln resp. die Zahl der Lösungen anzugeben, wenn die Zahl der Bedingungen gleich ist ($n - 1$). Dieses Problem ist zuerst von Herrn Roberts*) vollständig gelöst worden auch für den allgemeineren Fall, dass die Elemente der Matrix nicht mehr linear in den Veränderlichen sind. Herr Brill hat dann diesen allgemeinen Fall untersucht, um die Bedingungen für das Verschwinden der Determinanten durch andere Bedingungsgleichungen zu ersetzen, welche durch successive Elimination aus den ersten hervorgehen.**) Sind die Elemente der Matrix lineare Functionen der Veränderlichen, so spielen die Bedingungen in der Theorie linearer Mannigfaltigkeiten collinearer Räume eine hervorragende Rolle.***) Herr Reye hat deshalb für besondere Werthe der p und q die Zahl der Lösungen ermittelt.

Ich werde hier bei beliebigen Zahlen p und q auf eine einfache Weise das Problem behandeln. Die Elemente der Matrix seien lineare homogene Functionen der n Variabeln: $x_0, x_1 \ldots x_{n-1}$, welche wir auffassen als die Coefficienten einer Gleichung $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung in μ.

$$\sum_0^{n-1} x_p \mu^{n-1-p} = 0.$$

Dann sind die Grössen x_p die symmetrischen Functionen der Wurzeln $\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_{n-1}$ dieser Gleichung. Die Matrix liefert uns nun im

*) S. Roberts. Sur l'ordre des conditions etc. Journal für Math. Bd. 67. S. 266.

**) Brill. Ueber algebr. Correspondenzen. Diese Annal. Bd. 36. S. 326.

***) Reye. Lineare Mannigfalt. projectiver Grundgebilde. Journal für Math. Bd. 108. S. 108.

Ganzen $\binom{p}{q}$ Gleichungen, welche in diesen symmetrischen Functionen von der Ordnung q sind. Von den Wurzeln μ_q lösen wir eine μ_1 ab und bezeichnen die symmetrischen Functionen der übrigen $\mu_2, \mu_3 \ldots \mu_{n-1}$ mit $y_0, y_1 \ldots y_{n-2}$. Die Zahl der Producte und Potenzen dieser $(n-1)$ Grössen zur q^{ten} Ordnung ist nun gleich:

$$\frac{(q+1)}{1}\frac{(q+2)}{2}\frac{\ldots}{\ldots}\frac{(q+n-2)}{(n-2)} = \binom{q+n-2}{n-2} = \binom{q+n-2}{q}.$$

Ist nun $p = q + n - 2$, so lassen sich diese Producte und Potenzen der y_k gerade aus den vorhandenen Gleichungen eliminiren. Es folgt eine Gleichung, welche in μ_1 von der Ordnung $q\binom{p}{q}$ ist. Die Wurzeln derselben gehören zu je $n-1 = p-q+1$ zu einem Systeme der $x_0, x_1 \ldots x_{n-1}$. Solcher Systeme giebt es folglich:

$$\frac{q}{p-q+1}\binom{p}{q} = \binom{p}{q-1},$$

für welche alle q-reihigen Determinanten der Matrix verschwinden.

Ist n aber grösser als $(p-q+2)$, so ergeben die $x_0, x_1 \ldots x_{n-1}$ noch unendlich viele Systeme, welche eine Mannigfaltigkeit von $(n-p+q-2)$ Dimensionen und der Ordnung $\binom{p}{q-1}$ bilden; d. h. die Zahl der Lösungen wird eine endliche gleich $\binom{p}{q-1}$, wenn wir zu den Bedingungen noch $(n-p+q-2)$ lineare Gleichungen zwischen den $x_0, x_1 \ldots x_{n-1}$ hinzufügen.

2) Wir wollen folgenden Satz beweisen:

Besteht zwischen den n Polaren $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung der drei Formen $\overset{n+r_1}{F}(\lambda)$, $\overset{n+r_2}{F}(\lambda)$, $\overset{n+r_3}{F}(\lambda)$, wobei $r_1 + r_2 + r_3 = n - 6$ ist, *eine* lineare Relation mit constanten Coefficienten, so lassen sich die drei Formen linear zusammensetzen aus den Polaren zweier Formen $\overset{n+s_1}{F}(\lambda)$ und $\overset{n+s_2}{F}(\lambda)$, wobei $s_1 + s_2 = n - 5$ ist, und das System der ∞^{n-4} Polaren n^{ter} Ordnung der drei ersten Formen ist identisch mit dem Systeme der ∞^{n-4} Polaren n^{ter} Ordnung der beiden letzten Formen.

Beweis. Die drei ersten Formen liefern in ihren Polaren $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung $r_1 + 2 + r_2 + 2 + r_3 + 2 - 1 = n - 1$ linear unabhängige Formen $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, zu welchen *eine* conjugirte Form $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung existirt.

Die Wurzeln der letzteren seien $\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_{n-1}$.

Dann haben wir folgende Darstellung der drei ersten Formen:

$$\overset{n+r_1}{F}(\lambda) = \sum_1^{n-1}{}^p \varrho_p (\lambda - \mu_p)^{n+r_1}; \qquad \overset{n+r_2}{F}(\lambda) = \sum_1^{n-1}{}^p \sigma_p (\lambda - \mu_p)^{n+r_2};$$

$$\overset{n+r_3}{F}(\lambda) = \sum_1^{n-1} \tau_p (\lambda - \mu_p)^{n+r_3},$$

wobei die Grössen ϱ_p, σ_p, τ_p vollkommen bestimmt sind.

Wir setzen nun:

$$\overset{n+s_1}{F}(\lambda) = \sum_1^{n-1}{}^p h_p (\lambda - \mu_p)^{n+s_1}; \qquad \overset{n+s_2}{F}(\lambda) = \sum_1^{n-1}{}^p k_p (\lambda - \mu_p)^{n+s_2}$$

und suchen die Constanten h_p und k_p sowie s_1 und s_2 den Bedingungen unseres Satzes gemäss zu bestimmen.

Sind $\overset{s_1-r_1}{\chi_1}, \overset{s_2-r_1}{\varphi_1}; \overset{s_1-r_2}{\chi_2}, \overset{s_2-r_2}{\varphi_2}; \overset{s_1-r_3}{\chi_3}, \overset{s_2-r_3}{\varphi_3}$ Functionen von (λ), deren Ordnungen durch die über die Zeichen gesetzten Zahlen bestimmt seien, so haben wir folgende Gleichungen zu erfüllen.

$$\left.\begin{aligned} h_p \chi_1(\mu_p) + k_p \varphi_1(\mu_p) &= \varrho_p \\ h_p \chi_2(\mu_p) + k_p \varphi_2(\mu_p) &= \sigma_p \\ h_p \chi_3(\mu_p) + k_p \varphi_3(\mu_p) &= \tau_p \end{aligned}\right\} \text{ für } p = 1, 2 \ldots (n-1).$$

Setzen wir nun:

$$\begin{aligned} U_1(\lambda) &= \chi_2(\lambda)\,\varphi_3(\lambda) - \chi_3(\lambda)\,\varphi_2(\lambda), \\ U_2(\lambda) &= \chi_3(\lambda)\,\varphi_1(\lambda) - \chi_1(\lambda)\,\varphi_3(\lambda), \\ U_3(\lambda) &= \chi_1(\lambda)\,\varphi_2(\lambda) - \chi_2(\lambda)\,\varphi_1(\lambda), \end{aligned}$$

so sind die Functionen U_1, U_2, U_3 von den Ord. resp.: $r_1 + 1$, $r_2 + 1$, $r_3 + 1$, es folgen die Gleichungen:

$$\begin{aligned} &\varrho_p U_1(\mu_p) + \sigma_p U_2(\mu_p) + \tau_p U_3(\mu_p) = 0 \text{ für } p = 1, 2 \ldots (n-1), \\ &\varphi_1(\lambda)\, U_1(\lambda) + \varphi_2(\lambda)\, U_2(\lambda) + \varphi_3(\lambda)\, U_3(\lambda) \equiv 0, \\ &\chi_1(\lambda)\, U_1(\lambda) + \chi_2(\lambda)\, U_2(\lambda) + \chi_3(\lambda)\, U_3(\lambda) \equiv 0. \end{aligned}$$

Die Functionen U_1, U_2, U_3 sind durch die ersten $(n-1)$ Gleichungen bestimmt, denn wir haben in ihren Coefficienten $r_1 + r_2 + r_3 + 6 = n$ Grössen zur Verfügung. Wir benutzen, unter der Voraussetzung $s_2 \leqq s_1$, die zweite Gleichung zur Bestimmung der Functionen φ_1, φ_2, φ_3. Die linke Seite derselben ist in λ von der Ordnung $(s_2 + 1)$ und in den Coefficienten der φ_1, φ_2, φ_3 haben wir über $(3s_2 - n + 9)$ Grössen zu verfügen.

Ist deshalb bei gradem n

$$3s_2 - n + 8 = s_2 + 2 \quad \text{oder:} \quad s_2 = \frac{n-6}{2}; \quad s_1 = \frac{n-4}{2},$$

so sind die Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ eindeutig bestimmt und die Grössen h_p zu berechnen aus:

$$h_p U_3(\mu_p) = \varrho_p \varphi_2(\mu_p) - \sigma_p \varphi_1(\mu_p) \text{ etc.}$$

Die Functionen χ_1, χ_2, χ_3 sind nicht vollständig bestimmt, ebensowenig wie die Grössen k_p, da eine $(s_1 - s_2)^{\text{te}}$ Polare von $\overset{n+s_1}{F}$, ohne die Bedeutung der $\overset{n+s_2}{F}$ zu ändern, zu letzterer hinzugefügt werden kann. Ist aber n ungerade, so erhalten wir für $s_1 = s_2 = \frac{n-5}{2}$, ∞^1 Lösungen für die Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, welche diejenigen für χ_1, χ_2, χ_3 mitenthalten. Nur, wenn zwischen den Functionen $\overset{n+r_1}{F}, \overset{n+r_2}{F}, \overset{n+r_3}{F}$ ausser der im Satze vorgesehenen, noch andere Bedingungen existiren, kann $s_1 > \frac{n-4}{2}$ und $s_2 < \frac{n-6}{2}$ werden.

Die drei ersten Formen liefern im Ganzen $(n-3)$ linear unabhängige Polaren n^{ter} Ordnung; dieselbe Anzahl erhalten wir in den Polaren n^{ter} Ordnung der beiden zweiten Formen. Die Systeme der Polaren n^{ter} Ordnung beider Formenreihen sind also identisch. —

Aachen, Juni 1891.

Die einfachen Gruppen im ersten und zweiten Hundert der Ordnungszahlen.

Von

Otto Hölder in Tübingen.

Einleitung.

Es wäre von dem grössten Interesse, wenn eine Uebersicht der sämmtlichen einfachen Gruppen von einer endlichen Zahl von Operationen gegeben werden könnte. Ich lege dabei die abstracte Auffassung zu Grunde, vermöge welcher von der speciellen Darstellung der Gruppe abgesehen wird, also holoedrisch isomorphe Gruppen als identisch anzusehen sind*). Man kennt bereits verschiedene Typen einfacher Gruppen, deren jeder unendlich viele Individuen umfasst. Dahin gehören einmal die Gruppen von Primzahlordnung, die überhaupt keine Untergruppe besitzen; dann die alternirende Gruppe, d. h. die Gesammtheit der geraden Vertauschungen von n Dingen, die einfach ist, wenn $n > 4$. Ausserdem hat Herr C. Jordan**) noch andere einfache Gruppen aufgestellt, die aus der „linearen Gruppe", der „abelschen" und den beiden „hypoabelschen" Gruppen durch Zerlegung hervorgehen. Man kann also sechs bekannte Typen von einfachen Gruppen zählen, es ist aber nicht ohne Weiteres zu übersehen, in wie weit diese verschieden sind. Ich bemerke in dieser Hinsicht nur, dass die Gruppe der 60 geraden Vertauschungen von 5 Dingen, oder, was dasselbe ist, die Ikosaedergruppe auch dem dritten Typus angehört. Dieser gleiche Typus liefert zweimal eine Gruppe von 168 Operationen, für zwei verschiedene Specialisirungen der noch willkürlichen Zahlen. Es giebt aber, wie aus der folgenden Untersuchung hervorgehen wird, vom abstracten Standpunkt betrachtet,

*) Hinsichtlich der Definition einer abstracten Gruppe vergl. man: Frobenius, Journal für Math. Bd. 100, p. 180, Dyck, diese Ann. Bd. XX, p. 1, Weber ebendaselbst p. 302.

**) Traité des substitutions et des équations algébriques. Paris 1870, p. 91—213.

nur eine einfache Gruppe der Ordnung 168, so dass also die beiden erhaltenen Gruppen übereinkommen müssen.

Durch solche Umstände ist die Uebersicht erschwert; ausserdem mögen vielleicht noch einfache Gruppen ganz anderer Art existiren.

In dem Folgenden habe ich nun die Möglichkeit einfache Gruppen zu bilden von Ordnungszahl zu Ordnungszahl geprüft. Die erste Veranlassung dazu gab mir die unbewiesene Bemerkung von Galois, dass die kleinste zusammengesetzte Ordnungszahl einer einfachen Gruppe gleich 60 ist*). Ich habe die Untersuchung bis zur Ordnung 200 fortgesetzt und stehe nicht an, sie zu veröffentlichen, obwohl sie mir keine bis jetzt unbekannte einfache Gruppe geliefert hat. *Es giebt in dem genannten Zahlgebiet nur zwei einfache Gruppen mit zusammengesetzter Ordnungszahl, die von* 60 *und die von* 168 *Operationen,* welche letztere der Modulargleichung für die Transformation 7ter Ordnung der elliptischen Functionen angehört. Es ist für manche Anwendungen der Gruppentheorie von Werth, die andern in diesen Rahmen fallenden Gruppen mit zusammengesetzter Ordnungszahl als zusammengesetzt erwiesen zu haben. Auch dürfte die hier benutzte Methode von einigem Interesse sein, so lange man nicht über eine bessere verfügt, die geeignet ist, das Problem allgemein zu erledigen.

Ich erwähne noch die folgende Consequenz aus dem angeführten Resultat. *Alle Gruppen, deren Ordnung nicht grösser ist als* 200 *und verschieden von* 60, 120, 168, 180, *sind auflösbar, entsprechen also Gleichungen, die durch Wurzelzeichen gelöst werden können.* Es sind nämlich die Factoren der Zusammensetzung einer beliebigen Gruppe Ordnungszahlen von einfachen Gruppen**). Eine nichtauflösbare Gruppe muss nun mindestens einen Factor der Zusammensetzung haben, der nicht Primzahl ist***), somit mindestens einen Factor aus der Reihe 60, 168 u. s. w.

§ 1.

Die zur Untersuchung nothwendigen allgemeinen Hilfssätze.

Das wichtigste Hilfsmittel bei diesen Betrachtungen bilden die Sätze des Herrn Sylow†). Nach diesen Sätzen ist jede Gruppe

*) Liouville'sches Journal, Bd. XI, p. 409.

**) Mathematische Annalen Bd. 34, p. 30 bis 33. Vgl. auch C. Jordan: Bulletin de la société mathématique de France. T. I, p. 48.

***) Cf. Jordan: Traité des substitutions etc., p. 387, Théorème III.

†) Mathematische Annalen Bd. 5, p. 584. Es ist zu bemerken, dass die Abhandlung des Herrn Sylow von Buchstabenvertauschungen handelt. Dass aber das Resultat von der Darstellung der Gruppe unabhängig ist, kann schon daraus ersehen werden, dass jede Gruppe durch Vertauschungen von Buchstaben ausgedrückt werden kann. (Man vergl. Frobenius und Stickelberger, Journal für Mathematik Bd. 86, p. 230 Anm. und Dyck, Math. Ann. Bd. 22, p. 84).

zusammengesetzt, deren Ordnung ein Product von mehreren gleichen Primzahlen ist, und zwar ist eine solche Gruppe auflösbar. Ist ferner die Ordnung n einer beliebigen Gruppe G durch die Primzahlpotenz p^ϱ theilbar, ohne es durch $p^{\varrho+1}$ zu sein, so giebt es genau $\varkappa p + 1$ Untergruppen der Ordnung p^ϱ, die sämmtlich unter einander gleichberechtigt sind, und es ist $n = p^\varrho \cdot \nu \cdot (\varkappa p + 1)$.

Hieraus will ich noch eine Folgerung ziehen. Es seien

$$\mathsf{H}_1, \mathsf{H}_2, \ldots \mathsf{H}_r$$

die sämmtlichen Untergruppen der Ordnung p^ϱ, so dass also

$$r = \varkappa p + 1$$

ist. Transformirt man diese Gruppen mit irgend einer Operation der Gesammtgruppe G, so tauschen sie sich unter einander um, und zwar kann aus jeder Gruppe H_α jede andere H_β werden, weil alle Gruppen H gleichberechtigt sind. Man kann so jeder Operation von G eine Vertauschung der Buchstaben $\mathsf{H}_1, \mathsf{H}_2, \ldots \mathsf{H}_r$ zuordnen und erhält dann eine *transitive*, der Gruppe G isomorphe Gruppe von Buchstabenvertauschungen. Ist nun dieser Isomorphismus ein *meroedrischer* *), so entsprechen der identischen Substitution

$$\begin{pmatrix} \mathsf{H}_1 & \mathsf{H}_2 & \ldots & \mathsf{H}_r \\ \mathsf{H}_1 & \mathsf{H}_2 & \ldots & \mathsf{H}_r \end{pmatrix}$$

mehrere Operationen von G, die eine ausgezeichnete Untergruppe von G ausmachen. Eine Ausnahme bildet der Fall $r = 1$; in diesem würde die ausgezeichnete Untergruppe mit der Gesammtgruppe zusammenfallen; es würde aber in diesem Fall die Gruppe der Ordnung p^ϱ selbst eine ausgezeichnete Untergruppe von G sein**). Nimmt man also die Voraussetzung hinzu, dass die Gruppe G einfach sein soll, so muss der in Rede stehende Isomorphismus holoedrisch sein, die Gruppe G ist also darstellbar als transitive Gruppe von Vertauschungen von $\varkappa p + 1$ Buchstaben. Es muss also auch $(\varkappa p + 1)!$ durch n theilbar sein. So erhält man folgende Sätze:

Hilfssatz I. *Die Ordnung n einer Gruppe sei eine zusammengesetzte Zahl und durch die Primzahl p theilbar, es sei s der grösste Theiler von n, der $\equiv 1$ ist mod. p; wofern $s!$ durch n nicht theilbar ist, so ist die Gruppe zusammengesetzt.*

Hilfssatz II. *Ist die Ordnung n einer einfachen Gruppe durch die Primzahl p theilbar, und ist unter den Theilern von n, die $\equiv 1$ sind mod. p, genau einer t, für den $t!$ ein Vielfaches von n ist, so*

*) Jordan: Traité des subst. p. 56.

**) Diese könnte auch mit der Gesammtgruppe G identisch sein, wenn nämlich $\varkappa = 0$ und $\nu = 1$, dann wäre aber G wieder zusammengesetzt, ausser, wenn $n = p$, was ich ausschliesse.

kann die Gruppe als transitive Gruppe von Vertauschungen von t Buchstaben dargestellt werden.

Ich werde ausserdem noch folgenden Satz gebrauchen:

Hilfssatz III. *Es sei die Ordnung n einer Gruppe durch die Primzahlpotenz p^ϱ theilbar, ohne es durch $p^{\varrho+1}$ zu sein, und es sei $n = p^\varrho \cdot m$, wo $m > 1$. Wenn die Gruppe eine Operation von der Ordnung p^ϱ enthält, und p^ϱ grösser ist als der grösste von m verschiedene Theiler von m, so ist die Gruppe zusammengesetzt.*

Der letzte Satz lässt sich folgendermassen beweisen:

Die Gruppe werde mit G bezeichnet. Es sei S die vorausgesetzte Operation von der Ordnung p^ϱ, und H_1 die aus den Potenzen von S bestehende Untergruppe. H_1 ist dann eine jener r Untergruppen der Ordnung p^ϱ und r ein Theiler von m. Ist $r = 1$, so ist H_1 eine ausgezeichnete Untergruppe, also die Gruppe G zusammengesetzt. Im andern Fall, $r > 1$, ist G wieder mit einer Gruppe von Vertauschungen von r Buchstaben isomorph, also entweder zusammengesetzt, oder mit der Buchstabengruppe holoedrisch isomorph. Dieser Fall allein ist weiter zu discutiren. Man denke sich jetzt die Operation S durch die r Buchstaben dargestellt. Da S die Ordnung p^ϱ besitzt, muss mindestens einer der Buchstabencyklen, aus denen S besteht, p^ϱ Buchstaben enthalten es ist also

$$r \geqq p^\varrho.$$

Nun ist aber nach Voraussetzung jeder von m verschiedene Theiler von m kleiner als p^ϱ, also, da r Theiler von m ist,

$$r = m.$$

Man hat also gerade m Gruppen der Ordnung p^ϱ, die alle in der Gruppe G gleichberechtigt sind und mit

$$H_1, H_2, \ldots H_m$$

bezeichnet werden mögen. Jede dieser Gruppen besteht aus den Potenzen einer Operation und enthält Operationen der Ordnung p^ϱ in der Anzahl

$$\varphi(p^\varrho) = p^{\varrho-1}(p-1).$$

Nimmt man alle Operationen der Ordnung p^ϱ aus allen diesen Gruppen, so sind sie sämmtlich verschieden; stimmte nämlich eine Operation der Ordnung p^ϱ aus H_1 mit einer Operation derselben Ordnung aus H_2 überein, so könnten H_1 und H_2 nicht von einander verschieden sein. Also enthält die Gruppe G jedenfalls $m \cdot p^{\varrho-1} \cdot (p-1)$ Operationen der Ordnung p^ϱ.

Untersuchen wir jetzt die Zahl der Operationen von der Ordnung p^σ, wo $\sigma < \varrho$ ist. Die Gruppe H_1 enthält $\varphi(p^\sigma) = p^{\sigma-1}(p-1)$ Operationen der Ordnung p^σ. Jede von diesen Operationen ist eine Potenz von jeder andern von ihnen, z. B. von $S^{p^{\varrho-\sigma}}$. Die *sämmtlichen* Potenzen dieser letzten Operation bilden eine Gruppe J_1 von der Ordnung p^σ, und diese besteht aus den sämmtlichen Operationen von H_1, deren Ordnung nicht grösser ist als p^σ. Man findet so zu jeder Gruppe H_α eine zugehörige Gruppe J_α von der Ordnung p^σ. Die Gruppen

$$J_1, J_2, \ldots J_m$$

sind sämmtlich gleichberechtigt. Es geht z. B. die Gruppe H_1 durch Transformation mit einer Operation U der Gruppe G in H_2 über; es müssen aber dabei auch die Operationen von H_1, deren Ordnung nicht grösser als p^σ ist, in die Operationen von H_2 übergehen, deren Ordnung $\leqq p^\sigma$; somit wird J_2 aus J_1 erhalten durch Transformation mit der Operation U. Es kommt auch jede Gruppe, die in der Gruppe G mit J_1 gleichberechtigt ist, in der Reihe $J_1, J_2, \ldots J_m$ vor. Ist nämlich Γ eine Gruppe, die aus J_1 durch Transformation mit der Operation V erhalten wird, und führt V die Gruppe H_1 in H_μ über, so muss V auch J_1 in J_μ überführen, und es ist also Γ mit J_μ identisch.

Es fragt sich noch ob die Gruppen

$$J_1, J_2, \ldots J_m$$

von einander verschieden sind. Nehmen wir an, die Gruppen $J_1, J_2, \ldots J_\nu$ seien identisch, und die andern von diesen verschieden. Es sei α_1 von $1, 2, \ldots \nu$ verschieden. Nun muss es eine Operation W geben, die H_1 in H_{α_1} überführt, diese selbe Operation führe $\mathsf{H}_2, \ldots \mathsf{H}_\nu$ in $\mathsf{H}_{\alpha_2}, \ldots \mathsf{H}_{\alpha_\nu}$ über. Es werden dann $J_1, J_2, \ldots J_\nu$ durch Transformation mit W in $J_{\alpha_1}, J_{\alpha_2}, \ldots J_{\alpha_\nu}$ übergehen. Diese letzteren Gruppen sind also identisch, und die Indices $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\nu$, die jedenfalls von einander verschieden sind, sind somit auch von $1, 2, \ldots \nu$ verschieden. Man kann diesen Schluss fortsetzen und findet, dass die Gruppen

$$J_1, J_2, \ldots J_m$$

sich in λ Classen von je ν Gruppen ordnen müssen, so dass alle Gruppen einer Classe identisch sind, und $m = \lambda\nu$. Es giebt also genau λ mit J_1 gleichberechtigte Gruppen, und λ ist ein Theiler von m. Man wiederholt jetzt die früheren Schlüsse. Ist $\lambda = 1$, so ist J_1 eine ausgezeichnete Untergruppe von G. Ist $\lambda > 1$, so besteht Isomorphismus zwischen G und einer transitiven Gruppe von Substitutionen von λ Buchstaben; es ist dann entweder G zusammengesetzt, oder es gilt von λ dasselbe wie oben von r, d. h. man findet

$$\lambda = m.$$

Es ist also nur der Fall weiter zu behandeln, wo die Gruppen

$$J_1, J_2, \ldots J_m$$

verschieden sind.

Jede dieser Gruppen besteht aus den Potenzen einer ihrer Operationen von der Ordnung p^σ. Es sind desshalb alle Operationen der Ordnung p^σ, die in diesen m Gruppen enthalten sind, verschieden, diese sind aber nichts Anderes als die Operationen der Ordnung p^σ aus den Gruppen

$$H_1, H_2, \ldots H_m$$

und sind in der Anzahl

$$m \cdot p^{\sigma-1}(p-1).$$

Man findet so, dass alle Operationen der Gruppen

$$H_1, H_2, \ldots H_m,$$

mit Ausnahme der Identität, verschieden sind. Diese Gruppen liefern also

$$m(p^\varrho - 1)$$

Operationen, deren Ordnung gleich einer Potenz von p ist.

Ausser diesen enthält die Gesammtgruppe G noch m Operationen. Es sind nun zwei Fälle zu unterscheiden. Erstens: Es sei m eine Primzahlpotenz, $m = q^\tau$. Es muss dann nach dem Sylow'schen Satze eine Untergruppe F von der m^{ten} Ordnung existiren. Alle Operationen von F, ausser der Identität, haben zur Ordnung eine Potenz von q, also müssen jene m Operationen, die wir übrig behalten haben, bestehen aus der Identität und aus $m - 1$ Operationen, die eine Potenz von q zur Ordnungszahl haben. Zugleich sind diese $m - 1$ die sämmtlichen mit dieser Eigenschaft behafteten Operationen von G. Daraus folgt, dass jene m Operationen in sich übergehen, wenn sie mit einer beliebigen Operation der Gesammtgruppe transformirt werden, d. h. F ist in der Gesammtgruppe G ausgezeichnet enthalten.

Es bleibt noch der Fall übrig, in welchem m durch verschiedene Primzahlen $q, q_1, \ldots$ theilbar ist. Von diesen möge q die grösste sein. Es giebt dann nach dem Satz von Cauchy Operationen von der Ordnung q, q_1 u. s. w.; es sind diese alle unter jenen m übriggebliebenen Operationen zu suchen, von denen aber jetzt nicht behauptet werden kann, dass sie eine Gruppe bilden. Die Zahl der im Ganzen vorhandenen Operationen von der Ordnung q ist kleiner als m. Da nun allemal $q-1$ Operationen der Ordnung q einer und derselben Untergruppe der Ordnung q angehören, so kann G nicht ganz $\frac{m}{q-1}$ solcher Untergruppen enthalten. Sei K eine Untergruppe der Ordnung q, so ist a fortiori die Anzahl a der mit K gleichberechtigten kleiner als $\frac{m}{q-1}$, also kleiner als $\frac{m}{q_1}$, somit auch kleiner als der grösste von m verschiedene Theiler von m. Es ist nun ein mehrfach schon angewendeter Schluss zu wiederholen; entweder ist die Gruppe zusammengesetzt oder sie ist als transitive Gruppe von Vertauschungen von a Buchstaben darstellbar. Die letzte Annahme ist aber widersprechend, weil p^ϱ grösser angenommen wurde als der grösste von m verschiedene Theiler von m, und die Gruppe eine Substitution der Ordnung p^ϱ enthalten soll, die aus a Buchstaben sich nicht bilden lässt.

Damit ist der Hilfssatz III vollständig bewiesen. Setzt man $\varrho = 1$, so folgt die Existenz einer Operation von der Ordnung p^ϱ aus dem Cauchy'schen Satz, und es ergiebt sich der

Zusatz. *Ist die Ordnung einer Gruppe gleich $p.m$, wo m von Eins verschieden und durch die Primzahl p nicht theilbar ist, und ist p grösser als der grösste von m verschiedene Theiler von m, so ist die Gruppe zusammengesetzt.*

Ich betrachte noch den Fall, dass die Ordnung einer Gruppe gleich dem Product von drei Primzahlen ist; $n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$. Ist zunächst $p_1 = p_2 = p_3$, so ist die Gruppe zusammengesetzt. Ausserdem sind noch drei Fälle zu unterscheiden: $p_1 = p_2 > p_3$, $p_1 > p_2 = p_3$ und $p_1 > p_2 > p_3$. Im ersten dieser Fälle kann man den Hilfssatz I verwenden, indem man p mit p_1 und p_2 identificirt; die Gruppe ist also zusammengesetzt.*) In den beiden andern Fällen ist der Zusatz zum Hilfssatz III anzuwenden. Man setzt $p = p_1$ und $m = p_1 \cdot p_2$ und findet wieder, dass die Gruppe zusammengesetzt ist.

Ist die Ordnung n das Produst aus zwei Primzahlen, so erhält man unmittelbar dasselbe Resultat. Es gilt also allgemein:

Lehrsatz IV. *Eine Gruppe, deren Ordnung gleich dem Product von zwei oder drei, gleichen oder ungleichen, Primzahlen ist, ist auflösbar.*

§ 2.

Weitere Sätze über Buchstabenvertauschungen.

Ob es sich gleich hier um die abstracten Gruppen handelt, wird doch deren Darstellung durch Buchstabenvertauschungen **) im Folgenden

---

*) Vgl. Sylow a. a. O. p. 589, Théorème V.

**) Hinsichtlich der Bezeichnung von Buchstabenvertauschungen herrscht nicht die wünschenswerthe Uebereinstimmung. Ich stelle im Folgenden die Substitutionen so dar, dass z. B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 5)\ (3\ 4)$$

die Substitution ausdrückt, die 1 in 2, 2 in 5, 5 in 1, 3 in 4 und 4 in 3 überführt. Das Product ST zweier Substitutionen wird entsprechend der Formel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

gebildet. Um die Substitution S mittelst der Substitution T zu transformiren, hat man nur in der Darstellung von S die Vertauschung T auszuführen, und man erhält dann: $T^{-1}ST$.

eine Rolle spielen, und es werden dabei einige besondere Sätze nützlich sein. Zunächst erinnere ich daran, dass jede einfache Gruppe von Buchstabenvertauschungen, deren Ordnung grösser als zwei ist, ausschliesslich aus geraden Substitutionen bestehen muss, weil im andern Fall die geraden Substitutionen der Gruppe eine ausgezeichnete Untergruppe von halb so grosser Ordnungszahl ausmachen.

Hat man ferner eine Reihe von Buchstabenvertauschungen $S, T, U, \ldots$, und wird eine Gruppe G definirt durch die Gesammtheit der Substitutionen, die aus $S, T, U, \ldots$ sich zusammensetzen lassen, so hat man zuerst die *Transitivität* der Gruppe zu beurtheilen. Man greife zu diesem Zweck irgend einen Buchstaben, etwa x_1, heraus und suche dann alle die Buchstaben, die in den Substitutionen $S, T, U, \ldots$ an Stelle von x_1 treten. Nun suche man alle Buchstaben, die in denselben Substitutionen an Stelle der schon gefundenen Buchstaben treten, und fahre so fort, bis dieser Process abgeschlossen ist. Man findet so die Gesammtheit der Buchstaben, die in der Gruppe G an Stelle von x_1 treten können. Diese Buchstaben bilden ein System. Es können mehrere solcher Systeme vorhanden sein, so dass nun jeder Buchstabe eines Systems an Stelle jedes andern desselben Systems, aber niemals an Stelle eines Buchstaben eines andern Systems treten kann; man nennt die Gruppe dann *intransitiv*, und die Systeme sind die „Systeme der Intransitivität". Bilden alle Buchstaben ein einziges System, so ist die Gruppe *transitiv*.

Die vorstehende Bemerkung macht den folgenden Satz zur Anwendung sehr geeignet:

Lehrsatz V. *Jede transitive Gruppe von Buchstabenvertauschungen, die aus gewissen Cirkularsubstitutionen dritter Ordnung zusammengesetzt werden kann, ist mit der alternirenden Gruppe identisch.* *)

Um dies zu beweisen, nehme ich zuerst zwei Substitutionen an, die zwei Buchstaben gemeinsam enthalten, (abc) und (dbc). Man bildet daraus

$$(dbc)^{-1}\,(abc)\,(dbc) = (acd),$$
$$(dbc)\,(abc)\,(dbc)^{-1} = (adb)$$

und erhält so alle Cirkularsubstitutionen 3ter Ordnung, die aus a, b, c, d gebildet werden können. Sind aber zwei Substitutionen gegeben so wie (abc) und (ade), die einen Buchstaben gemeinsam enthalten, so bilde man

*) Gewisse, viel gebrauchte Sätze erscheinen als specielle Fälle von diesem. Man vergl. z. B. Netto, Substitutionentheorie und ihre Anwendung auf die Algebra, Leipzig 1882, p. 35, Lehrsatz IX. Nahe verwandt mit dem Satz des Textes ist die Prop. V des Herrn Askwith im Quaterly Journal of Mathematics vol. XXIV, p. 121.

$$(ade)^{-1}\,(abc)\,(ade) \quad = (dbc),$$
$$(ade) \quad (abc)\,(ade)^{-1} = (ebc).$$

Man hat also die drei Substitutionen (abc), (dbc) und (ebc); nimmt man von diesen je zwei zusammen, so liefert das unmittelbar vorhergehende Verfahren alle Cirkularsubstitutionen aus dreien der Buchstaben a, b, c, d, e mit Ausnahme von (ade), was von vornherein gegeben war.

Sollen nun die Cirkularsubstitutionen $C_1, C_2, C_3, \ldots$ dritter Ordnung eine transitive Gruppe von Vertauschungen von m Buchstaben erzeugen, so müssen zwei der Substitutionen, etwa C_1 und C_2, einen oder zwei Buchstaben gemein haben. Man kann dann aus C_1 und C_2 nach dem Vorigen alle Substitutionen von der Form $(\xi\eta\zeta)$ zusammensetzen, die aus den Buchstaben A von C_1 und C_2 sich bilden lassen. Nun muss unter den Substitutionen C auch eine sein, die einen der Buchstaben A und zugleich einen neuen Buchstaben enthält, denn sonst könnte die erzeugte Gruppe nicht transitiv sein. Es sei C_3 eine solche Substitution

$$C_3 = (agh),$$

wo a zu den Buchstaben A gehört, g aber nicht. Sind b und c zwei andere Buchstaben A, so setzt sich aus C_1 und C_2 die Substitution (abc) zusammen, und diese muss zusammen mit C_3 $\big($oder $(agh)\big)$ auch (bcg) und (abg) ergeben. Man erhält also alle Cirkularsubstitutionen 3^{ter} Ordnung, die g und zwei der Buchstaben A enthalten, somit alle Cirkularsubstitutionen 3^{ter} Ordnung aus den Buchstaben A und g. Man kann so fortfahren, zu schliessen, und fügt stets einen weiteren Buchstaben hinzu. Schliesslich ergiebt sich, dass alle geraden Substitutionen der m Buchstaben aus $C_1, C_2, C_3, \ldots$ zusammengesetzt werden können.

Ich nehme jetzt eine *einfache* transitive Gruppe an, die eine Cirkularsubstitution C von der dritten Ordnung enthalten soll. Man setze aus C und aus den mit C gleichberechtigten Substitutionen eine Gruppe zusammen, so muss diese in der Gesammtgruppe ausgezeichnet enthalten, also mit der als einfach vorausgesetzten Gesammtgruppe identisch sein. Durch Anwendung des letzten Lehrsatzes findet man nun den

Hilfssatz VI. *Jede einfache transitive Gruppe von Vertauschungen von m Buchstaben, die eine Cirkularsubstitution dritter Ordnung enthält, ist mit der alternirenden Gruppe von der Ordnung $\frac{1}{2}m!$ identisch.*

Es handele sich jetzt um Vertauschungen von 6 Buchstaben, und es sei irgend eine einfache und transitive Gruppe G zu bestimmen.

Die Ordnung einer solchen Gruppe ist durch 6 theilbar*), und es enthält somit G eine Operation von der dritten Ordnung. Ist diese Operation eine Circularsubstitution, so besteht G aus den 360 geraden Substitutionen. Im andern Fall enthält die Gruppe G eine Substitution von der Form

$$(abc)\ (def).$$

Nun giebt es bekanntlich Functionen von 6 Grössen, die sechswerthig sind, ohne in Beziehung auf fünf der Argumente symmetrisch zu sein.**) Es sei φ_1 eine solche Function von a, b, c, d, e, f,

$$\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots\ \varphi_6$$

seien die Werthe, die sie vermöge der 720 Substitutionen annimmt. Jede der Functionen φ bleibt bei einer Gruppe von 120 Substitutionen ungeändert, und keine dieser Gruppen enthält eine Circularsubstitution von der dritten Ordnung.***) Führt man in den Functionen

$$\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots\ \varphi_6$$

alle 6! Substitutionen der Buchstaben a, b, c, d, e, f aus, so erhält man zu jeder dieser Substitutionen eine Substitution der Buchstaben $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_6$. Es giebt keine von der Identität verschiedene Substitution von a, b, c, d, e, f, die alle Functionen φ ungeändert lässt, weil die Gesammtheit der Vertauschungen von 6 Buchstaben ausser der alternirenden Gruppe keine ausgezeichnete Untergruppe besitzt. Man kann daraus schliessen, dass die erhaltenen Substitutionen von $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_6$ alle verschieden sind.

Damit ist ein holoedrischer Isomorphismus definirt zwischen der Gesammtheit B der 6! Substitutionen von a, b, c, d, e, f und der Gesammtheit Φ der Substitutionen der Buchstaben $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$. Die Substitution (abc) ändert jede der Functionen φ, also entspricht ihr in Φ eine Substitution, die jeden Buchstaben ändert und von der dritten Ordnung ist, also die Form

$$(\varphi_{\alpha_1} \varphi_{\alpha_2} \varphi_{\alpha_3})\ (\varphi_{\alpha_4} \varphi_{\alpha_5} \varphi_{\alpha_6})$$

haben muss. Aus dem holoedrischen Isomorphismus folgt, dass einer ganzen Classe von gleichberechtigten Substitutionen der Gruppe B eine Classe von gleichberechtigten Substitutionen der Gruppe Φ entsprechen muss. Es entspricht also dem Typus der Substitution (abc) der Typus der Substitution $(\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3)\ (\varphi_5 \varphi_6 \varphi_4)$, und also auch dem Typus der Substitution $(abc)\ (def)$ der Typus der Substitution $(\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3)$.

Nun handelt es sich aber um eine Gruppe G von Vertauchungen der Buchstaben a, b, c, d, e, f, welche eine Substitution $(abc)\ (def)$

---

*) Cf. J. A. Serret: Cours d'algèbre supérieure, V. ed. Paris 1885, Tome II, p. 341, Théorème I.

**) Vergl. z. B. J. A. Serret; Cours d'algèbre supérieure, T. II, p. 335—340.

***) Ebendaselbst p. 336.

enthält. Man suche zu jeder Substitution von G die entsprechende Substitution der Buchstaben $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \varphi_5, \varphi_6$. Man erhält so eine isomorphe Gruppe J von ebensoviel Substitutionen wie G, und da G eine Substitution $(abc)(def)$ enthält, so enthält J eine Circularsubstitution dritter Ordnung. J muss ebenso wie G eine einfache Gruppe sein, dagegen kann J intransitiv sein.

Die in J vorhandene Circularsubstitution sei $(\varphi_\alpha \varphi_\beta \varphi_\gamma)$. Ist die Gruppe intransitiv, so gehören $\varphi_\alpha, \varphi_\beta$ und φ_γ zu demselben System der Intransitivität, und dieses umfasse ν Buchstaben ($\nu \geqq 3$). Die Substitutionen von J setzen diese ν Buchstaben in bestimmter Weise um, und man kann so eine Gruppe K von Vertauschungen von ν Buchstaben definiren, die transitiv und mit J isomorph ist. Wenn dieser Isomorphismus meroedrisch wäre, müsste J zusammengesetzt sein, was ausgeschlossen ist. Es ist also auch G mit K holoedrisch isomorph. K ist jetzt eine einfache, transitive Gruppe von Vertauschungen von ν Buchstaben, welche die Circularsubstitution $(\varphi_\alpha \varphi_\beta \varphi_\gamma)$ enthält. Es ist somit K die alternirende Gruppe aus den ν Buchstaben. Der Fall, in dem J transitiv ist, unterscheidet sich von dem anderen nur dadurch, dass man $\nu = 6$ zu setzen hat. Es sind dann J und K mit einander und mit der Gesammtheit der geraden Vertauschungen von $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_6$ identisch. Somit enthält in diesem Fall J eine Substitution von dem Typus $(\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3)(\varphi_4 \varphi_5 \varphi_6)$, und also G eine Circularsubstitution dritter Ordnung. Es ist dann G selbst mit der alternirenden Gruppe aus den a, b, c, d, e, f identisch. In dem Fall, in welchem J intransitiv ist, hat man $\nu < 6$ und $\geqq 3$ anzunehmen. Wäre übrigens $\nu = 3$, so bestände K und also auch G nur aus drei Substitutionen, es bestände somit G aus den Potenzen der Operation

$$(abc)(def),$$

was der Voraussetzung widerspricht, dass G transitiv sein sollte. Es ist ferner die Annahme $\nu = 4$ auszuschliessen, denn die aus 4 Buchstaben gebildete alternirende Gruppe ist zusammengesetzt. Somit bleibt nur die Annahme $\nu = 5$ übrig, und man findet so das Resultat:*)

Hilfssatz VII. *Eine einfache transitive Gruppe von Vertauschungen von* 6 *Buchstaben ist entweder mit der alternirenden Gruppe von der Ordnung* 720 *identisch oder mit der Ikosaedergruppe***) *holoedrisch isomorph.*

---

*) Man könnte hier auch die schon vorhandenen Aufzählungen von Gruppen von Vertauschungen von 6 Buchstaben benutzen.

**) Vergl. z. B. F. Klein: Vorlesungen über das Ikosaeder, Leipzig 1884, p. 19.

§ 3.

Uebersicht der Ordnungszahlen von 1 bis 200.

Ist p irgend eine Primzahl, so giebt es eine einzige Gruppe von der Ordnung p, und diese ist einfach; eine solche Gruppe besteht eben aus den Potenzen einer Operation von der Ordnung p. Um nun die übrigen einfachen Gruppen zu finden, hat man vermöge des Lehrsatzes IV nur alle Zahlen zu untersuchen, die gleich einem Product von mehr als drei Primzahlen sind, und von diesen kann man vermöge der Sylow'schen Resultate wieder diejenigen weglassen, die Potenzen von Primzahlen sind.

Die folgende Zusammenstellung enthält alle die nach dem eben Bemerkten noch zu untersuchenden Zahlen, soweit sie nicht grösser sind als 200. Die meisten dieser Zahlen können vermöge des Hilfssatzes I nicht Ordnungszahlen einfacher Gruppen sein; zwei Zahlen erledigen sich durch den Zusatz zum Hilfssatz III, was noch mit mehreren andern geschehen könnte, die ich aber in die erste Kategorie gestellt habe, um die Fruchtbarkeit der Sylow'schen Sätze ins Licht zu setzen. Ich habe neben jede Zahl ihre Zerlegung gesetzt und dabei immer die Primzahl vorangestellt, welche bei der Anwendung des allgemeinen Satzes mit p zu identificiren ist.

1) Ordnungszahlen, die vermöge des Hilfssatzes I auszuschliessen sind:

$24 = 2^3.3,$	$36 = 3^2.2^2,$	$40 = 5.2^3,$	$48 = 2^4.3,$
$54 = 3^3.2,$	$72 = 3^2.2^3,$	$80 = 2^4.5,$	$84 = 7.2^2.3,$
$88 = 11.2^3,$	$96 = 2^5.3,$	$100 = 5^2.2^2,$	$104 = 13.2^3,$
$108 = 3^3.2^2,$	$126 = 7.2.3^2,$	$135 = 3^3.5,$	$136 = 17.2^3,$
$140 = 5.2^2.7,$	$150 = 5^2.2.3,$	$152 = 19.2^3,$	$156 = 13.2^2.3,$
$160 = 2^5.5,$	$162 = 3^4.2,$	$176 = 11.2^4,$	$184 = 23.2^3,$
$189 = 3^3.7,$	$192 = 2^6.3,$	$196 = 7^2.2^2,$	$198 = 11.2.3^2,$

$$200 = 5^2.2^3.$$

2) Nach dem Zusatz zum dritten Hilfssatz sind auszuschliessen:

$$56 = 7\,.\,2^3, \qquad 132 = 11\,.\,2^2\,.\,3.$$

3) Für die folgenden Ordnungszahlen ist die Frage vorläufig unentschieden:

60, 90, 112, 120, 144, 168, 180.

§ 4.

Theilweise Behandlung der noch nicht erledigten Ordnungszahlen.

Die Zahlen:

$$60 = 5 \, . \, 2^2 \, . \, 3, \quad 90 = 5 \, . \, 2 \, . \, 3^2, \quad 120 = 5 \, . \, 2^3 \, . \, 3$$

gestatten die Anwendung des Hilfssatzes II, wenn in diesem $p = 5$ gesetzt wird. Wenn es einfache Gruppen von diesen Ordnungszahlen giebt, so müssen diese darstellbar sein als transitive Gruppen von Vertauschungen von 6 Buchstaben. Es kommt nun der Hilfssatz VII in Anwendung und ergiebt, dass *die Ikosaedergruppe die einzige einfache Gruppe von 60 Operationen ist*, und dass einfache Gruppen von den Ordnungen 90 und 120 nicht existiren.

Die Ordnungszahl $112 = 2^4 \, . \, 7$ kann folgendermassen erledigt werden. Gäbe es eine einfache Gruppe G von dieser Ordnung, so müsste diese als Gruppe von Vertauschungen von 7 Buchstaben darstellbar sein; man hat, um dies einzusehen, im Hilfssatz II nur $n = 112$ und $p = 2$ zu setzen. Da nun 2^4 die höchste Potenz ist, welche die Ordnung theilt, so existirt eine Untergruppe J von 16 Substitutionen, die wir uns in den 7 Buchstaben dargestellt denken wollen. Nun ist aber 16 auch die höchste Potenz von 2, welche in 7! enthalten ist. Es sind also nach dem Sylow'schen Satz je zwei Gruppen von der Ordnung 16, die aus 7 Buchstaben gebildet sind, in der Gesammtgruppe der Vertauschungen von 7 Buchstaben gleichberechtigt, also ähnlich. Nun ist von Cauchy*) eine Gruppe der Ordnung 16 von 7 Buchstaben gebildet worden. Diese lässt sich aus den Substitutionen

$$(a_1 a_2), \quad (a_3 a_4), \quad (a_5 a_6), \quad (a_1 a_3)(a_2 a_4)$$

zusammensetzen, wobei a_7 in Ruhe bleibt. Diese Gruppe enthält Transpositionen, es enthält also auch die ihr ähnliche Gruppe J und somit auch die vorausgesetzte Gruppe G ungerade Substitutionen. Dies ist aber mit der vorausgesetzten Einfachheit der Gruppe G unverträglich.

§ 5.

Die Ordnungszahl 144.

Von den drei Zahlen, die noch zu erledigen sind, erfordert jede eine besondere Untersuchung. Indem ich eine einfache Gruppe G von der Ordnung 144 vorläufig voraussetze, ordne ich die Operationen dieser Gruppe in Classen, so dass gleichberechtigte in dieselbe Classe kommen.

*) Exercices d'analyse et de physique mathématique, Paris 1840, T. III, pag. 195.

Ausser der identischen Operation finde ich nun eine Classe von h_1 Operationen, eine von h_2 Operationen u. s. w., so dass

$$1 + h_1 + h_2 + \cdots = 144 = n$$

ist. Keine der Zahlen h darf gleich 1 angenommen werden, denn sonst enthielte die Gruppe eine nur mit sich selbst gleichberechtigte Operation S; die Potenzen von S bildeten dann eine ausgezeichnete Untergruppe; fiele diese mit der Gesammtgruppe zusammen, so könnte G ohnedies nicht einfach sein.

Transformirt man jetzt die h_1 Operationen T der einen Classe mit den Operationen von G, so werden die Operationen T unter einander vertauscht und ergeben eine mit G isomorphe transitive Gruppe von Vertauschungen von h_1 Buchstaben. Der Isomorphismus muss wieder holoedrisch sein, d. h. G ist als transitive Gruppe von h_1 Buchstaben darstellbar.

Hieraus folgt, dass die Ordnung n von G durch h_1 theilbar ist. Dies zeigt sich auch aus einer andern Beziehung. Ist nämlich T_1 eine von den h_1 Operationen, und enthält die Gruppe G genau g Operationen, die mit T_1 vertauschbar sind, so ist*)

$$h_1 \cdot g = n.$$

Aus der obigen Gleichung ergiebt sich nun die Congruenz

$$1 + h_1 + h_2 + \cdots \equiv 0 \text{ mod, } 2.$$

Es können also nicht alle die Zahlen h gerade sein. Sei h_1 ungerade, so ist es als von 1 verschiedener Theiler von 144 entweder 3 oder 9; die erste Annahme ist aber auszuschliessen, weil die Gruppe G nicht durch 3 Buchstaben dargestellt werden kann. Man findet jetzt aus

$$h_1 g = n,$$

dass

$$g = 16$$

anzunehmen ist. Die g mit T_1 vertauschbaren Operationen bilden eine Gruppe, und da in dieser Gruppe die Operation T_1 selbst enthalten ist, muss die Ordnung von T_1 eine Potenz von 2 sein. Es sei diese Potenz gleich 2^k, so ist $T_1^{2^{k-1}}$ eine Operation von der Ordnung 2. Es seien $T_1, T_2, \ldots T_9$ die Operationen, die mit T_1 in eine Classe gehören. Es sind dann auch die Operationen der Reihe

$$T_1^{2^{k-1}},\ T_2^{2^{k-1}}, \ldots T_9^{2^{k-1}}$$

alle gleichberechtigt, und es enthält andererseits diese Reihe jede mit $T_1^{2^{k-1}}$ gleichberechtigte Operation. Dies beweist man leicht, indem man den auf S. 59 für Gruppen gemachten Schluss hier auf Operationen überträgt. Auf gleiche Weise sieht man, dass die Operationen

*) Vgl. Frobenius: Journal für Math. Bd. 100, pag. 181.

der letzten Reihe entweder alle verschieden sein, oder zu je ν übereinstimmen müssen. Die Anzahl der verschiedenen Operationen in dieser Reihe ist also ein Theiler von 9, und $T_1^{2^{k-1}}$ gehört zu einer Classe von 1, 3 oder 9 gleichberechtigten. Die beiden ersten Fälle sind aus den obigen Gründen auszuschliessen. Die vorausgesetzte Gruppe enthält also eine Classe von 9 gleichberechtigten Operationen zweiter Ordnung.

Ich bezeichne jetzt diese 9 Operationen mit

$$\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \ldots \Theta_9.$$

Die Gruppe G kann nun auch als transitive Gruppe von Vertauschungen der $\Theta_1, \Theta_2, \ldots \Theta_9$ dargestellt werden, indem man jeder Operation U von G diejenige Vertauschung der Buchstaben Θ zuordnet, die bei der Transformation der Θ mittelst U entsteht. Der Deutlichkeit wegen will ich die in Frage kommenden Buchstabenvertauschungen besonders bezeichnen, die der Operation Θ_1 entsprechende mit B_1 u. s. w. Es wird also B_1 eine Buchstabenvertauschung sein, bei der Θ_1 am Ort bleibt, diese Vertauschung ist gerade anzunehmen und von der Ordnung 2. Man hat also entweder

$$\text{I.} \quad B_1 = (\Theta_1)(\Theta_2)(\Theta_3)(\Theta_4)(\Theta_5)(\Theta_6\Theta_7)(\Theta_8\Theta_9)$$

oder

$$\text{II.} \quad B_1 = (\Theta_1)(\Theta_2\Theta_3)(\Theta_4\Theta_5)(\Theta_6\Theta_7)(\Theta_8\Theta_9),$$

denn alle anderen möglichen Annahmen lassen sich durch passende Aenderung der Bezeichnung auf eine von diesen beiden zurückführen.

I. Wir behandeln zunächst die erste der genannten Annahmen*). Man muss nun dasselbe erhalten, wenn man entweder alle Buchstaben von B_1 — als Operationen Θ betrachtet — mit Θ_2 transformirt oder die Buchstabenvertauschung B_1 mit der Buchstabenvertauschung B_2 transformirt. Dabei ist B_2 die dem Θ_2 entsprechende Buchstabenvertauschung. Weil aber in der Substitution B_1 der Buchstabe Θ_2 an seiner Stelle bleibt, so ist nach der Definition von B_1

$$\Theta_1^{-1}\Theta_2\Theta_1 = \Theta_2,$$

also Θ_1 mit Θ_2 vertauschbar. Somit ist auch B_1 mit B_2 vertauschbar. Es wird also B_1 in sich übergeführt, wenn alle Buchstaben von B_1 mit Θ_2 transformirt werden. Θ_2 transformirt also die Buchstaben $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \Theta_4, \Theta_5$ in einander und ebenso $\Theta_6, \Theta_7, \Theta_8, \Theta_9$ in einander,

*) Man könnte diesen Fall ausschliessen vermöge eines von Herrn Jordan ausgesprochenen Satzes. Nach diesem muss jede transitive und primitive Gruppe von Vertauschungen von mehr als 8 Buchstaben, die eine Substitution von der Form $(a_1 a_2)(a_3 a_4)$ enthält, die alternirende Gruppe enthalten (Journal für Math. Bd. 79, p. 256). Die Primitivität der vorausgesetzten Gruppe wäre leicht zu erweisen. Jede einfache transitive Gruppe von m Buchstaben ist entweder primitiv oder als transitive Gruppe von nur m_1 Buchstaben darstellbar, wo m_1 ein Theiler von m ist.

und zwar werden die letzten vier Buchstaben imprimitiv vertauscht.

Es ist jetzt leicht zu sehen, dass nur die folgenden wesentlich verschiedenen Fälle zu unterscheiden sind:

1) $$B_2 = (\Theta_1)(\Theta_2)(\Theta_3)(\Theta_4)(\Theta_5)(\Theta_6\Theta_8)(\Theta_7\Theta_9),$$

2) $$B_2 = (\Theta_1)(\Theta_2)(\Theta_3)(\Theta_4\Theta_5)(\Theta_6\Theta_7)(\Theta_8)(\Theta_9),$$

denn B_1 und B_2 müssen zwar ähnlich, aber doch verschieden sein, und B_2 muss Θ_1 und Θ_2 an der Stelle lassen.

Betrachten wir den Fall 1), so ergiebt sich, dass sowohl Θ_1 als Θ_2 mit jeder der Operationen

$$\Theta_1,\ \Theta_2,\ \Theta_3,\ \Theta_4,\ \Theta_5$$

und mit keiner der übrigen Operationen Θ vertauschbar ist. Nennt man zwei Operationen Θ_i und Θ_l zusammengehörig, wenn sie mit denselben Operationen aus der Reihe

$$\Theta_1,\ \Theta_2,\ \Theta_3,\ \Theta_4,\ \Theta_5,\ \Theta_6,\ \Theta_7,\ \Theta_8,\ \Theta_9$$

vertauschbar sind, so gilt der Satz: Wenn zwei Operationen je mit einer dritten zusammengehörig sind, so sind sie auch unter sich zusammengehörig. Man kann jetzt die 9 Operationen Θ in Systeme von zusammengehörigen vertheilen und findet leicht, dass diese Systeme in Beziehung auf die Gruppe von Vertauschungen der Θ Systeme der Imprimitivität sind, also gleichviel Buchstaben enthalten, und zwar je 3. Man hat also 3 Systeme. Diese vertauschen sich unter einander vermöge der Substitutionen der Gruppe, und diese ist also einer Gruppe von Vertauschungen von 3 Buchstaben isomorph. Dies könnte nur ein meroedrischer Isomorphismus sein, was mit der vorausgesetzten Einfachheit der Gruppe G nicht zusammenbestehen kann. Der Fall 1) ist also auszuschliessen.

Betrachten wir den Fall 2). Die Formel B_2 liefert

$$\Theta_2^{-1}\Theta_3\Theta_2 = \Theta_3,$$

während aus der Form von B_1 folgt

$$\Theta_1^{-1}\Theta_2\Theta_1 = \Theta_2, \qquad \Theta_1^{-1}\Theta_3\Theta_1 = \Theta_3,$$

d. h. von den Operationen Θ_1, Θ_2 und Θ_3 ist jede mit jeder vertauschbar. Es giebt also Aggregate von 3 Operationen Θ von dieser Eigenschaft. Man sucht jetzt alle solchen Aggregate zu bilden. Nimmt man Θ_1 und Θ_2 in ein solches Aggregat auf, so ist es bestimmt, denn Θ_1 ist, wie die Formel für B_1 zeigt, nur mit Θ_2, Θ_3, Θ_4, Θ_5 vertauschbar, und Θ_2 nur mit Θ_1, Θ_3, Θ_8, Θ_9; man erhält also nur das Aggregat Θ_1, Θ_2, Θ_3. Aehnliches gilt, wenn man in das Aggregat von vornherein Θ_1 aufnimmt und eine andere von den 4 mit Θ_1 vertauschbaren

Operationen Θ_2, Θ_3, Θ_4, Θ_5, z. B. Θ_4, denn für B_4 können nun ganz analoge Betrachtungen angestellt werden wie für B_2. So kann man auf 4 Arten eines der erwähnten Aggregate mit dem Buchstaben Θ_1 bilden, dabei wird aber jedes offenbar doppelt gezählt. Man hat also 2 Aggregate mit dem Buchstaben Θ_1. Wegen der Gleichberechtigung muss dasselbe gelten, wenn man Θ_i statt Θ_1 setzt, was durch Transformation sofort eingesehen werden kann. Somit lassen sich $\frac{9 \cdot 2}{3} = 6$ Aggregate im Ganzen bilden. Jedes solche Aggregat enthält drei Operationen Θ, von denen jede mit jeder vertauschbar ist. Diese Aggregate verhalten sich anders als jene Systeme der Imprimitivität, sofern zwei verschiedene Aggregate einen und denselben Buchstaben enthalten können. Jedenfalls aber tauschen diese Aggregate sich gegenseitig um, wenn sie mit den Operationen der Gruppe G transformirt werden. Man erhält so eine Gruppe Γ von Vertauschungen von 6 Buchstaben, die mit G isomorph ist. Diese neue Gruppe Γ braucht nicht transitiv zu sein, enthält aber jedenfalls eine Substitution die gewisse Aggregate versetzt. Wäre der Isomorphismus von G und Γ meroedrisch, so könnte G nicht einfach sein. Ist er holoedrisch, so ist G darstellbar als transitive oder intransitive Gruppe Γ von 6 Buchstaben. Ist Γ transitiv, so kommt man in Widerspruch mit dem Lehrsatz VII. Ist Γ intransitiv, so ist Γ, und also auch G darstellbar als Gruppe von weniger als 6 Buchstaben (vgl. die Betrachtung auf S. 65); dann könnte aber die Anzahl der Operationen nicht 144 sein.

II. Es ist jetzt der Fall zu untersuchen, wo

$$B_1 = (\Theta_1)(\Theta_2\Theta_3)(\Theta_4\Theta_5)(\Theta_6\Theta_7)(\Theta_8\Theta_9)$$

angenommen wird. Man sieht aus dieser Formel, dass Θ_1 mit keiner andern von den Operationen Θ vertauschbar ist. Man versuche jetzt B_2 zu bilden. Diese Substitution muss Θ_2 an der Stelle lassen; die übrigen Buchstaben Θ ordnen sich in B_2 in 4 Cyklen von 2 Buchstaben. Ich suche nun den Buchstaben, der mit Θ_1 in denselben Cyklus kommt. Ist dieser Θ_3, so ist ein gewisser Abschluss erreicht. Ist aber der zu Θ_1 gehörige Buchstabe ein anderer, nämlich Θ_i, so nehme ich den Buchstaben Θ_k, der in B_1 mit Θ_i zusammen vorkommt, und suche denjenigen, der in B_2 mit Θ_k vertauscht wird. Ist der zuletzt gesuchte Θ_3, so ist wiederum ein gewisser Abschluss erreicht, ist er Θ_l, so gehört in B_1 mit Θ_l ein Buchstabe Θ_m zusammen, der noch nicht vorgekommen ist. Man sucht jetzt den Buchstaben, der in B_2 mit Θ_m vertauscht wird u. s. f. So ersieht man, dass man B_2 auf viererlei wesentlich verschiedene Arten annehmen kann:

$$B_2 = (\Theta_2)(\Theta_1\Theta_3)(\cdot\,\cdot)(\cdot\,\cdot)(\cdot\,\cdot),$$

oder

$$= (\Theta_2)(\Theta_1\Theta_4)(\Theta_5\Theta_3)(\cdot\,\cdot)(\cdot\,\cdot),$$

oder

$$= (\Theta_2)\,(\Theta_1\Theta_4)\,(\Theta_5\Theta_6)\,(\Theta_7\Theta_3)\,(\Theta_8\Theta_9),$$

oder

$$= (\Theta_2)\,(\Theta_1\Theta_4)\,(\Theta_5\Theta_6)\,(\Theta_7\Theta_8)\,(\Theta_9\Theta_3).$$

Wo die Punkte stehen, ist die Buchstabenvertheilung noch unbekannt. Die vier gefundenen Fälle geben für $B_1 B_2$ der Reihe nach:

$$\begin{array}{l} (1\ 3\ 2)\ldots\ldots\ldots, \\ (1\ 4\ 3\ 2\ 5)\ldots\ldots, \\ (1\ 4\ 6\ 3\ 2\ 7\ 5)\,(8)\,(9), \\ (1\ 4\ 6\ 8\ 3\ 2\ 9\ \ 7\ \ 5), \end{array}$$

indem ich jetzt zur Abkürzung nur die Indices setze. Im zweiten Fall hätte man eine Substitution, deren Ordnung durch 5 theilbar ist, im dritten Fall eine Substitution von der Ordnung 7. Diese beiden Fälle sind auszuschliessen, weil die Ordnung 144 der gesuchten Gruppe durch 5 und 7 nicht theilbar ist. Aber auch der vierte Fall ist wegzulassen. Wenn nämlich eine einfache Gruppe von der Ordnung 144 eine Substitution von der Ordnung 9 enthielte, so befänden wir uns im Widerspruch mit dem Hilfssatz III.

Es bleibt also nur der erste Fall

$$B_2 = (\Theta_2)\,(\Theta_1\Theta_3)\,(\cdot\ \cdot)\,(\cdot\ \cdot)\,(\cdot\ \cdot),$$

und es handelt sich nur darum, wie die leeren Stellen auszufüllen sind. Durch ähnliche Betrachtungen wie auf S. 71 findet man drei wesentlich verschiedene mögliche Annahmen:

$$\begin{aligned} B_2 &= (\Theta_2)\,(\Theta_1\Theta_3)\,(\Theta_4\Theta_5)\,(\Theta_6\Theta_7)\,(\Theta_8\Theta_9), \\ B_2 &= (\Theta_2)\,(\Theta_1\Theta_3)\,(\Theta_4\Theta_5)\,(\Theta_6\Theta_8)\,(\Theta_7\Theta_9), \\ B_2 &= (\Theta_2)\,(\Theta_1\Theta_3)\,(\Theta_4\Theta_6)\,(\Theta_7\Theta_8)\,(\Theta_5\Theta_9). \end{aligned}$$

Macht man die erste Annahme, so wird

$$B_1 B_2 = (1\ 3\ 2)\,(4)\,(5)\,(6)\,(7)\,(8)\,(9);$$

macht man aber die zweite Annahme, so erhält man

$$B_1 B_2 = (1\ 3\ 2)\,(4)\,(5)\,(6\ 9)\,(7\ 8),$$

also

$$B_1 \,.\, B_2 \,.\, B_1 \,.\, B_2 = (1\ 2\ 3)\,(4)\,(5)\,(6)\,(7)\,(8)\,(9).$$

In diesen beiden Fällen enthielte also die Gruppe, falls sie in den Buchstaben Θ geschrieben wird, eine Circularsubstitution von der Ordnung 3, diese Fälle sind also vermöge des Hilfssatzes VI auszuschliessen.

Man hat also anzunehmen:

$$\begin{aligned} B_1 &= (1)\,(2\,3)\,(4\,5)\,(6\,7)\,(8\,9), \\ B_2 &= (2)\,(1\,3)\,(4\,6)\,(7\,8)\,(5\,9). \end{aligned}$$

Es ergiebt sich hieraus

$$B_2^{-1} B_1 B_2 = (3)\,(2\,1)\,(6\,9)\,(4\,8)\,(7\,5),$$

welche Operation offenbar mit B_3 zu bezeichnen ist. Man kann aber jetzt auch die übrigen Operationen B bilden. Offenbar muss von irgend zwei Operationen B_i und B_k dasselbe gelten wie von B_1 und B_2, d. h. man hat die Formen:

$$B_i = (i)\,(k\,h)\,(\cdot\,\cdot)\,(\cdot\,\cdot)\,(\cdot\,\cdot),$$
$$B_k = (k)\,(i\,h)\,(\cdot\,\cdot)\,(\cdot\,\cdot)\,(\cdot\,\cdot).$$

Mit anderen Worten: Der Buchstabe, der in B_k mit i zusammen vorkommt, muss derselbe sein wie derjenige, welcher in B_i mit k zusammen vorkommt. Wenn man hierauf achtet, so kann man jede Operation durch den blossen Vergleich mit B_1, B_2 und B_3 bilden. Man erhält:

$$B_4 = (4)\,(1\,5)\,(2\,6)\,(3\,8)\,(7\,9),$$
$$B_5 = (5)\,(1\,4)\,(2\,9)\,(3\,7)\,(6\,8),$$
$$B_6 = (6)\,(1\,7)\,(2\,4)\,(3\,9)\,(5\,8),$$
$$B_7 = (7)\,(1\,6)\,(2\,8)\,(3\,5)\,(4\,9),$$
$$B_8 = (8)\,(1\,9)\,(2\,7)\,(3\,4)\,(5\,6),$$
$$B_9 = (9)\,(1\,8)\,(2\,5)\,(3\,6)\,(4\,7).$$

Dies müssten also die 9 gleichberechtigten Operationen von der Ordnung 2 sein, und diese müssten zusammengesetzt eine ausgezeichnete Untergruppe der ganzen Gruppe ergeben, d. h. in diesem Fall die Gesammtgruppe wieder erzeugen. Allein diese 9 Operationen ergeben nur eine Gruppe von 18 Operationen. Um dies einzusehen, bilde man:

$$B_1 B_2 = (1\,3\,2)\,(4\,9\,7)\,(5\,6\,8) = W,$$
$$B_1 B_4 = (1\,5\,4)\,(2\,8\,7)\,(3\,6\,9) = V.$$

Man constatirt, dass

$$W \,.\, V = V \,.\, W$$

ist; es erzeugen also W und V zusammen eine Gruppe 9ter Ordnung H. Ferner ist.

$$B_1^{-1}\, W B_1 = W^{-1},$$
$$B_1^{-1}\, V B_1 = V^{-1}.$$

Die Gruppe H wird also durch B_1 in sich transformirt, und es wird B_1 mit W und V eine Gruppe J von 18 Operationen erzeugen. Indem man nun B_1 mehrmals mittelst W und V transformirt, erkennt man, dass die sämmtlichen Operationen B_1, B_2, ... B_9 in der Gruppe J enthalten sind, also keine umfassendere Gruppe erzeugen.

Damit ist bewiesen, *dass eine einfache Gruppe von der Ordnung 144 nicht existirt.*

§ 6.

Gelegentliche Bemerkung über das Tripelsystem von neun Elementen.

Es liegt nahe, hier eine Bemerkung anzuknüpfen, die nicht unmittelbar mit dem Gegenstand dieser Arbeit zusammenhängt. Von den Operationen $B_1, B_2, \ldots B_9$ gehören gewisse Tripel zusammen vermöge der Formeln

$$\begin{aligned} B_i &= (i)\ (kh)\ (\cdot\cdot)\ (\cdot\cdot)\ (\cdot\cdot), \\ B_k &= (k)\ (ih)\ (\cdot\cdot)\ (\cdot\cdot)\ (\cdot\cdot), \\ B_h &= (h)\ (ik)\ (\cdot\cdot)\ (\cdot\cdot)\ (\cdot\cdot); \end{aligned}$$

die erste dieser Operationen mit der zweiten transformirt giebt die dritte, und dasselbe gilt in jeder Reihenfolge. Es ist leicht zu sehen, wie man diese Tripel aus der Tafel der Operationen

$$B_1, B_2, \ldots B_9$$

abzulesen hat. Man erhält:

$$123,\ 145,\ 167,\ 189,\ 246,\ 259,\ 278,\ 348,\ 357,\ 369,\ 479,\ 568.$$

Das ist das *Tripelsystem von neun Elementen.* *) Es giebt abgesehen von den Unterschieden der Benennung nur ein solches. Man kann dies auch so ausdrücken: alle Tripelsysteme von 9 Elementen sind ähnlich. Bezeichnet man die Gesammtheit der Substitutionen der Zahlzeichen $1, 2, \ldots 9$, die das Tripelsystem nicht ändern, mit P, so ist die gefundene Gruppe von 18 Operationen eine Untergruppe von P.

Die Gruppe P ist bekanntlich auflösbar. Ich will zeigen, dass dies auf einfache Weise aus den Principien der vorliegenden Untersuchung gefolgert werden kann. Rechnet man nämlich die unter sich ähnlichen Tripelsysteme, welche aus denselben neun Zeichen gebildet werden können, als verschieden, so ergiebt eine kleine Ueberlegung deren Anzahl gleich

$$7 \,.\, 5 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 2 \,.$$

Die Gesammtheit P der Substitutionen, die ein solches Tripelsystem ungeändert lassen, besteht also aus

$$\frac{9!}{7 \,.\, 5 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 2} = 432$$

Substitutionen. Da nun das oben aufgestellte Tripelsystem durch die ungerade Substitution

$$(1)\ (2)\ (3)\ (4\,5)\ (6\,9)\ (7\,8)$$

nicht geändert wird, so besteht P aus geraden und ungeraden Substitutionen und besitzt eine ausgezeichnete Untergruppe von der Ord-

*) Cf. Netto Substitutionentheorie u. s. w. p. 220 und p. 232.

nung 216. Es ist aber $216 = 3^3 . 2^3$, und der Hilfssatz I lehrt, dass eine Gruppe von dieser Ordnung zusammengesetzt sein muss. Man spalte die Gruppe von 216 Operationen in zwei Factoren*); jeder dieser Factoren hat eine Ordnung, die $\leqq 108$ und nicht gleich 60 ist. Wir haben aber nachgewiesen, dass keiner zusammengesetzten Zahl $\leqq 144$, ausser 60, eine einfache Gruppe entspricht, woraus schon hervorgeht, dass für jede nicht auflösbare Gruppe, deren Ordnung $n \leqq 144$ ist, n durch 60 theilbar sein muss (s. die Bemerkung am Schluss der Einleitung). Jene beiden Factoren sind also auflösbare Gruppen, und es gilt also dasselbe von der Gruppe P. Es muss desshalb auch jede Untergruppe der Gruppe P auflösbar sein**).

In dem Vorhergehenden ist ein Beweis für die Thatsache enthalten, dass *die Hesse'sche Gleichung 9ten Grades durch Wurzelzeichen gelöst werden kann****).

§ 7.

Die Ordnungszahl 168.

$168 = 7 . 2^3 . 3$. Es ergiebt sich aus dem Hilfssatz II, dass eine einfache Gruppe von der Ordnung 168 als transitive Gruppe von Vertauschungen von 8 Buchstaben dargestellt werden kann.

Ich bestimme alle transitiven Gruppen von Vertauschungen von 8 Buchstaben von der Ordnung 168. Es sei G eine solche Gruppe. Die Substitutionen von G, welche einen der 8 Buchstaben nicht ändern, bilden eine Gruppe Γ von 21 Substitutionen. Diese Gruppe von der Ordnung 21 enthält nach dem Satz von Cauchy eine Substitution von S von der Ordnung 7. Ich nehme an, dass

$$S = (a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7),$$

so dass also a_8 der Buchstabe ist, den Γ nicht ändert. Es kann aber Γ keine Substitution von der Ordnung 7 enthalten, abgesehen von den Potenzen von S; denn wäre T eine solche Substitution und nicht in S ausdrückbar, so würde die Formel

$$S^\alpha T^\beta$$

49 Substitutionen enthalten, die alle verschieden und in der Gruppe Γ enthalten sein müssten. Es wird also jede Substitution U von Γ die Substitution S in eine Potenz von S verwandeln:

$$U^{-1} S U = S^\gamma.$$

Hieraus kann die Form von U bestimmt werden. Es handelt sich jetzt um Vertauschungen von nur 7 Buchstaben $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$

*) Vgl. diese Annalen, Bd. 34, p. 32 unten.

**) C. Jordan, Traité etc. p. 387, no. 521. Corollaire I.

***) Hesse: Crelle's Journal für Mathematik, Bd. 34, p. 193.

und wir können so lange die Festsetzung treffen, dass die Indices mod. 7 zu betrachten sind. Also $a_k = a_l$, wenn $k \equiv l$ mod. 7, so dass für den Augenblick a_8 nichts anderes bedeutet als a_1 und nicht zu verwechseln ist mit dem früheren Buchstaben a_8, der durch die Substitutionen von Γ nicht geändert wird. Man erhält nun für U die Form*)

$$U = \begin{pmatrix} a_x \\ a_{rx+s} \end{pmatrix}.$$

Wenn man hier r die Reste 1, 2, 3, 4, 5, 6 und s die Reste 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 mod. 7 durchlaufen lässt, so bekommt man 42 Substitutionen. Diese bilden die *metacyklische Gruppe* aus 7 Buchstaben; dieselbe hat nur *eine* Untergruppe von 21 Substitutionen, die *halbmetacyklische Gruppe.* Man erhält die letztere, indem man für r nur die quadratischen Reste setzt. Die Substitutionen von Γ sind also in der Formel

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_{\varrho^{2t}x+s} \end{pmatrix} \qquad \begin{bmatrix} t = 0, 1, 2 \\ s = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \end{bmatrix}$$

enthalten. ϱ bedeutet eine Primitivwurzel der Primzahl 7, kann also gleich 3 genommen werden. Mit $s \equiv 0$ mod. 7 erhält man die Substitutionen der Gruppe Γ, die a_7 nicht ändern, es sind dies also nur die drei folgenden

$$1, \quad (a_1 a_2 a_4)(a_3 a_6 a_5), \; (a_1 a_4 a_2)(a_3 a_5 a_6);$$

von diesen bezeichne ich die mittlere mit U_0.

$$U_0 = (a_1 a_2 a_4)(a_3 a_6 a_5).$$

Ich gehe jetzt zurück zu der Gruppe G von 8 Buchstaben, womit natürlich auch die Bestimmung aufgehoben ist, dass die Indices der a mod. 7 zu betrachten sind. Da die Gruppe Γ transitiv ist und 6 Circularsubstitutionen 7ter Ordnung enthält, so ist die Gruppe G doppelt transitiv und schliesst 48 Circularsubstitutionen 7ter Ordnung in sich.

R sei eine solche Circularsubstitution, die den Buchstaben a_7 nicht ändert. Es müssen nun alle Substitutionen von G, die a_7 nicht ändern, die Substitution R in eine Potenz von R verwandeln. Dies muss auch für U_0 gelten, folglich ist

$$U_0^{-1} R \, U_0 = R^\alpha.$$

Hieraus bestimme ich R. Es sei

$$R = (b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6 b_7),$$

wo $b_1, b_2, \ldots b_7$ die Buchstaben a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_8 in irgend einer Reihenfolge bedeuten, und die Indices der Buchstaben b — und nur diese — mod. 7 zu betrachten sind. Da übrigens die Substitution R durch irgend eine ihrer Potenzen in der ganzen Betrachtung ersetzt

*) Vgl. Serret Cours d'algèbre p. 669.

werden kann, so geschieht der Allgemeinheit kein Eintrag, wenn $b_1 = a_1$ und $b_2 = a_2$ gesetzt wird. Es ist nun

$$R^\alpha = (b_1\, b_{1+\alpha}\, b_{1+2\alpha}\, b_{1+3\alpha} \ldots b_{1+6\alpha}).$$

Diese letztere cyklische Folge muss aus der cyklischen Folge

$$b_1\, b_2\, b_3 \ldots b_7$$

durch die Substitution U_0 erhalten werden, und zwar muss — wegen des Ausdrucks der Substitution U_0 in den $a_1, a_2 \ldots$ — a_2, d. h. b_2, aus a_1, d. h. b_1, erhalten werden. Somit ist

$$U_0 = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \ldots \\ b_2 & b_{2+\alpha} & b_{2+2\alpha} & b_{2+3\alpha} & \ldots \end{pmatrix}.$$

Löst man diese Substitution in Cyklen auf, so erhält man als ersten Cyklus

$$b_1\;\; b_2\;\; b_{2+\alpha}\;\; b_{2+(1+\alpha)\alpha} \ldots.$$

Da diese Substitution von der Ordnung 3 sein soll, muss

$$b_{2+(1+\alpha)\alpha} = b_1$$

sein, d. h.

$$\alpha^2 + \alpha + 1 \equiv 0 \quad (\text{mod. } 7).$$

Man erhält die Lösungen $\alpha \equiv 2$ und $\alpha \equiv 4$.

Es ist also im ersten Fall ($\alpha \equiv 2$):

$$U_0 = (b_1 b_2 b_4)\,(b_3 b_6 b_5).$$

Da aber

$$U_0 = (a_1 a_2 a_4)\,(a_3 a_6 a_5),$$

so findet man

$$b_4 = a_4, \qquad b_7 = a_8;$$

die Buchstaben b_3, b_6, b_5 sind entweder respective gleich a_3, a_6, a_5 oder gleich a_6, a_5, a_3 oder gleich a_5, a_3, a_6.

Im zweiten Fall ($\alpha \equiv 4$) ist

$$U_0 = (b_1 b_2 b_6)\,(b_4 b_7 b_5),$$

und somit $b_6 = a_4$, $b_3 = a_8$; ferner b_4, b_7, b_5 der Reihe nach gleich a_3, a_6, a_5 oder gleich a_6, a_5, a_3 oder gleich a_5, a_3, a_6.

Es bleiben somit sechs mögliche Arten die Substitution R zu bilden übrig:

$$\begin{aligned} R\;\; &= (a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_8), \qquad & R''' &= (a_1 a_2 a_8 a_3 a_5 a_4 a_6),\\ R' &= (a_1 a_2 a_6 a_4 a_3 a_5 a_8), & R^{\mathrm{IV}} &= (a_1 a_2 a_8 a_6 a_3 a_4 a_5),\\ R'' &= (a_1 a_2 a_5 a_4 a_6 a_3 a_8), & R^{\mathrm{V}} &= (a_1 a_2 a_8 a_5 a_6 a_4 a_3). \end{aligned}$$

Da man nun die Substitutionen S und U_0 der gesuchten Gruppe schon kennt, hat man in allen sechs Fällen zwei Circularsubstitutionen der Ordnung 7. Indem man von diesen die eine durch eine geeignete Potenz der andern transformirt, kann man Circularsubstitutionen erhalten, die irgend einen vorgeschriebenen Buchstaben ungeändert lassen. So erhält man im ersten der sechs Fälle

$$S^{-2}RS^2 = (a_3\,a_4\,a_5\,a_6\,a_7\,a_1\,a_8)\,(a_2),$$
$$R^{-2}SR^2 = (a_3\,a_4\,a_5\,a_6\,a_8\,a_1\,a_7)\,(a_2).$$

Da aber (s. o.) alle Circularsubstitutionen der Gruppe G, die denselben Buchstaben nicht ändern, Potenzen von einander sein müssen, so schliessen die beiden letzten Formeln einen Widerspruch in sich.

Man findet ganz ebenso

$$S^{-1}R'''S = (a_2\,a_3\,a_8\,a_4\,a_6\,a_5\,a_7)\,(a_1),$$
$$R'''^{-5}SR'''^5 = (a_4\,a_6\,a_2\,a_3\,a_8\,a_5\,a_7)\,(a_1)$$

und

$$S^{-1}R^{IV}S = (a_2\,a_3\,a_8\,a_7\,a_4\,a_5\,a_6)\,(a_1),$$
$$R^{IV\,-5}SR^{IV\,5} = (a_4\,a_5\,a_8\,a_6\,a_3\,a_2\,a_7)\,(a_1),$$

so dass also nur der zweite, dritte und letzte Fall weiter zu verfolgen sind.

Der zweite und der dritte Fall geben dasselbe. Transformirt man nämlich S, U_0, R' mit der Substitution*)

$$(a_1\,a_3\,a_2\,a_6\,a_4\,a_5),$$

so erhält man S^3, U_0, R''^{-1}. Es werden also die beiden Gruppen von Buchstabenvertauschungen ähnlich sein, die aus S, U_0, R' einerseits und aus S, U_0, R'' andererseits sich zusammensetzen lassen. Es verbleiben also noch zwei Fälle.

I. Die gesuchte Gruppe G enthält die Substitutionen

$$S = (a_1\,a_2\,a_3\,a_4\,a_5\,a_6\,a_7),$$
$$U_0 = (a_1\,a_2\,a_4)\,(a_3\,a_6\,a_5),$$
$$R' = (a_1\,a_2\,a_6\,a_4\,a_3\,a_5\,a_8)$$

oder

II. Die Gruppe enthält die Substitutionen

$$S = (a_1\,a_2\,a_3\,a_4\,a_5\,a_6\,a_7),$$
$$U_0 = (a_1\,a_2\,a_4)\,(a_3\,a_6\,a_5),$$
$$R^V = (a_1\,a_2\,a_8\,a_5\,a_6\,a_4\,a_3).$$

I. Discutiren wir den ersten dieser beiden Fälle. Es lassen sich die folgenden Substitutionen bilden (indem statt R' wieder R geschrieben, und der Einfachheit wegen für die Buchstaben a nur ihre Indices gesetzt werden):

$$R^{-1}SR = (2\;6\;5\;3\;8\;4\;7)\,(1) = \Theta_1,$$
$$R^{-2}SR^2 = (6\;4\;8\;5\;1\;3\;7)\,(2) = \Theta_2,$$
$$R^{-3}SR^3 = (4\;3\;1\;8\;2\;5\;7)\,(6) = \Theta_6,$$

*) Es ist dies diejenige Substitution der Buchstaben a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, die nach der früheren Auffassung mit $\begin{pmatrix} a_x \\ a_{3x} \end{pmatrix}$ zu bezeichnen ist.

$$R^{-4}SR^4 = (3\,5\,2\,1\,6\,8\,7)\,(4) = \Theta_4,$$
$$R^{-5}SR^5 = (5\,8\,6\,2\,4\,1\,7)\,(3) = \Theta_3,$$
$$R^{-6}SR^6 = (8\,1\,4\,6\,3\,2\,7)\,(5) = \Theta_5.$$

Transformirt man nun vermittelst der Substitution S, so erhält man

$$S^{-1}RS = \Theta_1^3, \qquad S^{-1}\Theta_4 S = \Theta_5,$$
$$S^{-1}\Theta_1 S = \Theta_2, \qquad S^{-1}\Theta_5 S = \Theta_6,$$
$$S^{-1}\Theta_2 S = \Theta_3, \qquad S^{-1}\Theta_6 S = R^5.$$
$$S^{-1}\Theta_3 S = \Theta_4,$$

Setzt man nun

$$R^5 = \Theta_7, \qquad S = \Theta_8,$$

so lassen die Formeln erkennen, dass die Substitutionen

$$\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \ldots \Theta_7, \Theta_8$$

sowohl mit R als mit S transformirt in einander übergehen.

Transformirt man diese Substitutionen ausserdem noch mit U_0, so ergiebt sich

$$U_0^{-1}\Theta_1 U_0 = \Theta_2^2, \qquad U_0^{-1}\Theta_5 U_0 = \Theta_3^2,$$
$$U_0^{-1}\Theta_2 U_0 = \Theta_4^2, \qquad U_0^{-1}\Theta_6 U_0 = \Theta_5^2,$$
$$U_0^{-1}\Theta_3 U_0 = \Theta_6^2, \qquad U_0^{-1}\Theta_7 U_0 = \Theta_7^2,$$
$$U_0^{-1}\Theta_4 U_0 = \Theta_1^2, \qquad U_0^{-1}\Theta_8 U_0 = \Theta_8^2.$$

Ich definire jetzt eine Gruppe G', welche aus den sämmtlichen Substitutionen besteht, die aus S, U_0, R sich zusammensetzen lassen. Diese Gruppe G' ist transitiv (Vergl. den Anfang von § 2) und, da sie Circularsubstitutionen 7ter Ordnung enthält, auch zweifach transitiv. Die Ordnung dieser Gruppe ist also*) $8 \cdot 7 \cdot m$, wo m die Anzahl der Substitutionen der Gruppe bedeutet, die zwei bestimmte Buchstaben nicht versetzen. Es werden nun die sämmtlichen Substitutionen von G' die Substitutionen

$$\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \ldots \Theta_8$$

in Potenzen von einander transformiren, weil die Substitutionen S, U_0 und R dies einzeln thun. Eine Substitution von G', die a_8 nicht ändert, kann Θ_8 nur in eine Potenz von Θ_8, d. h. S in eine Potenz von S transformiren. Die einzigen Operationen, die dieser Bedingung genügen und die zugleich a_7 nicht ändern, sind die Potenzen der Circularsubstitution 6ter Ordnung

$$(a_1\, a_3\, a_2\, a_6\, a_4\, a_5).\,^{**})$$

---

*) Cf. Serret, Cours d'algèbre supérieure p. 341, no. 454.

**) Nach der früheren Bezeichnung $\begin{pmatrix} a_x \\ a_{\varrho x} \end{pmatrix}$.

Da aber aus S, U_0 und R nur gerade Substitutionen zusammengesetzt werden können, so kommen nur die 2te, 4te und 6te Potenz in Betracht, d. h. die Substitutionen

$$(a_1 a_2 a_4)(a_3 a_6 a_5), \ (a_1 a_4 a_2)(a_3 a_5 a_6), \ 1,$$

also 1, U_0 und U_0^2. Diese gehören der Gruppe G' an. Die Gruppe G' enthält somit genau 3 Operationen, die a_7 und a_8 nicht ändern. Es ist also $m = 3$ und es liegt eine Gruppe von 168 Operationen vor.

Durch die Operationen S und R werden

$$\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \ldots \Theta_8$$

in einander transformirt, durch U_0 nicht. Definirt man also eine Gruppe H durch Zusammensetzung von S und R, so wird diese Gruppe die Substitution U_0 nicht enthalten, und man findet nun in analoger Weise, dass H zweifach transitiv und von der Ordnung 56 ist. Man transformire jetzt die Gruppe H mit irgend einer Operation V der Gruppe G' und erhalte die Gruppe H_1. Es ist dann

$$V^{-1} R V = \Theta_i^\alpha, \qquad V^{-1} S V = \Theta_k^\beta,$$

und die Gruppe H_1 muss die aus Θ_i^α und Θ_k^β zusammengesetzte sein. Da aber offenbar die Gruppe H die Operationen Θ_i^α und Θ_k^β auch enthält, so ist H_1 in H enthalten, also mit H identisch. H ist also eine ausgezeichnete Untergruppe von G'. Die Ordnung von H ist 56; jede Gruppe von dieser Ordnung ist nach den vorhergehenden Untersuchungen auflösbar.

Der Fall I führt also auf eine zweifach transitive auflösbare Gruppe von Vertauschungen von 8 *Buchstaben von der Ordnung* 168.

II. Im zweiten Fall bezeichne man R^V mit R. Man kann dann folgende Substitutionen herstellen:

$$\begin{aligned}
R^{-1}SR &= (2\,8\,1\,3\,6\,4\,7)(5) = \vartheta_5,\text{*)}\\
R^{-2}SR^2 &= (8\,5\,2\,1\,4\,3\,7)(6) = \vartheta_6,\\
R^{-3}SR^3 &= (5\,6\,8\,2\,3\,1\,7)(4) = \vartheta_4,\\
R^{-4}SR^4 &= (6\,4\,5\,8\,1\,2\,7)(3) = \vartheta_3,\\
R^{-5}SR^5 &= (4\,3\,6\,5\,2\,8\,7)(1) = \vartheta_1,\\
R^{-6}SR^6 &= (3\,1\,4\,6\,8\,5\,7)(2) = \vartheta_2.
\end{aligned}$$

Ausserdem lassen sich folgende Relationen constatiren:

---

*) Setzt man $\vartheta_5 = A_1$, die obengenannte Substitution $U_0 = A_2$, $A_1 A_2 = A_3$, so genügen A_1, A_2, A_3 den von Herrn Dyck in diesen Annalen Bd. 20, p. 40 u. 41 aufgestellten Relationen. Durch diese Bemerkung kann der vorliegende Fall ohne die folgenden Rechnungen erledigt werden.

$$S^{-1}RS = \vartheta_1^4, \qquad S^{-1}\vartheta_4 S = \vartheta_5^2,$$
$$S^{-1}\vartheta_1 S = \vartheta_2^4, \qquad S^{-1}\vartheta_5 S = \vartheta_6^2,$$
$$S^{-1}\vartheta_2 S = \vartheta_3^4, \qquad S^{-1}\vartheta_6 S = R^2.$$
$$S^{-1}\vartheta_3 S = \vartheta_4,$$

Bezeichnet man noch R mit ϑ_7 und S mit ϑ_8, so geht hieraus hervor, dass die Substitutionen

$$\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots \vartheta_8, \ \vartheta_1^2, \vartheta_2^2, \ldots \vartheta_8^2, \ \vartheta_1^4, \vartheta_2^4, \ldots \vartheta_8^4$$

durch Transformation mit S und R in einander umgetauscht werden. Dabei kann jede der genannten Operationen an Stelle jeder andern derselben Gesammtheit treten. Zunächst sieht man nämlich, dass $\vartheta_8, \vartheta_5, \vartheta_6, \vartheta_4, \vartheta_3, \vartheta_1, \vartheta_2$ in einander übergeführt werden können. Wegen der Relationen

$$S^{-1}\vartheta_1 S = \vartheta_2^4, \qquad S^{-1}\vartheta_4 S = \vartheta_5^2$$

sind auch die Quadrate und die 4ten Potenzen der letztgenannten 7 Operationen in diese selbst überführbar. Wegen der Gleichung

$$S_{-1}\vartheta_7 S = S^{-1}RS = \vartheta_1^4$$

gilt nun dasselbe auch von ϑ_7, ϑ_7^2 und ϑ_7^4.

Man definire jetzt eine Gruppe G'', welche aus der Gesammtheit der Substitutionen besteht, die aus S und R erzeugt werden können. Diese Gruppe enthält auch die Substitution U_0, denn es ist

$$U_0 = \vartheta_3^2 . \vartheta_5 .$$

Es lässt sich jetzt beweisen, dass G'' eine zweifach transitive Gruppe von der Ordnung 168 ist,*) genau ebenso, wie der entsprechende Beweis für die Gruppe G' im Fall I geführt wurde.

Man kann auch die Substitutionen von G'' classificiren. Zunächst kennt man 8 . 6 Circularsubstitutionen von der Ordnung 7, und zwar sind von diesen die folgenden 24

$$\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots \vartheta_8, \ \vartheta_1^2, \vartheta_2^2, \ldots \vartheta_8^2, \ \vartheta_1^4, \vartheta_2^4, \ldots \vartheta_8^4$$

unter sich gleichberechtigt. Ebenso sind die 24 Operationen

$$\vartheta_1^3, \vartheta_2^3, \ldots \vartheta_8^3, \ \vartheta_1^6, \vartheta_2^6, \ldots \vartheta_8^6, \ \vartheta_1^5, \vartheta_2^5, \ldots \vartheta_8^5$$

unter sich gleichberechtigt und in die vorigen nicht transformirbar. Die zweifache Transitivität der Gruppe gestattet jedes Buchstabenpaar in jedes andere zu transformiren. Da es nun 28 Buchstabenpaare aus 8 Buchstaben giebt, findet man jedenfalls 28 mit U_0 gleichberechtigte Operationen der Ordnung 3 und dann noch ebensoviele davon verschiedene, nämlich die Quadrate der vorigen, die mit U_0^2 gleichberechtigt sind. Es fragt sich noch, ob nicht U_0 mit U_0^2 gleichberechtigt ist.

*) Man könnte damit die Untersuchung als abgeschlossen ansehen, da die Existenz einer einfachen Gruppe der Ordnung 168 bekannt ist, und somit G'' nothwendig mit dieser übereinstimmen muss.

Nun ist

$$\vartheta_1 \vartheta_2 = (a_4 a_1)(a_3 a_8)(a_6 a_7)(a_2 a_5) = X.$$

Da in der Substitution U_0 die Buchstaben a_7 und a_8 nicht versetzt werden, suche ich durch Transformation von X eine Substitution zu erhalten, die a_7 mit a_8 vertauscht. Diese erhält man durch Transformation mit einer Substitution, die a_8 nicht ändert und a_7 an Stelle von a_3 bringt. Es ist

$$S^{-4} X S^4 = (a_1 a_5)(a_2 a_6)(a_3 a_4)(a_7 a_8) = Y.$$

Daraus ergiebt sich

$$Y^{-1} U_0 Y = U_0^2.$$

Es müssen also mindestens 56 unter sich gleichberechtigte Substitutionen der Ordnung 3 existiren.

Nun ist ferner

$$U_0^{-1} Y U_0 = (a_1 a_6)(a_2 a_3)(a_4 a_5)(a_7 a_8),$$
$$U_0^{-2} Y U_0^2 = (a_1 a_3)(a_2 a_5)(a_4 a_6)(a_7 a_8).$$

Es existiren also mindestens drei gleichberechtigte, mit X ähnliche Operationen, die a_7 in a_8 verwandeln. Mit Rücksicht auf die Anzahl der Buchstabenpaare, in die man a_7 und a_8 transformiren kann, ergiebt sich hieraus die Existenz von mindestens $\frac{3 \cdot 28}{4} = 21$ gleichberechtigten Operationen von der Ordnung 2.

Es zeigt sich noch, dass

$$X \cdot Y = (a_1 a_3 a_7 a_2)(a_4 a_5 a_6 a_8) = Z$$

ist; es giebt also auch Substitutionen von der Ordnung 4. Man erhält hieraus

$$(Z^3)^2 = Z^2 = (a_1 a_7)(a_2 a_3)(a_4 a_6)(a_5 a_8) = W,$$
$$X^{-1} Z X = Z^3 = Z^{-1}.$$

Wir besitzen also in Z und Z^3 zwei *gleichberechtigte* Operationen von der Ordnung 4, die beide dieselbe Operation von der Ordnung 2 zum Quadrat haben, nämlich W. Diese Substitution W ist aber mit den früher gefundenen Substitutionen der Ordnung 2 gleichberechtigt, denn es ist

$$S^{-2} W S^2 = (a_1 a_6)(a_2 a_3)(a_4 a_5)(a_7 a_8).$$

Es müssen nun zu jeder von jenen gleichberechtigten Operationen von der Ordnung 2 zwei Operationen von der Ordnung 4 gehören und es müssen mindestens 42 gleichberechtigte Operationen von der Ordnung 4 existiren.

Nun ist

$$1 + 24 + 24 + 56 + 21 + 42 = 168,$$

also existiren keine anderen Substitutionen mehr, und die gefundenen Zahlen sind die genauen Anzahlen für die in den einzelnen Classen von gleichberechtigten enthaltenen Operationen. Hieraus kann auch die Einfachheit der Gruppe bewiesen werden*). Eine ausgezeichnete Untergruppe muss von jeder Classe von Operationen, von denen sie eine enthält, alle enthalten. Vermöge der obigen Rechnungen erkennt man auch, dass die ausgezeichnete Untergruppe keine der Cirkularsubstitutionen der Ordnung 7 enthalten kann, ohne mit der Gesammtgruppe G'' zusammenzufallen. Ist dies nicht der Fall, und die Ordnung der ausgezeichneten Untergruppe grösser als 1, so könnte diese Ordnungszahl nur sein

$$1+56, \quad 1+21, \quad 1+42,$$
$$1+21+42, \quad 1+56+42, \quad 1+56+21, \quad 1+56+21+42,$$

welche Zahlen aber keine Theiler von 168 sind.

Es existirt also eine und nur eine einfache Gruppe von der Ordnung 168.**)

§ 8.

Die Ordnungszahl 180.

$180 = 5 \cdot 2^2 \cdot 3^2$. Es giebt $5\varkappa + 1$ Gruppen von der Ordnung 5 in jeder Gruppe von der Ordnung 180. Soll die Gesammtgruppe einfach sein, so ist $\varkappa = 0$ ausgeschlossen, und da $5\varkappa + 1$ ein Theiler von $2^2 \cdot 3^2$ sein muss, ist $\varkappa = 1$ oder $\varkappa = 7$ zu setzen. Im ersten Fall wäre die vorausgesetzte einfache Gruppe G von 180 Operationen als transitive Gruppe von Vertauschungen von 6 Buchstaben darstellbar, was dem Hilfssatz VII widerspricht. Wenn also eine solche einfache Gruppe G existirte, müsste sie 36 Untergruppen von der Ordnung 5, also $4 \cdot 36 = 144$ Operationen von der Ordnung 5 enthalten. Dies müssten zugleich alle Operationen dieser Ordnung sein, denn jede solche Operation müsste eine Gruppe von der Ordnung 5

*) Dasselbe Verfahren benutzt Herr F. Klein bei der Ikosaedergruppe. Vergl. a. a. O. p. 18.

**) Es ist zugleich gezeigt, dass zweierlei transitive Gruppen von Vertauschungen von 8 Buchstaben existiren, die 168 Substitutionen enthalten, eine auflösbar, die andere einfach. In der Aufzählung, die Herr Askwith von den Gruppen gegeben hat, die aus Vertauschungen von 8 Buchstaben gebildet werden können, scheint eine Gruppe übersehen zu sein. Es findet sich daselbst nur eine Gruppe von der Ordnung 168, und zwar ist dies die einfache Gruppe. Vergl. Quaterly Journal of Mathematics, Vol. XXIV, p. 324. Es finden sich dagegen beide Gruppen in der Kirkman'schen, bis zu 10 Buchstaben gehenden Aufzählung: Proceedings of the literary and philosophical society of Manchester, vol. III. 1864, p. 144. Herr Cayley im Quaterly Journal, Vol. XXV, p. 154 giebt auch nur eine der beiden Gruppen.

erzeugen, die zu jenen 36 Gruppen gehörte. Nun bleiben ausser der Identität noch 35 Operationen übrig, die in Classen von gleichberechtigten vertheilt werden sollen. Ist h die Zahl der Operationen einer Classe, so ist wiederum die Gruppe G als transitive Gruppe von Vertauschungen von h Buchstaben darstellbar, und desshalb ist $h > 6$ anzunehmen. Es kommen also für h nur die Theiler von 180 in Betracht, die grösser als 6 und nicht grösser als 35 sind, d. h. die Zahlen

$$9, 10, 12, 15, 18, 20, 30.$$

Es ist somit 35 in eine Summe von Zahlen dieser Reihe zu spalten, was nur auf zwei Arten möglich ist:

$$35 = 20 + 15,$$
$$35 = 15 + 10 + 10.$$

Nun muss eine Operation von der Ordnung 3 vorhanden sein. Diese heisse U und gehöre zu einer Classe von h_0 gleichberechtigten. Ist nun U mit U^2 gleichberechtigt, so theilen sich die h_0 gleichberechtigten Operationen in Paare, derart, dass die zwei Operationen desselben Paares Quadrate von einander sind. Es ist dann h_0 eine gerade Zahl. Bei der Transformation mit den Operationen der Gruppe G vertauschen sich die $\frac{h_0}{2}$ Paare, und man kann wegen der Einfachheit der Gruppe wieder den Schluss machen, dass sie durch Vertauschungen von $\frac{h_0}{2}$ Buchstaben sich darstellen lässt. Aus den angeführten Gründen kann man in diesem Fall h_0 weder gleich 15 noch gleich 10 setzen. Man muss also die Zerlegung der Zahl 35 nach der Formel

$$35 = 20 + 15$$

annehmen; es giebt 20 Operationen der Ordnung 3, und die übrigen 15 müssen von der Ordnung 2 sein, da solche Operationen nach dem Satz von Cauchy auch existiren müssen.

Ist aber U nicht mit U^2 gleichberechtigt, so müssen zwei Classen von je h_0 gleichberechtigten Operationen existiren, diejenige, zu welcher U, und diejenige, zu welcher U^2 gehört. Man muss also dann die Zerlegung

$$35 = 15 + 10 + 10$$

annehmen und $h_0 = 10$ setzen. Die übrigbleibenden 15 Operationen müssen wiederum von der zweiten Ordnung sein.

Jedenfalls müsste also die vorausgesetzte Gruppe G bestehen: aus der Identität, aus 144 Operationen fünfter, 20 Operationen dritter und 15 Operationen zweiter Ordnung. Diese 15 Operationen müssten unter sich gleichberechtigt sein.

Aus dem Hilfssatz II ergiebt sich nun, wenn $p = 3$ gesetzt wird, dass die Gruppe G als transitive Gruppe von Vertauschungen von 10

Buchstaben dargestellt werden kann. Drückt man nun alle Operationen von G dementsprechend aus, so kann ihre Form noch näher bestimmt werden. Zunächst lässt sich einsehen, dass die Untergruppe H, die aus den Operationen von G besteht, welche einen bestimmten Buchstaben nicht ändern, von der Ordnung 18 ist, also keine Substitution von der fünften Ordnung enthält. Es kann also auch G keine Cirkularsubstitution 5[ter] Ordnung enthalten, und es sind alle Substitutionen dieser Ordnung von der Form:

$$(a_0 a_1 a_2 a_3 a_4)\,(a_5 a_6 a_7 a_8 a_9).$$

Was nun die Operationen dritter Ordnung anlangt, so können diese nach dem Hilfssatz VI keine Cirkularsubstitutionen sein. Hat man aber eine Substitution wie z. B.

$$V = (a_0 a_1 a_2)\,(a_3 a_4 a_5)\,(a_6 a_7 a_8)\,(a_9),$$

so kennt man zwei Substitutionen V und V^2 von der dritten Ordnung, die a_9 nicht ändern. Da die Gruppe transitiv ist, kann man durch Transformation zwei Substitutionen finden, die irgend einen andern Buchstaben nicht versetzen. Damit hätte man schon 20, offenbar verschiedene Operationen dritter Ordnung, und zwanzig solcher Operationen giebt es nur im Ganzen. Somit existirten *nur* zwei Operationen dritter Ordnung, die den Buchstaben a_9 nicht ändern, was damit in Widerspruch steht, dass die vorhin genannte Gruppe H von 18 Operationen eine Untergruppe 9[ter] Ordnung enthalten muss. Es sind desshalb alle die Substitutionen dritter Ordnung in der Form

$$(a_0 a_1 a_2)\,(a_3 a_4 a_5)\,(a_6)\,(a_7)\,(a_8)\,(a_9)$$

anzunehmen.

Die Substitutionen zweiter Ordnung müssten entweder alle zwei Cyklen oder alle vier Cyklen von zwei Buchstaben besitzen, denn ungerade Substitutionen kommen nicht vor. Um den 1[ten] Fall*) zu erledigen, nehme ich an, dass gerade die Substitution

$$S = (a_1 a_2)\,(a_3 a_4)$$

der Gruppe angehöre. Es muss nun jedenfalls eine Substitution derselben Art in der Gruppe enthalten sein, die einen der Buchstaben a_1, a_2, a_3, a_4 in einen der übrigen, etwa in a_5 überführt; denn die Substitution S muss mit ihren gleichberechtigten zusammen die ursprüngliche, transitive Gruppe wiedererzeugen. Diese zweite, mit S ähnliche Substitution kann man nun auf 5 wesentlich verschiedene Arten annehmen:

*) Man könnte auch den S. 69 Anm. genannten Satz des Herrn C. Jordan anwenden, dessen Beweis aber a. a. O. nicht vollständig ausgeführt ist.

$$T = (a_1 a_5)(a_2 a_3), \qquad T = (a_1 a_5)(a_3 a_6),$$
$$T = (a_1 a_5)(a_2 a_6), \qquad T = (a_1 a_5)(a_6 a_7).$$
$$T = (a_1 a_5)(a_3 a_4),$$

Man erhält, diesen fünf Annahmen entsprechend, für ST:

$$(a_1 a_3 a_4 a_2 a_5), \quad (a_1 a_6 a_2 a_5)(a_3 a_4), \quad (a_1 a_2 a_5), \quad (a_1 a_2 a_5)(a_3 a_4 a_6),$$
$$(a_1 a_2 a_5)(a_3 a_4)(a_6 a_7).$$

Es ist also nur die 4te Annahme

$$T = (a_1 a_5)(a_3 a_6)$$

mit den früheren Resultaten vereinbar. Es wird somit T aus S gebildet, indem man aus jedem Cyklus von S einen Buchstaben nimmt und jeden dieser beiden Buchstaben mit einem völlig neuen zusammennimmt. Die aus S und T erzeugten Substitutionen sind in der Formel

$$A_\alpha \cdot B_\alpha \quad [\alpha = 1, 2, 3, 4, 5\ 6]$$

enthalten, wo $A_1, A_2, \ldots, A_6$ die Substitutionen von a_1, a_2, a_5 bedeuten, und unter B_α dasjenige zu verstehen ist, was aus A_α durch Transformation mit

$$Q = (a_1 a_3)(a_2 a_4)(a_5 a_6)$$

hervorgeht. Es spielen hier also die sechs Buchstaben insofern keine verschiedene Rolle, als die durch S und T erzeugte Gruppe von 6 Substitutionen durch eine transitive Gruppe von Vertauschungen der sechs Buchstaben in sich transformirt wird (nämlich durch die aus S, T und Q zusammengesetzte).

Es muss nun eine mit S ähnliche Substitution R existiren, die einen der Buchstaben $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ in einen neuen verwandelt, und zwar kann man unbeschadet der Allgemeinheit annehmen a_1 in a_7. Weil aber ausserdem die Substitution R in Bezug auf S und auf T gerade so gebildet sein muss, wie T in Bezug auf S gebildet war, so bleiben bloss zwei Annahmen übrig:

$$R = (a_1 a_7)(a_3 a_8),$$

oder

$$R = (a_1 a_7)(a_4 a_8).$$

In diesen Fällen erhält man für $S . T . R$ beziehungsweise

$$(a_1 a_2 a_5 a_7)(a_3 a_4 a_6 a_8) \quad \text{und} \quad (a_1 a_2 a_5 a_7)(a_3 a_6),$$

also Substitutionen 4ter Ordnung, was den früheren Resultaten widerspricht.

Die 15 gleichberechtigten Operationen zweiter Ordnung sind somit in der Form

$$W = (a_0 a_1)(a_2 a_3)(a_4 a_5)(a_6 a_7)(a_8)(a_9)$$

anzunehmen, und es möge gerade W selbst der Gruppe angehören.

Weil nun diese Substitution mit ihren gleichberechtigten die Gruppe wiedererzeugen muss, ist eine ähnliche Substitution W' anzunehmen, die den Buchstaben a_8 versetzt. Man kann ausserdem annehmen, dass diese Substitution W' den Buchstaben a_9 nicht ändert. Könnte man dies nämlich nicht, so müsste jede Substitution 2ter Ordnung, die a_9 nicht ändert, auch a_8 unverändert lassen. Es würden dann die 10 Buchstaben in 5 Paare von solchen zerfallen, die zusammengehören so wie a_9 und a_8, und es ergiebt sich bei genauerer Ueberlegung, dass die Gruppe imprimitiv wäre, und dass die gefundenen Paare Systeme der Imprimitivität bildeten. Daraus kann dann geschlossen werden, dass die Gruppe durch Vertauschungen von nur 5 Buchstaben darstellbar sein müsste oder nicht einfach sein könnte, was beides gegen die Voraussetzungen streitet.

Ich nehme also die Substitution W' so an, dass sie den Buchstaben a_9 nicht ändert und zugleich den Cyklus $(a_0 a_8)$ enthält. Ein ähnliches Raisonnement wie das auf S. 71 durchgeführte zeigt, dass die folgenden Fälle zu unterscheiden sind:

$$W' = (a_0 a_8)(a_1)(a_9)(\cdot\ \cdot)(\cdot\ \cdot)(\cdot\ \cdot),$$

$$W' = (a_0 a_8)(a_1 a_2)(a_3)(a_9)(\cdot\ \cdot)(\cdot\ \cdot),$$

$$W' = (a_0 a_8)(a_1 a_2)(a_3 a_4)(a_5)(a_9)(a_6 a_7),$$

$$W' = (a_0 a_8)(a_1 a_2)(a_3 a_4)(a_5 a_6)(a_7)(a_9).$$

Im dritten und vierten Fall erhält man für $W W'$ eine Cirkularsubstitution 7ter, beziehungsweise 9ter Ordnung. Diese beiden Fälle sind also auszuschliessen.

Der erste Fall spaltet sich in drei Unterfälle:

$$1)\quad W' = (a_0 a_8)(a_1)(a_9)(a_2 a_3)(a_4 a_5)(a_6 a_7),$$

$$2)\quad W' = (a_0 a_8)(a_1)(a_9)(a_2 a_4)(a_3 a_5)(a_6 a_7),$$

$$3)\quad W' = (a_0 a_8)(a_1)(a_9)(a_2 a_4)(a_5 a_6)(a_7 a_3),$$

je nachdem W' mit W drei Cyklen oder einen oder gar keinen gemein hat. Der zweite von den früheren Fällen

$$W' = (a_0 a_8)(a_1 a_2)(a_3)(a_9)(\cdot\ \cdot)(\cdot\ \cdot)$$

liefert die Unterfälle:

$$4)\quad W' = (a_0 a_8)(a_1 a_2)(a_3)(a_9)(a_4 a_5)(a_6 a_7),$$

$$5)\quad W' = (a_0 a_8)(a_1 a_2)(a_3)(a_9)(a_4 a_6)(a_5 a_7).$$

In diesen Fällen 1), 2), 3), 4), 5) berechnet sich nun $W W'$ folgendermassen:

1) $(a_0 a_1 a_8)$,

2) $(a_0 a_1 a_8)(a_2 a_5)(a_3 a_4)$,

3) $(a_0 a_1 a_8)(a_2 a_7 a_5)(a_3 a_4 a_6)$,

4) $(a_0 a_2 a_3 a_1 a_8)$,

5) $(a_0 a_2 a_3 a_1 a_8)(a_4 a_7)(a_5 a_6)$.

Man erhält somit lauter Substitutionen, die nach den vorhergehenden Untersuchungen in der Gruppe nicht vorkommen sollten.

Es giebt also keine einfache Gruppe von der Ordnung 180.

Damit ist das in der Einleitung genannte Resultat bewiesen:

Innerhalb des Zahlgebiets von 1 *bis* 200 *existiren nur zwei einfache Gruppen mit zusammengesetzter Ordnungszahl, die Ikosaedergruppe und die Gruppe der Modulargleichung für die Transformation* 7*ter* *Ordnung der elliptischen Functionen.*

Tübingen, den 9. August 1891.

Ueber Covarianten ebener Collineationen.

Von

P. Muth in Osthofen (Rheinhessen).

Im Folgenden sollen einige auf die Covarianten ebener Collineationen und auf Systeme von Collineationen bezügliche Fragen erörtert werden, wobei ein gewisses Netz von Kegelschnitten in Betracht gezogen werden muss, welches auch von anderer Seite behandelt worden ist.*) Für unsere Zwecke muss dieses Netz jedoch in etwas anderer Weise als bisher entwickelt werden, namentlich soll die Benutzung der Doppelelemente der Collineation vermieden werden, was durch Herleitung einiger wichtiger Identitäten ermöglicht wird.

§ 1.

1) Setzen wir

$$f(xu)=\sum_{(i,k=1,2,3)} a_{ik}\,x_i u_k=\sum_{(i=1,2,3)} u_i f(x)_i=\sum_{(k=1,2,3)} x_k f_k(u),$$

so wird durch

$$f(xu)=0$$

eine collineare Beziehung in der Ebene vermittelt, durch welche dem Punkt $x_1 \mid x_2 \mid x_3$ der Punkt $f(x)_1 \mid f(x)_2 \mid f(x)_3$ zugeordnet wird.

Die inverse Collineation von $f=0$ wird durch

$$\varphi(xu)=\sum_{(i,k=1,2,3)} \alpha_{ik}\,x_k u_i=0$$

dargestellt, wo

$$\alpha_{ik}=\text{adj. } a_{ik} \quad \text{in} \quad \Delta=\sum \pm a_{11}\,a_{22}\,a_{33},\ \Delta \neq 0.$$

Jedem Punkte $\xi_1 \mid \xi_2 \mid \xi_3$ der Ebene ist durch die Collineation f ein bestimmter Kegelschnitt

*) Burmester, kinematisch geom. Untersuchungen. Zeitschrift f. Math. und Phys., XX. Jahrg. Schnell, Ueber Schaaren unter einander persp. Tetraeder. Diss. Viernheim 1891, § 9.

$$C_\xi^2(f) = \begin{vmatrix} \xi_1 & x_1 & f(x)_1 \\ \xi_2 & x_2 & f(x)_2 \\ \xi_3 & x_3 & f(x)_3 \end{vmatrix} = 0$$

zugeordnet; nur die Punkte x dieses Kegelschnitts haben die Eigenschaft, dass x, x', ξ in einer Geraden liegen, wobei x' den zu x homologen Punkt bedeutet.*) Alle Kegelschnitte $C_\xi^2(f)$ constituiren ein Netz, welches wir *das Netz von f* nennen werden. Jedem Punkt ξ entspricht ein Kegelschnitt $C_\xi^2(f)$ des Netzes, und umgekehrt. Ist nämlich Γ ein solcher dem Netze angehöriger Kegelschnitt, und man greift zwei beliebige Punkte a und b desselben heraus, so schneiden sich die Geraden aa' und bb' in einem Punkte p von Γ; denn $C_p^2(f)$ geht durch a und b, gehört dem Netze an und ist folglich identisch mit Γ, also $\Gamma \equiv C_p^2(f)$, d. h. Γ ist dem Punkt p zugeordnet.

Liegt ein Dreieck auf einem Kegelschnitt des Netzes, so liegt es perspectiv zu seinem homologen in f, das Perspectivitätscentrum liegt ebenfalls auf Γ und umgekehrt.

Wie die reciproke Ueberlegung zeigt, berühren alsdann die Seiten eines solchen Dreiecks zugleich mit der Perspectivitätsaxe v einen Kegelschnitt:

$$K_v^2(f) = \begin{vmatrix} v_1 & u_1 & \varphi_1(u) \\ v_2 & u_2 & \varphi_2(u) \\ v_3 & u_3 & \varphi_3(u) \end{vmatrix} = 0$$

des dem Netze dual gegenüberstehenden Gewebes der Collineation f.

2) Durch

$$\sum a_{il} a_{lk} x_i u_k = 0, \qquad (i, k, l = 1, 2, 3)$$

ist bekanntlich das Quadrat der Collineation f gegeben. Diese Collineation

$$f^2 = f^2(xu)^{**)} = \sum a_{il} a_{lk} x_i u_k = \sum A_{ik} x_i u_k = 0$$

erzeugt ein Netz:

$$C_\xi^2(f^2) = \begin{vmatrix} \xi_1 & x_1 & f^2(x)_1 \\ \xi_2 & x_2 & f^2(x)_2 \\ \xi_3 & x_3 & f^2(x)_3 \end{vmatrix} = 0$$

von Kegelschnitten.

Nun ist evident, dass das Netz einer Collineation f von dem Netze der inversen Collineation φ nicht verschieden ist, denn der Kegelschnitt $C_\xi^2(\varphi)$ ist identisch mit dem Kegelschnitt $C_{\xi'}^2(f)$ und $\Delta \neq 0$. Durch passende Constantenbestimmung hat man so die Identität:

---

*) So auch im Folgenden: x'' homolog zu x', $x^{(n)}$ homolog zu $x^{(n-1)}$.

**) Eine Verwechselung mit $(f(xu))^2$ ist wohl ausgeschlossen.

$$\text{(a)}\qquad \begin{vmatrix} f(\xi)_1 & x_1 & f(x)_1 \\ f(\xi)_2 & x_2 & f(x)_2 \\ f(\xi)_3 & x_3 & f(x)_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \xi_1 & x_1 & \varphi_1(x) \\ \xi_2 & x_2 & \varphi_2(x) \\ \xi_3 & x_3 & \varphi_3(x) \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Ferner ist identisch: *)

$$\text{(b)}\qquad \begin{vmatrix} \xi_1 & x_1 & \varphi_1(x) + if(x)_1 - f^2(x)_1 \\ \xi_2 & x_2 & \varphi_2(x) + if(x)_2 - f^2(x)_2 \\ \xi_3 & x_3 & \varphi_3(x) + if(x)_3 - f^2(x)_3 \end{vmatrix} \equiv 0,$$

wobei

$$i = a_{11} + a_{22} + a_{33}.$$

Aus (a) und (b) ergiebt sich:

$$\text{(c)}\qquad \begin{vmatrix} \psi(\xi)_1 & x_1 & f(x)_1 \\ \psi(\xi)_2 & x_2 & f(x)_2 \\ \psi(\xi)_3 & x_3 & f(x)_3 \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} \xi_1 & x_1 & f^2(x)_1 \\ \xi_2 & x_2 & f^2(x)_2 \\ \xi_3 & x_3 & f^2(x)_3 \end{vmatrix}$$

wobei

$$\psi(xu) = iu_x - f(xu).$$

Die Identität (c) besagt, dass jeder Kegelschnitt des Netzes von f^2 dem Netz von f angehört; aber auch das Umgekehrte ist im Allgemeinen richtig, denn

$$\det\ \psi(xu) = i\, i_\varphi - \Delta$$

wo

$$i_\varphi = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33},$$

ist im Allgemeinen nicht 0. Wird aber

$$i \,.\, i_\varphi - \Delta = 0,$$

so wird f^2 perspectiv **) und alle $C_\xi^2(f^2)$ zerfallen. Natürlich tritt dieses auch ein, wenn f selbst perspectiv ist, also alle $C_\xi^2(f)$ zerfallen. Es muss demnach det $C_\xi^2(f^2)$ die Factoren $i \,.\, i_\varphi - \Delta$ und det $C_\xi^2(f)$ enthalten, d. h. es ist:

$$\det C_\xi^2(f)^2 \equiv C(i \,.\, i_\varphi - \Delta) \det C_\xi^2(f).$$

Die Constante bestimmt man als 1 und findet schliesslich:

$$\text{(d)}\qquad \det C_\xi^2(f^2) \equiv (i \,.\, i_\varphi - \Delta) \det C_\xi^2(f).$$

Allgemein gilt demnach der Satz:

„*Das Netz der Collineation f ist identisch mit dem Netze von f^2.*"

„*Entspricht* A *dem Punkte a in $\psi(xu) = 0$, so ist*

$$C_a^2(f^2) \equiv C_A^2(f).\text{“}$$

Die Identität (c) zeigt, in welcher Art jeder der Kegelschnitte

---

*) Pasch, Math. Ann. 1884. Bd. 23, S. 427.

**) Pasch, l. c. S. 428.

$$C_1{}^2 = x_2 f^2(x)_3 - x_3 f^2(x)_2 = 0,$$
$$C_2{}^2 = x_3 f^2(x)_1 - x_1 f^2(x)_3 = 0,$$
$$C_3{}^2 = x_1 f^2(x)_2 - x_2 f^2(x)_1 = 0$$

linear von den Kegelschnitten:

$$D_1{}^2 = x_2 f(x)_3 - x_3 f(x)_2 = 0,$$
$$D_2{}^2 = x_3 f(x)_1 - x_1 f(x)_3 = 0,$$
$$D_3{}^2 = x_1 f(x)_2 - x_2 f(x)_1 = 0$$

abhängt, z. B. ist: $(\xi_1 = 1,\ \xi_2 = \xi_3 = 0)$,

$$C_1{}^2 = (i - a_{11}) D_1{}^2 + a_{12} D_2{}^2 - a_{13} D_3{}^2.$$

In der Determinante:

$$P = \begin{vmatrix} 0 & -a_{13} & a_{12} & 0 & -A_{13} & A_{12} \\ a_{23} & 0 & -a_{21} & A_{23} & 0 & -A_{21} \\ -a_{12} & a_{31} & 0 & -A_{32} & A_{31} & 0 \\ a_{33}-a_{22} & a_{21} & -a_{31} & A_{23}-A_{22} & A_{21} & -A_{31} \\ -a_{12} & a_{11}-a_{33} & a_{32} & -A_{12} & A_{11}-A_{33} & A_{32} \\ -a_{13} & -a_{23} & a_{22}-a_{11} & A_{13} & -A_{23} & A_{22}-A_{11} \end{vmatrix} \text{*)}$$

verschwinden alle Subdeterminanten höher als 3[ten] Grades identisch.

3) Man nehme nun zwei Punkte a und b in der Ebene an, bestimme den Schnittpunkt p von aa'' und bb'', und den Schnittpunkt p_1 von aa', bb'. $C_p{}^2(f^2)$ ist identisch mit $C_{p_1}^2(f)$; denn der durch a und b gehende Kegelschnitt des Netzes von f und f^2 (2)) ist nach 1) bezüglich den Punkten p_1 in Bezug auf f, p in Bezug auf f^2 zugeordnet. p und p_1 sind also homologe Punkte in $\psi(xu) = 0$. a, b, p, p_1 liegen auf einem Kegelschnitt des Netzes, pp' geht natürlich durch p_1, p_1'' liegt auf pp_1. Diese letztere Eigenschaft der Collineation ψ hat Herr Pasch auf anderem Wege abgeleitet.**) Da dem Punkte p in ψ der Punkt p_1, dem Punkt a aber ein a_1' auf der Geraden $aa' = ap_1$ entspricht, so sind die Geraden aa'' und aa' homologe Geraden von ψ***).

4) Nachdem wir diese Zusammenhänge constatirt, betrachten wir ein durch:

$$\chi(xu) = \varkappa u_x + \lambda f(xu) + \mu f^2(xu) = 0$$

gegebenes System von doppelt unendlich vielen Collineationen. $\varkappa$, λ, μ sind Parameter, $u_x = u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3$.

*) Bezeichnung gemäss der von Herrn F. London gewählten. Vergl. F. L.: Ueber die Polarfiguren der ebenen C^3, Math. Ann. Bd. 36, § 2, 12.

**) Math. Ann. 1891. Bd. 38, S. 32.

***) Vergl. § 2, 2).

α) Greift man zwei Collineationen χ_1 und χ_2 heraus, so ist die Collineation: $\chi_1 \cdot \chi_2$ d. h. die durch aufeinanderfolgende Anwendung von χ_1 und χ_2 entstehende neue Collineation $= \chi_2 \cdot \chi_1$ und gehört wieder dem System χ an; ebenso die inverse einer jeden Collineation $\chi : \chi^{-1}$, daher auch: $\chi_1^{-l} \cdot \chi_2^{-m}$ u. s. w.

β) Wendet man auf einen Kegelschnitt des Netzes von f eine beliebige Collineation χ an, so erhält man einen Kegelschnitt desselben Netzes.

α) und β) ergeben sich daraus, dass alle Covarianten von f durch u_x, f, f^2 ausgedrückt werden können.*)

γ) Wir betrachten nun das Netz von χ; man hat:

$$\text{(e)} \quad \begin{vmatrix} \xi_1 & x_1 & \varkappa x_1 + \lambda f(x)_1 + \mu f^2(x)_1 \\ \xi_2 & x_2 & \varkappa x_2 + \lambda f(x)_2 + \mu f^2(x)_2 \\ \xi_3 & x_3 & \varkappa x_3 + \lambda f(x)_3 + \mu f^2(x)_3 \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} \lambda \xi_1 + \mu \psi(\xi)_1 & x_1 & f(x)_1 \\ \lambda \xi_2 + \mu \psi(\xi)_2 & x_2 & f(x)_2 \\ \lambda \xi_3 + \mu \psi(\xi)_3 & x_3 & f(x)_3 \end{vmatrix} = 0$$

unter Benutzung der Identität (c) in 2). Wir sehen, jeder Kegelschnitt des Netzes von χ gehört dem Netze von f an. Die Umkehrung ist jedoch nur richtig, wenn

$$\det\left(\lambda u_x + \mu \psi(xu)\right) \neq 0$$

ist. Nun ist:

$$\det\left(\lambda u_x + \mu\psi(xu)\right) = \lambda^2 + 2\lambda^2 \mu i + \lambda \mu^2 (i^2 + i_\varphi) + \mu^3 (i \cdot i_\varphi - \Delta).$$

Falls $\lambda \mid \mu$ die cubische Gleichung

$$\omega(\lambda\mu) = \lambda^3 + 2\lambda^2\mu i + \lambda\mu^2(i^2 + i_\varphi) + \mu^3(i \cdot i_\varphi - \Delta) = 0$$

befriedigt, können im Netze von f Kegelschnitte auftreten, welche dem Netze von

$$\chi = \varkappa u_x + \lambda f(xu) + \mu f^2(xu) = 0$$

nicht angehören. Dies tritt erstens ein, wenn χ perspectivisch wird, also $\det C_\xi^2(\chi) \equiv 0$ ist. Es wird aber auch $\det C_\xi^2(\chi) \equiv 0$, wenn f perspectiv wird, d. h. $\det C_\xi^2(\chi)$ muss erstens den Factor $\det C_\xi^2(f)$ und zweitens den Factor $\omega(\lambda\mu)$ besitzen; denn, einer der beiden Factoren verschwindet stets mit $C_\xi^2(\chi)$, also ihr Product. Als weiterer Factor kann nur eine Constante auftreten, die sich als 1 ergiebt; es ist somit:

$$\text{(f)} \qquad \det C_\xi^2\left(\varkappa u_x + \lambda f(xu) + \mu f^2(xu)\right) \equiv \omega(\lambda\mu) \det C_\xi^2(f).$$

Für $\varkappa = 0$, $\lambda = 0$, $\mu = 1$ ergiebt sich die Beziehung (d).

Ist

$$\det C_\xi^2(f) \neq 0, \qquad \omega(\lambda\mu) = 0,$$

so ist

$$\det C_\xi^2(\chi) = 0,$$

d. h. χ perspectiv (bez. die Form χ zerfällt):**)

*) Pasch, Math. Ann. 1884. Bd. 23, S. 429.

**) Zerfallende Formen werden im Allg. drei im Netze auftreten.

„*In dem System* $xu_x + \lambda f(xu) + \mu f^2(xu) = 0$ *giebt es* 3 *Serien von perspectivischen Collineationen, entsprechend den* 3 *Wurzeln der cubischen Gleichung* $\omega(\lambda\mu) = 0$."

Diese Betrachtungen ergeben also rücksichtlich des Netzes von χ das Resultat:

„*Das Netz jeder Collineation des Systems*

$$xu_x + \lambda f(xu) + \mu f^2(xu) = 0$$

ist identisch mit dem Netze von f, *falls wir die Werthe von* $\lambda \mid \mu$, *welche* $\omega(\lambda\mu) = 0$ *befriedigen, ausschliessen.*"

5) Die Gleichung

$$\omega(\lambda\mu) = 0$$

steht in enger Beziehung zu einer anderen cubischen Gleichung:*)

$$\tau(\lambda\mu) = \lambda^3 - i\lambda^2\mu + i_\varphi\lambda\mu^2 - \Delta\mu^3 = 0.$$

Die Discriminante von ω ist identisch mit derjenigen von τ.

$$\text{discr. } \omega(\lambda\mu) = \text{discr. } \tau(\lambda\mu)$$

und die Hesse'sche Form von τ verschwindet identisch, wenn die Hessiana von ω identisch verschwindet, d. h. ω hat eine zwei- resp. dreifache Wurzel, wenn τ eine solche besitzt.

Setzen wir nun voraus, es sei

$$\omega(\lambda\mu) \neq 0 \quad \text{und} \quad \det C_\xi^2(f) \not\equiv 0,$$

so stellt die Gleichung

$$\det C_\xi^2(f) = 0$$

das Product der Doppelgeraden von $f(xu) = 0$**) und gemäss Identität (f) das Product der Doppelgeraden von

$$xu_x + \lambda f(xu) + \mu f(xu) = 0$$

dar. Alle Collineationen dieses Systems $\big(\omega(\lambda\mu) \neq 0\big)$ haben dieselben Doppelgeraden, dieselben Doppelpunkte wie $f(xu) = 0$. Auch hieraus kann man folgern, dass f und jede Collineation, $\big($für welche $\omega(\lambda\mu) \neq 0\big)$ des Systems dasselbe Netz besitzen.

Hat f drei Doppelpunkte $d_1 d_2 d_3$, also $\tau = 0$ drei verschiedene Wurzeln, so hat auch $\omega = 0$ drei verschiedene Wurzeln, wie oben gezeigt; es giebt 3 Serien von perspectiven Collineationen im System χ, die Centren fallen nach d_1, d_2, d_3, die Axen nach resp. $d_2 d_3$, $d_3 d_1$, $d_1 d_2$.

Hat f aber nur zwei Doppelpunkte, also $\tau = 0$ eine Doppelwurzel, so besitzt auch $\omega = 0$ eine Doppelwurzel und es treten nur zwei Serien

---

*) Dieselbe tritt bei der Bestimmung der Doppelpunkte von f auf.

**) Es ist auch:

$$\det C_\xi^2(f) \equiv -\frac{1}{4} \sum \pm\, \xi_1 f(\xi)_2 f^2(\xi)_3.$$

perspectiver Collineationen auf im System χ; besitzt f nur einen Doppelpunkt, so tritt im System χ nur eine Serie perspectiver Collineationen auf.

§ 2.

1) Wir können jetzt den Satz*) beweisen:

„Aus einem Dreieck abc, welches auf einem Kegelschnitt des Netzes von f liegt, geht durch Anwendung der Collineationen des Systems

$$\varkappa u_x + \lambda f(xu) + \mu f^2(xu) = 0$$

eine Doppelserie von Dreiecken hervor, welche zu je zweien und sämmtlich zu abc perspectivisch liegen. Jedes dieser Dreiecke bestimmt mit den übrigen doppelt unendlich viele Perspectivitäts-Axen und Centren, die ersteren umhüllen einen Kegelschnitt, welcher dem Dreieck eingeschrieben ist, die letzteren liegen auf einem Kegelschnitt, welcher demselben umgeschrieben ist.“

Aus § 1 Abschnitt 4, β) folgt zunächst, dass *jedes Dreieck* der Doppelserie auf einem Kegelschnitt des Netzes von f liegt. Ist A ein beliebiges dieser Dreiecke, so geht es in ein anderes A' der Doppelserie durch eine Collineation der Form $\varkappa u_x + \lambda f(xu) + \mu f^2(xu) = 0$ über. (§ 1, 4, α)); diese Collineation wird aber entweder perspectivisch oder ihr Netz ist identisch mit dem von f. (Hauptsatz in § 1, 4); also liegen in jedem Fall A und A' perspectivisch (§ 1, 1). q. e. d.

Die *„uneigentlichen“* Collineationen des Systems, vermittelt durch die Formen desselben mit verschwindender Determinante, liefern uneigentliche Dreiecke. Die Ecken eines solchen in einer Geraden (oder fallen zusammen in einen Doppelpunkt). Ein eigentliches Dreieck geht in ein uneigentliches durch eine (uneigentliche) Collineation des Systems über, liegt also nach Vorstehendem (§ 1, 1) und 4), (e)) zu diesem perspectiv, woraus sich einfach die Perspectivität zweier uneigentlicher Dreiecke ergiebt. Für ein degenerirtes Dreieck zerfällt der betr. Kegelschnitt der Centren u. s. w. *Alle Formen des Systems kommen sonach in Betracht.*

2) Entspricht dem Punkte a ein a' in f, ein A in $\varkappa u_x + \lambda f + \mu f^2 = 0$, so sind die Geraden aa' und aA homologe Geraden einer Collineation.**) Denn jeder Geraden ist so eine Gerade eindeutig zugeordnet; gehen aa', bb', ... durch einen Punkt, so gehen auch aA, bB, ... durch einen Punkt; die Beziehung zwischen aA, aa' ist collinear und durch:

$$\lambda u_x + \mu\, \psi(xu) = 0$$

gegeben, $\big(\omega(\lambda\mu) \neq 0,\ f$ nicht perspectivisch$\big)$.

*) Schnell, l. c. S. 24.

**) Pasch, l. c. S. 429.

2) Betrachten wir also zwei nicht perspective Collineationen χ_1 und χ_2 des Systems und bezeichnen den Punkt

$$\chi_1(ua) \equiv \varkappa_1 u^a + \lambda_1 f(au) + \mu_1 f^2(au) = 0$$

mit A_1, analog:

$$\chi_2(ua) \equiv \varkappa_2 u_a + \lambda_2 f(au) + \mu_2 f^2(au) = 0$$

mit A_2, so gilt der Satz:

„*Die Geraden aA_1 und aA_2 sind homologe Geraden einer Collineation des Systems $\varkappa u_1 + \lambda f + \mu f^2 = 0$.*"

Man beweist denselben auch direct in folgender Weise: a und b, A_1 und B_1 sind homologe Punkte, aA_1 und bB_1, aA_2 und bB_2 sind homologe Geraden einer Collineation χ_α des Systems.*) Heisst χ_β die Collineation des Systems, welche aA_1 in aA_2 überführt, so geht über:

die Gerade aA_1 in aA_2 durch χ_β, aA_2 in bB_2 durch χ_α,
" " aA_1 " bB_1 " χ_α, bB_1 " bB_2 " χ_β,

weil χ_α und χ_β vertauschbar sind. $\big(\S\ 1,\ 4,\ \alpha)\big)$.

Anderer Beweis:

Liegen die Punkte a, A_1, A_2, A_3 ... geradlinig, so gilt dies auch für die Punkte b_1, B_1, B_2, B_3, ..., wenn man obige Bezeichnungsweise beibehält.*) In Folge des ebenfalls gültigen dualen Satzes gehen die Geraden aA_2, bB_2, cC_2 ... durch einen Punkt, wenn aA_1, bB_1, cC_1 ... durch einen Punkt gehen; denn aA_1 und bB_1, aA_2 und bB_2 sind homologe Geraden einer Collineation, aA_1 und cC_1, aA_2 und cC_2 einer zweiten Collineation des Systems, somit stehen aA_1 und aA_2 in collinearer Beziehung, wenn χ_1 und χ_2 nicht perspectiv sind.

3) Die eben entwickelten Sätze gestatten eine directe Anwendung auf die zu einer Collineation f covarianten Collineationen, welche bekanntlich sämmtlich in der Form:

$$\varkappa \Delta u_x + \lambda i_\varphi f(xu) + \mu i f^2(xu) = 0$$

darstellbar sind.

„*Alle zu f covarianten Collineationen besitzen dasselbe Netz v Kegelschnitten.*"

Denn die Gleichung:

$$\omega(\lambda\mu) = 0,$$

von § 1, 5), verwandelt sich im jetzigen Falle in eine Relation zwischen den Fundamentalinvarianten von f; wir setzen aber f allgemein voraus, also ist im Allgemeinen

$$\omega(\lambda\mu) \neq 0.$$

Deshalb lässt sich der Anfangs dieses Paragraphen ausgesprochene Satz für die Covarianten auch so fassen:

„*Aus einem Dreieck geht durch Anwendung der zu f covarianten*

*) Pasch, Math. Ann. 1884. Bd. 23, S. 430. Anm. 1.

Collineationen eine Schaar von Dreiecken hervor; liegen zwei dieser Dreiecke perspectiv, so liegt jedes Dreieck zu jedem anderen (und zu dem gegebenen Dreieck) perspectiv."

Dieser Satz *umfasst* und *verallgemeinert* einen von Herrn Pasch über die Wiederholung einer Collineation und einen zweiten von Herrn Keller über das Involutionsviereck gegebenen Satz.*)

α) Fasst man nämlich nur die Covarianten ins Auge, welche die Potenzen von f darstellen, so hat man die Verallgemeinerung des ersteren Satzes.

Die Collineationen $f^{\varkappa}$ ($\varkappa = -\infty$ bis $+\infty$) liefern eine Serie von Dreiecken.

Liegen zwei Dreiecke der Serie perspectiv, so gilt dies für irgend zwei derselben.

Jedes bestimmt mit allen anderen unendlich viele Centren und Axen, erstere liegen auf einem Kegelschnitt, welcher dem Dreieck umgeschrieben ist, letztere umhüllen einen solchen, welcher dem Dreieck eingeschrieben ist (§ 2, 1)). Man kann auch sagen: „der Punkt $(a a^{(\varkappa)}, b b^{(\varkappa)}) = p$ beschreibt bei variirendem $\varkappa$ einen Kegelschnitt."

β) Um den Keller'schen Satz zu verallgemeinern, brauchen wir unserem allgemeinen Satze nur folgende Fassung zu geben:

„*Bestimmen die Vierecke $abcd$, $a'b'c'd'$ eine Collineation f, die Vierecke $\alpha\beta\gamma\delta$, $abcd$ eine zu f covariante Collineation χ und es liegen zwei dieser Vierecke perspectiv, so liegen sie auch perspectiv zum dritten.*"

Für
$$\chi = \psi(xu) = iu_x - f(xu)$$
wird $\alpha\beta\gamma\delta$ das Involutionsviereck von $abcd$ und $a'b'c'd'$**) und man hat den Satz von Herrn Keller. Zugleich folgt:

„*Jedes dieser drei Vierecke liegt mit den Perspectivitätscentren, welche es mit den beiden anderen bestimmt, auf einem Kegelschnitt.*"

Construirt man zu $abcd$, $\alpha\beta\gamma\delta$ und $a'b'c'd'$, $\alpha\beta\gamma\delta$ die weiteren Involutionsvierecke, so liegen diese unter sich und jedes zu den andern drei Vierecken perspectiv u. s. w.

4) Sämmtliche (eigentliche) Collineationen, welche ein Dreieck $a\,b\,c$ in ein Dreieck $a'b'c'$ überführen, bilden ein dreigliedriges System:
$$\varkappa u_{a}'(bcx) + \lambda u_{b}'(cax) + \mu u_{c}'(abx) = 0.$$
(Durch weitere Zuordnung der Punkte d und d' wird im System eine Collineation
$$u_{a'}(bcx)\,(dab)\,(dac)\,(b'c'd') + u_{b'}(cax)\,(dbc)\,(dba)\,(c'd'a') \\ + u_{c'}(abx)\,(cda)\,(cdb)\,(d'a'b) = 0$$

*) M. Pasch, Math. Ann. 1891. Bd. 38, S. 32. A. Keller: Ueber gewisse Vierecke u. s. w. Dissert. Giessen 1888.

**) Die nöthigen Litteraturnachweise siehe bei Pasch, l. c. S. 37.

bestimmt. *Dies ist die einfachste algebraische Darstellung einer durch die Zuordnung* $[abcd,\ a'b'c'd']$ *festgelegten Collineation*).

„*Wendet man auf ein Dreieck A, welches mit abc auf einem Kegelschnitt liegt, die sämmtlichen Collineationen dieses Systems an, so erhält man eine Doppelserie von zu je zweien perspectiv liegenden Dreiecken.*“

Jedes dieser Dreiecke kann nämlich durch eine Doppelserie von Collineationen χ, welche dieselben Doppelpunkte a', b', c' haben, in die übrigen übergeführt werden und liegt ausserdem mit $a'b'c'$ auf einem Kegelschnitt, also auf einem Kegelschnitt des Netzes von χ (§ 1, 5)); somit ergiebt sich unser Satz aus § 2, 1). Für die Centren und Axen der perspectiven Dreiecke gilt natürlich das l. c. Ausgeführte.

Schlussbemerkung.

Im Raume lassen sich den obigen analoge Untersuchungen anstellen. Man kann dabei Identitäten zu Grund legen, welche neue Interpretationen der zu einer Collineation covarianten Collineationen ermöglichen. Z. B. ist (bei analoger Bezeichnung wie oben)

$$\sum \pm \psi(\xi)_1\, x_2\, f(x)_3\, f^2(x)_4 \equiv \sum \pm \xi_1\, x_2\, f(x)_3\, f^3(x)_4.$$

Also:

„*Schneiden sich die Ebenen* $aa'a'''$, $bb'b'''$, $cc'c'''$ *in einem Punkte* α, *die Ebenen* $aa'a''$, $bb'b''$; $cc'c''$ *in einem Punkte A, so sind* α *und A homologe Punkte in* $\psi(xu)$*) $= iu_\alpha - f(xu) = 0$.“

Ferner beweist man:

Die Ebenen $aa^{(n)}a^{(m)}$ und $aa^{(r)}a^{(s)}$ sind homologe Ebenen einer zu f covarianten Collineation. U. s. w.

Osthofen, im Juli 1891.

*) Ueber ψ vergleiche man P. Muth, Invarianten räumlicher Collineationen und Recipr. Math. Ann. 1889. Bd. 33, S. 494 und 499.

Nouvelle démonstration du principe de correspondance de Cayley et Brill, et méthode à la détermination des coïncidences de correspondances algebriques sur une courbe d'un genre quelconque.

Par

H. G. Zeuthen à Copenhague.

M. Cayley a énoncé le premier l'extension du principe de correspondance à une courbe d'un genre quelconque*); mais l'illustre savant n'en a publié aucune démonstration complète. En récompense il a montré, par de nombreuses et importantes applications, soit à la détermination de courbes, soit au problème des polygones inscrits et circonscrits**), qu'il connaissait très bien la portée du principe étendu, et qu'il savait le rendre utile même au cas de correspondances auxquelles son énoncé ne s'applique pas immédiatement (correspondances dont la «valeur» est négative).

On doit la première démonstration complète du principe étendu à M. Brill***). Elle était algébrique, mais son auteur ne tardait pas à lui donner une forme plus géométrique†). Sa démonstration a plus tard été développée ultérieurement, et M. Brill††) et son élève M. Junker†††) ont fini par mettre en pleine lumière les éliminations qui conduisent, dans la géométrie analytique, à la détermination des coïncidences dont le principe indique le nombre. Une démonstration

*) Comptes rendus, t. 62, p. 658; Proceedings of the London math. society, vol. 1. Je regrette de ne connaître pas ce dernier mémoire, qui doit contenir la démonstration du cas trés-essentiel pour la démonstration complète où les courbes que j'appele φ ont des points k-tuples; mais j'espère que ce mémoire va être publié prochainement dans les «Collected Mathematical Papers» de Cayley.

**) Transactions of the Royal Society, vol. 158 et 161.

***) Math. Annalen, t. VI, p. 33.

†) Math. Annalen, t. VII, p. 607.

††) Mathematische Annalen, t. XXXI, p. 374.

†††) Inaugural-Dissertation («Ueber algebraische Korrespondenzen») Tübingen 1889.

par les procédés de la géométrie énumérative est due à M. Schubert*), et une démonstration mixte à M. Bobek**). Le principe a encore été démontré au moyen de la théorie des fonctions par MM. Lindemann***) et Hurwitz†). Surtout la démonstration de ce dernier savant met au jour la véritable nature des correspondances de points d'une surface de Riemann à connexion multiple, non seulement celle des correspondances à une «valeur» positive, auxquelles s'applique immédiatement le théorème de Cayley et Brill, et celle des correspondances à une «valeur» négative, qui étaient déjà fort bien illustrées par les applications indirectes de M. Cayley, mais aussi celle des correspondances qu'il appelle singulières.

En même temps que ces démonstrations, dont la liste n'est pas même complète, ouvrent autant de voies de se mettre en possession du théorème, elles servent à l'élucider de côtés très-différents, et elles lui assurent une importance qui ne se borne nullement à la géométrie énumérative.

Malgré cette richesse de démonstrations très-complètes, chacune dans sa direction, j'ai éprouvé le besoin d'une démonstration plus adaptée aux applications à la géométrie énumérative dont M. Cayley avait donné de si importants exemples. Certainement la démonstration énumérative de M. Schubert††) ne laisse rien à désirer au point de vue de la généralité, et elle trouve une place très-naturelle dans son système général de la géometrie énumérative — quand même il n'en fait ensuite aucun usage; mais dans les applications particulières il s'agit non seulement de savoir qu'un nombre de coïncidences a «en général» telle valeur, et que par conséquent il existe, dans chaque cas particulier, une manière d'énumérer les coïncidences qui y conduit. Il s'agit d'avoir pour ce dénombrement des règles précises et applicables même aux cas limites, qui jouent un si grand rôle dans la géométrie énumérative. Il est vrai que M. Brill obtient la même chose en donnant le moyen de former les équations algébriques dont la géométrie énumérative détermine seulement les degrés; mais il convient à la géométrie énumérative d'opérer indépendemment de ces équations, à la formation desquelles, réciproquement, les degrés, une fois trouvés, peuvent être utiles. J'ai donc cherché les règles en

*) Calcul der abzählenden Geometrie § 18.

**) Sitzungsberichte der Wiener Academie vol. 93 II, p. 899 etc.

***) Journal für Mathemat., t. 84, p. 300.

†) Mathematische Annalen, t. 28, p. 567.

††) Une partie essentielle de la démonstration de M. Bobek est analytique. Avant tout son point de départ: «Aus der Annahme folgt, dass die Curvenschaar X die Coordinaten $x_1 : x_2 : x_3$ der Punkte x von C_m^p in rationaler Form enthalten muss» dépend, selon moi, de considérations analytiques.

question, que j'ai énoncées dans le § I, en les faisant dépendre des règles connues pour l'application du principe de correspondance ordinaire, ce qui demandait une démonstration prenant ce principe pour point de départ. Je l'ai donnée dans le § II.

Cette démonstration n'a égard qu'aux correspondance déterminées de la manière supposée dans le théorème de Cayley et Brill. Il est donc utile d'avoir à côté d'elle une méthode de trouver le nombre des coïncidences qui n'en dépend pas. J'ai exposé cette methode dans le § III et montré son application à une démonstration partielle du théorème de Cayley et Brill; mais elle aura ses principales applications aux questions particulières où les courbes servant, dans ce théorème, à déterminer les points Y qui correspondent à un point X sont inconnues ou n'existent pas (correspondances à une «valeur» négative). Le § IV contient des exemples de ces applications: j'applique, en particulier, la methode aux polygons de Steiner, et à la détermination des nombres des groupes de points que MM. Brill et Nöther ont appélés des *groupes speciaux*.

En fondant cette dernière methode sur le principe de la conservation des nombres j'ai cru possible qu'elle présenterait quelque ressemblance avec les considérations qui ont conduit originairement M. Cayley à son théorème. Ce savant l'emploie, en effet, à côté de sa methode fonctionelle, qui est une importante application du principe auquel M. Schubert a donné plus tard le nom que je viens de citer.

Suivant l'usage de la géométrie énumérative, je parlerai ordinairement de la «courbe» et de ses «branches», et non pas de la «surface de Riemann» qui représente à la fois ses points réels et imaginaires et des «nappes» de cette surface. Parfois j'aurai pourtant recours à cette dernière représentation, mais seulement pour illustrer ce qui se passe aux points singulièrs de la courbe. Les points d'embranchement dont je parlerai alors seront donc exclusivement ceux qui résultent de la multiplicité de branches de la courbe, et non pas ceux qui varieront avec le système de coordonnées, étant les points de contact des tangentes qui passent par un point dépendant de ce systeme.

§ I.

Enoncé du théorème de Cayley et Brill.

Soit donnée sur une courbe algébrique f du genre p (de l'ordre n et de la classe n') *une correspondance telle qu'à chaque point X de la courbe correspondent β points Y déterminés par l'intersection de f avec une courbe φ rencontrant encore la courbe f en k points coïncidant avec X et en un certain nombre de points fixes, et qu'à chaque point Y correspondent α points X. Alors il existera sur la courbe f*

(1) $$\gamma = \alpha + \beta + 2kp$$
points où le point X coïncide avec un point correspondant Y.

L'évaluation du nombre γ se fait en general par les mêmes règles que dans le cas particulier où la courbe f est unicursale:

1°. La coïncidence d'un point X avec un point Y en un point multiple de f ne sera pas comprise au nombre γ, si ces deux points se trouvent sur des branches complètes différentes (ou bien sur des nappes de la surface de Riemann qui n'y sont pas réunies par un point d'embranchement).

2°. Pour trouver le nombre des coïncidences confondues qui ont lieu en un point D, qui peut être simple ou point multiple d'une seule branche compléte (point d'embranchement qui réunit plusieurs nappes de la surface de Riemann), on peut exprimer, dans le voisinage de D, les coordonnées des points de f par des séries développées suivant des puissances à exposants entiers et positifs d'une quantité t, et prendre les valeurs de t pour abscisses des points d'une droite. Désignons par D', X' et Y' les points de cette droite qui correspondent aux points D, X et Y de la courbe f. Alors, le dénombrement des coïncidences de X et Y qui ont lieu en D se fait suivant les règles connues*) qui servent au dénombrement des coïncidences des points X' et Y' de la droite qui ont lieu en D'. Il faut donc commencer par donner à $|D'X'|$ une valeur infiniment petite du premier ordre, et déterminer ensuite, successivement, le point X de f qui correspond à X', les points Y qui correspondent à X, et enfin les points Y' correspondant aux points Y qui sont infiniment voisins de D: le nombre cherché sera égal à la somme des ordres des distances infiniment petites $|X'Y'|$.

Dans les cas où D est un point simple de f on peut substituer, dans cette règle, les points D, X et Y à D', X' et Y'. La même chose sera permise si D est un point multiple d'une seule branche complète et si la distance de X à Y, mésurée sur la surface de Riemann n'est pas infiniment petite d'ordre supérieur que $|DX|$. Alors la coïncidence de X avec Y comptera pour 1 dans le nombre γ, si l'ordre η de $|DY|$ est $\geqq 1$, $|DX|$ étant regardée comme infiniment petite du premier ordre, et pour η, si $\eta < 1$. On voit la justesse de cette substitution de D, X et Y à D', X' et Y', en déduisant des séries servant à exprimer les coordonnées de X et Y les séries suivantes

$$DX = a \,.\, D'X'^{\sigma} + \cdots,$$
$$DY = a \,.\, D'Y' \;\; + \cdots,$$

*) Voir mon Mémoire sur *les systèmes de courbes planes* dans les Mémoires de l'Académie R. Danoise 5me série X, 1872, p. 330 (46), ou ma Note sur le principe de correspondance dans le Bulletin de Darboux t. V, 1873, p. 186—187.

où σ est égal au plus petit exposant dans les séries servant à exprimer les coordonnées, ou bien au degré de multiplicité de la branche complète (au nombre des nappes de la surface de Riemann réunies au point d'embranchement D). Ces séries montrent, en effet, que l'ordre η de DY sera le même que serait celui de $D'Y'$ si l'on regardait $D'X'$ comme infiniment petit du premier ordre.

Il nous reste donc seulement le cas où *la distance* $|XY|$, *mésurée sur la surface de Riemann, est infiniment petite d'ordre supérieur que* $|DX|$. Alors on aura $XY = DY - DX$, ou bien

$$XY = a(D'Y'^{\sigma} - D'X'^{\sigma}) + \cdots = aX'Y'(D'Y'^{\sigma-1} + \cdots + D'X'^{\sigma-1}) + \cdots.$$

En désignant par ϱ l'ordre de $|XY|$, $|DX|$ étant regardée comme infiniment petite du premier ordre, et par ϱ' l'ordre de $|X'Y'|$, $|D'X'|$ étant régardée comme infiniment petite du premier ordre, on voit que

$$\varrho\sigma = \varrho' + \sigma - 1.$$

La contribution ϱ' de la coïncidence qui a lieu en D au nombre γ sera donc égale à

$$\varrho\sigma - \sigma + 1. -$$

Si les courbes φ servant à déterminer les points Y qui correspondent aux points X ont des points d'intersection fixes avec la courbe f, il est évidemment permis, de regarder le nombre de ces points comme faisant partie *à la fois* du nombre β et du nombre γ. Alors le nombre β comprendra tous les points d'intersection de f avec φ à l'exception des k qui se trouvent au point X. Si nous désignons par n et r les ordres de f et φ, on aura donc

$$(2) \qquad \beta = nr - k.$$

De même s'il y a des points X qui correspondent à tous les points Y de la courbe f, on pourra, à son gré, les compter à la fois au nombre α et au nombre γ. Les courbes φ correspondant à ces points X contiendront toute la courbe f.

§ II.

Démonstration au moyen du principe de correspondance de Chasles.

Nous commencerons par supposer que *le point X soit un point k-tuple de la courbe φ* qui y correspond. Alors on trouvera les coïncidences qui ne sont pas dues à la multiplicité de branches de f en cherchant les courbes φ qui sont tangentes en X à f. Elles auront aussi avec la tangente à f en X un $(k+1)$-ième point d'intersection coïncidant avec X, si nous commençons aussi par *excepter les cas où les courbes φ sont composées de droites, et même tous ceux où il existe des courbes φ qui contiennent toute la tangente à f en X.*

Nous avons besoin premièrement du lieu des $r-k$ points d'intersection, Z, différents de X, de la courbe φ avec la tangente de f en X. On trouve son ordre au moyen de la correspondance des points, M et N, où une droite fixe rencontre une courbe φ et la tangente à f en X. A un point N correspondent évidemment $n'r$ points M, n' étant la classe de la courbe f. Le nombre des points N correspondant à un point M sera égal à celui des courbes φ qui passent par M, c'est à dire par un point quelconque du plan. Selon le principe de la conservation des nombres, ce nombre est égal à celui des courbes φ qui passent par un point P infiniment voisin de f. Un point de f, infiniment voisin de P, étant un point k-tuple X d'une seule courbe φ et un point simple Y de α courbes φ, on voit que $k+\alpha$ courbes φ passent par P. Le nombre des points N correspondant à M est donc égal à $k+\alpha$. Il en résulte que le nombre des coïncidences de M et N est égal à $n'r+k+\alpha$. Or M peut coïncider avec N de deux manières différentes: 1° en un point X de la courbe f, chacune de ces coïncidences comptant pour k, 2° en un des points Z dont nous cherchons le lieu. Celui-ci sera donc de l'ordre

$$n'r+k+\alpha-nk.$$

Nous appliquerons ensuite le principe de correspondance à la détermination du nombre des coïncidences d'un point X avec un des $r-k$ points d'intersection Z de φ avec la tangente à f en X. A cet effet nous joindrons deux points correspondants X et Z à un point fixe du plan, A. Il resulte des ordres des lieux des points X et Z qu'à une droite AX correspondront $n(r-k)$ droites AZ, et à une droite AZ, $n'r+k+\alpha-nk$ droites AX. Il y aura donc

$$n(r-k)+n'r+k+\alpha-nk$$

coïncidences de droites AX et AZ. Une partie de ces coïncidences ont lieu aux droites XZ qui passent par A. Les droites XZ étant les tangentes à la courbe f, et chacune de celles-ci contenant $r-k$ segments XZ, on voit que le nombre de ces coïncidences particulières est égal à $n'(r-k)$. Les autres coïncidences de droites correspondantes AX et AZ résultent des coïncidences cherchées des points X et Z. Le nombre de celles-ci est donc égal à

$$n'r+k+\alpha-nk+n(r-k)-n'(r-k),$$

ou bien, selon la formule (2), à

$$\alpha+\beta+(n'-2n+2)\,k. \tag{3}$$

Ce nombre est égal à celui des coïncidences de points correspondants X et Y de f qui ne sont pas dues à la multiplicité de branches de f. Soit P un point singulier de f qui y a une branche σ-tuple (P sera un point d'embranchement réunissant entre elles σ nappes de la surface de Riemann). Alors si l'on place le point X au point P, σk des points d'intersection de φ avec f coïncideront avec P, et par conséquent $k(\sigma-1)$ des $nr-k$ points Y coïncideront avec X. Chacune de ces coïncidences devant être, conformément aux règles énoncées dans le § I, comptée pour une seule dans le cas où la courbe φ n'est pas tangente à la branche singulière de f, on voit que le nombre des coïncidences de X et Y dues exclusivement à la multiplicité de branches de f est égal à $k\cdot\sum(\sigma-1)$. En ajoutant ce nombre à (3), on trouve

$$\gamma=\alpha+\beta+\left(n'+\sum(\sigma-1)-2n+2\right)k,$$

ou bien, conformément au théorème de Cayley-Brill,

$$\gamma=\alpha+\beta+2kp,$$

le nombre

$$n'+\sum(\sigma-1)-2n$$

étant selon la détermination du genre de Riemann*) égal à $2(p-1)$.

Afin d'éviter les recherches infinitésimales nécessaires pour démontrer directement la justesse générale des règles du § I, il suffit de remarquer que l'étude infinitésimale du nombre des coïncidences qui ont lieu en un point P, simple ou singulier, de la courbe f, dépend exclusivement des propriétés de la courbe f dans le voisinage de ce point et de celles des courbes φ correspondant aux points X de ce voisinage, et non pas du genre p de la courbe donnée f. On peut donc y substituer, dans cette recherche particulière, une courbe unicursale, sans altérer les propriétes dont il s'agit. Il en résulte que les règles énoncées, dont la justesse est évidente pour une courbe unicursale, sont applicables aussi à une courbe algébrique quelconque.

Nous allons ensuite nous occuper des cas où *les courbes φ n'ont pas des points k-tuples à leurs points X*, et où par conséquent une partie des k intersections sont dues à des contacts de branches de φ avec f. Alors la démonstration précédente ne sera plus en vigueur; car la coïncidence d'un point Z avec le point correspondant X n'amène plus celle d'un point Y avec X; mais on peut reduire ce cas au précédent par la substitution suivante, au moyen de laquelle on evite aussi sans difficulté les autres cas que nous avons dû excepter jusqu'à présent**). On substitue aux courbes φ d'ordre r de nouvelles courbes ψ d'ordre $r+s$ passant par les nr points d'intersection de f et φ et

*) Ma détermination dans les Mathematische Annalen III et dans les Acta Mathematica I en est la forme qui appartient à la géométrie énumérative.

**) Dans celui où toutes les courbes φ sont composées de droites on pourrait aussi démontrer le théorème directement au moyen de la correspondance des droites qui joignent X et Y à un point fixe.

par les ns points d'intersection de f avec une courbe fixe d'ordre s. Comme on peut assujétir encore une courbe ψ à

$$\frac{(r+s)(r+s+3)}{2} - n(r+s) + \frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

conditions, on peut obtenir, en faisant s assez grand, que les courbes ψ ont des points k-tuples à leurs points correspondants X (et qu'aucune d'elles ne contient la tangent à f en X). Seulement il peut arriver que la courbe f fait elle-même partie des courbes ψ correspondant à certains points X. Cela arrivera toutes les fois que X se trouve en un point multiple de f, et on ne l'évitera pas même d'une manière générale pour d'autres points de la courbe. Cependant nous avons vu, à la fin du § I, que cette décomposition n'a aucune influence sur la formule (1). Certainement, il peut être douteux combien de nouvelles coïncidences on doit regarder ici comme «dues exclusivement aux multiplicités de branches de la courbe donnée f»; mais cette question ne se présentera pas si la courbe f est une courbe générale d'ordre n. *On a* donc en tout cas *établi le théorème de Cayley et Brill pour une courbe générale d'ordre* n. Il s'ensuit qu'il est juste aussi pour des courbes douées de singularités quelconques, à condition qu'on compte l'influence de ces singularités d'une manière conforme au théorème. Pour trouver cette influence nous n'avons pas besoin de revenir sur le détail de la démonstration, mais de même que nous l'avons fait dans le cas où les courbes φ ont des points k-tuples, nous pouvons renvoyer au cas connu des courbes unicursales.

Le théorème énoncé dans le § I, et les explications que nous y avons ajoutées, sont donc entièrement démontrés.

§ III.

Démonstration au moyen du principe de la conservation des nombres. Extension aux correspondances caractérisèes par un nombre k négatif.

En déterminant directement l'influence d'un point double de la courbe f sur le nombre $\gamma - \alpha - \beta$, on pourrait déduire le principe général de correspondance de Cayley-Brill du cas particulier et connu où la courbe f est unicursale. Ce procédé s'applique, non seulement aux correspondances déterminées par les courbes que nous avons appelées φ, mais aussi — et en général beaucoup plus facilement — à d'autres où le nombre k est remplacé, dans l'expression du nombre des coïncidences, par un nombre négatif. Il faut seulement supposer que la courbe f appartienne à une famille de courbes qui possède une généralité assez grande pour leur attribuer p nouveaux points doubles et les réduire ainsi à des courbes unicursales. Nos recherches ne comprendront donc pas les correspondances singulières indiquées par M. Hurwitz*); car ces correspondances n'appartiennent qu'à des familles singulières de courbes — telles que les courbes hyperelliptiques — qui ne sont pas caractérisées par des nombres de points singuliers. Cela n'empêche pas toutefois qu'on n'applique aussi des procédés semblables à l'étude particulière de chacune de ces dernières correspondances.

Ayant à parler de correspondances à «un nombre k» négatif, j'aurai besoin d'une nouvelle définition de ce nombre que j'appelerai *la valeur de la correspondance***). Je la définis par l'équation

$$\gamma = \alpha + \beta + 2kp, \tag{1}$$

où α et β désignent — de même que dans ce qui précède — les nombres des points X ou Y qui correspondent, respectivement, à un point Y ou X, γ le nombre des coïncidences, et p le genre de la courbe f. Alors le théorème de Cayley et Brill énoncera que, dans le cas où les points Y correspondant à un point X sont déterminés — comme le font MM. Cayley et Brill — par les intersections d'une courbe φ ayant encore en X un certain nombre d'intersections confondues, la valeur de la correspondance sera égale a ce dernier nombre. Dans les cas où la correspondance est déterminée autrement la recherche d'une expression du nombre γ des coïncidences sera identique à-celle de la valeur de la correspondance.

Pour la trouver nous procèderons de la manière suivante. Nous commencerons pas attribuer à la courbe f p nouveaux points doubles, ce que nous avons supposé possible sans abandonner les conditions imposées à la correspondance donnée, et sans que la courbe f ne se décompose. Les p nouveaux points doubles la rendront donc unicursale. Transportons à cette courbe les conditions dé la correspondance donnée, et désignons par α', β' et γ' ce que deviennent alors α, β et γ. Il résulte du principe ordinaire de correspondance que

$$\gamma' = \alpha' + \beta'.$$

On aura donc

$$2kp = \gamma - \alpha - \beta = \gamma - \gamma' - (\alpha - \alpha') - (\beta - \beta').$$

Pour déterminer $\gamma - \gamma'$ il faut soustraire les nouvelles coïncidences dues à l'introduction des p nouveaux points doubles de celles qu'on perd à cause de cette introduction. Les premières ont lieu sur les

*) Mathematische Annalen t. 28, p. 565.

**) Ne sachant pas traduire en francais le mot de «*Werthigkeit*» dont se servent MM. Brill et Hurwitz j'écris «valeur», qui est du moins un mot français. Pour en comprendre l'usage actuel il faut remarquer qu'originairement M. Brill parle de la valeur (*Werthigkeit*) du point X dans la correspondance, qui deviendra en même temps la valeur de Y si l'on détermine réciproquement les points X correspondant aux points Y par des courbes dépendant de ces derniers points.

deux branches distinctes qui forment chacun des nouveaux points doubles (sur les deux nappes distinctes et simples de la surface de Riemann). Leur énumération se fait donc au moyen des règles simples et connues. Pour trouver le nombre des coïncidences qui vont être perdues il faut considérer une courbe du genre p infiniment voisine de la courbe unicursale. Les deux nappes de la surface correspondante de Riemann qui vont être distinctes entre elles par l'introduction d'un nouveau point double sont réunies par deux points d'embranchement séparés par un intervalle infiniment petit. En général une coïncidence aura lieu de X avec Y, si ces deux points se trouvent dans un contour qui se retrécit à un point sans passer aucun point d'embranchement. Ce contour peut s'étendre, dans le cas actuel, de l'une nappe à l'autre par l'intervalle des deux points d'embranchement. Il ne sera donc pas difficile de s'assurer de l'existence ou de l'absence, de coïncidences qui vont être perdues en même temps que les deux points d'embranchement, ou bien par l'introduction du nouveau point double. Leur dénombrement directe serait plus difficile, mais nous indiquerons un moyen qui permet en beaucoup de cas d'y substituer le dénombrement plus facile de coïncidences de points appartenant à une branche (nappe) simple.

On doit encore déterminer les différences $\alpha - \alpha'$ et $\beta - \beta'$ par l'étude de l'influence de l'introduction des p nouveaux points doubles sur α et β. En beaucoup de cas cela se fera immédiatement au moyen de la détermination donnée de la correspondance, en d'autres on l'obtient en déterminant α et β par des correspondances plus simples. Il est permis d'ailleurs de regarder les nombres α et β comme inaltérés par l'introduction des nouveaux points doubles, à condition qu'on compte en faveurs de γ toutes les pertes de α et β.

Nous commencerons par appliquer ce procédé à la démonstration du théorème de Cayley et Brill dans le cas où les β points Y correspondant à un point X sont déterminés par les intersections de f avec une courbe φ qui ne passe pas par X. Alors on peut s'imaginer que l'introduction des points doubles contraigne les courbes φ à passer par ces points fixes; mais nous avons vu que les points fixes n'ont aucune influence sur la différence $\gamma - \beta$. Il peut arriver que la courbe φ passe par un nouveau point double, D, en même temps que X; mais ce cas peut être regardé comme un cas particulier*) où il

*) Nous avouons qu'il est difficile de s'assurer de l'impossibilité absolue de cas d'exception où cette considération serait inapplicable ou quelque chose d'imprévu se présenterait. La même observation pouvant être faite à plusieurs points des démonstrations suivantes, nous regardons comme notre démonstration propre du théorème *général* de Cayley et Brill celle que nous avons donnée dans le § II. Celle qui nous occupe ici en est une *explication* en même temps qu'elle illustre

faut attribuer et à α, β, γ et à α', β', γ' les mêmes valeurs que dans le cas plus général où les courbes φ correspondant à D passent seulement dans le voisinage de D. L'introduction des p points doubles n'a donc aucune influence sur $\gamma - \alpha - \beta$ de façon qu'on trouve que $k = 0$, on bien que $\gamma = \alpha + \beta$.*)

On peut en déduire un autre résultat qui va nous être utile. Il a égard à une combinaison de deux correspondances que nous appellerons leur produit. Soit donnée entre les points X et Y de la courbe f une correspondance (α, β), et entre les points Y et Y_1 de la même courbe une correspondance (μ, ν) — c'est à dire une correspondance telle qu'à un point Y correspondent ν points Y_1, et à un point Y_1, μ points Y. Alors il existera évidemment entre les points X et Y_1 une correspondance (α_1, β_1) telle que

$$\alpha_1 = \alpha\mu, \quad \beta_1 = \beta\nu.$$

Nous l'appellerons le *produit de la correspondance* $(\alpha\beta)$ *de* X *et* Y *et de la correspondance* (μ, ν) *de* Y *et* Y_1.

Nous ne ferons toutefois usage de cette notion que dans le cas, où seulement la correspondance (α, β) est une correspondance quelconque, tandis que dans la correspondance (μ, ν) les points Y_1 sont déterminés par l'intersection de f avec une courbe ψ qui appartient à un faisceau donné et qui passe par Y.

Alors on peut faire correspondre à X à la fois tous les points d'intersection mobiles, Y et Y_1, de la collection des β courbes correspondantes ψ. Dans cette correspondance (α_2, β_2) ou aura évidemment

$$\alpha_2 = \alpha + \alpha_1, \quad \beta_2 = \beta + \beta_1,$$

et en désignant les nombres des coïncidences de X 1° avec un point Y, 2° avec un point Y_1, et 3° avec un des points Y ou Y_1, respectivement par γ, γ_1 et γ_2, on aura

$$\gamma_2 = \gamma + \gamma_1.$$

Or, les courbes ψ ne passant pas par X, nous venons de voir que

$$\gamma_2 = \alpha_2 + \beta_2,$$

ou bien que

$$\gamma_1 - \alpha_1 - \beta_1 = -(\gamma - \alpha - \beta).$$

La valeur k_1 de la correspondance (α_1, β_1) est donc égal à $-k$, où k désigne la valeur de la correspondance donnée (α, β)**).

une methode, qui fournira dans les *cas particuliers bien définis* une démonstration irréprochable, et qui sera utile dans les cas auxquels il serait difficile ou impossible d'appliquer immédiatement le théorème de Cayley et Brill.

*) Le théorème de Cayley et Brill étant démontré dans ce cas particulier, on pourrait appliquer la partie énumérative de la démonstration de M. Bobek, citée dans l'introduction du présent article, à en compléter la demonstration.

**) Ce résultat, auquel nous avons donné la forme limitée qui va nous être

Nous sommes ainsi préparés à appliquer notre nouvelle démonstration du moins à une partie des correspondances des MM. Cayley et Brill. Nous commencerons, comme dans le § II, par le cas où *la courbe φ qui détermine les points Y correspondant à X a en X un point k-tuple dont aucune branche n'est tangente à f,* et nous devons démontrer que ce *nombre k est égal à la valeur de la correspondance.* Dans notre démonstration nous *supposerons toutefois qu'aucune des courbes φ qui correspondent aux p nouveaux points doubles que nous allons introduire ne contienne toute la courbe f.*

On voit qu'en même temps que X passe, sur l'une des deux branches par un point double D, k points d'intersection Y avec l'autre branche coïncideront, eux-aussi, avec D. Celà donnera lieu à un certain nombre de coïncidences de X avec Y dans le cas où l'on regarde la courbe comme limite de celles qui n'ont pas encore ce point double. Il faut prouver que pour chacun des p nouveaux points doubles, nécessaires pour réduire la courbe f à une courbe unicursale, ce nombre est égal à $2k$. Afin de nous appuyer, dans cette énumération, sur des règles connues, nous substituerons à la corresondance donnée (α, β) le produit (α_1, β_1) d'elle et de la correspondance particulière dont nous venons de parler. Si l'on donne au faisceau des courbes ψ qui passent par Y et qui servent à déterminer les points Y_1 une position indépendente du point D, à chacun des points Y qui coïncident avec le point double D sur l'une des deux branches (nappes de la surface de Riemann) correspondra un point Y_1 coïncidant avec D sur l'autre, c'est à dire sur la même branche que le point correspondant X. A un point X qui se trouve sur l'une des deux branches à une distance de D qui est infiniment petit de premier ordre correspondront k points Y_1 se trouvant sur la même branche à des distances infiniment petites du même ordre de X. On voit donc que $2kp$ des coïncidences de la courbe rendue unicursale par l'introduction des p points doubles se trouvent en ces points, et elles cesseront d'exister si la courbe perd de nouveau ces points doubles. On voit donc que la valeur de la correspondance de X et Y_1 est égale à $-k$. Il en résulte que celle de la correspondance donnée de X et Y, est égale à $+k$, ce qu'il fallait démontrer.

immédiatement utile, n'est qu'un cas particulier de la formule dont M. Cayley [Transactions of the Royal Society vol 158, p. 149] fait usage dans le cas où les points d'intersection Y de la courbe φ se distribuent en plusieurs groupes de points Y_1, Y_2 etc.: Si μ_1 des points Y coincident dans chaque point Y_1, μ_2 dans chaque point Y_2 etc., et si la correspondance de X et Y_1 est caractérisée par les nombres α_1, β_1, γ_1, celle de X et Y_2 par α_2, β_2, γ_2 etc., on aura

$$\mu_1(\gamma_1 - \alpha_1 - \beta_1) + \mu_2(\gamma_2 - \alpha_2 - \beta_2) + \cdots = 2k\gamma.$$

M. Cayley fait de nombreuses applications de cette formule qui lui permet de trouver aussi les nombres des coincidences de correspondances dont la valeur est négative.

A côté de ce cas du théorème de Cayley et Brill, auquel il n'est pas permis ici à cause de la supposition que nous avons faite, de réduire les autres — ce que nous avons pu faire dans le § II — nous considèrerons encore celui où *une seule branche de φ passe par X et y a un contact du premier ordre avec f.* Il faut démontrer qu'alors la valeur de la correspondance est égale à 2.

Nous aurons à étudier l'influence de l'introduction des p nouveaux points doubles sur les nombres α, β, γ, appartenant à la correspondance (de X et Y_1), produit de la correspondance donnée (de X et Y) et de la correspondance particulière (de Y et Y_1) dont nous avons déjà fait usage. Désignons par α_1', β_1', γ_1' les valeurs que vont prendre α_1, β_1, γ_1 par cette introduction. Celle-ci n'aura aucune influence ni sur β ni sur β_1, de façon que $\beta_1' = \beta_1$. Une partie des α points X qui correspondent, dans la correspondance donnée, à un point Y coïncideront avec les nouveaux points doubles et disparaîtront dans le cas où on regarde la courbe comme unicursale. Les points de contact des α courbes φ qui passent par un point donné Y pouvant être déterminés par les coïncidences d'une correspondance de points d'intersection simples, et la valeur de cette correspondance étant égale à 1, la réduction $\alpha - \alpha'$ due aux nouveaux points doubles sera égale à $2p$. Si nous désignons (comme nous l'avons fait déjà) par μ le nombre des points Y qui correspondent à un point Y_1, la réduction $\alpha_1 - \alpha_1'$ du nombre α_1 sera égale à $2\mu p$.

Quant à la valeur de $\gamma_1 - \gamma_1'$, le point X, en passant sur l'une des deux branches par un des nouveaux points doubles, D, rencontrera évidemment un point Y_1 correspondant au point d'intersection Y de la courbe φ avec l'autre branche.

La distance DY_1 devenant infiniment petite du second ordre en même temps que DX devient infiniment petit du premier ordre, XY_1 sera du premier ordre, et le passage donne par conséquent lieu à une seule coïncidence. L'introduction des p nouveaux points doubles a donc premièrement donné lieu à l'introduction de $2p$ nouvelles coïncidences.

En même temps elle aura causé la perte d'un certain nombre de coïncidences. En effet, les 2μ points X correspondant à un point Y_1 qui vont être perdus par l'introduction d'un nouveau point double, D, se trouveront en même temps que Y_1 dans le voisinage de D. Il faut donc se rendre compte, pour la courbe du genre p infiniment voisine de la courbe unicursale, des rencontres de Y_1 et de X qui ont lieu dans le voisinage de D. A un point Y_1 de ce voisinage correspondront 1° un point Y du même voisinage et 2° $\mu - 1$ points Y qui ne s'y trouvent pas. Le point Y_1 rencontrant simplement dans ce voisinage chacun des $2(\mu - 1)$ points X qui correspondent à ces derniers points

Y, sans que les rapports infinitésimaux ne présentent rien de particulier, ces rencontres donnent lieu à $2(\mu-1)$ coïncidences qui vont être perdues par la formation du point double. Au contraire le point Y_1 ne rencontrera pas du tout, dans ce voisinage, les points X qui correspondent au point Y qui se trouve dans le même voisinage.

En effet, si le point Y_1 coïncidait avec un de ces points X, la position limite de la courbe φ, tangente à la courbe donnée f en X et passant par Y, serait tangente à la courbe ψ qui sert à déterminer les points correspondants Y et Y_1. Or la position limite de φ qui doit rencontrer f en 3 points confondus sera tangente à une des deux branches du point double D, tandis qu'on peut déterminer le faisceau des courbes ψ ainsi que la tangente en D à la courbe ψ qui passe par ce point ait une direction arbitraire. On voit donc qu'aucune coïncidence de Y_1 avec X ne devient possible de cette façon.

Les mêmes nombres de coïncidence ayant lieu dans les voisinages des autres nouveaux points doubles, la valeur totale de $\gamma_1 - \gamma_1'$ sera égale à $-2p + 2(\mu-1)p$. On trouve ainsi que

$$\begin{aligned}\gamma_1 - \alpha_1 - \beta_1 &= \gamma_1 - \gamma_1' - (\alpha_1 - \alpha_1') - (\beta_1 - \beta_1') \\ &= -2p + 2(\mu-1)p - 2\mu p = -4p.\end{aligned}$$

La valeur de la correspondance de X et Y_1 est donc égale à -2; celle de la correspondance donnée est par conséquent égale à 2, ce qu'il fallait démontrer.

On pourrait essayer d'appliquer le même procédé à une détermination directe de la valeur de la correspondance dans le cas où les courbes φ ont en X un contact du second ordre. En déterminant alors les points de contact des α courbes qui passent par un point donné Y par les coïncidences de points de contact simples et de points d'intersection, on pourrait profiter du résultat que nous venons de démontrer pour trouver que $\alpha - \alpha' = 4p$. On pourrait continuer ensuite la même marche que dans le cas précédent. Seulement la dernière assertion: que le point Y_1 ne rencontre, dans le voisinage de D, aucun des points X dont le point correspondant Y se trouve dans le même voisinage, cesserait d'être vraie, parce que à présent il existera des courbes φ qui ont elles-mêmes des points doubles en D. Nous n'essaierons pas de surmonter les difficultés qui en résultent. Les démonstrations que nous avons déjà données suffisent, en effet, pour *expliquer* d'où vient le terme $2kp$ dans le théorème de Cayley et Brill.

Cette explication théorique n'est pas, toutefois, le principal but de notre seconde démonstration de ce théorème. Celle-ci doit servir avant tout d'exemple d'un procédé qui peut conduire, en beaucoup de cas, plus immédiatement qu'une application, ou des applications successives, du théorème à la détermination du nombre des coïncidences d'une correspondance donnée. Je pense et aux correspondances à une valeur positive dont on ne connaît pas immédiatement les courbes φ, et aux correspondances à une valeur négative, où ces courbes n'existent pas.

Si les nombres caractéristiques α et β ne s'altèrent pas par l'introduction des p nouveaux points doubles, et si les points correspondants X et Y qui tendent à coïncider en même temps avec un de ces points se trouvent sur la même branche, la détermination des coïncidences se réduira à une application du principe de correspondance ordinaire à la courbe rendue unicursale par l'introduction des p nouveaux points doubles, suivie d'une soustraction des coïncidences qui ne sont dues qu'à ces points. La valeur de la correspondance est dans ce cas *negative.* Si la valeur est positive en même temps que α et β restent inaltérés, on peut faire usage de la multiplication dont nous nous sommes déjà servi pour réduire la correspondance à une correspondance à une valeur négative.

Si au contraire le nombre α (ou β) ne garde pas sa valeur à l'introduction des nouveaux points doubles, l'application de notre methode présentera la même difficulté dont notre démonstration partielle du théorème de Cayley et Brill a offert des exemples: celle de déterminer pour une courbe voisine de la courbe unicursale les coïncidence de Y avec ceux des points X qui vont être perdus au moment où la courbe devient unicursale. Alors si la valeur de la correspondance est negative il vaudra le mieux y substituer, au moyen de la multiplication, une correspondance à valeur positive, et si la valeur est positive on peut avoir recours au théorème de Cayley et Brill. Notre étude de ce qui se passe dans le voisinage d'un nouveau point double peut servir dans ce cas à trouver la seule propriété des courbes inconnues φ dont nous ayons besoin à cet effet: le nombre k de leurs points d'intersection avec f qui coïncident avec le point X. Il résulte, en effet, des recherches de M. Hurwitz que les courbes φ servant à déterminer les points Y existent toujours dans le cas d'une correspondance à une valeur positive.

§ IV.

Applications de la methode du § III; polygones de Steiner; groupes spéciaux.

1. *Combien y a — t — il de manières dont l'équation d'une courbe donnée du 4me ordre peut être réduite à la forme suivante:*

$$xztr - y \,.\, yuvs = 0,$$

$x = 0$ et $y = 0$ représentant des droites données qui se rencontrent en

un point de la courbe, et $z = 0$, $t = 0$, $r = 0$, $u = 0$, $v = 0$, $s = 0$ *représentant des droites inconnues?*

Grâce à une propriété bien connue des courbes algébriques il suffira de déterminer les droites z, t, u, v ainsi que les points d'intersection de $x.z.t = 0$ et de $y.u.v = 0$ se trouvent sur la courbe donnée: alors aussi les trois autres points d'intersection de $x.z.t = 0$ avec la courbe se trouveront sur une droite s, et les quatres autres points d'intersection de $y.u.v.s = 0$, sur une droite r.

Nous commencerons par choisir, entre les points d'intersection de $x = 0$ avec la courbe, le point (xu) et le point (xv) — c'est à dire le point d'intersection des droites x et u et celui des droites x et v — et, entre les points d'intersection de $y = 0$ avec la courbe, les points (yz) et (yt). Nous essaierons ensuite de prendre un point quelconque de la courbe, X, pour le point (tv). Ce point connu, on connaîtrait la droite v, ce qui donnerait une détermination à 2 solutions de (zv) et par conséquent de la droite z, ensuite une détermination à 4 solutions de (zu) et par conséquent de la droite u, ensuite une détermination à 8 solutions de (tu). En joignant ces points à (yt) on aura 8 droites t, ce qui donnera 16 points Y dont un devra coïncider avec X, si la question est résolue par notre essai. Cela n'a pas lieu en général, mais il existera entre les points X et Y une correspondance (α, β), où nous venons de voir que $\beta = 16$. La détermination des points X correspondant à un point donné Y se faisant d'une manière analogue, on voit qu'aussi $\alpha = 16$.

Dans le cas où la courbe est unicursale le nombre γ' des coïncidences sera donc égal à 32; mais deux de ces coïncidences auront lieu en chaque point double (si nous supposons que les droites données x et y ne passent par aucun de ces points). En effet, si X se trouve sur l'une des branches d'un point double, un des points correspondants (zv) que nous venons de déterminer se trouvera sur l'autre branche, un des points (zu) sur la première branche, un des points (tu) sur la seconde et ensuite un des points Y sur la même branche que X. Cette coïncidence, qui est évidemment simple, sera perdue en même temps que le point double. On voit ainsi que la valeur de la correspondance est égale à -1, et que le nombre de coïncidences se réduit pour une courbe générale du quatrième ordre, qui est du genre 3, à $32 - 2.3$ ou à 26. Le nombre cherché a donc cette valeur.*)

2. *Polygones de Steiner.* Soient donnés sur une courbe f du 3me ordre les n points fixes $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Inscrivons à f un polygone,

---

*) On pourrait trouver le même résultat et du moins une partie des résultats suivants par une suite d'applications de la formule de M. Cayley que nous avons citée dans la note de la p. 100.

en général ouvert, $P_1 P_2 \ldots P_n P_{n+1}$ dont les côtés rencontrent la courbe aux points fixes, $P_1 P_2$ en A_1, $P_2 P_3$ en A_2 etc. Alors à un point P_1 choisi arbitrairement sur la courbe, correspondra un seul point P_{n+1}, et réciproquement. Le polygone se fermera si le point P_1 coïncide avec P_{n+1}. Le nombre de coïncidences sera égal à 2, si la courbe est unicursale; mais alors il faut se demander si les coïncidences n'ont pas lieu a son point double. Nous supposerons qu'aucun des points donnés $A_1 \ldots A_n$ ne s'y trouve. Alors si l'on place le point P_1 au point double sur l'une des deux branches, les points $P_2 \ldots P_{n+1}$ se trouveront au même point et appartiendront alternativement à l'autre branche et à la même branche que P_1. On voit donc que dans le cas *où n est pair* les deux coïncidences de P_1 et P_{n+1} auront lieu sur les deux branches du point double, et qu'elles vont être perdues en même temps que la courbe perd son point double. La valeur de la correspondance est dans ce cas égale à -1, et le nombre des coïncidences devient égal à zéro pour une cubique générale.

Dans le cas *où n est impair* aucune des deux coïncidences de la courbe unicursale n'aura lieu au point double; mais deux nouvelles coïncidences vont s'y ajouter à la perte du point double, ou bien la valeur de la correspondance sera égale à 1. On peut s'en assurer en ajoutant aux points donnés un nouveau point fixe A de la courbe, la correspondance à la valeur -1 qu'on obtient ainsi étant le produit de la correspondance donnée et d'une correspondance déterminée par un faisceau.

Nous avons donc démontré les résultats suivants:

Le nombre des polygones fermés, $P_1 P_2 \ldots P_n$, *inscrits à une cubique générale et dont les côtés rencontrent encore cette courbe aux points donnés* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *est égal á* 0 *ou à* 4, *suivant que n est pair ou impair* — s'il n'est pas infini. Il faut ajouter (ou sous-entendre) cette dernière exception à tous les nombres qu'on trouve dans la géométrie énumérative; car ils indiquent des degrés d'équations algébriques, et ces équations peuvent être identiques.

Il en résulte le théorème suivant:

Soit donné un polygone fermé, $P_1 P_2 \ldots P_{2r}$, *à un nombre pair de côtés et inscrit à une cubique: alors on pourra faire passer par les points* $A_1, B_1, A_2, B_2, \ldots, A_r, B_r$ *où ses côtés rencontrent encore la courbe les* $2r$ *côtés d'une infinité de polygones de la même nature.* Pour les construire il suffit de substituer à P_1 un point quelconque de la courbe et de faire passer les côtés successifs du nouveau polygone inscrit par les points fixes $A_1 B_1 A_2 \ldots A_r B_r$. Le théorème sera encore applicable à une courbe unicursale du 3^{me} ordre, si aucun des sommets du polygone donné ne se trouve à son point double.

Ce théorème sera celui de Steiner sur des polygones inscrits à une cubique dans le cas où tous les points fixes A_1, A_2, ..., A_n d'un numero impair coïncident avec en seul point A, et de même tous les points fixes B_1, B_2, ..., B_n d'un n⁰ pair coïncident avec un autre point B. La généralisation du théorème de Steiner que nous venons de prouver est indiquée par plusieurs des autres démonstrations qu'on en a données.*) Nous appellerons aussi les polygones plus généraux dont les points fixes sont distincts entre eux *polygones de Steiner.*

3. *Détermination des points fixes des polygones de Steiner.* Il résulte de la construction des polygones de Steiner que chacun des $2r$ points fixes $A_1 B_1 A_2 B_2 \ldots A_r B_r$ sera déterminé par les $2r - 1$ autres. Si l'on n'en donne que les $2r - 2$, les deux qui restent encore se correspondront donc un-á-un. Si la courbe est unicursale et l'un de ces deux points, mais aucun des $2r - 2$ points fixes donnés, se trouve au point double, aussi l'autre s'y trouvera. En effet, si l'on place le premier sommet P_1 du polygone, qui peut être un point arbitraire de la courbe, en un point simple, et le point A_1 se trouve au point double, les sommets suivants P_2, P_3 ... s'y trouveront aussi jusqu'au sommet qui succède à un autre point fixe qui s'y trouve. Le dernier côté devant aboutir au point P_1, il faut que A_1 ne soit pas le seul point fixe qui coïncide avec le point double. Si les deux points correspondants sont A_1 et un des points B, qui est séparé de A par un nombre impair de sommets, ils passeront en même temps par le point double sur la même branche. Si les deux points correspondants sont A_1 et un autre des points A, ils y passeront l'un sur l'une branche, l'autre sur l'autre.

On voit donc, de la même manière que dans le précédent exemple, que la valeur de la première correspondance est égale à -1, et celle de la seconde correspondance, à $+1$, ou bien, que *dans le cas où les $2r$ points A et B sont donnés à un point A et un point B près il n'existera en général aucune coïncidence de ces deux points, et que dans le cas où les $2r$ points sont donnés á deux points A près, il existe quatre coïncidences de ces deux points.*

On déduit du premier de ces résultats le théorème suivant:

Si l'on inscrit à une courbe plane du troisième ordre un polygone à un nombre pair de côtés dont deux qui sont séparés par des nombres impairs de sommets se rencontrent sur la courbe en un point qui n'est pas un sommet, la courbe sera le lieu des points d'intersection des côtés des mêmes nᵒˢ dans tous les polygones inscrits dont les autres côtés ont,

*) En particulier dans celle de M. Küpper, (Mathematische Annalen Bd. XXIV, p. 2), et plus directement dans celle de M. Juel (Nyt Tidsskrift for Mathematik 1891, p. 15). La démonstration par les fonctions elliptiques s'applique aussi bien à la généralisation qu'au théorème propre de Steiner.

dans le même ordre, les mêmes points d'intersection avec la courbe que ceux du premier polygone.

Ce théorème pourrait avoir l'air d'être en contradiction avec le fait qu'un point quelconque du plan C peut être le point d'intersection de deux côtés, séparés par des nombres impairs de sommets, d'un polygone inscrit dont les autres côtés passent encore par des points arbitrairement donnés de la courbe. On trouve en effet, au moyen d'une correspondance dont la valeur est égale à -1, que le nombre des polygones déterminés par ces conditions est égal à 6. On en aura l'explication en remarquant que dans le cas particulier où le point C se trouve sur la courbe, ce point sera lui même, dans quatre des polygones qui satisfont aux conditions données, un sommet adjacent à un des côtés passant par C, et dans les deux autres, à la fois sommet adjacent à tous ces deux côtés. Dans le théorème énoncé, nous avons supposé, au contraire, que le point C où coïncide un des points fixes A avec un des points fixes B ne soit pas sommet du polygone, et alors nous avons prouvé qu'un point quelconque de la courbe jouit de la même propriété. Aussi dans ce cas il existera six polygones dont les deux côtés qui ne passent pas par des points donnés de la courbe passent par un point C pris arbitrairement dans le plan. Devant en même temps se rencontrer sur la courbe, ces deux côtés coïncideront entre eux; l'enveloppe des côtés déterminés ainsi sera de la sixiéme classe.

Il est évident, qu'entre les points fixes d'un polygone de Steiner, il peut exister à la fois plusieurs points d'intersection de côtés séparés par un nombre impair de sommets, et qu'alors on peut placer tous ces points arbitrairement sur la courbe. Les ayant choisi on peut en faire usage dans la détermination des autres points fixes. —

En nous tournant ensuite aux coïncidences de points A séparés par un nombre pair de sommets, nous avons vu que dans le cas où les points fixes d'une série de polygones de Steiner sont donnés à deux points A prés, il existera quatre points de la courbe où peuvent coïncider ces deux points fixes. Nous supposerons que cette coïncidence ait lieu entre les points A_1 et A_2 du premier et du troisième côté en un point X de la courbe, et que seulement les points $B_1, B_2, B_3, A_4\, B_4 \ldots A_r\, B_r$ soient donnés. Alors à chaque point X correspondra un seul point A_3, et à chaque point A_3, quatre points X. On a donc pour cette correspondance de X et A_3

$$\alpha = 4, \quad \beta = 1.$$

Nous avons vu aussi que dans le cas d'une courbe unicursale, le premier de ces nombres se réduit à $\alpha' = 2$. Il faut donc, selon nos remarques à la fin du § III, avoir recours ici au théorème de Cayley et Brill après avoir étudié, au moyen de ce qui se passe dans le voisinage du point double, D, la nature des courbes φ.

Si l'on place le point X sur l'une des deux branches à une distance DX de ce point qui est infiniment petite du premier ordre, on verra en prenant un point P_1 de la courbe à une distance finie de D pour premier sommet du polygone de Steiner et en commençant la construction de ce polygone, que les distances DP_2 et DP_3 deviennent infiniment petites du premier ordre, DP_4 et DP_5 infiniment petites du second ordre, et que le point A_3 se trouvera, sur la branche différente de celle où se trouve X, à une distance de D qui est, elle aussi, infiniment petite du second ordre. Le point construit A_3 devant être, soit qu'on regarde la courbe comme unicursale, soit qu'on la regarde comme limite de courbes du genre 1, le seul point d'intersection mobile et différent de X de la courbe φ, il faut que ces courbes aient en X des contacts simples avec f. La valeur de la correspondance est donc égale à 2, et le nombre γ des coïncidences sera égal à

$$4 + 1 + 2 . 2 = 9.$$

Les points fixes d'une série de polygones de Steiner étant donnés aux trois points A_1, A_2, A_3 près, il y aura, par conséquent, 9 points de la courbe où ces 3 points coïncident entre eux.

Si aussi le point A_4 est inconnu, il existera entre le point X où coïncident A_1, A_2, A_3 et le point A_4 une correspondance où

$$\alpha = 1, \quad \beta = 9.$$

Si l'on attribue à la courbe f un point double D, et si l'on place le point X à une distance de ce point qui est infiniment petite du premier ordre, le point A_4 se trouvera sur l'autre branche à une distance infiniment petite du troisième ordre de D. Il en résulte que les courbes φ de la correspondance auront en X des contacts du second ordre, ou bien que la valeur de la correspondance est égale à 3. Le nombre de coïncidences devient donc $1 + 9 + 2 . 3$ ou 16.

En déterminant ensuite, successivement et de la même manière, les nombres de coïncidences de A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 etc., les autres points fixes étant donnés, on trouve que *dans le cas où tous les points fixes d'un n⁰ pair,* $B_1 B_2 \ldots B_r$ *d'une série de polygones de Steiner à* $2r$ *côtés sont donnés, il existera sur la courbe* r^2 *points où tous les points fixes d'un n⁰ impair,* $A_1, A_2, \ldots, A_r$, *coïncident entre eux.*

Dans le cas où aussi les points fixes donnés, B, coïncident entre eux un des n^2 points cherchés coïncidera avec eux. Les décompositions ultérieures de la solution trouvée qui auront lieu dans ce cas si n n'est pas un nombre premier sont connues.

4. *Détermination des nombres de groupes spéciaux.* Un groupe spécial de points d'une courbe algébrique f est une collection de points

de la courbe qui comptent, dans la détermination des courbes φ qui appartiennent à un système linéaire donné et qui passent par eux, pour un nombre de conditions plus petit que celui des points. Les questions dont nous allons nous occuper auront pour objet les dénombrements des groupes spéciaux dont on connaît un nombre assez grand de points pour les déterminer.

Ces dénombrements ont été exécutés d'une manière générale par M. Castelnuovo*) dans les cas où les courbes du système linéaire sont des courbes «adjointes» d'ordre $n-3$, n étant l'ordre de f. M. Brill**), qui attache sa solution à la détermination algébrique, ne s'occupe que des groupes où un seul point devient superflû à la détermination des courbes du système; en récompense il s'occupe de courbes «adjointes» d'un ordre quelconque.

N'ayant ici qu'á donner des exemples de notre methode nous nous bornerons à la détermination des mêmes nombres qu'a trouvés M. Brill. En adoptant en partie ses notations, nous supposerons toutefois que le nombre des points donnés du groupe qu'il appelle, dans sa recherche générale, $k-i-1$, est égal à zero. Cela ne restreint pas la généralité des solutions; car il est permis de regarder tous les points fixes des courbes φ comme faisant partie des conditions données du système linéaire. Nous supposerons que *les courbes du système linéaire* (φ) *dépendent de* $2i$ *paramètres variables****), *et il s'agit de déterminer sur la courbe* f *un groupe de* $i+1$ *points tel que les courbes* φ *qui passent par* i *de ces points passent d'elles-mêmes par le* $(i+1)^{me}$. *Nous désignerons par* $m+i+1$ *le nombre des points d'intersection mobiles des courbes* φ *avec la courbe donnée* f; m sera donc le nombre de ceux qui n'appartiendront pas au groupe cherché. Le nombre de ces groupes dépendra du genre p de la courbe fixe, f, et des nombres m et i. Nous l'appellerons $\xi(p, m, i)$, ou, dans les cas où il n'y a pas lieu de malentendus, simplement ξ. Qu'il a, en général, une valeur finie résulte de la détermination algébrique de M. Brill, mais il se montrera aussi par nos déterminations numériques.

De même que M. Brill, nous supposerons que les courbes du système donné soient *adjointes* à la courbe f, ou bien qu'elles passent $\mu-1$ fois par tout point μ-tuple de f, et que, dans les cas où plusieurs branches de cette courbe sont tangentes l'une à l'autre, elles

*) Rendiconti della R. Accademia dei Lincei vol V, 1889, p. 130.

**) Ueber algebraische Correspondenzen. Zweite Abhandlung, Mathematische Annalen Bd. 36, p. 321—360, voir en particulier la partie VII^{me}.

***) Il suffit de supposer que les points d'intersection avec f dépendent de $2i$ paramètres; mais en ajoutant, s'il en est besoin, aux conditions du système celle de passer par un nombre convenable de points qui ne se trouvent pas sur f, on peut réduire alors à $2i$ le nombre des conditions du système, sans altérer rien par rapport aux groupes des points d'intersection.

satisfassent encore aux conditions nécessaires pour empècher que la détermination mutuelle des points des groupes ne se réduise, pour une partie des groupes, à celle des points coïncidant avec le même point multiple. Nos procédés seront toutefois applicables à déterminer aussi, dans le cas de courbes φ non adjointes, les solutions indépendentes des points multiples. Dans le cours de notre rcherche nous aurons même besoin de déterminations de cette espèce.

Nous commencerons par nous occuper du cas où $i = 1$. Alors les courbes du système auront $m + 2$ points d'intersection mobiles dont on peut choisir arbitrairement les deux. Ceux-ci déterminent, en général, tous les autres, á l'exception du cas où l'un des deux points en détermine l'autre. Le système étant linéaire, ce cas d'exception aura lieu, s'il passe par les deux points deux courbes différentes du système.*)

Afin de trouver le nombre de ces cas d'exception, nous considèrerons les courbes φ_A du système qui passent par un point fixe A de la courbe et les courbes φ_B qui passent par un point fixe B, et nous ferons correspondre à une courbe φ_A les courbes φ_B qui passent par un point d'intersection mobile, Z, de φ_A. Il existera alors une correspondance entre les autres points d'intersection mobiles, X et Y, de ces courbes avec f. A un point X (ou Y) correspondront m points Z, et m^2 points Y (ou X). La correspondance sera donc caractérisée par les nombres

$$\alpha = \beta = m^2.$$

Pour en trouver la «valeur» il faut rendre la courbe f unicursale en lui attribuant p nouveaux points doubles. Alors les nombres α et β resteront inaltérés; mais, les courbes φ n'étant plus adjointes à la nouvelle courbe, une partie des coïncidences auront lieu aux nouveaux points doubles. Si l'on place le point X sur une des deux branches d'un de ces points, D, un des points correspondants Z se trouvera sur l'autre, et un des points Y sur la même branche que X, ce qui donnera une coïncidence. Les $2p$ coïncidences qu'on obtient ainsi allant être perdues en même temps que les p points doubles, la valeur de la correspondance donnée sera égale à -1, et le nombre γ de ses coïncidences sera égal à

$$\gamma = \alpha + \beta - 2p.$$

$m - 1$ de ces coïncidences ont lieu en chacun des m points où la courbe φ qui passe et par A et par B rencontre encore la courbe fixe f, chacun des autres points d'intersection pouvant être regardée

*) Selon la supposition faite dans la note précédente les courbes passant par les deux points formeront alors un faisceau.

comme le point correspondant Z. Les autres points de coïncidence seront les 2ξ points des ξ couples cherchés, car par chacun d'eux et par le point correspondant Z passent deux courbes différentes du système. On voit donc que $\gamma = m(m-1) + 2\xi$ ou bien que

$$m(m-1) + 2\xi = m^2 + m^2 - 2p,$$

d'où

$$(1) \qquad \xi(p, m, 1) = \xi = \frac{(m+1)m}{2} - p = \binom{m+1}{2} - p.$$

Il est bon de remarquer que le résultat qu'on obtient immédiatement par notre procédé, c'est le nombre des solutions qui appartiennent à la courbe rendue unicursale par l'introduction des p points doubles et qui sont indépendentes de ces points. C'est parce que les solutions qui en dépendent vont être perdues en même temps que ces points doubles, que les nombres trouvés sont applicables aussi à la courbe donnée du genre p. La même chose ayant lieu pour les questions suivantes, nous pourrons simplifier notre manière d'en exprimer les solutions, *en ne parlant, dans ce qui suit, que d'une courbe unicursale f, et en supposant que les courbes φ ne soient pas adjointes par rapport à p de ses points doubles, mais bien par rapport à ses autres points singuliers. En ne cherchant alors que le nombre des solutions indépendantes de ces p points doubles, on trouvera celui qui a égard à une courbe du genre p.*

Afin de trouver la valeur générale du nombre $\xi(p, m, i)$, nous allons chercher, par le principe de correspondance, une formule de réduction servant à l'exprimer par des nombres qui correspondent à des valeurs plus petites de i.

Si l'on ajoute aux conditions données du système celles de passer par deux nouveaux points de la courbe f, A et X, il existera sur cette courbe $\xi(p, m-1, i-1)$ groupes de i points $Z_1, Z_2, \ldots, Z_i$ qui ne comptent que pour $i-1$ conditions à la détermination ultérieure des courbes φ, ainsi que celles qui passent par $A, X, Z_1, Z_2, \ldots, Z_i$ forment un système d'une infinité $(i-1)^{\text{tuple}}$. Une courbe φ passant par $Z_1 Z_2 \ldots Z_i$ et par i autres points de f, $B_1, B_2, \ldots, B_i$ rencontrera encore cette courbe en $m-i+1$ points Y. Si nous regardons les points $A, B_1, B_2, \ldots, B_i$ comme fixes, à chaque point X correspondront

$$\beta = (m-i+1) \, . \, \xi(p, m-1, i-1)$$

points Y.

On pourrait déterminer par une suite d'applications successives du principe de correspondance le nombre α des points X qui correspondent à un point Y, ou bien, des courbes φ qui passent par les $i+1$ points donnés $B_1, B_2, \ldots, B_i$ et Y et par i points $Z_1\, Z_2 \ldots Z_i$ d'un groupe formé du point donné A et de $i+1$ points inconnus (les points Z et X) qui ne compte que pour $i+1$ conditions à la détermination des courbes φ passant par tous ses points; mais nous n'aurons pas besoin de déterminer ce nombre. En effet une partie des α courbes qu'on obtient en substituant, dans cette détermination des courbes φ, le point fixe A à Y donnent lieu à une espèce particulière de coïncidences de points X et Y. Les courbes φ qu'on trouve alors appartiendront elles-mêmes à l'infinité $(i-1)^{\text{tuple}}$ de celles qui passent par $A, Z_1, Z_2, \ldots, Z_i$, et un $(i+2)^{\text{me}}$ point X, et ce dernier point pourra donc aussi bien que A être régardé comme le point, Y, à moins qu'il ne coïncide avec un des i points $B_1, B_2, \ldots, B_i$. A l'exception des $i.\ \xi(p, m-1, i-1)$ cas où le groupe est déterminé par A et un des points B, on aura donc une coïncidence de X et Y. On obtient de cette façon

$$\alpha - i\,.\,\xi(p,\ m-1,\ i-1)$$

coïncidences.

Nous chercherons ensuite les coïncidences dues aux p points doubles, par rapport auxquels les courbes φ ne sont pas adjointes. Si l'on place le point X sur l'une des deux branches d'un de ces points, D, le nombre $\xi(p, m-1, i-1)$ des groupes de points $Z_1 Z_2 \ldots Z_i$ qui ne comptent avec A et X que pour $i+1$ points donnés de φ se décomposera de la manière suivante:

1° Les points $Z_1 \ldots Z_i$ peuvent se trouver tous en des points différents de D. Alors les courbes φ qui passent par X auront aussi un point d'intersection fixe avec l'autre branche de ce point double, et elles satisferont à la condition d'être adjointes par rapport à ce point. Il en résulte que le nombre des groupes de cette nature est égal à $\xi(p-1, m-2, i-1)$.

2° Un des points Z peut coïncider avec le point double D sur l'autre branche, l'infinité $(i-1)^{\text{tuple}}$ de courbes qui passent par A, X, $Z_1, Z_2, \ldots, Z_i$ ayant une tangente fixe en D.

Il ne sera que les derniers groupes, au nombre de

$$\xi(p,\ m-1,\ i-1) - \xi(p-1,\ m-2,\ i-1)$$

qui donneront lieu à des coïncidences de X et Y, les courbes φ qui passent par les points $Z_1 Z_2 \ldots, Z_i$ et $B_1 B_2 \ldots B_i$ devant, dans ce cas, rencontrer aussi la branche où se trouve X en un point Y. On obtient ainsi

$$2p\,[\xi(p,\ m-1,\ i-1) - \xi(p-1,\ m-2,\ i-1)]$$

coïncidences.

Les coïncidences qui restent encore auront lieu aux points des

$$\xi(p,\ m,\ i)$$

groupes de $i+1$ points qui ne comptent que pour i à la détermination de l'infinité $2i^{\text{tuple}}$ des courbes φ. Par chacun des groupes formés d'un point de coïncidence et des i points correspondants se passe, en effet, 1° un système $(i-1)^{\text{tuple}}$ de courbes qui passent encore par le point fixe A, 2° une courbe passant par $B_1, B_2, \ldots, B_i$ qui n'appartient pas à ce système — car nous avons excepté déjà les cas où cette dernière courbe passe encore par A. — Les courbes passant par un des groupes trouvés de $i+1$ points formeront donc un système linéaire i^{tuple}.

Le nombre de ces dernières coïncidences étant égal à

$$(i+1)\,\xi(p,\,m,\,i),$$

on trouve, en exprimant que le nombre total des coïncidences est égal à $\alpha+\beta$, l'équation suivante

$$\begin{gathered}\alpha+(m-i+1)\,.\,\xi(p,\,m-1,\,i-1)\\ =\alpha-i\,\xi(p,m-1,i-1)+2p\,[\xi(p,m-1,i-1)-\xi(p-1,m-2,i-1)]\\ +(i+1)\,\xi(p,m,i),\end{gathered}$$

d'où

$$(2)\qquad \begin{gathered}(i+1)\,\xi(p,m,i)\\ =(m+1-2p)\,\xi(p,m-1,i-1)+2p\cdot\xi(p-1,m-2,i-1).\end{gathered}$$

Sachant déjà (1) que

$$\xi(p,m,1)=\binom{m+1}{2}-p,$$

on peut en déduire successivement les expressions de

$$\xi(p,m,2),\quad \xi(p,m,3)\ \text{etc.}$$

On trouve ensuite par induction l'expression de M. Brill*)

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}&\xi(p,m,i)=\binom{m+1}{i+1}-\binom{p}{1}\binom{m-1}{i-1}+\binom{p}{2}\binom{m-3}{i-3}\cdots\\ &\qquad\cdots\left\{\begin{aligned}&\pm\binom{p}{\frac{i-1}{2}}\binom{m-i+2}{2}\mp\binom{p}{\frac{i+1}{2}} &&\text{(pour } i \text{ impair)}\\ &\pm\binom{p}{\frac{i}{2}}\binom{m-i+1}{1}. &&\text{(pour } i \text{ pair).}\end{aligned}\right.\end{aligned}\right.$$

La formule (2) montre que (3) est juste pour une valeur quelconque de i si elle est juste pour $i-1$. Il suffit, en effet, pour voir qu'identiquement

$$\begin{gathered}(i+1)\sum(-1)^{\lambda}\binom{p}{\lambda}\binom{m-2\lambda+1}{i-2\lambda+1}=(m+1)\sum(-1)^{\lambda}\binom{p}{\lambda}\binom{m-2\lambda}{i-2\lambda}\\ -2p\sum(-1)^{\lambda}\binom{p}{\lambda}\binom{m-2\lambda}{i-2\lambda}+2p\sum(-1)^{\lambda}\binom{p-1}{\lambda}\binom{m-2\lambda-1}{i-2\lambda},\end{gathered}$$

de remarquer que dans les deux derniers termes

*) Mathematische Annalen Bd. XXXVI, p. 355.

$$p\binom{p}{\lambda} = (\lambda+1)\binom{p}{\lambda+1} + \lambda\binom{p}{\lambda},$$

et

$$p\binom{p-1}{\lambda} = (\lambda+1)\binom{p}{\lambda+1}.$$

On pourra donc écrire le dernier membre de la manière suivante

$$\sum(-1)^\lambda\binom{p}{\lambda}\Big[(m+1)\binom{m-2\lambda}{i-2\lambda} + 2\lambda\binom{m-2\lambda+2}{i-2\lambda+2}$$
$$-2\lambda\binom{m-2\lambda}{i-2\lambda} - 2\lambda\binom{m-2\lambda+1}{i-2\lambda+2}\Big].$$

Il est donc égal à

$$\sum(-1)^\lambda\binom{p}{\lambda}\binom{m-2\lambda}{i-2\lambda}\Big[m+1+2\lambda\frac{(m-2\lambda+1)(m-2\lambda+2)}{(i-2\lambda+1)(i-2\lambda+2)}$$
$$-2\lambda-2\lambda\frac{(m-2\lambda+1)(m-i)}{(i-2\lambda+1)(i-2\lambda+2)}\Big],$$

qui se réduit sans difficulté à

$$(i+1)\sum(-1)^\lambda\binom{p}{\lambda}\binom{m-2\lambda+1}{i-2\lambda+1}.$$

Or l'équation (3) est juste pour $i = 1$. Donc elle est juste pour toutes les valeurs de i.

Copenhague, 31. août 1891.

Ueber den Hermite'schen Fall der Lamé'schen Differentialgleichung.

Von

Felix Klein in Göttingen.

Schreiben wir

(1) $$t = \int \frac{dp}{\sqrt{4(p-e_1)(p-e_2)(p-e_3)}}$$

und betrachten die Differentialgleichung:

(2) $$\frac{d^2E}{dt^2} = (Ap + B)E,$$

so läuft Lamé's ursprüngliche Theorie darauf hinaus, alle Fälle aufzuzählen, in denen (2) ein particuläres Integral der folgenden Form besitzt:

(3) $$E = (x-e_1)^{\frac{\varepsilon_1}{2}} \cdot (x-e_2)^{\frac{\varepsilon_2}{2}} \cdot (x-e_3)^{\frac{\varepsilon_3}{2}} \varphi_k(p);$$

hier bedeuten die ε_1, ε_2, ε_3 nach Belieben 0 oder 1, und $\varphi_k(p)$ ist ein Polynom von irgend welchem k^{ten} Grade. Sei noch

(4) $$\frac{n}{2} = k + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{2}.$$

Dann lässt sich Lamé's Resultat dahin aussprechen, dass jedenfalls

$$(5) \qquad A = n(n+1)$$

genommen werden muss, und darauf B aus einer algebraischen Gleichung $(k+1)^{\text{ten}}$ Grades zu bestimmen ist. Nun ist bekanntlich Hermite's Verdienst, den allgemeinen Fall der Differentialgleichung (2). näher betrachtet zu haben, bei dem zwar A den in (5) gegebenen Werth hat, B aber beliebig bleibt. Ich beabsichtige hier keineswegs ausführlich auf die Hermite'schen Resultate einzugehen, ich brauche von denselben nur, *dass in allen Fällen der Hermite'schen Differentialgleichung zwei Particularlösungen* E_1 *und* E_2 *der Gleichung gefunden werden können derart, dass das Product*

$$(6) \qquad E_1 \cdot E_2 = F(p)$$

ein Polynom $2n^{\text{ten}}$ *Grades von* p *ist.* Liegt der von Lamé selbst betrachtete Specialfall vor, so sind diese E_1 und E_2 unter einander identisch, $F(p)$ ist dann das Quadrat des in (3) gegebenen Ausdrucks. Es ist dies zugleich der einzige Fall, in welchem $F(p) = 0$ eine Doppelwurzel besitzen kann oder eine Wurzel, die gleich e_1 oder e_2 oder e_3 wäre*).

Jetzt kennt man die schönen Realitätstheoreme, welche für die Lamé'schen Polynome φ_k gelten: dass die $(k+1)$ überhaupt vorhandenen φ_k alle reell sind und gleich Null gesetzt lauter reelle, von einander verschiedene Wurzeln liefern, welche zwischen e_1 und e_2, bez. e_2 und e_3 zu suchen sind, wobei sich die einzelnen φ_k von einander durch die Art und Weise unterscheiden, wie ihre Wurzeln auf die genannten beiden Intervalle vertheilt sind**). Ich habe mich nun gefragt, in welchen allgemeineren Eigenschaften des Hermite'schen Falles diese Realitätstheoreme enthalten sein mögen. Man denke sich in $F = 0$ die beiden Grössen p und B als rechtwinkelige Coordinaten; dann wird es darauf ankommen, die *Gestalt der Curve* $F(p, B) = 0$ wenigstens schematisch festzulegen. Diese Gestalt ist natürlich vom Werthe der Zahl n abhängig; man wird dieselbe aber nach einer leicht erkennbaren Regel für jedes n zeichnen können, sobald man sie für ein hinreichend grosses ungerades n und für ein ebensolches gerades n kennt.

---

*) Man vergl. etwa die Darstellung im zweiten Bande von Halphen's traité des fonctions elliptiques.

**) Letzterer Umstand wurde von mir zuerst in Bd. 18 der Math. Annalen dargelegt (pag. 237 ff., 1881). Daran schliessen sich die Entwickelungen von Liapunoff (Petersburger Magisterschrift, 1884), Stieltjes (Acta VI, pag. 321 ff., 1884), Markoff (Annalen 27, pag. 143 ff., 1885), Poincaré (Acta VI, pag. 299 ff., 1885).

Statt aller weiteren Erklärung will ich hier also einfach die beiden Figuren hersetzen, die sich auf $n = 5$ und $n = 6$ beziehen:

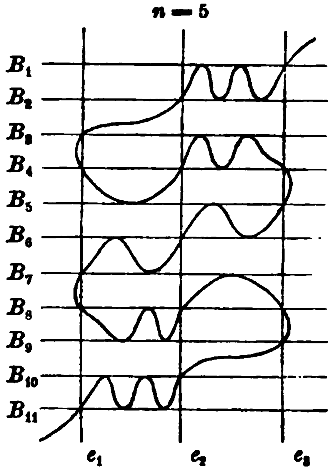


Fig. 1.

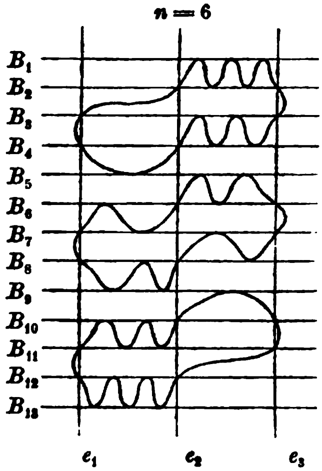


Fig. 2.

In diesen Figuren fallen zunächst die $2n + 1$ (also die 11, bez. 13) horizontalen geraden Linien auf, welche (in ihren Schnittpunkten mit der Curve) die Quadrate Lamé'scher Ausdrücke (3) vom Grade $\frac{5}{2}$ bez. $\frac{6}{2}$ liefern; ich will die constanten Ordinaten dieser Geraden (wie in den Figuren angedeutet ist) mit $B_1, \ldots, B_{11}$, bez. $B_1, \ldots, B_{13}$ bezeichnen.

Eine jede dieser horizontalen Geraden $B = B_i$ hat, wie es sein soll, die Eigenschaft, unsere Curve $F = 0$ in allen Schnittpunkten zu berühren, für die p nicht gerade e_1 oder e_2 oder e_3 ist; in letzteren Punkten findet ein einfacher Schnitt statt. Dabei hat jede einzelne der Geraden ihre eigene Vertheilungsweise der Schnittpunkte auf die Werthe $p = e_1, e_2, e_3$, beziehungsweise die beiden zwischen diesen Werthen eingeschlossenen Intervalle der p-Axe. Zugleich erkennt man (was bisher in dieser einfachen Weise wohl nicht bekannt war), *wie die* $2n + 1$ *Werthe der* B_i *je nach dieser Vertheilungsweise der Schnittpunkte der Grösse nach auf einander folgen.*

Ist nun irgend ein Werth von B gegeben, der nicht zu den B_i gehört, und fragen wir, wie viele reelle Wurzeln die Gleichung $F = 0$ für denselben aufweisen mag, so belehrt uns darüber ein Blick auf die Figur. *Insbesondere werden wir, wenn* $B > B_1$ *oder* $< B_{2n+1}$ *ist, bei ungeradem* n *nur einen reellen Schnittpunkt haben* (*der rechts von* e_3, *bez. links von* e_1 *zu suchen ist*), *bei geradem* n *aber keinen reellen Schnittpunkt.* Nur in den Zwischenlagen haben wir eine grössere Zahl von Schnittpunkten, worüber ich wohl keine specificirten Sätze aufzustellen brauche. *Die Schnittpunkte vertheilen sich übrigens*, wie man findet, *jeweils abwechselnd auf die Hermite'schen* E_1, E_2.

Gelegentlich meiner Untersuchung über die Nullstellen der hypergeometrischen Reihe in Bd. 37 dieser Annalen (1890) habe ich den Begriff der *Charakteristik* X festgelegt, der einer linearen Differentialgleichung bezüglich eines Intervalls der p-Axe zukommt. Man wird verlangen, diese Charakteristiken X im Falle der Hermite'schen Differentialgleichung für die vier Intervalle

$$-\infty, e_1;\quad e_1, e_2;\quad e_2, e_3;\quad e_3, +\infty$$

anzugeben. In dieser Hinsicht gebe ich zunächst die folgenden beiden Figuren, welche die Frage unter den Voraussetzungen $n=5$ und $n=6$ für die Lamé'schen Ausnahmefälle beantworten:

$n = 5$

		e_1		e_2		e_3	
B_1	0		0		2		0
B_2	0		0		2		0
B_3	0		0		2		0
B_4	0		1		2		0
B_5	0		1		1		0
B_6	0		1		1		0
B_7	0		1		1		0
B_8	0		2		1		0
B_9	0		2		0		0
B_{10}	0		2		0		0
B_{11}	0		2		0		0

Fig. 3.

$n = 6$

		e_1		e_2		e_3	
B_1	0		0		3		0
B_2	0		0		3		0
B_3	0		0		2		0
B_4	0		1		2		0
B_5	0		1		2		0
B_6	0		1		2		0
B_7	0		1		1		0
B_8	0		2		1		0
B_9	0		2		1		0
B_{10}	0		2		1		0
B_{11}	0		2		0		0
B_{12}	0		3		0		0
B_{13}	0		3		0		0

Fig. 4.

Entsprechende Figuren entwirft man sofort für beliebige ungerade oder gerade Werthe von n. Und nun hat man für die Hermite'sche Differentialgleichung die Regel:

Liegt B *zwischen* B_i *und* B_{i+1}, *so wird die Charakteristik* X *des einzelnen Intervalls je mit der kleineren der beiden Charakteristiken übereinstimmen, die dem Intervalle für* $B=B_i$ *und* $B=B_{i+1}$ *entsprechen.*

Es bleibt der Fall zu betrachten, dass $B > B_1$ oder $< B_{2n+1}$ ist. Elementare Betrachtungen ergeben hierfür die folgenden beiden Schemata

		e_1		e_2		e_3	
$B > B_1$	X″		0		X′		0
$B < B_{2n+1}$	0		X′		0		X″

Fig. 5.

wobei X′, X″ zwei Zahlen sind, von denen die erstere $\geq \left[\frac{n}{2}\right]$, die zweite $\geqq 0$ ist, und von denen jede einzelne, sofern man nur B gross genug ($> B_1$) oder klein genug ($< B_{2n+1}$) nimmt, beliebig anwachsen kann.

Aber hiermit ist noch nicht gegeben, wie X' und X'' in jedem Falle zusammenhängen. Um hierüber Klarheit zu bekommen, habe ich die *Kreisbogenvierecke* betrachtet, welche im Falle unserer Differentialgleichung eben die Bedeutung haben, wie die von mir in Bd. 37 betrachteten *Kreisbogendreiecke* für die damals zu untersuchende hypergeometrische Differentialgleichung. *Das Resultat ist, dass in allen Fällen die einfache Beziehung*

$$\mathrm{X}' = \mathrm{X}'' + \left[\frac{n}{2}\right] \tag{7}$$

besteht. —

Ich hoffe, dass die hiermit genannten einfachen Sätze für die Anwendungen nützlich sein können. Ihnen gehen andere parallel, die sich auf den *Gränzfall der Functionen des zweiaxigen* Cylinders beziehen (wo e_1 oder e_2 ins Unendliche gerückt ist), und die ich gleich den hier mitgetheilten bereits im vergangenen Winter in meiner Vorlesung über lineare Differentialgleichungen ausgesprochen und abgeleitet habe.

Göttingen, im September 1891.

Ueber den Begriff des functionentheoretischen Fundamentalbereichs.

Von

Felix Klein in Göttingen.

Mit den folgenden Erläuterungen knüpfe ich an die Entwickelungen an, welche ich in Bd. 21 dieser Annalen (Herbst 1882) gab (p. 141 ff. daselbst: *Neue Beiträge zur Riemann'schen Functionentheorie*) und hoffe über gewisse Punkte, die dort nicht ausreichend behandelt sind, Klarheit zu schaffen. Ich schliesse daran einige Andeutungen über eine allgemeine, geometrische Theorie der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die ich bei Gelegenheit auszuführen hoffe.

I.

Die Grundanschauung, von der ich in Bd. 21 ausging, ist die, dass zur Definition eines algebraischen Gebildes nicht nur eine geschlossene Riemann'sche Fläche dienen kann, welche frei im Raume gegeben oder mehrblättrig über eine gegebene Fläche ausgebreitet ist, sondern ebensowohl ein offenes Flächenstück, sofern dessen Ränder durch irgend welches Gesetz paarweise zusammengeordnet sind. Ein solches Flächenstück nannte ich einen *Fundamentalbereich*.

Natürlich wird man diese allgemeine Formulirung, ehe sie anwendbar wird, noch durch bestimmte Voraussetzungen über die analytische Natur des Flächenstücks etc. näher zu umgränzen haben. Denken wir uns, wie im Folgenden ausschliesslich vorausgesetzt wird, unseren Bereich über eine $(x+iy)$-Kugel ausgebreitet, so ist ein Theil dieser Voraussetzungen von selbst erfüllt; wir werden dann aber jedenfalls zufügen wollen (da es sich um ein Aequivalent der gewöhnlichen Riemann'schen Fläche handeln soll, die mit einer endlichen Zahl von Blättern über die Kugel ausgebreitet ist und singuläre Vorkommnisse, die im weiteren Verlaufe der Theorie in Betracht kommen mögen, zunächst ausgeschlossen bleiben können), dass der Bereich keinen Theil der Kugel unendlichfach überdecken soll, und dass er durch eine endliche Zahl von Curven begränzt sein soll, von denen je zwei durch eine *analytische* Function zusammengeordnet sind.

Aber das ist nicht Alles, und eben der nun zu berührende Umstand ist in Bd. 21, trotzdem er der dort gegebenen Darstellung implicite zu Grunde liegt, nicht genügend hervorgehoben worden. Es ist kaum nöthig, dass ich erkläre, was ich unter *der Umgebung* eines dem Bereiche angehörigen Punktes verstehe, insbesondere unter einem *endlichen*, *den Punkt einschliessenden Stücke* der Umgebung. Die Forderung, welche befriedigt sein muss, damit unser Bereich als Fundamentalbereich brauchbar sei, und deren Erfülltsein auch ausreicht, um die Brauchbarkeit sicher zu stellen, ist dann die:

es soll möglich sein, um jeden Punkt des Bereiches herum ein endliches, den Punkt einschliessendes Stück der Umgebung so abzugränzen, dass sich dasselbe durch Vermittelung einer analytischen Function auf die Fläche eines Kreises übertragen lässt.

Zunächst ist ersichtlich, dass diese Forderung für die Brauchbarkeit des Bereiches nothwendig ist. In der That: ein brauchbarer Bereich muss sich Punkt für Punkt durch eine analytische Function auf eine geschlossene, über der $(x+iy)$-Kugel mit einer endlichen Blätterzahl ausgebreitete Riemann'sche Fläche übertragen lassen, — das ist die Definition der Brauchbarkeit —, und für jeden Punkt einer solchen Riemann'schen Fläche gilt die genannte Forderung von selbst.

Aber nicht minder deutlich ist, dass die Forderung ausreicht. Ist sie nämlich erfüllt, so kann man unseren Bereich mit einer endlichen Zahl von Theilbereichen, deren jeder analytisch auf eine Kreisfläche bezogen werden kann, derart überdecken, dass jeder Punkt der Fläche in das Innere wenigstens eines Theilbereichs hineinfällt. Hierauf nun kann man die Existenz analytischer Functionen, welche zu unserem Bereiche gehören, durch genau dasselbe combinatorische Verfahren darthun, durch welches man bei einer gewöhnlichen Riemann'schen Fläche die Existenzbeweise erbringt, indem man die Fläche durch eine endliche Zahl von Kreisscheiben in geeigneter Weise überdeckt. (Was diesen letzteren Beweis angeht, so darf ich hier beiläufig auf die Darstellung verweisen, welche Hr. Fricke davon im ersten Bande meiner „Vorlesungen über elliptische Modulfunctionen“ gegeben hat).

II.

Wir betrachten nun insbesondere, wie in Bd. 21 geschieht, solche über der $(x+iy)$-Kugel ausgebreitete, von Kreisen begränzte Bereiche, deren Kanten durch *lineare* Substitutionen von $(x+iy)$ zusammengordnet sind, und die also, wenn brauchbar, in allgemeinster Weise *linear-automorphe* Functionen definiren, wie eben dort auseinandergesetzt ist. Die einzigen Punkte dieser Bereiche, welche im Sinne der gerade gegebenen Regel näher in Betracht gezogen werden müssen, sind deren *Ecken*. Durch sogenannte erlaubte Abänderung*) kann man dem Bereiche sofort jeweils eine solche Gestalt geben, dass die Umgebung der einzelnen Ecke, die wir gerade betrachten wollen, nicht weiter zerstückelt ist, sondern als ein zusammenhängender von zwei Kreislinien begränzter Sector erscheint; die beiden Begränzungskanten dieses Sectors werden dabei durch eine lineare Substitution von $(x+iy)$ zusammengeordnet sein, für welche die Ecke einen Fixpunkt abgibt. Je nach der Art dieser Substitution werden wir *elliptische, parabolische, hyperbolische*, *loxodromische* Ecken unterscheiden können. Nun gelingt es sofort, ein endliches, die Ecke einschliessendes Stück einer elliptischen, parabolischen, loxodromischen Ecke durch eine analytische Function Punkt für Punkt auf eine Kreisfläche zu übertragen. Dagegen zeigen sich bei einer hyperbolischen Ecke Schwierigkeiten, und wenn man näher zusieht, so erkennt man überhaupt die *Unmöglichkeit*, im Falle einer hyperbolischen Ecke die Uebertragung zu bewerkstelligen. Daher entsteht der Satz:

dass unser Bereich dann und nur dann als Fundamentalbereich brauchbar ist, wenn derselbe keine hyperbolischen Ecken aufweist.

Was den in Rede stehenden Unmöglichkeitsbeweis betrifft, so folgt derselbe, wie mir vor längerer Zeit (um 1883 herum) Hr. Schwarz bemerkte, mit Leichtigkeit aus den über das Verhalten analytischer Functionen seit lange bekannten Fundamentalsätzen. Nehmen wir als einfachstes Beispiel eines Bereiches mit hyperbolischen Ecken einen den Coordinatenanfangspunkt 0 nicht enthaltenden Parallelstreif, dessen beide Begränzungslinien durch die Aehnlichkeitstransformation $z' = kz$ auf einander bezogen sein sollen, wie die nebenstehende Figur versinnlicht; ich denke mir dabei $k < 1$, so dass beispielsweise aus dem Punkte A der Figur der Punkt A' durch die Aehnlichkeitstransformation hervorgeht. Unter der Voraussetzung, dass dieser Parallelstreif als Fundamentalbereich brauchbar sei, möge $f(z)$ irgend welche auf ihm eindeutige algebraische Function bezeichnen**), welche in der einen Ecke des Bereichs (die in der Figur nach oben hin unendlich weit liegt) den Werth f_1, in der anderen (nach unten hin unendlich weit liegenden) Ecke den Werth f_2 annehmen möge. Jetzt vervielfältige man unseren

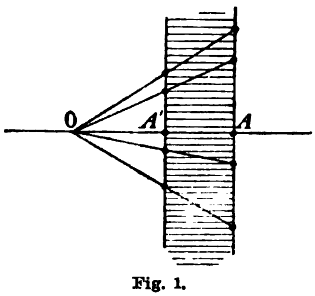


Fig. 1.

*) Vergl. auch hier die Vorlesungen über ellipt. Modulfunctionen I, p. 191, 318.
**) D. h. eine Function ohne wesentlich singuläre Punkte (Mod. p. 499).

Bereich durch immer wiederholte Anwendung der Aehnlichkeitstransformation $z' = kz$. Dabei rückt derselbe, indem er immer schmäler wird, immer mehr nach links auf 0 hin, und weist schliesslich als Gränzlage *die verticale, durch* 0 *gehende Gerade auf.* Aber von den Punkten dieser Geraden entsprechen alle diejenigen, die eine positive Ordinate haben, der Ecke $+\infty$ unseres Streifens, alle diejenigen, die eine negative Ordinate haben, der Ecke $-\infty$; alle übrigen Punkte des ursprünglichen Streifens werden vermöge der wiederholten Transformation in den Punkt 0 zusammengedrängt. Nach dem *Princip der analytischen Fortsetzung* (Ann. 21, p. 164ff.) wird daher $f(z)$ längs der positiven Hälfte unserer verticalen Geraden der Constanten f_1, längs der negativen Hälfte der Constanten f_2 gleich werden, in 0 aber völlig unbestimmt werden. Ein solches Verhalten ist aber bei einer *analytischen* Function $f(z)$ unmöglich.

III.

Der hiermit gefundene Satz ist für die Theorie der automorphen Functionen selbstverständlich fundamental, und dass wir ihn zu Anfang nicht gekannt haben, ist für Poincaré's und meine bezüglichen Arbeiten verschiedentlich die Quelle von Unrichtigkeiten und Unklarheiten geworden. Von dem Wunsche ausgehend, letztere ein für alle mal zu beseitigen, will ich hierüber folgende ausführliche Angaben machen:

1. Als ich im Sommer 1881 zuerst die allgemeine Idee eines „Fundamentalbereichs" und deren Bedeutung für die Theorie der automorphen Functionen erfasste, schrieb ich darüber Hrn. Poincaré, ohne irgendwelche Einzelheiten hinzuzufügen. Hr. Poincaré bemerkte sofort die Sonderstellung der hyperbolischen Ecken und deducirte allgemein, was wir soeben im einfachsten Beispiele sahen, dass automorphe Functionen, deren Fundamentalbereiche hyperbolische Ecken besitzen, natürliche Gränzen aufweisen müssen, die aus einzelnen Kreisbogenstücken bestehen, längs deren die Function jeweils constant ist. Statt aber hieraus auf die Unzulässigkeit der hyperbolischen Ecken zu schliessen, glaubte er, eine neue Art automorpher Functionen gefunden zu haben (Comptes Rendus t. 93, p. 582 [October 1881], Math. Annalen t. 19, p. 558, 560 [Nov. 1881]). Dieser Irrthum konnte um so leichter entstehen, weil die unendlichen Reihen, deren sich Poincaré zur Darstellung der automorphen Functionen bedient, beim Auftreten hyperbolischer Ecken im Ausgangsbereiche geradeso convergiren wie sonst: ein Paradoxon, welches dadurch seine Auflösung findet, dass für die dargestellten Functionen die Ausgangsbereiche (welche durch die Zusammenordnung ihrer Kanten die in Betracht kommenden Gruppen linearer Substitutionen definiren) eben keine *Fundamental*bereiche sind

(wie dies wieder durch das Beispiel der vorigen Nummer erläutert werden kann).

2) Zur Zeit, dass ich meine Abhandlung in Bd. 21 der Annalen schrieb (Herbst 1882), war mir unbekannt, dass Hr. Poincaré die Existenz seiner Functionen zum Theil auf meine Mittheilung über die Methode der Fundamentalbereiche gestützt hatte; ich habe das erst später aus einer Bemerkung desselben in Bd. V der Acta Mathematica (1884) ersehen (cf. p. 211 daselbst: „par une fausse interprétation d'un théorème de Mr. Klein, dont je ne connaissais pas la démonstration"). Ich glaubte vielmehr, Poincaré habe die Existenz der betreffenden Functionen durch seine Bildungsgesetze bewiesen, und hegte dementsprechend keinerlei Zweifel an der Richtigkeit seiner Angaben. Aber indem diese Functionen in meinen eigenen Betrachtungen keine rechte Stelle hatten, schloss ich dieselben (ohne zwingenden Grund, nur einem richtigen Gefühle folgend) von meiner Darstellung aus. In Band 21 ist daher von den betreffenden Functionen nur ganz beiläufig die Rede*).

3. Aber die Unklarheit, mit der ich der betreffenden Frage gegenüberstand, kommt weiterhin in meiner Abhandlung zur Geltung, wo es sich um den Continuitätsbeweis des von mir sogenannten Fundamentaltheorems handelt (p. 206 ff.). Ich coordonnire dort einem Fundamentalbereiche, dessen Kanten in geeigneter Weise durch lineare Substitutionen zusammengeordnet sind, in völlig legitimer Weise eine zerschnittene Riemann'sche Fläche, stelle mir dann aber vor, *dass diese Beziehung ungeändert weiter bestehen müsse, wenn man den Bereich in der dort näher auseinandergesetzten Weise beliebig variirt.* Diese Voraussetzung ist irrthümlich; in der That kann der Bereich bei der Variirung, wie sofort zu sehen, hyperbolische Ecken erhalten und ist dann, wie wir sahen, gewiss nicht als Fundamentalbereich zu brauchen.

4) Es ist Hrn. Poincaré's Verdienst, die hiermit bezeichnete Lücke in meiner Beweisführung aufgedeckt zu haben und zugleich gezeigt zu haben, wie man die in Rede stehende Schwierigkeit durch eine gewisse Abänderung der Gedankenentwickelung vermeiden kann (Acta Mathematica, t. IV, p. 236 ff., 1884). Die Schwierigkeit betrifft mehr die Form der Darstellung als das Wesen derselben. Man hat das letztere in der Beziehung zu erblicken, welche zwischen einer gewissen discontinuirlichen Gruppe linearer Substitutionen einer Variabelen z und einer zugehörigen Riemann'schen Fläche statt hat, und es ist nur ein Hülfsmittel der Darstellung, wenn man unter den unendlich vielen Fundamentalpolygonen der genannten Gruppe gerade eines auswählt und dementsprechend die Riemann'sche Fläche in be-

*) Vergl. den mittleren Absatz auf p. 181 daselbst.

stimmter Weise zerschnitten denkt. Nun ist die Sache die, *dass die Beziehung zwischen Gruppe und Riemann'scher Fläche beim Auftreten einer hyperbolischen Ecke im Fundamentalbereich gar keine Discontinuität erleidet, dass nur die Darstellung dieser Beziehung durch Vermittelung des gerade gewählten Bereiches unbrauchbar wird**). In der That entwickelt Poincaré l. c., dass man bei vorgelegter Gruppe den Fundamentalbereich allemal in „reducirter" Form wählen kann, d. h. in einer Form, bei welcher die Möglichkeit der hyperbolischen Ecken von vorneherein wegfällt.

5) Im Uebrigen wird man sagen müssen, dass durch die Poincaré'schen Darlegungen die Schwierigkeit, welche das Auftreten hyperbolischer Ecken mit sich bringt, mehr umgangen als beseitigt wird. Unser Bereich ist ursprünglich Punkt für Punkt eindeutig auf eine Riemann'sche Fläche bezogen, und diese Beziehung bleibt bei continuirlicher Abänderung des Bereiches bestehen, bis zu dem Augenblicke, wo die hyperbolischen Ecken auftreten. *Was wird aus der Beziehung in diesem Augenblicke?* Das ist offenbar die Frage, auf die man directe Antwort wünscht, wie eine solche nun in der folgenden Nummer dieser Darlegung gegeben werden soll.

IV.

Für unseren Zweck wird es genügen, wenn wir an ein möglichst einfach gewähltes Beispiel anknüpfen. Ich will also dieselbe Gruppe zu Grunde legen, die wir schon in II betrachteten, nämlich die Gruppe aller Wiederholungen der Aehnlichkeitstransformation $z' = kz$. Diese Gruppe will ich dann gar nicht abändern, sondern nur den Bereich, dessen Kanten uns durch ihre Zusammengehörigkeit die Gruppe definiren. Als solchen Bereich wählen wir zunächst den *Ringstreifen* zwischen den beiden um 0 herumgelegten Kreisen $r = R$ und $r = kR$; man vergl. die nebenstehende Figur, in der ich ganz ähnlich wie in Fig. 1 zwei zusammengeordnete Punkte durch A und A' bezeichnet habe. Ersichtlich kann man sich die zugehörige geschlossene Riemann'sche Fläche als eine im Raume gelegene *Ringfläche* vorstellen,

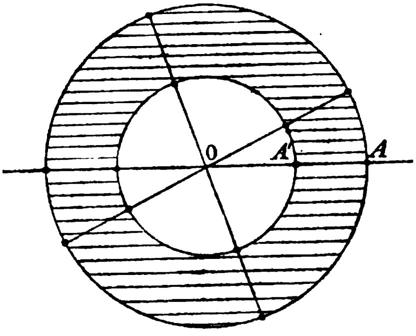


Fig. 2.

*) Eben darum convergiren auch, wie oben bereits angedeutet wurde, die Poincaré'schen Reihen unabhängig von dem Auftreten hyperbolischer Ecken.

auf welcher die beiden Kreise $r = R$ und $r = kR$ gemeinsam eine Breitencurve liefern, etwa den in der nebenstehenden Figur (die nur schematische Bedeutung haben soll) besonders ausgezogenen äusseren Aequatorkreis. Uebrigens wollen wir uns vorstellen, dass man den Ringstreifen der Fig. 2 durch wiederholte Anwendung der Substitutionen $z' = k^{\pm 1} \cdot z$ unbegränzt vervielfältige. Es entsteht so eine Zerlegung der ganzen z-Ebene in unendlich viele einander einschliessende Streifen, wie sie durch die Fig. 4 angedeutet sein soll. Ein jeder dieser Streifen ist ein Abbild der in Fig. 3 gegebenen mit ihrem Schnitt versehenen Ringfläche. Die unendliche Aufeinanderfolge der Streifen kann daher durch eine unendlichmalige Umwickelung der Ringfläche (bei welcher immer auf's Neue wieder die Schnittcurve überschritten wird) gedeutet werden. Diese Vorstellungsweise ist bequem, so oft es gilt, irgendwelche in der z-Ebene gezeichnete Curven auf die Ringfläche zu übertragen, wie wir das sofort auszuführen haben werden. Man verändere jetzt nämlich den Fundamentalbereich, Fig. 2, dadurch, dass man nicht um 0, sondern um einen links von 0 gelegenen Punkt einen Kreis durch A lege, der die erste Begränzungslinie des neuen Bereiches vorstelle, um dann als zweite Begränzungslinie den durch A' gehenden Kreis zu wählen, welcher sich aus dem erstgenannten vermöge $z' = kz$ ergiebt; man vergleiche die nebenstehende Figur.

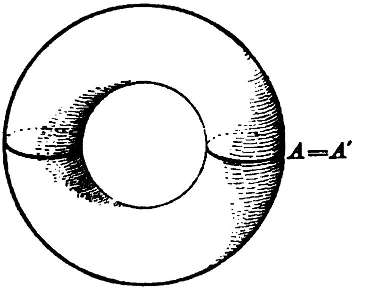


Fig. 3.

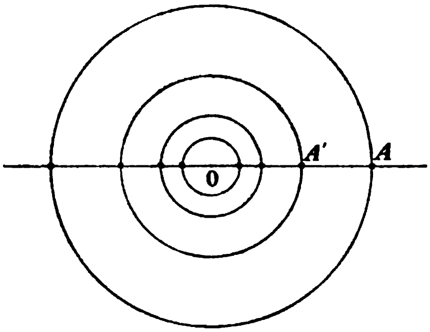


Fig. 4.

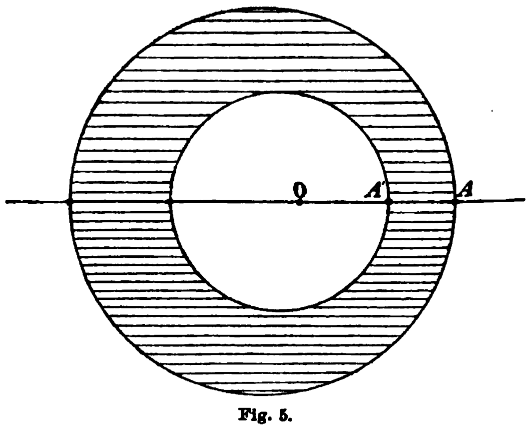


Fig. 5.

Hierbei hat sich die Ringfläche der Fig 3 gar nicht geändert, *nur der auf ihr verlaufende Schnitt ist ein anderer geworden.* Wir werden seinen

Verlauf construiren, indem wir zusehen, wie die Begränzungskreise der Figur 5 die verschiedenen Ringstreifen der Fig. 4 durchsetzen, und übrigens von der eben gegebenen Vorstellungsweise einer unendlichfach umwickelten Ringfläche Gebrauch machen. Das Resultat ist, dass unsere neue Schnittcurve sich um die Ringfläche nach Art der folgenden Figur herumwindet:

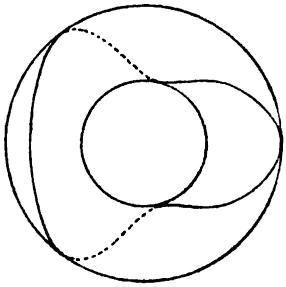


Fig. 6.

(Diese Figur ist so zu verstehen, dass die Schnittcurve theils auf der uns zugekehrten Vorderseite, theils auf der Rückseite der Ringfläche verläuft; die punktirten Stücke beziehen sich auf die Rückseite). —

Die Antwort auf unsere eigentliche Frage werden wir jetzt bekommen, indem wir den Deformationsprocess, der von Fig. 3 *zu Fig.* 5 *führt, so lange in gleichem Sinne fortgehen lassen, bis die beiden Begränzungskreise in die durch A und A′ gehenden Verticallinien, der Ringstreifen also in den Parallelstreifen der Fig.* 1 *verwandelt ist.* Bei diesem Deformationsprocess wird nun die auf unserer Ringfläche verlaufende Schnittcurve eine fortschreitende Abänderung erleiden, die man am leichtesten an Figur 4 beurtheilen wird: sie wird sich wiederholt um unsere Ringfläche herumwinden, so zwar, dass sich diese Windungen im oberen und unteren Theile unserer Figur häufen:

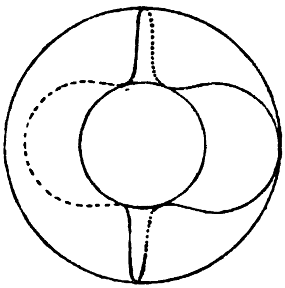


Fig. 7.

und zuletzt *unendlich viele Windungen* erhalten, die sich auf der oberen und unteren Hälfte unseres Ringes derart zusammendrängen, dass die Schnittcurve auf die linke Seite der Figur überhaupt nicht mehr hinübertritt:

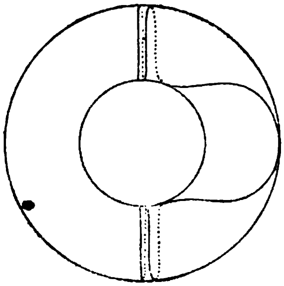


Fig. 8.

Die Folge ist, dass durch unsere Schnittcurve die Ringfläche in eine rechte und eine linke Hälfte zerlegt erscheint, von denen dann nur die erstere dem in Fig. 1 *gezeichneten Parallelstreif entspricht.* — Also nicht die Riemann'sche Fläche artet aus (die bleibt bei unserem ganzen Deformationsprocess ungeändert), sondern die auf ihr verlaufende Schnittcurve, und zwar so, *dass dadurch ein Theil der Riemann'schen Fläche von dem Reste abgeschnürt wird.* —

Was so im Beispiele geschieht, wird beim Auftreten hyperbolischer Ecken allgemein der Fall sein. Die Schwierigkeit, um die es sich handelt, erledigt sich einfach dadurch, *dass bei continuirlicher Verzerrung einer über eine Riemann'sche Fläche hinlaufenden Curve ein Gränzfall eintreten kann, an dessen Möglichkeit man von Hause aus nicht gedacht hat.* Man ist versucht, diesen Gränzfall als den der *Selbstabsperrung* der Schnittcurve zu bezeichnen. —

V.

Ich habe noch hinzuzufügen, in welcher Verbindung diese Note mit den Entwickelungen steht, die ich neuerdings in diesen Annalen über die hypergeometrische Differentialgleichung und über den Hermite'schen Fall der Lamé'schen Gleichung publicirt habe*). Die in Rede stehenden Differentialgleichungen studire ich dort dadurch, dass ich die Kreisbogenpolygone in's Einzelne betrachte, auf welche die Halbebene der unabhängigen Variabelen x durch den Quotienten η zweier Particularlösungen der Differentialgleichung abgebildet wird. Ich will hier der Kürze halber nur von solchen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung sprechen, welche rationale Coefficienten haben. Bei ihnen wird die in Rede stehende Polygonmethode immer dann angewandt werden können, wenn sämmtliche singuläre Punkte

*) Cf. Bd. 37, p. 573 ff., sowie den hier vorangehenden Aufsatz.

und alle sonstigen in die Differentialgleichung eingehenden Constanten reell sind. Wie aber ist es mit den allgemeineren Fällen? Da wird man von vorneherein darauf verzichten, die x-Ebene in zwei Hälften zu zerlegen, dieselbe vielmehr nur mit einem solchen *Einschnitte* versehen, der zu sämmtlichen singulären Punkten hinführt. Die x-Ebene ist dadurch in ein einfach berandetes Flächenstück verwandelt, und dieses Flächenstück wird, auf die η-Ebene übertragen, *in letzterer eben einen solchen Bereich liefern, dessen Kanten paarweise durch bestimmte lineare Substitutionen des η zusammengehören.* Daher scheint es für die Theorie der in Rede stehenden Differentialgleichungen (wie überhaupt der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit algebraischen Coefficienten) förderlich, zunächst einmal die mannigfachen Gestalten derartiger Bereiche, wie ihre functionentheoretische Bedeutung, *independent* in Untersuchung zu ziehen, um später von da aus auf die Theorie der Differentialgleichungen die Anwendung zu machen. Die Polygonmethode, von der wir zunächst sprachen, ordnet sich natürlich, wenn ebenfalls unabhängig geometrisch gefasst, als besonderes Capitel unter den hier gemeinten allgemeinen Ansatz ein. — Das einfachste Beispiel, auf welches letzterer Anwendung findet, ist der Fall der hypergeometrischen Differentialgleichung mit beliebigen complexen Exponentendifferenzen. Wie ich im vorigen Wintersemester in meinen Vorlesungen bemerkte, erscheint es durchaus möglich, diesen Fall bis zu Ende zu discutiren. Seitdem hat sich auf meinen Wunsch Hr. Schilling mit dieser Frage beschäftigt, der eine zusammenhängende Bearbeitung derselben voraussichtlich bald veröffentlichen wird. Man vergleiche dessen vorläufige Mittheilung in den Göttinger Nachrichten vom 6. Juni 1891: *Ueber die geometrische Bedeutung der Formeln der sphärischen Trigonometrie im Falle complexer Argumente**).

Göttingen, im September 1891.

*) Dieselbe ist mittlerweile in Bd. 39 dieser Annalen abgedruckt worden.

Februar 92. F. Klein.

Zum Beweise des Satzes der Theorie der algebraischen Functionen, diese Annalen Bd. VI, pag. 351.

Von

M. Noether in Erlangen.

Mein in Bd. 6 der Annalen veröffentlichter Beweis des Fundamentalsatzes lässt sich, freilich unter theilweiser Ersetzung der dortigen Hülfsmittel durch geometrische, formal so vereinfachen, dass auch der einfache Grundgedanke desselben deutlich hervortritt. In dieser neuen Form fallen einmal die weitläufigen expliciten Differentiationsprocesse heraus; sodann wird, was früher wenigstens scheinbar der Fall war, an keiner Stelle von einer Reihenentwicklung Gebrauch gemacht; vielmehr wird schon in der Problemstellung durch Angabe einer oberen Grenze für die Dimension der zu vergleichenden Glieder*) der algebraische Standpunkt festgelegt. Aus diesen Gründen möchte es auch jetzt noch angezeigt sein, die vereinfachte Uebertragung jenes ersten Beweises hier mitzutheilen. Die damalige Bezeichnungsweise werde beibehalten. —

Der zu beweisende Satz ist:

Bei zwei gegebenen (nicht homogenen) Polynomen φ und ψ in s, z, ohne gemeinsamen Factor, ist zur Darstellbarkeit eines Polynoms f in der Form

$$f = A\varphi + B\psi, \tag{1}$$

wo A, B ebenfalls Polynome in s, z werden sollen, hinreichende Bedingung die, dass für jede Schnittstelle $z = a$, $s = b$ von $\varphi = 0$, $\psi = 0$ zwei Polynome A', B' existiren, für welche der Ausdruck

$$f - A'\varphi - B'\psi = C' \tag{2}$$

mit Gliedern von höherer als k'^{ter} Dimension in $z - a$, $s - b$ anfängt, wenn k' irgend eine vorgegebene, aber genügend hohe (weiterhin in (13) noch genauer zu beschränkende) *Zahl ist.*

*) Vgl. hierzu Bertini's Note, d. Ann. 34, p. 447.

Sei ψ von der Ordnung n; der Punkt $z=a$, $s=b$ oder (a, b) für $\psi=0$ ein r-elementiger Punkt, die Multiplicität des Schnittes von $\varphi=0$, $\psi=0$ bei (a, b) eine k-fache; und sei das Coordinatensystem gegenüber φ, ψ so allgemein, dass

α) in ψ das Glied mit s^n vorkommt;

β) von den zu $z-a=0$ $\psi=0$, gehörigen n Werthen von s nur r Werthe zu $s=b$ werden, während die übrigen $n-r$ Werthe $s=c_1, c_2, \ldots, c_{n-r}$ von einander und von $s=b$ endlich verschieden sind;

γ) keiner dieser $n-r$ Punkte (a, c_i) auf $\varphi=0$ liege.

Man hat dann für die durch Elimination von s aus φ, ψ gebildete Resultante $\Phi(z)$:

$$\Phi = (z-a)^k \Phi' = \lambda\varphi + \mu\psi, \tag{3}$$

wo Φ' ein Polynom in z wird, das, nach γ), $z-a$ nicht mehr als Factor enthält, und wo λ und μ Polynome in s, z werden, von denen λ an der Stelle (a, b) mit Gliedern l^{ter} Dimension in $z-a$, $s-b$ beginne. Man hat ferner, indem man λf durch ψ dividirt:

$$\lambda f = \nu\psi + X, \tag{4}$$

wo ν und X Polynome in s, z werden, von denen X, nach α), s in nicht höherer als $(n-1)^{\text{ter}}$ Potenz enthält.

Kann man nun zeigen, dass X die Resultante Φ zum Factor hat, so ist der obige Satz bewiesen. Denn aus

$$X = A\Phi$$

folgt, nach (3) und (4):

$$\lambda(f - A\varphi) = (\nu + A\mu)\psi,$$

d. h. es muss, da λ und ψ nach (3) nur einen von z allein abhängigen Factor haben könnten, der nach α) nicht existirt, $\frac{\nu + A\mu}{\lambda}$ gleich einer ganzen Function B sein, was die gesuchte Relation (1) giebt. Es bleibt daher für (a, b) nur zu zeigen, dass X durch $(z-a)^k$ theilbar ist; und dies soll nun successiv geschehen, indem die Factoren $z-a$, $(z-a)^2, \ldots, (z-a)^k$ nachgewiesen werden.

Da die Curve $X=0$ von der Geradenschaar $z-\alpha=0$ in Gruppen von höchstens $n-1$ von α abhängigen Punkten getroffen wird, so genügt es, n von a abhängige Schnittpunkte von $X=0$ mit $z-a=0$ nachzuweisen, damit

$$X = (z-a) X_1 \tag{5}$$

werde. Da nun nach (4), nach Voraussetzung (2) und nach (3):

$$X = A'\Phi'(z-a)^k + C\psi + C'\lambda \tag{6}$$

wo

(6′) $$C = B'\lambda - A'\mu - \nu,$$

die Gerade $z-a=0$ von $X=0$ also so getroffen wird, wie von $C\psi + C'\lambda = 0$, so fallen in (a, b) mindestens r dieser Schnittpunkte, wenn nur das noch unbestimmte k' so angenommen wird, dass für das niedrigste Glied von $C'\lambda$ in $z-a$, $s-b$ die Dimension

$$k' + l + 1 \geqq r$$

ist; in jeden der $n-r$ Punkte (a, c_i), in welchen auch $\psi = 0$ ist, fällt aber nach (6) je einer der Schnittpunkte, da in denselben nach β), γ) und (3) auch λ verschwindet. Somit besteht (5).

Um weiter zu zeigen, dass für $k > 1$ auch

(7) $$X_1 = (z-a) X_2,$$

genügt es wieder, da auch X_1 die Variable s in nicht höherer als $(n-1)^{\text{ter}}$ Potenz enthält, n von a abhängige Schnittpunkte von $X_1 = 0$ mit $z-a=0$ nachzuweisen. Nun muss nach (5), (6) der Ausdruck $C\psi + C'\lambda$ den Factor $z-a$ besitzen; und da hierbei, für $k'+l \geqq r$, die Glieder r^{ter}, $(r+1)^{\text{ter}}, \ldots, (k'+l)^{\text{ter}}$ Dimension in Bezug auf $z-a$, $s-b$ nur in $C\psi$ vorkommen, so wird, indem die Glieder r^{ter} Dimension von ψ nach β) nicht den Factor $z-a$ enthalten:

$$C = (z-a) C_1 + C'',$$

wo C'' mit Gliedern von höherer als $(k'+l-r)^{\text{ter}}$ Dimension in $z-a$, $s-b$ anfängt. Daher ergiebt (5), (6):

(8) $$X_1 = A'\Phi'(z-a)^{k-1} + C_1\psi + C_1',$$

wo

(8′) $$(z-a) C_1' = C''\psi + C'\lambda,$$

und wo C_1' mit Gliedern $(k'+l)^{\text{ter}}$ Dimension in $z-a$, $s-b$ beginnt. Die Gerade $z-a=0$ wird also von $X_1 = 0$, für $k > 1$ und $k'+l \geqq r$, nach (8) bei (a, b) in mindestens r Punkten getroffen; in jedem der $n-r$ Punkte (a, c_i) aber nach (8) je 1-punktig, da in einem solchen einfachen Punkte von $\psi = 0$ diese Curve $\psi = 0$ von $\lambda = 0$ nach (3) k-punktig, von C_1' also nach β) und (8′) noch $(k-1)$-punktig getroffen wird. Dies giebt (7) oder

$$X = (z-a)^2 X_2.$$

Sei allgemein

(9) $$X = (z-a)^h X_h, \quad 1 < h < k.$$

und

(10) $$X_{h-1} = A'\Phi'(z-a)^{k-h+1} + C_{h-1}\psi + C'_{h-1},$$

wo C'_{h-1} mit Gliedern der Dimension $k'+l-h+2$ in $z-a$, $s-b$

beginnt, und wo $C'_{h-1} = 0$ die Curve $\psi = 0$ in jedem der Punkte (a, c_i) noch $(k-h+1)$-punktig trifft. Nach (10) muss der Ausdruck $C_{h-1}\psi + C'_{h-1}$ den Factor $z-a$ besitzen, und da die Glieder

$$r^{\text{ter}},\ (r+1)^{\text{ter}}, \ldots, (k'+l-h+1)^{\text{ter}}$$

Dimension bez. $z-a$, $s-b$, für $k'+l-h+1 \geqq r$, nur in $C_{h-1}\psi$ vorkommen, wird

$$C_{h-1} = (z-a)C_h + C''_{h-1},$$

also aus (9), (10):

$$X_h = A'\Phi'(z-a)^{k-h} + C_h\psi + C_h', \tag{11}$$

wo

$$(z-a)C_h' = C''_{h-1}\psi + C'_{h-1}, \tag{11'}$$

und C_h' mit Gliedern $(k'+l-h+1)^{\text{ter}}$ Dimension in $z-a$, $s-b$ beginnt. Nach (11) wird die Gerade $z-a=0$ von $X_h = 0$ an der Stelle (a, b) für $k'+l-h+1 \geqq r$ in mindestens r Punkten getroffen; in jedem der $n-r$ Punkte (a, c_i) aber je einpunktig, da in einem solchen Punkte die Curve $\psi = 0$ von $C_h' = 0$ nach (11') noch $(k-h)$-punktig geschnitten wird, die Curve $C_h' = 0$ also durch diesen Punkt jedenfalls geht. Dies giebt n von a abhängige Schnittpunkte von $z-a=0$ mit $X_h = 0$; da aber X_h die Variable s in nicht höherer als $(n-1)^{\text{ter}}$ Potenz enthält, folgt

$$X_h = (z-a)X_{h+1}, \quad X = (z-a)^{h+1}X_{h+1} \qquad (h<k). \tag{12}$$

Indem (12) nun bis incl. $h = k-1$ gilt, ist der Satz bewiesen. Zugleich ergiebt sich für das vorzugebende k' die Grenze

$$k' \geqq k + r - l - 2. \tag{13}$$

In Bezug auf eine genauere Fixirung dieser Grenze könnte man aus (3) bemerken, dass l jedenfalls $\geqq r-1$ ist. Denn (3) entsteht durch Specialisirung der Coefficienten aus derjenigen analogen Relation, bei welcher die Resultante aus den Gliedern niedrigster Dimension φ_q und ψ_r von φ und ψ in $z-a$, $s-b$, wo q die Vielfachheit des Punktes (a, b) für $\varphi = 0$ bedeutet, nicht verschwindet; in diesem Falle aber, wo $k = qr$, folgt aus (3) eindeutig, dass die Glieder von niedrigerer als $(r-1)^{\text{ter}}$ Dimension von λ verschwinden müssen. Es genügt daher, im Satze $l = r-1$, d. h. $k' = k-1$ anzunehmen (Brill, d. Ann. 39, p. 129).

Man könnte mit Bertini (s. obiges Citat) auch bemerken, dass l sogar $\geqq q(r-1)$ ist, also $k' = k-(q-1)(r-1)-1$ angenommen werden darf, indem man die Gleichung (3) eingehender discutirt. Hierzu gehörte aber entweder die Fortsetzung der Voss'schen Determinantenuntersuchung (d. Ann. 27, p. 534*)), welche die Zahl $k \geqq qr$ — und in demselben einfachen Fall $k = qr$ schon unsern Satz selbst — liefert; oder, was noch weitläufiger, für $k = qr$ diejenige Discussion von (3), welche sich der im § 3 meiner Note (d. Ann. 30, p. 410) geführten unterordnet.

Erlangen, October 1891.

---

*) Bei dieser Gelegenheit möge bemerkt werden, dass — wie übrigens auch Herr Voss selbst später gesehen hat — das in § 2 dieser Note angewandte Verfahren zum Heraussetzen des Factors aus der Determinante R so vereinfacht werden kann: man multiplicire — in der Bezeichnung jener Note — die l Reihen a bez. mit $x^{l-1}, x^{l-2}, \ldots, x^0$, die k Reihen c bez. mit $x^{k-1}, x^{k-2}, \ldots, x^0$: und setze dann aus den $k+l$ Colonnen e bez. die Factoren $x^{k+l-1}, x^{k+l-2}, \ldots, x^0$ heraus. Das Resultat ist dasselbe wie das dortige.

Ueber den Fuchs'schen Grenzkreis.

Von

W. Anissimoff in Warschau.

Hr. Prof. L. Fuchs in Berlin hat zuerst im 75[ten] Bande von Crelle's Journal*) für eine rationale Function $F(z)$:

$$F(z) = \frac{f(z)}{z\,g(z)} \tag{1}$$

(wo f und g ganze rationale Functionen sind, deren Nullwerthe $f(0)$ und $g(0)$ nicht verschwinden sollen) den sog. Grenzkreis K definirt und damals zunächst den Satz aufgestellt, dass *der Radius R dieses Grenzkreises dem kleinsten Modul der Wurzeln der Gleichung*

$$F'(z) = 0 \tag{2}$$

gleich sei. Die Unrichtigkeit dieses Satzes hat zuerst Hr. Prof. Nekrassoff in Moskau bemerkt und wurde ich von ihm auf dieselbe aufmerksam gemacht. Ich habe damals an Hrn. Prof. Fuchs einen Brief gerichtet, in welchem ich ein Beispiel mittheilte,**), an welchem die Unrichtigkeit des Satzes in voller Klarheit hervortritt; es war dies das Beispiel der Function:

$$F(z) = \frac{(z+1)^m}{(z+1)^m - 1}, \quad (m > 2).$$

Durch meinen Brief veranlasst hat dann Hr. Prof. Fuchs im 106[ten] Bande des Crelle'schen Journals***) seine Regel umgeändert und jetzt zum Zwecke der Berechnung des zum Grenzkreise K gehörigen Radius R das folgende Gleichungssystem aufgestellt:

*) L. Fuchs. — Ueber die Darstellung der Functionen complexer Variabelen, insbesondere der Integrale der linearen Differentialgleichungen. — Crelle's Journal, Bd. 75, S. 177—223. (1872).

**) W. Anissimoff. — Grundlagen für die Theorie der linearen Differentialgleichungen. Moskau 1889 (russisch).

***) L. Fuchs. — Bemerkung zu der Arbeit im Bande 75, Seite 177, dieses Journals. — Crelle's Journal, Bd. 106, S. 1—4 (1889).

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{F(z_1)-F(z_2)}{z_1-z_2}=0, \\ z_1 F'(z_1)+z_2 F'(z_2)=0, \\ |z_1|=|z_2|. \end{cases}$$

Und zwar ist dabei die Meinung von Hrn. Prof. Fuchs die, *dass in solchen Fällen, wo die Regel* (1) *versagt, der Radius R des Grenzkreises gleich dem kleinsten der Moduln* $|z_1|=|z_2|$ *ist, die dem vorstehenden Gleichungssystem genügen.* Leider ist aber diese neue Regel des Hrn. Prof. Fuchs ebensowenig richtig, wie die erste. Es ist dies im 38ten Bande dieser Annalen von Hrn. Prof. Nekrassoff auf Grund allgemeiner Betrachtungen gezeigt worden*). Ebenda ersetzt Herr Prof. Nekrassoff das Gleichungssystem (3) durch das folgende richtige Gleichungssystem:

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{F(z_1)-F(z_2)}{z_1-z_2}=0, \\ z_1 F'(z_1)+\lambda z_2 F'(z_2)=0, \\ |z_1|=|z_2|. \end{cases}$$

In demselben soll λ eine *positive* Zahl bedeuten, welche auch Null sein kann. Nichtsdestoweniger vertheidigt Hr. Prof. Fuchs in einem ganz neuerdings erschienenen Aufsatze**) seine Regel (3). Bei dieser Sachlage wird es zweckmässig sein, hier ein Beispiel mitzutheilen, bei welchem die Unrichtigkeit der Regel (3) völlig deutlich hervortritt.

Wir betrachten die Function

$$(5)\qquad F(z)=\frac{(z-b)^2}{z(z-a)},$$

wo a irgend eine reelle positive, von Null verschiedene Zahl und $b=ae^{\frac{\pi i}{3}}$ sein soll. Suchen wir hier vermöge der Gleichung

$$\frac{F(z')-F(z'')}{z'-z''}=0$$

einander entsprechende Punkte z' und z'', so kommen wir auf die beiden Gleichungen:

$$(6)\qquad \begin{cases} z''=a\cdot\dfrac{z'-a}{z'}, \\ z''=\dfrac{a^2}{a-z'}. \end{cases}$$

*) P. Nekrassoff. — Ueber den Fuchs'schen Grenzkreis. — Mathematische Annalen, Bd. 38, S. 82—90 (1890).

**) L. Fuchs. — Ueber eine Abbildung durch eine rationale Function. — Crelle's Journal, Bd. 108, S. 188—192 (1891).

Bewegt sich jetzt der Punkt z' auf der Peripherie eines um den Anfangspunkt der z-Ebene als Mittelpunkt herumgeschriebenen Kreises K_r vom Radius r, so wird z'' entsprechend diesen beiden Gleichungen (6) die Peripherieen zweier Kreise beschreiben, die wir $C_{\varrho'}$ und $C_{\varrho''}$ nennen wollen. Nun wird der Kreis K_r in den Grenzkreis der Function (5) und also r in den Radius R dieses Grenzkreises übergehen, sobald die Peripherieen $C_{\varrho'}$ und $C_{\varrho''}$ den Kreis K_r zum ersten Male berühren. Dies giebt:

$$R = \frac{a}{2}(\sqrt{5}-1). \tag{7}$$

Die einander entsprechenden Punkte $z' = z_1$ und $z'' = z_2$, die auf der Peripherie dieses Grenzkreises gelegen sind, lauten:

$$\begin{cases} z_1 = \quad \frac{a}{2}(\sqrt{5}-1), \\ z_2 = -\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1). \end{cases} \tag{8}$$

Hieraus folgt aber für diese beiden Punkte die Beziehung:

$$\frac{z_1 F'(z_1)}{z_2 F'(z_2)} = -\frac{3+\sqrt{5}}{2}, \tag{9}$$

was der Regel (3) des Hrn. Prof. Fuchs widerspricht.

Im Zusammenhang damit erfordert die Methode, welche Herr Prof. Fuchs in Crelle's Journal Bd. 75 und Bd. 108 für die Darstellung der analytischen Functionen gegeben hat, noch eine Verbesserung*).

Warschau, den $\frac{11}{23}$ November 1891.

*) Zu der im Texte behandelten Frage hat uns vor einiger Zeit auch Hr. Nekrassoff einige Bemerkungen geschickt, welche dieselbe Richtung verfolgen, wie die hier abgedruckten des Hrn. Anissimoff; das Beispiel, welches sich Hr. Nekrassoff construirt hatte, um die Unrichtigkeit der von Hrn. Fuchs aufgestellten Regel hervortreten zu lassen, war nur minder einfach, wie das von Hrn. Anissimoff gewählte. Uebrigens bittet uns Hr. Nekrassoff, hier ausdrücklich zu erklären, dass er die besonderen Ausführungen, welche er in Band 38 der Annalen auf pag. 87 gegeben hat und durch die er den eigentlichen Fehler der Fuchs'schen Schlussreihe hatte bezeichnen wollen, als nicht zutreffend fallen lassen will. Er sei jetzt „zu der Ueberzeugung gelangt, dass die Erörterungen des Hrn. Fuchs in Bd. 106 von Crelle's Journal, und die Erwägungen, die ihn in Bd. 75 daselbst zu seiner ersten Regel hingeleitet haben, einen gemeinsamen Angriffspunkt besitzen. Auf Seite 2 von Bd. 106 führt nämlich Hr. Fuchs in seine Berechnungen die Differentiale $d\varphi$ und $d\varphi_1$ für solche Werthe von r ein, bei denen die Quotienten $\frac{d\varphi}{dr}$ und $\frac{d\varphi_1}{dr}$ im allgemeinen Falle in's Unendliche übergehen. Somit liegen den Berechnungen von Hrn. Fuchs in Band 106 von Crelle's Journal, ebenso wie den Entwickelungen in Band 75 daselbst, unvorsichtige Operationen mit unendlich grossen Werthen zu Grunde."

Hr. Burkhardt erläutert uns dies des Näheren so: „Es handelt sich bei Hrn. Fuchs auf Seite 2 von Bd. 106 des Crelle'schen Journals um eine geometrische Ueberlegung, die man folgendermassen wiedergeben kann: Es seien C', C'' zwei Curven, die einen Kreis vom Radius R beide von aussen berühren. Man construire jetzt den Kreis mit dem Radius $R + dr$. Derselbe schneide auf C' und C'' in der Nähe der früheren Berührungspunkte die Bogenelemente ds' und ds'' ab. Dann nimmt Hr. Fuchs an, dass limes $\frac{ds'}{ds''}$ für $dr = 0$ nothwendig gleich 1 sei. Diese Annahme ist aber nicht richtig. Vielmehr zeigt eine kurze Rechnung, dass der betreffende Limes von den Krümmungsradien der beiden Curven C' und C'' abhängt, und in der That jeden positiven Betrag erreichen kann (in Uebereinstimmung mit der von Hrn. Nekrassoff aufgestellten Regel)."

Die Red.

Ueber die Einführung der irrationalen Zahlen.

Von

M. Pasch in Giessen.

Obwohl wir für die Einführung der irrationalen Zahlen Darstellungen besitzen, welche zu einem in sich folgerichtigen Aufbau der Analysis dienen, so erscheint das Bedürfniss nach Klarstellung jenes Gegenstandes immer noch nicht in jeder Hinsicht befriedigt. Ein Zeichen hiervon sind die neuerlichen Erörterungen von Herrn Illigens in diesen Annalen 1889 Bd. 33 S. 155 und 1890 Bd. 35 S. 451.

Vom rein analytischen Standpunkte aus kann man Erklärungen eines Begriffs, welche auf dessen Anwendung keine Rücksicht nehmen, als genügend anerkennen und sie sogar andern Erklärungen vorziehen; nur wird dann in gewissen Fällen — und hierher gehört der Begriff der irrationalen Zahlen — eine besondere Auseinandersetzung darüber nothwendig, wie der zunächst nur für die Benutzung innerhalb der Analysis zubereitete Begriff zu seiner thatsächlichen Anwendung ausserhalb der Analysis gelangt. In dieser Weise bin ich selbst bezüglich der irrationalen Zahlen bei Abfassung der Schrift „Einleitung in die Differential- und Integralrechnung" (Leipzig 1882) verfahren. Späterhin jedoch habe ich der Erklärung eine andere Fassung zu geben gesucht, welche ich in Hinblick auf die Anmerkungen, mit denen die Redaction der Annalen die Aufsätze des Herrn Illigens begleitet hat, hier mitzutheilen mir erlaube. Ich muss zu dem Zweck auf die Einführung der gebrochenen und der negativen rationalen Zahlen zurückgehen.

Schon die natürlichen Zahlen n — welche hier als Ergebniss des Zählens angesehen werden — bestehen nur innerhalb der Analysis (Zahlenlehre im weitesten Sinne) für sich allein, ohne Benennung; vor dem Eintritt in die Analysis kann ich nur von n Stücken irgend einer Mehrheit sprechen. Ueber die in solchen Aussagen auftretenden Zahlen selbst kommen ebenfalls Aussagen zu Stande; die letzteren bilden den Inhalt der Analysis, aber ihre Berechtigung beruht einzig darauf, dass sie ausserhalb der Analysis — unter Hinzufügung von Benennungen — verwirklicht werden können.

Alle wahrhaft analytischen Sätze sollen hiernach Sätze über die natürlichen Zahlen sein. Wenn sie uns überwiegend nicht unmittelbar als solche entgegentreten, so ist dies durch die Ausdrucksweise verursacht, wie sie sich aus wissenschaftlichen und practischen Bedürfnissen heraus weiter entwickelt hat. Betrachten wir zuerst die Einführung der Brüche. Die Stücke $\mathfrak{A}$ einer Mehrheit können selbst Mehrheiten sein. Sind die $\mathfrak{A}$ insbesondere Mehrheiten von je n (immer anderen) Stücken $\mathfrak{B}$, so wird jedes $\mathfrak{B}$ als n^{ter} Theil eines $\mathfrak{A}$, kurz als $\frac{1}{n}\mathfrak{A}$ bezeichet, und weiter wird $\frac{m}{n}\mathfrak{A}$ eine neue Bezeichnung für $m\mathfrak{B}$, wobei m eine natürliche Zahl vorstellt. Da nun in den Aussagen, welche auf Grund dieser Festsetzung erfolgen, $\frac{m}{n}$ sprachlich neben der Benennung in derselben Weise auftritt, wie eine natürliche Zahl, so nennen wir auch $\frac{m}{n}$ eine Zahl und haben jetzt ganze und gebrochene Zahlen zu unterscheiden.

Während die gebrochenen Zahlen uns der Mühe entheben, den zulässigen genauen Theilen von Benennungen besondere Namen zu ertheilen, schaffen wir uns mittels der negativen Zahlen in dem Gebiete gewisser paarweise einander gegenüberstehender Begriffe die Möglichkeit, je zwei derselben auf eine gleichmässige Ausdrucksweise zurückzuführen. Wir können dies erreichen durch die Bestimmung, dass die Addition der Zahl a zur Zahl b eine Veränderung von b um $+a$, dagegen die Subtraction der Zahl a von der Zahl b eine Veränderung von b um $-a$ heissen soll. Von einer solchen Bestimmung ausgehend, gelangt man dahin, die Ausdrücke $+a$ und $-a$ mit Benennungen sprachlich in derselben Weise zu verbinden, wie ursprünglich nur die natürlichen Zahlen. Erst hieraus scheint mir die Berechtigung zu erwachsen, auf jene Ausdrücke den Namen „Zahl" zu übertragen. — Bei der Einführung der „Zahl" Null will ich nicht verweilen.

Zwischen je zwei Zahlen lassen sich jetzt beliebig viele Zahlen einschalten. Eine Zahlenmenge kann nun so beschaffen sein, dass jede Zahl, welche sich zwischen zwei Zahlen der Menge einschalten lässt, zu ihr gehört; eine solche Zahlenmenge möchte ich eine *Schicht* nennen, und zwar eine *offene Schicht*, wenn sie keine endliche rationale Schranke (diese Annalen 1887 Bd. 30 S. 133) besitzt. Eine offene Schicht bilden beispielsweise die positiven Zahlen, deren Quadrat kleiner als 2 ist, ebenso die positiven Zahlen, deren Quadrat die 2 übertrifft. Diese beiden Schichten setzen sich zu der Gesammtheit aller positiven Zahlen zusammen. Indem wir den von Herrn Dedekind (Stetigkeit und irrationale Zahlen 1872 S. 19) eingeführten Ausdruck mit einiger

Einschränkung gebrauchen, nennen wir jede Eintheilung aller positiven (rationalen) Zahlen in zwei offene Schichten (untere und obere) einen *Schnitt*. Diese Erklärungen haben einen wesentlich anderen Charakter, als die arithmetischen im engeren Sinne. Sie genügen nicht der von Herrn Kronecker aufgestellten Forderung*); denn man besitzt kein Mittel, um zu erkennen, ob eine irgendwie definirte Zahlenmenge eine gegebene Zahl enthält, ob eine irgendwie definirte Schicht eine offene ist, u. s. w.

Die Vergleichung zweier geraden Strecken A und B führt unter Umständen zu einem Schnitte, indem sich ergiebt, dass die Strecke A grösser als das r-fache und kleiner als das t-fache der Strecke B ist, wenn r aus der unteren, t aus der oberen Schicht eines gewissen Schnittes beliebig entnommen wird. Diesem Schnitte ordnen wir alsdann ein Zeichen zu, etwa s, welches wir zu der Redeweise: A ist gleich sB (oder: das Verhältniss von A zu B ist s, u. s. w.) verwenden, um lediglich auszudrücken, dass A immer zwischen rB und tB eingeschlossen bleibt. Wieder wird das Zeichen s, welches hier den Platz einer Zahl einnimmt, geradezu eine Zahl genannt und dadurch die Unterscheidung zwischen rationalen und irrationalen Zahlen veranlasst. Die Einführung negativer Irrationalzahlen bedarf keiner besonderen Auseinandersetzung.

Gewöhnlich macht man — stillschweigend oder ausdrücklich — die Annahme**), dass jedem arithmetisch definirten Schnitte ein Verhältniss zwischen Linien entspricht, und ist dann berechtigt, jedem Schnitte in vorstehender Weise eine irrationale Zahl zuzuordnen. Abgesehen jedoch von den gegen diese Annahme an andrer Stelle***) geltend gemachten Bedenken, kann man überhaupt fordern, dass hier jede Annahme, zumal jede ausserhalb der Analysis gelegene, wennmöglich vermieden werde. Wenn nun ein beliebiger Schnitt vorliegt, so kann man sich in der That, unter Einführung eines dem Schnitte zugeordneten Zeichens s, der Redeweise: $\mathfrak{A}$ ist kleiner (grösser) als $s\mathfrak{B}$, bedienen, ohne darüber zu urtheilen, ob es einen Gegenstand giebt, der gleich $s\mathfrak{B}$ zu nennen wäre; denn man braucht jene Redeweise nur dahin zu verstehen, dass $\mathfrak{A}$ gleich $q\mathfrak{B}$ oder kleiner (grösser)

*) Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen 1882 S. 11 (Festschrift zu Kummer's Doctor-Jubiläum, auch Journal für die reine und angewandte Mathematik Bd. 92).

**) Siehe G. Cantor, diese Annalen 1872 Bd. 5 S. 128; Dedekind, Stetigkeit und irrationale Zahlen 1872 S. 18. Beide Autoren stützen jedoch die Erklärung des Irrationalen weder auf diese noch eine andere Hypothese.

***) F. Klein, Sitzungsberichte der phys.-med. Soc. zu Erlangen, 8. Dec. 1873 (wieder abgedruckt in diesen Annalen 1883 Bd. 22 S. 249—259), sowie Ann. 1890 Bd. 37 S. 571f.; Pasch, Vorlesungen über neuere Geometrie 1882 S. 126 sowie Ann. 1887 Bd. 30 S. 129.

als $q\mathfrak{B}$ ist, wo q eine Zahl aus der unteren (oberen) Schicht des Schnittes und $\mathfrak{B}$ eine Benennung bedeutet. Auch ist stets — und das genügt für die Anwendungen — eine Aussage möglich von der Form: $\mathfrak{A}$ ist mit gewisser Genauigkeit gleich $s\mathfrak{B}$; wenn nämlich $\mathfrak{A}$ zwischen $r\mathfrak{B}$ und $t\mathfrak{B}$ so eingeschlossen werden kann, dass die Zahl r der unteren, t der oberen Schicht des Schnittes angehört und die Differenz $t - r$ eine gewisse Kleinheit besitzt.

Dass derartige Ausdrucksweisen sich eingebürgert haben, beruht auf dem Bedürfniss, möglichst viele Fälle unter eine und dieselbe sprachliche Form zu bringen. Eine Nothwendigkeit aber war nicht vorhanden, und man könnte — wie Herr Kronecker ausgesprochen hat — „die Modificationen und Erweiterungen des Zahlbegriffs wieder abstreifen, welche zumeist durch die Anwendungen auf die Geometrie und Mechanik veranlasst worden sind“ (Philosophische Aufsätze, Eduard Zeller gewidmet, 1887 S. 265; Journal für die reine und angewandte Mathematik 1887 Bd. 101 S. 339).

Besondere Ausführungen sind erforderlich, um das Rechnen in dem erweiterten Zahlengebiete zu begründen. Hier war nur beabsichtigt, in den Grundzügen einen Weg anzugeben, auf welchem die Erweiterung selbst geschehen kann.

Giessen, October 1891.

Nachtrag zu dem Aufsatze „Zur Gruppe der acht harmonisch zugeordneten Flächen zweiten Grades“. Diese Annalen Bd. 33.

Von

Georg Kober in Holzminden.

Meine im 33. Bande der Annalen besprochene Inauguraldissertation*) enthält, wie ich zufällig bemerkte, da, wo es sich um die Bestimmung der gegenseitigen Lage eines Paares harmonisch zugeordneter Tetraeder handelt, in Folge des Uebersehens einer Möglichkeit eine Ungenauigkeit in der Angabe der möglichen Fälle, deren Richtigstellung die nachfolgende Ergänzung bez. Abänderung erfordert.

Auf Seite 471 des genannten Bandes ist hinter den Satz, mit welchem die Besprechung der Lage eines Paares harmonisch zugeordneter Tetraeder zu dem dritten harmonisch zugeordneten Tetraeder schliesst, einzuschalten:

> „Die gegenseitige Lage eines Paares harmonisch zugeordneter Tetraeder, über welche die Lage des fünften Punktes entscheidet, bedingt die Lage des dritten harmonisch zugeordneten Tetraeders.
>
> *Zu zwei harmonisch zugeordneten Tetraedern hat das dritte harmonisch zugeordnete Tetraeder gleiche oder ungleiche Lage, je nachdem beide Tetraeder zu einander gleiche oder ungleiche Lage haben, zu demjenigen gerade oder ungerade Lage, zu welchem das andere bez. ungerade oder gerade Lage hat.*
>
> Haben daher beide Tetraeder zu einander ungerade Lage, was der Fall ist, wenn jede Ecke des einen von einer Seite des anderen ausgeschlossen wird, so hat das dritte Tetraeder zu beiden gerade Lage. Nur in diesem Falle giebt es unter den vier einfachen Hexaedern, deren Gegenecken die Ecken der beiden Tetraeder sind, ein concaves, d. h. ein solches, dessen Diagonalebene keine Ecke trennt.“

---

*) Die harmonisch zugeordneten Flächen zweiten Grades, Halle 1888.

In entsprechender Weise ist das in meiner Dissertation auf Seite 60 und 61 über die Lage der bèiden Centraltetraeder zu einander und zum gemeinschaftlichen Polartetraeder Gesagte zu berichtigen.

Ab- und in den Wortlaut der Dissertation umzuändern sind in Folge dessen die auf Seite 472 des Annalenaufsatzes in veränderter Fassung wiedergegebenen Schlussworte des Satzes über die besondere Natur harmonisch zugeordneter Flächen. Statt:

> *„je nachdem beide Centraltetraeder zu einander ungerade oder gerade Lage haben“*

ist zu setzen:

> *„je nachdem beide Centraltetraeder ein oder kein concaves Hexaeder bilden.“*

Holzminden, im October 1891.

Programma dei concorsi ai premi proposti dal Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere in Milano.

Classe di scienze matematiche e naturali.

Tema per l'anno 1893,

pubblicato il 7 gennajo 1892.

"Contribuire con risultati nuovi e importanti allo studio di una singolarità qualunque di una superficie algebrica.,,

Tempo utile a presentare le Memorie, fino alle 3 *pomeridiane del* 1° *aprile* 1893.

Premio L. 1200.

L'autore conserva la proprietà della Memoria premiata; ma l'Istituto si riserva il diritto di pubblicarla nelle sue collezioni accademiche.

NORME GENERALI PER I CONCORSI.

Può concorrere ogni nazionale o straniero, eccetto i Membri effettivi del Reale Istituto, con Memorie in lingua italiana, o francese, o latina. Queste Memorie dovranno essere trasmesse franche di porto nel termine prefisso, alla Segreteria dell'Istituto, nel palazzo di Brera, in Milano; e, giusta le norme accademiche, saranno anonime, e contraddistinte da un motto ripetuto su di una scheda suggellata, che contenga il nome, cognome e domicilio dell'autore. Si raccomanda l'osservanza di queste discipline, affinchè le Memorie possano essere prese in considerazione.

A evitare equivoci, i signori concorrenti sono ancora pregati di indicare con chiarezza *a quale* dei premi proposti dall'Istituto intendano concorrere.

Tutti i manoscritti si conservano nell'archivio dell'Istituto, per uso di ufficio, e per corredo dei proferiti giudizi, con facoltà agli autori di farne tirar copia a proprie spese.

È libero agli autori delle Memorie non premiate di ritirarne la scheda entro un anno dalla aggiudicazione dei premi, i quali verranno conferiti nella solenne adunanza dell' anno successivo alla chiusura dei concorsi.

Milano, 7 gennajo 1892.

Il Presidente

G. COLOMBO.

I Segretari R. Ferrini. G. Strambio.

INHALT.

Wir ersuchen unsere geehrten Herren Mitarbeiter, etwaige, den Abhandlungen beizufügende Figuren — gleichviel ob dieselben im Texte selbst oder auf besonderen Tafeln veröffentlicht werden sollen — im Interesse einer raschen und exacten Ausführung stets auf besonderen Blättern, wenn möglich in der gewünschten Grösse und in thunlichst präciser Zeichnung dem Manuscripte beilegen zu wollen.

Die Redaction.

☞ **Jeder Band der Annalen wird 36—38 Druckbogen umfassen. Um jedoch in jedem Heft nur abgeschlossene Artikel zu geben, werden die einzelnen Hefte mitunter von ungleicher Stärke sein.**

Verantwortliche Redaction: **W. Dyck, F. Klein, A. Mayer.**

MATHEMATISCHE ANNALEN.

IN VERBINDUNG MIT C. NEUMANN

BEGRÜNDET DURCH

RUDOLF FRIEDRICH ALFRED CLEBSCH.

Unter Mitwirkung der Herren

Prof. P. GORDAN zu Erlangen, Prof. C. NEUMANN zu Leipzig,
Prof. K. VONDERMÜHLL zu Basel

gegenwärtig herausgegeben

von

Prof. **Felix Klein**
zu Göttingen.

Prof. **Walther Dyck**
zu München.

Prof. **Adolph Mayer**
zu Leipzig.

XL. Band. 2. Heft.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1892.

Verlag von **B. G. Teubner** in Leipzig.

ZAHLENTHEORIE

VON

ADRIEN-MARIE LEGENDRE.

NACH DER
DRITTEN AUFLAGE INS DEUTSCHE ÜBERTRAGEN.

VON

HERMANN MASER.

ZWEI BÄNDE.

[I. Band: XVIII u. 442 S., II. Band: XII u. 453 S.]
gr. 8. 1886. Geh. jeder Band n. ℳ 11.60.

Dieses im Jahre 1830 in dritter Ausgabe unter dem Titel „Théorie des nombres“ erschienene Werk von Legendre nimmt unstreitig unter den Erzeugnissen geistiger Forschung auf mathematischem Gebiete einen sehr hervorragenden Platz ein. In eleganter, leicht verständlicher Sprache behandelt dasselbe alle bis zu jener Zeit von allen Gelehrten, vor allen aber von Legendre selbst entdeckten Eigenschaften der Zahlen. Dabei werden gröſsere Digressionen auf verwandte Gebiete, sei es um die nötigen Hilfsmittel für die Beweisführung zu gewinnen, sei es um die Bedeutung der Zahlentheorie für andere mathematische Disziplinen zu erweisen, nicht vermieden. In dieser Beziehung sind namentlich einerseits die Lehre von den Kettenbrüchen und die numerische Auflösung der Gleichungen, andrerseits die mit groſser Ausführlichkeit im Anschluſs an Gauſs'sche Untersuchungen behandelte Theorie der Kreisteilungsgleichungen zu erwähnen. Wenn nun auch das nur wenige Jahre nach der ersten Ausgabe des Legendreschen Werkes erschienene geniale Gauſs'sche Werk „Disquisitiones arithmeticae“ viele der in ersterem enthaltenen Eigenschaften der Zahlen von einem höheren Gesichtspunkte aus betrachtet, wie denn überhaupt das Gauſs'sche Werk in methodischer Beziehung groſse Vorzüge vor dem Legendreschen aufweist und hierin für spätere Arbeiten maſsgebend gewesen ist, so darf deshalb das Studium des letztgenannten noch nicht als überflüssig erachtet werden. Vielmehr enthält dieses Werk des Interessanten und Belehrenden noch so viel, daſs dasselbe, zumal die in ihm in Anwendung gebrachten Hilfsmittel und Methoden höchst einfacher und elementarer Natur sind, allen denen, welche sich eingehender mit der Theorie der Zahlen beschäftigen wollen, gewissermaſsen zum Vorstudium für die Arbeiten von Gauſs und neuerer Forscher nicht dringend genug empfohlen werden kann. Deshalb dürfte es kein unnützes Beginnen sein, dieses Werk, welches heutzutage kaum mehr oder nur nach Aufwendung bedeutender Mittel zu erhalten ist, durch eine deutsche Übersetzung wieder einem gröſseren Leserkreise zugänglich zu machen. Anmerkungen und Zusätze sind aber dieser Übersetzung absichtlich nicht beigefügt, noch weniger sind Änderungen innerhalb des Textes selbst vorgenommen worden.

Ueber die Zahl der verschiedenen Werthe, die eine Function gegebener Buchstaben durch Vertauschung derselben erlangen kann.

Von

Alfred Bochert in Breslau.

(Fortsetzung zu Seite 584 ff. in Bd. 33 dieser Ztschr.)

II.

Das bisher Entwickelte lässt sich noch erweitern, und zwar mit Hülfe eines Satzes, der sich seinerseits als Erweiterung eines schon benützten Hülfssatzes darstellt.

Die Substitution, S_1', nämlich, die man erhält, wenn man irgend eine gegebene, S_1, durch eine andere, S_2, transformirt, d. h. S_2 in den Buchstaben vollzieht, mit denen S_1 ausgeführt wird, ersetzt offenbar folgende Buchstaben, und nur diese, anders als die ursprüngliche, S_2:

Von den durch die transformirende Substitution, S_2, nicht betroffenen Buchstaben diejenigen, für welche die zu transformirende, S_1, nicht wieder solche setzt, und die somit bei der Transformation zwar selbst ungeändert bleiben, deren ersetzende aber dabei vertauscht werden; also diejenigen S_1 und S_2 nicht gemeinsamen, d. h. nicht von beiden Substitutionen vertauschten, Buchstaben, die S_1 durch gemeinsame ersetzt; an Zahl $m - r_1$, wenn m die Zahl aller verschiedenen S_1 und S_2 gemeinsamen Buchstaben bezeichnet, und r_1 angiebt, wie viele davon S_1 wieder an die Stellen von solchen bringt.

Von den zwar durch die transformirende Substitution, S_2, aber nicht durch die zu transformirende, S_1, vertauschten Buchstaben diejenigen, welche die erstere nicht an die Stellen von ebensolchen setzt, und die somit durch die Transformation aus unvertauschten zu vertauschten werden; also diejenigen nicht gemeinsamen Buchstaben von S_1 und S_2, die S_2 auf die Plätze von gemeinsamen bringt; an Zahl $m - r_2$, wenn r_2 angiebt, wie viele der m gemeinsamen Buchstaben S_2 wieder durch solche ersetzt.

Von den sowohl durch die transformirende Substitution, S_2, wie die zu transformirende, S_1, vertauschten Buchstaben diejenigen, die nicht der Bedingung genügen, dass, während sie selbst durch die erstere an die Stellen von andern gesetzt werden, dieselbe zugleich die sie in der letzteren, S_1, ersetzenden Buchstaben auf die Plätze der ebendarin jene andern ersetzenden bringt; an Zahl also $m - r'$, wenn r' die Zahl der diese Bedingung erfüllenden unter den m gemeinsamen Buchstaben von S_1 und S_2 bezeichnet, oder, was ja dasselbe sagt, die Zahl der verschiedenen Fälle in S_2, dass einer dieser m Buchstaben und der von S_1 für ihn gesetzte an die Stellen zweier in der gleichen Beziehung zu einander stehender kommen.

Die Zahl r' bleibt übrigens bei entsprechender Bedeutung dieselbe, wenn die gegebenen Substitutionen S_1 und S_2 mit einander vertauscht werden. Denn werden zwei Buchstaben, c_1 und c_2, von denen eine Substitution den ersten durch den zweiten ersetzt, von einer andern an die Stellen zweier in der nämlichen Beziehung stehender, c_1' und c_2', gesetzt, so bringt umgekehrt die erste Substitution von den durch die die letztere ausgeführten Ersetzungen $\binom{c_1'}{c_1}$ und $\binom{c_2'}{c_2}$ vermöge $\binom{c_1'}{c_2'}$ und $\binom{c_1}{c_2}$ die zweite an die Stelle der ersten. Und ist c_1 den beiden Substitutionen gemeinsam, d. h. sowohl von c_2 als c_1' verschieden, so auch der entsprechende Buchstabe c_2'. Hiernach sind aber augenscheinlich immer je ein Fall der fraglichen Art in einer der zwei Substitutionen und je einer in der andern eindeutig durch einander gegeben, so dass die Zahl dieser Fälle, wie behauptet, in jeder von beiden genau die gleiche sein muss.

Es ist ferner unmittelbar ersichtlich, dass sich alle vier Zahlen m, r_1, r_2, r' bei entsprechender Bedeutung nicht ändern, wenn für irgend eine der gegebenen Substitutionen S_1 und S_2 ihre Umkehrung gesetzt wird.

Nach dem Gesagten ergiebt sich als Gesammtzahl derjenigen Buchstaben, welche die durch Transformation irgend einer Substitution, S_1, mittels einer andern, S_2, entstehende, S_1', anders ersetzt, als die ursprüngliche, S_1, $m - r_1 + m - r_2 + m - r' = 3m - r_1 - r_2 - r'$, darunter genau $m - r_2$ von der letzteren, S_1, und $m - r_1$ von der andern, S_2, nicht vertauschte, wenn m, r_1, r_2, r' die angegebenen Bedeutungen haben. Und diese Zahl bleibt mit entsprechender Bedeutung ungeändert bei Vertauschung der gegebenen Substitutionen S_1 und S_2 mit einander oder ihrer Umkehrung.

Daraus folgt beiläufig, dass das Verschwinden von $3m - r_1 - r_2 - r'$ erforderlich und hinreichend ist, damit eine beliebige der zwei Substitutionen, oder ihre Umkehrung, durch die andere, oder deren Umkehrung, in sich selbst transformirt wird. Und da schon die Voraussetzung irgend eines einzelnen dieser Fälle zu jenem Verschwinden genügt, so ergiebt sich zugleich, dass das Stattfinden irgend eines derselben das aller übrigen nach sich zieht; was ja sonst bekanntlich daraus hervorgeht, dass die durch Transformation einer Substitution S_1 mittels einer andern S_2 erhaltene, S_1', durch $S_2^{-1} S_1 S_2$ darstellbar ist, unter S^{-1} die Umkehrung von S verstanden. Dabei ist nach den Bedeutungen von m, r_1, r_2, r', denen zufolge jede der Zahlen r_1, r_2, r' Theil von m ist, und r' Theil von jeder der Zahlen r_1 und r_2, die Bedingung $3m - r_1 - r_2 - r' = 0$ einerlei mit $m = r_1 = r_2 = r'$ und auch schon durch die einfachere $m = r'$ ausdrückbar.

Nun heben in der Zusammensetzung, die man erhält, wenn man auf eine von irgend zwei Substitutionen die Umkehrung der andern folgen lässt, die Vertauschungen aller der und nur der Buchstaben einander auf, die von den zwei Substitutionen auf gleiche Weise ersetzt werden. Und da Letzteres, wie eben gezeigt, von solchen zwei Substitutionen, die aus irgend einer der gegebenen, S_1 und S_2, oder ihrer Umkehrung, und der daraus durch Transformation mittels der andern, oder deren Umkehrung, entspringenden bestehen, mit allen bis auf genau $3m - r_1 - r_2 - r'$ Buchstaben geschieht, so werden von jeder der Substitutionen, die aus solchen zwei auf die angegebene Art, d. h. dadurch abgeleitet sind, dass man auf die eine die Umkehrung der andern folgen lässt, auch nur genau $3m - r_1 - r_2 - r'$ Buchstaben vertauscht, darunter, nach dem Gesagten, genau $m - r_2$ von der ersten gegebenen, S_1, und $m - r_1$ von der andern, S_2, nicht betroffene. Alle diese Substitionen entstehen durch Vertauschung der gegebenen mit einander oder ihren Umkehrungen nicht nur aus den je zwei unter ihnen, welche, wie $S_1' S_1^{-1}$ und $S_1 S_1'^{-1}$ aus S_1 und S_1', aus dem gleichen Paare abgeleitet und offenbar die Umkehrungen von einander sind, sondern, da ja $S_1'^{-1} = S_2^{-1} S_1^{-1} S_2$, wenn $S_1' = S_2^{-1} S_1 S_2$, auch schon aus irgend einer von ihnen, z. B. aus $S_1' S_1^{-1} = S_2^{-1} S_1 S_2 S_1^{-1}$; und es ergeben sich dabei, wie leicht ersichtlich, im Ganzen acht verschiedene Zusammensetzungen. Dieselben sind sämmtlich gerade, d. h. mittels einer geraden Anzahl aufeinanderfolgender Transpositionen zu bewirken. Denn sowohl die Umkehrung einer Substitution, wie jede durch Transformation daraus hervorgehende, ist ja mit der ursprünglichen zugleich gerade oder ungerade. Und zwei ungerade Transpositionenzahlen geben zusammen eine gerade. Da ferner die Umkehrung, S^{-1}, einer Substitution, S, durch eine Potenz derselben darstellbar ist, und das Ergebniss der Transformation von S_1 mit S_2, S_1', durch $S_2^{-1} S_1 S_2$, so lässt sich jede der fraglichen Substitutionen von $3m - r_1 - r_2 - r'$ Buchstaben durch blosse Zusammensetzung der gegebenen, S_1 und S_2, mit sich selbst und einander herstellen.

Und so hat man schliesslich den Satz:

3. *Ist m die Zahl aller verschiedenen Buchstaben, die zwei beliebig gegebene Substitutionen unter den von ihnen vertauschten gemein haben; ferner r_1 in der einen, S_1, und r_2 in der andern, S_2, dieser Substitutionen die Zahl der verschiedenen Fälle, dass einer der m gemeinsamen Buchstaben wieder durch einen derselben ersetzt wird; endlich r' die für beide Substitutionen gleiche Zahl, welche angiebt, wie viele verschiedene Male es in einer derselben vorkommt, dass ein gemeinsamer Buchstabe und der von der andern für ihn gesetzte an die Stellen zweier in der nämlichen Beziehung zu einander stehender gebracht werden: so ersetzt die durch Transformation irgend einer der zwei Substitutionen, oder ihrer Umkehrung, mittels der andern, oder deren Umkehrung, entstehende Substitution genau $3m - r_1 - r_2 - r'$ verschiedene Buchstaben anders als die ursprüngliche, darunter $m - r_2$ von der ersten, S_1, und $m - r_1$ von der andern, S_2, der gegebenen Substitutionen nicht vertauschte.*

Aus den zwei beliebig gegebenen Substitutionen lassen sich demnach durch blosse Zusammensetzung solche gerade ableiten, die genau je $3m - r_1 - r_2 - r'$ verschiedene Buchstaben vertauschen, darunter $m - r_2$ von der ersten, S_1, und $m - r_1$ von der andern, S_2, nicht betroffene; diejenigen eben wenigstens, die man erhält, wenn man auf die durch Transformation irgend einer der gegebenen, oder ihrer Umkehrung, mittels der andern, oder deren Umkehrung, entstehende Substitution die Umkehrung der ursprünglichen folgen lässt, oder auf letztere die Umkehrung der ersteren; also $S_2^{-1}S_1S_2S_1^{-1}$ und alle durch irgend welche Vertauschung von S_1 mit S_2, S_1 mit S_1^{-1}, oder S_2 mit S_2^{-1} daraus hervorgehenden. Und diese Substitutionen sind dann und nur dann von der identischen nicht verschieden, d. h. $3m - r_1 - r_2 - r'$ ist dann und nur dann $= 0$, wenn die gegebenen zwei Substitutionen S_1 und S_2 durch einander in sich selbst transformirt werden (gegen einander vertauschbar sind).

Davon ist der Eingangs erwähnte, früher für sich bewiesene, einfachere Hülfssatz offenbar derjenige besondere Fall, in welchem $m = 1$, also $r_1 = r_2 = r' = 0$, und $3m - r_1 - r_2 - r' = 3$ ist.

Zur Anwendung kommt hier von dem Satze 3 zunächst nur die Folgerung:

3'. *Haben zwei Substitutionen, die nicht durch einander in sich selbst transformirt werden, nicht mehr als m der von ihnen vertauschten Buchstaben gemein, und kommt es in der einen (S_1) r_1, in der andern (S_2) r_2 verschiedene Male vor, dass einer dieser gemeinsamen Buchstaben wieder durch einen derselben ersetzt wird: so finden sich in jeder Gruppe, der beide Substitutionen angehören, auf die Buchstaben der letzteren beschränkte, von der identischen verschiedene, gerade Substitutionen, die nicht mehr als je $3m - r_1 - r_2$ Buchstaben vertauschen* *(darunter höchstens $m-r_2$ von der ersten, S_1, und $m-r_1$ von der andern, S_2, der gegebenen nicht betroffene). Und zwar ist eine solche Substitution z. B. diejenige $(S_2^{-1}S_1S_2S_1^{-1})$, die man erhält, wenn man auf die durch Transformation der einen gegebenen (S_1) mittels der andern (S_2) entstehende, von der ursprünglichen verschiedene Substitution $(S_2^{-1}S_1S_2)$ die Umkehrung (S_1^{-1}) der ursprünglichen folgen lässt.*

Und da für diese Folgerung ein entsprechend einfacherer selbständiger Beweis möglich ist, so mag ein solcher hier noch Platz finden:

Die durch Transformation einer Substitution, S_1, mittels einer andern, S_2, entstehende, S_1', ersetzt offenbar wenigstens folgende Buchstaben auf gleiche Weise, wie die ursprüngliche, S_1:

Von den durch die letztere nicht vertauschten diejenigen, die von der transformirenden Substitution, S_2, auf die Plätze von ebensolchen gebracht und somit auch von der transformirten, S_1', nicht vertauscht werden; also, wenn die Zahl aller verschiedenen S_1 und S_2 gemeinsamen, d. h. sowohl von S_1 wie S_2 vertauschten, Buchstaben nicht grösser als m ist, und S_2 an die Stellen von r_2 derselben wieder solche setzt, alle von S_1 nicht betroffenen Buchstaben bis auf höchstens $m-r_2$, nämlich eben bis auf diejenigen nicht gemeinsamen, die S_2 an die Stellen von gemeinsamen bringt.

Und von den andern Buchstaben diejenigen, die der Bedingung genügen, dass weder sie selbst, noch ihre ersetzenden in der zu transformirenden Substitution, S_1, von der transformirenden, S_2, betroffen werden; also alle von S_1 vertauschten ausser einerseits den höchstens m gemeinsamen von S_1 und S_2 und andererseits denjenigen von S_2 nicht betroffenen, die S_1 durch gemeinsame ersetzt, und deren Zahl ja $m-r_1$ nicht übersteigt, wenn r_1 der gemeinsamen Buchstaben durch S_1 wieder für solche gesetzt werden.

Das sind aber zusammen überhaupt alle Buchstaben bis auf höchstens $m-r_2+m+m-r_1=3m-r_1-r_2$.

Lässt man demnach auf die fragliche transformirte Substitution, S_1', die Umkehrung, S_1^{-1}, der ursprünglichen folgen, so heben dabei die Vertauschungen aller Buchstaben bis auf höchstens $3m-r_1-r_2$ einander auf, so dass die durch diese Zusammensetzung, $S_1'S_1^{-1}$, dargestellte Substitution nicht mehr als die letztere Zahl vertauschen kann (darunter, nach dem Gesagten, höchstens $m-r_2$ von der ersten, S_1, und $m-r_1$ von der andern, S_2, der gegebenen Substitutionen nicht betroffene Buchstaben). Und die so erhaltene Substitution ist offenbar von der identischen verschieden, sobald die fragliche transformirte, $S_1'=S_2^{-1}S_1S_2$, nicht mit der ursprünglichen, S_1, einerlei ist, also auch $S_1^{-1}S_2S_1$ nicht mit S_2; d. h. sobald die zu transformirende, S_1, der gegebenen Substitutionen durch die andere, S_2, und also auch

S_2 durch S_1, nicht in sich selbst transformirt wird. Sie ist ferner, wie entsprechend im vorigen Beweise ausgeführt ist, stets gerade, als Aufeinanderfolge zweier zugleich gerader oder ungerader Substitutionen, und findet sich ebenso unter den blossen Zusammensetzungen der gegebenen, S_1 und S_2, mit sich selbst und einander, und folglich unter den auf die Buchstaben der letzteren beschränkten Substitutionen jeder Gruppe, die beide enthält, wie die Umkehrungen, S_1^{-1} und S_2^{-1}, der gegebenen und die aus der einen derselben, S_1, durch die Transformation mittels der andern, S_2, entspringende Substitution, $S_1' = S_2^{-1} S_1 S_2$.

Und damit ist ja die Behauptung bewiesen.

Es seien nun irgendwelche Buchstaben gegeben und zwei Substitutionen, deren eine von denselben nur m_0 vertauscht, darunter r_0 so, dass sie dafür wieder welche der gegebenen Buchstaben setzt; während die andere auf die letzteren beschränkt ist.

Alle Buchstaben, welche diese zwei Substitutionen unter den von ihnen vertauschten gemein haben, sind offenbar unter den m_0 enthalten, welche die erste von den, die Buchstaben der andern umfassenden, gegebenen überhaupt betreffen soll. Die Anzahl dieser gemeinsamen Buchstaben, die also nicht grösser als m_0 sein kann, sei m. Was dann die Zahl r derjenigen darunter betrifft, für die von der ersten Substitution wieder welche dieser m gesetzt werden, so wird ja die entsprechende, r_0, unter allen m_0 von der Substitution vertauschten gegebenen Buchstaben durch Ausschliessung eines der letzteren nur dann verringert, wenn der ausgeschlossene Buchstabe einer der entsprechenden selbst, oder ein solcher ist, durch den die Substitution einen derselben ersetzt, und zwar für jeden der beiden Fälle um 1; höchstens also um 2, wenn nämlich beide zugleich bei dem ausgeschlossenen Buchstaben stattfinden. Die fragliche Zahl r ist demnach keinesfalls kleiner als $r_0 - 2(m_0 - m)$, da eben von den m_0 durch die Substitution überhaupt betroffenen gegebenen Buchstaben nur $m_0 - m$ als nicht gemeinsame auszuschliessen sind.

Aus $r_0 - 2(m_0 - m) \stackrel{=}{<} r$ folgt aber $2m - r \stackrel{=}{<} 2m_0 - r_0$, also auch $3m - r \stackrel{=}{<} 3m_0 - r_0$, weil ja $m \stackrel{=}{<} m_0$ ist (und $m - r \stackrel{=}{<} m_0 - \frac{1}{2} r_0$, weil $2m - 2r \stackrel{=}{<} 2m - r$).

Und so ergiebt sich durch Anwendung des Satzes 3′ auf den vorliegenden Fall, da $3m - r_1 - r_2$ darin $\stackrel{=}{<} 3m - r$ (und $m - r_1 + m - r_2 \stackrel{=}{<} 2m - r$):

4. *Ist von zwei Substitutionen, die nicht durch einander in sich selbst transformirt werden, die eine* (S) *auf Buchstaben aus einer Anzahl beschränkt, aus der die andere* (S_0) *nur* m_0 *vertauscht, wovon* r_0

so, dass sie wieder welche dieser m_0 dafür setzt, so finden sich in jeder Gruppe, der beide Substitutionen angehören, auf die Buchstaben der letzteren beschränkte, von der identischen verschiedene, gerade Substitutionen (z. B. $S^{-1} S_0 S S_0^{-1}$ oder $S_0^{-1} S S_0 S^{-1}$), die nicht mehr als je $3m_0 - r_0$ Buchstaben vertauschen (darunter höchstens $2m_0 - r_0$ nicht von beiden gegebenen betroffene und höchstens $m_0 - \frac{1}{2} r_0$ von der ersten derselben (S) nicht vertauschte; also auch nicht mehr als $2m_0 - r_0$ Buchstaben, die nicht zu den m_0 von der zweiten (S_0) betroffenen unter der gegebenen Anzahl, und nicht mehr als $m_0 - \frac{1}{2} r_0$, die überhaupt nicht zu dieser Anzahl gehören).

Man denke sich jetzt weiter irgendwelche von der identischen Substitution nicht erfüllte Bedingungen gestellt und aus beliebig gegebenen Buchstaben eine Anzahl herausgegriffen der Art, dass keine auf die herausgegriffenen Buchstaben beschränkte Substitution diesen Bedingungen genügt, und zugleich keine grössere die herausgegriffene vollständig enthaltende Anzahl der nämlichen Eigenschaft unter den gegebenen Buchstaben vorhanden ist.

Dann muss es offenbar schon für jeden einzelnen der von letzteren noch übrigen mindestens eine den gestellten Bedingungen entsprechende Substitution geben, die auf ihn und die herausgegriffenen Buchstaben beschränkt ist, und somit nach der über diese gemachten Voraussetzung denselben als einzigen von allen nicht herausgegriffenen auch wirklich vertauscht.

Der eben abgeleitete Satz legt nun die Frage nahe, wann insbesondere unter denjenigen nicht herausgegriffenen Buchstaben, die von einer auf die gegebenen beschränkten Substitution vertauscht werden, einer so zu wählen ist, dass diese Substitution von einer zu demselben in der angegebenen Beziehung stehenden, also ihn allein von allen nicht herausgegriffenen vertauschenden, nicht in sich selbst transformirt wird.

Das ist wenigstens dann der Fall, wenn die betrachtete Substitution auch nur einen jener Buchstaben wieder für einen der nicht herausgegriffenen setzt. Denn sie wird ja dann durch jede Substitution, die von solchen zwei Buchstaben einen ungeändert lässt, den ihn ersetzenden oder durch ihn ersetzten andern dagegen vertauscht, in eine von ihr verschiedene verwandelt. Ist aber m die Zahl aller verschiedenen von der betrachteten Substitution vertauschten herausgegriffenen Buchstaben und r die Zahl derjenigen darunter, die sie wieder durch welche dieser m ersetzt, so kommt es genau $m - r$ verschiedene Male vor, dass sie einen nicht herausgegriffenen Buchstaben an die Stelle eines herausgegriffenen bringt. Soll dies also mit jedem der von ihr überhaupt betroffenen nicht herausgegriffenen Buchstaben geschehen, d. h. soll sie keinen derselben wieder für einen von ihnen setzen, so darf die Zahl dieser Buchstaben gerade nur $m - r$ betragen, die Gesammtzahl der von der betrachteten Substitution vertauschten mithin $m + m - r = 2m - r$. Und folglich ist in diesem Falle, wenn s die fragliche Gesammtzahl bezeichnet, $2m - r = s$.

Im andern Falle giebt es dagegen, wie gesagt, sicher solche den gestellten Bedingungen entsprechende Substitutionen, durch welche die betrachtete nicht in sich selbst transformirt wird, und die dabei von den nicht herausgegriffenen Buchstaben je nur einen einzigen betreffen, und zwar gemeinsam mit der betrachteten. Jede derselben ist also, weil auf diesen einen und die herausgegriffenen, auf eine Anzahl von Buchstaben beschränkt, von denen die betrachtete Substitution nur $1 + m$ vertauscht, jenen einen und m der herausgegriffenen, und r dieser m so, dass an ihre Stellen wieder welche der m, und somit auch der $1 + m$, treten.

Wird demnach noch vorausgesetzt, dass eine der gestellten Bedingungen die Zugehörigkeit zu einer Gruppe ist, der auch die sonst innerhalb der gegebenen Buchstaben beliebig wählbare betrachtete Substitution entnommen sein soll, so hat man nach Satz 4 schliesslich das Ergebniss:

5. *Sind irgendwelche von der identischen Substitution nicht erfüllte Bedingungen gestellt, und ist aus beliebig gegebenen Buchstaben eine Anzahl herausgegriffen, auf deren Buchstaben keine diesen Bedingungen genügende Substitution einer gegebenen Gruppe beschränkt ist, und die ausserdem in keiner andern den gegebenen Buchstaben zu entnehmenden Anzahl der nämlichen Eigenschaft vollständig enthalten ist; wird ferner für irgend eine auf die letzteren beschränkte Substitution der gegebenen Gruppe durch s bezeichnet, wie viele verschiedene Buchstaben dieselbe überhaupt vertauscht, durch m, wie viele von den herausgegriffenen, und durch r, wie viele unter diesen m so, dass sie wieder welche der herausgegriffenen dafür setzt: so muss* $2m - r = s$ *sein, wenn in der gegebenen Gruppe keine auf die Buchstaben dieser Substitution und die herausgegriffenen beschränkte, von der identischen verschiedene, gerade Substitution vorkommen soll, die nicht mehr als* $3 + 3m - r$ *Buchstaben vertauscht (darunter höchstens* $3 + 2m - r$, *die nicht zu den m von der betrachteten vertauschten unter den herausgegriffenen, und höchstens* $2 + m - \frac{1}{2}r$, *die überhaupt nicht zu den letzteren gehören).*

Und daraus folgt offenbar, da $m \geqq \frac{1}{2}(u + r)$ ist, wenn $2m - r = s$, und $s \geqq u$; ferner $m \geqq \frac{1}{3}(u + r) - 1$ bezw. $\geqq \frac{1}{3}(u' + r) - 1$, wenn $3 + 3m - r \geqq u$ bezw. $\geqq u'$; endlich $3 + 3m - r > s$, wenn $2m - r = s$, und $m \geqq 0$:

6. *Sind irgendwelche Buchstaben und eine Substitutionengruppe gegeben, der in diesen Buchstaben ausser der identischen Substitution keine von weniger als u und keine gerade von weniger als u' Buchstaben angehört; sind ferner irgend welche durch die identische Substitution nicht erfüllte Bedingungen gestellt, und ist aus den gegebenen Buchstaben eine Anzahl herausgegriffen, auf die keine diesen Bedingungen genügende Substitution der gegebenen Gruppe beschränkt ist, und die überdies in keiner andern den gegebenen Buchstaben zu entnehmenden Anzahl der nämlichen Eigenschaft vollständig enthalten ist: so vertauscht unter den auf die letzteren beschränkten von der identischen verschiedenen Substitutionen der gegebenen Gruppe keine weniger von den herausgegriffenen Buchstaben als $\frac{1}{3}(u+r)-1$, und sogar, als der nicht grössere der Ausdrücke $\frac{1}{3}(u'+r)-1$ und $\frac{1}{2}(u+r)$ angiebt, und keine gerade weniger als $\frac{1}{3}(u'+r)-1$; unter r die Zahl derjenigen dieser vertauschten Buchstaben verstanden, welche die Substitution wieder durch herausgegriffene ersetzt.*

Hiernach kann ausser der identischen keine gerade, bezw. überhaupt keine, Substitution der gegebenen Gruppe auf eine Anzahl der gegebenen Buchstaben beschränkt sein, die mit der herausgegriffenen weniger als $\frac{1}{3}u'-1$, bezw. als jeder der Ausdrücke $\frac{1}{3}u'-1$ und $\frac{1}{2}u$, gemein hat. Letztere Bedingungen sind aber offenbar erfüllbar, insbesondere durch die keinen der herausgegriffenen Buchstaben enthaltende Gesammtheit der übrigen gegebenen, wenn die Grenzen $\frac{1}{3}u'-1$ und $\frac{1}{2}u$ noch über Null liegen. Und dies lässt sich ja bei der Bedeutung von u stets bewirken, sobald $u'>3$ gesetzt werden kann, sobald also die gegebene Gruppe keinen auf die gegebenen Buchstaben beschränkten Cyclus dritter Ordnung, die einzige Art von der identischen verschiedener gerader Substitutionen in nicht mehr als drei Buchstaben, enthält.

Eine Folgerung des Satzes 6 ist daher:

7. *Kann unter denselben Voraussetzungen, wie im vorhergehenden Satze, $u'>3$ gesetzt werden, oder, was dasselbe sagt, findet sich in der gegebenen Gruppe kein auf die gegebenen Buchstaben beschränkter Cyclus dritter Ordnung, so bilden die nicht herausgegriffenen unter diesen Buchstaben sowohl für sich, als mit jeder unter $\frac{1}{3}u'-1$, bezw. unter der nicht höheren der Grenzen $\frac{1}{3}u'-1$ und $\frac{1}{2}u$, liegenden Anzahl von beliebigen der herausgegriffenen eine Zusammenstellung, auf deren*

Buchstaben ausser der identischen keine gerade, bezw. überhaupt keine, Substitution der gegebenen Gruppe beschränkt ist.

Schon aus diesem Ergebnisse, dessen Ableitung ersichtlich auch ohne Berücksichtigung der Zahlen r möglich ist, lassen sich Schlüsse in Bezug auf die grössten den gegebenen Buchstaben zu entnehmenden Zusammenstellungen der letztgedachten Eigenschaften, und damit auf die Werthezahl einer in diesen Buchstaben nur durch die gegebene Gruppe nicht geänderten Function, ziehen. Denn man braucht ja nur die Bedingungen, von denen im Satze 6 die Rede ist, so zu beschränken, dass ihnen mit Ausnahme der identischen alle geraden, bezw. überhaupt alle, Substitutionen genügen, damit auch die Gesammtheit der darin als herausgegriffen vorausgesetzten Buchstaben eine Anzahl darstellt, in der ausser der identischen keine gerade, bezw. überhaupt keine, Substitution zur gegebenen Gruppe gehört. Und dann hat man nach Satz 7 wenn $u' > 3$ gesetzt werden kann, und x die Zahl dieser herausgegriffenen Buchstaben, n die aller gegebenen bezeichnet, zwei Zusammenstellungen der gleichen fraglichen Art, von denen die eine aus den herausgegriffenen x, die andere aus einer unterhalb $\frac{1}{3}u' - 1$, bezw. der nicht höheren der zwei Grenzen $\frac{1}{3}u' - 1$ und $\frac{1}{2}u$, beliebig wählbaren Zahl m derselben x und den übrigen $n - x$ der gegebenen Buchstaben besteht. Von zwei Zahlen, x und $n - x + m$, kann aber nicht jede kleiner als die halbe Summe derselben, $\frac{1}{2}(n+m)$, sein. Und was m betrifft, so sind ja die grössten noch unter $\frac{1}{3}u' - 1$ bezw. $\frac{1}{2}u$ liegenden ganzen Zahlen keinesfalls kleiner als $\frac{1}{3}u' - 2$ bezw. $\frac{1}{2}u - 1$. Mithin:

8. *Sind irgend n Buchstaben und eine Substitutionengruppe gegeben, die in denselben ausser der identischen keine Substitution von weniger als u und keine gerade von weniger als u' Buchstaben enthält; kann ferner $u' > 3$ gesetzt werden, oder, was dasselbe sagt, findet sich in der gegebenen Gruppe kein auf die gegebenen n Buchstaben beschränkter Cyclus dritter Ordnung: so lässt sich aus diesen Buchstaben eine Anzahl von nicht weniger als $\frac{1}{2}n + \frac{1}{6}u' - 1$, bezw. als der nicht grössere der beiden Ausdrücke $\frac{1}{2}n + \frac{1}{6}u' - 1$ und $\frac{1}{2}n + \frac{1}{4}u - \frac{1}{2}$, herausgreifen, auf welche ausser der identischen keine gerade, bezw. überhaupt keine, Substitution der gegebenen Gruppe beschränkt ist.*

In diesem wie den beiden vorhergehenden Sätzen ist übrigens der auf die geraden Substitutionen der gegebenen Gruppe bezügliche Theil eine blosse Folge des andern, da ja diese Substitutionen eine Gruppe für sich bilden, die man an Stelle der ganzen gegebenen betrachten kann, und für die dann $u = u'$ zu setzen ist.

Ausserdem besteht eine einfache Beziehung zwischen jeder Anzahl von Buchstaben, auf die keine von der identischen verschiedene gerade Substitution einer gegebenen Gruppe beschränkt ist, und der grössten in dieser Anzahl enthaltenen, in welcher derselben Gruppe überhaupt keine Substitution ausser der identischen angehört. Auf die Buchstaben einer Anzahl der ersteren Art kann nämlich auch höchstens eine einzige ungerade Substitution der gegebenen Gruppe beschränkt sein, und zwar nur zweiter Ordnung. Denn sowohl die Aufeinanderfolge zweier verschiedener ungerader Substitutionen einer Gruppe, als die zweite Potenz jeder Substitution derselben von höherer als zweiter Ordnung, stellt ja eine zur nämlichen Gruppe gehörige, von der identischen verschiedene gerade Substitution dar, die keinen neuen Buchstaben vertauscht.

Aus irgend solchen Buchstaben aber, in denen eine gegebene Gruppe nur eine einzige von der identischen verschiedene Substitution enthält, genügt es offenbar, einen beliebigen der von dieser betroffenen Buchstaben wegzulassen, um in den übrig bleibenden eine nur um 1 kleinere Anzahl zu haben, auf deren Buchstaben überhaupt keine Substitution der gegebenen Gruppe ausser der identischen beschränkt ist. Und folglich:

9. Ist eine Anzahl von Buchstaben, in denen einer gegebenen Gruppe keine von der identischen verschiedene gerade Substitution (und also auch höchstens eine einzige ungerade) angehört, nicht schon selbst auch eine solche, auf deren Buchstaben überhaupt keine Substitution der gegebenen Gruppe ausser der identischen beschränkt ist, so ist die grösste in ihr enthaltene Anzahl dieser letzteren Eigenschaft nur um 1 kleiner als sie.

Mehr, als in 8, lässt sich auf Grund der Sätze 6 und 7 in folgender Weise erreichen:

Man habe wieder irgend eine Substitutionengruppe und n Buchstaben, die nicht schon in ihrer Gesammtheit eine für sich allein durch diese Gruppe unvertauschbare Anzahl darstellen, in denen also der Gruppe von der identischen verschiedene Substitutionen nicht ganz fehlen. Es bezeichne ferner u die kleinste unter den Buchstabenzahlen aller dieser Substitutionen, nicht wie bisher nur eine untere Grenze dafür, und keine gerade unter denselben vertausche wieder weniger als u' Buchstaben.

Denkt man sich dann aus der gegebenen Gruppe eine auf die gegebenen n Buchstaben beschränkte Substitution der kleinsten Buchstabenzahl u herausgegriffen, so haben die von derselben nicht vertauschten $n-u$ der n Buchstaben entweder die Eigenschaft, dass in ihnen keine, bezw. keine gerade, Substitution mehr ausser der identischen zur gegebenen Gruppe gehört, oder nicht.

Im ersten Falle, der ja nach der Bedeutung von u der allein mögliche ist, sobald $n-u<u$ bezw. $<u'$, d. h. $u>\frac{1}{2}n$, bezw. $u+u'>n$, ist, sei $n-u+y$ die kleinste Anzahl unter den gegebenen n Buchstaben, welche die von der herausgegriffenen Substitution nicht betroffenen $n-u$ derselben umfasst, aber nicht mehr, wie diese, der Bedingung genügt, dass sich keine, bezw. keine gerade, auf sie beschränkte Substitution ausser der identischen in der gegebenen Gruppe findet. Dann bilden die $n-u$ noch mit beliebigen $y-1$ der von der herausgegriffenen Substitution vertauschten übrigen u gegebenen Buchstaben eine dieser Bedingung entsprechende Zusammenstellung. Diese $y-1$ lassen sich nun offenbar insbesondere so wählen, dass jene Substitution alle mit Ausnahme von höchstens einem, also mindestens $y-2$ von ihnen, wieder durch welche von ihnen ersetzt; indem z. B. der Reihe nach, soweit noch verfügbar, zum folgenden Buchstaben immer derjenige genommen wird, den die Substitution an die Stelle des vorhergehenden bringt. Und unter den in den gegebenen n Buchstaben hiernach möglichen, für sich allein durch keine, bezw. keine gerade, Substitution der gegebenen Gruppe vertauschbaren Zusammenstellungen, die neben allen von der herausgegriffenen Substitution nicht betroffenen $n-u$ dieser Buchstaben $y-1$ auf solche Weise von derselben vertauschte umfassen, kann nach Satz 6 keine, die nicht noch in einer andern von ihnen ganz enthalten sein soll, mit den u Buchstaben der herausgegriffenen Substitution weniger als m_y gemein haben, und also überhaupt aus weniger als $n-u+m_y$ Buchstaben bestehen, wenn m_y die kleinste ganze Zahl bezeichnet, die weder niedriger ist als $\frac{1}{3}(u+y-2)-1$, noch als die nicht höhere der beiden Grenzen $\frac{1}{3}(u'+y-2)-1$ und $\frac{1}{2}(u+y-2)$, noch auch als der nicht grössere der Ausdrücke $\frac{1}{3}u'-1$ und $\frac{1}{2}u$. Denn r ist ja hier $\geqq y-2$ und zugleich seinem Begriffe nach $\geqq 0$. Was ferner y betrifft, so ist $n-u+y$ nach der darüber gemachten Annahme nicht kleiner als u, bezw. auch als u', die vorausgesetzte untere Grenze für jede Anzahl unter den gegebenen n Buchstaben, auf die schon mindestens eine von der identischen verschiedene, bezw. überdies gerade, Substitution der gegebenen Gruppe beschränkt sein soll; also $y\geqq 2u-n$, bezw. auch $\geqq u + u' - n$, und $n - u + \frac{1}{3}(u+y-2) - 1 \geqq \frac{2}{3}n - \frac{5}{3}$,

$$n - u + \frac{1}{3}(u'+y-2) - 1 \geqq \frac{2}{3}n + \frac{1}{3}(u'-u) - \frac{5}{3}$$

$$\text{bezw. } \geqq \frac{2}{3}n + \frac{2}{3}(u'-u) - \frac{5}{3},$$

$$n - u + \frac{1}{2}(u+y-2) \geqq \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}u - 1 \text{bezw. } \geqq \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}u' - 1.$$

Und folglich ist in diesem Falle die grösste unter den gegebenen n Buchstaben vorhandene Anzahl, in der die gegebene Gruppe keine, bezw. keine gerade, Substitution ausser der identischen enthält, weder kleiner als $\frac{2}{3}n - \frac{5}{3}$, noch als der nicht grössere der Ausdrücke

$$\frac{2}{3}n + \frac{1}{3}(u'-u) - \frac{5}{3} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}u - 1,$$

$$\text{bezw. } \frac{2}{3}n + \frac{2}{3}(u'-u) - \frac{5}{3} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}u' - 1,$$

noch auch als $n - u + m$, wenn m die kleinste nicht zugleich unter jeder der Grenzen $\frac{1}{3}u' - 1$ und $\frac{1}{2}u$ liegende ganze Zahl bedeutet.

Unter der Voraussetzung $u > \frac{1}{2}n$ gilt übrigens von den zwei Ausdrücken $\frac{2}{3}n + \frac{1}{3}(u'-u) - \frac{5}{3}$ und $\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}u - 1$ der erste als untere Grenze in der eben angegebenen Beziehung immer, nicht nur, wie gezeigt, wenn er nicht grösser ist als der andere. Denn unter jener Voraussetzung kann derselbe ja den letzteren nur dann übersteigen, wenn $u' > \frac{3}{4}n + 2$ wird. Ist dies aber zugleich neben $u > \frac{1}{2}n$ der Fall, so besteht die fragliche untere Grenze $\frac{2}{3}n + \frac{1}{3}(u'-u) - \frac{5}{3}$ deshalb, weil sie dann noch nicht über $u' - 2$ liegt; während nach 9 hier, wo auf keine Anzahl von weniger als u' der gegebenen n Buchstaben irgend eine von der identischen verschiedene gerade Substitution der gegebenen Gruppe beschränkt sein soll, die grösste für sich allein durch letztere überhaupt unvertauschbare Anzahl unter diesen Buchstaben keinesfalls kleiner als $u' - 2$ ist.

Aus dem Gesagten ergiebt sich zunächst schon:

10. *Vertauscht unter den von der identischen verschiedenen Substitutionen einer Gruppe jede auf gegebene n Buchstaben beschränkte mehr als die halbe Zahl dieser Buchstaben, so findet sich unter den letzteren immer eine Anzahl von nicht weniger als $\frac{2}{3}n - \frac{5}{3}$, auf die überhaupt keine jener Substitutionen beschränkt ist.*

Und sogar:

(10.) *Ist u die kleinste unter den Buchstabenzahlen aller auf gegebene n Buchstaben beschränkten, von der identischen verschiedenen*

Substitutionen einer Gruppe, und vertauscht keine gerade unter diesen Substitutionen weniger als u' Buchstaben, so lässt sich aus den gegebenen n Buchstaben unter der Voraussetzung $u > \frac{1}{2} n$ eine Anzahl von nicht weniger als $\frac{2}{3} n + \frac{1}{3} (u' - u) - \frac{5}{3}$ herausgreifen, auf die keine Substitution der gegebenen Gruppe ausser der identischen beschränkt ist, und unter der Voraussetzung $u + u' > n$ eine nicht zugleich unter jedem der Ausdrücke $\frac{2}{3} n + \frac{2}{3} (u' - u) - \frac{5}{3}$ und $\frac{1}{2} n + \frac{1}{2} u' - 1$ liegende Zahl, in deren Buchstaben wenigstens keine von der identischen verschiedene gerade Substitution zur Gruppe gehört.

Es bleibt nun noch der andere Fall, dass die gegebene Gruppe auch in denjenigen $n - u$ der gegebenen n Buchstaben, die von einer aus ihr herausgegriffenen, auf die letzteren beschränkten Substitution der kleinstmöglichen Buchstabenzahl u nicht betroffen werden, noch mindestens eine von der identischen verschiedene, bezw. überdies gerade, Substitution enthält.

In diesem Falle hat nach Satz 6 jede der in den gegebenen n Buchstaben möglichen für sich allein durch keine, bezw. keine gerade Substitution der gegebenen Gruppe vertauschbaren Zusammenstellungen, die noch nicht ganz in einer andern der nämlichen Art enthalten sind, mit jenen $n - u$ Buchstaben, weil mit jeder auf dieselben beschränkten von der identischen verschiedenen, bezw. überdies geraden, Substitution der Gruppe, mindestens m, bezw. m', gemein, wenn m' die kleinste nicht unter $\frac{1}{3} u' - 1$, m wieder die kleinste nicht zugleich unter jedem der Ausdrücke $\frac{1}{3} u' - 1$ und $\frac{1}{2} u$ liegende ganze Zahl bezeichnet. Insbesondere also auch jede solche unter diesen Zusammenstellungen, die beliebig gewählte $u - 1$ der u von der herausgegriffenen Substitution vertauschten Buchstaben umfasst, bezw. wenn es sich nur um die geraden Substitutionen handelt, und $u' > u$ gesetzt werden kann, alle diese u. Und eine solche ist ja immer vorhanden, da nach Voraussetzung auf weniger als u' der gegebenen n Buchstaben keine gerade und auf weniger als u derselben überhaupt keine Substitution der gegebenen Gruppe ausser der identischen beschränkt ist. Man denke sich nun irgend eine Zusammenstellung dieser besonderen Art, und die Buchstabenzahl derselben sei x. Darf man dann $u' > 3$ annehmen, d. h. gehört in den gegebenen n Buchstaben keine von der identischen verschiedene gerade Substitution von weniger als vier Buchstaben, oder, was ja dasselbe sagt, kein Cyclus dritter Ordnung, zur gegebenen Gruppe, so bilden nach Satz 7 beliebige $m - 1$, bezw. $m' - 1$, der gedachten x Buchstaben mit den übrigen $n - x$ gegebenen zusammen wieder eine Anzahl, auf deren Buchstaben keine, bezw. keine gerade

Substitution der Gruppe ausser der identischen beschränkt ist. Wählt man aber jene $m-1$, bezw. $m'-1$, Buchstaben aus den mindestens m, bezw. m', die, wie vorher gezeigt, unter den gedachten x von der herausgegriffenen Substitution nicht betroffen werden, so müssen, wieder nach Satz 6, zu der entstehenden Zusammenstellung von $n-x+m-1$, bezw. $n-x+m'-1$, in der ja nur einer, bezw. auch keiner, von den u Buchstaben dieser Substitution vorkommt, noch wenigstens $m-1$, bezw. m, der letzteren hinzutreten, um eine solche für sich allein durch keine, bezw. keine gerade, Substitution der gegebenen Gruppe vertauschbare Anzahl der gegebenen n Buchstaben daraus zu machen, die nicht mehr in einer andern der nämlichen Art ganz enthalten ist. Das giebt zusammen eine Zahl von nicht weniger als $n-x+m-1+m-1=n-x+2m-2$, bezw. $n-x+m'-1+m$, Buchstaben, der gleichen Art, wie nach Voraussetzung die gedachten x; und da von zwei Zahlen, x und $n-x+2m-2$, bezw. x und $n-x+m+m'-1$, nicht jede kleiner als die halbe Summe derselben, $\frac{1}{2}n+m-1$, bezw. $\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}m'-\frac{1}{2}$, sein kann, so ist damit bewiesen, dass sich unter den gemachten Annahmen aus den gegebenen n Buchstaben eine Anzahl von nicht weniger als $\frac{1}{2}n+m-1$ herausgreifen lässt, in denen die gegebene Gruppe keine von der identischen verschiedene Substitution enthält, und, wenn $u'>u$ zu setzen ist, eine solche von nicht weniger als $\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}m'-\frac{1}{2}$, in denen mindestens keine gerade Substitution ausser der identischen zur Gruppe gehört.

Nun ist zugleich von diesen unteren Grenzen $\frac{1}{2}n+m-1$ und $\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}m+\frac{1}{2}m'-\frac{1}{2}$ die erste nicht höher als die im vorigen Falle gefundene entsprechende $n-u+m$, so lange $u\leqq\frac{1}{2}n+1$, und die zweite nicht, so lange $u+\frac{1}{2}(m'-m)\leqq\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}$ bleibt.

Und folglich hat man als Ergänzung von 10 und (10) den Satz:

11. *Ist u die kleinste unter den Buchstabenzahlen aller auf gegebene n Buchstaben beschränkten von der identischen verschiedenen Substitutionen einer Gruppe, und vertauscht keine gerade unter diesen Substitutionen weniger als u' Buchstaben; bezeichnet ferner m die kleinste nicht zugleich unter jedem der Ausdrücke $\frac{1}{3}u'-1$ und $\frac{1}{2}u$, m die kleinste nicht unter $\frac{1}{3}u'-1$ liegende ganze Zahl; und kann $u'>3$ gesetzt werden, oder, was dasselbe sagt, enthält die gegebene Gruppe keinen Cyclus dritter Ordnung in den gegebenen n Buchstaben: so findet sich unter*

den letzteren, wenn $u \leqq \frac{1}{2}n + 1$, *immer eine Anzahl von nicht weniger als* $\frac{1}{2}n + m - 1$, *in denen keine Substitution ausser der identischen zur gegebenen Gruppe gehört, und, wenn sowohl* $u' > u$ *zu setzen, als* $u + \frac{1}{2}(m' - m) \leqq \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}$ *ist, eine solche von nicht weniger als* $\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}m' - \frac{1}{2}$, *auf die wenigstens keine von der identischen verschiedene gerade Substitution der Gruppe beschränkt ist.*

Betrachtet man wieder noch statt der ganzen gegebenen Gruppe die aller geraden Substitutionen derselben, so erhält man als unmittelbare Folgerung aus 10 und 11:

12. *Ist* u' *die kleinste unter den Buchstabenzahlen aller auf gegebene* n *Buchstaben beschränkten von der identischen verschiedenen geraden Substitutionen einer Gruppe, so ist die grösste unter diesen* n *Buchstaben vorkommende Anzahl, auf die überhaupt keine gerade Substitution der gegebenen Gruppe ausser der identischen beschränkt ist, nicht kleiner als* $\frac{2}{3}n - \frac{5}{3}$, *wenn* $u' > \frac{1}{2}n$ *ist, und nicht kleiner als* $\frac{1}{2}n + m' - 1$, *wenn* $3 < u' \leqq \frac{1}{2}n + 1$ *ist, und* m' *die kleinste nicht unter* $\frac{1}{3}u' - 1$ *liegende ganze Zahl bezeichnet.*

Schlüsse aus den erhaltenen Sätzen 10, (10), 11 und 12 hinsichtlich der Werthezahl einer Function in irgend welchen Buchstaben ergeben sich wie früher einfach dadurch, dass man diese Buchstaben und die Gruppe aller die Function nicht ändernden Substitutionen in denselben zu gegebenen nimmt. Nämlich, da eben eine Function durch Vertauschung von k Buchstaben unter einander allein $k!$ verschiedene Werthe erlangt, wenn sie durch jede der in diesen k Buchstaben möglichen $k!$ Substitutionen ausser der identischen geändert wird, und wenigstens $\frac{k!}{2}$, wenn sie keine der wieder eine Gruppe bildenden $\frac{k!}{2}$ geraden unter diesen Substitutionen ausser der identischen zulässt, also einschliesslich letzterer überhaupt höchstens zwei Substitutionen in den k Buchstaben:

II. *Ist* u *die kleinste von den Buchstabenzahlen aller auf gegebene* n *Buchstaben beschränkten von der identischen verschiedenen Substitutionen, die eine gegebene Function nicht ändern,* u' *von denen aller geraden unter diesen Substitutionen; bezeichnet ferner* k *die grösste unter den gegebenen* n *Buchstaben vorkommende Anzahl von solchen, durch deren Vertauschung unter einander allein die gegebene Function schon* $k! = 1.2\ldots k$ *verschiedene Werthe erlangt,* k' *die grösste von solchen, in denen allein sie wenigstens* $\frac{k'!}{2}$ *annimmt: so ist* *k nicht kleiner als* $\frac{2}{3}n + \frac{1}{3}(u' - u) - \frac{5}{3}$, *wenn* $u > \frac{1}{2}n$,

als $\frac{1}{2}n + m - 1$, *wenn* $u \leqq \frac{1}{2}n + 1$, $u' > 3$, *und m die kleinste ganze Zahl ist, die nicht zugleich unter jeder der Grenzen* $\frac{1}{3}u' - 1$ *und* $\frac{1}{2}u$ *liegt,*

k' nicht kleiner als $\frac{2}{3}n - \frac{5}{3}$, *wenn* $u' > \frac{1}{2}n$,

als $\frac{1}{2}n + m' - 1$, *wenn* $3 < u' \leqq \frac{1}{2}n + 1$, *und m' die kleinste nicht unter* $\frac{1}{3}u' - 1$ *liegende Zahl ist,*

als der nicht grössere der Ausdrücke $\frac{2}{3}n + \frac{2}{3}(u' - u) - \frac{5}{3}$ *und* $\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}u' - 1$, *wenn* $u + u' > n$,

als $\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}m + \frac{1}{2}m' - \frac{1}{2}$, *wenn* $u + \frac{1}{2}(m' - m) \leqq \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}$, *und u' sowohl* > 3, *als* $> u$ *ist.*

Dass ausserdem nach den Bedeutungen von u und u' immer $k \geqq u - 1$, und $k' \geqq u' - 1$ ist, ferner, nach 9, $k \geqq k' - 1$, braucht kaum bemerkt zu werden; ebenso, dass $k' = n$, und also $k \geqq n - 1$ ist, wenn sich unter den die Function nicht ändernden Substitutionen in den gegebenen n Buchstaben keine von der identischen verschiedene gerade findet, in welchem Falle allein es ja eine Zahl u', und möglicherweise auch u, nicht giebt.

Da übrigens in II $\frac{1}{2}n + m - 1$ nicht zugleich kleiner als $\frac{1}{2}n + \frac{1}{3}u' - 2$ und $\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}u - 1$, also jedenfalls $\geqq \frac{1}{2}n + \frac{1}{3}u - 2$ ist (weil ja $u' \geqq u$), und $\frac{1}{2}n + m' - 1 \geqq \frac{1}{2}n + \frac{1}{3}u' - 2$, während $\frac{1}{2}n + \frac{1}{3}y - 2$ mit y abnimmt und $\frac{2}{3}n - \frac{5}{3}$ nicht übersteigt, so lange $y \leqq \frac{1}{2}n + 1$ bleibt, so lässt sich ein wesentlicher Theil des eben erhaltenen Ergebnisses, das den in Abschnitt I dieser Arbeit (Bd. 33) für sich bewiesenen einfacheren Satz I offenbar umfasst, schon in dem Satze aussprechen:

II'. *Ist sowohl u als* $u' \leqq \frac{1}{2}n + 1$, *aber* (*wenn* $n > 4$) $u' > 3$, *und wird eine Function in gegebenen n Buchstaben durch jede Substitution von weniger als u und jede gerade von weniger als u' Buchstaben, abgesehen von der identischen, geändert: so ist der grösste Werth von k, welcher der Bedingung genügt, dass sich unter den gegebenen n Buch-*

staben k finden, durch deren Vertauschung unter einander allein die gegebene Function schon $k! = 1.2\ldots k$ verschiedene Werthe erlangt, nicht kleiner als $\frac{1}{2}n + \frac{1}{3}u - 2$, noch sogar als der kleinere der Ausdrücke $\frac{1}{2}n + \frac{1}{3}u' - 2$ und $\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}u - 1$, und der grösste Werth von k', der die Bedingung erfüllt, dass unter den gegebenen n Buchstaben k' vorkommen, in denen allein die Function wenigstens $\frac{k'!}{2}$ verschiedene Werthe annimmt, nicht kleiner als $\frac{1}{2}n + \frac{1}{3}u' - 2$.

Ist noch bekannt, dass unter den gegebenen n Buchstaben durch die auf dieselben beschränkten Substitutionen der gegebenen Gruppe nicht mehr als n_g verschiedene betroffen werden, durch die geraden unter diesen Substitutionen nicht mehr als n_g', so sind die gefundenen Sätze besser zunächst auf diese n_g, bezw. n_g', statt auf alle n gegebenen Buchstaben anzuwenden (wodurch offenbar im ersten Falle weder u noch u', im zweiten höchstens u sich ändert, d. h. möglicherweise grösser wird) und dann erst die übrigen $n - n_g$, bezw. $n - n_g'$ der letzteren zu berücksichtigen. Denn, wie früher schon bemerkt, bilden ja diese übrigen $n - n_g$, bezw. $n - n_g'$, mit jeder für sich allein durch keine, bezw. keine gerade, Substitution der gegebenen Gruppe vertauschbaren Anzahl der andern n_g, bezw. n_g', gegebenen Buchstaben wieder eine Anzahl der nämlichen Eigenschaft; so dass auch aus den unteren Grenzen, die für die grösste derartige Anzahl unter den n_g, bezw. n_g', durch jene Sätze geliefert werden, entsprechende für alle n gegebenen Buchstaben durch Hinzufügung von $n - n_g$, bezw. $n - n_g'$, folgen. Auf diese Weise ergeben sich z. B. die genaueren Grenzen

$$n - n_g + \frac{2}{3}n_g - \frac{5}{3} = n - \frac{1}{3}n_g - \frac{5}{3},$$

bezw.

$$n - n_g' + \frac{2}{3}n_g' - \frac{5}{3} = n - \frac{1}{3}n_g' - \frac{5}{3},$$

statt $\frac{2}{3}n - \frac{5}{3}$;

$$n - n_g + \frac{1}{2}n_g + m - 1 = n - \frac{1}{2}n_g + m - 1$$

statt $\frac{1}{2}n + m - 1$ u. s. w. mit den Gültigkeitsbedingungen $u > \frac{1}{2}n_g$, bezw. $u' > \frac{1}{2}n_g'$, statt u bezw. $u' > \frac{1}{2}n$, $u \leqq \frac{1}{2}n_g + 1$ statt $\leqq \frac{1}{2}n + 1$ u. s. f.

Eine Gelegenheit zur Anwendung des Erhaltenen bietet das Ergebniss meiner nachfolgenden Arbeit über die Classe der transitiven Gruppen, nach welchem die Buchstabenzahlen aller von der identischen verschiedenen Substitutionen einer Gruppe von n Buchstaben, welche die alternirende ihres Grades nicht enthält, bei mehr als einfacher Transitivität der Gruppe nicht nur > 3, sondern $> \frac{1}{4}n - 1$, bei mehr als zweifacher $> \frac{1}{3}n - 1$, bei mehr als dreifacher $\geqq \frac{1}{2}n - 1$ sind. Verbindet man dies mit Satz II′, indem man eine solche Gruppe als die aller Substitutionen in ihren n Buchstaben auffasst, die eine Function nicht ändern, und beachtet, dass eine Function, die eine alternirende Gruppe zulässt, in den Buchstaben derselben höchstens zweiwerthig, entweder alternirend oder symmetrisch, ist, so hat man sofort die Folgerung:

Ist eine Function in gegebenen n Buchstaben mehr als zweiwerthig, d. h. weder symmetrisch noch alternirend, so ist der grösste Werth von k, welcher der Bedingung genügt, dass sich unter diesen n Buchstaben k finden, durch deren Vertauschung unter einander allein die gegebene Function schon $k! = 1 . 2 \ldots k$ verschiedene Werthe erlangt, bei mehr als einfacher Transitivität derselben $> \frac{7}{12}n - \frac{7}{3}$, bei mehr als zweifacher $> \frac{11}{18}n - \frac{7}{3}$, bei mehr als dreifacher $\geqq \frac{2}{3}n - \frac{7}{3}$.

(In der nächsten Fortsetzung dieser Arbeit gedenke ich weiter zu zeigen, dass jede Function, die durch alle auf gegebene n Buchstaben beschränkten und nicht mehr als $3(2^h - 1)$ vertauschenden geraden, nicht identischen Substitutionen geändert wird, in diesen n Buchstaben mindestens $\left(\left[\frac{n}{h+1}\right]!\right)^h$ verschiedene Werthe hat, unter h irgend eine positive ganze Zahl und unter $\left[\frac{n}{h+1}\right]$ das Ganze von $\frac{n}{h+1}$ verstanden.)

Ueber die Classe der transitiven Substitutionengruppen.

Von

Alfred Bochert in Breslau.

Schon bei den in Bd. 29 und 33*) dieser Zeitschrift veröffentlichten Untersuchungen über die Transitivitätsgrenze der Substitutionengruppen, welche die alternirende ihres Grades nicht enthalten, habe ich auch neue untere Grenzen für die Classe solcher transitiver Gruppen, d. h. die kleinste unter den Buchstabenzahlen aller von der identischen verschiedenen Substitutionen derselben, abgeleitet. Indessen leiden diese damals gefundenen Grenzen, obwohl mit dem Transitivitätsgrade sehr rasch wachsend, an dem Mangel, nicht auch zum Grade der Gruppe, d. h. der Gesammtzahl der von derselben vertauschten verschiedenen Buchstaben, in Beziehung zu stehen. Diesen Mangel ist es mir nun gelungen zu beseitigen und dadurch noch wesentlich vortheilhaftere Ergebnisse zu erhalten. Dieselben führen dann auch zu entsprechend genaueren Transitivitätsgrenzen und erledigen so zugleich den noch ausstehenden Theil der vorerwähnten Untersuchungen, von dessen Veröffentlichung ich daher Abstand nehme.

Die fraglichen Ergebnisse stützen sich zum Theil auf denselben Hülfssatz, der auch dem vorangehenden Abschnitte meiner Arbeit über die Werthezahl zu Grunde liegt und darin unter 3 und 3′ bewiesen ist, nämlich:

1. *Haben zwei Substitutionen, die nicht durch einander in sich selbst transformirt werden, nicht mehr als m der von ihnen vertauschten Buchstaben gemein, und kommt es in der einen* (S_1) r_1, *in der andern* (S_2) r_2 *verschiedene Male vor, dass einer dieser gemeinsamen Buchstaben wieder durch einen derselben ersetzt wird: so finden sich in jeder Gruppe, der beide Substitutionen angehören, auf die Buchstaben der letzteren beschränkte, von der identischen verschiedene, gerade Substitutionen, die nicht mehr als je* $3m - r_1 - r_2$ *Buchstaben vertauschen (darunter höchstens* $m - r_2$ *von der ersten,* S_1, *und* $m - r_1$ *von der*

*) Daselbst S. 573, Z. 2 v. u. „noch“ wegzulassen.

andern gegebenen, S_2, nicht betroffene). Und zwar erhält man eine solche Substitution z. B., indem man auf die durch Transformation der einen gegebenen (S_1) mittels der andern (S_2) entstehende, von der ursprünglichen verschiedene Substitution ($S_2^{-1} S_1 S_2$) die Umkehrung (S_1^{-1}) der ursprünglichen folgen lässt ($S_2^{-1} S_1 S_2 S_1^{-1}$).

In einzelnen Fällen genügt davon auch schon die einfachere Folgerung:

1'. *Haben zwei Substitutionen, die nicht durch einander in sich selbst transformirt werden, nicht mehr als m der von ihnen vertauschten Buchstaben gemein, so finden sich in jeder beide enthaltenden Gruppe von der identischen verschiedene gerade Substitutionen, die nicht mehr als je 3m Buchstaben vertauschen.*

[1] Unter Transformation einer Substitution durch eine andere ist dabei, wie immer, die Vollziehung der letzteren in den Buchstaben verstanden, mit denen die erstere ausgeführt wird; unter Transformation in sich selbst eine solche, durch welche die zu transformirende Substitution nicht geändert wird. In sich selbst transformirt wird also eine Substitution insbesondere durch keine andere, die auch nur einen von der ersteren vertauschten Buchstaben durch einen von derselben nicht betroffenen ersetzt, oder an die Stelle eines solchen bringt. Denn durch diese Transformation wird ja im ersten Falle ein vorher nicht vertauschter Buchstabe zu einem vertauschten, und im zweiten umgekehrt ein vorher vertauschter zu einem nicht vertauschten.

Ausserdem aber wird fortwährend der Satz benützt:

2. *Die Gesammtheit derjenigen verschiedenen Substitutionen einer Gruppe, die einer gegebenen ähnlich sind und irgendwelche andere gegebene Eigenschaften besitzen, enthält jede überhaupt in ihr vorkommende Beziehung auch gleichoft in jeder Gestalt, welche die Beziehung durch irgend eine die gegebenen Eigenschaften nicht ändernde Substitution der gegebenen Gruppe erlangt.*

Dieser Satz beruht auf dem allgemeineren:

(2) *Die Gesammtheit der Substitutionen, oder sonstigen Buchstabenverbindungen, von gegebenen Eigenschaften wird durch jede Substitution in den zu Grunde gelegten Buchstaben, welche diese Eigenschaften nicht ändert, in sich selbst transformirt, d. h. abgesehen von der Reihenfolge ebenfalls nicht geändert.*

Denn die Eigenschaft einer Substitution, S_1, zu einer gegebenen Gruppe zu gehören, bleibt ja bei jeder Transformation mittels einer Substitution, S_2, der nämlichen Gruppe erhalten, da die hierdurch entstehende, $S_2^{-1} S_1 S_2$, durch blosse Zusammensetzung aus den beiden betrachteten, S_1 und S_2, ableitbar ist; auch wird nach (2) jede Gruppe deshalb durch jede ihrer Substitutionen in sich selbst transformirt, weil sie als Gesammtheit der eine gewisse Function nicht ändernden Substitutionen in ihren Buchstaben aufgefasst werden kann. Und die Aehnlichkeit mit einer gegebenen Substitution wird überhaupt durch keine transformirende Substitution berührt, nach dem Begriffe ähnlicher Substitutionen als solcher, die sich nicht in der Art der von ihnen bewirkten Vertauschung, wohl aber in den vertauschten Buchstaben unterscheiden dürfen. Durch alle Substitutionen der hier gegebenen Gruppe, die auch die übrigen gegebenen Eigenschaften ungeändert lassen, wird also die bei Satz 2 in Frage kommende Gesammtheit nach (2) in sich selbst transformirt. Und dies ist offenbar nur möglich, wenn dieselbe, wie behauptet, jede der verschiedenen Formen, die eine überhaupt in ihr vorkommende Beziehung durch diese Substitutionen annimmt, gleichoft enthält.

Um aber die fast selbstverständliche Richtigkeit von (2) einzusehen, braucht man offenbar nur zu beachten, dass die Zahl der verschiedenen Glieder einer Zusammenstellung von irgend welchen Verbindungen gegebener Buchstaben durch keine Substitution in den letzteren geändert werden kann; da ja sonst entweder schon bei der Transformation der ursprünglichen Zusammenstellung mittels einer solchen Substitution, oder bei der Rückverwandlung des Ergebnisses mittels der umgekehrten eine Umwandlung gleicher Glieder in verschiedene vorkommen müsste, im Widerspruche mit der Eindeutigkeit des Substitutionsverfahrens.

Vorweg erwähnt seien endlich noch als Sätze, auf welche häufiger Bezug zu nehmen sein wird, die zwei ihrem wesentlichen Inhalte nach bekannten:

3. Zu jeder Substitution einer transitiven Gruppe findet sich in derselben immer mindestens eine ähnliche, welche die von der ersteren mit irgend einer den Transitivitätsgrad nicht übersteigenden Anzahl von Buchstaben der Gruppe ausgeführte Vertauschung statt mit diesen mit ebenso vielen beliebig gewählten andern Gruppenbuchstaben bewirkt.

4. Die Classe einer $t$fach transitiven Gruppe n^{ten} Grades ist keinesfalls grösser als $n-t+2$, und, ausser wenn $t=n$, auch nicht grösser als $n-t+1$.

Der erste dieser Sätze ergiebt sich offenbar durch Verbindung des Transitivitätsbegriffes, nach welchem mittels der Substitutionen einer transitiven Gruppe irgend eine den Transitivitätsgrad nicht überschreitende Anzahl der Gruppenbuchstaben beliebig aus den letzteren ersetzbar ist, mit dem schon zum Beweise von 2 benützten Umstande, dass die Substitutionen einer Gruppe einander wieder nur in solche derselben Gruppe transformiren.

Der zweite Satz folgt einfach daraus, dass es nach dem Transitivitätsbegriffe möglich sein muss, wenn t' irgend eine nicht negative ganze Zahl $< t$ bezeichnet, mittels Substitutionen einer t-fach transitiven Gruppe von n Buchstaben ohne Vertauschung von t' der letzteren noch irgend $t - t'$ der übrigen $n - t'$ Gruppenbuchstaben beliebig aus diesen zu ersetzen. Denn danach muss ja jede solche Gruppe Substitutionen enthalten, die nicht mehr als $n - t'$ Buchstaben vertauschen und von der identischen verschieden sind, sobald nur $n - t' > 1$ ist. Letzteres aber ist, da t seiner Bedeutung nach nicht $> n$ werden kann, immer der Fall, wenn $t' = t - 2$, also $n - t' = n - t + 2$ ist; und, wenn nicht $t = n$, auch schon für $t' = t - 1$, also $n - t' = n - t + 1$. Und beide Werthe, $t - 2$ wie $t - 1$, kann ja t' nach Voraussetzung annehmen, wenn $t \geqq 2$ ist; während für $t < 2$ schon $n - t + 1$ nicht weniger als der Grad, n, der Gruppe, und somit erst recht nicht weniger als die Classe derselben beträgt.

I.

Nachstehend soll nun zunächst im Wesentlichen Folgendes bewiesen werden:

Enthält eine Substitutionengruppe die alternirende ihres Grades nicht, und bezeichnet n diesen Grad, d. h. die Zahl aller von der Gruppe betroffenen verschiedenen Buchstaben, so vertauscht jede ihrer Substitutionen, von der identischen abgesehen, bei mehr als einfacher Transitivität der Gruppe nicht nur mehr als 3, *sondern mehr als* $\frac{1}{4}n - 1$ *Buchstaben, bei mehr als zweifacher mehr als* $\frac{1}{3}n - 1$ *und bei mehr als dreifacher nicht weniger als* $\frac{1}{2}n - 1$.

1.

Man denke sich aus irgend einer Gruppe der Classe u und des Grades n eine Substitution der Buchstabenzahl u, also der kleinstmöglichen einer von der identischen verschiedenen Substitution der Gruppe, herausgegriffen, und andererseits die Gesammtheit derjenigen verschiedenen Substitutionen der letzteren, die der herausgegriffenen ähnlich, also auch von der gleichen Buchstabenzahl, sind und einen beliebig gewählten der von derselben betroffenen u Buchstaben, etwa a_1, ebenfalls vertauschen. Die Zahl dieser Substitutionen sei s; dieselbe ist von Null verschieden, da ja die herausgegriffene selbst dazu gehört.

Dann ist nach Satz 1′ für jede von der letzteren nicht in sich selbst transformirte unter diesen s Substitutionen, wenn m' die Zahl aller derjenigen Buchstaben der herausgegriffenen bezeichnet, die noch ausser dem als allen s gemeinsam vorausgesetzten a_1 von der betrachteten Substitution gleichfalls betroffen werden:

(1) $$3(1+m') \geqq u \quad \text{oder} \quad 3m' \geqq u - 3.$$

Also auch, bei der Ganzzahligkeit von m', wenn $3u_3$ das grösste noch unter u liegende ganze Vielfache von 3 ist, Null nicht ausgeschlossen, das ja der Bedingung $u > 3u_3 \geqq u - 3$ genügt:

(1') $$3m' \geqq 3u_3 \quad \text{oder} \quad m' \geqq u_3.$$

Nicht in sich selbst transformirt werden aber durch die herausgegriffene Substitution offenbar mindestens alle diejenigen der betrachteten s, welche den von derselben an die Stelle des allen gemeinsamen Buchstaben a_1 gebrachten, a_2, ihrerseits nicht vertauschen. Ist demnach s' die Zahl dieser Substitutionen, so erhält man durch Summirung der entsprechenden s' Beziehungen nach (1):

(2) $$3\Sigma_{s'} m' \geqq s'(u-3)$$

und nach (1'):

(2') $$\Sigma_{s'} m' \geqq s' u_3,$$

wobei also $\Sigma_{s'} m'$, als Summe der bezüglichen s' Zahlen m', angiebt, wie viele verschiedene Male es insgesammt vorkommt, dass irgend eine der fraglichen s' Substitutionen irgend einen der Buchstaben vertauscht, die von der herausgegriffenen ausser dem allen gemeinsamen a_1 noch betroffen werden.

Die Zahlen s' und $\Sigma_{s'} m'$ sind nun mit Hülfe des Satzes 2 näher bestimmbar, wenn die betrachtete Gruppe mehr als einmal transitiv ist (also auch $n > 1$). Denn es ist ja dann möglich, mittels solcher Substitutionen dieser Gruppe, die den allen betrachteten s gemeinsamen Buchstaben a_1 nicht betreffen und also auch die Eigenschaft der s, denselben zu vertauschen, bei der Transformation nicht ändern, noch irgend einen der übrigen $n - 1$ Gruppenbuchstaben durch einen beliebigen derselben zu ersetzen. Und ist dies der Fall, so wird nach Satz 2 jeder dieser Buchstaben in der Gesammtheit der s Substitutionen gleichoft vertauscht. Jede der letzteren betrifft aber noch genau $u - 1$ Buchstaben ausser dem allen gemeinsamen a_1, so dass in allen s zusammen $s(u-1)$ mal der Fall eintritt, dass irgend einer der übrigen $n - 1$ Gruppenbuchstaben vertauscht wird. Wenn gleichoft, wird also jeder einzelne dieser Buchstaben genau $s\frac{u-1}{n-1}$ mal in den s Substitutionen betroffen, oder, was ja dasselbe sagt, von genau $s\frac{u-1}{n-1}$ derselben. Und folglich ist bei mehr als einfacher Transitivität der betrachteten Gruppe s', als Zahl derjenigen unter den s Substitutionen, die einen gewissen jener $n - 1$ Buchstaben, nämlich den von der herausgegriffenen für den allen gemeinsamen a_1 gesetzten a_2, nicht vertauschen, $= s - s\frac{u-1}{n-1} = s\frac{n-u}{n-1}$; ferner, da von diesen s' Substitutionen unter den $u-1$ Buchstaben, welche die herausgegriffene ausser dem allen gemeinsamen a_1 noch vertauscht, eben einer, a_2, überhaupt nicht betroffen wird, und jeder der anderen $u-2$, wenn $u > 2$, weniger oft, als von allen betrachteten s Substitutionen zusammen, zu deren übrigen $s - s'$ ja auch die herausgegriffene selbst gehört, also hier weniger als $s\frac{u-1}{n-1}$ mal, $\Sigma_s m' < s\frac{u-1}{n-1}(u-2)$.

Verbindet man diese Ergebnisse mit den vorhergehenden (2) und (2'), so erhält man weiter:

$$3s\frac{(u-1)(u-2)}{n-1} > s\frac{(n-u)(u-3)}{n-1}, \quad \text{und} \quad s\frac{(u-1)(u-2)}{n-1} > s\frac{(n-u)u_3}{n-1},$$

also, da sowohl $n-1$ als s, wie bemerkt, > 0 ist:

(3) $$3(u-1)(u-2) > (n-u)(u-3),$$

und

(3') $$(u-1)(u-2) > (n-u)u_3.$$

Diesen Beziehungen wird durch nicht über 3 liegende Werthe der ihrem Begriffe nach mindestens 2 betragenden ganzen Zahl u offenbar immer genügt. Soll dagegen $u > 3$ sein, so kann man der ersten, (3), durch beiderseitige Division mit $u-3$ die Gestalt geben:

$$\frac{3(u-1)(u-2)}{u-3} > n-u,$$

oder, ausgeführt:

$$3u + \frac{6}{u-3} > n-u,$$

mithin:

$$4u + \frac{6}{u-3} > n.$$

Und daraus folgt ja bei der Ganzzahligkeit von u und n, sobald $u \geqq 9$, also $\frac{6}{u-3} \overline{\overline{<}} 1$ ist:

$$4u \geqq n \quad \text{oder} \quad u \geqq \frac{1}{4}n.$$

Was aber die Fälle $8 \geqq u > 3$ betrifft, so ist nach der andern Beziehung (3'), da u_3, als durch

$$u > 3u_3 \geqq u-3$$

bestimmte ganze Zahl, $=2$ ist, wenn $9 \geqq u > 6$, und $=1$, wenn $6 \geqq u > 3$:*)

*) Es handelt sich hier selbstverständlich nur um Folgerungen aus dem Gesagten, ohne Rücksicht auf sonst für diese besonderen Fälle bekannte genauere Grenzwerthe.

$$n\left(<u+\frac{(u-1)(u-2)}{u_2}\right)<29 \text{ für } u=8$$
$$<22 \quad \text{„} \quad u=7$$
$$<26 \quad \text{„} \quad u=6$$
$$<17 \quad \text{„} \quad u=5$$
$$<10 \quad \text{„} \quad u=4.$$

Somit hat man den Satz:

I. *Vertauscht jede von der identischen verschiedene Substitution einer mehr als einfach transitiven Gruppe mehr als drei Buchstaben, so auch nicht weniger als den vierten Theil aller überhaupt von der Gruppe betroffenen, ausser höchstens, wenn die Zahl der letzteren (der Grad der Gruppe)* $=25$ *ist, und auch dann nicht weniger als die grösste diesen vierten Theil nicht übersteigende ganze Zahl.*

(I). Von der identischen verschiedene Substitutionen aber, die nicht mehr als drei Buchstaben vertauschen, und das können ja nur Transpositionen oder Cyclen dritter Ordnung sein, kommen bekanntlich in einer mehr als einfach transitiven Gruppe nur dann vor, wenn dieselbe die alternirende ihres Grades, d. h. wenigstens alle geraden Substitutionen in ihren Buchstaben, enthält, oder, was dasselbe sagt, wenn ihr Transitivitätsgrad höchstens um 2 kleiner ist als die Zahl aller verschiedenen von ihr betroffenen Buchstaben.

In der That, alle Substitutionen, die durch Transformation von solchen derselben Gruppe durch einander entstehen, gehören ja wieder zu dieser; und durch Substitutionen einer mehr als einfach transitiven Gruppe lässt sich nach dem Begriffe der Transitivität immer so transformiren, dass an die Stellen von irgend zwei der Gruppenbuchstaben beliebige zwei derselben gebracht werden.

Treten demnach überhaupt Transpositionen in einer solchen Gruppe auf, so auch sämmtliche in den Buchstaben derselben mögliche, weil aus irgend einer von ihnen durch Transformation mittels Substitutionen der Gruppe ableitbar, und also überhaupt alle Substitutionen in diesen Buchstaben, als Zusammensetzungen aus solchen Transpositionen; so dass die Gruppe dann die vollständige oder symmetrische in ihren Buchstaben ist.

Und ebenso enthält eine mehr als einfach transitive Gruppe entweder keine oder sämmtliche Cyclen dritter Ordnung in ihren Buchstaben, in welchem letzteren Falle sie ja überhaupt alle in denselben möglichen geraden Substitutionen, als aus diesen Cyclen zusammensetzbar, und damit die alternirende Gruppe ihres Grades, umfasst.

Denn aus jedem in ihr vorkommenden Cyclus dieser Ordnung kann ja durch Transformation zunächst wenigstens ein solcher gleichfalls zu ihr gehöriger abgeleitet werden, der einen beliebig gegebenen

Buchstaben der Gruppe, etwa a_1, durch einen beliebig gewählten andern, a_2, ersetzt. Sei $(a_1 a_2 a_k)$ ein solcher Cyclus, a_3 ein dritter willkürlich gegebener Gruppenbuchstabe, und k noch von 3 verschieden, so ergiebt sich in der nämlichen Weise das Vorhandensein eines Cyclus dritter Ordnung in der Gruppe, der a_3 an die Stelle von a_k bringt, etwa $(a_k a_3 a_{k'})$. Ist nun $a_{k'}$ weder mit a_1 noch a_2 einerlei, so giebt schon die einmalige Transformation des vorigen Cyclus $(a_1 a_2 a_k)$ durch den neuen $(a_k a_3 a_{k'})$ einen zur Gruppe gehörigen in den gegebenen drei Buchstaben a_1, a_2, a_3, nämlich $(a_1 a_2 a_3)$. Und im andern Falle, wenn also $k' = 1$ oder $= 2$ ist, gelangt man zu einem solchen offenbar durch die Wiederholung der Transformation, oder was dasselbe sagt, durch die von $(a_1 a_2 a_k)$ mittels der zweiten Potenz $(a_k a_{k'} a_3)$ von $(a_k a_3 a_{k'})$. Damit ist aber die Behauptung bewiesen, da ja die Buchstaben a_1, a_2, a_3 beliebig unter denen der Gruppe gewählt sein sollten, und die Zugehörigkeit irgend eines der zwei in denselben drei Buchstaben allein möglichen Cyclen dritter Ordnung zu einer Gruppe auch die des andern, als einer blossen Potenz des ersten, nach sich zieht.

Dass sich dieser Beweis einfacher gestaltet, wenn die fragliche Gruppe mehr als zweifach transitiv vorausgesetzt ist, bedarf kaum der Erwähnung. Denn mittels Substitutionen derselben kann man dann eben sogar irgend drei der Gruppenbuchstaben durch beliebige drei der letztern ersetzen und somit jeden Cyclus dritter Ordnung in diesen Buchstaben unmittelbar in jeden andern darin möglichen transformiren.

2.

Es sei jetzt weiter vorausgesetzt, dass die betrachtete Gruppe n^{ten} Grades und u^{ter} Classe mehr als zweifach transitiv ist, also auch $n > 2$.

Man denke sich dann aus derselben zwar wieder irgend eine Substitution der Buchstabenzahl u herausgegriffen, aus den dieser ähnlichen, also auch genau je u Buchstaben vertauschenden, Substitutionen der Gruppe dagegen diesmal nur die Gesammtheit derjenigen, die einen beliebig gewählten, a_1, unter den von der herausgegriffenen vertauschten Buchstaben durch irgend einen und denselben von letzterer nicht betroffenen, etwa a_{u+1}, ersetzen. Das Vorhandensein solcher Substitutionen folgt offenbar aus den Sätzen 3 und 4; ihre Anzahl, die also > 0 ist, sei s_1. Durch keine derselben wird nach [1] die herausgegriffene in sich selbst transformirt; für jede von ihnen ist somit nach Satz 1, wenn m' wieder angiebt, wie viele Buchstaben der herausgegriffenen noch ausser dem allen gemeinsamen a_1 auch von der betrachteten betroffen werden, und r_0, für wie viele von diesen $1 + m'$ gemeinsamen Buchstaben die erstere wieder welche derselben setzt:

(4) $$3(1+m') - r_0 \geqq u \quad \text{oder} \quad 3m' - r_0 \geqq u - 3.$$

Also auch erst recht: $3m' \geqq u - 3$, und, wie hieraus wieder bei der Ganzzahligkeit von m' folgt, wenn $3u_3$ das kleinste nicht unter $u-3$ liegende ganze Vielfache von 3, einschliesslich Null, bezeichnet:

(4′) $$3m' \geqq 3u_3 \quad \text{oder} \quad m' \geqq u_3.$$

Durch Summirung der so entstehenden je s_1 Beziehungen ergiebt sich nach (4):

(5) $$3\Sigma_{s_1} m' - \Sigma_{s_1} r_0 \geqq s_1(u-3)$$

und nach (4′):

(5′) $$\Sigma_{s_1} m' \geqq s_1 u_3,$$

wobei also $\Sigma_{s_1} m'$, als Summe der entsprechenden s_1 Zahlen m', ausdrückt, wie viele verschiedene Male es in der Gesammtheit der betrachteten s_1 Substitutionen vorkommt, dass irgend einer der $u-1$ Buchstaben vertauscht wird, die ausser dem allen gemeinsamen a_1 von der herausgegriffenen betroffen werden, und $\Sigma_{s_1} r_0$, als Summe der s_1 Zahlen r_0, wie viele Male, dass zugleich mit einem Buchstaben der herausgegriffenen auch der von dieser dafür gesetzte durch eine und dieselbe Substitution vertauscht wird.

Nun wird die gemeinsame Eigenschaft der betrachteten s_1 Substitutionen, einen gewissen Buchstaben, a_1, der herausgegriffenen durch einen gewissen von letzterer nicht betroffenen, a_{u+1}, zu ersetzen, durch keine transformirende Substitution geändert, welche diese beiden Buchstaben selbst unberührt lässt. Und mittels der die letztere Bedingung erfüllenden Substitutionen der betrachteten Gruppe kann man bei der mehr als zweifachen Transitivität derselben noch irgend einen der übrigen $n-2$ Gruppenbuchstaben an die Stelle eines beliebigen unter ihnen bringen. Nach Satz 2 wird folglich in der Gesammtheit der s_1 Substitutionen jeder dieser Buchstaben gleichoft vertauscht. Für alle zusammen beträgt aber darin die Zahl solcher Vertauschungen $s_1(u-2)$, da ja jede der s_1 Substitutionen genau $u-2$ der fraglichen $n-2$ Buchstaben betrifft. Auf jeden einzelnen der letzteren kommen somit genau $s_1 \frac{u-2}{n-2}$ dieser Vertauschungen. Und da zu den $n-2$ Buchstaben alle $u-1$ gehören, die ausser dem durchweg gemeinsamen a_1 von der herausgegriffenen Substitution vertauscht werden, so ist $\Sigma_{s_1} m' = s_1 \frac{u-2}{n-2}(u-1)$; ferner $\Sigma_{s_1} r_0$, weil offenbar mindestens der Summe der zwei Zahlen gleich, die angeben, wie viele Male in der Gesammtheit der betrachteten s_1 Substitutionen (oder, was ja dasselbe sagt, von wie vielen der letzteren) einerseits derjenige Buchstabe betroffen wird, durch den die herausgegriffene den von allen vertauschten a_1 ersetzt, und andererseits der möglicherweise gleiche, an dessen Stelle dieselbe wieder diesen Buchstaben a_1 bringt,

$$\geqq 2 z_1 \frac{u-2}{n-2}.$$

Führt man diese Ergebnisse in (5) und (5′) ein, so erhält man:

$$3 z_1 \frac{(u-2)(u-1)}{n-2} - 2 z_1 \frac{u-2}{n-2} \geqq z_1 (u-3)$$

und

$$z_1 \frac{(u-2)(u-1)}{n-2} \geqq z_1 u_3,$$

also, da $n-2$ sowohl als $z_1 > 0$ ist:

$$3(u-2)(u-1) - 2(u-2) \geqq (u-3)(n-2)$$

und

(6′) $$(u-2)(u-1) \geqq u_3(n-2).$$

Aus der vorletzten Beziehung folgt nun unter der Voraussetzung $u > 3$, unter der man wieder beiderseits mit $u-3$ dividiren darf:

$$3u - 2 + \frac{4}{u-3} \geqq n - 2,$$

oder

(6) $$3u + \frac{4}{u-3} \geqq n,$$

und hieraus weiter bei der Ganzzahligkeit von u und n, sobald $u > 7$, also $\frac{4}{u-3} < 1$ ist:

$$3u \geqq n \quad \text{oder} \quad u \geqq \frac{1}{3} n.$$

Und was die Fälle $7 \geqq u > 3$, betrifft, so ergiebt sich mit Hülfe von (6′), da u_3 seiner Bedeutung nach $= 2$ ist, wenn $u = 7$, und $= 1$, wenn $6 \geqq u > 3$:*)

$$\begin{aligned} n &\overline{\gtrless} 17 \text{ für } u = 7, && \text{nach (6′)} \\ &\overline{\gtrless} 19 \;\;,, \;\; u = 6, && \;\;,, \;\; (6) \\ &\left.\begin{aligned}\overline{\gtrless} 14 \;\;,, \;\; u = 5 \\ \overline{\gtrless} 8 \;\;,, \;\; u = 4\end{aligned}\right\} && \;\;,, \;\; (6′). \end{aligned}$$

Das giebt, verbunden mit den vorher unter (I) gemachten Bemerkungen, den Satz:

I. *Enthält eine mehr als zweifach transitive Gruppe die alternirende ihres Grades nicht, so vertauscht keine von der identischen verschiedene Substitution derselben weniger als den dritten Theil aller überhaupt von der Gruppe betroffenen Buchstaben, ausser höchstens, wenn die Zahl der letzteren (der Grad der Gruppe) = 19 ist, und auch dann keine weniger als die grösste diesen dritten Theil nicht übersteigende ganze Zahl.*

*) S. die vorhergehende Anmerkung.

Die letztere untere Grenze würde sich auch schon bei Beschränkung auf die Beziehung (6′), also ohne Benützung der Zahl r_0, ergeben haben, da ja $u_3 \geqq \frac{1}{3}(u-3)$, und $3\,\frac{(u-2)(u-1)}{u-3} = 3u + \frac{6}{u-3}$ ist; abgesehen allerdings von den Classen 6 und 9, für die aus jener Beziehung keine niedrigeren oberen Grenzen des Gruppengrades folgen, als 22 bezw. 30.

(Uebrigens führt die weitere Verfolgung des eingeschlagenen Weges, wie ich nächstens nachzuweisen gedenke, sowohl für die mehr als zweifach, wie auch schon die mehr als einfach transitiven Gruppen, welche die alternirende ihres Grades nicht enthalten, zu noch wesentlich höheren unteren Classengrenzen. Auch wird sich zeigen, dass allgemein der Bruchtheil, den der Unterschied zwischen Classe und Grad einer transitiven Gruppe dieser Art von einer dieser Zahlen selbst bildet, eine im Verhältnisse des wachsenden Transitivitätsgrades abnehmende obere Grenze hat. Vorläufig lag mir vor Allem an möglichst einfacher Anwendung des Verfahrens).

3.

Es sei endlich irgend eine mehr als dreifach transitive Gruppe der Classe u und des Grades n gegeben.

In diesem Falle könnte von der nämlichen Substitutionengesammtheit ausgegangen werden, wie im vorigen; in gewisser Hinsicht ist es indessen hier bequemer, die Gesammtheit derjenigen verschiedenen Substitutionen der Gruppe zu betrachten, die einer beliebig aus letzterer herausgegriffenen Substitution der Buchstabenzahl u ähnlich, also auch von dieser Buchstabenzahl, sind, und ausserdem zwar einen beliebig gewählten Buchstaben, a_1, dieser Substitution ebenfalls vertauschen, den von derselben dafür gesetzten, a_2, dagegen nicht. Auch solche Substitutionen sind nach den Sätzen 3 und 4 hier immer vorhanden; ihre demnach von Null verschiedene Anzahl sei z'. Keine derselben wird nach [1] von der herausgegriffenen in sich selbst transformirt; für jede von ihnen ist folglich nach Satz 1, wenn m' wieder die Zahl der Buchstaben bezeichnet, die sie ausser dem allen gemeinsamen a_1 von denen der herausgegriffenen Substitution noch ebenfalls vertauscht, und wenn unter diesen $1+m'$ gemeinsamen Buchstaben r von ihr und r_0 von der herausgegriffenen wieder an die Stellen von welchen derselben $1+m'$ gebracht werden:

$$3(1+m') - r - r_0 \geqq s \geqq u,$$

unter s z. B. die Buchstabenzahl derjenigen Substitution $(U_0^{-1}\,U\,U_0\,U^{-1})$ verstanden, die sich ergiebt, wenn man die Umkehrung (U^{-1}) der betrachteten (U) auf die aus letzterer durch Transformation mittels der herausgegriffenen (U_0) hervorgehende $(U_0^{-1}\,U\,U_0)$ folgen lässt.

Durch Summirung aller so entstehenden s' Beziehungen erhält man:

$$(7) \qquad 3s' + 3\Sigma_{s'}m' - \Sigma_{s'}r - \Sigma_{s'}r_0 \geqq \Sigma_{s'}s \geqq s'u,$$

wobei also $\Sigma_{s'}m'$, als Summe der entsprechenden s' Zahlen m', angiebt, wie viele Male es in der Gesammtheit der betrachteten s' Substitutionen geschieht, dass irgend einer der $u-2$ Buchstaben vertauscht wird, die nach Abzug des von keiner der s' betroffenen a_2 und des allen gemeinsamen a_1 von den u der herausgegriffenen übrig bleiben; $\Sigma_{s'}r$, als Summe der s' Zahlen r, wie oft, dass ein Buchstabe der letzteren bei der Vertauschung wieder an die Stelle eines solchen tritt; und $\Sigma_{s'}r_0$, als Summe der s' Zahlen r_0, wie oft, dass dieselbe Substitution, die einen Buchstaben der herausgegriffenen vertauscht, dies auch mit dem von dieser dafür gesetzten thut; während $\Sigma_{s'}s$ selbstverständlich die Summe der Zahlen s in den summirten s' Beziehungen darstellt.

Nun ist es mittels derjenigen Substitutionen der gegebenen mehr als dreifach transitiven Gruppe, die weder den von keiner der betrachteten s' vertauschten Buchstaben a_2 der herausgegriffenen, noch den allen gemeinsamen a_1 betreffen, und also auch die Eigenschaft, von diesen Buchstaben nur den zweiten zu vertauschen, bei der Transformation nicht ändern, nach dem Begriffe der Transitivität noch möglich, irgend zwei der übrigen $n-2$ Gruppenbuchstaben durch beliebige zwei derselben zu ersetzen.

Und von diesen $n-2$ betrifft ja jede der s' Substitutionen genau $u-1$, so dass in allen s' zusammen $s'(u-1)$ Fälle von Vertauschung eines derselben stattfinden. Ferner kommt es in der Gesammtheit dieser Substitutionen $s'(u-2)$ mal vor, dass einer der fraglichen $n-2$ Buchstaben bei der Vertauschung wieder auf den Platz eines derselben gebracht wird, weil dies eben in jeder bei allen $u-1$, die sie von diesen $n-2$ betrifft, bis auf den einen der Fall ist, den sie für den gemeinsamen a_1 setzt. Endlich, da sich aus $u-1$ Buchstaben zwei auf $\frac{1}{2}(u-1)(u-2)$ verschiedene Arten herausgreifen lassen, geschieht es in der betrachteten Gesammtheit $\frac{1}{2}s'(u-1)(u-2)$ mal, dass zwei der $n-2$ Buchstaben von der gleichen Substitution vertauscht werden.

Nach Satz 2 tritt folglich in dieser Gesammtheit, weil gleichoft, die Vertauschung jedes der letzteren genau $s'\frac{u-1}{n-2}$ mal auf; ferner jede der $(n-2)(n-3)$ möglichen verschiedenen Ersetzungen eines derselben durch einen andern unter ihnen $s'\frac{(u-2)!}{(n-2)(n-3)}$ mal; endlich jedes der $\frac{1}{2}(n-2)(n-3)$ möglichen verschiedenen Paare aus ihnen $s'\frac{(u-1)(u-2)}{(n-2)(n-3)}$ mal als solches, dessen Buchstaben beide von der gleichen Substitution betroffen werden.

Andererseits vertauscht von den fraglichen $n-2$ Gruppenbuchstaben die herausgegriffene Substitution, zu deren u ja die übrigen zwei, a_1 und a_2, gehören, genau $u-2$. Und verschiedene Ersetzungen eines von $u-2$ Buchstaben durch einen andern derselben lassen sich $(u-2)(u-3)$ bilden. Ferner bringt die herausgegriffene Substitution entweder alle jene $u-2$ Buchstaben wieder an die Stellen von unter denselben enthaltenen, oder $u-3$ von ihnen; je nachdem sie auch ihre übrigen zwei Buchstaben, a_1 und a_2, nur unter einander vertauscht, oder nicht. Denn von diesen zwei ersetzt sie ja einen, a_1, nach Voraussetzung durch den andern, so dass höchstens der Platz des letzteren, a_2, für einen der $u-2$ frei bleibt.

Ausserdem aber, da ja keine der betrachteten s' Substitutionen diesen letzteren Buchstaben, a_2, vertauscht, jede also den allen gemeinsamen, a_1, sowohl durch einen der übrigen $n-2$ Gruppenbuchstaben ersetzen, als für einen solchen einsetzen muss, wird auch sowohl diese Ersetzung als Einsetzung bei jedem der $n-2$ je von $\frac{s'}{n-2}$ der s' Substitutionen, weil nach Satz 2 von gleich vielen derselben, bewirkt; bei den $u-2$ Buchstaben folglich, die unter diesen $n-2$ von der herausgegriffenen Substitution betroffen werden, zusammen von $s'\frac{u-2}{n-2}$.

Und in dem Falle, dass die letztere jene zwei Buchstaben, a_1 und a_2, nicht unter einander allein vertauscht, dass sie also den allen betrachteten Substitutionen gemeinsamen, a_1, seinerseits nicht auf den Platz des von ihr dafür gesetzten, a_2, bringt, sondern auf den eines der übrigen $n-2$ Gruppenbuchstaben, a_3, vergrössert sich die Zahl r_0 um diejenige, $s'\frac{u-1}{n-2}$, die, wie gezeigt, angiebt, wie viele Male in der Gesammtheit der s' Substitutionen dieser dritte Buchstabe, a_3, betroffen wird. Denn genau ebensovielmal wird er darin ja auch zusammen mit dem allen gemeinsamen, a_1, von der gleichen Substitution vertauscht.

Es ist demnach offenbar:

$$\Sigma_{s'} m = s'\frac{(u-1)(u-2)}{n-2},$$

$$\Sigma_{s'} r = s'\frac{(u-2)(u-2)(u-3)}{(n-2)(n-3)} + 2s'\frac{u-2}{n-2},$$

und je nachdem die herausgegriffene Substitution den allen betrachteten s' gemeinsamen Buchstaben, a_1, und den von ihr dafür gesetzten, von keiner der s' betroffenen, a_2, nur unter einander vertauscht, also transponirt, oder nicht:

$$\Sigma_{s'} r_0 \text{ entweder } = s'\frac{(u-1)(u-2)(u-2)}{(n-2)(n-3)}$$

oder

$$= s' \frac{(u-1)(u-2)(u-3)}{(n-2)(n-3)} + s' \frac{u-1}{n-2};$$

also jedenfalls

$$\Sigma_{s'} r_0 \geqq s' \frac{(u-2)^2(u-1)}{(n-2)(n-3)},$$

da ja der andere Werth

$$= s' \frac{(u-2)^2(u-1)}{(n-2)(n-3)} - s' \frac{(u-2)(u-1)}{(n-2)(n-3)} + s' \frac{u-1}{n-2}$$
$$= s' \frac{(u-2)^2(u-1)}{(n-2)(n-3)} + s' \frac{(u-1)(n-u-1)}{(n-2)(n-3)}$$

ist, mithin hier, wo der Transitivitätsgrad 3 übersteigt, und somit auch $n > 3$, und (nach Satz 4) $u < n-1$ sein muss, immer der grössere von beiden bleibt.

Uebrigens lässt sich ja derjenige Fall, in welchem nach dem Gesagten dieser grössere Werth von $\Sigma_{s'} r_0$ gilt, immer herbeiführen, sobald nur die Substitutionen der Buchstabenzahl u in der gegebenen Gruppe nicht sämmtlich zweiter Ordnung sind. Denn man kann dann eben insbesondere die beliebig aus denselben herausgegriffene Substitution so wählen, dass sie nicht von dieser Ordnung ist. Und dann führt diese Substitution auch nicht lauter Cyclen zweiter Ordnung, d. h. Transpositionen, aus, ja sogar keinen solchen, da sie als Substitution kleinster Buchstabenzahl der Gruppe nothwendig regelmässig ist.

Durch diese Ergebnisse folgt aus der vorher erhaltenen Beziehung (7) für alle mehr als dreifach transitiven Gruppen n^{ten} Grades und u^{ter} Classe:

$$(8) \qquad 3s' + 3s' \frac{(u-1)(u-2)}{n-2} - s' \frac{(u-2)^2(u-3)}{(n-2)(n-3)} - 2s' \frac{u-2}{n-2}$$
$$- s' \frac{(u-2)^2(u-1)}{(n-2)(n-3)} \geqq \Sigma_{s'} s \geqq s' u,$$

und für alle diejenigen unter diesen Gruppen, in denen die Substitutionen der Buchstabenzahl u nicht sämmtlich nur zweiter Ordnung sind, auch:

$$(9) \qquad 3s' + 3s' \frac{(u-1)(u-2)}{n-2} - s' \frac{(u-2)^2(u-3)}{(n-2)(n-3)} - 2s' \frac{u-2}{n-2}$$
$$- s' \frac{(u-1)(u-2)(u-3)}{(n-2)(n-3)} - s' \frac{u-1}{n-2} \geqq \Sigma_{s'} s \geqq s' u.$$

Hat aber die herausgegriffene Substitution der Buchstabenzahl u, und damit, als derselben ähnlich, auch jede der ausserdem betrachteten s' Substitutionen, die Ordnung zwei, vertauschen also alle diese Substitutionen ihre Buchstaben nur in Transpositionen, so wird insbesondere der allen gemeinsame Buchstabe a_1 von der ersteren mit dem von ihr dafür gesetzten, von keiner der s' betroffenen, a_2, und von jeder der letzteren mit einem der übrigen $n-2$ Gruppenbuchstaben transponirt, d. h. wechselseitig vertauscht. Es wird dann folglich jede solche der s' Substitutionen, die jenen gemeinsamen Buchstaben a_1 mit einem von der herausgegriffenen nicht betroffenen, z. B. a, transponirt, von der letzteren in eine Substitution transformirt, welche statt dessen die Transposition $(a_2 a)$ ausführt, a_1 dagegen an Stelle von a_2 nicht vertauscht. Und die Substitution also, die man dann erhält, indem man auf diese transformirte die Umkehrung der ursprünglichen folgen lässt (welche letztere hier, als von zweiter Ordnung, mit ihrer Umkehrung einerlei ist) vertauscht die Buchstaben a_1, a_2, a in einem Cyclus dritter Ordnung, da ja dieselben von den zusammensetzenden zwei Substitutionen überhaupt nur in den Transpositionen $(a_2 a)$ und $(a a_1)$ betroffen werden, und $(a_2 a)(a a_1) = (a_2 a_1 a)$ ist.

Nun wird der gemeinsame Buchstabe a_1 mit jedem einzelnen der $n-2$ Gruppenbuchstaben, die ausser ihm und dem von keiner der betrachteten s' Substitutionen vertauschten, a_2, vorhanden sind, nach Satz 2 von gleichvielen der letzteren transponirt; also, wenn von jeder mit einem der $n-2$, von $\frac{s'}{n-2}$, und mit den $n-u$ von der herausgegriffenen nicht betroffenen unter diesen Buchstaben von zusammen $s'\frac{n-u}{n-2}$ der s' Substitutionen.

Finden sich demnach unter den Substitutionen der Buchstabenzahl u in der gegebenen Gruppe zwar solche zweiter Ordnung, aber keine, welche Cyclen dritter ausführen und somit bei ihrer Regelmässigkeit selbst dritter Ordnung sind, so darf man in der Beziehung (8) nach der Bedeutung der die Summe $\Sigma_{s'} s$ bildenden Zahlen s mindestens $s'\frac{n-u}{n-2}$ derselben $\geqq u+1$, weil $> u$, setzen, $\Sigma_{s'} s$ also

$$\geqq s'u + s'\frac{n-u}{n-2}.$$

Und so hat man für diesen Fall, wenn man noch $s'\frac{n-u}{n-2}$ auf die andere Seite schafft:

$$(10) \qquad 3s' + 3s'\frac{(u-1)(u-2)}{n-2} - s'\frac{(u-2)^2(u-3)}{(n-2)(n-3)} - 2s'\frac{u-2}{n-2}$$
$$- s'\frac{(u-2)^2(u-1)}{(n-2)(n-3)} - s'\frac{n-u}{n-2} \geqq s'u;$$

während sonst nach (9):

$$(11) \qquad 3s' + 3s'\frac{(u-1)(u-2)}{n-2} - s'\frac{(u-2)^2(u-3)}{(n-2)(n-3)} - 2s'\frac{u-2}{n-2}$$
$$- s'\frac{(u-1)(u-2)(u-3)}{(n-2)(n-3)} - s'\frac{u-1}{n-2} \geqq s'u$$

ist.

Die linke Seite der ersten dieser zwei Beziehungen ist aber hier keinesfalls grösser als die der zweiten. Denn sonst müsste ja

$$s' \frac{(u-2)^2(u-1)}{(n-2)(n-3)} + s' \frac{n-u}{n-2} < s' \frac{(u-1)(u-2)(u-3)}{(n-2)(n-3)} + s' \frac{u-1}{n-2}$$

sein, also, da sowohl s' als $(n-2)(n-3) > 0$:

$$(u-2)^2(u-1) + (n-u)(n-3) < (u-1)(u-2)(u-3) + (u-1)(n-3),$$

oder

$$(n-u)(n-3) < (u-1)(n-3) + (u-1)(u-2)(u-3) - (u-2)^2(u-1),$$

oder

$$(n-u)(n-3) < (u-1)(n-3) - (u-1)(u-2),$$

oder endlich

$$(n-u)(n-3) < (u-1)(n-u-1);$$

während doch nach Satz 4 hier

$$u \overline{\gtrless} n-2,$$

also

$$n-3 \geqq u-1$$

ist.

Das Bestehen von (10) für irgend eine mehr als dreifach transitive Gruppe n^{ten} Grades und u^{ter} Classe zieht folglich das von (11) für dieselbe nach sich. Und da für jede solche Gruppe, wie gezeigt, wenigstens eine dieser zwei Abhängigkeiten gilt, so ist dies mit (11) immer der Fall.

Aus letzterer folgt nun zunächst, indem Alles auf die rechte Seite geschafft und mit dem positiven Ausdrucke $\frac{(n-2)(n-3)}{s'}$ erweitert wird:

$$0 \geqq (n-3)(n-2)(u-3) - (n-3)\big(3(u-1)(u-2) - 2(u-2) - (u-1)\big) + (u-2)^2(u-3) + (u-1)(u-2)(u-3).$$

Und diese Beziehung liesse sich als solche zweiten Grades in n unmittelbar nach n auflösen. Man kann indessen auch folgendermassen verfahren:

Bei gleicher Grössenordnung von u und n ist die rechte Seite der Beziehung annähernd von der Form

$$n^2u - 3nu^2 + 2u^3 = u(n-u)(n-2u).$$

Das weist darauf hin, für eine der Veränderlichen n oder u eine neue der ungefähren Gestalt $n-2u$ einzuführen, am bequemsten, der Art der Abhängigkeit entsprechend, $n-2u-3$ für n. Thut man dies, indem man überall darin $n-2u-3+2u+3$ für n setzt und nach Potenzen von $n-2u-3$ entwickelt, so ergiebt sich ausgerechnet:

$$0 \geqq (n-2u-3)^2(u-3) + (n-2u-3)(u^2+u-14) + u^2 - u - 18.$$

Und hierin sind die Coefficienten aller Potenzen der Unbekannten

$n-2u-3$, einschliesslich des von derselben freien Gliedes, positiv, sobald die ganze Zahl $u > 4$ ist. Unter dieser Voraussetzung kann der Beziehung somit kein Werth der ganzen Zahl $n-2u-3$ genügen, der nicht < 0, also $\overline{\gtrless} -1$ ist, und folglich kein Werth von u unter $\frac{1}{2}n-1$; während sie durch $n-2u-3=-1$, also $u = \frac{1}{2}n-1$, in der That schon befriedigt wird.

Grösser als 4 ist aber die Classe (u) einer mehr als dreifach transitiven Gruppe schon dann, wenn sie 3 übersteigen, die Gruppe somit, nach (I), die alternirende ihres Grades nicht enthalten soll; weil dann nach dem bekannten Mathieu'schen Satze die Classe grösser als der Transitivitätsgrad sein muss. Und abgesehen davon, hat sich ja auch vorher gezeigt, dass für keine mehr als zweifach transitive Gruppe u^{ter} Classe und n^{ten} Grades $u=4$ sein kann, wenn nicht $n \overline{\gtrless} 8$, also $u \geqq \frac{1}{2}n$ ist.

Es besteht demnach der Satz:

III. *Soll eine mehr als dreifach transitive Gruppe die alternirende ihres Grades nicht enthalten, und bezeichnet n diesen Grad, d. h. die Zahl aller verschiedenen von der Gruppe betroffenen Buchstaben, so darf keine ihrer Substitutionen, von der identischen abgesehen, weniger als $\frac{1}{2}n-1$ Buchstaben vertauschen.*

(Wäre nur die bei Verzicht auf $\Sigma_{s'}s$ aus (8) folgende Beziehung benützt worden, so hätte sich auf ähnliche Weise immer noch $u > \frac{1}{2}n-2$, wenn $u > 3$ und $n > 16$, ergeben; und mittels der noch einfacher zu erlangenden

$$3s' + 3s' \frac{(u-1)(u-2)}{n-2} - s' \frac{(u-2)^2(u-3)}{(n-2)(n-3)} - s' \frac{(u-1)(u-2)(u-3)}{(n-2)(n-3)} \geqq s'u$$

oder

$$0 \geqq (n-3)(n-2)(u-3) - 3(n-3)(u-1)(u-2) + (u-2)^2(u-3) \\ + (u-1)(u-2)(u-3),$$

die entsteht, wenn mit (7), wieder unter Verzicht auf $\Sigma_{s'}s$, nur die zuerst erhaltenen wesentlichsten Ergebnisse

$$\Sigma_{s'}m' = s' \frac{(u-1)(u-2)}{n-2},$$

$$\Sigma_{s'}r \geqq s' \frac{(u-2)^2(u-3)}{(n-2)(n-3)},$$

$$\Sigma_{s'}r_0 \geqq s' \frac{(u-1)(u-2)(u-3)}{(n-2)(n-3)}$$

verbunden werden, $u > \frac{1}{2}n-4$, wenn > 3).

Aus dem eben gefundenen Satze III mag zum Schlusse noch eine, später freilich weit überholte, Folgerung hinsichtlich der Transitivitätsgrenze gezogen werden. Nach einem Satze nämlich, den ich in der Eingangs erwähnten Untersuchung über diese Grenze (Bd. 29 d. Ztschr. S. 38, V) nachgewiesen habe, muss für jede t-fach transitive Gruppe n^{ten} Grades und u^{ter} Classe, welche die alternirende ihres Grades nicht enthält, (oder, wie leicht ersichtlich, da ja zu $\gtreqless t+1$, wenn $u \gtreqless 3$, für die auch nur n nicht $= t$ ist) n grösser sein als das kleinste Product von mindestens $\frac{zu-t}{n-t}$ irgend solcher gegebener z Potenzen positiven ganzen Grades verschiedener Primzahlen, deren Summe t nicht übersteigt. Ist nun $u \geqq \frac{1}{2} n - 1$, so wird

$$\frac{zu-t}{n-t} = \frac{\frac{1}{2} zn - z - t}{n-t} = \frac{\frac{1}{2} z(n-t) + \frac{1}{2} zt - z - t}{n-t}$$

und folglich $> \frac{1}{2} z$, sobald $z > 2$ ist; da ja nach der Bedeutung von z dann $2z < t$ ist, also $\frac{1}{2} zt - z - t > 0$, weil $> \frac{1}{2} zt - \frac{3}{2} t$. Und so hat man, da auch die Bedingung $t > 3$ durch die Annahme $z > 2$ erfüllt wird, das für $z = 1$ selbstverständliche Ergebniss:

Soll eine Gruppe die alternirende ihres Grades nicht enthalten, so muss dieser Grad, d. h. die Zahl aller verschiedenen von ihr betroffenen Buchstaben, grösser sein als das kleinste Product von mehr als der halben Anzahl irgend solcher gegebener Potenzen positiven ganzen Grades verschiedener Primzahlen, deren Summe den Transitivitätsgrad der Gruppe nicht übersteigt; wenigstens wenn die Anzahl dieser Potenzen von 2 verschieden ist.

Breslau, im August 1891.

Anwendung von Sätzen über partielle Differentialgleichungen auf die Theorie der Orthogonalsysteme, insbesondere die der Ribaucour'schen cyklischen Systeme.

Von

A. V. Bäcklund in Lund.

Die Sätze über partielle Differentialgleichungen, die hier zur Anwendung gebracht werden sollen, sind zum grossen Theile schon seit lange bekannt. Wenn ich sie dennoch ziemlich ausführlich entwickle, geschieht dies deswegen, weil ich dabei Gelegenheit finde, hier und da einiges weniger Bekannte und auch für die Theorie dieser Gleichungen Wichtige beizufügen. Ich beginne mit der Darstellung der allgemeinsten Sätze aus der Theorie der von Ribaucour eingeführten cyklischen Orthogonalsysteme und stelle dabei partielle Differentialgleichungen auf, die später, in § 3, Beispiele zu der allgemeinen Theorie der partiellen Differentialgleichungen der zweiten Ordnung mit zwei unabhängigen Variablen und einer unbekannten Function bilden werden. Sowohl diese als auch die darauf folgenden Untersuchungen über allgemeinere Orthogonalsysteme habe ich früher in „Bihang till K. Svenska Vet.-Akad. Handlingar, B. 16, 17" unter dem Titel: *Om Ribaucour's cykliska system* in anderer Form publicirt. Hier, wie dort, muss ich obenan, zu § 1, die Arbeiten citiren von Ribaucour in T. LXVII, LXX und LXXVI der Comptes Rendus des Séances de l'Academie des Sciences, sowie die von Bianchi: *Sopra alcune classi di sistemi tripli ciclici di superficie ortogonali.* Giornale di Matematiche di Battaglini. Vol. XXI; *Sui sistemi tripli ciclici di superficie ortogonali. Nota II*[a]. Giornale di Matematiche di Battaglini. Vol. XXII, und die *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, von G. Darboux, 2. Theil. Paris 1888, 1889.

§ 1.

Die cyklischen Systeme von Ribaucour.

1. Damit zweifach unendlich viele Kreise

$$(1)\qquad \begin{cases} x = az + b(x^2 + y^2 + z^2) + c, \\ y = a'z + b'(x^2 + y^2 + z^2) + c', \end{cases}$$

$$(1')\qquad b = F(a, a'), \quad c = \Phi(a, a'), \quad b' = F_1(a, a'), \quad c' = \Phi_1(a, a')$$

von denselben einfach unendlich vielen Flächen senkrecht geschnitten werden, müssen die zwei folgenden partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$(2)\qquad \begin{cases} p + 2b(z - px - qy) + a = 0, \\ q + 2b'(z - px - qy) + a' = 0, \quad p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \end{cases}$$

wenn man aus (1), (1') die Werthe von a, a', b, b', c, c' in x, y, z einführt, *involutorisch* werden: sie müssen nämlich die ∞^1 in Frage gestellten Orthogonalflächen als gemeinsame Integrale besitzen. Die Bedingung hierfür drückt sich nach bekannten Regeln vollständig durch die drei Gleichungen aus:

$$\frac{\partial b}{\partial a'}\frac{\partial c'}{\partial a} - \frac{\partial b'}{\partial a}\frac{\partial c}{\partial a'} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial b}{\partial a} - \frac{\partial b'}{\partial a'}\right)\frac{\partial c'}{\partial a} - \left(\frac{\partial c}{\partial a} - \frac{\partial c'}{\partial a'}\right)\frac{\partial b'}{\partial a} = 0,$$

$$(1 + a^2 - 4bc)\frac{\partial b'}{\partial a} - (aa' - 2bc' - 2b'c)\left(\frac{\partial b}{\partial a} - \frac{\partial b'}{\partial a'}\right)$$
$$- (1 + a'^2 - 4b'c')\frac{\partial b}{\partial a'} = 0,$$

welche also jetzt durch die vier Functionen (1') F, Φ, F_1, Φ_1 befriedigt werden sollen.

Von diesen Gleichungen besagen die zwei ersten, dass jeder derjenigen zwei Kreise C', C_1' der fraglichen Congruenz, welche einem beliebigen Congruenzkreise C unendlich benachbart sind und ihn treffen, dies in nicht weniger als zwei Punkten thut. Die letzte Gleichung belehrt uns sodann, dass die Kugeln, welche C und C' bez. C und C_1' enthalten, zu einander senkrecht stehen.

2. Nehmen wir nunmehr beliebig eine continuirliche einfach unendliche Reihe von Kreisen heraus: $C, C', C'', \ldots$ die einer Congruenz der genannten Art zugehören und zu je zwei auf einander folgenden in zwei Punkten sich treffen, so finden wir sie als Krümmungscurven für die Fläche, die sie bilden. Eine zweite derartige, in derselben Congruenz enthaltene Reihe von Kreisen: $C, C_1', C_1'', \ldots$ bildet

eine zweite Fläche von derselben Beschaffenheit, welche die erste nach dem Kreise C senkrecht schneidet. Aber C war ein beliebiger Congruenzkreis. *Folglich müssen sämmtliche Kreise unserer Congruenz sich zusammenfügen lassen zu zwei Schaaren von je ∞^1 Flächen, die in Verein mit den gemeinsamen Orthogonalflächen der Kreise ein dreifaches Orthogonalsystem bestimmen.*

Jedes solches Orthogonalsystem ist vor allen anderen dadurch ausgezeichnet, dass die Flächen der zwei Schaaren desselben, nämlich die eben erwähnten, von C erzeugten Flächen, kreisförmige Krümmungscurven (C) gemeinsam besitzen. Ribaucour, der zuerst diese Orthogonalsysteme studirt hat, hat ihnen desshalb den Namen von *cyklischen Systemen* beigelegt.

3. Von der Existenz *einer* Orthogonalfläche, Γ, von zweifach unendlich vielen Kreisen, die derart mit einander verbunden sind, dass immer je zwei unendlich benachbarte, die sich treffen, auf derselben Kugel liegen, schliessen wir leicht auf die Existenz von einfach unendlich vielen anderen Orthogonalflächen derselben Kreise. Denn, betrachten wir irgend zwei unendlich benachbarte von unseren Kreisen, C, C', welche auf derselben Kugel liegen und in zwei unendlich benachbarten Punkten, p bez. p', gegen Γ senkrecht stehen, so sehen wir, dass, weil pp' senkrecht ist zu C, die Tangenten von C und C' in p und p', d. i. die Normalen auf Γ in diesen Punkten, in einem Punkte der für C und C' gemeinsamen Sehne sich schneiden müssen. Also wird pp' Linienelement einer Krümmungscurve von Γ. Aus dem zweiten Congruenzkreise C_1', welcher zu C unendlich benachbart ist und ihn in zwei Punkten trifft, bekommen wir in derselben Weise das Linienelement pp_1' der zweiten durch p hindurchgehenden Krümmungscurve von Γ. Weil ferner die Tangenten pp' und pp_1' der beiden Krümmungscurven senkrecht zu einander sind, so steht die Kugel durch C und C' senkrecht zu der durch C und C_1'. Nach Nr. 1 müssen folglich alle unsere Kreise ∞^1 Orthogonalflächen gemeinsam besitzen, oder in anderen Worten, nach Nr. 2, sie müssen ein cyklisches System constituiren.

4. Wenn es sich daher darum handelt, die Kreise des allgemeinsten cyklischen Systems zu bestimmen, in das eine vorgelegte Fläche, Γ, als Orthogonalfläche der Kreise eingeht, so folgt erstens daraus, dass je zwei unendlich benachbarte Kreise des Systems, die in zwei unendlich benachbarten Punkten einer Krümmungscurve von Γ senkrecht zu dieser Fläche stehen, in zwei Punkten sich treffen, dass, wenn man die Parameter a, a', b, b', c, c' der fraglichen Kreise (1) als Functionen von den Parametern λ, μ der Krümmungscurven von Γ ansieht, man haben muss:

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial \lambda} = \varrho \dfrac{\partial a'}{\partial \lambda}, & \dfrac{\partial a}{\partial \mu} = \sigma \dfrac{\partial a'}{\partial \mu}, \\ \dfrac{\partial b}{\partial \lambda} = \varrho \dfrac{\partial b'}{\partial \lambda}, & \dfrac{\partial b}{\partial \mu} = \sigma \dfrac{\partial b'}{\partial \mu}, \\ \dfrac{\partial c}{\partial \lambda} = \varrho \dfrac{\partial c'}{\partial \lambda}, & \dfrac{\partial c}{\partial \mu} = \sigma \dfrac{\partial c'}{\partial \mu}, \end{cases}$$

ϱ, σ unbestimmt, und zweitens, dass die Gleichung, welche die Orthogonalität der Kugeln durch C und C', C und C_1' ausdrückt und die so lautet:

$$1 + a^2 - 4bc - (aa' - 2bc' - 2b'c)(\varrho + \sigma) + (1 + a'^2 - 4b'c')\varrho\sigma = 0,$$

eine blosse Folge der vorangehenden Gleichungen werde.

Wir drücken a und a' durch b, b', λ, μ aus vermittelst der Gleichungen:

$$(2)\qquad \begin{cases} p + 2b(z - px - qy) + a = 0, \\ q + 2b'(z - px - qy) + a' = 0 \end{cases}$$

und vermittelst der für die Punkte von Γ geltenden Werthe von x, y, z in λ und μ.

Die erste Gleichung, die man aus (3) durch Elimination von ϱ gewinnt:

$$(3')\qquad \frac{\partial a}{\partial \lambda}\frac{\partial b'}{\partial \lambda} - \frac{\partial a'}{\partial \lambda}\frac{\partial b}{\partial \lambda} = 0,$$

nimmt dann die Form an:

$$(4)\qquad \frac{\dfrac{\partial b}{\partial \lambda}}{\dfrac{\partial p}{\partial \lambda} - 2b\left(x\dfrac{\partial p}{\partial \lambda} + y\dfrac{\partial q}{\partial \lambda}\right)} = \frac{\dfrac{\partial b'}{\partial \lambda}}{\dfrac{\partial q}{\partial \lambda} - 2b'\left(x\dfrac{\partial p}{\partial \lambda} + y\dfrac{\partial q}{\partial \lambda}\right)}.$$

Wenn aus der folgenden zweiten, aus (3) hergeleiteten Gleichung

$$(3'')\qquad \frac{\partial b}{\partial \lambda}\frac{\partial c'}{\partial \lambda} - \frac{\partial b'}{\partial \lambda}\frac{\partial c}{\partial \lambda} = 0$$

vermittelst (1) c und c' entfernt werden, so kommt, mit Bezug auf (3'):

$$\left[\frac{\partial x}{\partial \lambda} - a\frac{\partial z}{\partial \lambda} - 2b\left(x\frac{\partial x}{\partial \lambda} + y\frac{\partial y}{\partial \lambda} + z\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)\right]\frac{\partial b'}{\partial \lambda}$$
$$- \left[\frac{\partial y}{\partial \lambda} - a'\frac{\partial z}{\partial \lambda} - 2b'\left(x\frac{\partial x}{\partial \lambda} + y\frac{\partial y}{\partial \lambda} + z\frac{\partial z}{\partial \lambda}\right)\right]\frac{\partial b}{\partial \lambda} = 0.$$

Aber in Folge der bekannten Formeln von Olinde Rodrigues:

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = \frac{R}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}\left(\frac{\partial p}{\partial \lambda} - p\,\frac{p\dfrac{\partial p}{\partial \lambda} + q\dfrac{\partial q}{\partial \lambda}}{1 + p^2 + q^2}\right),$$

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda} = \frac{R}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\left(\frac{\partial q}{\partial \lambda} - q\,\frac{p\frac{\partial p}{\partial \lambda}+q\frac{\partial q}{\partial \lambda}}{1+p^2+q^2}\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial \lambda} = \frac{R}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\,\frac{p\frac{\partial p}{\partial \lambda}+q\frac{\partial q}{\partial \lambda}}{1+p^2+q^2},$$

unter R einen Haupt-Krümmungsradius von Γ verstanden, wird der Coefficient von $\frac{\partial b'}{\partial \lambda}$ der letzteren Gleichung identisch mit:

$$\frac{R}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\left[\frac{\partial p}{\partial \lambda}-2b\left(x\frac{\partial p}{\partial \lambda}+y\frac{\partial q}{\partial \lambda}\right)-\frac{p\frac{\partial p}{\partial \lambda}+q\frac{\partial q}{\partial \lambda}}{1+p^2+q^2}\big(p+a+2b(z-px-qy)\big)\right],$$

d. i. nach (2):

$$\frac{R}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\left(\frac{\partial p}{\partial \lambda}-2b\left(x\frac{\partial p}{\partial \lambda}+y\frac{\partial q}{\partial \lambda}\right)\right).$$

Die Gleichung (3″) fällt also mit der Gleichung (4) identisch aus, und wir ziehen hieraus den Schluss, dass die Gleichungen (3) auf die folgenden zwei sich reduciren:

$$\frac{\frac{\partial b}{\partial \lambda}}{\frac{\partial p}{\partial \lambda}-2b\left(x\frac{\partial p}{\partial \lambda}+y\frac{\partial q}{\partial \lambda}\right)} = \frac{\frac{\partial b'}{\partial \lambda}}{\frac{\partial q}{\partial \lambda}-2b'\left(x\frac{\partial p}{\partial \lambda}+y\frac{\partial q}{\partial \lambda}\right)}, \tag{4}$$

$$\frac{\frac{\partial b}{\partial \mu}}{\frac{\partial p}{\partial \mu}-2b\left(x\frac{\partial p}{\partial \mu}+y\frac{\partial q}{\partial \mu}\right)} = \frac{\frac{\partial b'}{\partial \mu}}{\frac{\partial q}{\partial \mu}-2b'\left(x\frac{\partial p}{\partial \mu}+y\frac{\partial q}{\partial \mu}\right)}, \tag{5}$$

und dass diese somit die Werthe der Parameter b, b' der gesuchten Kreise erfüllen. Jeder Lösung: $b = F(\lambda, \mu)$, $b' = F_1(\lambda, \mu)$ dieses Gleichungspaares entsprechen, wegen (2) und (1), wenn für $x, y, z, p = \frac{\partial z}{\partial x}, q = \frac{\partial z}{\partial y}$ ihre den Punkten von Γ zugehörigen Ausdrücke in λ und μ angewandt werden, ganz bestimmte Functionen a, a', c, c' von λ und μ. Und hierdurch bekommt man unzweideutig, nach dem Vorangehenden, eine Kreiscongruenz von der in Frage gestellten Art.

Die zwei evidenten Lösungen: $b = ka$, $b' = ka'$ (k constant) und $b = kc$, $b' = kc'$ (k constant) entsprechen, die erste dem Falle dass die Ebene $z = -\frac{1}{2k}$, die zweite dem Falle dass die Kugel $x^2+y^2+z^2 = \frac{1}{k}$ eine zweite Orthogonalfläche der Kreise bildet: *Kreise also, die auf einer Kugel oder einer Ebene und zugleich auf irgend einer zweiten Fläche senkrecht stehen, constituiren immer ein cyklisches System*, — wie bekannt ist.

5. Die Elimination von b' zwischen (4) und (5) führt zur nachstehenden Gleichung von der zweiten Ordnung für b:

$$
\begin{aligned}
(6)\qquad & \frac{\partial^2 b}{\partial\lambda\,\partial\mu}\left(\frac{\partial q}{\partial\lambda}\frac{\partial p}{\partial\mu}-\frac{\partial q}{\partial\mu}\frac{\partial p}{\partial\lambda}\right)\\
&-\frac{\partial b}{\partial\lambda}\,\frac{\frac{\partial p}{\partial\mu}-2b\left(x\frac{\partial p}{\partial\mu}+y\frac{\partial q}{\partial\mu}\right)}{\frac{\partial p}{\partial\lambda}-2b\left(x\frac{\partial p}{\partial\lambda}+y\frac{\partial q}{\partial\lambda}\right)}\left(\frac{\partial q}{\partial\lambda}\frac{\partial^2 p}{\partial\lambda\,\partial\mu}-\frac{\partial p}{\partial\lambda}\frac{\partial^2 q}{\partial\lambda\,\partial\mu}\right)\\
&+\frac{\partial b}{\partial\mu}\,\frac{\frac{\partial p}{\partial\lambda}-2b\left(x\frac{\partial p}{\partial\lambda}+y\frac{\partial q}{\partial\lambda}\right)}{\frac{\partial p}{\partial\mu}-2b\left(x\frac{\partial p}{\partial\mu}+y\frac{\partial q}{\partial\mu}\right)}\left(\frac{\partial q}{\partial\mu}\frac{\partial^2 p}{\partial\lambda\,\partial\mu}-\frac{\partial p}{\partial\mu}\frac{\partial^2 q}{\partial\lambda\,\partial\mu}\right)\\
&-2\frac{\partial b}{\partial\lambda}\frac{\partial b}{\partial\mu}\left(\frac{\partial p}{\partial\lambda}\frac{\partial q}{\partial\mu}-\frac{\partial p}{\partial\mu}\frac{\partial q}{\partial\lambda}\right)\left(\frac{x\frac{\partial p}{\partial\lambda}+y\frac{\partial q}{\partial\lambda}}{\frac{\partial p}{\partial\lambda}-2b\left(x\frac{\partial p}{\partial\lambda}+y\frac{\partial q}{\partial\lambda}\right)}\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\frac{x\frac{\partial p}{\partial\mu}+y\frac{\partial q}{\partial\mu}}{\frac{\partial p}{\partial\mu}-2b\left(x\frac{\partial p}{\partial\mu}+y\frac{\partial q}{\partial\mu}\right)}\right)=0.
\end{aligned}
$$

Die Gleichung für b' bekommt man hieraus durch Vertauschung von b, x, y, p, q mit b', y, x, q, p. *Aber nachdem* (6) *gelöst ist, hat man b' durch blosse Quadratur*. Weil nämlich b durch eine Gleichung von der zweiten Ordnung (6) bestimmt wird, und nicht, — wie im Falle zweier allgemeinerer Gleichungen zwischen b, b', λ, μ und den ersten Derivirten von b, b' in Bezug auf λ, μ, — durch zwei Gleichungen von der 3. Ordnung (siehe Math. Annalen Bd. XVII, S. 291), so müssen (Math. Annalen Bd. XVII, S. 311—313) jedem Werthe $b=F(\lambda,\mu)$, welcher der Gleichung (6) genügt, ∞^1 Werthe von b', gegeben durch eine Gleichung $b'=F_1(\lambda,\mu,C)$, wo C arbiträr ist, entsprechen. Wenn also in (4) und (5) für b irgend ein Integral $F(\lambda,\mu)$ von (6) gesetzt wird, so werden jene Gleichungen (4), (5), als Gleichungen für b' betrachtet, involutorisch. Wegen der in b', $\frac{\partial b'}{\partial\lambda}$ und $\frac{\partial b'}{\partial\mu}$ linearen Form dieser Gleichungen gewinnt man durch blosse Quadratur ihre gemeinsame Lösung $b'=F_1(\lambda,\mu,C)$, C arbiträr. Doch ist zu bemerken, dass speciell im gegenwärtigen Falle die Lösungen b und b' in der Weise zusammengehören, dass sie sich in *einander* gegenseitig entsprechende Paare: $b'=F_1(\lambda,\mu,C)$, $b=F(\lambda,\mu,C')$, (wobei C, C' von einander unabhängige arbiträre Constanten) vertheilen. D. h. von einem Integrale $b=F(\lambda,\mu)$ von (6) leitet man, durch Quadratur, ∞^1 Lösungen b' und sodann ∞^1 neue Integrale b her, aber nicht mehr. Dem entsprechend erhalten wir die cyklischen Systeme, deren Kreise gegen Γ orthogonal sind, in ∞^∞ Gruppen von je ∞^2 Systemen geordnet. Kein System gehört mehr als einer Gruppe zu.

6. Dass im betrachteten Falle die anfänglichen vier Gleichungen (3), ϱ und σ entfernt gedacht, auf nur zwei Gleichungen (4) und (5) sich reduciren, kann als Folge davon angesehen werden, dass zwei unendlich benachbarte Kreise, wenn sie sich in einem Punkte, ε, treffen und in zwei zu einander benachbarten Punkten p, p' einer Krümmungscurve von Γ gegen diese Fläche senkrecht stehen, auf einer und derselben Kugel verlaufen. Denn die Normalen auf Γ in p und p' schneiden sich in einem Punkte o. Es wird auch $op = op'$, und weil also op und op' zwei gleich lange Tangenten der zwei angenommenen Kreise sind, so muss die Gerade, welche o mit dem angenommenen Schnittpunkte ε der beiden Kreise verbindet, diese Kreise in noch einem Punkte ε' treffen, dessen Lage von der algebraischen Gleichung $o\varepsilon \,.\, o\varepsilon' = \overline{op}^2$ unzweideutig bestimmt wird. Die Kreise bekommen also die zwei Punkte ε, ε' gemeinsam und gehören also derselben Kugel zu.

Im Zusammenhange hiermit steht folgender Satz: *Wenn die Kreise einer Congruenz eine und dieselbe Fläche Γ orthogonal schneiden und die zwei Kugeln, welche durch einen beliebigen, C, der Congruenzkreise so gelegt werden können, dass sie die Brennfläche der Congruenz berühren, ferner die Krümmungscurven von Γ im Punkte, wo C gegen Γ senkrecht steht, berühren, so besitzen unsere Kreise eine ganze Schaar von ∞^1 Orthogonalflächen und constituiren somit ein cyklisches System.*

Denn, nennen wir p den Punkt, in dem der Congruenzkreis C die Fläche Γ senkrecht schneidet, und ist p' ein unendlich benachbarter Punkt einer Krümmungscurve von Γ, endlich C' derjenige Congruenzkreis, der in p' normal zu Γ ist, so muss die Kugel, welche durch C geht und die Brennfläche der Congruenz in einem ihrer Berührungspunkte mit C berührt, wenn sie ausserdem p' enthält, in diesem Punkte, ebensowohl wie in p, die Fläche Γ senkrecht schneiden. Es verläuft C' unendlich nahe an C und trifft sicher die genannte Kugel unendlich nahe dem für C und für die Kugel gemeinsamen Berührungspunkte mit der Brennfläche der Congruenz. C' berührt ausserdem, nach dem eben Gesagten, unsere Kugel in p'. C' hat also drei Punkte mit der Kugel gemeinsam und muss folglich gänzlich auf ihr verlaufen. Also treffen sich C und C' in zwei Punkten. Auf einer zweiten, die Brennfläche berührenden Kugel durch C finden wir in gleicher Weise, wenn diese Kugel ein Linienelement pp_1' einer zweiten Krümmungscurve von Γ enthalten soll, einen zweiten, zu C unendlich nahen Congruenzkreis, welcher also C in zwei Punkten trifft und auf Γ senkrecht steht in p_1'. Nach der 1. Nr. muss daher der obige Satz gültig sein.

Die durch diesen Satz ausgedrückten Bedingungen für die Kreise eines cyklischen Systems sind sowohl hinreichend als nothwendig. Analytisch werden sie formulirt wie folgt:

Es sei

$$(7) \qquad \zeta = F(\xi, \eta)$$

die gegebene Orthogonalfläche der Congruenzkreise $C, C', \ldots$. Die zwei Kugeln durch C, welche die Brennfläche der Congruenz in den zwei Berührungspunkten derselben (x, y, z) und (x', y', z') mit C berühren, seien durch die folgenden Gleichungen dargestellt:

$$(8) \begin{cases} u[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2]+p(\xi-x)+q(\eta-y)-(\zeta-z)=0, \\ v[(\xi-x')^2+(\eta-y')^2+(\zeta-z')^2]+p'(\xi-x')+q'(\eta-y')-(\zeta-z')=0. \end{cases}$$

Mit $p, q; p', q'$ habe ich dann die ersten Derivirten von z, z' in Bezug auf x, y bezeichnet; dabei z, z' durch die Gleichungen:

$$(9) \qquad z = f(x, y), \quad z' = \varphi(x', y')$$

der zwei Schaalen der Brennfläche von $C, C', \ldots$ als Functionen von x und y bestimmt gedacht. u und v sind noch unbekannte Parameter.

Weil C senkrecht steht zu (7), so muss:

$$(10) \begin{cases} \big(2u(\xi-x)+p\big)F'(\xi)+\big(2u(\eta-y)+q\big)F'(\eta)-2u(\zeta-z)+1=0, \\ \big(2v(\xi-x')+p'\big)F'(\xi)+\big(2v(\eta-y')+q'\big)F'(\eta)-2v(\zeta-z')+1=0, \end{cases}$$

und weil jede der zwei Kugeln (8) beide Punkte (x, y, z) und (x', y', z') enthält, so kommt:

$$(11) \begin{cases} u[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]-p(x-x')-q(y-y')+z-z'=0, \\ v[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]+p'(x-x')+q'(y-y')-z+z'=0. \end{cases}$$

Man muss ferner haben, weil die zwei Kugeln einander rechtwinklig treffen:

$$(12) \quad 1+pp'+qq'+2uv[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]=0,$$

und schliesslich, weil sie die Fläche (7) harmonisch zu ihren Inflexionstangenten im Punkte (ξ, η, ζ) schneiden, nämlich die Krümmungscurven dieser Fläche im genannten Punkte berühren:

$$(13) \quad \begin{aligned} &\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2}\Big[2u\big(\eta-y+F'(\eta)(\zeta-z)\big)+q-F'(\eta)\Big] \\ &\qquad \times \Big[2v\big(\eta-y'+F'(\eta)(\zeta-z')\big)+q'-F'(\eta)\Big] \\ &-\frac{\partial^2 F}{\partial \xi \partial \eta}\Big\{\Big[2u\big(\eta-y+F'(\eta)(\zeta-z)\big)+q-F'(\eta)\Big] \\ &\qquad \times \Big[2v\big(\xi-x'+F'(\xi)(\zeta-z')\big)+p'-F'(\xi)\Big] \\ &\qquad + \Big[2u\big(\xi-x+F'(\xi)(\zeta-z)\big)+p-F'(\xi)\Big] \\ &\qquad \times \Big[2v\big(\eta-y'+F'(\eta)(\zeta-z')\big)+q'-F'(\eta)\Big]\Big\} \\ &+\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2}\Big[2u\big(\xi-x+F'(\xi)(\zeta-z)\big)+p-F'(\xi)\Big] \\ &\qquad \times \Big[2v\big(\xi-x'+F'(\xi)(\zeta-z')\big)+p'-F'(\xi)\Big]=0. \end{aligned}$$

Die Elimination von ξ, η, ζ, u und v leitet zu vier Gleichungen von der Form:

$$(14)\qquad \begin{cases} F_1(x,\ y,\ z,\ p,\ q;\ \ x',\ y',\ z',\ p',\ q') = 0, \\ F_2(x,\ y,\ z,\ p,\ q;\ \ x',\ y',\ z',\ p',\ q') = 0, \\ F_3(x,\ y,\ z,\ p,\ q;\ \ x',\ y',\ z',\ p',\ q') = 0, \\ F_4(x,\ y,\ z,\ p,\ q;\ \ x',\ y',\ z',\ p',\ q') = 0, \end{cases}$$

welche also die Flächen (9) sammt der Correspondenz zwischen x, y, z und x', y', z' bestimmen.

6'. Um die erste der Flächen (9) zu gewinnen, muss man x', y', z', p', q' zwischen den Gleichungen (14) und ihren Derivirten eliminiren. Im Falle von vier Gleichungen allgemeinster Form zwischen den Grössen $x, y, z, p, q, x', y', z', p', q'$ giebt diese Elimination zwei solche partielle Differentialgleichungen von der 3. O. für z, deren erste Derivirte auf blos drei Gleichungen sich reduciren*). *Aber im vorliegenden Falle findet man z schon durch eine partielle Differentialgleichung von der zweiten Ordnung.* Denn z muss immer in solcher Weise bestimmt werden, wenn diejenigen Elemente (x', y', z', p', q'), die den Elementen (x, y, z, p, q) einer beliebigen Integralfläche $z = f(x, y)$ entsprechen, zu ∞^1 Flächen zusammengehen**). Und das ist in der That hier der Fall. Die Art der Zusammengehörigkeit der Flächenelemente (x, y, z, p, q), (x', y', z', p', q') ist nämlich die folgende. Durch jeden Kreis C eines der gesuchten cyklischen Systeme gehen zwei Kugeln (8). Einem jeden Flächenelemente (x, y, z, p, q) der einen Kugel in einem Punkte von C entsprechen alle diejenigen ∞^1 Flächenelemente der anderen Kugel, welche an den verschiedenen Punkten von C haften. Wenn desshalb eine Fläche $z = f(x, y)$ gegeben ist, welche einen Theil einer Brennfläche der Kreise C eines der gesuchten cyklischen Systeme ausmacht und die offenbar mindestens ∞^1 Curven enthält, welche Enveloppen von je ∞^1 solchen Kreisen C sind, die zur Fläche (7) in den Punkten einer Krümmungscurve derselben senkrecht stehen, so folgt, dass den ∞^1 Flächenelementen desjenigen Streifens der Fläche $z = f(x, y)$, welcher an irgend eine der letzteren Curven sich anschliesst, alle Flächenelemente zugeordnet

*) Diese Gleichungen werden also von der unten in § 5 besprochenen Art.

**) Math. Annalen Bd. XVII, S. 312. Niemals können die zwei Gleichungen von der 3. Ordnung durch eine Gleichung von der 2. Ordnung mit einer arbiträren Constanten ersetzt werden. Siehe Math. Annalen Bd. XIX, S. 414. (Ich möchte hier noch besonders darauf aufmerksam machen, dass vor dem Abschluss des letztgenannten Bandes die Seiten 415—422 wegen eines Fehler umgedruckt worden sind und dass dieser Umdruck dem letzten Hefte des Bandes angefügt wurde — ein Umstand, der, wie ich weiss, wenigstens an einem Orte übersehen worden ist).

sind, die derjenigen Fläche zugehören, die von den Kreisen C, welche jene Curve zur Enveloppe haben, erzeugt wird. Die Gleichungen (14) sind daher im gegenwärtigen Falle so eingerichtet, dass jeder der obigen Flächen $z = f(x, y)$ ∞^1 Flächen entsprechen, nämlich diejenigen der eben genannten Art, welche Enveloppen von je ∞^1 Kugeln (8) sind. Daher kommt, nach Math. Ann. Bd. XVII, S. 312, für z nur eine Gleichung von der 2. O. heraus. Das Umhüllungsgebilde der erwähnten ∞^1 Kugelenveloppen stellt die der vorigen Fläche $z = f(x, y)$ entsprechende Fläche $z' = \varphi(x', y')$ dar. Diese Fläche genügt derselben partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung wie die erste Fläche.

7. Es giebt einen Fall, wo wir auf jeder Integralfläche $z = f(x, y)$ ∞^2 Curven der eben erwähnten Art finden, wenn nämlich die Fläche (7) eine Ebene oder eine Kugel ist. *In diesem Falle wird die Gleichung* (13) *eine unmittelbare Folge der vorangehenden Gleichungen und wir bekommen dann blos drei Gleichungen* (14). In diesem Falle kann also eine jede Fläche als die eine Schaale: $z = f(x, y)$ der Brennfläche eines der cyklischen Systeme betrachtet werden und man gewinnt die entsprechenden Flächen: $z' = \varphi(x', y')$ durch eine partielle Differentialgleichung der 1. Ordnung. Dieser Satz stimmt mit dem am Ende der Nr. 4 angeführten völlig überein. Die beiden Schaalen einer Centrafläche einer beliebigen Fläche bilden einen Specialfall der nun auftretenden Flächen (9)*).

8. Durch die Kreise eines cyklischen Systems wird zwischen den Punkten irgend zweier Orthogonalflächen derselben ein eindeutiges Entsprechen festgestellt, nämlich zwischen den Punkten, in denen ein beliebiger der Kreise beide Flächen senkrecht schneidet. Dadurch werden die Curven der zwei Flächen einander eindeutig zugeordnet; insbesondere werden ihre Krümmungscurven einander entsprechen (Nr. 2). Die Tangenten je zweier einander entsprechender Krümmungscurven in zwei einander entsprechenden Punkten, die einem Kreise C zugehören, schneiden sich im Mittelpunkte derjenigen Kugel, welche

*) Wenn $F(\xi, \eta)$ Null ist, so nehmen die obigen Gleichungen die folgende Gestalt an:

$$p(x-x') + q(y-y') - z + z' + \frac{1}{2z}[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2] = 0,$$

$$p'(x-x') + q'(y-y') - z + z' - \frac{1}{2z'}[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2] = 0,$$

$$1 + pp' + qq' + \frac{1}{2zz'}[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2] = 0.$$

Zusammen mit der Gleichung:

$$(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 + 2(k+1)zz' = 0$$

bestimmen sie eine interessante Flächentransformation, die zuerst Bianchi angegeben und in Rendiconti della R. Accademia dei Lincei vom 22. April 1888 studirt hat.

durch C geht senkrecht zu den zwei Krümmungscurven. Desshalb werden unsere Flächen in je zwei entsprechenden Punkten von einer und derselben anderen Kugel berührt. Und umgekehrt, zwei Flächen, welche die beiden Schaalen einer Enveloppe von zweifach unendlich vielen Kugeln ausmachen, werden orthogonal zu den Kreisen eines cyklischen Systems, falls ihre Krümmungscurven einander entsprechen, d. h. falls diejenigen ∞^1 Kugeln der vorgelegten zweifachen Schaar, welche die eine Fläche in den Punkten einer Krümmungscurve berühren, auch die zweite Fläche in den Punkten einer ihrer Krümmungscurven berühren.

Also, wenn p, p' zwei einander entsprechende Punkte zweier solcher Flächen bedeuten, die zu den Kreisen irgend eines cyklischen Systems orthogonal stehen, und pT, pT' die Tangenten in p zu den Krümmungscurven der einen Fläche, $p't$, $p't'$ die Tangenten der entsprechenden Krümmungscurven der anderen Fläche sind, so müssen pT und $p't$ in einem Punkte o, pT' und $p't'$ in einem Punkte o' sich schneiden und $op = op'$, $o'p = o'p'$. Wenn dann x, y, z; x', y', z' die rechtwinkligen Cartesischen Coordinaten von p und p'; p, q und p', q' die Richtungscoefficienten der Tangentenebenen beider Flächen in den genannten Punkten bedeuten, und durch: $dy = m\,dx$, $dz = p\,dx + q\,dy$ die Richtung von pT, durch $dy' = m'dx'$, $dz' = p'dx' + q'dy'$ die Richtung von $p't$ angegeben wird, so muss, wie auch das vorgelegene cyklische System beschaffen sei, die Zusammengehörigkeit der accentuirten und der nicht-accentuirten Buchstaben durch drei Gleichungen von der Form:

$$(15) \qquad \begin{cases} F(x, y, z, p, q; \quad x', y', z', p', q' \quad) = 0, \\ \Phi(x, y, z, p, q; \quad x', y', z', p', q' \quad) = 0, \\ \Psi(x, y, z, p, q, m; \; x', y', z', p', q', m') = 0 \end{cases}$$

vollständig formulirt sein. Durch die zwei ersten Gleichungen müssen, nach dem Obigen, wenn man x, y, z, p, q als Constanten betrachtet, die ∞^1 Kugeln vertreten sein, welche das Flächenelement (x, y, z, p, q) enthalten, und ebenso, wenn man nicht x, y, z, p, q, sondern x', y', z', p', q' constant hält, müssen dieselben Gleichungen die Kugeln darstellen, die dieses Element (x', y', z', p', q') gemein haben. Also hat man sowohl $[F\Phi]_{zxp} = 0$ als $[F\Phi]_{z'x'p'} = 0$. Nach einer Bemerkung von mir in Math. Annalen Bd. IX (Nr. 11), S. 312, 313 würde das Vorhandensein zweier solcher Gleichungen wie $F = 0$, $\Phi = 0$ auf eine Berührungstransformation einer höheren Ordnung hinzeigen, falls alle Flächen, welche jene Gleichungen liefern, wenn x, y, z, p, q bez. x', y', z', p', q' constant gehalten werden, zwei Schaaren mit je sechs willkürlichen Parametern bilden. Hier aber wird die Anzahl der willkürlichen Parameter der beiden Flächenschaaren nur vier. Wir bekommen nämlich durch die zwei ersten der Gleichungen (15) die Kugeln des Raumes und keine anderen Flächen.

Aus der dritten der Gleichungen (15) folgt, dass die allgemeinste Fläche, die mit einer gegebenen Fläche $z = f(x, y)$ ein Flächenpaar bildet, welches orthogonal zu den Kreisen eines cyklischen Systems wird, durch eine partielle Differentialgleichung von der Form:

$$f(x', y', z', p', q', m') = 0$$

oder ausführlicher geschrieben:

$$\begin{aligned} &f(x', y', z', p', q')^2[(1+q'^2)s' - p'q't'] \\ &+ f(x', y', z', p', q')\,[(1+q'^2)r' - (1+p'^2)t'] \\ &- [(1+p'^2)s' - p'q'r'] = 0 \end{aligned}$$

definirt ist. Diese Gleichung subsumirt sich unter diejenigen von derselben Form, die von Lie in seiner Abhandlung *Ueber Complexe etc.* im Bande V der Mathematischen Annalen ausführlich behandelt worden sind.

9. Die Frage nach den cyklischen Systemen, deren Kreise gegen eine gegebene Fläche orthogonal stehen, findet also wieder, wie vorher in Nr. 5 und 6, ihre Erledigung durch eine partielle Differentialgleichung von der zweiten Ordnung. Aber es ist möglich, die Lösung durch eine Gleichung 2. O. von noch einfacherer Form als die in den vorigen Nummern gegebene darzustellen. Man braucht nämlich nur Folgendes zu bemerken. Damit zwei Flächen, die einander *unendlich nahe* liegen, die Kreise eines cyklischen Systems rechtwinklig schneiden werden, müssen, nach dem Vorangehenden, die Normalen der einen Fläche in den Punkten einer beliebigen der Krümmungscurven derselben die zweite Fläche in einer unendlich benachbarten Curve treffen, die für sie Krümmungscurve wird. Und diese Bedingung ist nicht nur nothwendig für die beiden Flächen des cyklischen Systems, sondern auch hinreichend. Denn haben wir irgend zwei einander unendlich benachbarte Flächen und bezeichnen wir Punkte p, p' derselben dann als einander entsprechend, wenn pp' ein Element einer Normale der ersten Fläche ist, so müssen offenbar, wenn die Krümmungscurven der beiden Flächen einander entsprechen sollen, je zwei Tangenten pT, $p't$ an irgend zwei entsprechende Krümmungscurven in einer und derselben Ebene liegen, nämlich in einer Ebene durch zwei consecutive Hauptkrümmungsradien der einen Fläche, und folglich müssen pT und $p't$ in einem Punkte o sich schneiden, so dass $op = op'$. In anderen Worten, die Punkte p, p' werden gerade so auf einander bezogen wie, nach der vorangehenden Nr., zwei einander entsprechende Punkte zweier Orthogonalflächen der Kreise eines

cyklischen Systems. Hieraus folgt, dass die eben betrachteten Flächen einem und demselben cyklischen Systeme zugehören müssen.

Von zwei einander unendlich benachbarten Flächen eines Orthogonalsystems allgemeinster Art gilt aber der Satz, dass, weil beide Flächen von zwei Schaaren anderer Flächen orthogonal nach Krümmungscurven geschnitten werden, die Normalen der einen Fläche in den Punkten einer beliebigen ihrer Krümmungscurven eine unendlich benachbarte Krümmungscurve auf der anderen Fläche ausschneiden müssen. Hieraus haben wir dann zu schliessen, dass *irgend zwei unendlich benachbarte Flächen irgend eines Orthogonalsystems auch einem cyklischen Systeme zugehören.* Dieser Satz, der Ribaucour gebührt*), giebt unmittelbar die gesuchte Differentialgleichung.

Diese wird nämlich einfach diejenige von Lamé's sechs Gleichungen für das Orthogonalsystem:

$$ds^2 = H^2 d\lambda^2 + H_1^2 d\mu^2 + H_2^2 d\nu^2, \tag{16}$$

in der ν nicht als Variable auftritt:

$$\frac{\partial^2 H_2}{\partial\lambda\partial\mu} = \frac{1}{H}\frac{\partial H}{\partial\mu}\frac{\partial H_2}{\partial\lambda} + \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\lambda}\frac{\partial H_2}{\partial\mu}.$$

Den Abstand pp' zwischen einer gegebenen Fläche $\Gamma(\nu = \text{const.})$, für welche

$$ds^2 = H^2 d\lambda^2 + H_1^2 d\mu^2,$$

und der unendlich benachbarten Fläche Γ' des Orthogonalsystems (16) bezeichne ich mit τ. Dann ist $\tau = H_2 d\nu$ und

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial\lambda\,\partial\mu} = \frac{1}{H}\frac{\partial H}{\partial\mu}\frac{\partial \tau}{\partial\lambda} + \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial\lambda}\frac{\partial \tau}{\partial\mu}. \tag{17}$$

Durch diese Gleichung wird der allgemeinste Werth von τ bestimmt; durch τ die allgemeinste Fläche Γ'; die Kreise endlich, welche Γ und Γ' in benachbarten Punkten senkrecht schneiden, constituiren das allgemeinste cyklische System, gegen dessen Kreise die gegebene Fläche Γ senkrecht steht. — Durch die Gleichung (17) hat Ribaucour die Lösung der oben genannten Aufgabe ausgedrückt. —

10. Das Problem, die Orthogonalflächen der Kreise eines cyklischen Systems zu bestimmen, wenn diese Kreise gegeben sind, kann von folgendem Satze von Ribaucour abhängig gemacht werden: *Durch die fraglichen Orthogonalflächen werden die Kreise projectivisch getheilt***).

Man beweist diesen Satz einfach so: Seien $\Gamma, \Gamma', \Gamma'', \Gamma'''$ irgend welche vier Orthogonalflächen der Kreise eines vorgelegten cyklischen Systems, C und $C^{(1)}$ irgendwelche zwei einander unendlich benachbarte dieser Kreise und p und $p^{(1)}$ die zwei einander unendlich benach-

*) Ribaucour, *Sur la déformation des surfaces.* Comptes Rendus T. LXX, pag. 332.

**) Man sehe die Note von Ribaucour in Comptes Rendus T. LXXVI, p. 480.

barten Punkte, in denen dieselben die Fläche Γ senkrecht schneiden, so kommt man von p zu $p^{(1)}$, indem man zuerst einem Linienelemente pp' einer Krümmungscurve von Γ und nachher dem Linienelemente $p'p^{(1)}$ einer zweiten Krümmungscurve von Γ folgt. Unter den Kreisen unseres cyklischen Systems giebt es einen, der C und $C^{(1)}$ unendlich nahe verläuft, im Punkte p' senkrecht zu Γ steht und sowohl C als $C^{(1)}$ in zwei Punkten trifft. Diesen Kreis nenne ich C'.

Einer der zwei für C und C' gemeinsamen Punkte wird zum Centrum einer circulären Inversion genommen. Die Inversion verwandelt C und C' in zwei sich schneidende Geraden und $\Gamma, \Gamma', \Gamma'', \Gamma'''$ in vier Flächen, welche jene Geraden rechtwinklig treffen und demzufolge sie in paarweise gleich lange Stücke theilen. Also wird das anharmonische Verhältniss der vier Schnittpunkte dieser Flächen mit der einen Geraden gleich demjenigen der Schnittpunkte der nämlichen Flächen, in derselben Ordnung genommen, mit der zweiten Geraden. Wenden wir die Inversion noch einmal an, so bekommen wir aus irgend einer Geraden und vier Punkten derselben einen durch das Inversionscentrum gehenden Kreis und auf ihm vier Punkte mit unverändert demselben anharmonischen Verhältnisse. Also schneiden die vier Flächen $\Gamma, \Gamma', \Gamma'', \Gamma'''$ die zwei Kreise C, C' senkrecht in je vier Punkten von demselben anharmonischen Verhältnisse. In derselben Weise sehen wir, dass C' und $C^{(1)}$ von denselben Flächen nach dem nämlichen anharmonischen Verhältnisse geschnitten werden. Also werden C und $C^{(1)}$ von den genannten Flächen projectivisch getheilt. Nun gelangt man aber von C zu irgend welchem anderen Kreise unseres cyklischen Systems, — von dem wir stets annehmen, dass es ein Continuum bildet, — durch successive Ueberschreitung unendlich benachbarter Kreise, wie C und $C^{(1)}$. Folglich: die Orthogonalflächen der Kreise eines cyklischen Systems theilen zwei beliebige dieser Kreise projectivisch, wie im angeführten Satze von Ribaucour gesagt wurde.

11. Also, wenn vier Orthogonalflächen der Kreise eines gegebenen cyklischen Systems vorliegen und wenn in einem der Kreise zu den Punkten, in denen er von den vier Flächen rechtwinklig geschnitten wird, vier Radien gezogen werden, und diese mit einem festen Diameter desselben Kreises die Winkel V_1, V_2, V_3, V_4 bilden, so muss das anharmonische Verhältniss:

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}V_1 - \operatorname{tang}\frac{1}{2}V_3}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}V_1 - \operatorname{tang}\frac{1}{2}V_4} : \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}V_2 - \operatorname{tang}\frac{1}{2}V_3}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}V_2 - \operatorname{tang}\frac{1}{2}V_4}$$

constant für alle Kreise des Systems sein.

Hieraus ziehen wir einen für die Gleichung der gesuchten Orthogonalflächen wichtigen Schluss. Wir nehmen eine beliebig continuirliche Reihe von ∞^1 Kreisen unseres Systems heraus. Durch die verschiedenen Werthe einer Variablen x werden die verschiedenen Kreise der Reihe von einander getrennt. In jedem dieser Kreise wird ein Diameter ausgezeichnet, von dem aus wir den Winkel V des variablen Radius zählen. Wir nehmen an, dass diese von uns fixirten Diameter der verschiedenen Kreise ein Continuum bilden. Die Curve, in deren Punkten eine beliebige der gesuchten Orthogonalflächen die ∞^1 Kreise der herausgenommenen Reihe rechtwinklig schneidet, wird durch eine Gleichung in V und x dargestellt. Aber statt V führen wir $y = \operatorname{tang} \frac{1}{2} V$ als die von x abhängige Variable ein. Wir erkennen dann erstens, dass, weil es ∞^1 Curven der genannten Art giebt, die in Rede stehende Gleichung eine Differentialgleichung von der ersten Ordnung sein muss und zweitens dass, weil, nach dem eben Bemerkten, vier particuläre Lösungen derselben y_1, y_2, y_3, y_4 ein constantes anharmonisches Verhältniss besitzen, die Gleichung eine Riccati'sche wird*):

$$\frac{dy}{dx} = A + By + Cy^2, \tag{18}$$

wo A, B, C nur von x abhängen.

Wenn man nachher eine continuirliche Schaar von ∞^1 Reihen von je ∞^1 Kreisen mit einem gemeinsamen Kreise C^0 betrachtet und für jede Reihe die zugehörende Riccati'sche Gleichung (18) aufstellt, so wird klar, dass diejenigen Integralcurven dieser Gleichungen, die den Kreis C^0 in einem und demselben Punkte senkrecht schneiden, eine der gesuchten Orthogonalflächen bilden. Weil die genannten Gleichungen in eine zusammenfallen, für welche A, B, C ausser von x vom Parameter unserer Schaar von Kreisenreihen abhängen**), so folgt, dass:

---

*) Siehe Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces.* Première partie p. 26. Paris 1888.

**) Selbstverständlich wird die allgemeinste analytische Darstellung der fraglichen Flächen, der allgemeinsten Schaar von Kreisenreihen entsprechend, erst durch zwei Riccati'sche Gleichungen formulirt, oder, was auf dasselbe hinauskommt, durch zwei Gleichungen von der Form:

$$\frac{\partial V}{\partial u} = A(u, v) + B(u, v) \sin V + C(u, v) \cos V,$$

$$\frac{\partial V}{\partial v} = A'(u, v) + B'(u, v) \sin V + C'(u, v) \cos V,$$

die auch zu einer einzigen integrablen Differentialgleichung:

$$a(u, v, V)\, du + b(u, v, V)\, dv + c(u, v, V)\, dV = 0$$

zusammengezogen werden können. Letztere Gleichung findet man in Bianchi's Arbeit: *Sui sistemi tripli ciclici. Nota II_a.* Es ist dort die Gleichung (2) p. 3.

Wenn die Kreise eines cyklischen Systems gegeben sind, so werden die Orthogonalflächen derselben durch eine Riccati'sche Gleichung mit einem variablen Parameter erhalten.

Weil, wenn ein particuläres Integral einer Riccati'schen Gleichung bekannt ist, die vollständige Lösung derselben Gleichung nur Quadraturen erfordert, so ist klar, dass, *wenn man die Kreise eines cyklischen Systems und eine Orthogonalfläche derselben kennt, man die übrigen Orthogonalflächen durch blosse Quadraturen gewinnt.*

§ 2.

Ueber partielle Differentialgleichungen der zweiten Ordnung.

12. Ich lasse nunmehr einige Sätze über partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung folgen, deren Bedeutung für die oben angeführten Gleichungen ich sodann darlegen werde. —

Wenn

$$F(z', x', y', D_{x'} z', D_{y'} z', D^2_{x'} z', D^{1+1}_{x'y'} z', D^2_{y'} z')\left[D^{m+m'}_{x'y'} z' = \frac{\partial^{m+m'} z'}{\partial x'^m \partial y'^{m'}}\right]$$

eine ganze Function der Variablen x', y', ..., $D^2_{y'} z'$ ist, so wird sie vermittelst der Transformation:

$$(19) \qquad x = x', \quad y = y' - \psi(x'), \quad z = z'$$

und der dazu gehörenden Substitutionen:

$$(20) \begin{cases} D_{x'} z' = D_x z - D_y z\, \psi'(x), \\ D_{y'} z' = D_y z, \\ D^2_{x'} z' = D^2_x z - 2\, D^{1+1}_{xy} z\, \psi'(x) + D^2_y z\, \overline{\psi'(x)}^2 - D_y z\, \psi''(x), \\ D^{1+1}_{x'y'} z' = D^{1+1}_{xy} z - D^2_y z\, \psi'(x), \\ D^2_{y'} z' = D^2_y z. \end{cases}$$

wobei $\psi(x)$ eine analytische Function bedeutet, in eine Function

$$\Phi(z, x, y, D_x z, D_y z, D^2_x z, D^{1+1}_{xy} z, D^2_y z)$$

verwandelt, die sich im ganzen Continuitätsgebiete von $\psi(x)$ regulär verhält. Dabei geht der Streifen

$$(21) \qquad z' = \varphi(x'), \quad y' - y_0 = \psi(x'), \quad D_{y'} z' = q(x')$$

in den Streifen:

$$(22) \qquad z = \varphi(x), \quad y = y_0, \quad D_y z = q(x)$$

über. Hat man eine Integralfläche $z = f(x, y)$ von $\Phi = 0$, welche den Streifen (22) enthält, so bekommt man durch die Transformation (19) eine Integralfläche $z' = f_1(x', y')$ von $F = 0$, welche durch den Streifen (21) hindurchgeht. Wenn für ein endliches Gebiet der complexen x- und y-Ebenen um x_0 resp. y_0 herum die Function f regulär ist, und für dasselbe x-Gebiet auch ψ sich regulär verhält, so müssen sämmtliche Derivirten $D^{m+m'}_{x_0 y_0} z = D^{m+m'}_{x_0 y_0} f$ die Gleichungen:

$$(23)\qquad D^{m+m'}_{x_0 y_0}\Phi = 0 \quad (m=0, 1, \ldots, \infty,\ m'=0, 1, \ldots, \infty)$$

befriedigen, wie man sofort ersieht, wenn man f statt z in Φ einträgt und die so gewonnene Function von x und y nach dem Taylor'schen Satze in eine nach steigenden Potenzen von $x - x_0$ und $y - y_0$ fortschreitende Reihe entwickelt und ausdrückt, dass für alle Werthe von x und y im Continuitätsgebiete von f diese Reihe verschwinden soll.

Man hat natürlich

$$(24)\qquad D^{m+1}_{x_0} z = \varphi^{(m+1)}(x_0), \quad D^{m+1}_{x_0 y_0} z = q^{(m)}(x_0),$$

denn dies gilt für jede Fläche durch den Streifen (22). Die Werthe für $x = x_0$, $y = y_0$ von den übrigen Derivirten von $z = f$ müssen, wie gesagt, die Gleichungen (23) erfüllen. Diese Gleichungen liefern endliche, eindeutig bestimmte Werthe von diesen Derivirten, falls nur

$$\frac{\partial \Phi}{\partial D^2_y z}$$

nicht verschwindet, wenn man

$$x = x_0,\ y = y_0,\ z = \varphi(x),\ D_x z = \varphi'(x),\ D_y z = q(x),\ D^2_x z = \varphi''(x),$$
$$D^{1+1}_{xy} z = q'(x)$$

und für $D^2_y z$ seinen aus $\Phi = 0$ für $x = x_0$, etc. hervorgehenden Werth einsetzt.

13. Halten wir uns erstens beim Falle auf, wo der genannte partielle Differentialquotient verschwindet und doch eine Integralfläche: $z = f(x, y)$, f in einer endlichen Umgebung um x_0, y_0 regulär, durch den Streifen (22) geht. Statt $D_x z$, $D_y z$, $D^2_x z$, $D^{1+1}_{xy} z$, $D^2_y z$ schreibe ich, wie früher, p, q, r, s, t. Dann muss man haben für $x = x_0$:

$$(25)\quad \Phi = 0,\ \frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0,\ \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \varphi'(x)\frac{\partial\Phi}{\partial z} + \varphi''(x)\frac{\partial\Phi}{\partial p} + q'(x)\frac{\partial\Phi}{\partial q}$$
$$+ \varphi'''(x)\frac{\partial\Phi}{\partial r} + q''(x)\frac{\partial\Phi}{\partial s} = 0,$$

$$(26)\qquad \frac{\partial\Phi}{\partial y} + q(x)\frac{\partial\Phi}{\partial z} + q'(x)\frac{\partial\Phi}{\partial p} + t\frac{\partial\Phi}{\partial q}$$
$$+ q''(x)\frac{\partial\Phi}{\partial r} + D^{1+2}_{xy} z\frac{\partial\Phi}{\partial s} = 0,$$

$$(27)\quad z = \varphi(x),\ y = y_0,\ p = \varphi'(x),\ q = q(x),\ r = \varphi''(x),\ s = q'(x),$$
$$D^3_x z = \varphi'''(x),\quad D^{2+1}_{xy} z = q''(x).$$

Und wenn man für *ein jedes Flächenelement* (x, y, z, p, q) *des Streifens* hätte:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0,$$

r, s, t vermittelst der Gleichungen:

$$r = \varphi''(x), \quad s = q'(x), \quad \Phi = 0$$

entfernt, so würden die nächstvorangehenden Gleichungen zu jedem Flächenelemente desselben Streifens ein Werthsystem von $D_x^3 z$, $D_{xy}^{2+1} z$, $D_{xy}^{1+2} z$ bestimmen, das selbstverständlich gleich dem der nämlichen Derivirten von f wird, während q und φ Integrale derjenigen zwei Gleichungen sein müssten, welche durch Elimination von y, z, p, r, s, t aus den Gleichungen (25) und (27) hervorgehen. Aber aus den Gleichungen (23), $m + m' = 1$, folgt jetzt kein Werth für $D_y^3 z$.

Von den drei Gleichungen

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^2\Phi}{dx\,dy} = 0, \quad \frac{d^2\Phi}{dy^2} = 0,$$

die von den vierten Derivirten von $z = f$ erfüllt sein sollen, werden jetzt die zwei ersten eine algebraische Folge von (25) und (26), so dass die Gleichung

$$\text{(28)} \qquad \frac{d^2\Phi}{dy^2} = 0$$

allein etwas neues geben kann. Weil

$$D_x^4 z = \varphi^{IV}(x), \quad D_{xy}^{3+1} z = q'''(x), \quad D_{xy}^{2+2} z = \frac{d}{dx} D_{xy}^{1+2} z,$$

und $D_{xy}^{1+2} z$ aus (26) bestimmt ist, so folgt aus (28) der Werth von $D_{xy}^{1+3} z$ in Function von $D_y^3 z$ und x. *Wir haben aber stillschweigend vorausgesetzt, dass für keines der Elemente* (27) $\frac{\partial \Phi}{\partial s}$ *Null wird.* Vgl. die nachfolgende Nr. 20.

14. Oben haben wir keinen Werth für $D_y^3 z$ gefunden. Aus der Gleichung:

$$d D_y^3 z = D_{xy}^{1+3} z\, dx,$$

wo wir für $D_{xy}^{1+3} z$ seinen eben ermittelten Werth einzusetzen haben, welcher von der Form ist:

$$A(x) + B(x)\, D_y^3 z + C(x)\, \overline{D_y^3 z}^{\,2},$$

schliessen wir, dass vom Werthe von $D_y^3 z$ im Punkte x_0 durch eine Riccati'sche Gleichung solche, den übrigen Punkten des Streifens (22) zugehörende Werthe dieser Derivirten, welche als $\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}$ einer und derselben Fläche $z = f(x, y)$ gelten können, bestimmt sind. In gleicher Weise giebt uns die Anwendung der Gleichungen:

$$D_{xy}^{m+m'}\Phi = 0, \quad m + m' = 3,$$

die jetzt auf die einzige Gleichung:

$$\frac{d^3\Phi}{dy^3} = 0$$

sich reduciren, den Satz, dass aus dem beliebig genommenen Werthe von $D_y^4 z = \frac{\partial^4 f}{\partial y^4}$ im Punkte x_0 des Streifens (22) diejenigen, den übrigen Punkten dieses Streifens zugeordneten $D_y^4 z$, welche als $\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}$ gedeutet werden können, folgen. U. s. f. Der Streifen (22) wird also, *wenn für ein jedes Element* (x, y, z, p, q, r, s, t) *desselben, welches der Gleichung* $\Phi = 0$ *genügt, die Gleichungen* (25) *erfüllt sind, und* $\frac{\partial \Phi}{\partial s}$ *von Null verschieden ist*, von einem ganz ausgezeichneten Charakter. Da in anderen Fällen die Gleichungen (23) eine ganz bestimmte Reihe von $D_{xy}^{m+m'} z$, $m + m' = 3, 4, \ldots$ dem Streifen (22) zuordnen, und durch diese Reihe ein unendlich benachbarter zweiter, sodann ein darauf folgender dritter, etc. Flächenstreifen eines und desselben Integrals von $\Phi = 0$ bestimmt werden, so findet man dagegen im oben betrachteten Falle zum Streifen (22) zugehörend ∞^1 Reihen von den dritten Derivirten von z, die eben so viele unendlich benachbarte Flächenstreifen von verschiedenen, durch (22) hindurchgehenden Integralen von $\Phi = 0$ darstellen, und sodann zu jeder von den letzteren Reihen ∞^1 Reihen von den vierten Derivirten von z, die weitere Flächenstreifen liefern; u. s. f. Der Streifen (22) wird in diesem Falle ein *charakteristischer Streifen* oder eine *Charakteristik* von $\Phi = 0$ genannt.

15. Wenn man jetzt die Punkttransformationen (19), (20) anwendet, wird man zu einer allgemeineren Auffassung von Charakteristiken als möglichen Berührungsstreifen unendlich vieler Integralflächen geführt. Aus dem Vorangehenden folgt nämlich, dass, wenn irgend ein Streifen (21):

$$z' = \varphi(x'), \quad y' = y_0 + \psi(x'), \quad D_{y'} z' = q(x')$$

für unendlich viele Integralflächen von $F = 0$ gemeinsam sein soll, die Functionen φ, ψ, q diejenigen zwei Gleichungen erfüllen müssen, die durch Elimination von y', z', $D_{x'} z' = p'$, $D_{y'} z' = q'$, $D_{x'}^2 z' = r'$, $D_{x'y'}^{1+1} z' = s'$, $D_{y'}^2 z' = t'$, dr', ds', dt' aus den nachfolgenden Gleichungen entstehen:

$$\frac{\partial F}{\partial r'}\overline{\psi'(x')}^2 - \frac{\partial F}{\partial s'}\psi'(x') + \frac{\partial F}{\partial t'} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x'} + p'\frac{\partial F}{\partial z'} + r'\frac{\partial F}{\partial p'} + s'\frac{\partial F}{\partial q'} + \frac{\partial F}{\partial r'}\frac{dr'}{dx'} + \left(\frac{\partial F}{\partial s'} - \frac{\partial F}{\partial r'}\psi'(x')\right)\frac{ds'}{dx'} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'} + q'\frac{\partial F}{\partial z'} + s'\frac{\partial F}{\partial p'} + t'\frac{\partial F}{\partial q'} + \frac{\partial F}{\partial r'}\left(\frac{ds'}{dx'} - \frac{dt'}{dx'}\psi'(x')\right) + \frac{\partial F}{\partial s'}\frac{dt'}{dx'} = 0,$$

$$s' + t'\psi'(x') = q'(x'),\ r' + s'\psi'(x') = \frac{d}{dx'}\Big(\varphi'(x') - q(x')\psi'(x')\Big),\ F = 0,$$

$$\frac{ds'}{dx'} + \frac{dt'}{dx'}\psi'(x') + t'\psi''(x') = q''(x'),$$

$$\frac{dr'}{dx'} + \frac{ds'}{dx'}\psi'(x') + s'\psi''(x') = \frac{d^2}{dx'^2}\Big(\varphi'(x') - q(x')\psi'(x')\Big),$$

$$z' = \varphi(x'),\ y' = y_0 + \psi(x'),\ p' = \varphi'(x') - q(x')\psi'(x'),\ q' = q(x').$$

(Die zweite Gleichung ist eine Folge der ersten Gleichung und der Gleichung $\frac{dF}{dx'} = 0$; die dritte Gleichung eine Folge der ersten Gleichung und von $\frac{dF}{dy'} = 0$).

Daneben soll für alle Elemente $(x', y', z', p', q', r', s', t')$ unseres Streifens

$$\left(\frac{\partial F}{\partial s'}\right)^2 - 4\,\frac{\partial F}{\partial r'}\,\frac{\partial F}{\partial t'}$$

von Null verschieden sein. Vgl. hierzu die folgende Nr. 20.

Die Gleichungen für φ, ψ, q werden also von der Form:

$$U(x', \varphi, \varphi', \varphi'', \psi, \psi', \psi'', q, q') = 0,$$
$$V(x', \varphi, \varphi', \varphi'', \varphi''', \psi, \psi', \psi'', \psi''', q, q', q'') = 0.$$

Streifen (21), welche diese Gleichungen erfüllen, werden *Charakteristiken* genannt. Haben wir irgend eine Integralfläche von der Gleichung $F = 0$, so reicht die Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial r'}\,dy'^2 - \frac{\partial F}{\partial s'}\,dy'\,dx' + \frac{\partial F}{\partial t'}\,dx'^2 = 0$$

aus, um diejenigen Charakteristiken, die auf der Fläche liegen, zu bestimmen. Die anderen Gleichungen dieser Nr. drücken nämlich nur aus, dass es endliche Werthe der dritten Derivirten von z giebt, welche gleichzeitig dem Streifen und den Gleichungen

$$F = 0,\ D_{x\,y}^{m+m'} F = 0,\quad m + m' = 1, 2, \ldots$$

zugehören. Aber ist der Streifen auf einer bekannten Integralfläche: $z' = f(x', y')$ gelegen, und f regulär, so haben wir schon in $\frac{\partial^{m+m'} f}{\partial x'^m \partial y'^{m'}}$ derartige Derivirten*).

16. Dass, wenn der Streifen (22) der Bedingung

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$$

*) Eine specielle Behandlung erfordert der Fall, wo die Gleichung $F = 0$ so beschaffen ist, dass sie jeder ihrer Charakteristiken ∞^1 Werthreihen der zweiten Derivirten von z zuordnet. Im XI. Bande der Math. Annalen habe ich von derartigen Gleichungen gesprochen.

nicht unterliegt, die am Ende der Nr. 14 erwähnten, durch die Gleichungen (23) bestimmten, demselben Streifen (22) sich anreihenden neuen Streifen eine Fläche von endlicher zweidimensionaler Erstreckung erzeugen, welche durch eine solche Gleichung wie die oben in Nr. 13, 14 betrachtete: $z = f(x, y)$ darzustellen ist, hat Cauchy zuerst gezeigt. Siehe seine zwei Noten in den Comptes Rendus für 18. und 25. Juli 1842. Aber man kann sich auch in der folgenden Weise hiervon überzeugen. — Um Alles, insbesondere die folgenden $t_0, t_1, \ldots$ eindeutig zu haben, denken wir uns $\Phi \equiv t - \Psi(x, y, z, p, q, r, s)$ und Ψ regulär für alle in Frage kommenden x, y, z, p, q, r, s. —

In Φ führen wir statt z die folgende Function z^0 ein:

$$z^0 = z_0 + (x-x_0)p_0 + (y-y_0)q_0$$
$$+ \frac{1}{2}[r_0(x-x_0)^2 + 2s_0(x-x_0)(y-y_0) + t_0(y-y_0)^2],$$

wo

$$z_0 = \varphi(x_0), \quad p_0 = \varphi'(x_0), \quad q_0 = q(x_0), \quad r_0 = \varphi''(x_0), \quad s_0 = q'(x_0),$$
$$\Phi(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, r_0, s_0, t_0) = 0.$$

Hierdurch wird Φ eine in einer endlichen Umgebung von x_0, y_0 reguläre Function von x und y, — offenbar vorausgesetzt, dass x_0 kein Discontinuitätspunkt des Streifens (22) ist. — Also hat man

$$\Phi = [(x-x_0)D_{x_0} + (y-y_0)D_{y_0}]\Phi + \text{etc.}$$

wo das Glied rechts desto kleiner wird, je näher die Variablen x und y an x_0 bez. y_0 rücken. Wir können desshalb um x_0 herum ein circuläres Gebiet der x-Ebene mit dem Radius δ und um y_0 herum ein circuläres Gebiet der y-Ebene mit dem Radius δ' so abgrenzen, dass der absolute Betrag von Φ in diesem ganzen xy-Gebiete kleiner als irgend eine vorgeschriebene Grösse ε*) wird. Zu einem Punkte x_1 im ersten Gebiete nahe an der Grenze desselben construiren wir eine Function $z^{(I)}$:

$$z^{(I)} = z_1 + (x-x_1)p_1 + (y-y_0)q_1$$
$$+ \frac{1}{2}[r_1(x-x_1)^2 + 2s_1(x-x_1)(y-y_0) + t_1(y-y_0)^2],$$

wo

$$z_1 = \varphi(x_1), \quad p_1 = \varphi'(x_1), \quad q_1 = q(x_1), \quad r_1 = \varphi''(x_1), \quad s_1 = q'(x_1),$$
$$\Phi(x_1, y_0, z_1, p_1, q_1, r_1, s_1, t_1) = 0.$$

In der complexen x-Ebene legen wir um x_1 herum einen Kreis mit dem Radius δ, δ immer so klein, dass im x-Gebiete innerhalb des Kreises, vereint mit dem vorigen y-Gebiete vom Radius δ', der absolute Betrag von Φ, wenn $z = z^{(I)}$ gesetzt wird, kleiner als die vorige Grösse ε wird. Wir ziehen hernach eine Gerade, die sowohl in das

*) ε wird höchstens endlich im Vergleich zur grössten der Zahlen δ, δ'.

letztere wie in das erstere x-Gebiet fällt und theilen durch dieselbe die beiden Gebiete so ab, dass vom ersten Gebiete nur das zur einen Seite der Geraden befindliche Stück übrig bleibt, in welchem der Punkt x_0 sich befindet, und auch vom zweiten Gebiete nur der Theil zur anderen Seite derselben Geraden, wo x_1 liegt.

Zu anderen Punkten x_2, x_3, ... im ersten circulären x-Gebiete construiren wir in ähnlicher Weise, wie es eben zu x_1 geschah, Functionen $z^{(II)}$, $z^{(III)}$, ... welche, nach einander statt z in Φ substituirt, für verschiedene circuläre x-Gebiete um x_2, x_3, ... herum, jedes mit dem vorigen y-Gebiete vereint, mod. $\Phi < \varepsilon$ machen. Wir bekommen so eine Function ψ, welche in einem xy-Gebiete gleich z^0, in einem zweiten xy-Gebiete gleich $z^{(I)}$, in einem dritten gleich $z^{(II)}$ etc. wird. Durch eine Gerade, die für die x-Gebiete zweier dieser z-Functionen, etwa $z^{(I)}$ und $z^{(II)}$, gemeinsam ist, haben wir die beiden x-Gebiete getrennt, in denen ψ gleich wird der einen z ($= z^{(I)}$) oder der anderen ($z^{(II)}$).

Wir verfahren auf dieselbe Weise mit neuen Punkten x_i in den x-Gebieten der neuen z-Functionen und fügen dadurch zu den vorigen $z^{(i)}$ neue hinzu, welche für ihre kleinen, circulären xy-Gebiete mod. $\Phi < \varepsilon$ machen. Das y-Gebiet ist eins und dasselbe für alle unsere Functionen. Ihre x-Gebiete schneiden wir so ab, dass von ihnen nur kleine Rauten übrig bleiben, die zwar ohne Zwischenräume an einander haften aber nirgendwo einander überdecken. Von allen unseren (n^2) $z^{(i)}$ wird folglich eine Function ϖ gebildet, welche für ihr ganzes, aus den genannten Rauten zusammengesetztes x-Gebiet, mit dem vorigen kleinen y-Gebiete vom Radius δ' zusammen genommen, den absoluten Betrag von Φ kleiner als die vorher genommene Grösse ε macht. Diese Function wird an jeder Trennungslinie zweier x-Rauten, für welche ϖ gleich $z^{(i)}$ bez. $z^{(k)}$ wird, zweiwerthig und das nämliche gilt für ihre ersten partiellen Derivirten. Aber der Unterschied der zwei, einem und demselben Werthsysteme von x und y entsprechenden Werthe von ϖ bez. ihrer ersten Derivirten wird nie unendlich im Vergleich zu δ. Er ist unabhängig von der Anzahl, n^2, der construirten $z^{(i)}$. Wenn daher δ gegen Null abnimmt, dagegen n ins Unendliche wächst, so dass $n\delta$ endlich bleibt, so wird ϖ eine Function von x und y, welche im betrachteten y-Gebiete rings um y_0 vom Radius δ', vereint mit einem endlichen x-Gebiete, das mit dem von $\varphi(x)$ oder $q(x)$ identificirt werden kann, eindeutig, endlich und monogen wird, und, für z gebraucht, mod. Φ kleiner als die vorgeschriebene Grösse ε macht. Diese Function ist einfach die folgende:

$$\text{(29)} \qquad \varpi = \varphi(x) + q(x).(y-y_0) + \frac{1}{2}\,t(y-y_0)^2,$$

wo mod. $(y-y_0) < \delta'$ und t als Function von x durch die Gleichungen:

$$(30) \quad \Phi = 0,\ z = \varphi(x),\ y = y_0,\ p = \varphi'(x),\ q = q(x),\ r = \varphi''(x),\ s = q'(x)$$

bestimmt ist.

Die Gleichung $z = \varpi$ stellt geometrisch eine sehr schmale Flächenpartie dar, die nur wenig von einer Integralfläche von $\Phi = 0$ abweicht. Wir erhalten durch ein ähnliches Verfahren eine zweite derartige Flächenpartie, welche in gleicher Weise, wie die vorige Flächenpartie an den Streifen (22), an den Streifen

$$z = \varpi(x, y_0'),\quad y = y_0',\quad q_1 = q(x) + t(y_0' - y_0)$$

sich anschliesst. Ihre Gleichung wird:

$$(31) \qquad z = \varpi(x, y_0') + q_1(y - y_0') + \tfrac{1}{2}\, t_1 (y - y_0')^2,$$

wo

$$(32) \qquad \Phi\left(x,\ y_0',\ \varpi,\ \frac{\partial \varpi}{\partial x},\ q_1,\ \frac{\partial^2 \varpi}{\partial x^2},\ q_1'(x),\ t_1\right) = 0,$$

ϖ kurz statt $\omega(x, y_0')$ geschrieben; mod. $(y - y_0') < \delta'$ und auch mod. $(y_0' - y_0) < \delta'$. (Die neue Flächenpartie (31) wird dann mit der ersten längs der Curve:

$$z = \varpi(x, y_0'),\quad y = y_0'$$

zusammenhängen), Die z-Function (31), die ich ϖ' nenne, macht für ihr ganzes xy-Gebiet mod. $\Phi < \varepsilon$. Die beiden Functionen ϖ und ϖ' haben gemeinsames x-Gebiet, d. i. das kleinste der x-Gebiete von $\varphi, q, \varpi(x, y_0'), q_1$ aber verschiedene y-Gebiete. Letztere werden zwei Kreise vom Radius δ' um die Punkte y_0, y_0' herum. Wir schneiden hierauf diese Kreisflächen so ab, dass nur zwei Rauten zurückbleiben, die längs einer Linie an einander haften ohne irgendwo einander zu überdecken. Die Differenz der Werthe von ϖ und ϖ' an einer Stelle (x, y) der Trennungslinie der zwei y-Rauten wird niemals unendlich im Vergleich zu δ'. Durch einen zweiten Punkt y_0'' im circulären y-Gebiete der Function ϖ construiren wir nach denselben Principien eine Function ϖ'', die zu ϖ so wie ϖ' sich verhält und mod. $\Phi < \varepsilon$ macht. Durch einen Punkt y_0''', der im kreisförmigen y-Gebiete von ϖ' genommen worden ist, also mod. $(y_0''' - y_0') < \delta'$, construiren wir in derselben Weise eine Function ϖ''', die so zu ϖ' wie ϖ' zu ω sich verhält und die wiederum mod. $\Phi < \varepsilon$ macht. U. s. f.*). Diese Functionen $\varpi^{(i)}$, deren Anzahl n^2 sei, verhalten sich in Bezug

*) Ich denke mir für das Folgende, dass die Punkte y_0', y_0''' etc. mit den sie umgebenden kleinen y Gebieten durch Translation von y_0 mit dem y-Gebiete von ϖ etwa längs der reellen y-Axe, entstanden sind, und dass nachher eine gegen diese Axe senkrechte Verschiebung aller jetzt erhaltenen $y_0^{(k)}$ mit den sie umgebenden y-Gebieten die Punkte y_0'' etc. mit den sie umgebenden y-Gebieten der Functionen ϖ'', etc. geliefert hat.

auf ihre y-Gebiete so wie sich die vorigen $z^{(i)}$ in Bezug auf ihre x-Gebiete verhielten.

Von den y-Gebieten der $\varpi^{(i)}$ werden, nach dem Vorigen, nur kleine Rauten übrig gelassen, die ohne Lücken eine in zwei Ausdehnungen endliche Partie der y-Ebene einmal, und nur einmal, überdecken. Die Differenz der Werthe zweier Functionen $\varpi^{(i)}$, $\varpi^{(k)}$, oder ihrer Derivirten, an einer Trennungslinie ihrer y-Gebiete wird klein wie δ'. In der That, denken wir uns zwei Reihen von derartigen Functionen (ϖ), welche die obigen zwei ϖ, ϖ' enthalten, und zu y-Gebieten diejenigen zwei Reihen von Rauten haben, welche entstehen, wenn die zwei an einander gehefteten y-Rauten von ϖ und ϖ' etwa senkrecht zur Verbindungslinie der Punkte y_0 und y_0' verschoben werden. Diese zwei ϖ-Reihen werden, wenn die genannte Verschiebung continuirlich vor sich geht, selbst durch einen continuirlichen Process erhalten, und werden auch nur wenig, nämlich von derselben Grössenordnung als $y_0 - y_0'$ von einander verschieden. Von den Functionen $\varpi^{(i)}$ wird also eine Function von x und y gebildet, die, wenn man δ' gegen Null abnehmen und zugleich n ins Unendliche zunehmen lässt, so dass $n\delta'$ endlich bleibt, in zwei endlichen, von einander unabhängigen x- und y-Gebieten regulär wird. Weil jetzt ε mit δ' Null geworden ist, so muss die eben gewonnene Function, wenn sie für z angewandt wird, die Gleichung $\Phi = 0$ befriedigen.

Dass aber die x- und die y-Gebiete dieser Function, die ich mit $f(x, y)$ bezeichne, keineswegs beliebig gross zu nehmen sind, ist leicht ersichtlich. Erstens ist betreffend das x-Gebiet der Function klar, dass es nicht grösser sein kann als das für φ und q gemeinsame Continuitätsgebiet, zweitens, dass auch diejenigen Punkte des Streifens (22), und der folgenden Streifen $z = \varpi^{(i)}$, für welche $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ verschwindet, auszuschliessen sind*). Denn für sie giebt die Gleichung (32) [und die für $z = \varpi'$, $z = \varpi''$, etc. ähnlich wie jene für $z = \varpi$ lautenden Gleichungen] endliche Werthe von $t_1 - t$, etc., auch wenn δ' nach Null abnimmt; was eine Discontinuität, zunächst in $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ einführt.

Betrachten wir hiernach ein Stück von (22), das zwischen zwei zu beiden Seiten des Punktes $(x_0 y_0)$ zunächstliegenden Discontinuitätspunkten des Streifens enthalten ist, und nehmen wir ausserdem an, dass an keiner Stelle dieses Stückes $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ verschwindet. Die zwei Discontinuitätspunkte geben zu ähnlichen Punkten der neuen Streifen $z = \varpi^{(i)}$ Anlass. Von ihnen wird die Begrenzung der Integralfläche

*) Wenn $\Phi = t - \Psi(x, y, z, p, q, r, s)$, Ψ endlich und eindeutig, so haben wir keine solche Punkte.

$z = f(x, y)$ gebildet, falls auf diesem Flächenstücke kein Punkt sich befindet, in dem $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$, auf einen Streifen $z = \varpi^{(i)}$ bezogen, Null wird*). Bemerken wir dann, dass auf der Integralfläche $z = f(x, y)$ im Allgemeinen zwei Schaaren von Charakteristiken verlaufen, — von dem Falle, dass die zwei Schaaren auf eine sich reduciren, wird dann abgesehen (vgl. die vorangehenden Nr. 14, 15), — und dass jede Charakteristik, im Gegensatz zu anderen Streifen, Ort unendlich vieler Reihen von $D_{xy}^{m+m'} z$ ist, $m + m' = 3, 4, 5$, etc.; ferner, dass in einem Discontinuitätspunkte des Streifens (22) die Werthe der dem Streifen zugehörenden $D_{xy}^{m+m'} z$, von einem Zahlenwerthe von $m + m'$ an, mehrdeutig oder unbestimmt sind, so sehen wir ein, *dass die oben angegebene Begrenzung der Integralfläche $z = f(x, y)$ aus Charakteristiken von $\Phi = 0$ bestehen muss.* Hiermit sind zu derselben Zeit die Grenzen für die x- und die y-Gebiete von f gefunden.

17. Die Anwendung der Transformation (19), (20) auf die vorangehenden Constructionen lehrt uns sodann, *dass durch irgend einen Streifen* (21):

$$z' = \varphi(x'), \quad y' = y_0 + \psi(x'), \quad D_{y'} z' = q(x'),$$

der keine Charakteristik von $F = 0$ wird, und für welchen die erste Derivirte der Function ψ keine Wurzel der Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial r'} \overline{\psi'(x')}^2 - \frac{\partial F}{\partial s'} \psi'(x') + \frac{\partial F}{\partial t'} = 0$$

*ist, eine Integralfläche**) dieser Gleichung hindurchgeht, welche durch eine Gleichung $z' = f(x', y')$ darzustellen ist, wo f eine in endlichen Gebieten der complexen x- und y-Ebenen reguläre analytische Function bedeutet. Die so dargestellte Fläche wird von Charakteristiken begrenzt. Hieraus folgen die x- und die y-Gebiete der Function f. In diesen Gebieten lässt sie sich, nach einem bekannten Satze von Cauchy, in eine Taylor'sche Potenzreihe entwickeln. Wir haben natürlich dabei angenommen, dass φ, ψ, q in einem gemeinsamen x-Gebiete regulär sind und auch dass für alle Punkte unseres Flächenstückes*

$$\left(\frac{\partial F}{\partial s'}\right)^2 - 4 \frac{\partial F}{\partial r'} \frac{\partial F}{\partial t'}$$

von Null verschieden ist.

Die angeführte Eigenschaft der Charakteristiken, Grenzen abzugeben für die durch reguläre analytische Functionen $f(x, y)$ auszudrückenden Integralflächen, ist wohl zum ersten Male von Paul du Bois-Reymond in seiner Arbeit: *Beiträge zur Interpretation der partiellen*

---

*) Man beachte die vorangehende Note.

**) Im Allgemeinen, eine Zusammenfassung *endlich* vieler Integralflächen.

Differentialgleichungen mit drei Variablen. Erstes Heft: die Theorie der Charakteristiken, Leipzig 1864, bemerkt worden.

18. Aus der Nr. 15 folgt, dass, wenn wir einen Streifen haben:

$$(33) \qquad z' = \varphi(x'), \quad y' = y_0 + \psi(x'), \; q' = q(x'),$$

welcher den dort entwickelten Gleichungen $U = 0$, $V = 0$ genügt, und dazu eine continuirliche Reihe von zugehörenden r', s', t', die den Gleichungen:

$$(34) \begin{cases} r' + s'\psi'(x') = \frac{d}{dx'}\left(\varphi'(x') - q(x')\psi'(x')\right), \\ s' + t'\psi'(x') = q'(x'), \; F = 0, \; \frac{\partial F}{\partial r'}\overline{\psi'(x')}^2 - \frac{\partial F}{\partial s'}\psi'(x') \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \frac{\partial F}{\partial t'} = 0 \end{cases}$$

genügen, so giebt es einfach unendlich viele continuirliche Reihen der dritten Differentialquotienten von z, welche zusammen mit den obigen x', y', z', $p' = \varphi'(x') - q\psi'(x')$, q', r', s', t' den Gleichungen $D_{x'}F = 0$, $D_{y'}F = 0$ genügen und, — man wende auf die in Nr. 14 entwickelten Figuren die durch die Gleichungen (19) und (20) ausgedrückte Flächentransformation an, — durch eine Riccati'sche Gleichung:

$$\frac{d}{dx'} D_{y'}^3 z' = A(x') + B(x') D_{y'}^3 z' + C(x') \overline{D_{y'}^3 z'}^2,$$

im Verein mit anderen in $D_{y'}^3 z'$ und den übrigen dritten Derivirten von z' linearen Gleichungen, gegeben werden. Vom Werthe $D_{y_0'}^3 z'$ im Elemente $(x_0', y_0', z_0', p_0', q_0', r_0', s_0', t_0')$ unseres Streifens wird diejenige Integralreihe*) der dritten Derivirten von z', in welche $D_{y_0'}^3 z'$ eingeht, eindeutig bestimmt. Die dieser Reihe zugehörenden $D_{x'y'}^{m+m'} z'$ $(m + m' = 3)$ werden gleich $D_{x'y'}^{m+m'} f'$ $(m + m' = 3)$, wo $z' = f'$ eine Fläche durch den Streifen darstellt und die obigen r', s', t' gleich $\frac{\partial^2 f'}{\partial x'^2}$, $\frac{\partial^2 f'}{\partial x' \partial y'}$, $\frac{\partial^2 f'}{\partial y'^2}$ bez. sind.

Dass es unendlich viele Flächen $z' = f'$ giebt, sehen wir leicht. Eine ist ausgedrückt durch die folgende Gleichung zwischen den früher in Nr. 12—14, 16 angewandten Grössen x, y, z, etc.:

$$(35) \qquad z = \varphi(x) + q(y - y_0) + \tfrac{1}{2} t (y - y_0)^2 + \tfrac{1}{6} D_{x y_0}^{0+3} z (y - y_0)^3 \\ \qquad\qquad\qquad + \tfrac{1}{24} D_{x y_0}^{0+4} z (y - y_0)^4.$$

Wir denken uns dann für t und für $D_{x y_0}^{0+3} z$ diejenigen Werthe eingesetzt,

---

*) Mit diesem Ausdrucke, Integralreihe, will ich gesagt haben, sowohl dass durch die Elemente $(x', y', \ldots, D_{y'}^3 z')$ der Reihe die Gleichungen: $F = 0$, $D_{x'}F = 0$, $D_{y'}F = 0$ befriedigt werden, als dass dieselben Elemente einer Fläche zugehören.

die aus den obigen r', s', t', etc. durch die Transformation (19), (20) hervorgehen. Für $D_{xy_0}^{0+4}z$ (x variabel) wollen wir eine beliebige der ∞^1 continuirlichen Integralreihen von $\frac{\partial^4 z}{\partial y^4}$ anwenden, welche mit den obigen, den Flächenelementen des Streifens (27) beigelegten Werthen der zweiten und dritten Derivirten von z zusammengehören (Nr. 14).

Wir sehen also, dass der erste Streifen (33), (34), wenn man für irgend ein Element $(x_0', y_0', z_0', p_0', q_0', r_0', s_0', t_0')$ desselben den Werth von $D_{y_0'}^3 z'$ fixirt, zu einem unendlich benachbarten Streifen von Elementen $(x', y', z', p', q', r', s', t')$ Anlass giebt, welcher mit dem ersten auf derselben Flächenschaar (35), — dabei $D_{xy_0}^{0+4}z$ einen willkürlichen Parameter enthaltend, — gelegen ist, und der, wegen der unendlich vielen möglichen Werthe des letzteren Parameters, von derselben Art wie der erste Streifen wird, so dass auch er einen charakteristischen Streifen von $F = 0$ ausmacht. (Es gilt folglich im Allgemeinen, dass für ihn y nicht constant ist, wie es für den ersten Streifen (33) oder, andererweise geschrieben, (27) der Fall war).

Dieser Satz ist äusserst wichtig, denn ihm zufolge leitet man aus dem zweiten Streifen, gleich wie aus dem ersten, einen neuen charakteristischen Streifen her, der eine continuirliche Reihe von Elementen $(x', y', z', p', q', r', s', t')$ von $F = 0$ bildet, welcher mit dem vorigen zweiten Streifen auf einer Fläche liegt, und der dritte Streifen führt in gleicher Weise zu einem vierten charakteristischen Streifen, der mit ihm einer Fläche zugehört; u. s. f. so lange bis für keinen der Streifen in keinem Punkte

$$\left(\frac{\partial F}{\partial s'}\right)^2 - 4\,\frac{\partial F}{\partial r'}\,\frac{\partial F}{\partial t'}$$

verschwindet.

Wir sehen also, dass, wenn wir irgend einen Streifen (33) *haben, der den Gleichungen* $U = 0$, $V = 0$ *genügt, und daneben eine Curve:*

$$z' = \alpha(x'), \quad y' = \beta(x'),$$

welche im Punkte (x_0', y_0', z_0') *die Fläche*

$$\begin{aligned} z' = z_0' &+ p_0'(x' - x_0') + q_0'(y' - y_0') \\ &+ \frac{1}{2}\left[r_0'(x' - x_0')^2 + 2 s_0'(x' - x_0')(y' - y_0') + t_0'(y' - y_0')^2\right], \end{aligned}$$

$F(x_0', y_0', z_0', p_0', q_0', r_0', s_0', t_0') = 0$, *osculirt, so giebt es eine Integralfläche von* $F = 0$, *welche die Curve und den Streifen beide enthält und die durch eine Gleichung* $z' = f(x', y')$ *auszudrücken ist, wo f in endlichen x- und y-Gebieten von zwei Dimensionen regulär wird. Doch haben wir dann vorausgesetzt, dass nicht nur* φ, ψ, q, *sondern auch* α *und* β *in einem gemeinsamen Gebiete der x-Ebene regulär sind. Die genannte*

Fläche wird von Charakteristiken begrenzt und sie enthält keine Stelle, an der die Gleichung für die Richtungen $\frac{dy'}{dx'}$ der zwei hindurchgehenden Charakteristiken eine Doppelwurzel hat.

Aber wir hätten dies vielleicht directer aus dem Satze der Nr. 14 folgenderweise ableiten können: Wir nehmen für den Streifen (27) die Werthe von $D_{x_0 y_0}^{0+3} z$, $D_{x_0 y_0}^{0+4} z, \ldots$ so, dass die Reihe

$$z_0 + D_{x_0 y_0}^{0+1} z (y - y_0) + \frac{1}{1.2} D_{x_0 y_0}^{0+2} z (y - y_0)^2 + \frac{1}{1.2.3} D_{x_0 y_0}^{0+3} (y - y_0)^3 + \text{etc.}$$

in einem endlichen complexen y-Gebiete gleichmässig convergirt, und bestimmen sodann diejenigen Werthe von $D_{x y_0}^{0+3} z$, $D_{x y_0}^{0+4} z, \ldots$, die in dieselben, dem Streifen (27) zugehörenden Integralreihen der dritten, vierten, ... Derivirten von z eingehen wie die angenommenen $D_{x_0 y_0}^{0+3} z$, $D_{x_0 y_0}^{0+4} z$. Dann müssen, nach Nr. 14, diese $D_{x y_0}^{0+3} z$, etc., — weil die genannten Integralreihen continuirlich sind, — nicht nur für Punkte x, welche dem Punkte x_0 unendlich nahe sind, sondern auch für solche x, die endlich, wenn auch vielleicht nur wenig, von x_0 abstehen, die Reihe

$$z = \varphi(x) + D_{x y_0}^{0+1} z (y - y_0) + \frac{1}{1.2} D_{x y_0}^{0+2} z (y - y_0)^2$$
$$+ \frac{1}{1.2.3} D_{x y_0}^{0+3} z (y - y_0)^3 + \text{etc.},$$

in einem endlichen complexen y-Gebiete gleichmässig convergent machen. Die Fläche, welche die ∞^1 durch diese Reihe dargestellten Curven enthält, wobei jetzt x als (complexer) Parameter der Curvenschaar fungirt, wird also durch eine Gleichung $z = f(x, y)$ gegeben, wo f in endlichen Gebieten der complexen x- und y-Ebenen regulär wird und demnach in eine gleichmässig convergente Taylor'sche Potenzreihe entwickelt werden kann.

19. Beiläufig erwähne ich die folgende Consequenz des Vorangehenden: *Wenn zwei Integralflächen von $F = 0$ einen charakteristischen Streifen gemein haben und dabei in einem Punkte des Streifens eine Berührung von der 3. oder 4. etc. Ordnung mit einander eingehen, — was Alles nach dem Vorangehenden möglich anzunehmen ist, — so haben sie längs dem ganzen Streifen eine Berührung von der 3. bez. 4. etc. Ordnung.*

Dass für partielle Differentialgleichungen von der zweiten Ordnung mit mehr als zwei unabhängigen Variablen ein ähnlicher Satz gilt, habe ich in einer Note S. 45 meiner Abhandlung über Flächen von constanter negativer Krümmung in T. XIX (1883) der Jahresschrift der Universität zu Lund bemerkt. Vgl. auch die folgende Nr. 37.

20. Das Vorangehende gilt auch dann, wenn die Wurzeln der folgenden Gleichung für $\frac{dy'}{dx'}$:

$$(36)\qquad \frac{\partial F}{\partial r'}\,dy'^2 - \frac{\partial F}{\partial s'}\,dy'\,dx' + \frac{\partial F}{\partial t'}\,dx'^2 = 0$$

für alle Elemente $(x', y', z', p', q', r', s', t')$ von $F = 0$ bloss sehr wenig von einander abweichen. Sei in solchem Falle die Curve der Nr. 18: $z' = \alpha(x')$, $y' = \beta(x')$ Leitcurve einer Charakteristik von $F = 0$. Weil immer die in Nr. 18 gefundene Integralfläche von Charakteristiken begrenzt sein soll, so folgt, *dass im Allgemeinen an der Grenze, wo die Wurzeln von* (36) *zusammenfallen*, (so dass für alle endlichen Werthe von $x', y', z', p', q', r', s', t'$, für welche $F = 0$, ausnahmslos die Gleichung:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial s'}\right)^2 - 4\,\frac{\partial F}{\partial r'}\,\frac{\partial F}{\partial t'} = 0$$

statthat), *durch ein endliches Curvenstück*

$$z' = \varphi(x'), \quad y' = \psi(x')^*),$$

für welches

$$\psi'(x') = \frac{\partial F}{\partial s'} : 2\,\frac{\partial F}{\partial r'}$$

ist, keine zu beiden Seiten des Curvenstücks sich erstreckende, durch eine reguläre analytische Function $f(x', y')$ *darzustellende Integralfläche von* $F = 0$ *gelegt werden kann.*

Dass für die Fourier'sche Differentialgleichung: $r = q$ ein derartiger Satz gilt, ist seit langem von Frau Sophie v. Kowalevsky gezeigt worden in § III ihrer Abhandlung: *Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen* in Crelle's Journal Bd. 80. Aus der Form der Gleichung: $z = \psi(x, y)$, durch welche Fourier die Integralfläche dargestellt hat, die durch die Curve: $z = F(x)$, $y = 0$ hindurchgeht, ist leicht erkenntlich, dass das y-Gebiet von ψ aus der Hälfte der y-Ebene, in der der reelle Theil von y positiv ist, besteht. Siehe auch Weierstrass: *Ueber die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Veränderlichen.* Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1885.

§ 3.

Die Differentialgleichungen des § 1 als Beispiele zum Vorangehenden.

21. *Integralfläche von Gleichung* (6) *durch einen gegebenen Streifen des Raumes* $(\lambda\mu b)$. — Die allgemeinste Congruenz von zu einer gegebenen Fläche senkrecht stehenden Kreisen, die in ein und dasselbe

*) Wo also φ oder ψ oder beide zugleich mit endlich gelegenen Discontinuitätspunkten behaftet sind.

cyklische System eingehen, wurde in Nr. 5 durch die partielle Differentialgleichung (6) bestimmt. Diese Differentialgleichung war eine Folge der zwei Gleichungen (4) und (5), die ausdrücken, dass die Kugel, welche durch einen Kreis der Congruenz geht und im Punkte, wo dieser die gegebene Fläche senkrecht schneidet, eine Krümmungscurve der Fläche berührt, einen zweiten, unendlich benachbarten, Congruenzkreis ebenfalls enthält. Aber aus diesem rein geometrischen Charakter einer Congruenz der fraglichen Art folgt sofort, wie ich zeigen werde, dass eine solche Congruenz schon von ∞^1 ihrer Kreise bestimmt ist, falls diese eine continuirliche Reihe bilden und in den Punkten einer Curve, die nirgends von einer Krümmungscurve berührt wird, senkrecht zur gegebenen Fläche stehen. Wenn nämlich auf Γ, — so wollen wir die gegebene Fläche nennen, — eine Reihe von Punkten $a_1, a_2, a_3, \ldots$ gegeben ist, die auf einer continuirlichen, von einer Krümmungscurve nirgendwo berührten, Curve c_0 liegen und die einander zu je zwei unendlich benachbart sind, und ferner Kreise $C, C_1, C_2, \ldots$ sich finden, welche in $a, a_1, a_2, \ldots$ senkrecht zu Γ stehen und continuirlich auf einander folgen, so können wir zwei Kugeln durch C legen, welche die beiden in a sich schneidenden Krümmungscurven auf Γ berühren, und ebenso durch C_1 zwei Kugeln, welche die Krümmungscurven in a_1 berühren, und bekommen dann durch die Schnitte dieser Kugeln mit einander zwei zu C unendlich nahe liegende Kreise C', C'', die in a' bez. a'' auf Γ senkrecht stehen*). Durch die zwei Kugeln durch C_1 und die zwei durch C_2, welche die Krümmungscurven durch a_2 berühren, bekommen wir zwei neue zu C_1 unendlich benachbarte Kreise C_1', C_1'', welche in a_1' bez. a_1'' senkrecht zu Γ sind; u. s. f. Alle diese Kreise $C', C_1', C_2', \ldots, C'', C_1'', C_2'', \ldots$ gehören demselben cyklischen Systeme zu. Sie vertheilen sich in zwei Reihen, die auf je einer Seite der gegebenen Reihe $C, C_1, C_2, \ldots$ ihr unendlich nahe kommen. Wir können auf jeder dieser Reihen denselben Process zur Bildung von neuen Kreisreihen desselben Systems anwenden und die zwei neu erhaltenen Reihen wieder auf dieselbe Weise behandeln; u. s. f. Hierdurch bekommen wir Kreise, die sämmtlich einem und demselben cyklischen Systeme zugehören und deren Fusspunkte auf Γ: a, a', etc., denjenigen vierseitigen Theil dieser Fläche ausfüllen, der ausgeschnitten wird von den Krümmungscurven, die durch die Endpunkte der Curve c_0 gehen. *Unsere Construction führt uns niemals über diese Krümmungscurven hinaus.*

22. Die vollständige Uebereinstimmung des jetzt Entwickelten mit dem Satze der Nr. 17 leuchtet aus dem jetzt Folgenden sogleich

*) Wir erinnern daran, dass unsere zu Γ senkrechten Kugeln, da sie Krümmungscurven auf Γ berühren, gegen die Fläche Γ in je zwei unendlich benachbarten Punkten senkrecht stehen.

ein. — Dass man eine Kreisreihe gegeben hat, will sagen, dass man weiss, wie für eine gegebene Curve auf Γ: $\lambda = f(\mu)$, die Kreisparameter b und b' von μ abhängen, etwa: $b = \varphi(\mu)$, $b' = \psi(\mu)$. Aber aus der Gleichung:

$$\frac{\partial b'}{\partial \mu} + \frac{\partial b'}{\partial \lambda} f'(\mu) = \psi'(\mu),$$

mit den Gleichungen (4) und (5) und der Gleichung:

$$\frac{\partial b}{\partial \mu} + \frac{\partial b}{\partial \lambda} f'(\mu) = \varphi'(\mu)$$

vereint, folgen*) bestimmte Werthe von $\frac{\partial b}{\partial \lambda}$ und $\frac{\partial b}{\partial \mu}$, welche einen Streifen im Raume $(\lambda \mu b)$ geben, der an die Curve: $b = \varphi(\mu)$, $\lambda = f(\mu)$ sich anschliesst. Nach Nr. 17 ist nun die Integralfläche der Gleichung (6) durch die Bedingung, einen gegebenen Streifen zu enthalten, vollständig bestimmt, wenn der Streifen keine Charakteristik ist. Die Projectionen auf die $\lambda\mu$-Ebene der Charakteristiken von (6) sind aber die Krümmungscurven von Γ: $\lambda = C$, $\mu = C'$. Und nach der nämlichen Nr. 17 soll die genannte Integralfläche von Charakteristiken begrenzt sein. Umgekehrt: jede Integralfläche $b = F(\lambda, \mu)$ giebt nach Nr. 5 zu einer Gleichung $b' = F(\lambda, \mu, K)$, wo K eine arbiträre Constante, Anlass, so dass aus dem Werthe von b' in einem Punkte (λ, μ) auf Γ die Constante K und damit die den anderen Punkten (λ, μ) entsprechenden Werthe von b' folgen. Die Nr. 17 führt uns also zum obigen Satze im Falle, dass die Curve der Punkte $a, a_1, a_2, \ldots$ und die dazu gehörenden b und b' durch reguläre analytische Functionen von μ (oder von λ) sich ausdrücken.

23. *Integralfläche durch zwei Curven, von denen wenigstens die eine Leitcurve einer Charakteristik von* (6) *ist.* — Wenn die Curve der Punkte $a, a_1, a_2, \ldots$ eine Krümmungscurve von Γ ist, so nehmen entweder die Kreise $C, C_1, C_2, \ldots$ eine singuläre Stellung in einem besonderen cyklischen Systeme ein, oder sie gehören unendlich vielen cyklischen Systemen zu. Damit Letzteres eintreffe, müssen je zwei unendlich benachbarte dieser Kreise auf einer Kugel liegen. *Zwei derartige* Kreisreihen, mit ihren Fusspunkten auf zwei in a sich schneidenden Krümmungscurven von Γ und mit dem Kreise durch a gemeinsam, liefern ein ganz bestimmtes cyklisches System. Zwei Reihen von continuirlich aufeinander folgenden Kugeln, die in den Punkten der zwei Krümmungscurven durch a senkrecht gegen Γ, aber sonst beliebig, angenommen sind, liefern aus demselben Grunde, im Verein mit einem Kreise C, der, auf der Kugel durch a liegend, in diesem Punkte senk-

*) Ausser wenn Γ developpabel ist, ein Fall, den ich später, in Nr. 25, behandeln werde.

recht zu Γ steht, ein cyklisches System. Wir bekommen nämlich erstens durch die Schnitte zwischen den zwei Kugeln durch C, welche die Krümmungscurven durch a berühren, und denjenigen von den gegebenen Kugeln, die in den zu a unendlich benachbarten Punkten a_1 und b_1 dieser Krümmungscurven die Flächen Γ senkrecht schneiden, zwei Kreise, C_1 und D_1, welche in a_1 bez. b_1 senkrecht zu Γ sind. Durch C_1 legen wir zwei Kugeln, welche die Krümmungscurven durch a_1 berühren. Von diesen wird die eine aus einer der erst gegebenen Kugeln einen Kreis C_2 ausschneiden, der in a_2, einem zu a_1 unendlich benachbarten Punkte der durch a und a_1 gehenden Krümmungscurve, senkrecht zu Γ ist. Durch D_1 legen wir auch zwei Kugeln, welche die Krümmungscurven durch b_1 berühren. Die eine von ihnen giebt uns einen Kreis D_2, der im Punkte b_2 der durch a und b_1 gehenden Krümmungscurve senkrecht zu Γ ist. Die zweite Kugel schneidet die eine der durch C_1 gezogenen Kugeln in einem Kreise E, der im Schnittpunkte e zweier Krümmungscurven durch a_1 und b_1 zur Fläche Γ senkrecht steht. Zwei Kugeln durch E und C_2, zwei Krümmungscurven auf Γ berührend, liefern einen Kreis E_1, der in e_1 senkrecht gegen Γ ist. Ebenso erhalten wir mittelst zweier Kugeln durch E und D_2 einen neuen Kreis, F, der im Punkte f die Fläche Γ senkrecht schneidet. Alle diese Kreise gehören einem und demselben cyklischen Systeme zu. Zwei Kugeln durch E_1 und F bestimmen in ähnlicher Weise einen neuen Kreis desselben Systems. Sei e_2 der Punkt, in dem er die Fläche Γ senkrecht schneidet. Die Punkte a_2, e_1, e_2 der Krümmungscurve durch a_2 geben im Verein mit neuen Punkten der ersten Krümmungscurve durch a und a_1, diese über a_2 hinaus verlängert, neue Kreise desselben Systems; u. s. f. Nur ein vierseitiges, von Krümmungscurven begrenztes Flächenstück von Γ wird von den Fusspunkten unserer Kreise bedeckt.

Berücksichtigen wir was von der gegenseitigen Abhängigkeit von zusammengehörenden Lösungen b und b' der Gleichungen (4) und (5) vorhin gesagt wurde, so erkennen wir aus dem jetzt Vorgetragenen ohne Weiteres, dass, wenn für zwei einander schneidende Krümmungscurven auf Γ beliebig zwei continuirliche Werthreihen von b gegeben sind, man für alle Punkte (λ, μ) eines Flächenstücks, — welches von den vier Krümmungscurven, die durch die Endpunkte der zwei ersten Krümmungscurven senkrecht zu ihnen gehen, umschlossen wird, — eindeutig bestimmte Werthe von b hat, welche continuirlich an jene Werthreihen sich anschliessen.

Statt der einen Krümmungscurve können wir irgend eine andere continuirliche Curve setzen, sogar eine, die von keiner Krümmungscurve berührt wird, und bekommen dann, durch dieselbe Construction, aus irgend zwei Werthreihen von b, die einer Krümmungscurve und einer zweiten sie treffenden Curve zugeordnet sind, wenn diese Werthreihen continuirlich sich verhalten, eine bestimmte Lösung $b = F(\lambda, \mu)$ der Gleichung (6), die jene Werthreihen von b enthält und für ein ganzes vierseitiges Gebiet von Γ gilt, welches von Krümmungscurven begrenzt ist.

Dass, wenn die gegebenen Curven und die gegebenen Werthreihen von b durch analytische Functionen definirt sind, die hier angemerkten Lösungen von (6) durch analytische Functionen sich ausdrücken, geht direct aus dem Satze der Nr. 18 hervor. — Die obige Construction giebt selbstverständlich bloss die reellen Theile der betreffenden Integralfläche, und dies auch nur annäherungsweise, — nebst ihren Grenzen, die aus reellen Theilen von Charakteristiken von (6), reellen Theilen von Krümmungscurven von Γ entsprechend, bestehen. —

24. *Von der partiellen Differentialgleichung* 2. *Ordnung der Nr.* 6. — Es giebt Kreise, die ein gegebenes Flächenelement (x, y, z, p, q) berühren, auf der Fläche Γ senkrecht stehen und auf Kugeln liegen, welche sowohl im Fusspunkt je dieser Kreise eine Krümmungscurve von Γ berühren als zu dem Flächenelement (x, y, z, p, q) senkrecht stehen und zwar giebt es nur endlich viele solche Kreise. Hieraus schliessen wir, dass sich, wenn ein Streifen von Elementen (x, y, z, p, q) gegeben ist, eine Reihe von ∞^1 zu Γ senkrechten Kreisen findet, welche die Elemente des Streifens berühren und auf die in Nr. 21 angegebene Weise die*) Kreise eines solchen cyklischen Systems liefern, in dem es ∞^1 zu den Kreisen jener Reihe unendlich benachbarte Kreise giebt, welche mit je einem jener Kreise auf je einer Kugel liegen, die den gegebenen Streifen senkrecht schneidet, — und im Allgemeinen finden wir nur endlich viele solche Reihen von die Elemente des Streifens berührenden Kreisen. Die Brennflächen der Kreise der entsprechenden cyklischen Systeme werden die einzigen Flächen von der in Nr. 6 besprochenen Art, welche den gegebenen Streifen enthalten. Die offenbar immer zulässige Umkehrung des Satzes der Nr. 17 führt folglich zum Satze der genannten Nr. 6 zurück: *Die Brennflächen derjenigen Congruenzen von zu Γ senkrechten Kreisen, die in cyklische Systeme eingehen, werden als Integralflächen einer partiellen Differentialgleichung* 2. *Ordnung*

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

erhalten.

Es ist leicht, die Charakteristiken dieser Gleichung anzugeben. Da sie Berührungsstreifen zwischen unendlich vielen Integralflächen sein sollen, so müssen sie, nach dem Obigen, Reihen von je

*) Zu Γ senkrechten.

∞^1 Kreisen bestimmen, die gegen Γ in den Punkten einer Krümmungscurve senkrecht stehen. Diejenigen Streifen einer Integralfläche von $F=0$, welche an diejenigen in Nr. 6 erwähnten Curven sich anschliessen, die Enveloppen von Kreisreihen der letztgenannten Art sind, machen daher eine Schaar von Charakteristiken aus. Sie entsprechen der einen Schaar von Krümmungscurven auf Γ. Eine zweite Schaar von Charakteristiken wird von Streifen gebildet, welche die Integralfläche mit ∞^1 Flächen gemein hat, die von anderen Kreisreihen der obigen Art, der zweiten Schaar von Krümmungscurven auf Γ entsprechend, erzeugt sind. Die Integralfläche wird dann, gleich wie die Fläche $z'=\varphi(x', y')$ am Ende der Nr. 6', als Umhüllungsgebilde von ∞^1 Enveloppen von Kugeln (8) aufgefasst. Von den auf zwei zusammengehörenden Flächen: $z=f(x,y)$, $z'=\varphi(x', y')$ gelegenen zwei Charakteristikenschaaren entsprechen im Sinne der Nr. 6 den Charakteristiken von der einen Gattung auf der einen Fläche die von der anderen Gattung auf der anderen Fläche.

25. *Von der partiellen Differentialgleichung der Nr.* 8. — Bemerken wir, dass im Allgemeinen nur endlich viele Reihen von Kreisen eine gegebene Fläche Γ und zugleich einen beliebig genommenen Streifen von Flächenelementen (x', y', z', p', q') senkrecht schneiden, und dass, nach Nr. 21, jede dieser Kreisreihen, den in Nr. 23 angemerkten Fall ausgenommen, einem einzigen cyklischen Systeme zugehört, so sehen wir ohne Mühe, dass von allen Flächen, die gleichzeitig mit Γ ∞^2 Kreise irgend eines cyklischen Systems orthogonal schneiden, nur endlich viele durch den Streifen hindurchgehen. Hieraus schliessen wir, dass die fraglichen Flächen durch eine partielle Differentialgleichung 2. Ordnung gegeben werden. Am Ende der Nr. 8 ist diese Gleichung aufgestellt worden. Ferner sehen wir aus Nr. 23, verglichen mit dem Anfange der Nr. 8, dass die Krümmungscurven der Integralflächen die Charakteristiken jener Gleichung liefern. Für die Charakteristiken gilt folglich, weil sie sich an Krümmungscurven anschliessen, dass:

$$dp'\,[p'q'\,dx' + (1+q'^2)\,dy'] - dq'\,[(1+p'^2)\,dx' + p'q'\,dy'] = 0,$$
$$dz' = p'\,dx' + q'\,dy'.$$

Ueberdiess muss, wenn die in Frage stehende Gleichung unter der Form in Nr. 8 geschrieben wird:

$$dy' = f(x', y', z', p', q')\,dx'$$

sein. Man bekommt also:

$$(37)\qquad \begin{cases} p' = F\left(x', y', z', \dfrac{dx'}{dz'}, \dfrac{dy'}{dz'}\right), \\ q' = F_1\left(x', y', z', \dfrac{dx'}{dz'}, \dfrac{dy'}{dz'}\right), \end{cases}$$

(38) $$\Phi\left(x', y', z', \frac{dx'}{dz'}, \frac{dy'}{dz'}, \frac{d^2x'}{dz'^2}, \frac{d^2y'}{dz'^2}\right) = 0.$$

Diese drei Gleichungen spielen hier dieselbe Rolle wie der Inbegriff der drei Gleichungen der Nr. 15: $p' = \varphi'(x') - q'\psi'(x')$, $U = 0$, $V = 0$. Insbesondere werden durch die Gleichung (38) diejenigen Curven dargestellt, die als Leitcurven von Charakteristiken dienen können. Auf jeder beliebigen Fläche findet man ∞^2 Curven dieser Art, unter denen von einem beliebigen Punkte der Fläche ∞^1 ausgehen.

Durch irgend eine Curve, die kein Integral von (38) ist, kann auch ein Streifen gelegt werden, dessen Flächenelemente die Gleichungen (37) erfüllen und welcher somit von ∞^1 Charakteristiken, besonders von ihren Leitcurven, berührt wird. Auch durch diesen Streifen geht eine Integralfläche hindurch. Aber für sie wird die Leitcurve des Streifens eine Cuspidalcurve.

§ 4.

Gleichungen (17) specieller Art.

26. Eine Gleichung 2. O. von der Form:

(39) $$s = ap + bq,$$

wo a, b nur von x und y abhängen, besitzt ein erstes Integral, ausgedrückt durch eine Gleichung:

(40) $$f(x, y, z, p, q) = 0,$$

falls sämmtliche Werthe von r, s, t, die irgend einem Flächenelemente von (40) durch die folgenden zwei Gleichungen:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} + r\frac{\partial f}{\partial p} + s\frac{\partial f}{\partial q} = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z} + s\frac{\partial f}{\partial p} + t\frac{\partial f}{\partial q} = 0$$

zugeordnet werden, eben der Gleichung (39) genügen. Die Substitution von s aus (39) lehrt also, dass, da es ∞^1 Werthsysteme von r, s, t von der genannten Art geben soll, man entweder

$$\frac{\partial f}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z} + (ap + bq)\frac{\partial f}{\partial q} = 0,$$

oder

$$\frac{\partial f}{\partial q} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z} + (ap + bq)\frac{\partial f}{\partial p} = 0$$

haben muss. Der zweite Fall bezieht sich in derselben Weise auf die Y-Axe wie der erste auf die X-Axe. Im ersten Falle wird das erste Integral von der Form:

$$q = \Phi(x, y, z),$$

wo unabhängig von p:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + p\frac{\partial \Phi}{\partial z} = ap + b\Phi,$$

also

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = b\Phi, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = a, \tag{41}$$

was unmöglich wird, wenn nicht

$$\frac{\partial a}{\partial x} = ab,$$

oder, wie wir auch schreiben können:

$$a = C(y)\, e^{\int b\, dx}. \tag{42}$$ —

Dies wenden wir jetzt auf die Gleichung (17) an. Sie hat die Form (39). Man hat nur λ, μ, τ statt bez. x, y, z und

$$a = \frac{1}{\mathsf{H}} \frac{\partial \mathsf{H}}{\partial \mu}, \quad b = \frac{1}{\mathsf{H}_1} \frac{\partial \mathsf{H}_1}{\partial \lambda}$$

zu setzen. Die Existenz eines ersten Integrals von (17) wird daher von der Relation (42), d. i. hier der Relation:

$$\frac{1}{\mathsf{H}} \frac{\partial \mathsf{H}}{\partial \mu} = C(\mu)\, \mathsf{H}_1 \tag{43}$$

bedingt. Die geometrische Bedeutung dieser Relation erkennen wir leicht. Wir hatten (Nr. 9) für das Quadrat des Linienelements der Fläche Γ die Formel:

$$ds^2 = \mathsf{H}^2 d\lambda^2 + \mathsf{H}_1{}^2 d\mu^2;$$

für die geodätischen Krümmungsradien ϱ_λ, ϱ_μ der Curven $\mu = \mu^0$ bez. $\lambda = \lambda^0$ im Punkte $(\lambda^0 \mu^0)$ haben wir dann die Ausdrücke*):

$$\frac{1}{\varrho_\lambda} = -\frac{1}{\mathsf{H}\mathsf{H}_1} \frac{\partial \mathsf{H}}{\partial \mu}, \quad \frac{1}{\varrho_\mu} = \frac{1}{\mathsf{H}\mathsf{H}_1} \frac{\partial \mathsf{H}_1}{\partial \lambda}.$$

Die Gleichung (43) besagt folglich, dass, *wenn die Gleichung* (17) *ein erstes Integral besitzt, die geodätische Krümmung jeder Krümmungscurve von Γ von der einen Schaar* ($\mu = C$) *constant wird, also***) *diese Fläche Γ von einfach unendlich vielen Kugeln, nach den Krümmungscurven $\mu = C$, orthogonal geschnitten wird.*

Wenn dies geschieht, so schliessen wir aus (41), dass

$$\Phi = \frac{\tau}{\mathsf{H}} \frac{\partial \mathsf{H}}{\partial \mu} + K(\mu)\, \mathsf{H}_1,$$

wo $K(\mu)$ eine arbiträre Function von μ bedeutet, und dass also die folgende partielle Differentialgleichung:

$$\frac{\partial \tau}{\partial \mu} = \frac{\tau}{\mathsf{H}} \frac{\partial \mathsf{H}}{\partial \mu} + K(\mu)\, \mathsf{H}_1 \tag{44}$$

*) Siehe z. B. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces.* Deuxième partie p. 392.

**) Darboux, *Leçons* etc. Troisième partie p. 121.

unabhängig von K ein erstes Integral von (17) darstellt. Hieraus leiten wir ferner eine allgemeine Gleichungsform der Integralflächen von (17) her. Die Integration von (44) giebt uns nämlich

$$(45) \qquad \tau = \mathsf{H}\left(\int \frac{\mathsf{H}_1}{\mathsf{H}} K(\mu)\, d\mu + C_1(\lambda)\right),$$

wenn mit C_1 eine neue arbiträre Functionsform bezeichnet wird. Man kann aber K und C_1 so bestimmen, dass der Gleichung (45) durch die Substitutionen:

$$(46) \qquad \tau = \varphi(\mu), \quad \lambda = \psi(\mu), \quad \frac{\partial \tau}{\partial \mu} = q(\mu)$$

genügt wird, und daraus folgt, dass diejenige Integralfläche von (17), die durch einen beliebig gegebenen Streifen (46) hindurchgeht, eben durch die Gleichung (45) ausgedrückt wird. *Diese Gleichung stellt also, im Falle* (43), *alle Lösungen von* (17) *vollständig dar**).

26′. Damit die Gleichung (17) zwei distincte, den verschiedenen Schaaren von Krümmungscurven von Γ entsprechende, erste Integrale besitze, muss nothwendig diese Fläche Γ von *zwei* Schaaren von Kugeln orthogonal geschnitten werden, und sie muss daher**) eine Rotationsfläche oder ein Kegel oder ein Cylinder sein oder aus solchen Flächen durch circuläre Inversion erhalten werden können.

27. Nach dem in Nr. 9 Bemerkten giebt uns also die Gleichung (45), den Fall (43) vorausgesetzt, alle Congruenzen von zu Γ orthogonalen Kreisen, die in cyklische Systeme eingehen. Dem Falle: $K(\mu)$ constant gleich Null, entsprechen diejenigen Congruenzen dieser Art, deren Kreise auf den ∞^1 Kugeln liegen, welche Γ senkrecht schneiden. Erstens sehen wir nämlich, dass, wenn wir auf einer dieser Kugeln, S, eine Schaar von ∞^1 zu Γ senkrechten Kreisen beliebig aufzeichnen und durch diese Kreise orthogonal zu S neue Kugeln ziehen, diese neuen Kugeln, durch ihre Schnitte mit der zu S unendlich benachbarten von den ∞^1 gegebenen zu Γ orthogonalen Kugeln, neue Kreise bestimmen, welche mit denen auf S in dasselbe cyklische System eingehen. (Siehe Nr. 1). Die erste Kreisschaar, diejenige auf S, hat ∞^1 Orthogonalcurven. Durch jede geht eine bestimmte Fläche, welche die ∞^1 zu Γ orthogonalen Kugeln senkrecht schneidet. Die ∞^1 Flächen dieser Art, die jene ∞^1 Orthogonalcurven enthalten, werden ebenfalls zu den eben bestimmten neuen Kreisen orthogonal. Hieraus folgt, dass irgend zwei Flächen, die sämmtliche ∞^1 Kugeln

---

*) Wenn Γ developpabel ist, wird sie eine specielle Fläche der obigen Art; sie wird nämlich dann von ∞^1 Ebenen, d. i. Kugeln mit unendlich grossen Radien, senkrecht geschnitten.

**) Nach einem Satze von O. Bonnet. Siehe Darboux, *Leçons* etc. Troisième partie p. 122.

senkrecht schneiden, zu zweifach unendlich vielen Kreisen, die auf den Kugeln verlaufen und einem und demselben cyklischen Systeme angehören, senkrecht stehen. Diese Flächen werden Integrale derjenigen linearen partiellen Differentialgleichung der ersten Ordnung, welche die Orthogonalcurven der Kugeln zu Integralen einer Dimension besitzen. Wir bemerken dann zweitens, dass diejenigen unter diesen Flächen, die unendlich nahe zu Γ liegen und deren jede durch eine Gleichung: $\tau = \varepsilon f(\lambda, \mu)$, ε unendlich klein, auszudrücken ist, die Gesammtheit der Integrale einer Gleichung:

$$F\left(\tau, \lambda, \mu, \frac{\partial \tau}{\partial \lambda}, \frac{\partial \tau}{\partial \mu}\right) = 0$$

bilden. Die zugehörenden τ müssen die Gleichung (17) erfüllen. Diese bekommt folglich die Gleichung $F = 0$ zum Integrale. Also ist diese Gleichung von der Form (44). Sie soll indessen Γ, welche durch die Gleichung $\tau = 0$ dargestellt wird, zur Integralfläche haben. Aber nur eine der Gleichungen (44) hat $\tau = 0$ zum Integrale, nämlich diejenige Gleichung, in der $K = 0$ ist. Die oben erwähnte Gleichung $F = 0$ ist folglich diese:

$$\frac{\partial \tau}{\partial \mu} = \frac{\tau}{\mathsf{H}} \frac{\partial \mathsf{H}}{\partial \mu}.$$

Ihre Lösung

(47) $$\tau = \mathsf{H} C_1(\lambda)$$

bestimmt also die zu Γ unendlich nahen Flächen, die senkrecht sind zu Kreisen, welche in cyklische Systeme eingehen, gegen Γ senkrecht stehen und auf den ∞^1 gegen Γ senkrechten Kugeln verlaufen.

28. Hieraus können wir ferner, ohne Integrationen, sämmtliche Orthogonalcurven unserer Kugeln ableiten. Doch ist dann vorausgesetzt, dass Γ mit ihren Krümmungscurven bekannt ist. Die Kreise nämlich, die auf Γ in den Punkten einer zu den Kugeln senkrechten Krümmungscurve ($\lambda = C$) senkrecht stehen und auf je einer jener Kugeln liegen und zu irgend einer zweiten Krümmungscurve auf Γ von derselben Gattung ($\lambda = C'$) hingehen, stehen zu noch ∞^1 Orthogonalcurven der Kugeln orthogonal. Nach Nr. 11 werden aber durch eine Riccati'sche Gleichung (18) alle Orthogonalcurven unserer Kreise gegeben. Drei von diesen Orthogonalcurven kennen wir von vorneherein, nämlich die zwei betrachteten Krümmungscurven ($\lambda = C$, $\lambda = C'$) auf Γ und eine Curve, die der ersten Krümmungscurve unendlich nahe liegt und für welche, nach Gleichung (47), $\tau = \varepsilon \mathsf{H}$, unter ε eine unendlich kleine Constante bezeichnet. Also kennen wir schon drei particuläre Lösungen unserer Riccati'schen Gleichung und wissen, dass die übrigen immer in linearer Weise aus den drei sich zusammensetzen. Also, u. s. w., wie oben gesagt wurde.

Das Gleiche folgt übrigens auch aus der Abhandlung von O. Bonnet: *Mémoire sur les surfaces dont les lignes de courbure sont planes ou sphériques.* Journal de l'Ecole polytechnique T. 20, 1853. —

Der Fall (43) ist nicht der einzige, in dem die allgemeine Lösung von (17) eine Vereinfachung zulässt. Diese Gleichung kann nämlich wie eine der jetzt zu beschreibenden sich verhalten.

§ 5.

Eine besondere Gattung von partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung*).

29. Eine partielle Differentialgleichung der 2. O. kann bisweilen eine Schaar von ∞^∞ Integralflächen besitzen, die auch einer anderen partiellen Differentialgleichung genügen und von Streifen, die für beide Gleichungen gemeinsam Charakteristiken werden, erzeugt sind. Zwei Gleichungen nämlich:

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0, \qquad \varphi\left(x, y, z, p, q, \ldots D_{xy}^{m+m'} z\right) = 0,$$

$m + m' = 2, 3, \ldots n$, ordnen jedem gemeinsamen Elemente $\left(x, y, z, p, q, \ldots D_y^n z\right)$**) einen gemeinsamen charakteristischen Streifen zu, falls die $n + 2$ Gleichungen:

$$(48) \qquad \frac{d^{n-1} F}{dx^{n-1}} = 0, \quad \frac{d^{n-1} F}{dx^{n-2} dy} = 0, \quad \ldots \quad \frac{d^{n-1} F}{dy^{n-1}} = 0,$$
$$\frac{d\varphi}{dx} = 0, \quad \frac{d\varphi}{dy} = 0$$

auf blos $n + 1$ von einander unabhängige Gleichungen sich reduciren. Denn wenn man zur Abkürzung schreibt a_1, a_2, a_3 für bez. $\frac{\partial F}{\partial r}$, $\frac{\partial F}{\partial s}$, $\frac{\partial F}{\partial t}$ und $b_1, b_2, \ldots b_{n+1}$ für bez.

---

*) Auf den allgemeinen Charakter dieser Differentialgleichungen ist zuerst von Darboux in den Comptes rendus etc. T. LXX aufmerksam gemacht worden. Die von mir jetzt anzuführenden Ueberlegungen sind zum grössten Theile meinen früheren Abhandlungen in Bd. XIII und XV der Mathematischen Annalen entlehnt worden.

**) Wir sagen, das Element $(x, y, z, p, q, \ldots D_y^n z)$ gehöre der Gleichung $F = 0$ zu, falls durch jene Werthe von $x, y, \ldots D_y^n z$ sämmtliche Gleichungen:

$$F = 0, \quad \frac{d^m F}{dx^m} = 0, \quad \frac{d^m F}{dx^{m-1} dy} = 0, \cdots \frac{d^m F}{dy^m} = 0,$$

$m = 1, 2, \ldots n - 2$, erfüllt werden. Bei diesen Differentiationen sind $z, p, q, \ldots D_{xy}^{m+m'} z$ so als (unbekannte) Functionen von x, y anzusehen, dass

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = r,$$

u. s. w.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial D_x^n z}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial D_{xy}^{(n-1)+1} z}, \quad \ldots \frac{\partial \varphi}{\partial D_y^n z}$$

und endlich $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_{n+2}$ für bez. $D_x^{n+1} z, D_{xy}^{n+1} z, \ldots D_y^{n+1} z$, so kann man die vorangehende Bedingung auch so formuliren: Grössen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n, \mu_1, \mu_2$ sollen sich so bestimmen lassen, dass unabhängig von den Werthen der $n+1^{\text{sten}}$ Derivirten von z die folgende Relation Statt hat:

$$(49) \quad \lambda_1 \frac{d^{n-1} F}{dx^{n-1}} + \lambda_2 \frac{d^{n-1} F}{dx^{n-2} dy} + \cdots + \mu_1 \frac{d\varphi}{dx} + \mu_2 \frac{d\varphi}{dy} = 0.$$

Es ist:

$$\frac{d^{n-1} F}{dx^{n-1}} = a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2 + a_3 \varepsilon_3 + A_1,$$

$$\frac{d^{n-1} F}{dx^{n-2} dy} = a_1 \varepsilon_2 + a_2 \varepsilon_3 + a_3 \varepsilon_4 + A_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = b_1 \varepsilon_1 + b_2 \varepsilon_2 + \cdots + b_{n+1} \varepsilon_{n+1} + B_1,$$

$$\frac{d\varphi}{dy} = b_1 \varepsilon_2 + b_2 \varepsilon_3 + \cdots + b_{n+1} \varepsilon_{n+2} + B_2,$$

($A_1, A_2, \ldots B_1, B_2$ unabhängig von $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_{n+2}$). Daher muss man haben, sowohl unabhängig von u:

$$(50) \quad \begin{aligned} &(\lambda_1 + \lambda_2 u + \cdots + \lambda_n u^{n-1})(a_1 + a_2 u + a_3 u^2) \\ &+ (\mu_1 + \mu_2 u)(b_1 + b_2 u + \cdots + b_{n+1} u^n) = 0, \end{aligned}$$

als auch:

$$(51) \quad \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \cdots + \mu_1 B_1 + \mu_2 B_2 = 0.$$

Nach der Gleichung (50) müssen die folgenden zwei Gleichungen in u:

$$(52) \quad a_1 + a_2 u + a_3 u^2 = 0, \quad b_1 + b_2 u + \cdots + b_{n+1} u^n = 0$$

eine Wurzel gemeinsam besitzen. Die erste dieser Gleichungen bestimmt aber die Richtungen der vom Elemente (x, y, z, p, q, r, s, t) ausgehenden Charakteristiken von $F = 0$; die zweite hat eine ähnliche Bedeutung für die Gleichung $\varphi = 0$. Curven nämlich, an welche Flächenstreifen sich anschliessen, die, aus je ∞^1 Flächencalotten $\left(x, y, z, p, q, \ldots D_y^n z\right)$ bestehend, für unendlich viele Integralflächen von $\varphi = 0$ gemeinsam sind, werden, was ihre Richtung von einem gegebenen Elemente $\left(x, y, z, p, q, \ldots D_y^n z\right)$ aus angeht, durch die Gleichungen:

$$dz = p\,dx + q\,dy, \quad dx = -u\,dy,$$

u eine Wurzel von $b_1 + b_2 u + \cdots + b_{n+1} u^n = 0$, bestimmt. Solche Flächenstreifen haben wir als Charakteristiken von $\varphi = 0$ zu bezeichnen. Die Gleichung (51) sagt uns hernach, dass es endliche Werthe von $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_{n+2}$ giebt, welche die Gleichungen (48) erfüllen, und dass es also, in Folge der Gleichung (49), zu jedem für $F=0$, $\varphi=0$ gemeinsamen Elemente $\left(x, y, z, p, q, r, \ldots D_y^n z\right)$ nicht weniger als ∞^1 derartige Werthsysteme (ε_i) giebt, welche sämmtlich ein und dasselbe Element

$$\left(x+dx,\quad y-\frac{1}{u}\,dx,\ \cdots\ D_y^n z+\left(\varepsilon_{n+1}-\frac{\varepsilon_{n+2}}{u}\right)dx\right)$$

einer vom vorigen Elemente ausgehenden, für beide Gleichungen $F=0$, $\varphi=0$ gemeinsamen Charakteristik bestimmen. Folglich erhalten wir jetzt die für $F=0$, $\varphi=0$ gemeinsamen Elemente $\left(x, y, z, p, q, r, \ldots D_y^n z\right)$ zu für diese beiden Gleichungen gemeinsamen Charakteristiken geordnet*). Man gewinnt diese Charakteristiken aus den Gleichungen:

$$dy=f(x, y, z, p, q, r, s, t)\,dx^{**}),$$

$$dz=(p+qf)\,dx,\quad dp=(r+sf)\,dx,\quad dq=(s+tf)\,dx,$$

$$dr=\left(D_x^3 z+fD_{xy}^{2+1}z\right)dx,\quad ds=\left(D_{xy}^{2+1}z+fD_{xy}^{1+2}z\right)dx,\ldots$$

$$dD_x^3 z=\left(D_x^4 z+fD_{xy}^{3+1}z\right)dx,\quad dD_{xy}^{2+1}z=\left(D_{xy}^{3+1}z+fD_{xy}^{2+2}z\right)dx,\ldots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$dD_x^n z=\left(D_x^{n+1}z+fD_{xy}^{n+1}z\right)dx=\left(\varepsilon_1-\frac{\varepsilon_2}{u}\right)dx=\psi\left(x,y,z,p,\ldots D_y^n z\right)dx,\ldots$$

$$F=0,\quad \frac{dF}{dx}=0,\ \cdots\ \frac{d^{n-2}F}{dy^{n-2}}=0,\quad \varphi=0.$$

Aus ihnen ergiebt sich eine gewöhnliche Differentialgleichung von der Ordnung $2n+1$ zur Bestimmung von y als Function von x. Jeder particulären Lösung dieser Gleichung entsprechen bestimmte, durch blosse Eliminationen hervorgehende Werthe von z, p, q, r, …, $D_y^n z$, welche einer Charakteristik zugehören.

Ferner gilt Folgendes. Weil von den Gleichungen (48) die eine mit den übrigen $n+1$ erfüllt ist, so werden für die $n+3$ Derivirten $D_{xy}^{m+m'}z$, $m+m'=n+2$, welche den Derivirten von $F=0$ und $\varphi=0$ gemeinsam sind, nur $n+2$ Gleichungen resultiren. Und aus demselben Grunde brauchen die den Derivirten derselben Gleichungen genügenden $D_{xy}^{m+m'}z$, $m+m'=n+3$, nur $n+3$ Gleichungen zu

*) Wenn $n=1$, so wird $\varphi=0$ ein Integral von $F=0$. Wenn $n>2$ und beide Wurzeln der ersten Gleichung (52) auch der anderen Gleichung genügen, so wird $F=0$ ein Integral von $\varphi=0$.

**) $-\frac{1}{u}=f(x, y, z, p, q, r, s, t)$.

erfüllen. U. s. f. Hieraus folgt: 1. *dass an jeder Curve, die keine Leitcurve einer der oben bestimmten, für $F=0$ und $\varphi=0$ gemeinsamen, Charakteristiken ist, ∞^{n-1} für beide Gleichungen gemeinsame Integralstreifen geheftet sind. Die Parameter $p\left(=\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ ihrer Flächenelemente ergeben sich als Integrale einer bestimmten Differentialgleichung von der $n-1^{sten}$ Ordnung:*

$$\Phi\left(x,\ p,\ \frac{dp}{dx},\ \cdot\cdot\ \frac{d^{n-1}p}{dx^{n-1}}\right)=0.$$

Durch jeden dieser Streifen geht eine für $F=0$, $\varphi=0$ gemeinsame Integralfläche, denn jetzt bekommen wir zu jedem Elemente irgend eines der Streifen völlig bestimmte Werthe für alle $D_{xy}^{m+m'}z$, welche zu derselben Zeit dem Streifen und einer ihn enthaltenden Integralfläche von $F=0$, $\varphi=0$ zugehören; 2. *dass irgend zwei für $F=0$, $\varphi=0$ gemeinsame Charakteristiken, die von zwei vereinigt liegenden Flächencalotten $\left(x, y, z, p, q, r, \ldots D_y^n z\right)$ ausgehen*), in ihrer ganzen Ausdehnung vereinigt liegen, nämlich ∞^∞ Integralflächen des Gleichungspaares $F=0$, $\varphi=0$ gemeinsam zugehören.*

Die ∞^{n-1} durch eine beliebig gegebene Curve hindurchgehenden Integralflächen des Gleichungspaares $F=0$, $\varphi=0$ werden folglich durch Integration zweier Differentialgleichungen von der Form:

$$\Psi\left(u,\ v,\ \frac{du}{dv},\ \frac{d^2u}{dv^2},\ \frac{d^3u}{dv^3},\ \cdots\right)=0$$

von bez. der $2n+1^{sten}$ und der $n-1^{sten}$ Ordnung und nachmalige Eliminationen erhalten.

30. Die Bedingung dafür, dass eine partielle Differentialgleichung von der 2. Ordnung $F=0$ auf die oben beschriebene Weise mit einer partiellen Differentialgleichung von der n^{ten} Ordnung $\varphi=0$ verbunden sei, drückt sich leicht durch zwei partielle Differentialgleichungen aus, die in Bezug auf die partiellen ersten Derivirten von φ linear und homogen sind. Wir bekommen diese Gleichungen, wenn wir vermittelst $n+1$ von den $n+2$ Gleichungen zwischen λ_i und μ_i, die aus (50) resultiren, diese Grössen λ_i, μ_i sowohl aus der fortgelassenen Gleichung (50) als aus der Gleichung (51) entfernen. Durch die eine der zwei so sich ergebenden Gleichungen wird die Existenz einer gemeinsamen Wurzel von (52) angegeben.

Wenn $n=2$, kommen die folgenden Gleichungen als Bedingungsgleichungen:

*) Vereinigt liegende, d. i. unendlich benachbarte und einer und derselben Fläche zugehörende derartige Flächencalotten.

$$2\frac{\partial F}{\partial r}\left(\frac{\partial F}{\partial r}\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{\partial F}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)$$

$$+\left(\frac{\partial F}{\partial s}\frac{\partial\varphi}{\partial r}-\frac{\partial F}{\partial r}\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial s}\pm\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)^2-4\frac{\partial F}{\partial r}\frac{\partial F}{\partial t}}\right)=0,$$

$$2\frac{\partial F}{\partial r}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}\left(\frac{\partial F}{\partial y}+q\frac{\partial F}{\partial z}+s\frac{\partial F}{\partial p}+t\frac{\partial F}{\partial q}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{\partial F}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}+q\frac{\partial\varphi}{\partial z}+s\frac{\partial\varphi}{\partial p}+t\frac{\partial\varphi}{\partial q}\right)\right]$$

$$+\left(\frac{\partial F}{\partial s}\pm\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial s}\right)^2-4\frac{\partial F}{\partial r}\frac{\partial F}{\partial t}}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r}\left(\frac{\partial F}{\partial x}+p\frac{\partial F}{\partial z}+r\frac{\partial F}{\partial p}+s\frac{\partial F}{\partial q}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{\partial F}{\partial r}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}+p\frac{\partial\varphi}{\partial z}+r\frac{\partial\varphi}{\partial p}+s\frac{\partial\varphi}{\partial q}\right)\right)=0;$$

statt deren jedoch, wenn speciell $F\equiv s-f(x,y,z,p,q)$, die folgenden Gleichungen*) treten:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r}=0,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+p\frac{\partial\varphi}{\partial z}+r\frac{\partial\varphi}{\partial p}+f\frac{\partial\varphi}{\partial q}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial y}+q\frac{\partial f}{\partial z}+f\frac{\partial f}{\partial p}+t\frac{\partial f}{\partial q}\right)=0,$$

oder auch:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}+q\frac{\partial\varphi}{\partial z}+f\frac{\partial\varphi}{\partial p}+t\frac{\partial\varphi}{\partial q}+\frac{\partial\varphi}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+p\frac{\partial f}{\partial z}+r\frac{\partial f}{\partial p}+f\frac{\partial f}{\partial q}\right)=0.$$

Im ersten Falle kann man $\varphi\equiv t-\psi(x,y,z,p,q)$ setzen und hat dann für ψ die Bedingungen:

$$\frac{\partial\psi}{\partial p}=0,\quad \frac{\partial\psi}{\partial x}+p\frac{\partial\psi}{\partial z}+f\frac{\partial\psi}{\partial q}=\frac{\partial f}{\partial y}+q\frac{\partial f}{\partial z}+f\frac{\partial f}{\partial p}+\psi\frac{\partial f}{\partial q}.$$

Die Behandlung des zweiten Falles geht durch blosse Vertauschung der x- und der y-Axen aus derjenigen des ersten hervor.

31. Zwei partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung und von der letzten Art gehören einer speciellen Form von Gleichungspaaren an, deren jedes dadurch ausgezeichnet ist, dass es einem beliebigen Flächenelemente (x,y,z,p,q) nur eine Charakteristik, und nicht, wie im allgemeineren der oben erwähnten Fälle, einen ganzen Büschel von ∞^1 Charakteristiken zuordnet. Wir erhalten in diesem speciellen Falle durch eine Differentialgleichung von der vierten Ordnung: $f\left(y,x,\frac{dy}{dx},\ldots\frac{d^4y}{dx^4}\right)=0$ die (∞^4) Charakteristiken des Gleichungspaares, während man im Allgemeinen für denselben Zweck eine derartige Gleichung von der fünften Ordnung nöthig hat. Aber immer muss man, um nachher die Charakteristiken zu Integralflächen zusammenfügen zu können, noch eine andere Differentialgleichung,

*) s vermittels der Substitution $s=f$ aus φ entfernt gedacht.

eine von der Form: $f\left(p, x, \frac{dp}{dx}\right) = 0$, erledigen. Die letztere Gleichung wird durch Elimination von y, z, q, r, s, t zwischen den folgenden Gleichungen erhalten:

$$z = \varphi(x), \quad y = \psi(x),$$

φ, ψ arbiträre Functionsformen,

$$\varphi'(x) = p + q\psi'(x),$$

$$\frac{dp}{dx} = r + s\psi'(x), \qquad \frac{dq}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\varphi'(x) - p}{\psi'(x)}\right) = s + t\psi'(x),$$

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0, \qquad \varphi(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0.$$

Durch eine beliebige Curve gehen also ∞^1 Integralflächen unseres Gleichungspaares. Längs einer Charakteristik haben ∞^∞ der Integralflächen mit einander eine Berührung schon von der ersten Ordnung*).

§ 6.

Anwendung des Vorangehenden auf die Gleichung (17).

32. Wir nehmen jetzt an, dass $F \equiv s - ap - bq$, wo a, b nur von x und y abhängen und können dann, nach dem oben Vorgetragenen, ohne die geringste Schwierigkeit entscheiden, ob die Gleichung $F = 0$ in der eben erwähnten Weise mit einer Gleichung $\varphi = 0$ verbunden ist. Aus dem Schlusse der Nr. 30 erkennen wir, dass φ die Form $t - \psi(x, y, z, q)$, — oder $r - \psi(x, y, z, p)$, — haben muss und dass im ersten Falle unabhängig von p:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + p\frac{\partial \psi}{\partial z} + (ap + bq)\frac{\partial \psi}{\partial q} = p\frac{\partial a}{\partial y} + q\frac{\partial b}{\partial y} + a(ap + bq) + \psi b$$

sein wird.

Demzufolge muss sein, sowohl

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + bq\frac{\partial \psi}{\partial q} = q\frac{\partial b}{\partial y} + abq + b\psi,$$

als auch

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} + a\frac{\partial \psi}{\partial q} = \frac{\partial a}{\partial y} + a^2.$$

Aus letzterer Gleichung folgt:

$$\psi = \left(a^2 + \frac{\partial a}{\partial y}\right)z + U(az - q, x, y) \tag{53}$$

und aus ersterer, wenn wir α statt $az - q$ schreiben:

*) Beispiele derartiger Gleichungspaare findet man in meinen Abhandlungen in den Math. Annalen Bd. XIII, p. 73 (Nr. 4) und Bd. XIX, p. 408 (Nr. 11).

$$z\frac{\partial}{\partial x}\left(a^2+\frac{\partial a}{\partial y}\right)+\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial \alpha}\left(z\left(\frac{\partial a}{\partial x}-ab\right)+b\alpha\right)$$
$$=(az-\alpha)\left(\frac{\partial b}{\partial y}+ab\right)+zb\left(a^2+\frac{\partial a}{\partial y}\right)+bU.$$

Weil aber U nur von α, x und y abhängen soll, so muss, wenn wir der Kürze wegen

$$u \text{ statt } b-\frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial x}$$

einführen,

$$(54)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial \alpha}=-\dfrac{1}{u}\dfrac{\partial u}{\partial y}-\dfrac{1}{a}\dfrac{\partial a}{\partial y}-2a, \\ \dfrac{\partial U}{\partial x}-bU=\alpha b\left[a+\dfrac{1}{a}\dfrac{\partial a}{\partial y}+\dfrac{1}{u}\dfrac{\partial u}{\partial y}-\dfrac{1}{b}\dfrac{\partial b}{\partial y}\right] \end{cases}$$

sein.

Damit diese zwei Relationen gleichzeitig bestehen, muss man haben:

$$(55)\qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial y}+a\right)-u\left(\frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial y}+a\right)=0.$$

Dann also hat die Gleichung

$$(56)\qquad s=ap+bq$$

mit einer anderen partiellen Differentialgleichung von der zweiten Ordnung ∞^4 Charakteristiken ($x=$ Const.) und von ihnen gebildete ∞^∞ Integralflächen gemeinsam. Die andere Differentialgleichung lautet so: $t=\psi$, wo ψ von den Gleichungen (53) und (54) bestimmt wird. Diese Differentialgleichung bekommt also die Form:

$$(57)\quad t+az\left(a+\frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial y}\right)-q\left(\frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial y}+2a+\frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial y}\right)=K(y)\,e^{\int b\,dx},$$

wo $K(y)$ eine arbiträre Function von y bezeichnet.

Diese Gleichung (57) besitzt indessen unendlich viele erste Integrale, unter denen eines durch die folgende Gleichung ausgedrückt wird:

$$(58)\quad q=az+au\,e^{\int a\,dy}\left(\int\frac{e^{-\int a\,dy}}{au}K(y)\,e^{\int b\,dx}\,dy+C(x)\right),$$

wo $C(x)$ eine arbiträre Function von x bedeutet.

Für alle Functionen $K(y)$ und $C(x)$ hat die letzte Gleichung eine Integralfläche mit der Gleichung (56) gemeinsam. Da die Gleichung (58) ein erstes Integral von (57) ist und für eine jede Charakteristik, die ihnen gemeinsam ist, x constant wird, und ferner die Gleichungen (57) und (56) ∞^∞ Integralflächen gemein haben, und auch für eine jede Charakteristik, die ihnen gemeinsam ist, x constant wird, so könnte man leicht auf die Vermuthung geführt werden, dass die Gleichung (58) auch ein erstes Integral von (56) wäre*). Aber hierbei

*) Vgl. den Anfang der Nr. 1 meiner Abhandlung in Bd. XV der Math. Ann.

ist vor Allem zu bemerken, dass endliche Werthe von x, y, z, p, q, r, s, t, welche den Gleichungen (56) und (58) gemeinsam angehören, nur für die Punkte derjenigen Fläche existiren, deren Gleichung man bekommt, wenn man den aus (58) durch Differentiation in Bezug auf x hergeleiteten Werth von s gleich $ap + bq$ setzt. Desshalb ist aus der Existenz von Charakteristiken, die für die Gleichungen (56), (58) gemeinsam sind, nur das zu schliessen, dass die eben erwähnte Fläche ein Integral von (56) wird. Doch bekommt man in dieser Weise, durch Variation von $K(y)$ und $C(x)$, alle Integralflächen der Gleichung (56). Nur wenn $u = 0$, hat diese Gleichung ein erstes Integral; das haben wir vorher, in Nr. 26, gesehen.

33. Wenn wir h statt au schreiben, so bekommen wir statt der Gleichung (55) die folgende:

$$(55') \qquad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \log h - \frac{\partial b}{\partial y} + ab - 2h = 0.$$

Aus dieser Form der Bedingungsgleichung für (56) und aus der Exposition der Laplace'schen Theorie der linearen Differentialgleichung: $s = ap + bq + cz$, wobei a, b, c Functionen von x und y allein, die von Darboux in seinen *Leçons*, etc., Deuxième partie, Livre IV, chap. II gegeben ist, schliessen wir ohne Weiteres, dass jetzt die Gleichung (56) durch zwei auf einander folgende Laplace'sche Transformationen:

$$z_1 = \frac{\partial z}{\partial y} - az,$$

$$z_2 = \frac{\partial z_1}{\partial y} - z_1\left(a + \frac{\partial \log h}{\partial y}\right)$$

übergeführt wird in die Differentialgleichung

$$\frac{\partial z_2}{\partial x} - bz_2 = 0,$$

die uns liefert:

$$z_2 = K(y)\, e^{\int b\, dx}.$$

Das linke Glied der Gleichung (57) wird gerade der Werth von z_2 in Function von z. Die Gleichung der am Ende der vorangehenden Nr. erwähnten Integralfläche von (56) kann jetzt so geschrieben werden:

$$z = \frac{1}{h}\left(\frac{\partial z_1}{\partial x} - bz_1\right).$$

Es können offenbar die in der Gleichung (56) eingehenden a und b so als Functionen von x und y bestimmt werden, dass diese Gleichung (56) durch drei oder vier oder mehrere auf einander folgende Laplace'sche Transformationen auf die unmittelbar integrable Form:

$$\frac{\partial z_i}{\partial x} - bz_i = 0$$

gebracht wird. Man bekommt dann zugleich eine partielle Differentialgleichung von der dritten oder vierten oder einer höheren Ordnung, die mit der Gleichung (56) ∞^∞ Integralflächen gemein hat*).

34. Die Gleichung (17) ist von der Form: $s = ap + bq$. Man hat nur $\lambda = x$, $\mu = y$, $\tau = z$, $\frac{\partial}{\partial \mu} \log \mathsf{H} = a$, $\frac{\partial}{\partial \lambda} \log \mathsf{H}_1 = b$ zu setzen. Aber H und H_1 sind durch eine Differentialrelation mit einander verknüpft, weil nämlich x und y Parameter der Krümmungscurven von Γ bedeuten. Die Gleichung (55) wird eine, aber nur eine zweite Relation zwischen H und H_1 abgeben, die statthaben muss, wenn unsere Gleichung (17) auf die in der Nr. 32 auseinandergesetzte Weise integrirt werden könnte. Letzteres ist somit eine mögliche Forderung. Aber auf Grund der erst genannten Differentialrelation zwischen H und H_1 muss besonders untersucht werden, ob es eine Gleichung (17) giebt, welche in Bezug auf *beide* Charakteristikenschaaren ($x =$ Const., $y =$ Const.) mit verschiedenen anderen partiellen Differentialgleichungen auf die in Nr. 29 erklärte Weise so verbunden ist, dass sie Integrale, die arbiträre Functionen enthalten, mit diesen gemeinsam besitzt. Die allereinfachste der Untersuchungen dieser Art ist diejenige, deren Resultat in Nr. 26′ vorliegt. —

35. In der Nr. 9, wo wir die Gleichung (17) als Definition derjenigen cyklischen Systeme aufgestellt haben, deren Kreise zu Γ senkrecht stehen, sahen wir, *dass zwei unendlich benachbarte Flächen, damit sie einem und demselben Orthogonalsysteme zugehören, eine gewisse Bedingung erfüllen müssen, und ferner dass, wenn diese Bedingung erfüllt ist, die zwei Flächen in unendlich viele Orthogonalsysteme eingehen.* Wir haben aber eine partielle Differentialgleichung von der dritten Ordnung mit drei unabhängigen Variablen x_1, x_2, x_3 und einer unbekannten Function z als Ausdruck der allgemeinsten Flächenschaar, welche einem Orthogonalsysteme zugehört, und aus einem die partiellen Differentialgleichungen 3. O. betreffenden Satze, welcher dem in Nr. 17 ähnlich ist, könnte es daher anfangs erscheinen, als ob immer irgend welche zwei unendlich benachbarte Flächen unendlich vielen Orthogonalsystemen zugehören müssen. Aber die Theorie der Charakteristiken dieser Gleichungen führt wiederum zum vorigen Satze. Ich werde dies zeigen und desswegen zuerst einige allgemeinere Sätze vortragen, welche sich auf partielle Differentialgleichungen 3. O. mit drei unabhängigen Variablen beziehen.

*) Die Bedingung dafür, dass die Gleichung $s + Pp + Qq + Nz = M$, wobei P, Q, N, M Functionen von x und y allein, mit einer zweiten partiellen Differentialgleichung von der zweiten Ordnung ein eine arbiträre Function enthaltendes Integral gemein hat, ist früher von Bianchi in Rendiconti della R. Accademia dei Lincei vom 17. Oct. 1886 angegeben worden. Die oben stehende Gleichung (55′) ist Bianchi's Gleichung (24) für $N = 0$.

§ 7.

Allgemeines über die partielle Differentialgleichung dritter Ordnung mit drei unabhängigen Variablen.

36. Die unabhängigen Variablen bezeichne ich mit x_1, x_2, x_3. Eine vierte Variable sei z. Ich fasse diese Variablen als Coordinaten der Punkte eines Raumes von vier Dimensionen auf. Dann wird durch eine Gleichung zwischen ihnen eine Mannigfaltigkeit von drei Dimensionen, durch zwei Gleichungen eine von zwei Dimensionen und endlich durch drei Gleichungen eine von einer Dimension dargestellt. Die erste Mannigfaltigkeit bezeichne ich kürzer als eine M_3^0, die zweite als eine M_2^0, die dritte als eine M_1^0. Sei

$$z = f(x_1, x_2, x_3)$$

die Gleichung einer M_3^0. Die Derivirten

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_k}, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l}, \dots$$

bezeichne ich mit $p_i, p_{ik}, p_{ikl}, \dots$. Durch ein Werthsystem (z, x_i, p_i) wird ein Flächenelement der M_3^0 dargestellt. Wenn ich hervorheben will, dass die M_3^0 ein Inbegriff von ∞^3 derartigen Elementen ist, so bezeichne ich sie als eine M_3. Diejenigen Elemente dieser Art, die an die Punkte einer M_2^0 sich anschliessen und einer durch diese M_2^0 zu legenden M_3^0 angehören, bilden, sage ich, eine M_2; diejenigen Elemente (z, x_i, p_i, p_{ik}), Elemente von der 2. Ordnung, Flächencalotten, welche an eine M_2 sich anschliessen und einer sie enthaltenden M_3^0 zugehören, bilden, sage ich, eine M_2'; die Elemente $(z, x_i, p_i, p_{ik}, p_{ikl})$, welche einer M_3^0 längs einer auf ihr befindlichen M_2' zugehören, bilden eine M_2''; u. s. f. *Es gilt dann von der partiellen Differentialgleichung*

$$F(z, x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3, p_{11}, p_{12}, \dots p_{33}, p_{111}, p_{112}, \dots p_{333}) = 0,$$

dass durch eine beliebige M_2' in der Regel nur endlich viele Integral-M_3 der Gleichung gehen.

Aber wir bekommen folgenderweise M_2' abweichenden Charakters. Wenn zu Abkürzung

$$\frac{\partial F}{\partial p_{ikl}} \text{ gleich } A_{ikl}$$

gesetzt wird, so kommt

$$\frac{dF}{dx_1} = \sum A_{ikl} p_{ikl1} + U. \tag{59}$$

Bildet man dann die Gleichung

$$\sum A_{ikl} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_l} = 0 \tag{60}$$

und führt für z den Werth $f(x_1, x_2, x_3)$ eines Integrals von $F = 0$ und zugleich für p_i, p_{ik}, p_{ikl} die Werthe

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_k \partial x_l}$$

ein, *so muss*, wie ich bald beweisen werde, *im Allgemeinen jedes Integral $\varphi = \Phi(x_1, x_2, x_3)$ von der jetzt gewonnenen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung* (60) *so beschaffen sein*, *dass die Gleichungen:*

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = \text{Const.}, \quad z = f(x_1, x_2, x_3),$$
$$p_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad p_{ik} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}$$

M_2' bestimmen, *durch welche ∞^∞ Integral-M_3 von $F = 0$ hindurchgehen.*

37. Zum Beweise bemerke ich erstens, dass eine M_2' vollständig durch vier Gleichungen:

$$(61) \qquad \begin{cases} z = f(x_2, x_3), \\ x_1 = \psi(x_2, x_3), \\ p_1 = \chi(x_2, x_3), \\ p_{11} = \varpi(x_2, x_3) \end{cases}$$

ausgedrückt ist. Die übrigen Parameter $p_2, p_3, p_{12}, p_{13}, p_{22}, p_{23}, p_{33}$ der Elemente derselben M_2' müssen nämlich die folgenden Gleichungen erfüllen:

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} - \chi \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = p_2, \qquad \frac{\partial f}{\partial x_3} - \chi \frac{\partial \psi}{\partial x_3} = p_3, \qquad \frac{\partial p_3}{\partial x_3} - p_{13} \frac{\partial \psi}{\partial x_3} = p_{33}.$$
$$\frac{\partial \chi}{\partial x_2} - \varpi \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = p_{12}, \qquad \frac{\partial p_2}{\partial x_2} - p_{12} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = p_{22},$$
$$\frac{\partial \chi}{\partial x_3} - \varpi \frac{\partial \psi}{\partial x_3} = p_{13}, \qquad \frac{\partial p_2}{\partial x_3} - p_{12} \frac{\partial \psi}{\partial x_3} = p_{23},$$

Die Parameter p_{ikl} der Elemente $(z, x_i, p_i, p_{ik}, p_{ikl})$ einer an diese M_2' sich anschliessenden M_2'', die folglich zusammen mit der M_2' derselben M_3^0 zugehört, werden durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$\frac{\partial \varpi}{\partial x_2} - p_{111} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = p_{112}, \qquad \frac{\partial p_{12}}{\partial x_2} - p_{112} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = p_{122},$$
$$\frac{\partial \varpi}{\partial x_3} - p_{111} \frac{\partial \psi}{\partial x_3} = p_{113}, \qquad \frac{\partial p_{12}}{\partial x_3} - p_{112} \frac{\partial \psi}{\partial x_3} = p_{123}, \quad \text{u. s. f.}$$

Man kann also p_{111} beliebig wählen, z. B. so, dass dadurch die Gleichung $F = 0$ erfüllt wird. Unsere M_2'' wird dann eine Integral-M_2'' von $F = 0$. Diejenigen Elemente $(z, x_i, p_i, p_{ik}, p_{ikl}, p_{iklm})$, die ihr und der Gleichung $F = 0$ gemeinsam zugehören, bekommen wir aus den Gleichungen:

$$\frac{\partial p_{111}}{\partial x_2} - p_{1111}\frac{\partial \psi}{\partial x_2} = p_{1112}, \ldots \frac{\partial p_{333}}{\partial x_3} - p_{1333}\frac{\partial \psi}{\partial x_3} = p_{3333};$$

$$\frac{\partial p_{111}}{\partial x_3} - p_{1111}\frac{\partial \psi}{\partial x_3} = p_{1113}, \ldots$$

$$\frac{dF}{dx_1} = 0, \quad \frac{dF}{dx_2} = 0, \quad \frac{dF}{dx_3} = 0.$$

Aber die drei letzteren Gleichungen werden, weil unsere M_2'' eine Integral-M_2'' ist, auf nur eine Gleichung sich reduciren. Wir finden also eben so viel Gleichungen für die p_{iklm} wie die Anzahl dieser. Hieraus die Werthe dieser Parameter. Für p_{1111} z. B. bekommen wir eine Gleichung:

$$p_{1111}\sum A_{ikl}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\frac{\partial \varphi}{\partial x_l} + U' = 0,$$

wenn der Kürze wegen φ statt $x_1 - \psi(x_2, x_3)$ geschrieben wird. Der Coefficient von p_{1111} enthält offenbar im Allgemeinen die Derivirten von bis der dritten Ordnung von ψ, U' auch die von der vierten Ordnung.

Wir sehen also, wenn weder die Gleichung:

$$\sum A_{ikl}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\frac{\partial \varphi}{\partial x_l} = 0$$

erfüllt ist, noch die beiden Gleichungen:

$$\sum A_{ikl}\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\frac{\partial \varphi}{\partial x_l} = 0, \quad U' = 0 \tag{62}$$

zu gleicher Zeit bestehen, so giebt es ein und nur ein bestimmtes endliches Werthsystem von p_{iklm} von der in Frage gestellten Art, durch welches somit eine an die vorige M_2'' sich anschliessende Integral-M_2''' von $F = 0$ bestimmt wird. Falls aber beide Gleichungen (62) erfüllt sind, so werden an unsere M_2'' unendlich viele Integral-M_2''' sich anschliessen.

Denken wir uns für den Augenblick eine dieser M_2''' gefunden. Damit durch sie eine Integral-M_2^{IV} gelegt werden könne, müssen erstens die Parameter p_{iklmn} der Elemente $(z, x_i, p_i, p_{ik}, \ldots p_{iklmn})$ der M_2^{IV} die Gleichungen befriedigen:

$$\frac{\partial p_{iklm}}{\partial x_2} - p_{iklm1}\frac{\partial \psi}{\partial x_2} = p_{iklm2}, \ldots \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} = 0, \tag{63}$$

die von derselben Anzahl wie die p_{iklmn} sind. Wir brauchen nicht besonders die anderen Gleichungen:

$$\frac{d^2 F}{dx_i\, dx_k} = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

zu berücksichtigen, denn diese folgen jetzt, wo unsere M_2''' eine

Integral-M_2''' von $F=0$ ist, aus der einzigen Gleichung $\frac{d^2F}{dx_1^2}=0$. Aber, wenn wir die Gleichungen (63) nach p_{11111} auflösen, so finden wir:

$$p_{11111}\sum A_{ikl}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\frac{\partial\varphi}{\partial x_l}+V=0$$

und also, wenn es einen endlichen Werth von p_{11111} geben soll, so muss, da im gegenwärtigen Falle

$$\sum A_{ikl}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\frac{\partial\varphi}{\partial x_l}=0, \tag{64}$$

nothwendig auch die Gleichung

$$V=0 \tag{65}$$

statt haben. Diese Gleichung haben wir als Bedingung für p_{1111} zu betrachten. Wenn nämlich für z, x_i, p_i, p_{ik}, p_{ikl} diejenigen Functionen von x_2, x_3 eingeführt werden, welche ihre Werthe für die betrachtete M_2'' ausdrücken, so wird die Gleichung $V=0$ eine lineare partielle Differentialgleichung der ersten Ordnung mit x_2, x_3 als unabhängigen Variablen und p_{1111} als einziger unbekannter Function. Man kann also für die Punkte einer beliebigen, auf unserer M_2'' befindlichen Mannigfaltigkeit einer Dimension: $x_2=f(x_3)$, die nicht gerade eine Charakteristik von $V=0$ bildet, der Grösse p_{1111} eine beliebige continuirliche Werthreihe $F(x_3)$ beilegen, — aber damit werden auch alle diejenigen Werthe von p_{1111} in den übrigen Punkten der M_2'', die zusammen mit den vorigen einer Integral-M_2''' zukommen, völlig bestimmt. Nach dem oben Erörterten folgen hieraus unzweideutig die Werthe der übrigen p_{iklm} derselben M_2'''.

Es ist nun leicht, die Ueberlegungen der Nr. 16—19 so abzuändern, dass sie auf die Gleichung 3. Ordnung $F=0$ angewandt werden können und in solcher Weise gewinnen wir den folgenden Satz:

Auf einer jeden Integral-M_3 von $F=0$ giebt es gewisse, durch Integration einer homogenen partiellen Differentialgleichung für φ von der ersten Ordnung und dem dritten Grade (64) *zu gewinnende M_2'', durch welche unendlich viele andere Integral-M_3 von $F=0$ hindurchgehen. Diese M_2'' sind als Charakteristiken oder charakteristische M_2'' von $F=0$ zu bezeichnen. Zwei Integral-M_3 durch eine und dieselbe charakteristische M_2'', die längs einer Mannigfaltigkeit einer Dimension auf letzterer eine Berührung von der vierten oder einer höheren Ordnung mit einander besitzen, gehen längs der ganzen M_2'' eine Berührung von derselben Ordnung mit einander ein, falls nicht die gedachte Mannigfaltigkeit einer Dimension einer Charakteristik der Gleichung* (65) *$V=0$ entspricht. Durch eine beliebige andere Integral-M_2'' geht eine bestimmte Integral-M_3. Ich habe dann angenommen, dass* *die M_2'' oder ein Stück von ihr durch Potenzreihen darstellbar ist. Durch eine Potenzreihe wird dann auch ein Stück der durchgehenden Integral-M_3 dargestellt. Dieses Stück wird von Charakteristiken begrenzt*).*

§ 8.

Anwendung des Vorangehenden auf die Differentialgleichung der Orthogonalsysteme.

38. Die Differentialgleichung der Orthogonalsysteme leiten wir in der folgenden Weise her. Die ∞^1 Flächen:

$$f(x, y, z) = C, \tag{66}$$

m. a. W. die Integrale der zwei Gleichungen:

$$f'(x) + pf'(z) = 0, \quad f'(y) + qf'(z) = 0, \tag{67}$$

gehören einem Orthogonalsysteme an, wenn es eine zweite Schaar von Flächen:

$$\varphi(x, y, z) = C \tag{68}$$

giebt, von denen sie nach Krümmungscurven senkrecht geschnitten werden**). Also wird nur erfordert, dass die folgenden zwei Gleichungen:

$$\left\{\begin{aligned} &1 + p\pi + q\varkappa = 0, \\ &p - \pi + (q - \varkappa)\frac{dy}{dx} = 0 \end{aligned}\right. \tag{69}$$

ein Integral (68) gestatten. Hier haben wir

$$\pi = -\frac{\varphi'(x)}{\varphi'(z)}, \quad \varkappa = -\frac{\varphi'(y)}{\varphi'(z)},$$

und $\frac{dy}{dx}$ bezieht sich auf die Krümmungscurven von (66), so dass, wenn zur Abkürzung

$$u_{ik} \text{ für } \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}$$

$(i, k = 1, 2, 3, \; x_1 = x, \; x_2 = y, \; x_3 = z)$ geschrieben wird:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{dy}{dx}\right)^2[(1+q^2)(u_{12}+qu_{13}) - pq(u_{22}+qu_{23}) + p(u_{32}+qu_{33})] \\ &+ \frac{dy}{dx}[(1+q^2)(u_{11}+2pu_{13}) - (1+p^2)(u_{22}+2qu_{23}) + (p^2-q^2)u_{33}] \\ &+ pq(u_{11}+pu_{13}) - (1+p^2)(u_{21}+pu_{23}) - q(u_{31}+pu_{33}) = 0. \end{aligned} \tag{70}$$

---

*) Man übersieht leicht, wie das Vorangehende zu modificiren ist, wenn F linear in Bezug auf p_{ikl} ist, und in einigen anderen damit verwandten Fällen.

**) Denn in solchem Falle giebt es immer eine dritte Schaar von zu den beiden Schaaren (66) und (68) orthogonalen Flächen. Dies nach einem Satze von Darboux. Siehe z. B. seine *Leçons* etc. Deuxième partie p. 263.

Statt der Gleichungen (69) können wir schreiben:

$$\pi = -\frac{pq + \frac{dy}{dx}(1+q^2)}{p\frac{dy}{dx} - q}, \quad \varkappa = \frac{1 + p^2 + pq\frac{dy}{dx}}{p\frac{dy}{dx} - q}$$

und erhalten somit durch blosse Substitution von π, $\varkappa$ in der folgenden Integrabilitätsbedingung

$$\text{(71)} \qquad \frac{\partial \pi}{\partial y} + \varkappa\frac{\partial \pi}{\partial z} = \frac{\partial \varkappa}{\partial x} + \pi\frac{\partial \varkappa}{\partial z}$$

die gesuchte Gleichung für die Function f in (66). Diese Gleichung wird also eine partielle Differentialgleichung mit x, y, z als unabhängigen Variablen und f als einziger unbekannter Function. Sie wird überdies von der dritten Ordnung und linear in den dritten Differentialquotienten von f.

39. Wenn

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_i\,\partial x_k\,\partial x_l}$$

mit u_{ikl} bezeichnet wird ($i, k, l = 1, 2, 3$; $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$), so findet man ohne Mühe, dass das Glied von der dritten Ordnung der Gleichung (71)

$$\text{(72)} \qquad \sum A_{ikl}\, u_{ikl}$$

bis auf einen Factor gleich wird dem entsprechenden Gliede von

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} - p\frac{\partial}{\partial x} - q\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial x}$$

wenn für $\frac{dy}{dx}$ sein Werth aus (70) eingesetzt wird. Also kommt der Ausdruck (72) bis auf einen von u_{ikl} unabhängigen Factor dem Inbegriffe der mit u_{ikl} multiplicirten Glieder des folgenden Ausdruckes gleich:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\left(\frac{\partial}{\partial z} - p\frac{\partial}{\partial x} - q\frac{\partial}{\partial y}\right) \\
&\qquad [(1+q^2)(u_{12} + q u_{13}) - pq(u_{22} + q u_{23}) + p(u_{32} + q u_{33})] \\
&+ \frac{dy}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial z} - p\frac{\partial}{\partial x} - q\frac{\partial}{\partial y}\right) \\
&\qquad [(1+q^2)(u_{11} + 2p u_{13}) - (1+p^2)(u_{22} + 2q u_{23}) + (p^2 - q^2)u_{33}] \\
&+ \quad \left(\frac{\partial}{\partial z} - p\frac{\partial}{\partial x} - q\frac{\partial}{\partial y}\right) \\
&\qquad [pq(u_{11} + p u_{13}) - (1+p^2)(u_{21} + p u_{23}) - q(u_{31} + p u_{33})].
\end{aligned}$$

Die Differentialgleichung der Charakteristiken unserer Gleichung (71):

$$\sum A_{ikl}\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\frac{\partial \psi}{\partial x_k}\frac{\partial \psi}{\partial x_l} = 0$$

nimmt damit die folgende Gestalt an:

$$\left(p\frac{\partial\psi}{\partial x}+q\frac{\partial\psi}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\Bigg[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2\left(pq+(1+q^2)\frac{dy}{dx}\right)$$
$$+\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y}\left((1+q^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-(1+p^2)\right)$$
$$+\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial z}\left(q(1+q^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2p(1+q^2)\frac{dy}{dx}-q(1-p^2)\right)$$
$$-\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\left(pq\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(1+p^2)\frac{dy}{dx}\right)$$
$$+\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial z}\left(p(1-q^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2q(1+p^2)\frac{dy}{dx}-p(1+p^2)\right)$$
$$+\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2\left(pq\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(p^2-q^2)\frac{dy}{dx}-pq\right)\Bigg]=0.$$

Also muss für die Charakteristiken entweder sein:

$$p\frac{\partial\psi}{\partial x}+q\frac{\partial\psi}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial z}=0,$$

d. i.

$$(73)\qquad \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial z}=0,$$

oder es muss der zweite Factor der vorangehenden Gleichung verschwinden. Dieser Factor, gleich Null gesetzt, stellt eine partielle Differentialgleichung der ersten Ordnung dar, deren Polarkegel, — in dem von Paul du Bois-Reymond in seinem „*Beiträge zur Interpretation der partiellen Differentialgleichungen*, Leipzig 1864" gebrauchten Sinne dieses Wortes, — einfach durch die folgende Gleichung sich ausdrücken:

$$(74)\ \left[\left((1+q^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-(1+p^2)\right)^2+4\frac{dy}{dx}\left(pq+(1+q^2)\frac{dy}{dx}\right)\left(pq\frac{dy}{dx}+1+p^2\right)\right]$$
$$\times(dz-p\,dx-q\,dy)^2=0.$$

Aus (73) folgt, dass *eine jede Fläche, welche die Flächen* (66) *eines Orthogonalsystems senkrecht schneidet, dies nach Curven thut, längs deren dieselben Flächen* (66) *von unendlich vielen anderen, ebenfalls zu Orthogonalsystemen zugehörenden, Flächenschaaren osculirt werden.* Aus (74) schliessen wir, *dass irgend drei unendlich benachbarte Flächen eines Orthogonalsystems auch unendlich vielen anderen Orthogonalsystemen gemeinsam sind; — was dann auch,* wie in Nr. 35, *von zwei unendlich benachbarten Flächen eines Orthogonalsystems gesagt werden kann.* — Eine Anwendung dieses Satzes werden wir bald sehen.

§ 9.

Schaaren von Flächen von negativer constanter Krümmung, die in Orthogonalsysteme eingehen.

40. Zuerst ist zu bemerken, dass, wenn λ, μ Parameter der Krümmungscurven einer Fläche von constanter negativer Krümmung $-\frac{1}{m^2}$ bedeuten, das Quadrat des Linienelementes ds der Fläche in der folgenden Form sich darstellen lassen muss:

$$ds^2 = \sin^2 E d\lambda^2 + \cos^2 E d\mu^2, \tag{75}$$

wo E die partielle Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial \mu^2} - \frac{\partial^2 E}{\partial \lambda^2} = \frac{1}{m^2} \sin E \cos E \tag{76}$$

befriedigt; ebenso dass die zugehörigen Grössen $p, q, r, \ldots$ welche in die Codazzi'schen Gleichungen eingehen, wie diese von Darboux in seinen *Leçons* etc., deuxième partie p. 385, 386 dargestellt sind, hierbei die folgenden Werthe bekommen:

$$p = 0, \quad q = \frac{\cos E}{m}, \quad r = -\frac{\partial E}{\partial \mu}, \quad p_1 = \frac{\sin E}{m}, \tag{77}$$
$$q_1 = 0, \quad r_1 = -\frac{\partial E}{\partial \lambda} \text{*)}.$$

Zweitens wenn zwei unendlich benachbarte Flächen von derselben Krümmung $-1 : m^2$ einem und demselben Orthogonalsysteme zugehören, und diejenigen Punkte der beiden Flächen, die Endpunkte einer und derselben senkrechten**) Entfernung τ derselben sind, als einander entsprechend betrachtet werden, und ferner für die eine Fläche die Formel (75) gilt, so muss dasjenige Linienelement $ds + \delta ds$ der zweiten Fläche, welches dem Linienelemente ds der ersten entspricht, die folgende Bedingung erfüllen:

$$\delta ds = \frac{dx}{ds} \delta dx + \frac{dy}{ds} \delta dy + \frac{dz}{ds} \delta dz,$$

wo

$$\delta dx = d\delta x = \tau d \cos Nx + \cos Nx \, d\tau,$$
$$\delta dy = d\delta y = \tau d \cos Ny + \cos Ny \, d\tau,$$
$$\delta dz = d\delta z = \tau d \cos Nz + \cos Nz \, d\tau.$$

Daher wird

$$\delta ds = \tau \left(\frac{dx}{ds} d \cos Nx + \frac{dy}{ds} d \cos Ny + \frac{dz}{ds} d \cos Nz \right).$$

Das Linienelement ds einer Krümmungscurve wird gleich $\sin E d\lambda$

*) Siehe Darboux, *Leçons*, troisième partie p. 378.

**) Unendlich kleinen.

oder $\cos E d\mu$, und, da, nach den Formeln von Olinde Rodrigues, für eine Krümmungscurve:

$$dx = R d \cos Nx, \text{ etc. (siehe Nr. 4)},$$

so folgt:

$$\delta \sin E = \tau \frac{\sin E}{R}, \quad \delta \cos E = \tau \frac{\cos E}{R'}.$$

Aber für die Haupt-Krümmungsradien R, R' gelten die Ausdrücke:

$$(78) \qquad R = -m \operatorname{tang} E, \quad R' = m \operatorname{cotg} E;$$

wesshalb:

$$(79) \qquad \delta E = -\frac{\tau}{m}$$

und wegen der Gleichung (76):

$$(80) \qquad \frac{\partial^2 \tau}{\partial \mu^2} - \frac{\partial^2 \tau}{\partial \lambda^2} = \frac{\tau}{m^2} \cos 2E.$$

Daneben soll indessen die Gleichung (17), welche hier von der Form wird:

$$(81) \qquad \frac{\partial^2 \tau}{\partial \lambda \partial \mu} = \operatorname{cotg} E \frac{\partial E}{\partial \mu} \frac{\partial \tau}{\partial \lambda} - \operatorname{tang} E \frac{\partial E}{\partial \lambda} \frac{\partial \tau}{\partial \mu},$$

bestehen. Wir haben dann zunächst zu untersuchen, ob die beiden Gleichungen (80) und (81) mit einander verträglich sind.

Wir wissen, dass, wenn für zwei Gleichungen

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial \mu^2} - \frac{\partial^2 \tau}{\partial \lambda^2} = a\tau,$$

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial \lambda \partial \mu} = b \frac{\partial \tau}{\partial \lambda} + c \frac{\partial \tau}{\partial \mu},$$

(wobei a, b, c Functionen von λ und μ), gemeinsame Lösungen $\tau = f(\lambda, \mu)$ existiren, dieselben auch die folgende Gleichung:

$$\frac{d^2}{d\lambda\, d\mu}(a\tau) = \left(\frac{d^2}{d\mu^2} - \frac{d^2}{d\lambda^2}\right)\left(b \frac{\partial \tau}{\partial \lambda} + c \frac{\partial \tau}{\partial \mu}\right)$$

erfüllen*). Im Falle der Gleichungen (80), (81) giebt uns die letztere Gleichung die nachstehende:

$$(82) \quad \frac{1}{\sin^2 E} \frac{\partial E}{\partial \lambda} \frac{\partial \tau}{\partial \lambda} - \frac{1}{\cos^2 E} \frac{\partial E}{\partial \mu} \frac{\partial \tau}{\partial \mu} + \frac{\operatorname{tang} E}{\cos 2E} \frac{\partial^2 \tau}{\partial \mu^2} - \frac{\operatorname{cotg} E}{\cos 2E} \frac{\partial^2 \tau}{\partial \lambda^2} = 0.$$

Aus ihr und aus der Gleichung (80) folgt:

$$(83) \qquad \frac{\partial^2 \tau}{\partial \lambda^2} = \frac{\tau}{m^2} \sin^2 E + \operatorname{cotg} E \frac{\partial E}{\partial \lambda} \frac{\partial \tau}{\partial \lambda} - \operatorname{tang} E \frac{\partial E}{\partial \mu} \frac{\partial \tau}{\partial \mu},$$

$$(84) \qquad \frac{\partial^2 \tau}{\partial \mu^2} = \frac{\tau}{m^2} \cos^2 E + \operatorname{cotg} E \frac{\partial E}{\partial \lambda} \frac{\partial \tau}{\partial \lambda} - \operatorname{tang} E \frac{\partial E}{\partial \mu} \frac{\partial \tau}{\partial \mu}.$$

---

*) Siehe z. B. meine Abh. in Math. Ann. Bd. XV, S. 50 die Gleichung (8) oder auch S. 74.

Aber man bestätigt leicht, dass die drei Gleichungen (81), (83), (84) den Integrabilitätsbedingungen:

$$\frac{\partial}{\partial \mu}\left(\frac{\partial^2 \tau}{\partial \lambda^2}\right) = \frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\frac{\partial^2 \tau}{\partial \lambda \partial \mu}\right), \text{ etc.}$$

genügen. Folglich gestatten die zwei Gleichungen (80) und (81) eine gemeinsame Lösung $\tau = Cf(\lambda, \mu, C', C'')$ mit drei arbiträren Constanten C, C', C'', die zweifach unendlich viele Flächen giebt, welche dieselbe Krümmung $-\frac{1}{m^2}$ haben und einer beliebig genommenen derartigen Fläche (75) unendlich nahe liegen und von denen jede zusammen mit dieser Fläche (75) einem Orthogonalsysteme zugehört.

41. Aus dem Satze der Nr. 35, 39 folgt dann weiter, dass es ∞^∞ Schaaren von Flächen von derselben constanten Krümmung $-1:m^2$ giebt, deren jede mit einer gegebenen (gemeinsamen) Fläche von derselben Krümmung in einem Orthogonalsysteme enthalten ist. Dies wurde zuerst von Weingarten in einem Schreiben an Bianchi*) bemerkt. Eine einfache Beziehung zwischen zwei unendlich benachbarten Flächen einer solchen Schaar wurde dabei auch von Weingarten angegeben. Zu dieser Beziehung gelangen wir in der folgenden Weise durch Umformung der Gleichung (82).

Wenn wir mit x, y, z; $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$ die Coordinaten zweier entsprechender Punkte von zwei unendlich benachbarten Flächen Γ, Γ' eines Orthogonalsystems bezeichnen, so müssen wir haben:

$$(85) \qquad \delta x = -\tau \frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \qquad \delta y = -\tau \frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$
$$\delta z = \tau \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

Ferner, da nach Nr. 9 von den Trajectorien einer Flächenschaar eines Orthogonalsystems immer gilt, dass die Krümmungskreise derselben in den Punkten einer beliebigen Fläche der Schaar ein cyklisches System bestimmen, so müssen, falls die Gleichungen (1):

$$(1) \qquad \begin{cases} x = az + b(x^2 + y^2 + z^2) + c, \\ y = a'z + b'(x^2 + y^2 + z^2) + c' \end{cases}$$

denjenigen Kreis dieser Art darstellen, der auf den angenommenen zwei unendlich benachbarten Flächen Γ, Γ' in den Punkten (x, y, z), $(x + \delta x,\ y + \delta y,\ z + \delta z)$ senkrecht steht, — auf Grund der Gleichungen (2):

$$(2) \qquad \begin{cases} p + 2b(z - px - qy) + a = 0, \\ q + 2b'(z - px - qy) + a' = 0, — \end{cases}$$

*) Siehe die Noten von Bianchi in den Rendiconti della R. Accademia dei Lincei vom 15. Febr. und 15. März 1885.

zu den obigen Gleichungen (85) noch die folgenden hinzukommen:

$$(86)\qquad \delta p = \tau\,\frac{2b\sqrt{1+p^2+q^2}}{2bx+2b'y-1},\qquad \delta q = \tau\,\frac{2b'\sqrt{1+p^2+q^2}}{2bx+2b'y-1}.$$

In Betreff der Variation von τ bei einer Verrückung des Punktes (x, y, z) längs der Fläche Γ kann bemerkt werden, dass

$$\delta(dz - p\,dx - q\,dy) = 0,$$

also unter Berücksichtigung von (85), (86):

$$\frac{d\tau}{\tau} = \frac{2b\,dx + 2b'\,dy}{2bx + 2b'y - 1}.$$

Unser Coordinatensystem möge jetzt speciell derart genommen werden, dass der betrachtete Punkt (x, y, z) den Anfang desselben bildet und dass diejenige Tangente von Γ, die nach Centrum des Kreises (1) gerichtet ist, X-Axe, die dazu senkrechte Tangente von Γ Y-Axe wird. In diesem Coordinatensystem hat man für den oben betrachteten Kreis $b' = 0$. Den Radius desselben Kreises nenne ich r; er wird gleich $1:2b$. So folgt dann aus der vorangehenden Formel, dass bei einer Verschiebung nach der Y-Axe:

$$d\tau = 0,$$

dagegen bei einer Verschiebung nach der X-Axe:

$$\frac{d\tau}{\tau} = -\frac{dx}{r}.$$

Wenn daher mit K eine beliebige Curve auf Γ bezeichnet wird, die von den Ebenen einfach unendlich vieler zu Γ und Γ' senkrechter Kreise berührt wird, und mit T eine beliebige der ∞^1 Orthogonalcurven sämmtlicher (∞^1) K, so soll für T sein:

$$(87)\qquad \tau = \text{Const.},$$

dagegen für K:

$$(88)\qquad \tau = Ce^{-\int\frac{ds}{r}},$$

wenn über einen Bogen von K integrirt wird*). — Wenden wir jetzt dies auf den Fall an, dass Γ und Γ' die Flächen der Nr. 40 bedeuten, welche die constante Krümmung $-1:m^2$ besitzen, und verstehen wir unter ϖ den Winkel einer Curve K mit dem Linienelemente $\sin E\,d\lambda$ einer Krümmungscurve: $\mu =$ Const., so sehen wir, dass nach (88):

$$\frac{\partial\tau}{\partial\lambda}\frac{\cos\varpi}{\sin E} + \frac{\partial\tau}{\partial\mu}\frac{\sin\varpi}{\cos E} = -\frac{\tau}{r},$$

*) Dies ist früher bemerkt worden von Bianchi in seiner Abhandlung: *Sui sistemi tripli ciclici*, *Nota II^a*, § 4. Giornale di Matematiche di Battaglini. Vol. XXII.

und nach (87):

$$\frac{\partial \tau}{\partial \lambda}\frac{\sin \varpi}{\sin E} - \frac{\partial \tau}{\partial \mu}\frac{\cos \varpi}{\cos E} = 0,$$

d. i.

$$(89)\qquad \frac{\partial \tau}{\partial \lambda} = -\frac{\tau}{r}\sin E \cos \varpi, \quad \frac{\partial \tau}{\partial \mu} = -\frac{\tau}{r}\cos E \sin \varpi.$$

Wir bekommen hieraus, durch Bildung von $\frac{\partial^2 \tau}{\partial \lambda \partial \mu}$, mit Rücksicht auf (81) *):

$$(90)\qquad \begin{cases} \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial \lambda} = -\frac{\sin E \cos \varpi}{r} + \operatorname{cotg} \varpi \left(\frac{\partial \varpi}{\partial \lambda} - \frac{\partial E}{\partial \mu}\right), \\ \frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial \mu} = -\frac{\cos E \sin \varpi}{r} - \operatorname{tang} \varpi \left(\frac{\partial \varpi}{\partial \mu} - \frac{\partial E}{\partial \lambda}\right). \end{cases}$$

Durch Einführung in (82) von $\frac{\partial^2 \tau}{\partial \lambda^2}$ und $\frac{\partial^2 \tau}{\partial \mu^2}$, wie diese Grössen durch Differentiation der Gleichungen (89), nach Substitution der Werthe von $\frac{\partial r}{\partial \lambda}$ und $\frac{\partial r}{\partial \mu}$ (90), bestimmt werden**), bekommt jene Relation (82) die Form:

$$(91)\qquad \cos \varpi \cos E\left(\frac{\partial \varpi}{\partial \lambda} - \frac{\partial E}{\partial \mu}\right) + \sin \varpi \sin E\left(\frac{\partial \varpi}{\partial \mu} - \frac{\partial E}{\partial \lambda}\right) = 0.$$

Die geometrische Bedeutung dieser Relation ist leicht ersichtlich. Falls δ den geodätischen Krümmungsradius einer Curve K bedeutet, und δ' denjenigen einer Curve T, so muss sein (siehe z. B. Darboux, *Leçons* etc., deuxième partie p. 354, Gl. (18)):

$$\frac{1}{\delta} = \frac{\cos \varpi}{\sin E}\left(\frac{\partial \varpi}{\partial \lambda} - \frac{\partial E}{\partial \mu}\right) + \frac{\sin \varpi}{\cos E}\left(\frac{\partial \varpi}{\partial \mu} - \frac{\partial E}{\partial \lambda}\right),$$

$$\frac{1}{\delta'} = -\frac{\sin \varpi}{\sin E}\left(\frac{\partial \varpi}{\partial \lambda} - \frac{\partial E}{\partial \mu}\right) + \frac{\cos \varpi}{\cos E}\left(\frac{\partial \varpi}{\partial \mu} - \frac{\partial E}{\partial \lambda}\right).$$

Die Gleichung (91) zeigt also, dass in unserem Falle, wo Γ und Γ' von derselben constanten Krümmung $-1 : m^2$ sind, $\frac{1}{\delta}$ Null wird: *die Curven K werden somit geodätische Linien für Γ.*

Aus (91) folgt ferner, unter Berücksichtigung von (90), dass *längs einer und derselben Curve T der Radius r unverändert bleibt*, und aus (80), durch Substitution der vorher aus (89) hergeleiteten Werthe von $\frac{\partial^2 \tau}{\partial \lambda^2}$ und $\frac{\partial^2 \tau}{\partial \mu^2}$, dass

$$(92)\qquad r\delta' = -m^2.$$

---

*) Vgl. die Gl. (12) in der zuletzt citirten Abhandlung von Bianchi.

**) $$\frac{\partial^2 \tau}{\partial \lambda^2} = -\frac{\tau}{r}\left(\cos E \cos \varpi \frac{\partial E}{\partial \lambda} + \frac{\sin E}{\sin \varpi}\cos^2 \varpi \frac{\partial E}{\partial \mu} - \frac{\sin E}{\sin \varpi}\frac{\partial \varpi}{\partial \lambda}\right),$$

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial \mu^2} = \frac{\tau}{r}\left(\sin E \sin \varpi \frac{\partial E}{\partial \mu} + \frac{\cos E}{\cos \varpi}\sin^2 \varpi \frac{\partial E}{\partial \lambda} - \frac{\cos E}{\cos \varpi}\frac{\partial \varpi}{\partial \mu}\right).$$

Wir finden somit auch δ' längs jeder Curve T constant. Also schliesslich: *die Curven K bilden eine solche Schaar von geodätischen Linien auf Γ, für welche die Orthogonalcurven geodätische Kreise werden.*

42. Bezogen auf zwei derartige Curvenschaaren wie diese Curven K als Curven $v = C$ und die Curven T als Curven $u = C$ nimmt die Formel für das Linienelement von Γ die Gestalt an:

$$ds^2 = du^2 + \left(Ae^{\frac{u}{m}} + Be^{-\frac{u}{m}}\right)^2 dv^2, \tag{93}$$

unter A, B arbiträre Constanten verstanden. Man findet dann:

$$\delta' = m\,\frac{Ae^{\frac{u}{m}} + Be^{-\frac{u}{m}}}{Ae^{\frac{u}{m}} - Be^{-\frac{u}{m}}}$$

und nach (92), (88):

$$\tau = C\left(Ae^{\frac{u}{m}} - Be^{-\frac{u}{m}}\right), \tag{93'}$$

wobei C eine neue arbiträre Constante bezeichnet.

Wir haben nur zu bemerken, dass jede Schaar von geodätischen Linien auf Γ, deren Orthogonalcurven geodätische Kreise sind, entweder aus solchen geodätischen Linien besteht, die durch einen und denselben, endlich oder unendlich entfernten Punkt hindurchgehen (A, B in (93) von entgegengesetzten Zeichen oder $A = 0$), oder aus solchen geodätischen Linien, die zu einer und derselben anderen geodätischen Linie senkrecht sind (A, B dann von einerlei Zeichen), um im Satze der vorangehenden Nr. mit der Formel (93') vereint, den Satz von Weingarten über Schaaren von Flächen von constanter Krümmung, die in einem Orthogonalsysteme vorkommen können, zu erkennen*).

43. Die allgemeinste derartige Flächenschaar wird nämlich, nach dem Vorangehenden (und Nr. 35), in der folgenden Weise erhalten. Auf Γ nimmt man beliebig eine geodätische Curvenschaar von der eben, in vorangehender Nr., genannten Art und mit der hierzu gehörenden, von Gleichung (93') bestimmten Grösse τ construirt man eine unendlich benachbarte Fläche Γ'. Auf Γ' nimmt man sodann eine der vorigen geodätischen Curvenschaar auf Γ unendlich benachbarte Curvenschaar von geradezu derselben Bedeutung für Γ' und construirt mit ihrer Hülfe eine weitere zu Γ' unendlich benachbarte Fläche Γ''. Durch eine geodätische Curvenschaar auf Γ'' von derselben Art für diese Fläche wie die vorangehende für Γ' und unendlich nahe der letzteren bekommen wir eine neue Fläche Γ''', die zu Γ'' unendlich benachbart

*) Näheres hierüber findet man bei Bianchi: *Sopra i sistemi tripli ortogonali di Weingarten.* Annali di Matematica pura ed applicata, Serie II: a. Tomo XIII: e.

wird. U. s. w. Unsere Flächen $\Gamma, \Gamma', \Gamma'', \ldots$ gehören einem und demselben Orthogonalsysteme an.

Bianchi hat gelehrt, aus einer bekannten solchen Flächenschaar unendlich viele andere von derselben Art durch verhältnissmässig einfache Rechnungen abzuleiten. Um seinen hierauf bezüglichen Satz darlegen zu können, muss ich folgende Bemerkung vorausschicken.

Die vier Gleichungen:

$$(94)\quad \begin{cases} (x'-x)p + (y'-y)q - (z'-z) = 0, \\ (x'-x)p' + (y'-y)q' - (z'-z) = 0, \\ 1 + pp' + qq' - \cos\Theta\sqrt{1+p^2+q^2}\sqrt{1+p'^2+q'^2} = 0, \\ (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2 - a^2 = 0 \end{cases}$$

$p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, $p' = \frac{\partial z'}{\partial x'}$, $q' = \frac{\partial z'}{\partial y'}$, a, Θ Constanten, begründen eine Correspondenz zwischen den zwei Räumen (x, y, z) und (x', y', z'), bei der speciell den Flächen von der constanten Krümmung $-\frac{\sin^2\Theta}{a^2}$ des einen Raumes Flächen von derselben Krümmung des anderen Raumes entsprechen. Die vier Gleichungen stellen übrigens nur für diese Flächen eine Flächentransformation dar; — und das wird eine mehrdeutige derartige Transformation, denn sie verwandelt jede besondere Fläche von der genannten Krümmung in einfach unendlich viele Flächen, die sämmtlich auch dieselbe Krümmung bekommen. — Seien p und p' zwei auf einander folgende Punkte der Leitcurve eines vorgelegten Streifens des Raumes (x, y, z). Seien ferner pT und $p'T'$ diejenigen Tangenten des Streifens, die den Tangenten der Leitcurve in p und p' conjugirt sind, und divergiren pT, $p'T'$, und betrachten wir einen der ∞^1 Streifen im Raume (x', y', z'), in welche die Transformation (94) den gegebenen Streifen überführt, und bezeichnen mit π denjenigen Punkt des herausgenommenen neuen Streifens, welcher dem Punkte p entspricht, so wird erstens $p\pi = a$. Ferner, wenn $pp' = ds$, $Tp\pi = \varpi$, $Tpp' = 180^0 - \alpha$, $d\tau'$ der Winkel zwischen pT und $p'T'$ und $d\sigma$ der Winkel zwischen den Tangentenebenen des Streifens in p und p' ist, so kommt für unseren neuen Streifen:

$$(95)\qquad \frac{d\varpi}{ds} = \frac{d\tau'}{ds} + \frac{d\sigma}{ds}\operatorname{cotg}\Theta \sin\varpi - \frac{1}{a}\sin(\varpi - \alpha).$$

[Siehe meine Abhandlung: *Om ytor med konstant negativ krökning* in der Jahresschrift der Universität zu Lund T. XIX (1883) §§ 2, 4. Gl. (21), S. 21]. Statt ϖ führen wir aber den Winkel

$$p'p\pi = 180^0 + \alpha - \varpi$$

ein und nennen ihn E'. Wenn wir dann auf einen Streifen der vorigen Fläche Γ (75), welcher an eine Krümmungscurve: $\mu = C$ derselben sich anschliesst, die obige Formel anwenden wollen, so haben wir zu setzen:

$\frac{d\tau'}{ds}$ = der geodätischen Krümmung der Curve: $\mu = C$ im Punkte $p(x, y, z)$, also

$$\frac{d\tau'}{ds} = -\frac{1}{\sin E}\frac{\partial E}{\partial \mu};$$

ferner:

$$\alpha = 90^0,\ ds = \sin E d\lambda,\ \frac{d\sigma}{ds} = \frac{1}{R} = -\frac{1}{m}\operatorname{cotg} E,\ m = \frac{a}{\sin\Theta}$$

und bekommen dann für die ∞^1 entsprechenden Krümmungscurven ($\lambda = -C$) auf den ∞^1 der Fläche Γ entsprechenden neuen Flächen von der Krümmung $-1 : m^2$ die Gleichung:

$$(96)\qquad \frac{\partial E'}{\partial \lambda} - \frac{\partial E}{\partial \mu} = -\frac{1}{a}(\cos E \cos E' \cos\Theta - \sin E \sin E').$$

In derselben Weise folgt aus (95) für diejenigen ∞^1 Krümmungscurven ($\mu = -C'$) der neuen Flächen, welche der Krümmungscurve: $\lambda = C'$ auf Γ entsprechen:

$$(96')\qquad \frac{\partial E'}{\partial \mu} - \frac{\partial E}{\partial \lambda} = \frac{1}{a}(\sin E \sin E' \cos\Theta - \cos E \cos E').$$

Die Transformation (94) kann man offenbar eben so gut durch die Gleichungen (96), (96'), mit den zwei:

$$(97)\qquad \lambda = -\mu',\quad \mu = -\lambda'$$

vereint, ausdrücken*). Es haben dann λ', μ', E' für die neuen Flächen dieselbe Bedeutung wie λ, μ, E für Γ**).

*) Man beachte die vollkommene Symmetrie in Bezug auf die accentuirten und die nicht-accentuirten Buchstaben der beiden Gleichungsgruppen: (94) und (96), (96'), (97).

**) Doch, wenn wir die letzteren Gleichungen (96), (96'), (97) anwenden, machen wir keinen Unterschied zwischen einer Fläche und allen denen, die aus ihr durch Translationen und Rotationen hervorgehen. Denn mit der Fläche Γ wird E als Function von λ und μ bekannt. Aus den obigen Gleichungen folgt dann E' als Function von λ' und μ' (und einer willkürlichen Constanten). Einer jeden Function E', welche, wie die vorliegende, die Gleichung (76) befriedigt, die eingehenden Variablen accentuirt gedacht, entspricht eine Fläche von der Krümmung $-1 : m^2$ sammt allen durch Bewegung von ihr zu erhaltenden. Man findet nämlich die rektangulären Cartesischen Coordinaten x', y', z' der Punkte der Fläche in der folgenden Weise. Es ist:

$$(a)\qquad \begin{cases} dx' = a\ \sin E'\, d\lambda' + b\ \cos E'\, d\mu', \\ dy' = a'\sin E'\, d\lambda' + b'\cos E'\, d\mu', \\ dz' = a''\sin E'\, d\lambda' + b''\cos E'\, d\mu', \end{cases}$$

44. Durch Anwendung der Transformation (94) auf die ∞^1 Flächen von der constanten Krümmung $-1:m^2$ ($m \sin\Theta = a$) einer Schaar eines Orthogonalsystems, eines Weingarten's Orthogonalsystems, wie solches von Bianchi benannt wird, bekommt man neue Flächenschaaren, die anderen Weingarten'schen Orthogonalsystemen zugehören; — dies ist der Satz von Bianchi, dessen Beweis, nach dem in der vorigen Nr. Bemerkten, uns hier beschäftigen wird.

In der That, man kann zwei infinitesimale Punkttransformationen von der in Nr. 41 besprochenen Art aufstellen:

---

wo

(b) $$a = \frac{1-xy}{x-y}, \quad b = \sqrt{-1}\,\frac{1+xy}{x-y}, \quad c = \frac{x+y}{x-y}, \quad x = e^{u\sqrt{-1}},$$

u eine Lösung von:

(c) $$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \lambda'} - \dfrac{\partial E'}{\partial \mu'} = -\dfrac{\sqrt{-1}}{m}\cos u \cos E', \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial \mu'} - \dfrac{\partial E'}{\partial \lambda'} = \dfrac{\sqrt{-1}}{m}\sin u \sin E'; \end{cases}$$

und $y = -1$: (die zu x conjugirt-imaginäre Grösse). Nachdem auf diese Weise a, b, c gewonnen worden sind, bestimmt man durch thatsächlich dieselben Gleichungen (b), (c) die $a', b', c', a'', b'', c''$ so dass

$$aa' + bb' + cc' = 0, \quad a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0, \quad a''a + b''b + c''c = 0.$$

Durch Integration von (a) bekommt man nachher die gesuchten x', y', z'. Siehe Darboux, *Leçons* etc. première partie p. 22, troisième partie p. 378. [Die Gleichungen (c) werden aus den bekannten Gleichungen (Darboux, *Leçons*, première partie p. 22, 23):

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \lambda} = -\sqrt{-1}\,r\,\sigma + \frac{q - p\sqrt{-1}}{2} + \frac{q + p\sqrt{-1}}{2}\,\sigma^2,$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \mu} = -\sqrt{-1}\,r_1\sigma + \frac{q_1 - p_1\sqrt{-1}}{2} + \frac{q_1 + p_1\sqrt{-1}}{2}\,\sigma^2$$

durch die Substitutionen (77) und $\sigma = e^{u\sqrt{-1}}$ erhalten].

Beiläufig bemerke ich, dass, wenn in den Gleichungen (94) K statt $\cos\Theta$ geschrieben wird, diese Gleichungen auch dann, wenn $K > 1$ oder wenn K^2 negativ ist, eine Transformation der Flächen von der constanten Krümmung $-(1-K^2):a^2$ bestimmen. Es werden aber nicht reelle Streifen im Raume (x', y', z'), die in solchem Falle einem gegebenen reellen Streifen in (xyz) entsprechen. Nehmen wir insbesondere $K = \varrho\sqrt{-1}$, ϱ reell und unendlich gross $a^2:(1+\varrho^2) = m^2$, m endlich, also auch a unendlich gross: dann führt unsere Transformation (94) jede Fläche von der constanten Krümmung $-1:m^2$ in die Tangenten des unendlich entfernten Kugelkreises über. Und die zugehörenden Gleichungen (96), (96') werden, wenn das neue E' mit u bezeichnet wird, mit den eben angeführten Gleichungen (c) identisch.

$$(98)\quad\begin{cases}\delta x = -\tau\dfrac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \delta y = -\tau\dfrac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\\ \delta z = \quad\tau\dfrac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\\ \delta p = \left(\dfrac{\partial\tau}{\partial x}+p\dfrac{\partial\tau}{\partial z}\right)\sqrt{1+p^2+q^2},\\ \delta q = \left(\dfrac{\partial\tau}{\partial y}+q\dfrac{\partial\tau}{\partial z}\right)\sqrt{1+p^2+q^2}\,{}^{*)}\end{cases}$$

und

$$(99)\quad\begin{cases}\delta x' = -\tau'\dfrac{p'}{\sqrt{1+p'^2+q'^2}}, \quad \delta y' = -\tau'\dfrac{q'}{\sqrt{1+p'^2+q'^2}},\\ \delta z' = \quad\tau'\dfrac{1}{\sqrt{1+p'^2+q'^2}},\\ \delta p' = \left(\dfrac{\partial\tau'}{\partial x'}+p'\dfrac{\partial\tau'}{\partial z'}\right)\sqrt{1+p'^2+q'^2},\\ \delta q' = \left(\dfrac{\partial\tau'}{\partial y'}+q'\dfrac{\partial\tau'}{\partial z'}\right)\sqrt{1+p'^2+q'^2},\end{cases}$$

welche durch die Gleichungen (94) in einander übergeführt werden. Denn hierfür wird nur erfordert, dass den Differentialen der Gleichungen (94):

$$p(\delta x'-\delta x)+q(\delta y'-\delta y)-\delta z'+\delta z+(x'-x)\delta p+(y'-y)\delta q=0,$$

u. s. w.

durch die obigen Werthe (98), (99) von $\delta x, \delta y, \ldots, \delta q'$ genügt wird, also dass:

$$(100)\quad\begin{cases}\tau-\tau'\cos\Theta+(x'-x)\dfrac{\partial\tau}{\partial x}+(y'-y)\dfrac{\partial\tau}{\partial y}+(z'-z)\dfrac{\partial\tau}{\partial z}=0,\\ \tau'-\tau\cos\Theta-(x'-x)\dfrac{\partial\tau'}{\partial x'}-(y'-y)\dfrac{\partial\tau'}{\partial y'}-(z'-z)\dfrac{\partial\tau'}{\partial z'}=0,\\ \quad\dfrac{\partial\tau}{\partial x}\alpha+\dfrac{\partial\tau}{\partial y}\beta+\dfrac{\partial\tau}{\partial z}\gamma+\dfrac{\partial\tau'}{\partial x'}\alpha'+\dfrac{\partial\tau'}{\partial y'}\beta'+\dfrac{\partial\tau'}{\partial z'}\gamma'=0.\end{cases}$$

Zur Abkürzung haben wir geschrieben α, β, γ für

$$-\frac{p'}{\sqrt{1+p'^2+q'^2}}+\cos\Theta\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

$$-\frac{q'}{\sqrt{1+p'^2+q'^2}}+\cos\Theta\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+p'^2+q'^2}}-\cos\Theta\frac{1}{\sqrt{1+p'^2+q'^2}}$$

*) Von den drei ersten Gleichungen sind die zwei anderen eine nothwendige Folge. Siehe z. B. Mathematische Annalen Bd. XV, S. 51 die Gleichungen (9), (10), (11).

und α', β', γ' für

$$-\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}+\cos\Theta\frac{p'}{\sqrt{1+p'^2+q'^2}},$$
$$-\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}+\cos\Theta\frac{q'}{\sqrt{1+p'^2+q'^2}},$$
$$\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}-\cos\Theta\frac{1}{\sqrt{1+p'^2+q'^2}}.$$

Es werden dann α, β, γ Richtungscosinus derjenigen Tangente der Fläche Γ im Punkte p, welche zu $p\pi$ senkrecht ist. Mit p wird dann, wie vorher, der Punkt (x, y, z), mit π der Punkt (x', y', z') bezeichnet. Und wir haben α', β', γ' als Richtungscosinus der zu derselben Geraden $p\pi$ senkrechten Tangente in π an derjenigen Fläche, Γ_1, welche durch π geht und, der Correspondenz (94) gegenüber, der Fläche Γ entspricht.

Statt der obigen Gleichungen (100) können wir demnach in den Bezeichnungen der vorangehenden Nr. schreiben:

$$(101)\quad\begin{cases}\dfrac{\tau}{a}-\dfrac{\tau'}{a}\cos\Theta+\dfrac{\partial\tau}{\partial\lambda}\dfrac{\cos E'}{\sin E}+\dfrac{\partial\tau}{\partial\mu}\dfrac{\sin E'}{\cos E}=0,\\[2mm] \dfrac{\tau'}{a}-\dfrac{\tau}{a}\cos\Theta-\dfrac{\partial\tau'}{\partial\lambda}\dfrac{\sin E}{\cos E'}-\dfrac{\partial\tau'}{\partial\mu}\dfrac{\cos E}{\sin E'}=0,\\[2mm] \dfrac{\partial\tau}{\partial\lambda}\dfrac{\sin E'}{\sin E}-\dfrac{\partial\tau}{\partial\mu}\dfrac{\cos E'}{\cos E}-\dfrac{\partial\tau'}{\partial\lambda}\dfrac{\cos E}{\cos E'}+\dfrac{\partial\tau'}{\partial\mu}\dfrac{\sin E}{\sin E'}=0.\end{cases}$$

Wir wussten vorher, aus den Gleichungen (97), dass dieses Gleichungssystem bei Vertauschung von

$$E,\ \lambda,\ \mu,\ \tau$$

mit

$$E',\ -\mu,\ -\lambda,\ -\tau'$$

unverändert bleiben muss.

In Uebereinstimmung mit der Gleichung (79) setzen wir

$$(102)\qquad \frac{\partial E}{\partial\nu}=-\frac{\tau}{m},\quad \frac{\partial E'}{\partial\nu}=\frac{\tau'}{m}$$

und erkennen dann ohne Schwierigkeit in der folgenden Weise die Verträglichkeit der Gleichungen (101) mit einander. Erstens bemerken wir, dass eine geschickte Elimination zwischen diesen Gleichungen giebt:

$$(103)\quad\begin{cases}\dfrac{\partial\tau'}{\partial\lambda}+\dfrac{\partial\tau}{\partial\mu}=\dfrac{\tau'}{a}(\sin E\cos E'+\cos E\sin E'\cos\Theta)\\[2mm] \qquad\qquad-\dfrac{\tau}{a}(\cos E\sin E'+\sin E\cos E'\cos\Theta),\\[2mm] \dfrac{\partial\tau'}{\partial\mu}+\dfrac{\partial\tau}{\partial\lambda}=\dfrac{\tau'}{a}(\cos E\sin E'+\sin E\cos E'\cos\Theta)\\[2mm] \qquad\qquad-\dfrac{\tau}{a}(\sin E\cos E'+\cos E\sin E'\cos\Theta).\end{cases}$$

Diese Gleichungen können wir also statt zweier der Gleichungen (101) brauchen. Dieselben werden aber, unter Berücksichtigung von (102), durch Differentiation von (96) und (96') in Bezug auf ν gewonnen, und hieraus folgt die Existenz der Gleichung (80) und der entsprechenden für τ':

$$(104)\qquad \frac{\partial^2 \tau'}{\partial \mu'^2} - \frac{\partial^2 \tau'}{\partial \lambda'^2} = \frac{\tau'}{m^2} \cos 2E' \quad (\lambda' = -\mu,\ \mu' = -\lambda).$$

Zweitens sehen wir, dass wir durch Differentiation des Werthes von τ', der aus der ersten der Gleichungen (101) sich ergiebt, nach Einführung des Werthes von $\frac{\partial E'}{\partial \lambda}$ aus (96), bekommen:

$$\begin{aligned}\frac{\cos\Theta}{a}\frac{\partial \tau'}{\partial \lambda} = \frac{1}{a}\frac{\partial \tau}{\partial \lambda} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial \lambda^2}\frac{\cos E'}{\sin E} + \frac{\partial^2 \tau}{\partial \lambda \partial \mu}\frac{\sin E'}{\cos E} \\ - \left(\frac{\partial \tau}{\partial \lambda}\frac{\sin E'}{\sin E} - \frac{\partial \tau}{\partial \mu}\frac{\cos E'}{\cos E}\right) \times \\ \times \left(\frac{\partial E}{\partial \mu} - \frac{1}{a}\cos E \cos E' \cos\Theta + \frac{1}{a}\sin E \sin E'\right) - \frac{\cos E \cos E'}{\sin^2 E}\frac{\partial E}{\partial \lambda}\frac{\partial \tau}{\partial \lambda} \\ + \frac{\sin E \sin E'}{\cos^2 E}\frac{\partial E}{\partial \lambda}\frac{\partial \tau}{\partial \mu}.\end{aligned}$$

Und wenn jetzt angenommen wird, dass die Gleichung (81) erfüllt ist, so folgt, da, nach dem eben Erörterten, immer die Gleichung (80) statt hat, dass die Gleichung (83) ebenfalls erfüllt ist. Durch Substitution dieser Werthe (83) und (81) von $\frac{\partial^2 \tau}{\partial \lambda^2}$ und $\frac{\partial^2 \tau}{\partial \lambda \partial \mu}$ im obigen Ausdrucke von $\frac{\partial \tau'}{\partial \lambda}$ und mit gehöriger Rücksicht auf die erste der Gleichungen (101) wird jene Gleichung für $\frac{\partial \tau'}{\partial \lambda}$ mit der ersten der Gleichungen (103) völlig identisch. In derselben Weise erkennen wir, dass, unter fortgesetzter Annahme der Relation (81), die zweite derselben Gleichungen (103) ebenfalls durch den von der ersten der Gleichungen (101) gelieferten Werth von τ' befriedigt wird. Die oben erwähnte Symmetrie unserer Gleichungen in Bezug auf E, λ, μ, τ und E', $-\mu$, $-\lambda$, $-\tau'$ lehrt dann ferner, dass

$$(105)\qquad \frac{\partial^2 \tau'}{\partial \lambda' \partial \mu'} = \operatorname{cotg} E' \frac{\partial E'}{\partial \mu'}\frac{\partial \tau'}{\partial \lambda'} - \operatorname{tang} E' \frac{\partial E'}{\partial \lambda'}\frac{\partial \tau'}{\partial \mu'},$$

$(\lambda' = -\mu,\ \mu' = -\lambda)$.

Wir haben also bewiesen, dass man, wenn Γ und Γ' zwei unendlich benachbarte Flächen von der constanten Krümmung $-1 : m^2$ eines Weingarten's Orthogonalsystems bedeuten, und Γ_1 eine der ∞^1 Flächen ist, welche die Transformation (94) aus Γ ergiebt, einfach durch die erste der Gleichungen (101) eine zu Γ_1 unendlich benachbarte Fläche, Γ_1', bekommt, die mit Γ_1 in ein Weingarten'sches Orthogonalsystem eingeht und hinsichtlich der Transformation (94) der

Fläche Γ' entspricht. Aus Γ' und einer unendlich benachbarten Fläche Γ'' von der constanten Krümmung $-1:m^2$ eines Weingarten'schen Systems leitet man in derselben Weise eine neue zu Γ_1' unendlich benachbarte Fläche, Γ_1'', her, welche mit Γ_1' in ein Weingarten'sches System eingeht und den durch die Gleichungen (94) ausgedrückten Zusammenhang mit Γ'' hat. U. s. w.*) *So dass die Transformation* (94) *für irgend welche bestimmte Werthe von a und* Θ, *welche* $a = m \sin\Theta$ *machen, wenn sie auf ein Weingarten'sches Orthogonalsystem angewandt wird,* ∞^1 *völlig bestimmte neue Weingarten'sche Orthogonalsysteme liefert. Der Fall* $\cos\Theta = 0$, wo die Transformation (94) Bianchi's Transformation**) wird, *bildet hierbei eine Ausnahme.* Wie sich dann der obige Satz gestaltet, kann zwar ohne Mühe aus dem Vorigen geschlossen werden, aber Alles dies ist schon vor mehreren Jahren von Bianchi mit der ausgezeichnetsten Klarheit und Gründlichkeit abgehandelt worden.

Lund, im September 1891.

*) Man beachte nun wieder Nr. 35 oder den Anfang der Nr. 43.

**) Dass die Transformation (96), (96'), (97), die sich nur in so weit von der Transformation (94) unterscheidet, dass sie auf die Lagenverhältnisse der gewonnenen Flächen und der ursprünglichen Fläche keinen Bezug nimmt, — eine Combination zweier älterer Transformationen wird, ist zuerst von Lie in einer Note unter dem Titel: *Untersuchungen über Differentialgleichungen*, IV, in Christiania Videnskabsselskabs Forhandlinger 1883 Nr. 18, angeführt worden. Wenn die Parameter α, β der Haupttangentencurven der Fläche (75) von der constanten Krümmung $-1:m^2$, statt λ und μ eingeführt werden:

$$\lambda = \alpha + \beta, \qquad \mu = \alpha - \beta,$$

so bekommt man, statt (96), (96'), (97), die Gleichungen:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(E' - E) = -\frac{1}{m}\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\Theta\cos(E' + E),$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}(E' + E) = \frac{1}{m}\operatorname{tang}\frac{1}{2}\Theta\cos(E' - E),$$

$$\alpha' = -\alpha, \qquad \beta' = \beta,$$

die also auch die in Rede stehende Transformation definiren.

Man bemerke nun erstens, dass Bianchi's Transformation einfach dem Falle $\Theta = 90^0$ entspricht, und sodann, dass, wie Lie aus einem Satze von O. Bonnet hergeleitet hat, die Gleichungen:

$$E' = E, \quad \alpha' = n\alpha, \quad \beta' = \frac{1}{n}\beta$$

eine neue Transformation der Flächen von der constanten Krümmung $-1:m^2$ leisten: so erkennt man leicht, dass die genannte Transformation (96), (96'), (97) eine Combination:

(eine Lie'sche Trfm.) (eine Bianchi'sche Trfm.) (die Lie'sche Trfm.)$^{-1}$

ausmacht, wie von Lie a. a. O. bemerkt. Man vgl. Darboux, *Leçons*, troisième partie, chap. XII, p. 432 u. f.

Untersuchungen über Abel'sche Functionen vom Geschlechte 3.

Von

WILHELM WIRTINGER in Wien.

Die folgenden Untersuchungen sollen eine neue Lösung des Umkehrproblems für $p = 3$ geben. Dieselbe unterscheidet sich von den bisher bekannten vor allem dadurch, dass die Argumente als 4 gliedrige Integralsummen vorausgesetzt werden und nun die ganze Schaar corresidualer Quadrupel ermittelt wird, welche zu einem bestimmten Werthsystem der transcendenten Argumente gehört; dann aber auch dadurch, dass der von Herrn Klein betonten Unterscheidung von Rationalitätsbereichen verschiedener Stufen im Gebiete der Abel'schen Functionen Rechnung getragen wird.

Die Lösung erfolgt nämlich mit Hilfe solcher Jacobi'scher Functionen, deren Entwicklung nach Potenzen der Integralsummen *nach ganzen rationalen Covarianten* derjenigen C_4 fortschreiten, welche das algebraische Gebilde definirt. Diese Functionen sind demnach als Σ-Functionen erster Stufe*) zu bezeichnen, während die bisher verwendeten Thetafunctionen, insoweit ihre Entwicklungscoefficienten algebraisch von der C_4 abhängen, Rationalitätsbereichen höherer Stufe angehören**).

Zur Bildung solcher Functionen wird man direct durch geometrische Ueberlegungen geführt, welche ihren Ausgang von der projectiven Erzeugung der C_4 nehmen.

Es zerfällt demnach die Untersuchung in zwei Theile, von welchen der erste geometrisch-algebraische Ueberlegungen enthält, der zweite dagegen die Resultate derselben für die transcendente Theorie nutzbar macht.

Ich erlaube mir, schon hier darauf aufmerksam zu machen, dass sich bei dieser Behandlung die Quadrate der 28 ungeraden von den

*) Für ebene singularitätenfreie Curven und einfache Integrale hat solche bereits Herr Pick gebildet (Math. Ann. Bd. 29), ohne jedoch ihre Abhängigkeit von den Integralen erster Gattung in Betracht zu ziehen.

**) Klein, Zur Theorie der Abel'schen Functionen (Math. Ann. Bd. 36).

Sigmafunctionen des Herrn Klein*), ebenso wie die Theta-, resp. Sigmafunction des Herrn Frobenius**), deren Verschwinden aussagt, dass die Argumente auf die Form einfacher Integrale gebracht werden können, sämmtlich als Specialfälle einer und derselben Σ-function, welche unmittelbare geometrische Bedeutung hat, ergeben.

Endlich habe ich noch die angenehme Pflicht zu erfüllen, an dieser Stelle Herrn Klein zu danken, für das Interesse, welches er meinen Untersuchungen entgegenbrachte, die selbst durch seine im Sommer 1889 gehaltene Vorlesung über Abel'sche Functionen und durch den persönlichen Verkehr mit ihm angeregt wurden.

Einen Theil der Resultate dieser Arbeit habe ich bereits in den Wiener Monatsheften für Mathematik und Physik mitgetheilt (Jahrg. 1891, Januar).

I. Geometrisch-algebraische Untersuchungen über Schaaren corresidualer Quadrupel.

§ 1.

Allgemeines über Quadrupel. Das Kegelschnittsystem S.

Sei als algebraisches Gebilde vom Geschlechte 3 eine ebene singularitätenfreie Curve vierter Ordnung gegeben und deren Gleichung $a_z^4 = 0$.

Ferner bezeichnen wir 3 linear unabhängige Integrale erster Gattung mit

$$w_i^{xy} = \int_y^x z_i\, d\omega_z \quad (i = 1, 2, 3),$$

wo $d\omega_z$ jene überall endliche Differentialform bezeichnet, welche durch

$$d\omega_z = \frac{(c\, z\, dz)}{a_z^3\, a_c} = \frac{\alpha_z \beta_{dz} - \alpha_{dz} \beta_z}{(a\alpha\beta)\, a_z^3}$$

definirt ist, c einen beliebigen Hülfspunkt bezeichnet, von welchem $d\omega_z$ gänzlich unabhängig ist, α_z, β_z aber zwei beliebige, sich in c schneidende Gerade bedeuten. Betrachten wir nun Summen von 4 Integralen erster Gattung, wobei wir die untern Grenzen als auf einer Geraden $g_x = 0$ liegend annehmen wollen, und setzen

$$w_i = w_i^{x g^{(1)}} + w_i^{y g^{(2)}} + w_i^{z g^{(3)}} + w_i^{t g^{(4)}},$$

so gehört nach den allgemeinen Umkehrtheoremen***) zu jedem

---

*) Klein, l. c. § 27..

**) Frobenius, Journal für reine u. ang. Mathematik Bd. 105.

***) Vergl. Klein, l. c. § 10.

Werthsystem der w_i eine einfach unendliche Schaar von Quadrupeln (x, y, z, t) auf der C_4, ausgenommen $w_i = 0$.

Diese Quadrupel sind ebenso wie die w_i selbst ganz unabhängig von der Auswahl der Geraden g_x.

Dem Werthsystem $w_i = 0$ entsprechen dagegen die 4 Schnittpunkte einer beliebigen Geraden mit der C_4.

Die zu einem und demselben Werthsystem der w_i gehörigen Quadrupel sind sämmtlich corresidual, d. h. sie werden alle durch das nämliche Punktsystem auf der C_4 zu einem vollständigen Schnittpunktsystem einer algebraischen Curve mit der C_4 ergänzt.

Daraus folgt unmittelbar, dass im Allgemeinen zwei nicht zu $w_i = 0$ gehörige Quadrupel zu Basispunkten zweier die C_4 erzeugender, projectiver Kegelschnittbüschel geeignet sind (vgl. § 2).

Jeder Kegelschnitt eines solchen Büschels schneidet nun die C_4 in 4 weitern Punkten $(x' y' z' t')$ und nach dem Abel'schen Theorem gehören diesen die Werthe $-w_i$ zu.

Es entstehen so auf der C_4 zwei Schaaren von Quadrupeln, von denen die eine zu den Werthen w_i, die andere zu den Werthen $-w_i$ gehört. Die Quadrupel der einzelnen Schaar sind unter sich corresidual, dagegen residual zu den Quadrupeln der andern Schaar, so dass also ein beliebiger durch ein Quadrupel der einen Schaar gelegter Kegelschnitt die C_4 noch in einem Quadrupel der andern Schaar schneidet.

Daraus folgt, dass man dasselbe zweifach unendliche Kegelschnittsystem S erhält, wenn man alle Kegelschnitte durch die Quadrupel einer Schaar corresidualer, oder aber durch die Quadrupel der zu dieser Schaar residualen legt.

Dieses Kegelschnittsystem ist es, welches wir unsern weiteren Betrachtungen zu Grunde legen.

Die Natur desselben wird klar erkannt, wenn man folgendes beachtet. Zwei corresiduale Quadrupel bestimmen zwei projectiv auf einander bezogene Kegelschnittbüschel B_1, B_2, und diese ein dreifach unendliches lineares Kegelschnittsystem

$$\lambda_1 \alpha_x^2 + \lambda_2 \beta_x^2 + \lambda_3 \gamma_x^2 + \lambda_4 \delta_x^2 = 0.$$

Interpretirt man nun $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ als homogene Punktcoordinaten eines linearen dreidimensionalen Raumes R_3, so entsprechen den beiden erzeugenden Büscheln zwei projective, gerade Punktreihen G_1, G_2. Den Kegelschnitten, welche durch die bei der Erzeugung auftretenden, zu den Basispunkten von B_1, B_2 residualen Quadrupel gelegt werden können, entsprechen daher die Punkte der Verbindungsgeraden entsprechender Punkte von G_1, G_2. Das System S ist daher im R_3 durch eine Fläche zweiter Ordnung F_2 repräsentirt, deren zwei

Schaaren Erzeugende den einzelnen Kegelschnittbüscheln entsprechen.*) Sind die Quadrupel solche, in deren 4 Punkten ein Kegelschnitt die C_4 berührt, so reducirt sich der R_3 auf eine Ebene, und die F_2 auf einen Kegelschnitt dieser Ebene und die beiden Erzeugendensysteme fallen in die Tangenten dieses Kegelschnitts zusammen.**)

§ 2.

Die zu „einfachen" Integralen gehörigen Quadrupelschaaren.

Diese Beziehungen erleiden scheinbar eine Ausnahme, wenn 3 Punkte xyz auf einer Geraden liegen, der 4te dagegen ausserhalb derselben, da ein solches Quadrupel zu projectiver Erzeugung der C_4 nicht geeignet ist.

Allein die Beziehungen der Residualität und Corresidualität bleiben vollständig aufrecht, und ebenso der Charakter des Systems S.

Es ist aber, wenn etwa $x\,y\,z$ auf einer Geraden liegen, deren 4ter Schnittpunkt mit der C_4 u heissen soll, wegen

$$w_i^{x g^{(1)}} + w_i^{y g^{(2)}} + w_i^{z g^{(3)}} + w_i^{u g^{(4)}} = 0$$

w_i in der Form

$$w_i = \int_u^t z_i \, d\omega,$$

darstellbar, und umgekehrt folgt aus diesen Gleichungen, dass, wenn die w_i die Form einfacher Integrale annehmen, 3 Punkte eines Quadrupels auf einer Geraden durch u liegen.

Dann bestehen aber die zu den w_i gehörigen corresidualen Quadrupel überhaupt nur aus dem festen Punkte t und den Tripeln, welche die Geraden durch u auf der C_4 ausschneiden. Die residualen Quadrupel bestehen dagegen aus u und den Tripeln, welche die Geraden durch t auf der C_4 ausschneiden. Das Kegelschnittsystem S enthält dann lauter zerfallende Kegelschnitte, welche aus zwei, je durch t und u gehenden Strahlen bestehen, und man erkennt leicht, dass die nach dem vorigen dem System S zugeordnete F_2 nicht zerfällt. Das 3fach unendliche lineare Kegelschnittsystem, welches S enthält, besteht dann aus allen durch u und t gehenden Kegelschnitten. Nun ist die Bedingung dafür, dass von 4 getrennten Punkten 3 auf einer Geraden liegen, das Verschwinden von

$$(xyz)\,(yzt)\,(ztx)\,(txy)$$

---

*) Vgl. Caporali, Memorie di Geometria 1888, pg. 358 ff.

**) Salmon, höhere ebene Curven pg. 293 ff. der II. Auflage der deutschen Uebersetzung.

und *dieses ist demnach auch die Bedingung dafür, dass die w_i in die Form von einfachen Integralen gebracht werden können, so lange die $xyzt$ alle verschieden sind.*

§ 3.

Der Kegelschnitt $k(x, y, z, t; \xi, \eta)$.

Wir wollen uns zunächst mit möglichst einfachen und geometrisch zugänglichen Gebilden befassen, welche zu dem Kegelschnittsystem S in covarianter Beziehung stehen, wobei wir uns jedoch nicht auf reine Covarianten beschränken, sondern nach Bedarf Hilfsgrössen heranziehen, d. h. Covarianten mit mehreren Reihen Veränderlicher bilden.

Ist ξ irgend ein Punkt der Ebene der C_4, so ist ihm in Bezug auf jedes Quadrupel aus einer Schaar corresidualer ein zweiter Punkt η conjugirt, in welchem sich die Polaren von ξ in Bezug auf die Kegelschnitte des durch $xyzt$ gelegten Büschels schneiden.

Durchlaufen nun $xyzt$ eine ganze Schaar corresidualer Quadrupel, so durchläuft η einen Kegelschnitt, welcher ungeändert bleibt, wenn statt $xyzt$ ein Quadrupel der residualen Schaar gesetzt wird.

In der That, liegen von $xyzt$ keine 3 Punkte auf einer Geraden, und seien $q_1 \equiv (\bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{t})$ und $q_2 \equiv (\bar{x}'\bar{y}'\bar{z}'\bar{t}')$ zwei zu $xyzt$ residuale Quadrupel, so geben diese Anlass zu einer projectiven Erzeugung der C_4, bei welcher die zu $(xyzt)$ corresidualen Quadrupel als Schnittpunkte entsprechender Kegelschnitte auftreten. Der Ort von η wird daher als Erzeugniss der beiden projectiven Strahlbüschel der Polaren von ξ erhalten, deren Scheitel die zu ξ in Bezug auf q_1 und q_2 conjugirten Punkte sind. Er ist also ein durch diese beiden Punkte hindurchgehender Kegelschnitt, und da er von der speciellen Wahl von q_1 und q_2 unabhängig sein muss, so enthält er auch alle zu ξ in Bezug auf ein residuales Quadrupel conjugirten Punkte. Liegen aber xyz auf einer Geraden, oder was dasselbe ist, nehmen die w_i die Form einfacher Integrale an, so zerfällt dieser Kegelschnitt immer in die beiden Verbindungsgeraden von ξ mit u und t. Das Kegelschnittbüschel durch ein Quadrupel besteht nämlich hier aus einer festen Geraden durch u und dem Strahlbüschel durch t, oder umgekehrt aus einer festen Geraden durch t und dem Strahlbüschel durch u, woraus sich sofort die Behauptung ergiebt.

Aus der Bedeutung des Kegelschnittes der η, den wir mit $k(x, y, z, t; \xi, \eta)$ bezeichnen, ist unmittelbar ersichtlich, dass die Verhältnisse der Coefficienten der verschiedenen Potenzen von ξ und η in seiner Gleichung ungeändert bleiben, wenn wir sie als Functionen der Punkte eines Quadrupels herstellen und dieses Quadrupel dann corresidual mit sich selbst verschieben oder durch ein residuales ersetzen.

Solche Functionen der $xyzt$ benöthigen wir aber weiterhin gerade, und eben darum beschäftigen wir uns hier ausführlicher mit dem Kegelschnitte k.

§ 4.

Erste Berechnung von $k(x, y, z, t; \xi, \eta)$.

Wir gehen nun daran die Gleichung dieses Kegelschnittes aufzustellen.

Sind $h^{(1)}, h^{(2)}, h^{(3)}$ drei beliebige Punkte der C_4, und wie oben $xyzt$, $x'y'z't'$ zwei corresiduale Quadrupel, so können wir die Gleichung aller durch $xyzt$, resp. $x'y'z't'$ gehenden Kegelschnitte in die Form setzen

$$(1) \qquad (x\; y\; z\; t\; h^{(1)}\xi) + \lambda(xyzth^{(2)}\xi) = 0,$$

$$(2) \qquad (x'y'z't'h^{(1)}\xi) + \mu(x'y'z't'h^{(2)}\xi) = 0,$$

wo die Klammerausdrücke zur Abkürzung für die Determinanten $\sum \pm x_1{}^2 \cdot y_2{}^2 \cdot z_3{}^2 \cdot t_1 t_2 \cdot h_2{}^{(1)} h_3{}^{(1)} \cdot \xi_3 \xi_1$ etc. gesetzt sind.

Die projective Beziehung der Büschel (1), (2), derzufolge sie die C_4 erzeugen, wird dann festgelegt durch die Gleichung

$$(3) \quad (xyzth^{(2)}h^{(3)})\,(x'y'z't'h^{(1)}h^{(3)})\,\lambda = (xyzth^{(1)}h^{(3)})\,(x'y'z't'h^{(2)}h^{(3)})\,\mu$$

und es muss dann sein:

$$(4) \quad (xyzth^{(1)}\xi)\,(x'\,y'\,z'\,t'\,h^{(2)}\xi)\,(xyzth^{(2)}\,h^{(3)})\,(x'\,y'\,z'\,t'\,h^{(1)}\,h^{(3)})$$
$$-(xyzth^{(2)}\xi)(x'y'z't'h^{(1)}\xi)\,(xyzth^{(1)}h^{(3)})\,(x'y'z't'h^{(2)}h^{(3)}) = \varrho\, a_\xi{}^4.$$

Die Gleichung unseres Kegelschnittes erhält man nun, wenn man in (1) und (2) die Polaren in Bezug auf ξ bildet und mit Hilfe von (3) λ und μ eliminirt. Setzt man zur Abkürzung symbolisch

$$(x\; y\; z\; t\; h^{(i)}\xi) = (A_i)_\xi^2 = (B_i)_\xi^2,$$
$$(x'y'z't'h^{(i)}\xi) = (A_i')_\xi^2 = (B_i')_\xi^2,$$

so erhält man auf diese Weise:

$$(5) \qquad (A_1)_\xi (A_1)_\eta \cdot (A_2')_\xi (A_2')_\eta \cdot (B_2)_{h^{(3)}}^2 \cdot (B_1')_{h^{(3)}}^2$$
$$- (A_2)_\xi (A_2)_\eta \cdot (A_1')_\xi (A_1')_\eta \cdot (B_1)_{h^{(3)}}^2 \cdot (B_2')_{h^{(3)}}^2 = 0.$$

In dieser Gestalt enthält der Ausdruck noch mannigfache fremde Elemente.

Bemerken wir zuerst, dass (5) nothwendig verschwindet, wenn eine der Determinanten $(x\,y\,z\,t\,h^{(i)}\,h^{(k)})$ verschwindet. Wegen der Corresidualität der beiden Quadrupel verschwindet dann auch $(x'\,y'\,z'\,t'\,h^{(i)}\,h^{(k)})$. Im Falle nun $h^{(1)}\,h^{(2)}$ mit $(xyzt)$ auf einem Kegelschnitte liegen, entstehen gar keine Büschel, in den andern Fällen erkennt man direct das Verschwinden von (5).

Ferner ist der Kegelschnitt durch ein einziges Quadrupel bereits vollständig bestimmt. Sobald wir also seine Gleichung (5) nur durch $xyzt$ ausgedrückt haben, werden wir durch das Product der 3 Determinanten dividiren können und der Quotient muss dann auch, da Dividend und Divisor vom gleichen Grade in h sind, von diesen ganz unabhängig werden, was ja ebenfalls nothwendig ist.

§ 5.

Die corresiduale Differentiation.

Um nun die Gleichung (5) von den $(x'y'z't')$ zu befreien, verfahren wir so, dass wir die beiden Quadrupel einander unendlich nahe rücken lassen. Setzen wir demnach $x' = x + dx$, $y' = y + dy$, $z' = z + dz$, $t' = t + dt$, so müssen, da die w_i ungeändert bleiben sollen, die Differentiale derselben verschwinden.

Dies giebt die Gleichungen

$$x_i d\omega_x + y_i d\omega_y + z_i d\omega_z + t_i d\omega_t = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

und durch Auflösung nach den $d\omega$

(6) $\quad d\omega_x = \varrho(yzt),\quad d\omega_y = -\varrho(ztx),\quad d\omega_z = \varrho(txy),\quad d\omega_t = -\varrho(xyz).$

Wenn wir nun die $(xyzt)$ mit den $(x'y'z't')$ zusammenfallen lassen, so verschwindet die linke Seite von (5) identisch. Wenn wir aber nach den Incrementen der $(xyzt)$ entwickeln, bei den niedrigsten nicht identisch verschwindenden Gliedern stehen bleiben und dann mit Hilfe von (6) die Differentiale bis auf den Factor ϱ eliminiren, so erhalten wir die Gleichung unseres Kegelschnittes in endlicher Form nur durch die $(xyzt)$ ausgedrückt.

Eine solche Differentiation bei welcher die Differentiale den Gleichungen (6) unterworfen sind, will ich *corresiduale Differentiation* nennen. Sie dürfte bei vielen ähnlichen Problemen eine wichtige Rolle spielen.

Sei $u_x^n = v_y^n = w_z^n = s_t^n$ eine Form n^{ten} Grades in jeder der 4 Variablenreihen $xyzt$, so ist es, um die corresiduale Differentiation auszuführen, oft vortheilhaft folgendermassen zu verfahren. Man bilde unter Zuziehung einer beliebigen Linearform α_x den Ausdruck

$$\alpha_x v^n_{(x+dx)} - n d\alpha_x \cdot v_x^n = \alpha_x v_x^n + n v_x^{n-1}(\alpha_x v_{dx} - \alpha_{dx} v_x)$$

oder

$$\alpha_x d(v_x^n) - n d\alpha_x v_x^n = n v_x^{n-1}(\alpha_x d v_x - \alpha_{dx} v_x).$$

Wegen der zweiten Formel für $d\omega_x$ in § 1 ist dann

(7) $$\alpha_x d(v_x^n) - n d\alpha_x \cdot v_x^n = n v_x^{n-1}(a\alpha v)\, a_x^3\, d\omega_x.$$

Mit Hilfe dieser Formel und den analogen für yzt gelingt es häufig, $d\omega$ direct in die Rechnung einzuführen.

§ 6.

Anwendung der corresidualen Differentiation auf die Gleichung des Kegelschnittes k.

Schreiben wir nun auf der linken Seite der Formel (5) für $(A_2')_\xi\,(A_2')_\eta \cdot (B_1')^2_{h(3)}$ den Ausdruck

$$\alpha_x\alpha_y\alpha_s\alpha_t(A_2')_\xi\,(A_2')_\eta\,(B_1')^2_{h(3)} - 4(\alpha_{x'}\alpha_{y'}\alpha_{s'}\alpha_{t'})\cdot(A_2)_\xi\,(A_2)_\eta\cdot(B_1)^2_{h(3)}$$

und im zweiten Glied für den entsprechenden Factor den aus dem Vorstehenden durch Vertauschung der Indices 1 und 2 hervorgehenden Ausdruck, so ändert sich die linke Seite von (5) nur, insofern sie den Factor $\alpha_x\alpha_y\alpha^s\alpha_t$ annimmt. Indem man in dem so modificirten Ausdruck $xyst$ unendlich nahe an $x'y's't'$ rücken lässt, erkennt man, dass man die Glieder erster Ordnung schreiben kann:

$$\begin{aligned}
&(A_1)_\xi(A_1)_\eta\cdot(B_2)^2_{h(3)}\cdot(B_1)^2_{h(3)}\cdot\sum\alpha_y\,\alpha_s\,\alpha_t\Big(\alpha_x d_x(A_2)_\xi(A_2)_\eta - 2\,d\alpha_x\cdot(A_2)_\xi(A_2)_\eta\Big)\\
&+(A_1)_\xi(A_1)_\eta\cdot(B_2)^2_{h(3)}\cdot(A_2)_\xi(A_2)_\eta\cdot\sum\alpha_y\,\alpha_s\,\alpha_t\Big(\alpha_x d_x(B_1)^2_{h(3)} - 2\,d\alpha_x\cdot(B_1)^2_{h(3)}\Big)\\
(8)\quad&-(A_2)_\xi(A_2)_\eta\cdot(B_1)^2_{h(3)}\cdot(B_2)^2_{h(3)}\cdot\sum\alpha_y\,\alpha_s\,\alpha_t\Big(\alpha_x d_x(A_1)_\xi(A_1)_\eta - 2\,d\alpha_x(A_1)_\xi(A_1)_\eta\Big)\\
&-(A_2)_\xi(A_2)_\eta\cdot(B_1)^2_{h(3)}\cdot(A_1)_\xi(A_1)_\eta\cdot\sum\alpha_y\,\alpha_s\,\alpha_t\Big(\alpha_x d_x(B_2)^2_{h(3)} - 2\,d\alpha_x(B_2)^2_{h(3)}\Big) = 0,
\end{aligned}$$

wobei die Summenzeichen über die durch cyclische Vertauschung der als Indices geschriebenen $xyst$ aus dem angegebenen entstehenden Glieder zu erstrecken sind, ferner d_x, d_y etc. die Differentialänderungen infolge Aenderung des einzelnen x, y etc. bedeuten, endlich nicht zusammengehörige Symbole durch das Multiplicationszeichen getrennt sind. Auf die Ausdrücke unter dem Summenzeichen ist dann unmittelbar Formel (7) anwendbar, und nach Ersetzung der $d\omega_x$, $d\omega_y$, $d\omega_s$, $d\omega_t$ durch die entsprechenden Determinanten aus (6) erhält man die Gleichung des Kegelschnitts $k(xyst;\,\xi\,\eta)$ als nur von den $xyst$ und den h abhängige ganze homogene Form der $xyst$. Vorbehaltlich der Abtrennung weiterer Factoren ist sie in den einzelnen Variablen $xyst$ vom 10ten Grade, in den Coefficienten der C_4-gleichung vom ersten Grade.

Sie ändert bei Vertauschung zweier der Grössen $xyst$ ihr Zeichen, da von den Factoren der einzelnen Glieder 3 das Zeichen wechseln, der Ausdruck unter dem Summenzeichen aber nicht mehr nach Ersetzung der $d\omega$ durch die proportionalen Determinanten. Bei Vertauschung von x und y z. B. sind nämlich die von der Differentiation nach s und t herrührenden Glieder mit den Determinanten (txy), (xys) multiplicirt, die von der Differentiation nach x und y herrührenden Glieder vertauschen sich aber einfach.

§ 7.

Nullstellen von k, Absonderung überflüssiger Theiler, Specialfälle.

Wir untersuchen nun, von welcher Ordnung unser Ausdruck unendlich klein wird, wenn zwei der Stellen $xyzt$ unendlich nahe rücken. Setzen wir $y = x + dx$, so sind die Differentiale dx proportional den bei unendlich kleiner corresidualer Verschiebung auftretenden Differentialen von x zu setzen, da beide Aenderungen Differentiale auf der C_4 an derselben Stelle sind.

Man erkennt unmittelbar, dass unser Ausdruck (8) für $x = y$ mindestens von der dritten Ordnung verschwindet, da ja jedes Glied 3 verschwindende Factoren enthält. Man erkennt aber auch, dass die Glieder unter den einzelnen Summenzeichen, welche von einer Differentiation nach z oder t herrühren, von der zweiten Ordnung verschwinden, indem eine an und für sich verschwindende Determinante noch mit einer der Determinanten (txy), (xyz) multiplicirt ist, und dass die Glieder mit den Operationszeichen d_x, d_y einander gleich werden. Nun wird aber für $y = x + dx$ unter Rücksicht auf die obige Bemerkung über die Differentiale dx z. B. die Determinante

$$(A_1)_\xi (A_1)_\eta = - d_x (A_1)_\xi (A_1)_\eta \;{}_{[x=y]}$$

und

$$(A_2)_\xi (A_2)_\eta = - d_x (A_2)_\xi (A_2)_\eta \;{}_{[x=y]},$$

so dass die entstehenden Glieder, welche unendlich kleine Grössen 3ter Ordnung liefern im ersten und dritten und ebenso im zweiten und vierten Glied einander aufheben. Die linke Seite von (8) wird also von höherer als der 3ten Ordnung unendlich klein. Da ferner der Ausdruck bei Vertauschung von x und y sein Zeichen wechselt, so wird er für $x = y$ von einer ungeraden, also mindestens von der 5ten Ordnung unendlich klein. Dass die Ordnung auch keine höhere ist, wird sich später ergeben.

Wenn wir nun zur Absonderung überflüssiger Factoren schreiten, so sehen wir, dass sich auch die früher eingeführten Linearformen $\alpha_x \alpha_y \alpha_z \alpha_t$ wieder entfernen lassen müssen, und ebenso nach unserer früheren Bemerkung die Determinanten $(xyzth^{(i)} h^{(k)})$ $(i > k,\ i, k = 1,2,3)$.

Den so erhaltenen Quotienten, welcher dann eine ganze homogene Form 3ten Grades in den $xyzt$ vorstellt, in den Coefficienten der C_4-Gleichung vom ersten Grade ist, und beim Zusammenfallen zweier der Stellen $(xyzt)$ on der 2ten Ordnung verschwindet, bezeichnen wir in der Folge insbesondere mit $k(xyzt;\ \xi\eta)$.

Er giebt gleich Null gesetzt bei festgehaltenem ξ die Gleichung des oben in derselben Weise bezeichneten Kegelschnittes. Er ist in ξ und η symmetrisch und giebt, wenn ξ und η festgehalten werden, die Bedingung, dass unter den zu $(xyzt)$ corresidualen Quadrupeln sich eines befinde, in Bezug auf welches ξ und η conjugirte Punkte sind.

Wenn $\xi = \eta$ gesetzt wird, so muss nach Formel (4) $k(xyzt, \xi, \xi)$ zu a_ξ^4 proportional werden. In der That giebt es, wenn ξ auf der C_4 liegt in jeder Quadrupelschaar eines, welches ξ enthält, in Bezug auf welches also ξ sich selbst conjugirt ist. Aber auch den Proportionalitätsfactor können wir bestimmen. Liegen nämlich 3 Punkte xyz auf einer Geraden, so geht k ebenfalls durch ξ und wir können daher setzen

$$k(xyzt;\ \xi\xi) = c(xyz)\,(yzt)\,(ztx)\,(txy)\,a_\xi^4. \tag{9}$$

Wegen der Uebereinstimmung des Grades in den $xyzt$ und den Coefficienten der C_4 ist dann c eine rein numerische Constante, und wir ersehen überdies die Richtigkeit unserer Bestimmung der Ordnungszahlen des Verschwindens.

Für $(xyz) = 0$ muss nach Früherem (§ 3 a. E.) unser Ausdruck nach Absonderung geeigneter Factoren übergehen in $(\xi\eta u)\,(\xi\eta t)$, wo u den 4ten Schnittpunkt der Geraden durch (xyt) mit der C_4 bezeichnet.

§ 8.

Die Discriminante Δ von $k(xyzt;\ \xi, \eta)$ und ihr Verschwinden.

Wir fragen nun, für welche Punkte ξ unser Kegelschnitt zerfällt. Jedenfalls erhalten wir durch Bildung der Discriminante die Gleichung einer Curve 6ter Ordnung für ξ. Aber k zerfällt auch immer, wenn

$$(xyt)\,(yzt)\,(txy)\,(ztx)$$

verschwindet, und die 4 Punkte $xyzt$ alle verschieden sind. Also muss die Discriminante durch dieses Determinantenproduct theilbar sein.

Der Quotient ist dann 6ten Grades in den einzelnen $xyzt$, 3ten Grades in den Coefficienten der C_4, und verschwindet beim Zusammenfallen zweier Stellen x, y vom 4ten Grade. Wir bezeichnen diesen Quotienten mit $\Delta(xyzt;\ \xi)$ und sehen ohne weiteres, dass auch die Verhältnisse der 28 Coefficienten der Potenzen von ξ bei corresidualer Verschiebung des Quadrupels ungeändert bleiben müssen. Es ist aber die Frage, ob Δ nicht noch weitere Theiler hat.

Zu diesem Zwecke untersuchen wir die geometrische Bedeutung von $\Delta = 0$.

Zunächst ist ersichtlich, dass immer dann Δ gleich Null ist, wenn ξ in eine Ecke des gemeinsamen Poldreieckes der durch $(xyzt)$ gehenden Kegelschnitte fällt. Die Gegenseite des Poldreiecks ist ja dann Polare von ξ in Bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels und darum müssen auch die zu ξ in Bezug auf die zu $xyzt$ residualen Quadrupel conjugirten Punkte auf dieser Geraden liegen, welche also Bestandtheil von k ist. — $\Delta = 0$ enthält also jedenfalls den Ort der Ecken der Poldreiecke der Quadrupel, oder was dasselbe ist, den Ort der Scheitel der zerfallenden Kegelschnitte des Systems S.

Geometrisch finden wir nun diesen Ort folgendermassen: Seien zwei die C_4 erzeugende Büschel B_1, B_2, so bestimmt jeder Kegelschnitt von B_1 mit B_2 ein Netz und die Jacobi'sche Curve dieses Netzes. Durchläuft der Kegelschnitt das ganze Büschel B_1, so bilden die Jacobi'schen Curven ein zu diesem Büschel projectives Büschel. Denn sie gehen alle nach bekannten Sätzen durch die 6 Ecken des Vierseits der 4 Doppelgeraden, welche in dem von B_1 und B_2 bestimmten dreifach unendlichen linearen Kegelschnittsystemen vorkommen, und die Ecken des Poldreiecks von B_2. Ebenso bilden die Kegelschnitte von B_2 mit B_1 Netze mit Jacobi'schen Curven von der entsprechenden Beziehung. Die beiden C_3-Büschel sind dann auch zu einander projectiv, und erzeugen als Ort der Scheitel der zerfallenden Kegelschnitte des Systems S eine C_6 mit Doppelpunkten in den 6 Ecken des obigen Vierseits der Doppelgeraden.*) $\Delta = 0$ *ist also geradezu die Gleichung dieser* C_6.

Von hier aus stellen wir unsere weiteren Ueberlegungen an.

§ 9.

Weiteres über die Curve 6^{ter} Ordnung $\Delta = 0$.

Diese C_6 *ist eine allgemeine vom Geschlechte* 4 *so lange die Quadrupel nicht specialisirt sind.* Denn beziehen wir das von B_1, B_2 bestimmte 3-fach unendliche lineare Kegelschnittsystem wieder wie in § 1 auf einen dreidimensionalen linearen Raum, so entspricht den zerfallenden Kegelschnitten bekanntlich eine F_3 mit 4 Doppelpunkten, und die zerfallenden Kegelschnitte des Systems S werden repräsentirt durch die Schnittcurve dieser F_3 mit der F_2, welche dem System S entspricht. Aber diese F_2 ist eine allgemeine, denn zu jeder eigentlichen F_2 im R_3 gehört, da sie zwei Regelschaaren enthält, eine projective Erzeugung einer C_4. Es besteht also gar keine besondere Beziehung zwischen F_2 und F_3. Ihre Schnittcurve ist also eine allgemeine Curve 6^{ter} Ordnung vom Geschlechte 4, und da sie eindeutig auf eine zu einer C_4 gehörige C_6 bezogen ist, so hat diese dieselbe Eigenschaft, und insbesondere *keine weiteren Singularitäten mehr.*

Die C_6 schneidet ferner die C_4 in 24 Punkten, in welchen zwei Punkte eines der zu $(xyzt)$ corresidualen oder residualen Quadrupels einander unendlich nahe rücken, und zwar ergiebt die einfache Abzählung mittelst des verallgemeinerten Correspondenzprincipes, dass dies 12 mal für die corresidualen, etwa in den Punkten $\xi^{(n)}$ $(n = 1, \ldots, 12)$, und ebenso oft für die residualen eintritt, etwa in den Punkten $\eta^{(n)}$.

*) Caporali l. c.

Legt man daher durch $(xyzt)$ und einen Punkt $\eta^{(k)}$ einen Kegelschnitt, so berührt er in $\eta^{(k)}$ die C_4.

Wird das Quadrupel zu einem solchen, in dessen 4 Punkten ein Kegelschnitt die C_4 berührt, so wird die C_6 zur doppeltgezählten Jacobi'schen Curve des Netzes, in welchem die Berührungskegelschnitte des betreffenden Systems liegen.

Rücken xyz auf eine Gerade mit dem 4ten Schnittpunkt u, so zerfällt die C_6 in die C_4 und die doppeltgezählte Verbindungsgerade von u und t.

Wenn man nämlich 3 Punkte (xyz) in beliebiger Weise auf eine Gerade rücken lässt, so erkennt man aus den bekannten Formeln für die Nebenecken des Vierecks $(xyzt)$, dass diese nach xyz rücken. Die C_4 ist also jedenfalls Bestandtheil der C_6. Die 4 Doppelgeraden des allgemeinen Falles, welche das lineare dreifach unendliche, S enthaltende, Kegelschnittsystem aufweist, fallen aber in die Gerade (ut) zusammen und folglich müssen auch die 6 Doppelpunkte der allgemeinen C_6 auf diese Gerade rücken. Das kann aber nur sein, wenn diese Gerade selbst — doppeltgezählt — Bestandtheil der C_6 wird.

Nun sind wir auch in der Lage uns zu überzeugen, *dass wir keine Factoren mehr in Δ haben, welche etwa noch abzusondern wären.*

In der That, verlegen wir in $\Delta(xyzt;\ \xi)$ den Punkt ξ auf die C_4 und halten xyz fest, während wir t die C_4 durchlaufen lassen. Dann wird Δ an 24 Stellen t verschwinden. Zwölf von diesen fallen in die je vierfach zählenden Punkte xyz. Sechs weitere erhalten wir, wenn t mit zweien von den Punkten xyz auf einer Geraden liegt, da ja dann die C_4 als Bestandtheil der C_6 auftritt. Von den noch übrigen 6 erhalten wir drei, wenn wir durch xyz den die C_4 in ξ berührenden Kegelschnitt legen und t in einen der 3 weiteren Schnittpunkte dieses Kegelschnittes fallen lassen. Endlich erhalten wir die letzten 3, wenn wir in ξ die Tangente an die C_4 legen, und durch deren zwei von ξ verschiedenen Schnittpunkte η, η' und xyz einen Kegelschnitt legen und t in einen der 3 weitern Schnittpunkte des letzteren Kegelschnittes mit der C_4 rücken lassen. Denn das Quadrupel $xyzt$ ist dann zu dem von $\eta\eta'$ und den zwei weiteren Schnittpunkten des Kegelschnitts $t't''$ gebildeten Quadrupel residual, also corresidual zu dem Quadrupel, welches die 4 weiteren Schnittpunkte des aus den Geraden $(\eta\eta')$ und $(t't'')$ bestehenden Kegelschnitts bilden. Von diesen fallen aber zwei in ξ zusammen. Wir erhalten daher in der That geometrisch dieselbe Anzahl Stellen, wie durch Abzählung aus dem Grade von Δ in t und schliessen daraus, dass wir keinen Factor mehr abzusondern haben. — Die Verhältnisse der verschiedenen Potenzen von ξ in Δ sind natürlich wieder solche Functionen der $xyzt$, die sich nicht ändern, wenn man die $xyzt$ durch ein zu ihnen residuales oder corresiduales Quadrupel ersetzt.

§ 10.

Einführung des 5-dimensionalen Raumes. Coordinaten der in demselben gelegenen Geraden und R_3.

Wir sind nun, wenn wir Δ oder k kennen, allerdings in der Lage, daraus das 3-fach unendliche lineare Kegelschnittsystem zu berechnen, in welchem S enthalten ist, und zwar rational, da die Kegelschnitte des Systems sich symmetrisch aus den 4 Doppelgeraden zusammensetzen lassen, die symmetrischen Functionen der letzteren aber sich rational aus den Coefficienten der Potenzen und Producte der ξ herstellen lassen müssen. Es ist aber bisher noch nicht zu erkennen, inwiefern auch das System S selbst durch die Angabe von Δ oder k bestimmt ist.

Wir suchen daher nach solchen Formen der $xyzt$, welche sowohl das dreifach unendliche Kegelschnittsystem als auch S selbst direct zu ermitteln gestatten.

Um nun einen klaren Einblick in die Natur der zu betrachtenden Kegelschnittsysteme zu erhalten, machen wir von dem oft benützten Hilfsmittel Gebrauch die Kegelschnitte der Ebene auf die Punkte eines 5-dimensionalen linearen Raumes zu beziehen.*)

Wir nehmen zu diesem Zweck 6 linear unabhängige Kegelschnitte A_x^2, B_x^2, C_x^2, D_x^2, E_x^2, F_x^2 an und ordnen dem Kegelschnitt

$$X_1 A_x^2 + X_2 B_x^2 + X_3 C_x^2 + X_4 D_x^2 + X_5 E_x^2 + X_6 F_x^2 = 0$$

den Punkt mit den Coordinaten $X_i (i = 1 \ldots 6)$ in einem linearen 5-fach ausgedehnten Raum zu.

Wir haben ferner Coordinaten der Geraden, der Ebene und des 3- und 4-dimensionalen linearen Raumes einzuführen.**)

Als letztere führen wir natürlich die Coefficienten U_i der Gleichung eines solchen R_4

$$\sum_1^6 U_i X_i = 0$$

ein.

Als Coordinaten der „Geraden" führen wir die 15 Determinanten der Matrix

$$(10) \qquad \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & X_5 & X_6 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 & Y_4 & Y_5 & Y_6 \end{vmatrix}$$

---

*) Vgl. z. B. Study, Charakteristikenproblem bei Kegelschnitten, (Math. Annalen 27) sowie die Literaturangaben daselbst pag. 71, Fussnote.

**) Ueber diese Coordinaten vgl. Clebsch: Abhdlg. der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften, Bd. XVII. Ueber eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie, und Grassmann, Ausdehnungslehre von 1844.

ein, wenn X und Y zwei Punkte der Geraden sind. Diese Coordinaten bezeichnen wir im Anschluss an die im 3-dimensionalen Gebiet übliche Ausdrucksweise mit

$$p_{ik} = X_i Y_k - Y_i X_k$$

und benennen sie *Strahlencoordinaten.*

Ihnen stehen gegenüber *Axencoordinaten* gebildet als Determinanten der Matrix

$$(11) \qquad \begin{vmatrix} U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & U_5 & U_6 \\ V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 & V_6 \\ W_1 & W_2 & W_3 & W_4 & W_5 & W_6 \\ T_1 & T_2 & T_3 & T_4 & T_5 & T_6 \end{vmatrix}$$

wenn U, V, W, T die Coordinaten von 4 unabhängigen R_4 bedeuten, welche durch die Gerade hindurchgehen. Wir bezeichnen als π_{ik} diejenige dieser Determinanten, welche zu p_{ik} adjungirt ist in derjenigen Determinante 6ter Ordnung, welche durch Untereinanderschreiben von (10) und (11) entsteht. Es sind dann nach einem bekannten Determinantensatz die p_{ik} zu den π_{ik} proportional.

Wir übergehen ähnliche Erörterungen über Coordinaten der Ebene, und wenden uns gleich zur Besprechung des der Geraden im 5-dimensionalen Gebiet reciproken R_3.

Als Coordinaten desselben führen wir die 15 Determinanten der Matrix

$$(12) \qquad \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & X_5 & X_6 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 & Y_4 & Y_5 & Y_6 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 & Z_4 & Z_5 & Z_6 \\ S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 & S_6 \end{vmatrix}$$

ein, wenn X, Y, Z, S 4 Punkte des R_4 sind, von denen keine 3 in einer Ebene liegen.

Ebenso führen wir die 15 Determinanten der Matrix

$$(13) \qquad \begin{vmatrix} U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & U_5 & U_6 \\ V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 & V_6 \end{vmatrix}$$

als *Axencoordinaten* des R_3 sein, wenn U, V zwei durch ihn hindurchgehende R_4 bedeuten. Die Bezeichnung Axencoordinaten kann unbedenklich beibehalten werden, da ja der R_3 als Axe des durch ihn gelegten R_4-Büschels aufgefasst werden kann. Wir bezeichnen die letzteren Coordinaten mit

$$\varrho_{ik} = U_i V_k - V_i U_k.$$

Im Gegensatz zu diesen sollen die zuerst eingeführten Coordinaten schlechtweg R_3-Coordinaten heissen und mit r_{ik} die zu ϱ_{ik} adjungirte Determinante in dem durch Untereinanderschreiben von (12) und (13) entstehenden quadratischen Schema bezeichnet werden. Dann sind auch die r_{ik} den ϱ_{ik} proportional.

§ 11.

Ueber Strahlen und R_3-Geometrie im R_5.

Es wäre nun die Aufgabe, ein vollständiges System von Relationen zwischen den r_{ik} oder den p_{ik} aufzustellen. Es genügt, dies für die p_{ik} zu thun, da die ϱ_{ik}, welche den r_{ik} proportional sind nach ihrer Definition denselben Relationen genügen müssen. Und man wird weiter überhaupt eine Strahlengeometrie und R_3-Geometrie im R_5 fordern, an deren Spitze ein ähnlicher Satz wie der des Herrn Klein für die Liniengeometrie des R_3 zu stellen wäre, nämlich: „Die Liniengeometrie des R_3 ist wie die Geometrie auf einer 4-fach ausgedehnten quadratischen Mannigfaltigkeit des R_5“.*)

Wir müssen uns jedoch hier damit begnügen, nur diejenigen Relationen aufzustellen, welche wir zunächst benöthigen. Sie ergeben sich einfach dadurch, dass wir aus der die p_{ik} definirenden Matrix irgend zwei Verticalreihen weglassen, und zwischen den 6 Determinanten, welche übrig bleiben, die aus der Liniengeometrie bekannte Relation aufstellen. Diese wird z. B. bei Weglassung der beiden letzten Verticalreihen

$$p_{12}p_{34} + p_{23}p_{14} + p_{31}p_{24} = 0.$$

Mit den so erhaltenen 15 Relationen reichen wir für unsern nächsten Zweck.

§ 12.

Die Kegelschnittsysteme S im R_5. Einführung eines dreifach unendlichen Systems von R_3.

Bereits im § 1 wurde gezeigt, dass dem Kegelschnittsystem S im allgemeinen eine Fläche zweiter Ordnung in einem R_3 entspricht, sofern zunächst nur das durch 2 die C_4 erzeugende Kegelschnittbüschel bestimmte, dreifach unendliche lineare Kegelschnittsystem auf die Punkte eines R_3 bezogen wird. Wir können daher sagen, indem wir darauf Rücksicht nehmen, dass alle diese Verhältnisse jetzt im R_5 stattfinden:

Im allgemeinen gehört zu jeder Schaar corresidualer Quadrupel ein R_3 und in diesem R_3 eine F_2, deren zwei Regelschaaren resp. der Quadrupelschaar und ihrer residualen Schaar zugeordnet sind.

*) Klein, Math. Ann. Bd. 5.

Die Coordinaten dieses R_3 ändern nun jedenfalls ihre Verhältnisse nicht, wenn das Quadrupel corresidual mit sich selbst verschoben oder durch ein residuales ersetzt wird. Diese 15 Coordinaten sind es daher, welche wir weiterhin betrachten wollen.

Für Berührungsquadrupel wird, wie schon früher bemerkt, die F_2 zu einem Kegelschnitt, der R_3 zunächst unbestimmt. Liegen etwa (xyz) auf einer Geraden, dann besteht der R_3 aus allen Punkten, welche den durch u und t gehenden Kegelschnitten entsprechen und die F_2 bleibt eine eigentliche, so lange u und t getrennt sind. Rücken aber u und t unendlich nahe zusammen, so artet die F_2 ebenfalls in einen Kegelschnitt aus, nämlich in denjenigen, welcher den Doppelgeraden durch den vereinigten Punkt u, t entspricht. Liegen alle 4 Punkte auf einer Geraden, so kann von einem bestimmten R_3 nicht mehr die Rede sein, und ebensowenig von einer F_2, wobei wir es dahin gestellt sein lassen, ob vielleicht Grenzübergänge zur theilweisen Beseitigung dieser Unbestimmtheit führen können. Endlich kommt unter den F_2 so lange kein Kegel vor, als die C_4 nicht in einen doppelt überdeckten Kegelschnitt ausartet.*) In diesem Falle hätten alle Büschel einen Kegelschnitt gemeinsam, nämlich den der Spitze des Kegels entsprechenden, auf welchem alle Quadrupel liegen müssten, der also die C_4 selbst vorstellt.

Wir können also sagen:

Den 3-fach unendlich vielen Schaaren corresidualer Quadrupel entspricht im R_5 ein dreifach unendliches System von R_3, mit 63 singulären Ebenen. Jeder R_3 enthält eine F_2, die 63 Ebenen je einen Kegelschnitt, und Kegel kommen überhaupt nicht unter den F_2 vor, es sei denn die C_4 arte in einen doppelt überdeckten Kegelschnitt aus. Ausserdem besitzt das R_3-System noch eine einfach unendliche Schaar von solchen R_3, in welchen die zugehörige F_2 in einen Kegelschnitt ausartet.

§ 13.

Uebertragung der C_4 selbst in den R_5. Neue Definition unseres R_3 Systems.

Wir wollen zunächst untersuchen, wodurch die R_3 unseres Systems vor den übrigen R_3 des R_5 ausgezeichnet sind. Zu diesem Zweck übertragen wir die C_4 selbst in den R_5.

Legen wir nämlich durch einen Punkt derselben alle möglichen Kegelschnitte, so entspricht diesen ein R_4, und es ist somit jedem

*) Diess geschieht bekanntlich nur dann, wenn das zu Grunde gelegte algebraische Gebilde hyperelliptisch vom Geschlechte 3 wird. Vgl. Klein, Abel'sche Functionen, (Math. Ann. Bd. 36, pag. 5, Fussnote).

Punkt der Curve C_4 ein R_4 im R_5 zugewiesen. Dieses System von R_4 erhalten wir auch, wenn wir in jedem Punkte der C_4 denjenigen Kegelschnitt suchen, welcher 5 successive Punkte daselbst mit der C_4 gemeinsam hat, und die diesen unendlich vielen Kegelschnitten entsprechende Curve im Raume R_5 aufsuchen, und endlich an diese Curve C in jedem ihrer Punkte den 5 successive Punkte enthaltenden R_4 construiren.

Das R_4-System verhält sich also zur Curve C wie im gewöhnlichen R_3 die Developpable zu ihrer Rückkehrcurve. Durch jeden Punkt des R_5 gehen 8 solche R_4, weil jeder Kegelschnitt die C_4 in 8 Punkten trifft, also der entsprechende Punkt im R_5 in 8 solchen R_4 liegt.

Wollen wir nun unser R_3-System in Bezug auf das einfach unendliche R_4-System charakterisiren, so haben wir blos zu beachten, dass durch jede Erzeugende der F_2 eines solchen R_3, 4 solche R_4 hindurchgehen, Wir können dann sagen:

Die osculirenden R_4 von C, wie wir unser R_4-System bezeichnen wollen, schneiden sich zu je 4 in ∞^4 Geraden. Diese Geraden ordnen sich zu den beiden Regelschaaren von ∞^3 F_2 zusammen, von denen im allgemeinen jede in einem R_3 liegt. Die so entstehenden ∞^3 R_3 bilden das früher ermittelte R_3-System.

In einem beliebigen R_3 wird nun durch die Schnittebenen desselben mit den osculirenden R_4 von C eine Developpable 8ter Classe vom Geschlechte 3 entstehen.

Gehört aber der R_3 unserm System an, dann ist diese Developpable unserer F_2 einfach umschrieben.

Denn in jeder Erzeugenden der F_2 schneiden sich 4 R_4. Es gehen also durch jede Erzeugende 4 Tangentialebenen der Developpablen, eben die Schnitte dieser R_4 mit dem R_3, und da diese auch Tangentialebenen der F_2 sind, so ist der Satz bewiesen.

Eine unwesentliche Modification tritt dann ein, wenn 3 der 4 Punkte unseres Quadrupels auf einer Geraden liegen. Dann gehen nämlich durch den R_3 selbst 2 der acht R_4 hindurch, und durch einen beliebigen Punkt des R_3 daher ausserdem nur 6 Ebenen der Developpablen, welche also dann nur von der 6ten Classe ist. Durch jede Erzeugende der F_2 gehen dann nur 3 Ebenen der Developpablen, so dass diese auch hier der F_2 umschrieben bleibt.

§ 14.

Gleichungen zwischen den Coordinaten r_{ik} unserer R_3.

Wir suchen nun aus den im vorigen ermittelten Sätzen Relationen zwischen den Coordinaten der R_3 des Systems zu gewinnen, also die Gleichungen dieses Systems aufzustellen.

Seien die Gleichungen zweier den R_3 enthaltenden R_4

$$\sum_1^6 X_i U_i = 0, \quad \sum X_i U_i' = 0;$$

ferner

$$X_1 A_x^2 + X_2 B_x^2 + X_3 C_x^2 + X_4 D_x^2 + X_5 E_x^2 + X_6 F_x^2 = 0$$

die Gleichung des Systems der zu den Punkten x der C_4 $a_x^4 = 0$ gehörigen R_4, wo die A_x^2, $B_x^2, \ldots$ die Kegelschnittsgleichungen des § 13 bedeuten.

Dann giebt die Elimination von X_5 und X_6 aus diesen 3 Gleichungen eine lineare Function der X

(14) $$v_1 X_1 + v_2 X_2 + v_3 X_3 + v_4 X_4 = 0$$

und da die Grössen U, U' nur in den betreffenden Determinantenverbindungen eintreten, so ist die linke Seite von (14) auch eine lineare Function der R_3-Coordinaten ϱ_{ik}, oder auch der r_{ik} wegen der Proportionalität derselben zu den ϱ_{ik}.

Wir können nun X_1, X_2, X_3, X_4 als Punktcoordinaten im R_3 interpretiren und dementsprechend sind dann die v als Ebenencoordinaten im R_3 aufzufassen. Es ist uns dann durch (14) die Gleichung der zum Punkt x der C_4 gehörigen Tangentialebene der Developpablen 8ter Classe im R_3 gegeben.

Soll nun der R_3 unserm System angehören, so muss eine quadratische Relation zwischen den v_i, nämlich eben die Gleichung der F_2 des R_3 bestehen.

Sei diese Relation $\sum h_{ik} v_i v_k = 0$, so kann sie entweder identisch, für jeden Werth von x, oder zufolge $a_x^4 = 0$ bestehen. In jedem Falle kann man setzen

(14a) $$\sum h_{ik} v_i v_k = \mu a_x^4,$$

wo dann im ersten Falle μ verschwindet.

Die Vergleichung der Coefficienten entsprechender Glieder in den x giebt nun 15 lineare Gleichungen für die h_{ik} und μ, aus denen man durch Elimination derselben die Bedingungen für das Bestehen von (14a) als das Verschwinden sämmtlicher Determinanten einer Matrix von 15 Horizontal- und 11 Verticalreihen erhält. Die h_{ik} und μ ergeben sich dann in bekannter Weise als den Unterdeterminanten proportional. Dadurch ist nun ein Relationssystem zwischen den Coordinaten eines R_3 unseres Systems aufgestellt, welches gleichzeitig die Coefficienten der F_2-Gleichung zu berechnen gestattet. *Die r_{ik} sind also solche Functionen der $xyzt$, welche das System S völlig festlegen,* nnd es müssen insbesondere sich die Formen K und Δ mit ihrer Hülfe darstellen lassen.

Wir werden jedoch später (§ 20, 21) sehen, dass die r_{ik} noch mehr leisten. *Sie gestatten nämlich auch zwischen einer Quadrupelschaar und ihrer residualen rational zu unterscheiden.* Es rührt dies daher, dass sich die einzelnen r_{ik} gegenüber der Ersetzung eines Quadrupels durch ein residuales anders verhalten als die Coefficienten von K und Δ.

§ 15.

Genauere Discussion der für die r_{ik} gefundenen Relationen.

Wir wollen nun untersuchen, welches R_3-System durch die obigen Relationen definirt wird.

Die v stellen unter allen Umständen 4 linear unabhängige Kegelschnitte des betrachteten R_3 vor. Im Gegenfalle würden nämlich die Ebenen (14) einen Kegel umhüllen, durch dessen Spitze alle osculirenden R_4 der Curve C hindurchgehen müssten. Der Kegelspitze müsste dann in der Ebene ein Kegelschnitt entsprechen, welcher Bestandtheil der C_4 sein müsste.

Sind nun die obigen durch das Verschwinden der Determinante einer Matrix gegebenen Bedingungen erfüllt, und ergiebt sich dabei μ von Null verschieden, so kann die quadratische Relation (14a) durch geeignete lineare Transformation auf die Form

$$\mu\, a_x^4 = V_1 V_4 - V_2 V_3$$

gebracht werden, wo V_1, V_2, V_3, V_4 4 linear unabhängige Kegelschnitte bedeuten.

Die C_4 kann also durch die beiden Büschel

$$V_1 + \lambda V_2 = 0, \quad V_3 + \lambda V_4 = 0$$

erzeugt werden, während die entsprechenden projectiven Punktreihen im R_5 die F_2 unseres R_3 erzeugen. Zu unserm R_3 gehört also jedenfalls eine Schaar corresidualer Quadrupel mit ihrer residualen Schaar, und *er gehört demnach dem in* § 12 *angegebenen System an.*

Ist aber $\mu = 0$, so ist die Relation $V_1 V_4 - V_2 V_3 = 0$ für jeden Werth von x erfüllt. *Die 4 Kegelschnitte* V_1, V_2, V_3, V_4, *und daher alle Kegelschnitte, welche Punkten des* R_3 *entsprechen, gehen dann durch zwei feste Punkte der Ebene der* C_4.

Es müssen nämlich dann alle 4 Kegelschnitte zerfallen, da, wenn z. B. V_1 nicht zerfallen würde, es nothwendig mit V_2 oder V_3 identisch sein müsste, was der linearen Unabhängigkeit widerstreitet. Es müssen aber dann $V_1 V_4$ die nämlichen linearen Factoren enthalten wie $V_2 V_3$, so dass gesetzt werden kann:

$$V_1 = \alpha_x \beta_x, \quad V_4 = \gamma_x \delta_x, \quad V_2 = \alpha_x \gamma_x, \quad V_3 = \beta_x \delta_x,$$

welche Kegelschnitte sämmtlich durch die Schnittpunkte von α_x mit δ_x und von γ_x mit β_x hindurchgehen, womit die Behauptung bewiesen ist.

Es ist auch leicht, dieses Resultat geometrisch zu bestätigen. Der F_2 in einem solchen R_3, für welchen $\mu = 0$ ist, entsprechen nach dem vorigen nämlich diejenigen zerfallenden Kegelschnitte der Ebene, welche aus zwei je durch einen der festen Punkte gehenden Geraden bestehen. Einer Erzeugenden dieser F_2 entspricht demnach ein Kegelschnittbüschel, welches aus einer festen durch den ersten Fixpunkt gehenden Geraden und dem Strahlenbüschel durch den zweiten besteht. Durch diese Erzeugende gehen dann diejenigen R_4, welche zu den 4 Schnittpunkten der festen Geraden mit der C_4 gehören.

Indem wir zusammenfassen, haben wir:

Den aus (14a) *gewonnenen Relationen genügen sowohl die* R_3, *welche Quadrupeln zugeordnet sind, als auch alle diejenigen* R_3, *für welche die entsprechenden Kegelschnittsysteme dadurch specialisirt sind, dass die Kegelschnitte eines solchen Systems durch zwei feste Punkte gehen.*

Da nun die letzteren R_3 ein für sich vollständig bekanntes System bilden, so kann man wohl sagen, unsere Relationen charakterisiren das den Quadrupelschaaren zugeordnete R_3-System vollständig.

Aber um ein „*volles*" Relationssystem zwischen den r_{ik} aufzustellen, wäre es noch nothwendig neue Relationen heranzuziehen, welchen jenes zweite R_3-System nicht genügt.

Wir nehmen diese Frage nicht in Angriff, sondern begnügen uns damit, hienach jene R_3 anzugeben, welche beiden durch die aus (14a) gewonnenen Relationen definirten Systemen gemeinsam sind.

Es sind dies ausschliesslich diejenigen, für welche die beiden festen, allen entsprechenden Kegelschnitten gemeinsamen Punkte auf der C_4 selbst liegen, bei welchen also 3 Punkte der zugehörigen Quadrupel auf einer Geraden liegen. Unter diesen spielen wieder diejenigen eine ausgezeichnete Rolle, wo diese beiden Punkte auf der C_4 einander unendlich nahe rücken, also diejenigen dreifach unendlichen Kegelschnittsysteme, deren Kegelschnitte die C_4 in einem festen Punkt berühren.

§ 16.

Eine Abzählungsaufgabe, betreffend das System der R_3.

Bevor wir uns der Darstellung der R_3-Coordinaten durch die Coordinaten der Punkte eines Quadrupels zuwenden, erledigen wir noch eine Frage, deren Beantwortung uns später die Versicherung giebt, dass wir in die Formeln keine überflüssigen Factoren eingeführt haben.

Lassen wir nämlich einen Punkt t eines Quadrupels die C_4 durchlaufen, während wir die übrigen 3 xyz fest halten, so erhalten wir einfach unendlich viele Quadrupel und dementsprechend einfach unendlich viele R_3 im R_5. Wir fragen nun, *wie oft kommt es vor, dass die Coordinaten dieses* R_3 *einer gegebenen linearen Bedingung genügen,* oder, wenn wir das durch eine solche lineare Bedingung zwischen den Coordinaten definirte R_3-System einen linearen Complex nennen: *Wie viele R_3 hat unser einfach unendliches System mit einem solchen Complex gemeinsam?*

Da es sich nur um die Zahl handelt, so dürfen wir den Complex „specialisiren", das heisst einen solchen Complex betrachten, welcher von allen eine „Gerade schneidenden" R_3 gebildet wird.

Sind p_{ik} die Coordinaten der Geraden, r_{ik} die Coordinaten des R_3, so ist die Gleichung dieses Complexes

$$\sum_{i,k} p_{ik}\, r_{ik} = 0,$$

welche nichts anderes ist, als die entwickelte Determinante der Coordinaten von 6 Punkten, von denen 4 im R_3 und zwei auf der Geraden liegen.

Aber auch die Gerade im R_5, resp. das ihr in der Ebene entsprechende Kegelschnittbüschel specialisiren wir noch dahin, dass seine Kegelschnitte aus einer festen Geraden γ der Ebene und dem Strahlenbüschel durch einen festen Punkt der Ebene bestehen. Die feste Gerade γ bildet zusammen mit allen übrigen Geraden der Ebene die Kegelschnitte eines Netzes, denen die Punkte einer Ebene E im R_5 entsprechen. Da jeder R_3 diese Ebene E im allgemeinen in einem Punkte trifft, so giebt es auch in dem entsprechenden dreifach unendlichen Kegelschnittsystem einen einzigen zerfallenden Kegelschnitt, der γ als Bestandtheil enthält. Für diejenigen R_3, welche zu der durch die Veränderung von t allein entstehenden Quadrupelschaar gehören, ist dieser Kegelschnitt leicht zu finden.

Seien nämlich $\gamma^{(1)}$, $\gamma^{(2)}$ zwei von den 4 Schnittpunkten von γ mit C_4. Ist dann $(xyzt)$ ein Quadrupel, so construiren wir zunächst das zu $(xyzt)$ corresiduale Quadrupel, von welchem $\gamma^{(1)}$ ein Punkt ist, und das residuale, von welchem $\gamma^{(2)}$ ein Punkt ist. Beide Quadrupel liegen dann auf einem dem zugehörigen System S angehörigen Kegelschnitt K_1. Einen zweiten Kegelschnitt K_2 erhalten wir, wenn wir die Punkte $\gamma^{(1)}$ und $\gamma^{(2)}$ in der obigen Construction vertauschen. Beide Kegelschnitte bestimmen dann ein Büschel, von dessen 3 zerfallenden Kegelschnitten einer die Gerade γ als Bestandtheil enthält, und da K_1, K_2 dem System S angehören, so ist dies gerade der gesuchte Kegelschnitt.

Wenn wir nun t die C_4 durchlaufen lassen, so gehört zu jedem Werth von t ein Kegelschnitt K_1 und ebenso ein K_2, welchen im R_5 die Punkte zweier Curven $C^{(1)}$, $C^{(2)}$ entsprechen, die ganz in demjenigen R_3 liegen, dessen Punkte den Kegelschnitten durch $\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}$ entsprechen, es ist die Ordnung dieser Curven zu ermitteln.

Wir untersuchen zu diesem Behufe, wie viele Kegelschnitte K_1 durch einen beliebigen Punkt ξ der C_4 gehen, also die Zahl der Punkte, welche die dem durch $\gamma^{(1)}$, $\gamma^{(2)}$, ξ bestimmten Netz im R_5 entsprechende Ebene mit $C^{(1)}$ gemeinsam hat.

Es muss dann, wenn wir der bequemeren Ausdrucksweise wegen das Abel'sche Theorem benützen, entweder sein

$$w_i = w_i^{x\vartheta^{(1)}} + w_i^{y\vartheta^{(2)}} + w_i^{z\vartheta^{(3)}} + w_i^{t\vartheta^{(4)}} = w^{\gamma^{(1)}\vartheta^{(1)}} + w^{\xi\vartheta^{(2)}} + w^{\eta\vartheta^{(3)}} + w^{\zeta\vartheta^{(4)}}$$

oder aber

$$w_i = - w^{\gamma^{(2)}\vartheta^{(1)}} - w^{\xi\vartheta^{(2)}} - w^{\eta\vartheta^{(3)}} - w^{\zeta\vartheta^{(4)}}$$

je nachdem ξ in dem zu $xyzt$ residualen oder corresidualen Quadrupel vorkommt.

Im ersten Falle legen wir durch xyz und die beiden weiteren Schnittpunkte der Geraden $(\gamma^{(1)}\xi)$ mit der C_4 einen Kegelschnitt, dessen 3 weitere Schnittpunkte mit der C_4 die Punkte $t\eta'\zeta'$ liefern, wo $\eta'\zeta'$ die beiden weiteren Schnittpunkte der Geraden $(\eta\zeta)$ mit der C_4 bedeuten. Von diesen kann jeder Punkt für t genommen werden, was also 3 Quadrupel und 3 Kegelschnitte K_1 liefert. Im zweiten Falle legen wir durch $xyz\,\gamma^{(2)}\,\xi$ einen Kegelschnitt, von dessen 3 weiteren Schnittpunkten mit C_4 dann wieder jeder für t genommen werden kann, so dass also im ganzen 6 Kegelschnitte K_1 durch ξ gehen.

Die Curven $C^{(1)}$ und $C^{(2)}$ sind also beide von der 6ten Ordnung, und da sie beide eindeutig auf die C_4 bezogen sind, so sind sie es auch aufeinander, und zwar so, dass zwei zu demselben Punkte t der C_4 gehörigen Kegelschnitten K_1, K_2 entsprechende Punkte auf resp. $C^{(1)}$ und $C^{(2)}$ gehören. Den Büscheln, welche von je zwei zusammengehörigen Kegelschnitten K_1 und K_2 bestimmt werden, entsprechen daher die Strahlen einer Regelfläche, welche von den beiden eindeutig aufeinander bezogenen Curven $C^{(1)}$, $C^{(2)}$ durch Verbinden entsprechender Punkte erzeugt wird. Diese ist aber, da $C^{(1)}$ und $C^{(2)}$ im allgemeinen keinen Punkt gemeinsam haben, von der 12ten Ordnung. Sie trifft die Ebene E in einer Curve 12ter Ordnung und eine Gerade derselben in 12 Punkten. Diesen entsprechen in der Ebene der C_4 nun zerfallende Kegelschnitte, welche γ als Bestandtheil enthalten und je in einem zu Quadrupeln gehörigen linearen 3-fach unendlichen Kegelschnittsystem liegen, und ausserdem einem und demselben Büschel B angehören. Es giebt somit 12 Punkte t, derart, dass sie mit xyz ein Quadrupel bilden, dessen zugehöriger R_3 die dem Büschel B im R_5 entsprechende Gerade trifft, und *die Zahl der Lösungen unserer Aufgabe ist also gleich* 12.

§ 17.

Berechnung der r_{ik} als Formen der $xyzt$.

Da unser Hauptziel die Lösung des Umkehrproblems ist, so müssen wir die r_{ik} später in Functionen der w_i umsetzen. Um dies zu ermöglichen ist es aber nöthig, zunächst ihre Abhängigkeit von den $xyzt$

näher zu untersuchen. Wie schreiten daher zur Berechnung derselben als Formen der $xyzt$.

Seien $XYZT$ vier Punkte eines R_3, so ist z. B.

$$r_{56} = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 & Y_4 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 & Z_4 \\ T_1 & T_2 & T_3 & T_4 \end{vmatrix}$$

und wenn wir die Coordinaten der Geraden (XY) und (ZT) einführen

$$p_{ik} = X_i Y_k - X_k Y_i,$$
$$p'_{ik} = Z_i T_k - Z_k T_i$$

so wird

(15) $r_{56} = p_{12}p'_{34} + p_{23}p'_{14} + p_{31}p'_{24} + p_{14}p'_{23} + p_{24}p'_{31} + p_{34}p'_{12}.$

Sind nun $(xyzt)$ und $(x'y'z't')$ zwei corresiduale Quadrupel, so können wir die Coordinaten der Geraden welche den beiden durch sie gelegten Kegelschnittbüscheln im R_5 entsprechen für die p_{ik}, p'_{ik} setzen, und so r_{56} berechnen.

Von diesen Formeln ist dann dadurch, dass wir $xyzt$ unendlich nahe an $x'y'z't'$ rücken lassen, also mit Hilfe corresidualer Differentiation zu solchen überzugehen, welche bloss $xyzt$ enthalten.

Es ist nun z. B. nach der in § 10 getroffenen Verabredung

$$\pi_{12} = \varrho\, p_{12} = \begin{vmatrix} C_x^2 & D_x^2 & E_x^2 & F_x^2 \\ C_y^2 & D_y^2 & E_y^2 & F_y^2 \\ C_z^2 & D_z^2 & E_z^2 & F_z^2 \\ C_t^2 & D_t^2 & E_t^2 & F_t^2 \end{vmatrix}$$

und ähnlich die übrigen 5 in (15) vorkommenden p_{ik}, p'_{ik} wobei zu beachten ist, dass in allen diesen 6 Determnianten die letzten beiden Colonnen fest bleiben und nur die ersten beiden mit den Indices i, k wechseln.

Der so erhaltene Ausdruck für r_{56} ist nun durch die Determinante $\Sigma \pm A_{11} B_{22} C_{33} D_{12} E_{23} F_{31}$ theilbar, da er verschwindet, sobald die 6 Kegelschnitte A_x^2, B_x^2, C_x^2, D_x^2, E_x^2, F_x^2 nicht linear unabhängig sind. Man bestätigt dies, indem man etwa F_x^2 als lineare Combination der übrigen annimmt und die dadurch gegebenen Reductionen in r_{56} ausführt.

Nachdem aber die einzelnen Glieder von r_{56} linear sind in A_{ik}, B_{ik}, C_{ik}, D_{ik}, da z. B. in $p_{12}p'_{34}$ der erste Factor nur A und B, der zweite nur C und D enthält, dagegen quadratisch in den E und F, so ergiebt sich, dass r_{56} nach Absonderung der obigen Determinante 6^{ten} Grades nur mehr linear von den Coefficienten von E_x^2 und F_x^2 abhängt, von den A, B, C, D, dagegen ganz unabhängig ist.

Vor Ausführung der corresidualen Differentiation sind noch einige im folgenden oft gebrauchte Identitäten zu beachten.*)

Aus der früher erwähnten Identität

$$(16)\qquad p_{12}p_{34} + p_{23}p_{14} + p_{24}p_{31} = 0$$

folgt, wenn die p_{ik} als Functionen irgend welcher Parameter aufgefasst werden, durch Differentiation:

$$(17)\qquad \begin{aligned} p_{12}dp_{34} + p_{34}dp_{12} + p_{23}dp_{14} + p_{14}dp_{23} + p_{24}dp_{31} \\ + p_{31}dp_{24} = 0 \end{aligned}$$

und

$$(18)\qquad \begin{aligned} 2(dp_{12}dp_{34} + dp_{23}dp_{14} + dp_{24}dp_{31}) + p_{12}d^2p_{34} + p_{34}d^2p_{12} \\ + p_{23}d^2p_{14} + p_{14}d^2p_{23} + p_{24}d^2p_{31} + p_{31}d^2p_{24} = 0. \end{aligned}$$

Denken wir uns nun $(xyzt)$ als Functionen eines Parameters λ, durch dessen Aenderung das Quadrupel in ein corresiduales übergeht, was mit Rücksicht darauf, dass die Quadrupelschaar einfach unendlich ist, gestattet ist, und setzen wir

$$p'_{ik} = p_{ik} + \lambda\frac{dp_{ik}}{d\lambda} + \frac{\lambda^2}{1.2}\cdot\frac{d^2p_{ik}}{d\lambda^2} + \cdots$$

so wird mit Rücksicht auf die Identitäten (16), (17), (18), bis auf Glieder höherer Ordnung.

$$(19)\qquad r_{56} = -\lambda^2\left\{\frac{dp_{12}}{d\lambda}\cdot\frac{dp_{34}}{d\lambda} + \frac{dp_{23}}{d\lambda}\cdot\frac{dp_{34}}{d\lambda} + \frac{dp_{31}}{d\lambda}\cdot\frac{dp_{24}}{d\lambda}\right\}.$$

Hier können wir für die Differentiale dp_{ik} geradezu die durch corresiduale Differentiation (§ 4) erhaltene Aenderung erster Ordnung setzen, und den Factor λ^2 mit dem Proportionalitätsfactor ϱ^2 aus (6) § 4 bei Einführung der $d\omega_x$ etc. verschmelzen, um beide zusammen hernach nicht weiter zu beachten.

Zur Ausführung der corresidualen Differentiation bilden wir wie in § 4 zunächst

$$(20)\qquad D_{ik} = \alpha_x\alpha_y\alpha_z\alpha_t\,dp_{ik} - 2d(\alpha_x\alpha_y\alpha_z\alpha_t)\,p_{ik}$$

und erhalten z. B. für das durch Differentiation nach x entstehende Glied von 20 für $i = 1$, $k = 2$: $2\alpha_y\alpha_z\alpha_t(yzt)\Delta_x^{12}$, wo Δ_x^{12} die folgende Bedeutung hat:

$$\Delta_x^{12} = a_x^3\begin{vmatrix} (C\alpha a)C_x, & (D\alpha a)D_x, & (E\alpha a)E_x, & (F\alpha a)F_x \\ C_y^2 & D_y^2 & E_y^2 & F_y^2 \\ C_z^2 & D_z^2 & E_z^2 & F_z^2 \\ C_t^2 & D_t^2 & E_t^2 & F_t^2 \end{vmatrix},$$

und bei analoger Bezeichnung der durch Differentiation nach y, z, t entstehenden Glieder

*) Vgl. hiezu die ganz ähnlichen Verhältnisse in der Liniengeometrie. Klein, über gewisse Differentialgleichungen der Liniengeometrie. (Math. Ann. Bd. 6.)

$$(21)\qquad D_{ik} = 2\,[(y\,z\,t)\,\alpha_y\,\alpha_z\,\alpha_t\,\Delta_x{}^{ik} \qquad (z\,t\,x)\,\alpha_z\,\alpha_t\,\alpha_x\,\Delta_y{}^{ik} + (t\,x\,y)\,\alpha_t\,\alpha_x\,\alpha_y\,\Delta_z{}^{ik} - (x\,y\,z)\,\alpha_x\,\alpha_y\,\alpha_z\,\Delta_t{}^{ik}]$$

Wegen der Identitäten (16), (17) ist aber nach Unterdrückung der Proportionalitätsfactoren

$$(22)\qquad \{D_{12}D_{34} + D_{23}D_{14} + D_{24}D_{31}\} = \alpha_x{}^2\alpha_y{}^2\alpha_z{}^2\alpha_t{}^2 \,.\, r_{56}\,.$$

Hier ist noch auf beiden Seiten der Factor $\alpha_x{}^2\alpha_y{}^2\alpha_z{}^2\alpha_t{}^2$ und die Determinante $\Sigma \pm A_{11}B_{22}C_{33}D_{12}E_{23}F_{31}$ abzusondern, *worauf sich schliesslich r_{56} ergiebt als proportional zu einer Covariante vom* 6ten *Grade in den einzelnen $x\,y\,z\,t$, vom* 2ten *Grade in den Coefficienten der C_4 und linear in den einzelnen Coefficienten von $E_x{}^2$, $F_x{}^2$.*

§ 18.

Das Verhalten von r_{56} beim Zusammenfallen zweier Stellen xy, beziehungsweise bei sonstiger Specialirung des Quadrupels $xyzt$.

Es soll jetzt gezeigt werden dass r_{56} von der 4ten Ordnung verschwindet, wenn etwa x mit y zusammenfällt. Wir knüpfen den Beweis dafür an die Formel (22), da die in dieser noch abzusondernde Factoren keinen Einfluss auf die Ordnung dieses Verschwindens haben.

Setzt man $y_i = x_i + \xi_i$ $(i = 1, 2, 3)$ und entwickelt D_{ik} nach Potenzen der ξ bis zu Gliedern zweiter Ordnung inclus., so erhält man

$$[2u\,\Delta_x{}^{ik} + v\,\delta\,\Delta_x{}^{ik} - w\,\delta\,\Delta_y{}^{ik} + s\,\delta^2\,\Delta_x{}^{ik} + \alpha_t\,\alpha_x{}^2\,(t\,x\,\xi)\,\delta\,\Delta_z{}^{ik} - \alpha_z\,\alpha_x{}^2\,(x\,\xi\,z)\,\delta\,\Delta_t{}^{ik}]_{x=y}$$

wo δ resp. δ^2 die Glieder erster resp. 2ter Ordnung der Entwicklung nach ξ bedeuten und die u, v, w, s sich aus den von den Indices ik unabhängigen Factoren der Glieder in D und ihren Aenderungen zusammensetzen. Nun hat man damit r_{56} zu bilden.

Es ergiebt sich inclusive der Glieder 2ter Ordnung:

$$\begin{aligned}
&4u^2\,[\Delta_x{}^{12}\Delta_x{}^{34} + \Delta_x{}^{23}\Delta_x{}^{14} + \Delta_x{}^{31}\Delta_x{}^{24}]_{x=y}\\
&+ 2uv\;\;[\Delta_x{}^{12}\,\delta\,\Delta_x{}^{34} + \Delta_x{}^{34}\,\delta\,\Delta_x{}^{12} + \cdots]_{x=y}\\
&- 2uw\,[\Delta_x{}^{12}\,\delta\,\Delta_y{}^{34} + \Delta_x{}^{34}\,\delta\,\Delta_y{}^{12} + \cdots]_{x=y}\\
&+ v^2\quad[\delta\,\Delta_x{}^{12}\,\delta\,\Delta_x{}^{34} + \cdots]_{x=y}\\
&- v\,w\quad[\delta\,\Delta_x{}^{12}\,\delta\,\Delta_y{}^{34} + \delta\,\Delta_y{}^{12}\,\delta\,\Delta_x{}^{34} + \cdots]_{x=y}\\
&+ w^2\quad[\delta\,\Delta_y{}^{12}\,\delta\,\Delta_y{}^{34} + \cdots]_{x=y}\\
&+ 2u\,\alpha_x{}^2\,\alpha_t\,(t\,x\,\xi)\,[\Delta_x{}^{12}\,\delta\,\Delta_z{}^{34} + \Delta_x{}^{34}\,\delta\,\Delta_z{}^{12} + \cdots]_{x=y}\\
&- 2u\,\alpha_x{}^2\,\alpha_z\,(x\,\xi\,z)\,[\Delta_x{}^{12}\,\delta\,\Delta_t{}^{34} + \Delta_x{}^{34}\,\delta\,\Delta_t{}^{12} + \cdots]_{x=y}\,.
\end{aligned}$$

Hier verschwinden zunächst die Coefficienten von u^2, v^2, w^2, da sowohl die $\Delta_x{}^{ik}$ als auch die $\delta\,\Delta_x{}^{ik}$, $\delta\,\Delta_y{}^{ik}$ einzeln Determinanten derselben 4-zeiligen, 6-reihigen Matrices sind.

Der Coefficient von $2uv$ geht aus der für jedes y bestehenden Identität

$$\Delta_x^{12}\Delta_x^{34} + \Delta_x^{23}\Delta_x^{14} + \Delta_x^{31}\Delta_x^{24} = 0 \tag{23}$$

durch die Substitution $y = x + \xi$ und Entwicklung nach ξ hervor, indem er die Glieder erster Ordnung dieser Entwicklung enthält.

Der Coefficient von $2uw$ verschwindet zufolge der symbolischen Identität, welche aus (23) durch Vertauschung von x und y hervorgeht. Setzt man nämlich in (23) nach dieser Vertauschung $y + \xi$ für y, und nimmt die Glieder erster Ordnung in ξ, setzt hierauf $y = x$, so erhält man die Coefficienten von $2uw$.

Aus (23) erhält man ferner, wenn man nach Vertauschung von x mit y für x $x+\xi$ schreibt und die Glieder zweiter Ordnung in ξ heraushebt,

$$a_y^3 b_y^3 \cdot \left\{ \begin{vmatrix} (Ca\alpha)C_y \\ C_x^2 \\ C_s^2 \\ C_t^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (Ab\alpha)A_y \\ A_\xi^2 \\ A_s^2 \\ A_t^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (Aa\alpha)A_y \\ A_x^2 \\ A_s^2 \\ A_t^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (Cb\alpha)C_y \\ C_\xi^2 \\ C_s^2 \\ C_t^2 \end{vmatrix} \right.$$
$$\left. + 4 \begin{vmatrix} (Ca\alpha)C_y \\ C_x C_\xi \\ C_s^2 \\ C_t^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (Ab\alpha)A_y \\ A_x A_\xi \\ A_s^2 \\ A_t^2 \end{vmatrix} + \cdots \right\} = 0$$

wo für die Determinante nur die erste Verticalreihe geschrieben ist. Das mit dem Factor 4 behaftete Glied verschwindet aber für sich und die ersten beiden werden dem Coefficienten von $2su$ gleich, der also ebenfalls identisch verschwindet.

Es bleiben noch der Coefficient von vw und die beiden letzten Glieder übrig.

Aber wir sehen, dass auch diese identisch verschwinden, wenn wir beachten, dass x und y auf der C_4 einander unendlich nahe rücken.

Der Coefficient von vw lautet bis auf Zahlenfactoren

$$\begin{vmatrix} (Ca\alpha)C_x a_x^3 \\ C_x C_\xi \\ C_s^2 \\ C_t^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_x^2 \\ (Ab\alpha)A_\xi b_x^3 + 3(Ab\alpha)A_x b_x^2 b_\xi \\ A_s^2 \\ A_t^2 \end{vmatrix}$$
$$+ \begin{vmatrix} (Aa\alpha)A_x a_x^3 \\ A_x^2 A_\xi \\ A_s^2 \\ A_t^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} C_x^2 \\ (Cb\alpha)C_\xi b_x^3 + 3(Cb\alpha)C_x b_x^2 b_\xi \\ C_s^2 \\ C_t^2 \end{vmatrix} + \cdots.$$

Nun wird für unendlich kleines ξ, da y auf der C_4 an x heranrückt,

ξ_i proportional mit $(a\alpha)_t a_x^3$ und also $C_x C_\xi$ proportional zu $C_s(Ca\alpha)a_s^3$. und ebenso $A_x A_\xi$ proportional zu $A_s(Aa\alpha)a_s^3$. Daher verschwindet auch der Coefficient von vw.

Der Coefficient des vorletzten Gliedes lautet endlich

$$\begin{vmatrix} C_x(Ca\alpha)a_s^3 \\ C_s^2 \\ C_s^2 \\ C_t^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_s^2 \\ A_s A_\xi \\ A_s(Ac\alpha)c_s^3 \\ A_t^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C_s^2 \\ C_s C_\xi \\ C_s(Cc\alpha)c_s^3 \\ C_t^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (Aa\alpha)A_x a_s^3 \\ A_s^2 \\ A_s^2 \\ A_t^2 \end{vmatrix} + \cdots.$$

Dieselbe Bemerkung wie oben zeigt, dass für unendlich kleine ξ dies proportional wird zu

$$\begin{vmatrix} (Ca\alpha)C_s a_x^3 \\ C_x^2 \\ C_s^2 \\ C_t^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (Ab\alpha)A_x b_x^3 \\ A_x^2 \\ A_s(Ac\alpha)c_s^3 \\ A_t^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (Cb\alpha)C_s b_s^3 \\ C_x^2 \\ C_s(Cc\alpha)c_s^3 \\ C_t^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (Ac\alpha)A_s a_x^3 \\ A_s^2 \\ A_s^2 \\ A_t^2 \end{vmatrix} + \cdots.$$

Dies geht aber aus (23) hervor, wenn man zuerst $y = x$ setzt, dann $s + \xi$ für s schreibt und in den Gliedern erster Ordnung in ξ aus demselben Grunde wie oben ξ_i proportional zu $(c\alpha)_i c_s^3$ setzt. Es muss daher ebenfalls für jedes x, s, t verschwinden, aus diesem Gliede geht aber das letzte durch Vertauschung von s und t hervor.

Die r_{ik} verschwinden also für $x = y$ von höherer als der zweiten Ordnung. Da sie nun bei Vertauschung von x und y das Zeichen nicht wechseln, *so verschwinden sie mindestens von der vierten Ordnung.*

Unsere frühere Abzählung (§ 16) lehrt nun, dass wir auch keine Factoren mehr abzusondern haben. Denn zu den dort nachgewiesenen von xys verschiedenen 12 Nullstellen treten nun diese selbst 4-fach zählend hinzu, was zusammen genau die aus dem Grade von r_{ik} in t folgende Anzahl 24 der Nullstellen giebt woraus zugleich folgt, dass sie im Allgemeinen auch nicht von höherer als der vierten Ordnung verschwinden, wenn zwei Punkte des Quadrupels zusammenrücken.

Wir fügen noch folgende Bemerkungen hinzu:

Liegen 3 von den 4 Punkten des Quadrupels auf einer durch u gehenden Geraden, so gehen nach Früherem alle den Punkten des zugehörigen R_3 entsprechenden Kegelschnitte durch u und t. Die r_{ik} werden daher einfach proportional den Ausdrücken $A_t^2 B_u^2 - A_u^2 B_t^2$, $A_t^2 C_u^2 - A_u^2 C_t^2$, etc.

Werden die 4 Punkte $xyst$ zu einem Berührungsquadrupel, so müssen, da dann im Kegelschnittsystem S keine 4 linear unabhängigen Kegelschnitte vorkommen, die r_{ik} sämmtlich verschwinden.

Liegen alle 4 Punkte des Quadrupels auf einer Geraden, so müssen die r_{ik} ebenfalls sämmtlich verschwinden.

§ 19.

Die $r(xyzt; A, B)$ und die Beziehung der r_{ik} zur Fundamentalcombinante des dreifach unendlichen linearen Kegelschnittsystems.

Es erscheint zweckmässig den Ende des § 17 bereits constatirten Umstand, dass r_{56} nur die Coefficienten von E_x^2, F_x^2 enthält, auch in der Bezeichnung zum Ausdruck zu bringen. Wir bezeichnen daher die l. c. definirte Covariante 6^{ten} Grades in den einzelnen $xyzt$, 2^{ten} Grades in den Coefficienten der C_4 und linear in den einzelnen Coefficienten von E_x^2, F_x^2 mit $r(xyzt; E, F)$ und entsprechend die zu r_{12} proportionale Covariante mit $r(xyzt; A, B)$ etc.

Diese Covariante steht nun in nächster Beziehung zu der fundamentalen Combinante desjenigen linearen Kegelschnittsystems, dessen Kegelschnitten die Punkte des R_3 im R_5 entsprechen.

In der That sind k_x^2, l_x^2, m_x^2, n_x^2 4 solche Kegelschnitte, so ist die fundamentale Combinante*)

$$\begin{vmatrix} k_\xi^2 & l_\xi^2 & m_\xi^2 & n_\xi^2 \\ k_\eta^2 & l_\eta^2 & m_\eta^2 & n_\eta^2 \\ k_\zeta^2 & l_\zeta^2 & m_\zeta^2 & n_\zeta^2 \\ k_\tau^2 & l_\tau^2 & m_\tau^2 & n_\tau^2 \end{vmatrix}.$$

Indem man nun die 4 Kegelschnitte mit Hilfe der Coordinaten der ihnen im R_5 entsprechenden Punkte ausdrückt, erkennt man, dass die fundamentale Combinante in der Form geschrieben werden kann

$$(24)\qquad \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & X_5 & X_6 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 & Y_4 & Y_5 & Y_6 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 & Z_4 & Z_5 & Z_6 \\ T_1 & T_2 & T_3 & T_4 & T_5 & T_6 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_\xi^2 & B_\xi^2 & C_\xi^2 & D_\xi^2 & E_\xi^2 & F_\xi^2 \\ A_\eta^2 & B_\eta^2 & C_\eta^2 & D_\eta^2 & E_\eta^2 & F_\eta^2 \\ A_\zeta^2 & B_\zeta^2 & C_\zeta^2 & D_\zeta^2 & E_\zeta^2 & F_\zeta^2 \\ A_\tau^2 & B_\tau^2 & C_\tau^2 & D_\tau^2 & E_\tau^2 & F_\tau^2 \end{vmatrix}$$

und also als lineare Function der r_{ik} und somit auch der $r(xyzt; AB)$ etc. geschrieben werden kann.

Würde man für $\xi\eta\zeta\tau$ speciell die 4 Schnittpunkte der beiden Kegelschnitte E_x^2, F_x^2 einsetzen, so würde aus der obigen Formel sich die Fundamentalcombinante geradezu proportional zu $r(xyzt; EF)$ ergeben, so dass also diese Covariante nicht wesentlich von der Fundamentalcombinante des R_3, wie wir sie kurz benennen wollen, verschieden ist, da ja E_x^2, F_x^2 zwei ganz beliebige Kegelschnitte sind.

Daraus folgt, dass die im vorigen gegebene Theorie der r_{ik} gerade so gut von der Fundamentalcombinante aus hätte gewonnen werden können.

*) Gordan, über Combinanten, Math. Annalen Bd. 5.

Andererseits zeigt uns (24), dass wir die Gleichung des einem Punkte des R_3 entsprechenden Kegelschnittes, der durch drei Punkte der Ebene der C_4 η, ξ, τ geht, sofort hinschreiben können, sobald die r_{ik}, resp. die $r(xyzt; A, B)$ etc. bekannt sind.

§. 20

Berechnung der r_{ik} aus den Coefficienten von $K(xyzt;\ \xi\eta)$.

Es ist ferner von Wichtigkeit, auch den Zusammenhang der r_{ik} mit den Coefficienten von $K(xyzt;\ \xi\eta)$ zu kennen.

Die betreffenden Rechnungen vereinfachen sich bedeutend, wenn man setzt:

$$A_x^2 = x_1^2,\ B_x^2 = x_2^2,\ C_x^2 = x_3^2,\ D_x^2 = 2x_1x_2,\ E_x^2 = 2x_2x_3,\ F_x^2 = 2x_1x_3.$$

Wir müssen zu diesem Zwecke zunächst die Gleichung unserer F_2 in R_4-Coordinaten entwickeln. Sind $m_x^2 + \lambda n_x^2 = 0$ und $m_x'^2 + \lambda n_x'^2 = 0$ zwei die C_4 erzeugende Kegelschnittbüschel, so wird die Bedingung dafür, dass ein R_4 die ihnen im R_5 entsprechenden Geraden in entsprechenden Punkten schneidet, dadurch in den Coordinaten U dieses R_4 ausgedrückt, dass man in obigen Gleichungen setzt

$$U_i = x_i^2\ (i=1,2,3),\quad U_l = 2x_{l'}x_{l''}$$

wo $l = 4, 5, 6$, wenn l', l'' resp. gleich 1, 2 oder 2, 3 oder 1, 3 werden. Führt man daher zwei Reihen von Symbolen ξ, η ein, so dass

$$\xi_i^2 = \eta_i^2 = U_i \qquad (i=1\,2\,3),$$

$$2\xi_{l'}\xi_{l''} = 2\eta_{l'}\eta_{l''} = U_l \qquad \left(\frac{l = |\ 4\ |\ 5\ |\ 6\ |}{l'l'' = |\ 12\ |\ 23\ |\ 31\ |}\right)$$

wird, so ist die gesuchte Gleichung der F_2 gegeben durch

$$m_\xi^2 n_\eta'^2 - m_\eta'^2 n_\xi^2 = 0.$$

Aber es ist auch

$$m_\xi m_\eta \cdot n_\xi' n_\eta' - m_\xi' m_\eta' \cdot n_\xi n_\eta = \varrho\, k(x, y, z, t;\ \xi\eta)$$

und wegen § 7, (9)

(25) $$m_\xi^2 n_\xi'^2 - m_\xi'^2 n_\xi^2 = \varrho\ k(xyzt;\ \xi\xi)$$
$$= \varrho\, c(xyt)\,(yzt)\,(ztx)\,(txy)\,.\,a_\xi^4,$$

wo ξ und η beliebige Werthe, also auch Symbole bedeuten können. Durch zweimalige Polarisation nach η erhält man nun aus (25)

$$m_\xi^2 n_\eta'^2 + m_\eta^2 n_\xi'^2 - m_\xi'^2 n_\eta^2 - m_\eta'^2 n_\xi^2$$
$$+ 4m_\xi m_\eta n_\xi n_\eta' - 4m_\xi' m_\eta' n_\xi n_\eta = 6\varrho c f a_\xi^2 a_\eta^2$$

und damit, da ξ und η Symbole derselben Grössenreihe U sind, die gesuchte Gleichung der F_2 in symbolischer Form

(26) $$3cfa_\xi^2 a_\eta^2 - 2k(xyzt;\ \xi, \eta) = 0,$$

wo

$$f = (xyz)(yzt)(ztx)(txy)$$

gesetzt ist, und c gleichzeitig mit $k(xyzt;\ \xi\eta)$ gegeben ist, wegen § 7, (9).

Führt man nun in diese Gleichung die Grössen U für die Symbole ein, so erhält man einen in den U quadratischen Ausdruck für welchen wir die Bezeichnungen

$$\Phi(xyzt;\ U) = \sum A_{ik} U_i U_k$$

einführen wollen.

Die Determinante dieses Ausdruckes muss verschwinden, und ebenso die ersten Unterdeterminanten derselben, da ja das durch $\Phi = 0$ definirte Gebilde zweiter Classe in einem R_3 liegt. *Die Coordinaten dieses R_3 müssen daher proportional den Determinanten irgend einer aus 4 Horizontal- oder Verticalreihen der Determinante von Φ gebildeten Matrix sein.* Dadurch sind also die Verhältnisse der R_3- Coordinaten durch die Coefficienten von ξ und η in $k(xyzt;\ \xi\eta)$ ausgedrückt.

Man kann aber auch bis auf eine numerische Constante diese selbst erhalten.

Betrachten wir zu diesem Zweck die Determinante

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} & X_1 & Y_1 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & A_{26} & X_2 & Y_2 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} & A_{36} & X_3 & Y_3 \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} & A_{46} & X_4 & Y_4 \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} & A_{56} & X_5 & Y_5 \\ A_{61} & A_{62} & A_{63} & A_{64} & A_{65} & A_{66} & X_6 & Y_6 \\ X_1' & X_2' & X_3' & X_4' & X_5' & X_6' & 0 & 0 \\ Y_1' & Y_2' & Y_3' & Y_4' & Y_5' & Y_6' & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

und setzen wir

$$X_i Y_k - X_k Y_i = p_{ik}, \quad X_i' Y_k' - X_k' Y_i' = p_{ik}',$$

so werden bei der Entwicklung nach den p_{ik} die Coefficienten derselben nach der obigen Bemerkung sämmtlich mit verschiedenen Proportionalitätsfactoren μ_{ik} proportional zu $\sum r_{ik} p_{ik}'$.

Die ganze Determinante nimmt daher die Form an

$$\sum \mu_{ik}\, p_{ik} \cdot \sum r_{ik}\, p_{ik}'$$

und da sie in den p und p' symmetrisch ist, so sind auch die μ_{ik} den r_{ik} proportional. Die Determinante wird daher, wenn man nun $p_{ik} = p_{ik}'$ setzt, gleich

(26a) $$\mu^2 \left(\sum r_{ik}\, p_{ik}\right)^2.$$

Die Vergleichung der Grade in den $xyzt$ und den Coefficienten der C_4 ergiebt endlich das Resultat, das μ eine rein numerische Constante ist.

Daraus ergeben sich die r_{ik} selbst als Quadratwurzeln aus rationalen Functionen der Coefficienten von $k(xyzt;\ \xi, \eta)$, und speciell ist

$$(27)\qquad \sqrt{\sum \pm A_{11} A_{22} A_{33} A_{44}} = \mu\, r_{56}.$$

Dadurch ist zugleich die in § 18 gewonnene Ordnungszahl des Verschwindens von r_{ik} für $x = y$ bestätigt.

§ 21.

Von der Trennung der zwei Erzeugendensysteme unserer F_2 mittelst der r_{ik}.

Es ist nun die bereits in § 14. a. E. in Aussicht genommene Unterscheidung zwischen den beiden Schaaren von Erzeugenden unserer F_2, also der Quadrupelschaar und ihrer residualen, durchzuführen.

Setzen wir in Φ $U_5 = 0$ und $U_6 = 0$, so beschränken wir uns damit auf diejenigen die F_2 berührenden R_4, welche die beiden durch diese Gleichungen festgelegten Punkte enthalten, und Φ wird unter dieser Voraussetzung die Gleichung desjenigen R_4-Gebildes, welches die Tangentenebenen der F_2 aus der Kante (5, 6) des Coordinatenhexatop's im R_5 projicirt.

Speciell werden die R_3 dieses Gebildes den R_3 der F_2 in Erzeugenden der F_2 schneiden. Um aber diese R_3 zu erhalten, können wir genau dieselben Formeln anwenden, welche die Erzeugenden einer F_2 im 3-dimensionalen Raume liefern, nur dass wir nicht die Coordinaten einer Geraden, sondern eines R_3 erhalten, welcher den R_3 der F_2 längs einer Erzeugenden schneidet.

Setzen wir also symbolisch

$$\sum A_{ik} U_i U_k = A_U^2 = B_U^2 \quad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

und bilden

$$\Psi(xyzt;\ \varrho_{ik}) = \frac{1}{2}(ABXY)^2,$$

$$\varrho_{ik} = X_i Y_k - X_k Y_i \quad (i, k = 1,2,3,4)$$

und bezeichnen wir mit ϱ_{ik} die Coordinaten eines R_3, welcher die F_2 berührt, und durch die Ecken (5), (6) des Coordinatenhexatop's geht, mit P_{ik} die Coordinaten eines R_3, welcher die durch den Berührungspunkt des vorigen gehenden Erzeugenden enthält, ferner mit D die Determinante links in (27), so ist*)

$$(28)\qquad P_{ik} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial \Psi}{\partial \varrho_{lm}} \pm \sqrt{D}\cdot \varrho_{ik},$$

*) Vgl. Voss, Math. Annalen Bd. 10, pag. 166. Die Formel ist dort auf $\Sigma x_i^2 = 0$ als Relation zwischen den Liniencoordinaten bezogen und giebt transformirt (28) des Textes.

wo die Indices lm mit den Indices ik der Gleichung

$$\sum \varrho_{ik} \varrho_{lm} = \varrho_{12} \varrho_{34} + \varrho_{23} \varrho_{14} + \varrho_{31} \varrho_{24} = 0$$

gemäss zusammenhängen, und P_{ik} verschwindet, sobald i, k einen der Werthe 5 oder 6 annehmen.

Damit ergeben sich dann die Coordinaten einer einzelnen durch den Berührungspunkt des R_3 mit den Coordinaten ϱ_{ik} gehenden Erzeugenden:

$$(29)\quad \begin{array}{c|c}
\multicolumn{2}{c}{p_{56} = P_{12} r_{34} + r_{12} P_{34} + r_{23} P_{14} + P_{23} r_{14} + P_{31} r_{24} + P_{24} r_{31}} \\
p_{35} = P_{12} r_{64} + P_{14} r_{26} + P_{24} r_{61} & p_{36} = P_{12} r_{54} + P_{14} r_{25} + P_{24} r_{51} \\
p_{45} = P_{12} r_{36} + P_{23} r_{16} + P_{13} r_{62} & p_{46} = P_{12} r_{35} + P_{23} r_{15} + P_{31} r_{25} \\
p_{26} = P_{34} r_{15} + P_{41} r_{34} + P_{13} r_{45} & p_{25} = P_{34} r_{16} + P_{14} r_{63} + P_{34} r_{16} \\
p_{15} = P_{24} r_{36} + P_{32} r_{46} + P_{34} r_{62} & p_{16} = P_{34} r_{15} + P_{14} r_{53} + P_{13} r_{45}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
\hline
p_{12} = P_{34} r_{56} & p_{23} = P_{14} r_{56} & p_{24} = P_{13} r_{56} & p_{34} = P_{12} r_{56} & p_{13} = P_{24} r_{56} & p_{14} = P_{23} r_{56} \\
\hline
\end{array}$$

Daraus erhält man schliesslich die Gleichung eines Kegelschnittes in der Ebene der C_4, welcher dem durch die p_{ik} bestimmten Büschel angehört und durch den Punkt η geht, aus:

$$\sum p_{mn} (U_m V_n - V_m U_n) = 0 \quad (m, n = 1 \ldots 6),$$

wenn für die U und V wie in § 20 *gesetzt wird*

$$(30)\quad \left.\begin{array}{l} U_i = x_i^2 \\ V_i = \eta_i^2 \end{array}\right\} i = (1, 2, 3), \qquad \begin{array}{l} U_l = 2 x_{l'} x_{l''} \\ V_l = 2 \eta_{l'} \eta_{l''} \end{array} \quad \begin{array}{c|c|c|} l = 4 & 5 & 6 \\ \hline l' l'' = 12 & 23 & 31 \end{array}.$$

Zur vollständigen Lösung der zu Anfang des § bezeichneten Aufgabe ist nun noch ein R_3 anzugeben, welcher durch die Ecken (5) und (6) des Coordinatenhexatop's geht und die F_2 berührt, und ferner über das Vorzeichen in (28) zu entscheiden, da ja erst hiedurch zwischen den beiden Schaaren von Erzeugenden, also den zu $(xyzt)$ residualen und corresidualen Quadrupeln unterschieden wird.

Ein R_3 von der gesuchten Beschaffenheit ist derjenige, dem in der Ebene Kegelschnitte entsprechen, welche die C_4 im willkürlichen Punkte $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3 = 0$ berühren, wenn $\zeta_3 = 0$ selbst eine Tangente der C_4 ist, was ja stets bei gegebenem ζ durch rationale lineare Transformation erreicht werden kann. In der That giebt es im Allgemeinen nur einen einzigen Kegelschnitt, welcher die C_4 in ζ berührt und zugleich ein zu $(xyzt)$ corresiduales Quadrupel mit einem residualen verbindet, nämlich denjenigen, welcher das einzige ζ enthaltende zu $(xyzt)$ corresiduale Quadrupel mit dem ebenfalls einzigen ζ enthaltenden residualen Quadrupel verbindet.

In dem diesem Kegelschnitt im R_5 entsprechenden Punkt fallen daher beide Schnittpunkte des obigen R_3 mit der F_2 zusammen.

Derselbe enthält offenbar auch die Punkte $U_5 = 0$, $U_6 = 0$, da er ja alle Punkte enthält, welchen $x_3 = 0$ als Bestandtheil enthaltende

Kegelschnitte entsprechen, *und seine Coordinaten können daher als* ϱ_{ik} *verwendet werden.*

Es wird so

(31) $$\varrho_{12} = \zeta_1\zeta_2, \quad \varrho_{14} = \zeta_1^2, \quad \varrho_{24} = -\zeta_2^2$$

und die übrigen Coordinaten verschwinden.

§ 22.

Bestimmung des in § 21 unbestimmt gebliebenen Vorzeichens.

Zur Bestimmung des Vorzeichens in (28), also zur Entscheidung darüber, welche der beiden aus (28) erhaltenen Erzeugenden einem zu $(xyzt)$ residualen oder corresidualen Quadrupel entspricht, ist es nothwendig, wenigstens ein P_{ik} für einen Specialfall zu berechnen. Die Durchführung dieser Rechnung gelingt, wenn man voraussetzt (xyt) liegen auf einer durch u gehenden Geraden. Dann liegt nämlich in dem Hilfs-R_3 mit den Coordinaten ϱ_{ik} derjenige Kegelschnitt des Systems S, welcher aus den Verbindungslinien von ζ mit u und t besteht. Die Kegelschnitte durch die Punkte des corresidualen Quadrupels bestehen dann aus der Geraden (ζu) und den Strahlen durch t. Damit erhalten wir durch die 4 Kegelschnitte

$$2x_2x_4 = 2x_1x_3 = (x\zeta u)(x_1t_3 - x_3t_1) = (x\zeta u)(x_2t_3 - x_3t_2) = 0$$

den R_3 bestimmt und durch Ausrechnung

(32) $$P_{12} = t_3u_3(u_1\zeta_2 - u_2\zeta_1)(t_1\zeta_2 + t_2\zeta_1).$$

Um über das Zeichen in (28) entscheiden zu können, muss früher noch eine Normirung über r_{56} und damit, wegen (26a), aller r_{ik} vorgenommen werden.

Für $(xyz) = 0$ geht $K(xyzt;\,\xi\eta)$ über in $\nu(\xi\eta u)(\xi\eta t)$. Man erhält nun durch Ausrechnung

$$\begin{aligned}\Phi &= -2\nu(\xi\eta u)(\xi\eta t)\\ &= -4\nu\Big\{\Big(U_2U_3 - \tfrac{1}{4}U_5\Big)^2 u_1t_1 + \Big(U_3U_1 - \tfrac{1}{4}U_6^2\Big)u_2t_2\\ &\quad + \Big(U_1U_2 - \tfrac{1}{4}U_4^2\Big)u_3t_3 + \Big(\tfrac{1}{4}U_6U_4 - \tfrac{1}{2}U_1U_5\Big)(u_2t_3 + u_3t_2)\\ &\quad + \Big(\tfrac{1}{4}U_4U_5 - \tfrac{1}{2}U_2U_6\Big)(u_3t_1 + u_1t_3)\\ &\quad + \Big(\tfrac{1}{4}U_5U_6 - \tfrac{1}{2}U_3U_1\Big)(u_1t_2 + u_2t_1)\Big\}.\end{aligned}$$

Damit wird

(34) $$D = -\nu^4\begin{vmatrix} 0, & -2u_3t_3, & -2u_2t_2, & 0\\ -2u_3t_3, & 0, & -2u_1t_1, & 0\\ -2u_2t_2, & -2u_1t_1, & 0, & u_1t_2 + u_2t_1\\ 0, & 0, & u_1t_2 + u_2t_1, & t_3u_3\end{vmatrix}$$

$$= 4\nu^4t_3^2u_3^2(u_1t_2 - u_2t_1)^2.$$

Nun ist wegen § 19, a. E.

$$r_{56} = 4\lambda t_3 u_3 (u_2 t_1 - u_1 t_2)$$

und daher wegen Formel (27)

$$\lambda = \pm \frac{\nu^2}{2\mu}.$$

Es werde nun r_{56} so normirt, dass $\mu = 1$ ist, und das obere Zeichen gilt.

Man erhält nun für

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\Psi}{\partial\varrho_{34}} = -2u_3 t_3 (u_2 t_2 \zeta_1^2 - u_1 t_1 \zeta_2^2)$$

und damit aus (28) und (32)

$$P_{12} = -2u_3 t_3 (u_2 t_2 \zeta_1^2 - u_1 t_1 \zeta_2^2) \pm 2u_3 t_3 (u_1 t_2 - u_2 t_1) \cdot \zeta_1 \zeta_2.$$

Um Proportionalität zu (33) zu erhalten, hat man das obere Zeichen zu wählen, und es wird bei obiger Normirung für r_{56} endlich definitiv

$$(35) \qquad P_{ik} = \frac{1}{2}\frac{\partial\Psi}{\partial\varrho_{lm}} + r_{56}\varrho_{ik}.$$

Wir sind also durch unsere Untersuchungen dazu geführt worden in $k(xyzt;\ \xi\eta)$ und den r_{ik} ein System von rationalen Covarianten einzuführen, welche im Wesentlichen nur von der Quadrupelschaar, nicht aber von dem einzelnen zu ihrer Berechnung dienenden Quadrupel abhängen.

Diese Formen gestatten ferner umgekehrt, das einzelne residuale oder corresiduale Quadrupel mit Hilfe der Formeln der letzten beiden Paragraphen explicit zu berechnen.

Wir vermeiden dabei alle überflüssigen Irrationalitäten, insbesondere die Benutzung von Doppeltangenten oder Wurzelfunctionen.

Die Bedeutung des letzteren Umstandes wird im 2ten Theil (§ 36) dieser Untersuchungen hervortreten.

II. Die eingeführten Gebilde in ihrer Abhängigkeit von den transcendenten Argumenten.

§ 23.

Vorerinnerungen.

Es ist für den weitern Gang unserer Untersuchungen zunächst nöthig, kurz an diejenigen Formen und Functionen zu erinnern, welche Herr Klein in die Theorie der Abelschen Functionen eingeführt hat.*)

Zunächst werde durch die Formel

$$(36) \qquad Q_{xy}^{\xi\eta} = \int_y^x \int_\eta^\xi d\omega_z\, d\omega_\zeta \, \frac{(abc)^2 \sum\limits_{\varkappa+\lambda+\mu=4} a_z^\varkappa b_z^\lambda c_z^\mu a_\zeta^{\lambda+\mu} b_\zeta^{\varkappa+\mu} c_\zeta^{\varkappa+\lambda}}{24 a_\zeta^3 a_z}$$

*) Klein, zur Theorie der Abel'schen Functionen, Math. Ann. Bd. 36, § 4, 5, 6, 9.

das von Herrn Pick*) eingeführte, covariant normirte Integral dritter Gattung definirt.

Dann ist durch

$$(37)\qquad \Omega(xy) = \frac{(\varkappa x y)}{\sqrt{a_x^3 a_\varkappa \cdot a_y^3 a_\varkappa}}\, e^{\frac{1}{2}\left(Q_{xy}^{x'y'} + Q_{xy}^{x''y''} + Q_{xy}^{x'''y'''}\right)},$$

wo $\varkappa$ einen beliebigen Punkt der Ebene und $x'x''x'''$, $y'y''y'''$ resp. die drei weiteren Schnittpunkte der Geraden $\overline{\varkappa x}$, $\overline{\varkappa y}$ mit der C_4 bedeuten die von Herrn Klein eingeführte *Primform* definirt. Sie ist eine Form vom Grade $-\frac{1}{2}$ in den x und y, vom Grade -1 in den Coefficienten der C_4, und ihre charakteristische Eigenschaft besteht darin, auf der C_4 überall endlich zu sein und nur für $x = y$ zu verschwinden.

Lässt man x auf dem algebraischen Gebilde einen Periodenweg beschreiben, wobei die Integrale w_i^{xy} die Perioden ω_i, die zugehörigen Integrale 2ter Gattung die Perioden $-\eta_i$**) erhalten, so ändert sich Ω um den Factor

$$(38)\qquad \pm e^{\sum \eta_i \left(w_i^{xy} + \frac{\omega_i}{2}\right)}.$$

Definirt man ferner

$$(39)\qquad \mathsf{H}_{xy}^{x^i y^i} = \lg \frac{(h x x^{(i)})(h y y^i)}{(h x y^i)(h y x^i)} - Q_{xy}^{x^i y^i}$$

und setzt $\mathsf{H}_{xy}^{xy} = \mathsf{H}(xy)$, so findet man

$$(40)\qquad \Omega(xy) = \frac{(\varkappa x y)}{\sqrt{a_x^3 a_\varkappa \cdot a_y^3 a_\varkappa}}\, e^{\frac{1}{2}\mathsf{H}(xy)}$$

wo man $\mathsf{H}_{xy}^{x^i y^i}$ in die Form setzen kann

$$(41)^{**})\qquad \mathsf{H}_{xy}^{x^i y^i} = \int_y^x \int_{y^i}^{x^i} \frac{4 a_h a_z^3 \cdot a_h a_{z'}^3 - \sum_1^4 a_h a_z^{\nu-1} a_{z'}^{4-\nu} + \sum_1^3 a_h^2 a_z^{\nu-1} a_{z'}^{4-\nu-1} a_z^{4-\nu} a_{z'}^{\nu}}{4(h z z')^2} \cdot d\omega_z d\omega_{z'}.$$

Ist ferner $g_x = 0$ die Gleichung einer Geraden und sind $g^{(1)} g^{(2)} g^{(3)} g^{(4)}$ die Schnittpunkte derselben mit der C_4, so definirt

$$(42)\qquad m(x) = \frac{\Omega(x g^{(1)})\, \Omega(x g^{(2)})\, \Omega(x g^{(3)})\, \Omega(x g^{(4)})}{g_x}$$

---

*) Pick, Math. Annalen Bd. 29.

**) Zu Formel (39) und (41) vergl. Pick l. c. § 4, a. E. Zu Formel (40) vgl. Pascal, sullo sviluppo delle Funzioni σ Abeliani dispari di genere 3. Annali di Matematica Serie II, tom XVII.

eine nirgends verschwindende, aber auch nirgends unendlich werdende Form von der Dimension -3 in den x. Sie ändert sich, wenn x einen Periodenweg durchläuft, um den Factor

$$(43)\qquad e^{\sum \eta_i (W_i^x + 2\omega_i)},$$

wo

$$W_i^x = w_i^{x\varrho^{(1)}} + w_i^{x\varrho^{(2)}} + w_i^{x\varrho^{(3)}} + w_i^{x\varrho^{(4)}}$$

gesetzt ist.

Die 4te Wurzel aus dieser Form bezeichnet Herr Klein als *fundamentale Mittelform*. Sie kann noch in einen bloss von den x und einen bloss von den g abhängigen Factor gespalten werden.

Obwohl nun diese Formen unmittelbar an der C_4 dargestellt sind, ist es doch bequem, nebenher die Sprechweise der gewöhnlichen Riemann'schen Theorie gebrauchen zu können.

Wir setzen in $a_x^4 = 0$ einfach $x_2 = 1$ und betrachten x_3 als Function von x_1. Dadurch ist uns eine Riemann'sche Fläche gegeben, und zwar eine „canonische Fläche"*), welche wir benützen wollen. Diese denken wir uns durch passende Querschnitte in eine einfach zusammenhängende verwandelt und verwenden sie zu einer Festsetzung über die Formen Ω, m. Dieselben sind nämlich durch die obigen Formeln nicht absolut definirt, sondern sie stellen unendlich viele untereinander nicht zusammenhängende Werthereihen vor**). Wenn wir nun zunächst bei $\Omega(xy)$ annehmen, dass xy beide in der Nähe einer und derselben Stelle z liegen und der Integrationsweg von $\mathsf{H}(xy)$ ebenfalls in der Umgebung von z verläuft, so ist dadurch ein bestimmtes Ω definirt. Alle andern in der Untersuchung auftretenden Ω, also auch die zur Definition von $m(x)$ benützten, sollen nun aus diesem Ω durch analytische Fortsetzung in der zerschnittenen Fläche hervorgehen. Die möglichen Fortsetzungen in der unzerschnittenen Fläche werden dann durch die Exponentialfactoren (38), (43) bestimmt und zwar so, dass die in ihnen vorkommenden Integrale erster Gattung dann Integrationswege in der zerschnittenen Fläche haben.***)

§ 24.

Der Factor M und die Producte kM^2, ΔM^4, rM^4.

Nach diesen Vorerinnerungen nehmen wir die Betrachtung unserer Formen $k(xyzt;\xi\eta)$, $\Delta(xyzt;\xi)$ und $r(xyzt;AB)$ wieder auf.

---

*) Klein, l. c. § 7 ff.

**) Klein, l. c. § 5.

***) Vgl. die analogen Festsetzungen im hyperelliptischen Fall bei Hrn. Burkhardt: Zur Theorie der hyperellipt. Sigmafunctionen, Math. Annal. 32, § 17.

Die früheren geometrischen Ueberlegungen zeigen, dass die Nullstellen einer solchen Form, wenn man sie etwa als allein von den x abhängig betrachtet, in zwei Classen zerfallen. Die Nullstellen der ersten Classe bestimmen zusammen mit yzt Quadrupel von bestimmten Eigenschaften, die Nullstellen der zweiten Classe liegen in den mehrfach gezählten Punkten yzt.

Mit Hilfe der im vorigen definirten Formen Ω, m ist es nun möglich die Formen k, Δ, r von den Nullstellen der zweiten Classe zu befreien und gleichzeitig sie in Functionen der $xyzt$ umzuwandeln, ohne ihnen neue Null- oder Unendlichkeitsstellen aufzuzwingen.

Bilden wir nämlich

$$(44)\qquad M = \frac{m(x)\, m(y)\, m(z)\, m(t)}{\Omega(xy)\, \Omega(xz)\, \Omega(xt)\, \Omega(yz)\, \Omega(yt)\, \Omega(zt)}\ {}^{*)}$$

und betrachten $k.M^2$, $\Delta.M^4$, $r.M^4$, so werden diese zu Formen nullter Dimension, d. i. also Functionen der $xyzt$, welche nirgends unendlich werden, und beim Zusammenfallen zweier Stellen xy nicht mehr verschwinden.

Wenn nun x auf der Riemann'schen Fläche einen Periodenweg beschreibt, so ändert sich nach (27) und (32) M um den Factor

$$\pm e^{\sum \eta_i (W_i^x + 2\omega_i) - \sum \eta_i \left(w_i^{xy} + w_i^{xz} + w_i^{xt} + \frac{3\omega_i}{2}\right)}.$$

Mit Rücksicht auf die Festsetzungen am Ende des vorigen Paragraphen wird diess zu

$$\pm e^{\sum \eta_i \left(w_i + \frac{\omega_i}{2}\right)},$$

wenn wie früher gesetzt ist

$$w_i = w_i^{x g^{(1)}} + w_i^{y g^{(2)}} + w_i^{z g^{(3)}} + w_i^{t g^{(4)}}.$$

Durch Multiplication mit resp. M^2, M^4 gehen also unsere Formen in Functionen der $xyzt$ über, welche beim Ueberschreiten eines Querschnittes sich resp. um die Factoren

$$(45)\qquad e^{2\sum \eta_i \left(w_i + \frac{\omega_i}{2}\right)},\quad e^{4\sum \eta_i \left(w_i + \frac{\omega_i}{2}\right)}$$

ändern, welche nur mehr von den w aber nicht mehr vom einzelnen $xyzt$ abhängen.

---

*) Es ist dies derselbe Multiplicator den Herr Klein l. c. zur Construction der σ-Functionen benutzt.

§ 25.

kM^2, ΔM^4, rM^4 sind Functionen der w_i allein.*)

Es lässt sich aber weiter zeigen, dass diese Functionen selbst lediglich von den w abhängen, und nicht mehr von den einzelnen $xyzt$.

Seien nämlich zwei Werthsysteme $xyzt$ und $x'y'z't'$, welche dieselben Werthe der w_i liefern, also corresidual sind, und bilden wir einmal mit dem einen und einmal mit dem andern Werthsystem die obigen Functionen kM^2, ΔM^4, rM^4 und betrachten den Quotienten der beiden Werthe einer Function für die beiden Quadrupel. Zunächst ergiebt sich aus dem Schlusssatz des vorigen Paragraphen, dass dieser Quotient ungeändert bleibt, wenn die $xyzt$ und die corresidualen $x'y'z't'$ irgendwelche geschlossenen Wege am algebraischen Gebilde durchlaufen. Wir können uns nun etwa $xyztx'$ als unabhängige Argumente denken, durch welche $y'z't'$ vollständig bestimmt sind. Wegen der Symmetrie der Function in den letzteren ist der Quotient eine rationale Function der ersten 5 Argumente. Aber Zähler und Nenner haben nur mehr Nullstellen der ersten Classe, welche eine Eigenschaft der ganzen Quadrupelschaar ausdrücken, und da die geometrische Bedeutung des Zählers und Nenners die gleiche ist, so verschwinden beide immer gleichzeitig und von der gleichen Ordnung. Unsere rationale Function ist also eine Constante, deren Werth wir für das specielle Werthsystem $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$, $t = t'$ gleich Eins finden.

Die Functionen kM^2, ΔM^4, rM^4 hängen daher nur von den Integralsummen w_i ab. —

§ 26.

Reihenentwicklung der eingeführten Functionen nach den w.**)

Man wird nun Reihenentwicklungen nach den w_i zu erhalten suchen. Diess gelingt nach einem von Herrn Weierstrass***) herrührenden Gedankengang. Wir können dabei, wie Herr Burkhardt im Falle der hyperelliptischen Sigmafunctionen die Betrachtung von Quotienten von Potenzreihen vermeiden, da unsere Functionen am algebraischen Gebilde überall endlich sind, müssen aber dessen Gedankengang insofern etwas modificiren, als wir die Entwicklungen der Integralsummen w_i bei unserm Ansatz nicht umkehren können, wenn die oberen Grenzen in die Nähe der untern fallen.

Letzteren Uebelstand können wir folgendermassen vermeiden:

Wir bezeichnen mit $\alpha^{(1)}$, $\alpha^{(2)}$, $\alpha^{(3)}$, $\alpha^{(4)}$ irgend 4 Stellen der Riemann'schen Fläche und mit w_i' die Werthe der w_i wenn $xyzt$ in diese Stellen fallen.

*) Vgl. § 27 der cit. Abhandlung des Herrn Burkhardt.

**) Vgl. Burkhardt l. c. § 22 ff.

***) Crelle's Journal Bd. 52.

Dann ist

$$w_i - w_i' = w_i^{x\,\alpha^{(1)}} + w_i^{y\,\alpha^{(2)}} + w_i^{z\,\alpha^{(3)}} + w^{t\,\alpha^{(4)}}.$$

Werden nun die $xyzt$ genügend nahe an den resp. Werthen α angenommen, so kann man die $w_i - w_i'$ nach Potenzen der von $x_1 - \alpha_1^{(1)}$, $y_1 - \alpha_1^{(2)}$, $z_1 - \alpha_1^{(3)}$, $t_1 - \alpha_1^{(4)}$ entwickeln, sofern unsere Punkte nicht in der Nähe von Verzweigungsstellen liegen, was man immer vermeiden kann.

Diese Entwicklung beginnt wie folgt:

$$w_i - w_i' = \frac{\alpha_i^{(1)}}{a_3 a^3_{\alpha^{(1)}}}(x_1 - \alpha_1^{(1)}) + \frac{\alpha_i^{(2)}}{a_3 a^3_{\alpha^{(2)}}}(y_1 - \alpha_1^{(2)})$$
$$+ \frac{\alpha_i^{(3)}}{a_3 a^3_{\alpha^{(3)}}}(z_1 - \alpha_1^{(3)}) + \frac{\alpha_i^{(4)}}{a_3 a^3_{\alpha^{(4)}}}(t_1 - \alpha_1^{(4)}) + \cdots$$

und enthält in der Folge nur solche Glieder, deren Nenner Potenzen der in den Anfangsgliedern auftretenden Nenner sind.*)

Es genügt, um alle Werthe der w zu erhalten, wenn man etwa yzt beliebig variiren lässt, x aber mit $\alpha^{(1)}$ zusammenfallen lässt.

Sind dann die Stellen α so gewählt, dass sich um jede ein Bereich abgrenzen lässt, in welchem kein Verzweigungspunkt liegt und die Determinante (yzt) niemals verschwindet, so lange die yzt resp. in dem um $\alpha^{(2)}\alpha^{(3)}\alpha^{(4)}$ abgegrenzten Bereich bleiben, so lassen sich nach bekannten Sätzen die $y_1 - \alpha_1^{(2)}$, $z_1 - \alpha_1^{(3)}$, $t_1 - \alpha_1^{(4)}$ nach Potenzen der $w_i - w_i'$ entwickeln. Als Nenner haben die Coefficienten der letzteren Reihenentwicklung nur Potenzen der Determinante $(\alpha^{(2)}\alpha^{(3)}\alpha^{(4)})$ und der $a_3 a^3_{\alpha^{(i)}}$. Die Functionen kM^2, ΔM^4, $r.M^4$ lassen sich aber in dem nämlichen Bereich nach Potenzen der $y_1 - \alpha_1^{(2)}$, $z_1 - \alpha_1^{(3)}$, $t_1 - \alpha_1^{(4)}$ entwickeln. Durch Substitution der für die $y_1 - \alpha_1^{(1)}$ erhaltenen Reihen kann man also für die kM^2, ΔM^4, rM^4 Reihen erhalten, welche zunächst nach Potenzen von $w_i - w_i'$ fortschreiten und in einem bestimmten Bereich der $w_i - w_i'$ convergiren.

Man kann aber auch Reihen erhalten für die Werthe, welche unsere 3 Functionen für die doppelten Integralsummen w_i annehmen. Man kann nämlich zunächst setzen

$$2w_i = \int_{g^{(1)}}^{x'} dw_i + \int_{g^{(2)}}^{y'} dw_i + \int_{g^{(3)}}^{z'} dw_i + \int_{g^{(4)}}^{t'} dw_i$$

und die Functionen $K(x'y'z't';\,\xi\eta)\,M'^2$ etc. für die Werthe $x'y'z't'$ bilden. Da sie symmetrisch in den $x'\,y'\,z'\,t'$ sind und nicht unendlich werden, so können sie wieder nach Potenzen der $(y_1 - \alpha_1^{(2)})$, $(z_1 - \alpha_1^{(3)})$,

*) Vgl. Pascal l. c. § 10.

$(t_1 - \alpha_1{}^4)$ im nämlichen Bereich wie oben entwickelt, und die neue Entwicklung in eine solche nach Potenzen der $w_i - w_i'$ verwandelt werden. Schreibt man hierin $\frac{1}{2}(w_i - w_i')$, so müssen die zuletzt erhaltenen Reihen mit den zuerst erhaltenen identisch werden, aber sie haben nun sicher den doppelten Convergenzbereich.

Indem man auf diese Weise fortfährt, überzeugt man sich, dass der anfängliche Convergenzbereich über alle Grenzen ausgedehnt werden kann und kommt schliesslich so in bekannter Weise zu dem Satz:

Unsere Functionen sind ganze analytische Functionen der $w_i - w_i'$ und daher auch der w_i.

Daraus ergiebt sich im Zusammenhang mit (45) weiter:

Unsere Functionen sind ganze Jacobi'sche Functionen der w, welche zur Charakteristik $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ gehören.

§ 27.

Ueber die Coefficienten der Reihenentwicklungen nach Potenzen der w_i.

Nach § 25 müssen nun unsere Functionen gänzlich unabhängig von den $\alpha^{(\lambda)}$ sein, und können sich daher bei Veränderung derselben nicht ändern. Lassen wir dieselben daher allmählich sich den Stellen $g^{(\lambda)}$ nähern, so behalten die Functionen ihre Werthe, die w_i' verschwinden und die Coefficienten der Reihenentwicklung müssen sich einzeln bestimmten Werthen nähern.

Es handelt sich nun um nähere Angaben über diese Coefficienten in ihrer Abhängigkeit von den Coefficienten der C_4-gleichung.

Es ist von vornherein klar, dass transcendente Functionen der letzteren nur durch die Entwicklung von M eintreten können, und auch diese nur durch die Entwicklung der in M auftretenden Exponentiellen. In Folge dessen tritt zuvörderst ein allen Coefficienten gemeinschaftlicher transcendenter Factor heraus, und da im Exponenten nur Doppelintegrale rationaler Functionen der Coefficienten der C_4 auftreten, so können ausser diesem Factor nur durch die ersten Differentialquotienten nach den $xyzt$, wenn diese dann den $\alpha^{(\lambda)}$ gleichgesetzt werden, transcendente Elemente in die Entwicklung eintreten. Aber diese verschwinden sämmtlich beim Grenzübergang von den $\alpha^{(\lambda)}$ zu den $g^{(\lambda)}$. Es sind nämlich z. B. die für die Differentiation nach x in Betracht kommenden Glieder des Exponenten:

$$\frac{1}{2}\left\{\mathsf{H}(xg^1) + \mathsf{H}(xg^2) + \mathsf{H}(xg^3) + \mathsf{H}(xg^4) - \mathsf{H}(xy) - \mathsf{H}(xz) - \mathsf{H}(xt)\right\}.$$

Da es hier gleichgiltig ist, ob vor oder nach der Differentiation nach x der Grenzübergang mit yzt vollzogen wird, so bleibt nur $\mathsf{H}(x, g^{(1)})$, dessen erster Differentialquotient aber als Integral mit zusammenfallenden Grenzen für $x = g^{(1)}$ verschwindet.*)

Daher enthalten die Coefficienten der Reihenentwicklungen nach dem Grenzübergang, abgesehen von dem gemeinsamen transcendenten Factor, die Coefficienten der C_4 nur algebraisch, und zwar rational, und wie aus den Entwicklungen der einzelnen Bestandtheile sofort ersichtlich ist, ausschliesslich mit solchen Nennern, welche nur von den g abhängen, soweit sich dieselben nicht bereits wegheben.

Nun hängt aber in den Functionen kM^2, ΔM^4, rM^4 lediglich M ebenfalls von g ab, und zwar so, dass sich ein blos von g abhängiger Factor abscheiden lässt, worauf eine Form verbleibt, welche blos von den $xyzt$ abhängt. Derselbe blos von g abhängige Factor muss sich in der resp. 2ten, 4ten Potenz auch von der bei uns in Betracht kommenden Reihenentwicklung absondern lassen, worauf diese unabhängig werden muss von den g. Es müssen also die Nenner der Reihenentwicklung alle in diesen Factor eintreten, und *es können somit nur ganze rationale Functionen der C_4-Coefficienten als Coefficienten in der Reihenentwicklung nach Potenzen der w übrig bleiben.*

Ferner ergiebt sich aus dem Umstande, dass die Functionen kM^2, ΔM^4, rM^4 aus durchaus zur C_4 covarianten Elementen aufgebaut sind, also selbst Covarianten der C_4 sind, im Verein mit der Bemerkung dass sich die Integralsummen w_i cogredient mit den x, y, z, t linear transformiren, dass auch die einzelnen homogenen Terme der Entwicklung nach w Covarianten der C_4 sein müssen, in welchen eine Reihe Punktcoordinaten durch die w_i ersetzt ist.

Indem man nun auch der früher ermittelten Aenderung der Functionen kM^2, ΔM^4, rM^4 bei Vermehrung der Argumente um Perioden Rechnung trägt, erhält man alles zusammenfassend den Satz:

*Die Functionen $k(xyzt;\xi\eta)M^2$, $\Delta(xyzt;\xi)M^4$, $r(xyzt;AB)M^4$ sind nach Abscheidung eines blos von g abhängigen Factors Jacobi'sche Functionen**) der w_i, die erste vom 2ten Grade, die letzten beiden vom 4ten Grade, deren Reihenentwicklung nach Potenzen der w nach ganzen rationalen Covarianten der C_4, in welchen eine Reihe Punktcoordinaten durch die w_i ersetzt ist, fortschreiten.*

Wir wollen diese Jacobi'schen Functionen in Zukunft resp. mit $K(w;\xi,\eta)$, $D(w;\xi)$, $R(w;A,B)$ bezeichnen und werden sehen, dass die K, D gerade, die R dagegen ungerade Jacobi'sche Functionen vorstellen.

---

*) Man ersieht diess auch aus der von Herrn Pascal l. c. § 9 a. E. gegebenen Reihenentwicklung für $e^{\frac{1}{2}H(xy)}$.

**) Im Sinne des Herrn Frobenius, Crelle J. 97.

§ 28.

Die Entwicklung von $K(w; \xi, \xi)$.

Wir beginnen die Untersuchung der einzelnen Entwicklungen mit der Betrachtung von $K(w; \xi, \xi)$. Der algebraische Factor hat hier nach § 7, Formel 9 die einfache Gestalt

$$(xyz)\,(yzt)\,(ztx)\,(txy)\;a_\xi^4.$$

Werden die w_i unendlich klein, rücken also die $xyzt$ unendlich nahe an die $g^{(\lambda)}$ heran, so bleibt der Factor M^2 endlich, der algebraische Factor dagegen wird von der 4ten Ordnung unendlich klein. Die Entwicklung von $K(w; \xi, \xi)$ muss also mit einem Gliede 4ter Ordnung beginnen. Werden andererseits die

$$w_i = \int_u^t x_i\, d\omega_x$$

gesetzt, so verschwindet unsere Function für jedes ξ (§ 2). Rücken hier u und t unendlich nahe an x, so reducirt sich die ganze Function auf das Anfangsglied, die w_i auf $x_i\, d\omega_x$, und dieses muss daher verschwinden, wenn statt der w_i die x_i substituirt werden. Wir schliessen weiter:

Da für die x_i ausser $a_x^4 = 0$ keine Relation besteht, so muss a_w^4 ein Theiler des Anfangsgliedes der Reihenentwickelung sein, und dieses selbst kann nur lauten $J \,.\, a_w^4 \,.\, a_\xi^4$, wo J eine Invariante der C_4 bezeichnet. Aber die Invariante J kann nur eine numerische Constante sein. Denn sonst gäbe es eine durch $J = 0$ charakterisirte Classe von Curven 4ter Ordnung, auf welcher unsere Function für unendlich kleine w_i immer von höherer als der 4ten Ordnung unendlich klein würde. Diess ist aber unmöglich, so lange die C_4 nicht in eine 4-fach gezählte Gerade ausartet, denn so lange kann man immer 4 Punkte so annehmen, dass der algebraische Factor nicht von höherer als der 4ten Ordnung verschwindet. Setzen wir nun

$$K(w; \xi, \xi) = \varphi(w) \,.\, a_\xi^4,$$

so ist hiernach das Anfangsglied der Entwicklung von $\varphi(w)$ gegeben durch $c a_w^4$.

Hiermit stimmt folgende Ueberlegung: schreibt man λa an Stelle von a, so werden die w_i zu $w_i \lambda^{-1}$, und mit Rücksicht auf das erste Glied $\varphi(w)$ zu $\lambda^{-8}\varphi(w)$. Dieselbe Aenderung müssen alle Glieder von $\varphi(w)$ aufweisen, und *es ist daher das nte Glied eine Covariante vom Typus $\Phi(\overset{n-8}{a}, \overset{n}{w})$*, wo die über die Buchstaben gesetzten Zahlen den Grad in den einzelnen a, w angeben.

Beachten wir nun, dass $K(w; \xi, \eta) = 0$ dieselbe Bedeutung für die zu $xyzt$ residuale Quadrupelschaar hat, wie für die dazu corresiduale

Schaar, also in ξ und η dieselbe Gleichung für die w_i, als auch die $-w_i$ bedeuten muss, so ergiebt sich, dass k als Form der w nur gerade oder ungerade sein kann. Da ferner in der Entwicklung ein gerades Glied vorkommt, *so sind alle Glieder in den w_i von gerader Ordnung**) und es ist daher das auf $c a_w^4$ folgende Glied speciell eine Covariante vom Typus $\Phi(\overset{3}{a}\overset{6}{w})$, und *da nur die Hesse'sche Covariante die angegebenen Dimensionszahlen hat, so ist das zweite Glied von φ bis auf einen Zahlenfactor dieser letzteren proportional.*

Endlich ziehen wir noch einen Schluss auf die Dimension des von den g befreiten Factors M^2 in den Coefficienten der C_4. Sie ergiebt sich gleich -3.

Die hier betrachtete Jacobi'sche Function $\varphi(w)$ ist von ganz anderer Seite her von Herrn Frobenius**) eingeführt und ebenso bezeichnet worden, Herr Frobenius zeigt nämlich l. c. dass nur eine mit unserer gleichändrige Jacobi'sche Function zweiten Grades existirt, welche mit den Gliedern 4[ter] Ordnung a_w^4 beginnt, im 2[ten] Glied die Hesse'sche Covariante hat und verschwindet, wenn die w_i die Form einfacher Integrale annehmen. Unsere Herleitung weist dieselbe als proportional zur einfachsten Covariante des Quadrupels auf, und zeigt damit auf's Neue, dass ihr Verschwinden die nothwendige und *hinreichende* Bedingung dafür ist, dass die w_i in die Form einfacher Integrale gebracht werden können.

§ 29.

Entwicklung von $K(w;\xi,\eta)$.

Für die Entwicklung von $K(w;\xi,\eta)$ beachten wir zunächst, dass dieses für

$$w_i = \int_u^t x_i \, d\omega_x$$

nach § 7, a. E. proportional werden muss zu $(\xi\eta u)(\xi\eta t)$. Um den Proportionalitätsfactor zu vermitteln, halten wir u fest und lassen t die C_4 durchlaufen. $K(w;\xi,\eta)$ muss dann an 6 Stellen t verschwinden. Vier von diesen liefert die Gerade $(\xi\eta t)$ und wenigstens einer muss in u liegen, da ja $K(w;\xi,\eta)$ für die $w_i = 0$ verschwinden muss. Da nun nach dem vorigen Paragraphen $K(w;\xi,\xi)$ und auch $K(w;\xi,\eta)$ eine gerade Function der w ist, und andrerseits in $t = u$ nicht

*) Es ist ja auch aus der Theorie der Jacobi'schen Functionen bekannt, dass eine mit K gleichändrige Function nur gerade sein kann. Vergl. die sofort zu nennende Arbeit des Herrn Frobenius.

**) Crelle's Journal B. 105.

mehr als zwei Nullstellen liegen können, so ergiebt sich für unsere speciellen w_i

$$K(w;\, \xi\eta) = c(\xi\eta u)\,(\xi\eta t)\,\Omega^2(ut), \tag{35}$$

wo c wegen der Uebereinstimmung der Dimension in t und den Coefficienten der C_4 nur eine numerische Constante bedeutet. Lässt man nun u unendlich nahe an t rücken, so ergiebt sich daraus nach einer seit Riemann oft geübten Schlussweise die Entwicklung:

$$K(w;\, \xi\eta) = c(\xi\eta w)^2 + [w]_4 + [w]_6 + \cdots, \tag{47}$$

wo die folgenden Terme $[w]_{2n}$ Covarianten vom Typus $\Phi(\overset{2n-2}{a}, \overset{2}{\xi}, \overset{2}{\eta}, \overset{2n}{w})$ sind.

Speciell das zweite Glied lässt sich nach einem bekannten Satz der Formentheorie durch Potenzen und Producte von Polaren der C_4 gebildet nach ξ, η, w darstellen. —

§ 30.

Beziehung von $K(w;\, \xi, \eta)$ zu den Quadraten der 28 ungeraden Sigmafunctionen.

Die Function $K(w;\, \xi, \eta)$ steht auch zu den Quadraten der 28 ungeraden σ-functionen des Herrn Klein in nächster Beziehung.

Sei D_x eine Doppeltangente der C_4 mit der ungeraden Primcharakteristik $[\varepsilon]$, ferner seien $d^{(1)}, d^{(2)}$ die Berührungspunkte dieser Doppeltangente mit der C_4. Dann verschwindet die σ-Function mit derselben Primcharakteristik bekanntlich immer und nur für diejenigen w_i, welche auf die Form

$$w_i = \int_{d^{(1)}}^{x} x_i\, d\omega_x + \int_{d^{(2)}}^{y} x_i\, d\omega_x$$

gebracht werden können.

Geometrisch bedeutet diess nichts anderes, als dass es dann zu den w_i immer ein Quadrupel giebt, welches die beiden Punkte $d^{(1)}, d^{(2)}$ enthält. Wählt man nun für ξ und η zwei Punkte auf der Doppeltangente $\zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}$, welche $d^{(1)}, d^{(2)}$ harmonisch trennen, so sind diess ein Paar conjugirter Punkte in Bezug auf alle Quadrupel, für welche zwei Punkte nach $d^{(1)}, d^{(2)}$ fallen, und es muss daher immer gleichzeitig mit $\sigma(w)$ auch $K(w;\, \zeta^{(1)}, \zeta^{(2)})$ verschwinden. Nun ist aber $K(w;\, \xi, \eta)$ mit den $\sigma^2(w)$ gleichändrig, und daher als lineares Aggregat von sieben unter ihnen herstellbar. Wählt man dazu sieben solche, deren Charakteristiken ein $[\varepsilon]$ enthaltendes vollständiges System*)

*) Vgl. Weber, Theorie der Abel'schen Functionen vom Geschlechte 3, § 4.

bilden, so erkennt man durch Substitution passender Systeme halber Perioden für die w, dass

$$K(w;\ \zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}) = C \cdot \sigma^2_{[s]}(w). \tag{48}$$

Setzt man nun

$$\zeta^{(1)} = d^{(1)} + \lambda d^{(2)}, \quad \zeta^{(2)} = d^{(1)} - \lambda d^{(2)},$$
$$D_x = (d^{(1)} d^{(2)} x),$$

so ergiebt die Vergleichung der Anfangsglieder der Reihenentwicklung

$$C = \lambda^2 c,$$

wo c die numerische Constante in Formel (35) ist.

Die Quadrate der 28 *Sigmafunctionen mit ungerader Charakteristik sind also Specialfälle von* $K(w;\ \xi, \eta)$, *welche entstehen, wenn* ξ, η *auf einer Doppeltangente liegen und deren Berührungspunkte harmonisch trennen.*

Bekanntlich sind nun alle mit $K(w;\ \xi, \eta)$ gleichändrigen Jacobi'schen Functionen durch 8 unter ihnen, diejenigen aber, welche für $w_i = 0$ verschwinden, bereits durch sieben darstellbar. Von solchen 7 kann man 6 dadurch erhalten, dass man in $K(w;\ \xi, \eta)$ den Punktepaaren $\xi\eta$ irgend sechs verschiedene Lagen giebt, so dass die 6 Verbindungslinien $(\xi\eta)$ nicht Tangenten eines und desselben Kegelschnittes sind. Als siebente kann man dann $K(w;\ \xi, \xi) = \varphi(w) \cdot a_\xi{}^4$ wählen. Dass diese 7 Functionen linear unabhängig sind, folgt unmittelbar daraus, dass es ihre Anfangsglieder sind.

Es kann sonach $K(w;\ \xi\eta)$ als Analogon der 3 Functionen $\Sigma_1{}^{(2)}$, $\Sigma_2{}^{(2)}$, $\Sigma_3{}^{(2)}$ des hyperelliptischen Falles*) aufgefasst werden.

Es sei noch bemerkt, dass es auch eine für die $w = 0$ nicht verschwindende, mit $K(w;\ \xi\eta)$ gleichändrige Function giebt, deren Reihenentwicklung ebenfalls die charakteristische Eigenschaft hat, nach Covarianten fortzuschreiten. Es ist die Summe der Quadrate der geraden Sigmafunctionen, doch scheint ihre geometrische Interpretation andere Hülfsmittel als die hier gebrauchten zu erfordern. Diese würde dann der Function $\Sigma_2{}^{(4)}$ (Klein, Ann. 27, l. c. Formel 74) entsprechen und zusammen mit den obigen 7 Functionen eine ähnliche Behandlung der unten, § 32, näher zu besprechenden $M_3{}^{24}$ gestatten, wie sie Herr Pascal**) der Kummer'schen Fläche hat zu Theil werden lassen.

---

*) Vgl. Klein, über hyperelliptische Sigmafunctionen, Math. Ann. Bd. 27, pag. 463, Formel (73).

**) Pascal, l'equazione „razionale" della superficie di Kummer. Annali di Matematica Serie II, Tomo XVIII.

§ 31.

Die Entwicklung von $D(w; \xi)$.

Für die Function $D(w; \xi)$, welche auch definirt werden kann als die Discriminante von $K(w; \xi\eta)$ in Bezug auf η, dividirt durch $\varphi(w)$, erhalten wir nun Anfangsglieder 6^{ter} Ordnung. In der That würde die Discriminante mit Gliedern 6^{ter} Ordnung in den w_i beginnen; da aber die Discriminante von $(\xi\eta w)^2$ und ihre ersten Unterdeterminanten verschwinden, so beginnt ihre Entwicklung mit Gliedern 10^{ter} Ordnung, und nach Division mit $\varphi(w)$ mit Gliedern 6^{ter} Ordnung.

Aus dem vorhin für $K(w; \xi\eta)$ beigebrachten erkennt man, dass die Glieder $2n^{\text{ter}}$ Ordnung in den w Covarianten vom Typus $\Phi(\overset{2n-8}{a}, \overset{2n}{w}, \overset{6}{\xi})$ sein müssen, worauf nach einem bekannten Satz der Formentheorie das erste Glied linear durch Producte und Potenzen der Polaren a_w^4, $a_w^3 a_\xi$, $a_w^2 a_\xi^2$, $a_w a_\xi^3$, a_ξ^4 herstellbar ist.

Endlich ist $D(w; \xi)$ eine gerade Jacobi'sche Function 4^{ten} Grades, mit den $\sigma(2w)$ gleichändrig und darum als lineares Aggregat der 36 geraden Sigmafunctionen der doppelten Argumente darstellbar. Diese selbst sind aber als ganze homogene Functionen 2^{ten} Grades von 8 linear unabhängigen Quadraten der σ-Functionen darstellbar, was sich unmittelbar aus den entsprechenden Sätzen über die Thetafunctionen dreier Variabler ergiebt.

§ 32.

$D(w; \xi)$ und die M_3^{24}.

Der zuletzt erwähnte Umstand vermittelt nun eine unmittelbare geometrische Beziehung zwischen einem von mir bei anderer Gelegenheit als M_3^{24} bezeichneten Gebilde*) und der Ebene der C_4.

Setzt man nämlich 8 linear unabhängige Quadrate von σ-Functionen proportional den homogenen Punktcoordinaten eines Raumes von 7 Dimensionen, so ist dadurch ein Gebilde M_3^{24} definirt, welches als „Analogon der Kummer'schen Fläche für $p = 3$" bezeichnet werden kann, und dessen wesentlichsten Eigenschaften die folgenden sind:

Es ist algebraisch, von der 24^{ten} Ordnung, besitzt in den 64 Punkten, welche Systemen halber Perioden der w entsprechen, 4-fache Punkte und hat 64 den einzelnen Sigmaquadraten entsprechende Berührungs-R_6, welche längs einer ganzen M_2^{12} berühren.

Diese Punkte und R_6 bilden zusammen eine Configuration $(64)_{28}$, indem durch jeden Punkt 28 R_6 gehen, und in jedem R_6 28 Punkte

*) Göttinger Nachrichten, August 1889 „Ueber das Analogon der Kummer'schen Fläche für $p = 3$". Für beliebiges p: Wiener Monatshefte für Math. u. Physik, I. Jahrgang. „Ueber eine Verallgemeinerung der Theorie der Kummer'schen Fläche etc."

liegen. Es geht bei 64 Collineationen und in dem l. c. näher erläuterten Sinne bei 28 + 36 reciproken Umformungen des R_7 in sich über, so dass sowohl die Collineationen für sich als auch die Reciprocitäten zusammen mit den Collineationen eine Gruppe bilden.

Von den 64 Reciprocitäten sind die den 28 ungeraden Charakteristiken zugeordneten Nullsysteme, diejenigen, welche den 36 geraden Charakteristiken entsprechen, dagegen Polarsysteme. —

Denken wir uns nun $D(w; \xi)$, was nach dem vorigen Paragraphen möglich ist, als quadratische Function von 8 linear unabhängigen Sigmaquadraten hergestellt, und ersetzen wir die letzteren durch die Coordinaten $x_1 x_2 \ldots x_8$ des Punktes im R_7 und bezeichnen das Resultat dieser Substitution mit F, so ist durch

$$F(x; \xi) = 0 \tag{49}$$

eine Correspondenz zwischen dem R_7 und der Ebene der C_4 hergestellt.

Jedem Punkt der Ebene entspricht dadurch im allgemeinen eine 6-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit 2^{ter} Ordnung im R_7 und jedem Punkt des R_7 ebenso eine Curve 6^{ter} Ordnung in der Ebene. Den Punkten der M_3^{24} entsprechen dann gerade die Curven $D(w; \xi) = 0$.

Speciell entsprechen denjenigen Punkten der M_3^{24}, für welche $\varphi(w)$ verschwindet, zerfallende C_6, welche aus der C_4 und einer Doppelgeraden der Ebene bestehen.

An diese Sätze wird ein genaueres Studium der M_3^{24} anzuknüpfen haben.

§ 33.

Die Entwicklung der $R(w; A, B)$.

Wir wenden uns nun zur weiteren Untersuchung der Functionen $R(w; A, B)$. Nach § 18 a. E. werden dieselben für die

$$w_i = \int_u^t x_i \, d\omega_x$$

proportional zu $A_t^2 B_u^2 - A_u^2 B_t^2$. Da nun bei festgehaltenem u $R(w; A, B)$ als Function von t betrachtet 12 Nullstellen haben muss, die obige Formel aber nur 7 von u verschiedene ergiebt, so müssen ausser $u = t$ noch weitere vorhanden, eventuell diese letztere mehrfach zu zählen sein. Aber aus Formel (27) folgt im Verein mit (35), dass $R(w; A, B)$ den Factor $\Omega^4(u, t)$ enthalten muss. Wir setzen daher für die obige specielle Form der w

$$R(w; A, B) = c' \cdot (A_t^2 B_u^2 - A_u^2 B_t^2)\, \Omega^4(u, t) \tag{50}$$

und erkennen durch Betrachtung der beiderseitigen Dimension in den A, B, a und t, dass c' lediglich eine numerische Constante ist. Daraus ergiebt sich R zunächst *als eine ungerade Function der w.*

Lassen wir nun u und t unendlich nahe zusammenrücken, so geht die rechte Seite über in

$$c' A_u B_u (ABa)\, a_u^3\, d\omega_u^5.$$

Daraus erhalten wir in bekannter Weise *als Anfangsglied der Entwicklung von* $R(w; A, B)$

(51) $$c' A_w B_w (ABa)\, a_w^3$$

also die Jacobi'sche Determinante von A_w^2, B_w^2, a_w^4.

In der That könnte der Ausdruck (51) nur um ein Glied $\alpha_w a_w^4$ von dem Anfangsgliede abweichen. Dann müsste aber α_w eine Covariante sein, welche linear in den Coefficienten von A_w^2, B_w^2 und w wäre. Eine solche giebt es aber nicht.

Für die folgenden Glieder ergiebt sich, dass sie wegen der Bedeutung von $R(w; AB)$ Covarianten der C_4 und Combinanten der Kegelschnitte A_w^2, B_w^2 sind vom Typus

$$\Phi(\overset{2n-3}{a}, \overset{1}{A}, \overset{1}{B}, \overset{2n+1}{w}),$$

wo die über den Buchstaben gesetzten Zahlen wie früher den Grad in den wirklichen Coefficienten (und nicht in den Symbolen) bedeuten.

Uebrigens sind die $R(w; AB)$ ungerade, mit den $\sigma(2w)$ gleichändrige Jacobi'sche Functionen 4^{ten} Grades und darum linear durch die 28 ungeraden Sigmafunctionen der doppelten Argumente darstellbar.

§ 34.

Die Jacobi'schen Functionen vom Typus R.

Soll nun die Entwicklung einer ungeraden Jacobi'schen Function 4^{ten} Grades, welche mit den $\sigma(2w)$ gleichändrig ist, mit Gliedern 5^{ter} Ordnung in den w_i beginnen, so werden den 28 verfügbaren Constanten 13 lineare Bedingungen auferlegt, und es giebt somit 15 solche linear unabhängige Functionen*). Aber unsere 15 Functionen $R(w; AB)$ $R(w; BC)$, $R(w; AC)$ etc. sind linear unabhängig zufolge ihrer Bedeutung, und man hat also den Satz:

Alle ungeraden mit den $\sigma(2w)$ gleichändrigen Jacobi'schen Functionen, deren Entwicklung mit Gliedern 5^{ter} Ordnung in den w beginnt, sind linear durch die 15 Functionen darstellbar, welche aus $R(w; AB)$ entstehen, wenn man für A_x^2, B_x^2 die 15 Combinationen zu zweien von 6 linear unabhängigen Kegelschnitten setzt.

---

*) Dass es nicht mehr als 15 solche Functionen giebt, vermag ich hier nur dadurch zu begründen, dass im Gegenfalle das dann erforderliche Verschwinden von Determinanten 13^{ter} Ordnung Relationen zwischen irgend 13 Doppeltangenten vorstellen würde, welche mit dem gruppentheoretischen Charakter des Problems der 28 Doppeltangenten unverträglich wären.

Solche Jacobi'sche Functionen sollen kurz als vom Typus R bezeichnet werden. Eine lineare Combination der 15 $R(w; AB)$ etc. repräsentirt gleich Null gesetzt einen linearen R_3-complex, in welchem diejenigen R_3 unseres Systems liegen, welche zu Quadrupeln und w_i gehören, für welche die lineare Combination der 15 R verschwindet. Wir können also sagen:

Jeder Jacobi'schen Function J vom Typus R gehört im R_5 ein linearer R_3-complex zu, welcher die $\infty^2 R_3$, für deren zugehörige w $J=0$ wird, aus unserm ∞^3 System ausschneidet.

Betrachten wir nun die Relationen zwischen den $R(w; AB)$, so sehen wir, dass sie in zwei Classen zerfallen. Die eine Classe enthält diejenigen Relationen, welchen die Coordinaten eines beliebigen R_3 genügen (§ 11). Die andere Classe enthält solche, die unser 3-fach unendliches R_3-system definiren (§ 14). Führen wir nun statt der r_{ik}, oder der ihnen proportionalen $R(w; AB)$ 15 lineare, unabhängige Combinationen derselben als R_3-coordinaten ein, betrachten wir also „*Complexcoordinaten*" des R_3, so bleibt die obige Scheidung der Relationen aufrecht.

Wir können also sagen:

Zwischen 15 linear unabhängigen Jacobi'schen Functionen vom Typus der R bestehen zwei Classen von Relationen. Die Relationen der einen Classe sagen aus, dass man die 15 Functionen als Complexcoordinaten des R_3 im R_5 interpretiren darf, die andern definiren ein dreifach unendliches R_3-system, welches mit dem durch die $r_{ik}(xyzt)$ erzeugten identisch ist.

Das R_3-system im R_5 hat also für die Jacobi'schen Functionen vom Typus der R dieselbe Bedeutung wie die M_3^{24} für die Sigmaquadrate.

Im Falle $p=2$ entsprechen den Jacobi'schen Functionen vom Typus der R diejenigen ungeraden Jacobi'schen Functionen 4[ter] Ordnung zweier Variablen, welche mit den hyperelliptischen $\sigma(2w)$ gleichändrig sind und mit Gliedern dritter Ordnung in den w_i beginnen. Vier linear unabhängige Functionen dieser Art liefern als Ebenencoordinaten im R_3 interpretirt, die zur Weddle'schen Fläche der Kegelspitzen*) reciproke Fläche, und dieses Gebilde ist hiernach als Analogon unseres R_3-Systems zu betrachten.

---

*) Die Beziehungen dieser Fläche zu den hyperelliptischen Functionen hat Herr **Schottky** in Betracht gezogen (Crelle's Journal Bd. 105): Ueber die Beziehungen zwischen den 16 Thetafunctionen von zwei Variabeln. Vgl. auch **Caspary**, Comptes rendus 1891, I. pg. 1356. Ich werde mir erlauben, gelegentlich auf diese hier berührte Analogie zurückzukommen.

§ 35.

Das R_3-System und die M_3^{24}.

Die im Vorigen berührte Analogie tritt noch schärfer hervor, wenn man auf die Gleichung der F_2 in R_4-coordinaten Rücksicht nimmt.

Dieselbe wird in der Symbolik des § 20

(52) $$3K_\eta(w;\, \xi, \xi) - 2K(w,\, \xi,\, \eta) = 0,$$

wenn wir mit $K_\eta(w;\, \xi, \xi)$ die zweite Polare von $K(w;\, \xi, \xi)$ nach η in Bezug auf ξ genommen verstehen.

Da sich die linke Seite als Jacobi'sche Function 2[ten] Grades, welche für $w = 0$ verschwindet, durch 7 solche Functionen linear darstellen lässt, so erscheinen die F_2 in den R_3 unseres Systems als entsprechend ausgeartete quadratische Mannigfaltigkeiten eines 6-fach unendlichen linearen Systems solcher Mannigfaltigkeiten im R_5, genau so wie die Kegel, deren Spitzen die Weddle'sche Fläche erfüllen, als die ausgearteten eines dreifach unendlichen Systems im R_3 erscheinen.

So wie nun die Abbildung der Weddle'schen Kegelspitzenfläche nach Herrn Reye*) auf die Kummer'sche Fläche dadurch zu Stande kommt, dass man das ∞^3 System von F_2 auf den Punktraum bezieht, wo dann die den Kegeln des Systems entsprechenden Punkte die Kummer'sche Fläche erfüllen, so kann man auch hier eine Beziehung zwischen dem R_3-system und der M_3^{24} dadurch herstellen, dass man die 7 Jacobi'schen Functionen, mit deren Hilfe man die linke Seite von (52) darstellt, als Coordinaten im R_7 der M_3^{24} betrachtet. Dieselben definiren dann einen Strahl, welcher den den Argumenten $w_i = 0$ entsprechenden Punkt mit dem den Argumenten w_i entsprechenden verbindet.

Das System der F_2 in den R_3 im R_5 ist dadurch also linear auf die Projection der M_3^{24} aus dem Punkte $w_i = 0$ bezogen.

Diese Beziehung ist derjenigen der Kummer'schen Fläche auf die Weddle'sche Kegelspitzenfläche ganz analog, nur insofern unvollkommener, als wir nicht die M_3^{24} selbst, sondern nur deren Projection erhalten.

§ 36.

Die Erledigung des Umkehrproblems.

Die Formeln der §§ 21 und 22 geben aber nun auch bereits die explicite Lösung des Umkehrproblems, wenn wir nur noch die Grössen c, c' in (47) und (51) gleich 1 setzen und dann für die dort als Formen der Coordinaten der Quadrupelpunkte definirten Grössen die nunmehr erhaltenen proportionalen Functionen der w_i einsetzen.

*) Geometrie der Lage, II. Aufl., pg. 250.

Unter der genannten Voraussetzung besteht nämlich die aus § 22, (34) hervorgegangene Normirung des r_{56}, da für

$$w_i = \int_u^t x_i \, d\omega_x$$

und $u = x$, $t = x + dx$

$$K(w; \xi\eta) = (\xi\eta x)^2 \, d\omega_x^2,$$
$$R_{56}(w) = -2x_3^2 \, a_3 \, a_x^3 \, d\omega_x^5,$$

während $(A_t^2 B_u^2 - A_u^2 B_t^2)$ für

$$A_t^2 = 2t_2 t_3, \quad B_t^2 = 2t_1 t_3$$

übergeht in $-4x_3^2 \, a_3 \, a_x^3 \, d\omega_x$, so dass für diesen Fall

$$\lambda = \frac{d\omega_x^4}{2}, \quad \nu = d\omega_x^2$$

wird, womit der § 22 gestellten Forderung

$$\lambda = \frac{\nu^2}{2}$$

entsprochen ist.

Dadurch ist nun eine bedeutend einfachere und principiellere Lösung des Umkehrproblems erzielt, als bisher. In der That:

Denken wir uns die vorgegebenen Werthe der w in die Reihen für $K(w; \xi, \eta)$, $R(w, A, B)$ eingesetzt, und diese berechnet, was theoretisch keine Schwierigkeit hat, da ja die Reihen beständig convergiren und die einzelnen Glieder rational in den Coefficienten der C_4 sind, so liefert uns dann das Formelsystem der § 21 *und* § 22 *die explicite Lösung des Umkehrproblems mit Hilfe der Functionen $K(w; \xi\eta)$ und $R(w; A, B)$ in rationaler Weise, indem wir in der That für jeden Punkt ζ der C_4 ein Kegelschnittbüschel angeben können, dessen Basispunkte ein zu den w_i gehöriges Quadrupel bilden, welches ζ enthält.*

Es ist dadurch aber auch gezeigt, dass mit Hilfe unserer Functionen sich jede rationale symmetrische Function der $(xyzt)$, welche bei corresidualer Verschiebung ungeändert bleibt, muss rational herstellen lassen, da ja der Hilfspunkt ζ des § 21 hierbei hinausfallen muss.

Die Vortheile der hierdurch erlangten Lösung des Umkehrproblems sind einleuchtend.

Erstens lassen sich nämlich die nöthigen Operationen an dem R_3-System und der C_4 nach ihrer geometrischen Bedeutung bis in's Einzelne verfolgen, zweitens ist es nicht nöthig — weder bei der Bestimmung einzelner Constanten noch bei Bestimmung der Coefficienten der Reihenentwickelungen — irgend welche, dem Problem fremde, algebraische Gleichungen zu lösen, was bei Benutzung der

Thetafunctionen unvermeidlich ist, und drittens erhalten wir die Punkte des einzelnen Quadrupels in einfachster Weise als Basispunkte eines wirklich berechneten Kegelschnittbüschels.

Wir bemerken noch, dass die Formeln für ein System halber Perioden illusorisch werden, wegen des Verschwindens sämmtlicher $R(w; A, B)$. Aber dann liefert (52) als Classengleichung der in einen Kegelschnitt ausgearteten F_2 unmittelbar alles Nöthige zur Erledigung der Aufgabe (§ 1 a. E., § 12).

Man wird aber gerade wegen dieser Vortheile verlangen die Untersuchungen der Reihenentwickelungen der $K(w; \xi, \eta)$ und $R(w; A, B)$ weiter fortzusetzen und die allgemeinen Gesetze nach welchen ihre Glieder gebildet sind, aufzufinden. Dabei werden in erster Linie den Differentialgleichungen des Herrn Wiltheiss*) für die Thetafunctionen analoge Differentialgleichungen für die K und R heranzuziehen sein.

Wien, am 3. September 1891.

*) Göttinger Nachrichten 1889, Math. Ann. 37.

Sur la série hypergéométrique.

(Extrait de deux lettres adressées à Mr. F. Klein).

Par

André Markoff à St. Pétersbourg.

En comparant le résultat de ma note «Sur l'équation différentielle de la série hypergéométrique», publiée dans le tome XXVIII de Votre journal, avec le tableau des 24 intégrales de l'équation

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\gamma-(\alpha+\beta+1)x\right)\frac{dy}{dx}-\alpha\beta y=0,$$

il est facile de conclure, que le produit de deux séries hypergéométriques

$$F(\alpha,\alpha-\gamma+1,\alpha-\beta+1,x)\cdot F(\beta,\beta-\gamma+1,\beta-\alpha+1,x)$$

se réduit à une fonction entière de x, si

$$\alpha+\beta=-n$$

et en même temps

$$\gamma=\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{3}{2},\cdots,-n+\frac{1}{2}.$$

Or au moyen des relations connues on peut présenter cette fonction entière dans la forme

$$(1-x)^n F\left(\alpha,\gamma-\beta,\alpha-\beta+1,\frac{x}{x-1}\right)\cdot F\left(\beta,\gamma-\alpha,\beta-\alpha+1,\frac{x}{x-1}\right)$$

pour les valeurs de x négatives, et dans la forme

$$Ax^n F^2\left(\alpha,\beta,\gamma,\frac{1}{x}\right)+Bx^{n+2\gamma-2}F^2\left(\alpha+1-\gamma,\beta+1-\gamma,2-\gamma,\frac{1}{x}\right)$$

pour les valeurs de x plus grandes que l'unité.

Les constantes A et B sont telles, que leur rapport

$$\frac{B}{A}=\left\{\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(1-\beta)\Gamma(\alpha+1-\gamma)}{\Gamma(2-\gamma)\Gamma(\gamma-\beta)\Gamma(\alpha)}\right\}^2$$

est positif.

De là résulte que dans l'intervalle

$$1<x<\infty$$

cette fonction n'a point de zéros.

Et au moyen de Votre théorème remarquable il est facile de déterminer les nombres N_1 et N_2 de ses zéros dans les intervalles

$$0 < x < 1 \quad \text{et} \quad 0 > x > -\infty.$$

Nous reproduisons les valeurs de N_1 et N_2 dans la table suivante, où nous posons

$$\alpha > \beta = -l - \tfrac{1}{2} + \sigma, \quad \gamma = -k + \tfrac{1}{2}, \quad 0 < \sigma < 1,$$

$$2\sigma = s + \tau, \quad 0 < \tau < 1, \quad s = 0 \text{ ou } 1,$$

$$l = \text{un nombre entier positif:}$$

Les conditions	N_1	N_2
I. $l > n$	$\frac{1-(-1)^{n-k}}{2}$	$\frac{1-(-1)^{k}}{2}$
II. $n \geqq l > \frac{n+1}{2}$		
1) $k > l$	$2(k-l)+s$	$\frac{1-(-1)^{n-s}}{2}$
2) $k < l > n-k$	$\frac{1-(-1)^{l-k+s}}{2}$	$\frac{1-(-1)^{l-n+k+s}}{2}$
3) $n-k > l$	$\frac{1-(-1)^{n-s}}{2}$	$2(n-k-l)+s$
III. $l = \frac{n+1}{2}$		
1) $k \geqq \frac{n+1}{2}$	$2k-n-1+s$	$1-s$
2) $k \leqq \frac{n-1}{2}$	$1-s$	$n-2k-1+s$
IV. $l = \frac{n}{2}$		
1) $k \geqq \frac{n}{2}$	$2k-n$	0
2) $k \leqq \frac{n}{2}$	0	$n-2k$

On verra de cette table, que la somme

$$N_1 + N_2$$

n'est égale à $n > 2$ que dans les cas, où l'on a

$$\alpha - \beta < 2$$

et en même temps

$$k = n \quad \text{ou} \quad k = 0.$$

Maintenant je dois remarquer, que le résultat de ma seconde note «Sur l'équation différentielle de la série hypergéométrique», publiée dans le tome XXIX de Votre journal, peut être exprimé ainsi:

L'équation différentielle

$$(*) \quad x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\gamma - (\alpha+\beta+1)x\right)\frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0$$

n'admet une intégrale de la forme

$$X\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + Yy\frac{dy}{dx} + Zy^2 = 0,$$

X, Y, Z étant des fonctions entières de x, que dans les cas, où l'un des nombres

$$\alpha, \beta, \alpha-\gamma, \beta-\gamma$$

est entier ou deux des nombres

$$\gamma + \frac{1}{2}, \quad \alpha - \beta + \frac{1}{2}, \quad \alpha + \beta - \gamma + \frac{1}{2}$$

sont entiers.

Dans tous ces cas, qui sont identiques aux «*casus integrabiles*» de Pfaff il est facile de trouver parmi les fonctions y, satisfaisantes à l'équation $(*)$, deux telles, que la dérivée logarithmique de leur produit sera une fonction rationnelle de x . . . .

St. Pétersbourg, le 31. déc. 1891.

En désignant par

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

les racines de l'équation algébrique

$$F(\alpha, \alpha-\gamma+1, \alpha-\beta+1, x) \cdot F(\beta, \beta-\gamma+1, \beta-\alpha+1, x) = 0$$

où

$$\alpha + \beta = -n \text{ (un nombre entier négatif)},$$

$$\gamma - \frac{1}{2} = -k \text{ (un nombre entier négatif)}.$$

$$0 \leqq k \leqq n,$$

et en posant

$$x_1 x_2 \cdots x_n = P, \quad \frac{x_1}{x_1-1} \cdot \frac{x_2}{x_2-1} \cdots \frac{x_n}{x_n-1} = Q,$$

$$\alpha = \frac{-n+\Delta}{2}, \quad \beta = \frac{-n-\Delta}{2}, \quad \frac{3-(-1)^n}{2} = \sigma,$$

$$\{n^2-\Delta^2\}\{(n-1)^2-\Delta^2\}\{(n-2)^2-\Delta^2\}\cdots\{2^2-\Delta^2\}\{1-\Delta^2\} = G,$$

$$\{(n-1)^2-\Delta^2\}\{(n-3)^2-\Delta^2\}\{(n-5)^2-\Delta^2\}\cdots\{\sigma^2-\Delta^2\}\Delta^{\sigma-1} = H,$$

$$(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)=Z,$$

au moyen des rélations, mentionnées dans ma lettre du 31. Déc. 1891, on trouvera

$$P=(-1)^n\frac{G}{H^2}\cdot\frac{\{(n-1)^2-\Delta^2\}\{(n-3)^2-\Delta^2\}\cdots\{(n-2k+1)^2-\Delta^2\}}{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdots(2k-1)^2},$$

$$Q=(-1)^n\frac{G}{H^2}\cdot\frac{\{(n-1)^2-\Delta^2\}\{(n-3)^2-\Delta^2\}\cdots\{(2k-n+1)^2-\Delta^2\}}{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdots(2n-2k-1)^2}.$$

Or ayant égard à l'équation différentielle

$$\left.\begin{aligned}x^2(1-x)Z'Z'-2x^2(1-x)Z''Z\\ -x\big(2+(2n-2k-3)x\big)Z'Z\\ +\big(\Delta^2+n(n-2k-1)x\big)ZZ\end{aligned}\right\}=\Delta^2P^2(1-x)^{2n-2k},$$

facile à déduire, on obtiendra pour le produit des carrés des différences des racines

$$x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n$$

de notre équation l'expression suivante

$$\frac{P^{2n-2}\Delta^n}{\sqrt{(-1)^n P^{2k-1}Q^{2n-2k-1}}}.$$

Cette expression, dont le signe se détermine par Votre théorème, est différente de zéro; car nous supposons, que Δ n'est aucun nombre entier.

On peut étendre les formules précédentes aux cas

$$\Delta=\pm(n+1),\ \pm(n+2),\ \pm(n+3),\cdots$$

mais il faut exclure les cas

$$\Delta=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots,\ \pm n,$$

quand une des séries

$$F(\alpha,\alpha-\gamma+1,\alpha-\beta+1,x)\ \text{et}\ F(\beta,\beta-\gamma+1,\beta-\alpha+1,x)$$

n'a pas de sens (ou ces séries sont identiques).

St. Pétersbourg, le 13. Janvier 1892.

INHALT.

Wir ersuchen unsere geehrten Herren Mitarbeiter, etwaige, den Abhandlungen beizufügende Figuren — gleichviel ob dieselben im Texte selbst oder auf besonderen Tafeln veröffentlicht werden sollen — im Interesse einer raschen und exacten Ausführung stets **auf besonderen Blättern,** wenn möglich **in der gewünschten Grösse** und in thunlichst **präciser Zeichnung** dem Manuscripte beilegen zu wollen.

Die Redaction.

Jeder Band der Annalen wird 36—38 Druckbogen umfassen. Um jedoch in jedem Heft nur abgeschlossene Artikel zu geben, werden die einzelnen Hefte mitunter von ungleicher Stärke sein.

Verantwortliche Redaction: **W. Dyck, F. Klein, A. Mayer.**

Hierzu eine Beilage der **Deutschen Mathematiker-Vereinigung.**

MATHEMATISCHE ANNALEN.

IN VERBINDUNG MIT C. NEUMANN

BEGRÜNDET DURCH

RUDOLF FRIEDRICH ALFRED CLEBSCH.

Unter Mitwirkung der Herren

Prof. P. GORDAN zu Erlangen, Prof. C. NEUMANN zu Leipzig,
Prof. K. VONDERMÜHLL zu Basel

gegenwärtig herausgegeben

von

Prof. **Felix Klein**
zu Göttingen.

Prof. **Walther Dyck**
zu München.

Prof. **Adolph Mayer**
zu Leipzig.

XL. Band. 3. Heft.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1892.

Ueber Bewegung starrer Systeme im Fall cylindrischer Axenflächen.

Von

A. Schönflies in Göttingen.

Die Bewegung eines starren Systems ist für den Fall cylindrischer Axenflächen noch nicht genauer untersucht worden; sie ist aber, wie sich bei dem speciellen Charakter der Bewegung erwarten lässt, durch besonders einfache Gestaltung der Bewegungsgesetze ausgezeichnet. Im besondern möge bereits hier erwähnt werden, dass sich eine eigenartige Analogie zu den Gesetzen der ebenen Bewegung einstellt, welche für beliebige räumliche Bewegungen nicht vorhanden ist. *Den Sätzen über den Bresse'schen Wendekreis und die Punkte stationärer Krümmung stehen nämlich völlig analog lautende Sätze über die Punkte mit Wendeberührungsebenen und stationären Schmiegungskugeln gegenüber* (vgl. S. 326).

Ein sehr einfacher Fall der genannten Bewegung ist bereits bekannt; er stellt zugleich die einzige räumliche Bewegung besonderer Art dar, welche bisher Gegenstand einer eingehenderen Untersuchung gewesen ist. Sie ist dadurch definirt, dass *jeder Punkt eine ebene Curve beschreibt*, resp. bei der umgekehrten Bewegung *jede Ebene beständig durch einen festen Punkt geht.* Diese merkwürdige Bewegung wurde zuerst von Herrn Darboux als existirend nachgewiesen*); in jüngster Zeit ist sie von Herrn Mannheim ausführlicher untersucht worden.**) Die Axenflächen sind zwei Kreiscylinder, ihre Grundkreise sind identisch mit den Polcurven derjenigen einfachen Bewegung einer Ebene in sich selbst, bei welcher jeder Punkt eine Ellipse beschreibt.

Diese Bewegung hat die Veranlassung zu den nachstehenden Betrachtungen gegeben. Ich bemerke noch, dass die allgemeinen Sätze,

*) Sur le mouvement d'une Figure invariable, C. R. Bd. 92, S. 118.

**) Étude d'une déplacement particulier etc., Rendiconti del circ. mat. di Palermo, Bd. 3, S. 131, sowie Sur le déplacement d'une figure invariable, Journ. de l'école polyt. Heft 60.

die im Folgenden abgeleitet werden, eine erste und zugleich einfache mechanische Erzeugung der bezüglichen Bewegung lehren, die bisher noch nicht bekannt gemacht worden ist. *Wenn nämlich ein ebenes Dreieck sich parallel seiner eigenen Ebene so bewegt, dass seine drei Ecken auf drei festen Ebenen laufen, so beschreibt jeder mit dem Dreieck fest verbundene Punkt eine Ellipse.* Für die umgekehrte Bewegung ergiebt sich ein Satz, welcher dem voraufgehenden *dualistisch gegenübersteht.*

Ich gebe in § 1 die Entwickelung der allgemeinen Beziehungen, welche die Bahnpunkte mit ihren momentanen Schmiegungsebenen verbinden, leite auf Grund derselben in § 2 die Sätze über die Bahnpunkte stationärer Natur ab, und schliesse daran in § 3 eine einfache Darstellung der eben genannten speciellen Bewegungsform.*)

§ 1.

Die zwischen den Bahnpunkten und ihren Schmiegungsebenen bestehende cubische Verwandtschaft.

1. Es seien c und c' die Polcurven einer ebenen Bewegung, ferner sei c_p die vom Punkte P der beweglichen Ebene ε beschriebene Bahn. Wir bezeichnen die Cylinderflächen, deren Basen resp. c, c', c_p sind, und deren Erzeugende auf ε senkrecht stehen, resp. durch $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{C}_p$, und nennen p diejenige Gerade der Fläche $\mathfrak{C}_p$, welche durch P geht, so wird für *jede* räumliche Bewegung, deren Axenflächen $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}'$ sind, die Gerade p die Fläche $\mathfrak{C}_p$ beschreiben. Der Punkt P durchläuft daher eine auf $\mathfrak{C}_p$ gelegene Curve. Wird noch eine zweite Fläche F_p angegeben, auf welcher der Punkt P stets bleiben soll, so ist dadurch die von P beschriebene Curve und damit die gesammte Bewegung vollständig bestimmt. Die Bewegung besteht in dem Rollen und Gleiten des Cylinders $\mathfrak{C}$ auf $\mathfrak{C}'$ und zwar hängt die Grösse der Gleitung von der Fläche F_p ab. *Jeder Punkt von p beschreibt die nämliche Curve;* um die Bewegung zu studiren, genügt es daher im Allgemeinen, die Punkte einer zur Axenrichtung senkrechten Ebene η ins Auge zu fassen.

Die räumliche Bewegung von Σ und die ebene Bewegung von ε laufen in der Weise einander parallel, dass jeder Lage von Σ eine bestimmte Lage von ε entspricht, und umgekehrt. Die für die Bewegung von Σ charakteristische Ebene η lassen wir am zweckmässigsten

*) Für die in § 1 und 2 angezogenen Sätze, welche die allgemeinste Bewegung eines unveränderlichen Systems betreffen, vgl. man z. B. des Verfassers „Geometrie der Bewegung" Leipzig, 1886, sowie Rodenberg, Ueber die während der Bewegung projectiv veränderlicher und starrer Systeme beschriebenen Curven und Flächen, Göttinger Nachr. 1888, S. 176.

mit ε zusammenfallen; nur ist alsdann jedesmal anzugeben, ob für einen Punkt P dieser Ebene seine räumliche Bewegung oder seine Bewegung innerhalb ε in Frage steht. Zu diesem Behuf werden wir die Doppelbezeichnung ε, η meist beibehalten.

2. Es ist vortheilhaft, einige Worte über die Bewegung der unendlich fernen Ebene ε_∞ voranzuschicken. Die Ebene ε_∞ bewegt sich bei *jeder beliebigen* Bewegungsart des Systems Σ in sich selbst; in dem vorliegenden Fall *bleiben aber im besonderen drei ihrer Punkte während der ganzen Dauer der Bewegung fest*, nämlich der unendlich ferne Punkt Z_∞ der Axenrichtung, und die imaginären Kreispunkte $\mathfrak{J}_\infty$ und J_∞ der unendlich fernen Geraden von η. Es bleiben daher auch die durch sie bestimmten Geraden fest; wir bezeichnen sie durch h_∞, i_∞, j_∞ und zwar soll h_∞ die unendlich ferne Gerade der Ebene η sein. *Die Bewegung der unendlich fernen Ebene ist daher — im nichteuklidischen Sinne — eine Rotation um Z_∞*; jeder Punkt von ε_∞ beschreibt einen Kegelschnitt, resp. nichteuklidisch gesprochen, einen Kreis um den Punkt Z_∞. Für die Punkte der Geraden h_∞, i_∞, j_∞ gehen die bezüglichen Kreise in die Geraden selbst über.*)

Durch die eben angegebene Bewegung der Ebene ε_∞ ist die vorliegende Bewegungsart hinreichend und vollständig charakterisirt.

3. Sind P, P_1, P_2 irgend drei Lagen eines beliebigen Punktes P des beweglichen Raumes Σ, so ist die durch sie bestimmte Ebene π' des festen Raumes Σ' diejenige Ebene, welche bei continuirlicher Bewegung in die *momentane Schmiegungsebene* des Punktes P übergeht. Zwischen den Punkten P und den Ebenen π' besteht eine *umkehrbar eindeutige cubische Verwandtschaft;* sie ist ein specieller Fall derjenigen, welche von Noether und Cremona ausführlich behandelt worden ist. Die Fundamentalcurve sechster Ordnung von Σ, deren Punkten in Σ' eine Gerade, resp. der durch sie gelegte Ebenenbüschel entspricht, zerfällt bekanntlich für beliebige Bewegung von Σ in zwei Curven dritter Ordnung, deren eine in der unendlich fernen Ebene enthalten ist, während die andere die als *Wendecurve* bekannte Raumcurve c^3 ist. Für die besonderen hier betrachteten Bewegungsarten löst sich, wie wir oben sahen, die unendlich ferne Curve in die drei Geraden h_∞, i_∞, j_∞ auf, während gleichzeitig die Raumcurve c^3 in drei durch Z_∞ gehende Geraden zerfällt. Von ihnen bleibt aber nur eine im Endlichen; die andern beiden fallen mit i_∞ und j_∞ zusammen. Wir bezeichnen die erstere Gerade durch w und nennen sie die *Wendegerade*, so folgt:

*) Vgl. F. Klein, Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie, diese Ann. Bd. 4, S. 601.

Die Fundamentalcurve sechster Ordnung von Σ reducirt sich auf die Wendegerade w, auf die zu ihr senkrechte unendlich ferne Gerade h_∞, und auf die beiden doppelt zu zählenden Geraden i_∞ und j_∞.

Durch diesen Satz ist die Natur der bezüglichen cubischen Verwandtschaft vollständig gekennzeichnet.

4. Die einander entsprechenden Gebilde der beiden Räume sind, der speciellen Natur der Fundamentalcurve gemäss, von besonders einfachem Charakter. Ohne hierauf weitläufig einzugehen, bemerken wir doch, dass der besondere Ebenenbüschel E^3 von Σ', welcher einer Geraden g von Σ entspricht, und die specielle Raumcurve r^3 von Σ, welche einer Geraden g' von Σ' zugeordnet ist, schon bekannt sind. Der Büschel E^3 ist von Halphen und vom Verfasser untersucht worden;*) und was die Curve r^3 betrifft, so ist sie ein besonderer Fall derjenigen Curve dritter Ordnung, auf die unlängst von Herrn Hurwitz hingewiesen worden ist.**) Sind nämlich $g_0' g_1' g_2'$ irgend drei Lagen von g' bei der umgekehrten Bewegung, d. h. also bezogen auf den Raum Σ, so ist die Curve r^3 das Erzeugniss von drei congruenten Ebenenbüscheln mit den Axen g_0', g_1', g_2'. Sie ist daher der gemeinsame Schnitt der drei von je zwei Büscheln bestimmten orthogonalen Hyperboloide H_{12}, H_{20}, H_{01}. Nun enthält jedes dieser Hyperboloide eine Gerade u, welche der zugehörigen Schraubenaxe parallel läuft, und auf einer Schaar von Kreisschnittebenen senkrecht steht.***) In dem vorliegenden Fall sind die drei bezüglichen Schraubenaxen parallel, daher ist den drei Hyperboloiden eine Schaar von Kreisschnittebenen gemeinsam, und in jeder dieser Ebenen schneiden sich die bezüglichen Kreise in einem Punkte R von r^3, sowie in den imaginären Kreispunkten. Die Curve r^3 liegt daher auf einem Rotationshyperboloid, dessen Axe der Schraubenaxe parallel ist, und ist in der That ein specieller Fall der von Herrn Hurwitz betrachteten Curve. Ihr unendlich ferner reeller Punkt ist der unendlich ferne Punkt der Schraubenaxen.

5. Einer beliebigen Ebene von Σ entspricht im Raum Σ' bekanntlich im Allgemeinen eine Fläche dritter Classe. Ist die Ebene im besondern zur Axenrichtung senkrecht, so enthält sie die Punkte $\mathfrak{J}_\infty$ und J_∞. Die bezügliche Fläche dritter Classe zerfällt daher in diesem Falle in drei Ebenenbündel; zwei von ihnen haben $\mathfrak{J}_\infty$ resp. J_∞ als Scheitel. Den Scheitel des dritten Bündels bezeichnen wir durch S', und erhalten:

*) Sur le mouvement d'une droite, Bull. de la soc. math. de France, Bd. I, S. 114. Ferner „Geometrie der Bewegung", S. 120 ff. und 187.

**) Ueber eine besondere Raumcurve 3. Ordnung. Diese Ann. Bd. 30, S. 291.

***) Vgl. z. B. „Geometrie der Bewegung", S. 112 ff.

Die Schmiegungsebenen aller Punkte einer beliebigen zur Axenrichtung senkrechten Ebene η schneiden sich sämmtlich in einem und demselben Punkt S'.

Die Projection irgend eines beliebigen Punktes P von Σ auf ε beschreibt in ε diejenige Bahn, welche dem Abrollen der Curve c von c' entspricht. Nun sei (Fig. 1)*) W derjenige Punkt der Ebene η, welcher der Wendegeraden w angehört, so ist die Projection von $W\,W_1\,W_2$ auf ε eine Gerade. Der Punkt W ist daher ein Punkt des *Wendekreises* von ε, welcher den drei bezüglichen Lagen ε, ε_1, ε_2 zugehört. Nach bekannten Eigenschaften der ebenen Bewegung geht aber die Gerade, welche die drei bezüglichen Lagen des Punktes W von ε enthält, durch einen bestimmten Punkt S des Wendekreises, nämlich durch den *Wendepol;* daraus folgt, dass die Gerade $W\,W_1\,W_2$ die in S auf ε errichtete Normale s trifft. Also:

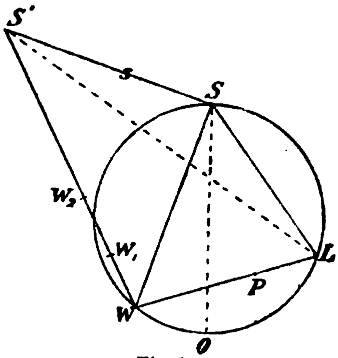


Fig. 1.

Der Punkt S', in welchem die Schmiegungsebenen π' aller Punkte P von η zusammentreffen, ist der Schnittpunkt der Geraden $W\,W_1\,W_2$ mit der im Wendepol S auf ε errichteten Normalen s.

6. Der Bündel S' der Ebenen π' und die Punkte P von η liegen in dem Sinne perspectivisch, dass jede Ebene π' durch den ihr entsprechenden Punkt P hindurchgeht. Die Verwandtschaft beider Gebilde ist aber, wie wir sofort zeigen werden, nicht von der ersten Ordnung, sondern quadratisch. Um die Darstellung zu vereinfachen, wollen wir die Bezeichnung *Wendepol* und *Wendekreis* von der Ebene ε auf die Ebene η übertragen.

Ist nämlich E^3 der Ebenenbüschel dritter Ordnung von Σ', welcher einer beliebigen Geraden g von Σ entspricht,**) so reducirt jeder Schnittpunkt von g mit einer der Geraden w und h_∞ die Ordnung von E^3 um je eine Einheit. Einer beliebigen in η liegenden Geraden g entspricht demnach ein Kegel zweiter Classe, dessen Scheitelpunkt offenbar S' ist, und es folgt in der That:

Der Ebenenbündel S' und die Punkte P von η stehen in einer quadratischen Verwandtschaft.

---

*) Die Ebene WSS' hat man sich um WS in die Zeichnungsebene (ε) umgeklappt zu denken.

**) Mannheim meint (vgl. die erste der oben genannten Arbeiten, S. 143) dass für die von ihm betrachtete specielle Bewegung der Ebenenbüschel E^3 ein Kegel zweiter Classe ist. Dies ist jedoch ein Irrthum. In der That beweist Herr Mannheim nur, dass E^3 einen Asymptotenkegel 2. Classe besitzt.

Die Hauptpunkte von η sind W, $\mathfrak{J}_\infty$ und J_∞; jedem Ebenenbüschel von S' entspricht daher in η ein Kreis. Nun bildet für jede durch s gehende Ebene π' die Projection der in ihr liegenden Punkte PP_1P_2 auf ε in dieser Ebene eine Gerade; *daher entspricht im besondern demjenigen Ebenenbüschel, dessen Axe s ist, der Wendekreis von η resp. ε.* Im Anschluss hieran lässt sich auch der einem beliebigen Ebenenbüschel von S' zugeordnete Kreis von η leicht bestimmen. Er geht nämlich durch W, durch denjenigen Punkt A, in welchem η von der Axe des bezüglichen Ebenenbüschels geschnitten wird, und endlich durch denjenigen Punkt L des Wendekreises, welcher zugleich auf der Geraden SA liegt.

Die Hauptebenen von S' bilden das Dreikant, welches von den Verbindungsebenen des Punktes S' mit W, $\mathfrak{J}_\infty$ und J_∞ gebildet wird. Diejenige dieser drei Ebenen, welche allein reell ist, läuft parallel zu η durch S'; sie entspricht *jedem* Punkt der Geraden h_∞ von η und soll durch σ' bezeichnet werden. Der Kegel zweiter Classe, welcher einer beliebigen Geraden g von η entspricht, reducirt sich, falls g durch W geht, auf einen Ebenenbüschel erster Ordnung. Ist wieder L derjenige Punkt des Wendekreises, welcher auf g liegt, so ist die Ebene λ', welche L und s enthält, die dem Punkte L zugeordnete Ebene; die Axe a' des Ebenenbüschels, welcher g entspricht, ist daher die Schnittlinie von λ' und σ'. *Die Axen a' der Ebenenbüschel, welche den sämmtlichen durch W laufenden Geraden g entsprechen, bilden daher einen Strahlenbüschel, welcher dem von den Geraden g gebildeten Strahlenbüschel projectivisch gleich ist.* Hiernach kann die zu jedem Punkt P von η gehörige Ebene π' leicht angegeben werden. Man ziehe zu diesem Zweck die Gerade PW, und lege durch ihren Schnittpunkt L mit dem Wendekreis und durch S ebenfalls eine Gerade; die durch S' zu ihr gezogene Parallele ist die Axe von π'; die durch sie und P gelegte Ebene ist daher die Schmiegungsebene von P.*)

Um eine Anwendung hiervon zu geben, bestimmen wir den Kegel $\varkappa^2$, welcher einer beliebigen Geraden g von η entspricht. Wir denken uns zu diesem Zweck die Gerade g von W aus projicirt, schneiden diesen Strahlenbüschel durch den Wendekreis von η, und construiren denjenigen Büschel, dessen Scheitel S ist, uud dessen Strahlen die vorstehenden im Wendekreise treffen. Es seien p_w und p_s die Strahlen, welche einem beliebigen Punkt P von g entsprechen. Ziehen wir nun durch S' den Strahl p_s' parallel zu p_s, so ist die von p_s' und P bestimmte Ebene die Ebene π'; daher liefert der von p_s' beschriebene Strahlenbüschel mit der zu ihm projectivischen Punktreihe auf g den verlangten Kegel.

*) Im Anschluss an die obigen Resultate ist es leicht, die Formeln herzustellen, welche die Punkte P und die Ebenen π' mit einander verbinden.

Es möge nicht unerwähnt bleiben, dass *die vorstehenden Resultate für jedes der beiden in Bewegung begriffenen räumlichen Systeme Geltung haben.*

§ 2.

Die Bahnpunkte von stationärem Charakter.

7. Bewegt sich ein System beliebig im Raum, so giebt es in jedem Augenblick gewisse Punkte, welche Bahnelemente mit stationären Eigenschaften beschreiben. Diejenigen Punkte, deren *Tangente stationär* ist, bilden — wenn wir immer von den Punkten der unendlichfernen Ebene absehen — die schon oben genannte *Wendecurve* c^3, die Punkte mit *stationärer Schmiegungsebene* erfüllen eine Fläche dritter Ordnung F^3, endlich liegen die Punkte mit *stationärer Krümmungsaxe* resp. *stationärer Krümmungskugel* auf einer Curve k^6, resp. einer Fläche F^4. Es fragt sich, wie sich diese Flächen und Curven für die hier betrachtete Bewegung modificiren.

Von der Wendecurve c^3 haben wir bereits gesehen, dass sie sich in drei Geraden auflöst, von denen eine, die immer reell ist, nämlich w, im Endlichen bleibt, während die beiden andern in's Unendliche rücken. Die Geraden w bilden für den ganzen Verlauf der Bewegung eine Fläche, die wir durch $\mathfrak{W}$ bezeichnen und die *Wendefläche* nennen wollen.

Um die Punkte mit *stationärer Schmiegungsebene* zu finden, gehen wir von vier beliebigen Systemlagen Σ, Σ_1, Σ_2, Σ_3 aus. Die dem Punkt P entsprechende Ebene PP_1P_2 nennen wir, wie oben, π', ferner sei π'' die Ebene $P_1P_2P_3$, so fragt es sich, für welche Punkte P der Ebene η die Ebenen π' und π'' identisch sind. Nun bilden für alle Punkte P von η die Ebenen π' einen Ebenenbündel mit dem Scheitel S', ebenso bilden die Ebenen π'' einen Bündel mit S'' als Scheitel; die gesuchten Punkte sind daher diejenigen, deren Ebenen durch S' und S'' gehen. Dem Ebenenbüschel, dessen Axe $S'S''$ ist, entspricht aber in η, wie wir oben sahen, ein Kreis, welcher durch den Schnitt A von $S'S''$ mit η sowie durch W und V geht, unter V denjenigen Punkt verstanden, für welchen $V_1V_2V_3$ eine Gerade bilden.*) Wir bezeichnen den Kreis durch e. Gehen wir zu continuirlichen Systemlagen über, so folgt:

Die Punkte mit stationärer Schmiegungsebene bilden in jedem Augenblick einen Kreiscylinder, welcher die Fläche $\mathfrak{W}$ in der momentanen Wendegeraden berührt. Die Schmiegungsebenen selbst bilden für alle

*) Auf dem Kreise liegen auch diejenigen Punkte U und T, für welche UU_1U_2 resp. TT_2T_3 eine Gerade bilden.

Punkte eines zum Kreiscylinder senkrechten Schnittes einen Ebenenbüschel erster Ordnung. Wir bezeichnen den Kreiscylinder durch $\mathfrak{C}$.

Für die ebene Bewegung der Ebene ε in sich existirt in jedem Augenblick ein Punkt, dessen Bahn einen Undulationspunkt besitzt; in ihm berührt der momentane Wendekreis die Enveloppe aller Wendekreise. Es ist klar, dass der Kreiscylinder $\mathfrak{C}$ eine durch diesen Punkt gehende Gerade enthält.

Nehmen wir noch eine fünfte Lage Σ_4 hinzu, so existirt auch ein Kreiscylinder $\mathfrak{C}_1$, welcher den vier Lagen $\Sigma_1\,\Sigma_2$, $\Sigma_3\,\Sigma_4$ entspricht. Er enthält die oben genannte Gerade v; sein Schnitt mit $\mathfrak{C}$ besteht daher ausser in v in einer Geraden f, deren jeder Punkt sogar in allen fünf Lagen in derselben Ebene bleibt. Also folgt:

In jedem Augenblick giebt es eine Gerade, deren Punkte fünfpunktig berührende Schmiegungsebenen besitzen; und

Die Enveloppe aller Kreiscylinder $\mathfrak{C}$ zerfällt in zwei Cylinderflächen von verschiedener geometrischer Bedeutung. Die eine besteht aus den Wendegeraden, die andere enthält die Punkte mit fünfpunktig berührenden Schmiegungsebenen.

8. Um die Punkte mit *stationärem Krümmungskreis*, resp. *stationärer Krümmungsaxe* zu untersuchen, fassen wir wieder irgend drei Lagen Σ, Σ_1, Σ_2 in's Auge. In dem Augenblick, in welchem das bewegliche System die genannten Lagen passirt, hat jeder Punkt eine bestimmte Normalebene; wir bezeichnen diese Ebenen durch π^v, $\pi_1{}^v$, $\pi_2{}^v$. Nun bilden bekanntlich die sämmtlichen Punkte von Σ in jedem Bewegungsmoment mit ihren Normalebenen ein Nullsystem; daher stellen die Normalebenen π^v, $\pi_1{}^v$, $\pi_2{}^v$ aller Punkte von η drei collineare Bündel dar, und je drei entsprechende Ebenen, die sich in derselben Geraden schneiden, liefern die stationäre Krümmungsaxe eines Punktes P von η. Solcher Ebenentripel resp. solcher Punkte von η giebt es bekanntlich sechs. Von letzteren sind in dem hier vorliegenden Fall drei unendlich fern. Nämlich die Normalebenen der unendlich fernen Geraden h_∞ von η bilden einen Ebenenbüschel, dessen Axe h^v die momentane Schraubenaxe ist; daher sind die Axen h^v, $h_1{}^v$, $h_2{}^v$ parallel. Es giebt mithin in diesen Ebenenbüscheln drei Tripel von Ebenen, welche durch dieselbe Gerade gehen, es bleiben daher nur noch drei im Endlichen gelegene Punkte der betrachteten Art übrig, also folgt:

Es giebt in jedem Augenblick im Allgemeinen drei im Endlichen gelegene Geraden, deren Punkte eine stationäre Krümmungsaxe besitzen. Wir bezeichnen die drei Geraden durch k, l, m.

Sind wieder Σ, Σ_1, Σ_2, Σ_3, vier verschiedene Systemlagen, so bilden diejenigen Punkte P, deren bezügliche Normalebenen π^v, $\pi_1{}^v$, $\pi_2{}^v$, $\pi_3{}^v$ sich in demselben Punkte schneiden, wenn wir die Systemlagen beliebig nahe rücken lassen, die Punkte mit *stationärer Krüm-*

mungskugel. Ist g eine beliebige Gerade von η und sind g^v, g_1^v, g_2^v, g_3^v die Axen der zugehörigen Büschel von Normalebenen, so giebt es bekanntlich vier Punkte von g, deren entsprechende Ebenen sich in demselben Punkte treffen. Unter ihnen ist stets der unendlich ferne Punkt von g enthalten, da seine vier Normalebenen sämmtlich zur Axenrichtung parallel sind. Auch die Punkte $\mathfrak{J}_\infty$ und J_∞ genügen der Bedingung, also folgt:

Die Punkte, welche eine stationäre Schmiegungskugel besitzen, bilden in jedem Augenblick eine Cylinderfläche dritter Ordnung $\mathfrak{K}^3$, welche die Geraden i_∞ und j_∞ enthält.

Auf dieser Fläche liegen auch die Geraden k, l, m sowie die Gerade f; diese vier Geraden bilden mit i_∞ und j_∞ den vollständigen Schnitt von $\mathfrak{K}^3$ und $\mathfrak{E}$. Endlich liegen auch die Geraden k_1, l_1, m_1 auf $\mathfrak{K}^3$.

Fügen wir zu den vier Lagen noch eine fünfte Σ_5, so erhalten wir eine zweite Fläche $\mathfrak{K}_1^3$; sie schneidet $\mathfrak{K}^3$ in neun Geraden, zu denen $i_\infty j_\infty$ sowie k_1, l_1, m_1 gehören. Die übrigen vier Schnittgeraden liefern Punkte mit sechspunktig berührender Schmiegungskugel. Also folgt:

In jedem Augenblick giebt es im Allgemeinen vier Geraden, deren Punkte eine sechspunktig berührende Schmiegungskugel besitzen.

Die Enveloppe aller Flächen $\mathfrak{K}^3$ zerfällt in zwei verschiedene Cylinderflächen. Die eine enthält die Punkte mit sechspunktig berührenden Schmiegungskugeln, die andere besteht aus den Punkten mit stationärem Krümmungskreis.

9. Aus den vorstehenden Sätzen ergiebt sich in bekannter Weise eine Reihe von Folgerungen für die umgekehrte Bewegung des Systems Σ' in Σ, und alle so erhaltenen Resultate gelten insgesammt für die directe, wie für die indirecte Bewegung. Die für beide Systeme auftretenden Flächen und Curven sind, wie der Verfasser nachgewiesen hat, durch einfache reciproke Beziehungen ausgezeichnet.*) Es hat keinerlei Schwierigkeit dieselben aufzustellen und mag deshalb unterbleiben. Dagegen wollen wir noch die auf S. 317 angedeuteten Analogieen zwischen den vorstehenden Gesetzen und denen der ebenen Bewegung etwas eingehender darstellen. Wir stellen zu diesem Zweck die einander entsprechenden geometrischen Gebilde und Sätze, wie folgt, kurz gegenüber:

Ebene Bewegung.	Räumliche Bewegung mit cylindrischen Axenflächen.
Die Polcurve c als Ort der Momentanpole C.	*Die Cylinderfläche $\mathfrak{W}$ als Ort der Wendegeraden w.*

*) Vgl. Sur une loi de réciprocité dans la théorie du déplacement d'un corps solide, Cpt. rend. de l'Ac. des Sc. Paris, Bd. 101, S. 150.

Der Wendekreis und auf ihm der Undulationspunkt U.

Die Enveloppe der Wendekreise zerfällt in die Polcurve c und in den Ort der Punkte U.

Die Wendetangenten bilden einen Strahlenbüschel erster Ordnung.

Die Geraden, welche ihre Enveloppen in Rückkehrpunkten berühren, bilden einen einfachen Strahlenbüschel.

Die Punkte mit stationärem Krümmungskreis bilden eine Curve k^3, welche die imaginären Kreispunkte enthält.

Der Kreiscylinder $\mathfrak{C}$ und auf ihm die Gerade f der fünfpunktig berührenden Schmiegungsebenen.

Die Enveloppe aller Cylinder $\mathfrak{C}$ zerfällt in die Fläche $\mathfrak{W}$ und in den Ort aller Geraden f.

Die stationären Schmiegungsebenen bilden einen Ebenenbüschel erster Ordnung.

Die Ebenen, welche ihre Enveloppen in Rückkehrebenen berühren, bilden einen einfachen Ebenenbüschel.

Die Punkte mit stationärer Krümmungskugel bilden eine Cylinderfläche $\mathfrak{K}^3$, welche durch die zur Axenrichtung senkrechten imaginären Kreispunkte geht.

u. s. w. u. s. w.

§ 3.

Die specielle Bewegung, bei welcher jeder Raumpunkt eine Ellipse beschreibt.

10. Haben drei Punkte A, B, C einer zur Axenrichtung senkrechte Ebene η die Eigenschaft, sich in Ebenen α', β', γ' zu bewegen, die nicht durch dieselbe Gerade gehen, so ist dies von allen Punkten zu folgern. Sind nämlich wieder Σ, Σ_1, Σ_2, Σ_3 irgend vier Systemlagen, so müssen die oben (7) mit S' resp. S'' bezeichneten Punkte, die den Systemlagen Σ, Σ_1, Σ_2 resp. $\Sigma_1\,\Sigma_2\,\Sigma_3$, entsprechen, beide in den Schnittpunkt von α', β', γ' fallen. Nun geht die Ebene PP_1P_2 durch S' und $P_1P_2P_3$ durch S'', also sind beide Ebenen identisch, und es folgt:

Bewegt sich ein ebenes Dreieck parallel seiner Ebene so, dass seine drei Ecken auf drei festen Ebenen laufen, so bewegt sich jeder mit dem Dreieck fest verbundene Punkt auf einer Ebene.

Mit dem Ebenenbündel, welches die den Punkten P von η entsprechenden Ebenen π' enthält, bleibt auch die quadratische Verwandtschaft zwischen den Ebenen π' und den Punkten P unverändert bestehen. Es ist demnach auch der Punkt W ein fester Punkt von η; jeder Punkt der Geraden w beschreibt daher eine Gerade. Ferner muss (Fig. 1) auch demjenigen Ebenenbüschel, dessen Axe s auf η

senkrecht steht, ein fester Kreis von η entsprechen, welcher stets durch S und W geht. Dieser Kreis c ist der Wendekreis von ε. Ist also L ein beliebiger Punkt dieses Kreises, so steht seine Ebene λ' auf η senkrecht und die in ε liegende Bahn von L ist eine durch S gehende Gerade. Die der räumlichen Bewegung parallel laufende Bewegung der Ebene ε in sich (S. 2) ist daher dadurch definirt, dass sich jeder Punkt L des Kreises c auf einer durch S gehenden Geraden bewegt; sie ist daher diejenige bekannte Bewegung einer Ebene in sich, bei welcher jeder Punkt P eine Ellipse E_p beschreibt. Für die entsprechende räumliche Bewegung durchläuft daher jeder Punkt P diejenige Ellipse, in welcher die Ebene π' den über E_p als Basis stehenden elliptischen Cylinder schneidet. Also folgt:

Bewegt sich ein ebenes Dreieck parallel mit sich selbst so, dass seine drei Ecken in drei festen Ebenen laufen, so beschreibt jeder mit dem Dreieck fest verbundene Punkt eine Ellipse; für alle Punkte einer auf ε senkrechten Geraden w gehen die Ellipsen in gerade Linien über.

Für die bezügliche Bewegung der Ebene ε in sich ist der Kreis c gleichzeitig die Polcurve; die feste Polbahn ist ein Kreis c' von doppeltem Radius, auf welchem c von innen rollt. Ueberdies ist S der Mittelpunkt dieses Kreises. Die Axenflächen sind die zugehörigen Kreiscylinder, also folgt:

*Soll sich ein System Σ so bewegen, dass jeder Punkt eine ebene Curve beschreibt, so kann dies nur so geschehen, dass ein Kreiscylinder $\mathfrak{C}$ von Σ auf einem festen Kreiscylinder von doppeltem Radius von innen abrollt, und zugleich längs desselben so gleitet, dass irgend ein Punkt P von Σ in einer festen Ebene π' bleibt.**)

Die Uebertragung der vorstehenden Sätze auf die umgekehrte Bewegung, bei welcher jede Ebene beständig durch einen festen Punkt geht, resp. einen Rotationskegel umhüllt, vollzieht sich ohne Schwierigkeit. Es kann daher unterbleiben, die bezüglichen Sätze besonders auszusprechen.

11. Es ist von Interesse, zu prüfen, wie sich für die vorliegende Bewegungsart die oben untersuchten Flächen und Curven der Punkte mit stationären Bahnelementen specialisiren. Zunächst ikt klar, dass der Bedingung der Flächen $\mathfrak{C}$ *jeder* Punkt genügt; es kann sich daher nur um die Punkte mit stationärem Krümmungskreis handeln. Es sind dies diejenigen, welche momentan Scheitelpunkte ihrer Ellipsen passiren, mit andern Worten, es fragt sich, welches ist in jedem Augenblick der Ort der Endpunkte der Hauptaxen aller Ellipsen. Augenscheinlich

*) Hier wird der von Darboux bewiesene Satz, dass die Axenflächen cylindrisch sein müssen, vorausgesetzt. — Uebrigens können die Radien beider Kreiscylinder auch den besonderen Werth Null annehmen; die directe und umgekehrte Bewegung werden alsdann identisch.

muss es solcher Punkte innerhalb jeder Ebene ε unendlich viele geben, während im allgemeinen Fall nur drei solcher Punkte in ε vorhanden sind.

Wir fassen wieder irgend drei Systemlagen Σ, Σ_1, Σ_2 in's Auge. Für eine beliebig in ε liegende Gerade g bilden die momentanen Normalebenen die drei projectivischen Büschel g^ν, g_1^ν, g_2^ν. Die Büschel g^ν und g_1^ν, resp. g_1^ν und g_2^ν erzeugen je ein Hyperboloid. Diese Hyperboloide haben in dem hier vorliegenden Falle die besondere Eigenschaft, dass die entsprechenden Erzeugenden einander parallel sind; die Erzeugenden, welche einem Punkte P von g entsprechen, sind nämlich beide auf der Ebene π' senkrecht. Die beiden so bestimmten Regelschaaren sind projectivisch und treffen beide dieselbe Gerade g_1^ν; es giebt daher auf g in jedem Augenblicke zwei Punkte mit stationärer Krümmungsaxe. Da auch die unbeweglichen unendlich fernen Kreispunkte $\mathfrak{J}_\infty$ und J_∞ als Punkte mit stationärer Krümmungsaxe aufzufassen sind, so bilden alle diese Punkte in η einen Kreis. Derselbe geht durch W, also folgt:

Diejenigen Punkte, welche Endpunkte von Hauptaxen ihrer Ellipsen durchlaufen, befinden sich in jedem Augenblick auf einem Kreiscylinder, welcher die Gerade w enthält.

12. Es erübrigt noch, zu zeigen, wie sich, wenn die Bewegung des Dreiecks gegeben ist, die momentane Schraubenaxe und die weiteren Bestimmungsstücke der Bewegung in jedem Augenblick construiren lassen.

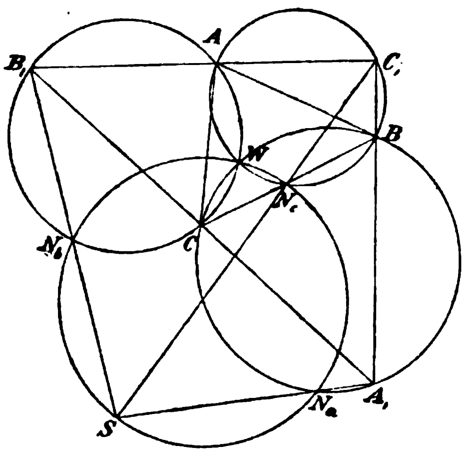


Fig. 2.

Es seien, (Fig. 2) wie oben, A, B, C die Ecken des Dreiecks, und α', β', γ' die zugehörigen Ebenen; ferner sei wieder S' der Schnittpunkt dieser Ebenen und S seine Projection in der Dreiecksebene ε. Die Kanten der von α', β', γ' gebildeten dreiseitigen Ecke seien a, b, c, endlich sollen A_1, B_1, C_1 ihre Schnittpunkte mit η sein, so dass $A_1B_1C_1$ dem Dreieck ABC umschrieben ist. Nun entspricht dem Ebenenbüschel, dessen Axe a ist, in η, wie wir oben sahen, der durch A_1, B, C gehende Kreis k_a, und dieser Kreis enthält überdies W; daraus folgt:

Die drei Kreise k_a, k_b, k_c, welche durch A_1, B, C; B_1, C, A, und C_1 A, B gehen, schneiden sich sämmtlich im Punkte W.

Für diejenige Ebene ν des durch a gehenden Ebenenbüschels, welche zu η normal ist, liegt der zugehörige Punkt N auf dem Wendekreis von η resp. ε, andrerseits ist dieser Punkt der Schnitt des Kreises k_a mit SA_1, also folgt:

Die Punkte N_a, N_b, N_c, in denen die Kreise k_a, k_b, k_c, von SA_1, SB_1, SC_1 geschnitten werden, liegen mit W und S auf einem und demselben Kreise; *dieser Kreis ist die Polcurve der Ebene η.**)

Der Punkt S ist der Wendepol für die ebene Bewegung, also ist der zweite Endpunkt des durch S gehenden Durchmessers von c der momentane Drehungspol der ebenen Bewegung; *die in ihm auf ε errichtete Normale ist also die momentane Schraubenaxe.* Gleichzeitig ist S der Mittelpunkt der festen Polbahn. Endlich ist zu bemerken, dass mit dem Kreise c, wie oben (6) gezeigt wurde, auch die zu jedem Punkte P von ε gehörige Ebene π' unmittelbar bestimmt ist.

13. Will man die vorstehende Bewegung genauer verfolgen, so ist der nachfolgende Gang der Untersuchung besonders zu empfehlen. Da für einen Punkt P von Σ die zugehörige Bahnebene π' beliebig gegeben werden kann, so ist es zweckmässig, hierfür einen ausgezeichneten Punkt auszuwählen. Wir nehmen dazu (Fig. 3)**) den Mittelpunkt M des Kreises c. Derselbe beschreibt bei der Bewegung der Ebene ε in sich einen Kreis um S als Mittelpunkt. Wir betrachten ferner als Ausgangslage des räumlichen Systems Σ, resp. der Ebene ε, diejenige, für welche M den tiefsten Punkt seiner Bahn passirt, so ist die in M auf SM errichtete Normale m die Schnittlinie der Ebene μ' mit der Ebene ε resp. η und es ist MS die Projection der grossen Axe der von M beschriebenen Ellipse E_m auf ε. Der Punkt W fällt für diese Lage mit dem Drehungspol O zusammen, so dass SMW eine Gerade bilden. Ferner ist ersichtlich, dass auch der Cylinder $\mathfrak{C}$ seinen tiefsten Stand hat, dass er, wenn er einmal auf $\mathfrak{C}'$ abgerollt ist, seinen höchsten Stand hat, und dass alle Bewegungsverhältnisse für die beiden Phasen, welche dem Auf- und Niedergange des Cylinders $\mathfrak{C}$ entsprechen, symmetrisch verlaufen.

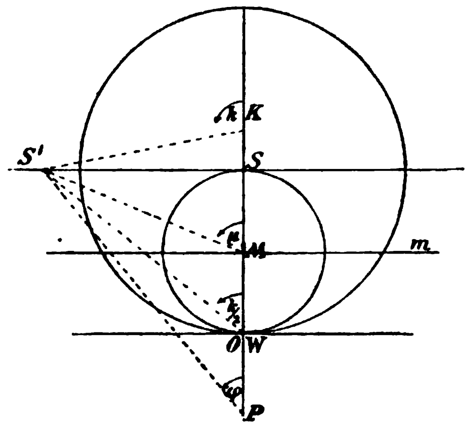


Fig. 3.

*) Für den rein geometrischen Inhalt dieses Satzes beachte man, dass S ein *beliebiger* Punkt ist.

**) Vgl. die Anmerkung zu Fig. 1.

Man leitet hieraus leicht ab, dass es auf der Geraden MS einen Punkt giebt, dessen Bahn ein Kreis ist. Nämlich für die Ellipse eines jeden Punkts P dieser Geraden ist eine Hauptaxe der zu MS senkrechten Richtung parallel, während die andere in der durch MS gehenden Normalebene liegt. Die Axen der von P bei der ebenen Bewegung in ε beschriebenen Ellipse sind resp.

$$a = SP \quad \text{und} \quad b = OP;$$

bezeichnen wir nun den Neigungswinkel der Ebene π' gegen ε durch φ, so folgt, dass

$$a_1 = SP : \cos\varphi \quad \text{und} \quad b_1 = OP$$

die Axen der von P bei der räumlichen Bewegung durchlaufenen Ellipse sind. *Wenn daher für den Punkt* K

$$SK = OK \cos k$$

ist, so beschreibt K *einen Kreis.* Mit Hilfe der Gleichung

$$SK \operatorname{tg} k = SM \operatorname{tg} \mu$$

findet sich für k der Werth

$$\operatorname{ctg} \frac{k}{2} = 2 \operatorname{ctg} \mu = \operatorname{ctg} S'OS$$

woraus sich der Winkel k und damit der Punkt K leicht construiren lässt. Je nachdem

$$2 \operatorname{ctg} \mu \gtrless 1 \quad \text{resp.} \quad S'S \lesseqgtr 2a$$

ist, wo $2a$ der Durchmesser des Kreises c resp. des Cylinders $\mathfrak{C}$ ist, liegt K zwischen M und S oder jenseits S, und wenn im besondern $2 \operatorname{ctg} \mu = 1$ resp. $S'S = 2a$ ist, so ist S selbst der Punkt, welcher einen Kreis beschreibt. In diesem Fall liegt der Kreis in einer Ebene, die auf WS und auf der Zeichnungsebene senkrecht steht.

Es ist leicht ersichtlich, dass K der einzige Punkt von η ist, der einen Kreis beschreibt.

Der Punkt K liegt stets auf dem in 11. betrachteten Kreis, welcher alle Punkte enthält, die momentan Scheitel ihrer Ellipsen passiren. Da dieser Kreis auch W enthält, so bedarf es nur noch *eines* dritten Punktes um ihn zu bestimmen. Am einfachsten scheint es, den von W verschiedenen Punkt des Wendekreises, resp. der Polcurve c zu ermitteln, welcher ihm angehört. Ist ϑ der Winkel, um welchen die Polcurve c auf der Polbahn c' abgerollt ist, und λ der von Null verschiedene Winkel, welchen ein beliebiger Punkt L dieses Kreises mit der Anfangslage der Geraden LW bildet, so ist derjenige Drehungswinkel ϑ, welcher der Scheitellage des Punktes L entspricht, wie eine einfache Rechnung zeigt, durch die Gleichung

$$\frac{\sin\vartheta}{\sin(2\lambda - \vartheta)} = (2 \operatorname{ctg} \mu)^2$$

bestimmt. Damit ist für jeden Augenblick ein dritter Punkt des Kreises bekannt.

14. Wir geben endlich noch, um die eigenartige cubische Verwandtschaft auch analytisch zu kennzeichnen, die Formeln an, welche die Punkte P mit den Ebenen π' verbinden. Dazu wählen wir O als Anfangspunkt eines rechtwinkligen Coordinatensystems, nehmen die Schraubenaxe als z-Axe, die in ε liegende Polbahntangente als x-Axe und die Normale der Polcurven als y-Axe. Bezeichnen wir nun die homogenen Punktcoordinaten durch x, y, z, t, die homogenen Ebenencoordinaten durch u, v, w, r, so bestehen zwischen ihnen, wie sich auf Grund der in § 1 abgeleiteten Sätze ohne Mühe ergiebt, folgende Formeln:

$$\begin{aligned}\sigma u &= hxt^2,\\ \sigma v &= hyt^2,\\ \sigma w &= t(x^2+y^2+2dyt),\\ \sigma r &= h(x^2+y^2)t + 2(x^2+y^2+2dyt),\end{aligned}$$

in denen h die Strecke SS' und $2d$ den Durchmesser des Kreises c bedeutet. Aus ihnen folgt duch Auflösung

$$\begin{aligned}\varrho x &= 2uw(hw-dv),\\ \varrho y &= 2vw(hw-dv),\\ \varrho z &= (r-hw+dv)(u^2+v^2),\\ \varrho t &= w(u^2+v^2).\end{aligned}$$

Die Fundamentalcurve des Raumes Σ zerfällt demnach in der oben angegebenen Weise in die bezüglichen vier Geraden, während die Fundamentalcurve des Raumes Σ' aus den sechs durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}u &= 0, & v &= 0,\\ w &= 0, & hw - dv - r &= 0,\\ w &= 0, & u + iv &= 0,\\ w &= 0, & u - iv &= 0,\\ hw - dv &= 0, & u + iv &= 0,\\ hw - dv &= 0, & u - iv &= 0\end{aligned}$$

dargestellten Geraden besteht.

September 1891.

Sui gruppi di sostituzioni lineari con coefficienti appartenenti a corpi quadratici immaginarî.

Di

Luigi Bianchi a Pisa.

Prefazione.

La presente Memoria tratta dei gruppi di sostituzioni lineari:

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \tag{1}$$

sopra una variabile complessa z, i cui coefficienti $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ percorrono tutti i numeri *interi* di un *corpo quadratico immaginario* Ω, assoggettati alla sola condizione

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1. \text{*)} \tag{2}$$

Essa è una continuazione del lavoro da me pubblicato nel Vol$^{\mathrm{e}}$ XXXVIII di questi Annali, ove già è indicata la generalizzazione, che qui trova il suo effettivo svolgimento.**)

Ogni numero intero o frazionario in Ω ha la forma:

$$m + in\sqrt{D}, \tag{3}$$

---

*) È visibile la ragione perchè, studiando il gruppo totale (1) in cui i numeri interi α, β, γ, δ sono legati dall' unica equazione (2), ci restringiamo alcaso di un corpo quadratico immaginario. In un corpo quadratico reale, ed in ogni altrocorpo di numeri algebrici di grado superiore, esistono infatti numeri interi, diversi da zero, con modulo piccolo quanto si vuole. Tali gruppi, contenendo sostituzioni infinitesimali, p. e. della forma $z' = z + \beta$, sono quindi *impropriamente discontinui* e non ammettono la rappresentazione geometrica di per altro separare da questi gruppi dei sotto gruppi *propriamente discontinui*. Poincaré. Si puo' E' appunto allo studio di sottogruppi di questa specie, pelcaso di un corpo quadratico reale che il Sig$^{\mathrm{r}}$ Fricke ha dedicato tre interessanti lavori pubblicati nei Vol$^{\mathrm{i}}$ 38° e 39° di questi Annali. Per i corpi di numeri lgebrici di grado superiore ci troviamo qui davanti ad un promettente campo di ricerche affatto inesplorato.

**) Veggasi la nota del Sig$^{\mathrm{r}}$ Picard nel Vol$^{\mathrm{e}}$ 38° di questi Annali e la mia nota del 5. Luglio 1891 nei Rendiconti della R$^{\mathrm{a}}$ Accademia dei Lincei. — Le citazioni che si riferiscono alla mia memoria nel Vol$^{\mathrm{e}}$ 38° dei presenti Annali saranno segnate con (A).

dove D è un numero razionale intero positivo ê privo di fattori quadrati ed m, n indicano numeri razionali variabili. Fra i numeri della forma (3), se *non é* $D \equiv 3$ (*mod.* 4) sono *interi algebrici* quelli soltanto in cui m, n rappresentano numeri interi ordinarii. Ma nel caso $D \equiv 3$ (mod. 4) sono anche interi quei numeri (3) pei quali m, n sono ciàscuno la metà di un numero intero ordinario impari. Riuniamo i due casi ponendo

$$\omega = \frac{1+i\sqrt{D}}{2} \text{ se } D \equiv 3 \,(\text{mod. } 4), \quad \omega = i\sqrt{D} \text{ in tutti gli altri casi;}$$

il nostro gruppo G comprende allora tutte le sostituzioni (1) a determinante $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, nelle quali $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ percorrono i numeri della forma $m + n\omega$, essendo m, n interi ordinarii.

Nella prima parte di questo lavoro, giovandomi della rappresentazione geometrica del Sig[r] Poincaré (Acta Mathematica Bd. 3) e del principio dell' *ampliamento del gruppo per riflessione*, principio il cui sviluppo è dovuto principalmente al Sig[r] Fricke, fisso gli effettivi poliedri fondamentali per gli undici seguenti valori di D:

$$D = 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 15, 19.$$

Per i gruppi G corrispondenti, colla effettiva determinazione del poliedro fondamentale, resta altresi dimostrato che basta ogni volta un numero finito di sostituzioni elementari a generarli. Pel caso generale la risoluzione delle questioni corrispondenti deve rimanere riservata a studî ulteriori.

Una circostanza notevole si osserva nei poliedri fondamentali qui determinati. Se diciamo *vertice singolare* di un tale poliedro un vertice situato sul piano $\xi\eta$, o all' infinito,*) in ciascuno dei poliedri fondamentali per i nostri gruppi, dopo l'ampliamento per riflessione, si trova che: *Il numero dei vertici singolari eguaglia il numero delle classi degli ideali nel corpo quadratico corrispondente.* Tale proprietà sembra intimamente connessa coll' altra, dimostrata ai §§ 2, 3, secondo la quale il detto numero rappresenta anche il numero delle classi dei numeri frazionarii in Ω. Ne segue che nella rete di poliedri, che dà la divisione della metà superiore dello spazio corrispondente al gruppo considerato, tutti e soli i punti del piano $\xi\eta$, indici di numeri frazionarii in Ω, figurano come vertici di poliedri della rete.

Nella parte seconda, seguendo il metodo del libro del Sig[r] Klein,**) come già ho fatto nella memoria precedente pei casi $(1, i)$, $\left(1, \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)$,

*) Nella determinazione metrica non-euclidea sono questi effettivamente tutti e soli i vertici a distanza infinita.

**) (Klein-Fricke) Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunctionen. II. Abschnitt, 3. Capitel.

stabilisco la teoria delle forme quadratiche di Dirichlet e di Hermite con coefficienti e variabili interi nel corpo Ω. Qui la presenza dei vertici singolari introduce qualche nuova difficolta, che si riesce per altro facilmente a superare.

La parte terza è dedicata allo studio di una particolare classe di forme quadratiche, sulle quali vengono eseguite le sostituzioni del gruppo riproduttivo di una forma indefinita di Hermite. Questa teoria raggiunge per le funzioni *automorfe*, corrispondenti al detto gruppo, lo stesso effetto che quella delle forme quadratiche ordinarie per le funzioni modulari nella teoria della moltiplicazione complessa delle funzioni ellittiche. Riserbandomi di ritornare in seguito su questo argomento, rimando, per la trattazione di un caso particolare, al terzo lavoro testè citato del Sig^r Fricke.

Parte 1ª.

Gruppi e poliedri fondamentali.

§ 1.

Discontinuita' propria del gruppo pei punti fuori del piano $\xi\eta$.

A base delle nostre ricerche poniamo, come nel lavoro antecedente, la rappresentazione geometrica del Sig^r Poincaré per le sostituzioni lineari

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \tag{1}$$

le cui formole occorre qui ricordare. Distendiamo i valori della variabile complessa $z = \xi + i\eta$ sul piano $\xi\eta$ e aggiungiamo ai due assi coordinati $O\xi$, $O\eta$ un terzo asse $O\zeta$ ortogonale ad ambedue. Ad ogni sostituzione (1) facciamo corrispondere univocamente una trasformazione della metà superiore $\zeta > 0$ dello spazio, per la quale ogni punto $(\xi\eta\zeta)$ si trasporta nel punto $(\xi'\eta'\zeta')$ le cui coordinate sono date dalle formole:*)

$$\left\{\begin{aligned}
z' &= \frac{\rho^2\alpha\gamma_0 + z\alpha\delta_0 + z_0\beta\gamma_0 + \beta\delta_0}{\rho^2\gamma\gamma_0 + z\gamma\delta_0 + z_0\gamma_0\delta + \delta\delta_0},\\
z_0' &= \frac{\rho^2\alpha_0\gamma + z_0\alpha_0\delta + z\beta_0\gamma + \beta_0\delta}{\rho^2\gamma\gamma_0 + z\gamma\delta_0 + z_0\gamma_0\delta + \delta\delta_0},\\
\rho'^2 &= \frac{\rho^2\alpha\alpha_0 + z\alpha\beta_0 + z_0\alpha_0\beta + \beta\beta_0}{\rho^2\gamma\gamma_0 + z\gamma\delta_0 + z_0\gamma_0\delta + \delta\delta_0},\\
\zeta' &= \frac{\zeta}{\rho^2\gamma\gamma_0 + z\gamma\delta_0 + z_0\gamma_0\delta + \delta\delta_0},
\end{aligned}\right. \tag{2}$$

---

*) Secondo la notazione di Hermite, l'indice *zero* apposto ad una quantita' complessa ne indica qui, come sempre in seguito, la coniugata.

ove si è posto: $\varrho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$, $\varrho'^2 = \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2$. Si osserverà che pei punti del piano $\zeta = 0$ queste formole si riducono all' unica formola (1).

Considerando ora la totalità delle sostituzioni (1) appartenential nostro gruppo G, diremo equivalenti *rispetto a* G due punti p, p' della metà superiore R dello spazio, se vi ha in G una sostituzione che trasporti p in p'. Poichè nel corpo Ω non esiste manifestamente che un numero finito di numeri interi con modulo inferiore ad una quantità arbitraria fissa, nel gruppo G non sono contenute sostituzioni infinitesimali. Dalle ricerche generali di Poincaré (l. c.) segue quindi che nell' intorno di ogni punto in R*) fuori del piano $\xi\eta$ il gruppo G è propriamente discontinuo, cioè un intorno sufficientemente piccolo del punto non contiene alcuna coppia di punti equivalenti fra loro.

Ma senza riferirci al teorema generale di Poincaré daremo qui una dimostrazione diretta di questa proprietà affatto analoga a quella che il Sig^r^ Hurwitz ha fatto conoscere pel gruppo modulare.**)

Prendiamo due coppie arbitrarie di piani paralleli ai piani coordinati $\eta\zeta$, $\xi\zeta$ e siano

$$\xi = l, \quad \xi = m, \quad \eta = l', \quad \eta = m'$$

le loro equazioni e del prisma indefinito racchiuso da questi quattro piani consideriamo la regione (V), situata in R al di sopra del piano

$$\zeta = \varepsilon$$

parallelo al piano $\xi\eta$, essendo ε una quantità positiva, arbitrariamente piccola, fissa. Dimostreremo il teorema, che include la proprietà enunciata: *Nella regione* (V) *definita' dalle diseguaglianse*

$$l < \xi < m, \quad l' < \eta < m', \quad \zeta > \varepsilon,$$

non può esistere che un numero finito di punti equivalenti ad un dato punto $p \equiv (\xi\eta\zeta)$ *in* R.

Sia infatti $p' \equiv (\xi'\eta'\zeta')$ un punto di (V) equivalente a $p \equiv (\xi\eta\zeta)$ e sia $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ una sostituzione che porta p in p', talchè valgono le formole (2). La quarta di queste, essendo per ipotesi $\zeta' < \varepsilon$, ci dà:

$$\varrho^2\gamma\gamma_0 + z\gamma\delta_0 + z_0\gamma_0\delta + \delta\delta_0 < \frac{\zeta}{\varepsilon}$$

ovvero

$$(3) \qquad \zeta^2\gamma\gamma_0 + (\gamma z + \delta)(\gamma_0 z_0 + \delta_0) < \frac{\zeta}{\varepsilon}.$$

La somma del primo membro consta di due termini essenzialmente positivi ed essendo ξ, η, ζ, ε quantità fisse, ne segue subito che il

*) Con R si indicherà sempre la metà superiore $\zeta > 0$ dello spazio.

**) Grundlagen einer independenten Theorie der Modulfunctionen. Math. Annalen Bd. 18.

numero intero γ nel corpo quadratico Ω, e conseguentemente δ, non può avere che un numero finito di valori compatibili colla (3). Sia γ', δ' una tale coppia di valori, che a causa della relazione

$$\alpha\delta' - \beta\gamma' = 1 \tag{4}$$

dovranno essere inoltre primi fra loro. Se α', β' è una coppia speciale di valori per α, β che soddisfano la (4), ogni altra tale coppia è data dalle formole

$$\alpha = \alpha' + k\gamma', \quad \beta = \beta' + k\delta',$$

dove k è un intero arbitrario in Ω.*) Se sostituiamo questi valori di α, β nella 1ª delle (2), troviamo:

$$z' = \frac{\varrho^2\alpha'\gamma_0' + z\alpha'\delta_0' + z_0\beta'\gamma_0' + \beta'\delta_0'}{\varrho^2\gamma'\gamma_0' + z\gamma'\delta_0' + z_0\gamma_0'\delta' + \delta'\delta_0'} + k,$$

e poichè la 1ª parte della somma nel 2º membro è fissa mentre la parte reale e il coefficiente dell' immaginario in z' debbono giacere fra i rispettivi limiti assegnati l, m; $l'\ m'$, ne concludiamo che il numero intero k e conseguentemente ciascuno dei numeri α, β non può assumere che un numero finito di valori. Così adunque il numero delle sostituzioni supposte è necessariamente limitato c. d. d.

A complemento della proprietà dimostrata aggiungiamo il teorema: *Appena $D > 3$, nella regione di R definita dalle diseguaglianze*

$$-\frac{1}{2} < \xi < \frac{1}{2}, \quad -\frac{\sqrt{D}}{2} < \eta < \frac{\sqrt{D}}{2}, \quad \zeta > 1$$

non esiste alcuna coppia di punti equivalenti.

Se è possibile, sia $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ una sostituzione di G che porti il punto $p \equiv (\xi\eta\zeta)$ di questa regione nel punto $p' \equiv (\xi'\eta'\zeta')$ della regione stessa. Abbiamo per ipotesi

$$\zeta > 1, \quad \zeta' > 1, \quad \frac{1}{\zeta\zeta'} < 1;$$

ma per la 4ª delle (2)

$$\frac{1}{\zeta\zeta'} = \gamma\gamma_0 + \frac{1}{\zeta^2}(\gamma z + \delta)(\gamma_0 z_0 + \delta_0),$$

onde $\gamma\gamma_0 < 1$ e però $\gamma = 0$. A causa di $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, non esistendo nel corpo Ω, per $D > 3$. che le due unità ± 1, si ha necessariamente $\alpha = \pm 1$, $\delta = \pm 1$ e la sostituzione supposta avrebbe la forma

$$\xi' + i\eta' = \xi + i\eta + \beta;$$

*) Da $(\alpha - \alpha')\delta' = (\beta - \beta')\gamma'$ segue in fatti che γ' dividendo il prodotto del 1º membro ed essendo primo con δ' divide $\alpha - \alpha'$ etc.

ma giacendo ξ, ξ' fra i limiti $-\frac{1}{2}$ e $+\frac{1}{2}$ ed η, η' fra i limiti $-\frac{\sqrt{D}}{2}$ e $+\frac{\sqrt{D}}{2}$ (i limiti esclusi), deve essere $\beta = 0$ e però $\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$ è l'identitá e i due punti coincidono.

§ 2.*)

Equivalenza dei numeri frazionarii in Ω.

Scrivendo un numero frazionario in Ω sotto la forma $\frac{a}{b}$, essendo a, b interi in Ω, intenderemo sempre che esso sia sotto forma *irreducibile*, che cioè a, b non abbiano un divisor comune *realmente esistente in* Ω. Salvo per quei corpi Ω nei quali esistono solo ideali principali, ciò non implica affatto che a, b siano primifra loro, ma soltanto che *l'ideale* P massimo comun divisore di a, b non sia un ideale principale nè ammetta un tale ideale per divisore. Al contrario quindi di quanto accade nei corpi più semplici, due frazioni ambedue irreducibili $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ possono essere eguali senza che sia $a = \pm c$, $b = \pm d$.**) Ora supposta l'eguaglianza $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, sia P l'ideale massimo comun divisore di a, b e Q quello di c, d; avremo:

$$a = PA, \quad b = PB; \quad c = QC, \quad d = QD,$$

essendo A, B, C, D coppie di ideali primi fra loro. Da $AD = BC$, essendo A primo con B, segue che A divide C come inversamente C divide A e però $A = C$ e similmente $B = D$; dunque: *Gli ideali* P, Q *moltiplicati pel medesimo ideale* A *danno ideali principali e sono quindi fra loro equivalenti.*

Inversamente ad ogni frazione irreducibile $\frac{a}{b} = \frac{PA}{PB}$ in cui P sia l'ideale massimo comun divisore di a, b, ove sia Q un ideale qualunque equivalente a P possiamo sostituire l'altra eguale $\frac{c}{d} = \frac{QA}{QB}$, nella quale il massimo comun divisore del numeratore e del denominatore é l'ideale Q.

Ciò posto, se diciamo *equivalenti* rispetto a G due numeri frazionarii $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$ in Ω quando siano fra loro legati dalla relazione

*) Le denominazioni di questo paragrafo e dei seguenti sono quelle date dal Sig[r] Dedekind nella sua *Teoria dei numeri interi algebrici*, come è esposta nell' Appendice alle lezioni di Dirichlet.

**) Per es. nel campo $(1, i\sqrt{5})$ le due frazioni eguali $\frac{1+i\sqrt{5}}{2}$, $\frac{3}{1-i\sqrt{5}}$ sono ambedue irreducibili.

$$\frac{a'}{b'} = \frac{\alpha\frac{a}{b}+\beta}{\gamma\frac{a}{b}+\delta},$$

essendo $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ una sostituzione in G, stabiliamo subito il teorema: *Se la frazioni $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$ sono equivalenti, gli ideali P, P', che sono rispettivamente il massimo comun divisore di a, b e di a', b', sono altresì equivalenti fra loro.*

Si ha infatti $\frac{a'}{b'} = \frac{\alpha a+\beta b}{\gamma a+\delta b}$, e poichè ogni ideale che divida simultaneamente a, b divide anche $\alpha a+\beta b$ e $\gamma a+\delta b$, come inversamente ogni ideale divisore comune di $\alpha a+\beta b$, $\gamma a+\delta b$ divide anche

$$\delta(\alpha a+\beta b)-\beta(\gamma a+\delta b)=a,$$
$$-\gamma(\alpha a+\beta b)+\alpha(\gamma a+\delta b)=b,$$

la proprietà enunciata risulta da quanto è detto superiormente. Ora andiamo a dimostrare inversamente: *Se nelle due frazioni irreducibili $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$ gli ideali P, P', che per ciascuna frazione rappresentano il massimo comun divisore del numeratore e del denominatore, sono equivalenti, anche le due frazioni sono fra loro equivalenti.*

Come abbiamo visto, alla frazione $\frac{a'}{b'}$ possiamo sostituirne un' altra eguale per la quale P', venga surrogato da P, sicchè è lecito supporre senz' altro $P'=P$. Noi dimostreremo allora che le due frazioni $\frac{a}{b}$, $\frac{a'}{b'}$ sono equivalenti ad una medesima terza frazione e quindi fra loro.

Osserviamo in primo luogo che alla frazione $\frac{a}{b}$ possiamo sostituirne un' altra equivalente $\frac{\alpha a+\beta b}{\gamma a+\delta b}$ nella quale il denominatore sia reale. Basta perciò prendere p. e. α, β, γ, δ reali assumendo γ, δ in guisa che $\gamma a+\delta b$ sia reale, ciò che evidentemente è sempre possibile. In seguito supporremo dunque che sia b reale.

Tratteremo distesamente il caso di $\omega = i\sqrt{D}$, l'altro caso $\omega = \frac{1+i\sqrt{D}}{2}$ per $D\equiv 3 \pmod{4}$ comportando una trattazione del tutto analoga.

§ 3.

Continuazione.

L'ideale P, come modulo finito, può ricondursi ad una base di due termini e sia questa $[\alpha_1, \alpha_2]$, dove dunque α_1, α_2 sono interi in Ω e tutti i numeri in P si ottengono dall' espressione $t\alpha_1+u\alpha_2$

percorrendo t, u i numeri interi razionali. Sia ora m il più piccolo numero razionale (intero) e positivo in P; avremo

$$m = p\alpha_1 + q\alpha_2,$$

dove i numeri razionali interi p, q saranno *primi fra loro*, giacchè, se avessero un divisor comune $\delta > 1$, anche $\frac{m}{\delta} < m$ si troverebbe in P. Prendiamo ora due interi (razionali) p', q' che soddisfino alla condizione $pq' - p'q = 1$ e i due numeri

$$m = p\alpha_1 + q\alpha_2, \quad r + is\sqrt{D} = p'\alpha_1 + q'\alpha_2$$

costituiranno una nuova base di P, talchè potremo scrivere

$$P = [m, r + is\sqrt{D}],$$

essendo m, r, s interi ordinarii. Ma poichè P è un ideale, i due numeri $i\sqrt{D}m$, $i\sqrt{D}(r + is\sqrt{D})$ debbono pur trovarsi in P e si avrà perciò

$$i\sqrt{D}m = p'm + q'(r + is\sqrt{D}),$$
$$i\sqrt{D}(r + is\sqrt{D}) = pm + q(r + is\sqrt{D}),$$

dove p, q, p', q' sono nuovamente razionali interi. Queste ci danno

$$m = q's, \quad r = -p's, \quad pm + qr = -sD, \quad r = q's;$$

dalle due prime segue che s divide simultaneamente m, r e però ogni numero in P, in particolare a, b, quindi, essendo $\frac{a}{b}$ irreducibile dovremo avere $s = \pm 1$ e senza alterare la generalità potremo fare evidentemente $s = 1$. Così le seconde danno

$$(1) \qquad r^2 + D = -pm$$

per tal modo la base di P è ricondotta alla forma $[m, r + i\sqrt{D}]$ ove $r^2 \equiv -D$ (mod. m). Idue numeri

$$a = a_1 + ia_2\sqrt{D}, \quad b = b_1$$

appartenendo a P hanno la forma

$$(2) \qquad a = hm + a_2(r + i\sqrt{D}), \quad b = h'm,$$

ove h, h', a_2 sono interi razionali. Dimostreremo che si possono trovare in Ω quattro interi α, β, γ, δ tali che si abbia

$$(3) \qquad a = \alpha(r + i\sqrt{D}) + \beta m, \quad b = \gamma(r + i\sqrt{D}) + \delta m$$

e inoltre

$$(4) \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

dopo di che il nostro teorema sarà provato risultando con ciò $\frac{a}{b}$ equivalente alla frazione $\frac{r+i\sqrt{D}}{m}$, che dipende solo dall' ideale P.*)

Scindendo α, β, γ, δ nella loro parte reale ed immaginaria, poniamo

$$\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2\sqrt{D}, \quad \beta = \beta_1 + i\beta_2\sqrt{D}, \quad \gamma = \gamma_1 + i\gamma_2\sqrt{D},$$
$$\delta = \delta_1 + i\delta_2\sqrt{D}.$$

Per soddisfare le (3) dobbiamo anzi tutto determinare α, γ dalle congruenze

$$\left.\begin{array}{l}(\alpha_1 + i\alpha_2\sqrt{D})(r + i\sqrt{D}) \equiv a_2(r + i\sqrt{D})\\ (\gamma_1 + i\gamma_2\sqrt{D})(r + i\sqrt{D}) \equiv 0\end{array}\right\} \pmod{m},$$

che si scindono nelle altre

$$\left\{\begin{array}{l}r\alpha_1 - D\alpha_2 \equiv r a_2\\ \alpha_1 + r\alpha_2 \equiv a_2\end{array}\right. \pmod{m}, \qquad \left\{\begin{array}{l}r\gamma_1 - D\gamma_2 \equiv 0\\ \gamma_1 + r\gamma_2 \equiv 0\end{array}\right. \pmod{m}.$$

In ciascuna di queste coppie di congruenze può ômettersi la prima, che, a causa di $r^2 \equiv -D \pmod{m}$, è una conseguenza della seconda; così dobbiamo porre

$$(5) \qquad \alpha_1 = a_2 - ry + mx, \quad \alpha_2 = y, \quad \gamma_1 = mt - ru, \quad \gamma_2 = u,$$

essendo x, y, t, u interi reali. Dopo ciò le (3) ove si sostituiscano per a, b i valori (2) e per α_1, α_2, γ_1, γ_2 i valori precedenti danno

$$(5^*) \qquad \beta_1 = h - py - rx, \quad \beta_2 = -x, \quad \delta_1 = h' - pu - rt, \quad \delta_2 = -t.$$

Ora la condizione (4) si scinde nelle due

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha_1\delta_1 - D\alpha_2\delta_2 - \beta_1\gamma_1 + D\beta_2\gamma_2 = 1,\\ \alpha_1\delta_2 + \alpha_2\delta_1 - \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1 = 0;\end{array}\right.$$

queste sostituendovi i valori (5), (5*) si traducono nelle due seguenti equazioni lineari nelle incognite x, y, t, u:

$$\left\{\begin{array}{l}(hm + a_2 r)t + (a_2 p - hr)u - h'mx + h'ry = h'a_2 - 1,\\ \qquad a_2 t + hu - h'y = 0\end{array}\right.$$

Se nella prima sostituiamo ad $h'y$ il valore tratto dalla seconda,

*) Il punto $\frac{r+i\sqrt{D}}{m}$ è, per la (1), indice della forma quadratica a determinante $-D$:

$$mx^2 - 2rxy - py^2;$$

la forma opposta

$$mx^2 + 2rxy - py^2$$

corrisponde precisamente nel senso di Dedekind (Dirichlet, Zahlentheorie 3. Auflage § 176) all' ideale P. Queste due forme sono *primitive* (di 1ª specie) Cf. ibid.

vediamo che restano da determinarsi x, t, u in guisa che risulti soddisfattà l'equazione

$$(6)\qquad (hm+2a_2r)t+a_2pu-h'mx=h'a_2-1$$

e insieme la congruenza

$$(7)\qquad a_2t+hu\equiv 0 \pmod{h'},$$

dopo di che il teorema sarà provato. Considerando anche la (6) come una congruenza rispetto al modulo h', abbiamo il sistema simultaneo

$$(8)\qquad (hm+2a_2r)t+a_2pu\equiv -1,\quad a_2t+hu\equiv 0 \pmod{h'},$$

che ammette certamente soluzioni se il determinante

$$\begin{vmatrix} hm+2a_2r, & a_2p \\ a_2\quad, & h \end{vmatrix} = h(hm+2a_2r)-a_2^2p$$

è primo con h'. Ora si dimostra con facilità che ciò avviene necessariamente per l'ipotesi ammessa che a, b abbiano appunto per massimo comun divisore l'ideale P, onde segue che ogni numero in P, in particolare m, si può porre sotto la forma $\lambda a+\mu b$, essendo λ, μ interi in Ω. Dovremo dunque avere per convenienti valori interi reali di λ_1, λ_2, μ_1, μ_2:

$$(hm+a_2r+ia_2\sqrt{D})\,(\lambda_1+i\lambda_2\sqrt{D})+h'm(\mu_1+i\mu_2\sqrt{D})=m,$$

ossia

$$(hm+a_2r)\lambda_1-Da_2\lambda_2+h'm\mu_1=0,$$
$$a_2\lambda_1+(hm+a_2r)\lambda_2+h'm\mu_2=0.$$

Da queste eliminando successivamente λ_2, λ_1 e dividendo ogni volta per m risultano le altre:

$$(9)\qquad \begin{aligned} \{h(hm+2a_2r)-a_2^2p\}\,\lambda_1 &= \quad hm+a_2r+h'\sigma, \\ \{h(hm+2a_2r)-a_2^2p\}\,\lambda_2 &= -a_2+h'\tau, \end{aligned}$$

essendo σ, τ razionali interi. Un divisor comune di $h(hm+2a_2r)-a_2^2p$ e di h' dividerebbe per le (9) anche $a_1=hm+a_2r$ e a_2, quindi anche a, b contro l'ipotesi.

Sia ora t', u' una coppia di numeri che soddisfano le (8) e poniamo

$$(hm+2a_2r)t'+a_2pu'=h'c-1,\quad a_2t'+hu'=h'd$$
$$t=t'+h'T,\quad u=u'+h'U;$$

allora la (7) è identicamente soddisfatta e la (6), divisa per h', diventa

$$(hm+2a_2r)T+a_2pU-mx=a_2-c.$$

Questa è certamente solubile in numeri interi poichè i tre numeri

$$hm+2a_2r,\quad a_2p,\quad m$$

non hanno un divisor comune. E infatti essendo m, a_2 primi fra loro (perchè altrimenti per le (2) anche a, b avrebbero un effettivo divisore comune) un tale divisore dividerebbe anche m, $2r$, p mentre come si è osservato nella nota superiore, la forma quadratica $(m, r, -p)$ è primitiva di 1ª specie.

Nel caso $D \equiv 3$ (mod. 4), $\omega = \frac{1+i\sqrt{D}}{2}$ vale una dimostrazione affato simile che basterà qui accennare. L'ideale P si ridurrà in questo caso alla base $[m, r+\omega]$ essendo $r^2 + r + \frac{D+1}{4} = mk$, con m, r, k razionali interi. Avendosi ora

$$a = hm + a_2(r+\omega), \quad b = h'm$$

possiamo determinare i quattro interi x, y, t, u dalle equazioni

$$\begin{aligned} \{hm + (2r+1)a_2\}\, t - a_2 ku - h'mx &= h'a_2 - 1, \\ a_2 t + hu - \quad h'y &= 0 \end{aligned}$$

e ponendo

$$\begin{cases} \alpha = a_2 - (r+1)y + mx + y\omega, & \beta = h - rx + ky - x\omega, \\ \gamma = -(r+1)u + mt + u\omega \quad, & \delta = h' - rt + ku - t\omega \end{cases}$$

avremo

$$a = \alpha(r+\omega) + \beta m, \quad b = \gamma(r+\omega) + \delta m, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

cioè $\frac{a}{b}$ risulta equivalente a $\frac{r+\omega}{m}$ che è l'indice della forma quadratica primitiva di 2ª specie $2mx^2 - 2(2r+1)xy + 2ky^2$, a determinante $-D$ la cui opposta corrisponde all' ideale P.

Dimostrato così il nostro teorema, osserviamo che se ripartiamo i numeri frazionarii in Ω in *classi*, ponendo nella medesima classe tutti e soli quelli che sono equivalenti fra loro, il risultato conseguito può anche enunciarsi così: *Il numero delle classi dei numeri frazionarii in Ω eguaglia il numero delle classi degli ideali, cioè il numero delle classi delle forme quadratiche primitive a determinante $-D$ se non è $D \equiv 3$ (mod. 4), e invece il numero delle classi delle forme primitive di 2ª specie se $D \equiv 3$ (mod. 4).*

§ 4.

Discontinuità impropria del gruppo G pei punti del piano $\xi\eta$.

Il gruppo G, che abbiamo dimostrato essere propriamente discontinuo per i punti di R fuori del piano $\xi\eta$ (§ 1), è al contrario *impropriamente* discontinuo nell' intorno di ogni punto del piano $\xi\eta$. Esso non appartiene quindi alla classe di gruppi immediatamente utilizzabili per la teoria delle funzioni (gruppi automorfi), ma contiene bensì infiniti tali sottogruppi (fra i quali una classe soltanto verrà studiata nel presente lavoro.)

L' enunciata proprietà segue subito dai risultato dei precedenti §§, giacchè ogni porzione comunque piccola del piano $\xi\eta$ contiene *infiniti* punti indici di numeri frazionarii in Ω e questi appartengono soltanto ad un numero finito di classi.

Ma senza ricorrere al teorema generale del § 2, basta qui al nostro scopo riferirci a quella parte del teorema che riguarda l'equivalenza: di due frazioni $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ in Ω, ove a, b, come c, d. siano primi fra loro. Stabiliamo nuovamente l'equivalenza di due tali frazioni perchè le considerazioni relative ci saranno poi utili in seguito.

Essendo a, b primi fra loro possiamo trovare in Ω due interi α, β tali che sia $a\beta - b\alpha = 1$, come pure due altri interi γ, δ che soddisfino la condizione $c\delta - d\gamma = 1$. Le sostituzioni $\begin{pmatrix} a, & \alpha \\ b, & \beta \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c, & \gamma \\ d, & \delta \end{pmatrix}$ di G trasportano quindi rispettivamente il punto $z = \infty$ in $z' = \frac{a}{b}$, $z' = \frac{c}{d}$. Componendo dunque la seconda sostituzione coll' inversa della prima si ottiene la effettiva sostituzione di G:

$$\begin{pmatrix} c & \gamma \\ d & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \alpha \\ b & \beta \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} c\beta - b\gamma, & -c\alpha + a\gamma \\ d\beta - b\delta, & -d\alpha + a\delta \end{pmatrix},$$

che trasporta $\frac{a}{b}$ in $\frac{c}{d}$.

Ora consideriamo in particolare le frazioni della forma $\frac{r + is\sqrt{D}}{p}$, ove p sia un numero primo reale di cui $-D$ sia non-residuo quadratico ed r, s due interi arbitrarii non divisibili simultaneamente per p. In queste frazioni il numeratore è primo col denominatore perchè $r^2 + Ds^2$ non è divisibile per p; esse sono quindi tutte fra loro equivalenti. Ora, secondo il noto teorema di Dirichlet, esistono infiniti numeri primi p di questa specie e però in ogni porzione del piano $\xi\eta$ cadono infiniti punti, indici di quantità della forma $\frac{r + is\sqrt{D}}{p}$, che sono tutti fra loro equivalenti.

§ 5.

Relazione fra i gruppi totali G, G' nei campi $\left(1, \frac{1 + i\sqrt{D}}{2}\right)$, $(1, i\sqrt{D})$ per $D \equiv 3 \pmod{4}$.

Come già abbiamo detto nella prefazione, il gruppo G di sostituzioni lineari

$$(1) \qquad z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

che noi consideriamo nel caso $D \equiv 3 \pmod{4}$ è quello completo, ove i coefficienti percorrono tutti i possibili numeri interi della forma $m + n\frac{1 + i\sqrt{D}}{2}$ con m, n razionali interi. È chiaro per altro che se nella (1) $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ percorrono soltanto gli interi del campo $(1, i\sqrt{D})$, che entro il campo totale $\left(1, \frac{1+i\sqrt{D}}{2}\right)$ forma un così detto *ordine*, avremo altresì un gruppo, che si indicherà con G', e sarà contenuto in G come sottogruppo. Dimostreremo che G' è sottogruppo *d'indice finito* in G; ne segue che, appena determinato il poliedro fondamentale per G, conosceremo altresì quello di G'. Basterà quindi limitarsi alla ricerca del primo poliedro, che sarà in ogni caso più semplice. La condizione perchè un numero intero in Ω appartenga all' ordine $(1, i\sqrt{D})$ si può esprimere con una congruenza rispetto al modulo 2, essendo per ciò necessario e sufficiente che il detto numero risulti congruo (mod. 2) con un numero reale. G' è adunque sottogruppo *congruenziale* di G, caratterizzato da ciò che le sue sostituzioni sono congrue (mod. 2) con una sostituzione dei *sei* tipi seguenti:

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Ne segue che se valutiamo il numero N di sostituzioni in G incongrue (mod. 2), l'indice del sottogruppo G' di G sarà precisamente eguale a $\frac{N}{6}$. Il numero N risulta diverso secondo che

$$\text{a)}\quad D \equiv 3 \pmod{8}, \quad \text{o} \quad \text{b)}\quad D \equiv 7 \pmod{8},$$

casi che tratteremo quindi separatamente.*) Osserviamo che in ogni caso i quattro numeri $0, 1, \omega, 1+\omega$ formano un sistema completo di resti (mod. 2).

Caso a) $D \equiv 3$ (mod. 8). Avendosi

$$\omega^2 - \omega + \frac{D+1}{4} = 0, \tag{2}$$

sussiste qui la congruenza $\omega^2 \equiv \omega + 1$ (mod. 2) e la congruenza

$$\beta x \equiv \gamma \pmod{2}$$

per i valori $1, \omega, 1+\omega$ di β e un valore arbitrario di γ ammette ogni volta una sola soluzione.

Ora le sostituzioni di G essendo assoggettate (mod. 2) all' unica condizione $\alpha\delta - \beta\gamma \equiv 1$ (mod. 2) ne risulta che per quelle di esse in cui $\delta \equiv 0$ (mod. 2), α può assumere 4 valori incongrui e β 3, la coppia scelta per α, β individuando ciascuna volta γ. Abbiamo dunque in G:

$$4 \times 3 = 12 \text{ sostituzioni incongrue con } \delta \equiv 0 \pmod{2}.$$

*) L'ultima ragione di questa differenza sta in ciò che nel primo caso il numero 2 è un numero primo nel campo $\left(1, \frac{1+i\sqrt{D}}{2}\right)$ mentre nel secondo caso è scindile in fattori (ideali).

Se *non* è $\delta \equiv 0$ (mod. 2), possono sì β che γ assumere 4 valori incongrui e dai valori scelti per β, γ, δ risulta individuato α; vi sono quindi in G: $4 \times 4 \times 3 = 48$ sostituzioni incongrue con $\delta \equiv 1, \omega, 1 + \omega$ (mod. 2).

E poichè G, come ora si dimostrerà, contiene effettivamente sosticuzioni di tutti questi caratteri (mod. 2) si vede che *il numero* N *certato è eguale a* 60 *se* $D \equiv 3$ (*mod.* 8).

Fra queste 60 sostituzioni scegliamo le due

$$A = \begin{pmatrix} \omega & 1+\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

osservando che G contiene certamente sostituzioni di questi caratteri (mod. 2). Per la 2ª è evidente e per la sostituzione A basta sostituirvi l'altra congrua (mod. 2) esistente in G:

$$\begin{pmatrix} 3\omega - \frac{3D+7}{8}, & 1+\omega \\ -3\omega \quad , & -2 \end{pmatrix} \text{ se } D \equiv 3 \text{ (mod. 16)},$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} \omega - \frac{D+5}{8}, & 1+\omega \\ -\omega \quad , & -2 \end{pmatrix} \text{ se } D \equiv 11 \text{ (mod. 16)}.$$

La sostituzione A, considerata (mod. 2), è a periodo 5 e la B a periodo 2 mentre la loro combinazione

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1+\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$$

ha il periodo 3. Pel noto teorema del Sig^r^ Dyck il gruppo generato da A, B consta effettivamente di 60 sostituzioni ed, astrattamente considerato, coincide col gruppo dell' icosaedro.

Nel caso attuale adunque: *G' è sotto gruppo d'indice* 10 *in G ed ha in G la medesima giacitura che il gruppo diedrale di* 6 *sostituzioni nel gruppo dell' icosaedro.* Si osserverà che nello stesso tempo riconosciamo in G l'esistenza di altri sottogruppi d'indice finito corrispondenti ai varii sottogruppi dell' icosaedro.

Caso b) $D \equiv 7$ (*mod.* 8). In forza della (2) sussistono qui le congruenze:

$$\omega^2 \equiv \omega, \quad (\omega + 1)^2 \equiv \omega + 1, \quad \omega(\omega + 1) = 0 \text{ (mod. 2)},$$

onde si rileva facilmente che la congruenza

$$xy \equiv k \text{(mod. 2)}$$

ammette 9 soluzioni diverse per $k = 0$, 3 soluzioni per $k = \omega$ o $k = \omega + 1$, ed una soltanto par $k = 1$. Dopo di ciò si vede subito che il numero N delle possibili sostituzioni di G incongrue (mod. 2) è dato da $N = 36$.

Fra di esse consideriamo particolarmente le due

$$A \equiv \begin{pmatrix} \omega+1, & 1 \\ 1 \;\;, & \omega \end{pmatrix}, \quad B \equiv \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ 1, & 1 \end{pmatrix}$$

a periodo 3 ciascuna e permutabili fra loro che generano quindi un gruppo Γ_9 colle 9 sostituzioni seguenti

$$\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega+1 & 1 \\ 1 & \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \omega \\ \omega & \omega+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega & \omega+1 \\ \omega+1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \omega & 1 \\ 1 & \omega+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \omega+1 \\ \omega+1 & \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega+1 & \omega \\ \omega & 1 \end{pmatrix}.$$

Scriviamo esplicitamente le altre 27 sostituzioni ordinandole nel noto modo rispetto alla sostituzioni di Γ_9:

$$\begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 1, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega, & \omega+1 \\ 1, & \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega+1, & 1 \\ \omega \;\;, & \omega+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \;\;, & \omega \\ \omega+1, & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \omega+1, & \omega \\ 1 \;\;, & \omega+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \;\;, & 1 \\ \omega+1, & \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, & \omega+1 \\ \omega, & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1, & \omega+1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega+1, & \omega \\ 1 \;\;, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega, & 1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ 1, & \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ \omega, & \omega+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \;\;, & 0 \\ \omega+1, & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1, & \omega \\ 1, & \omega+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega \;\;, & \omega+1 \\ \omega+1, & \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega+1, & 1 \\ \omega \;\;, & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1, & \omega \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega, & \omega+1 \\ 1, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega+1, & 1 \\ 1 \;\;, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, & \omega+1 \\ 1, & \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega+1, & \omega \\ \omega \;\;, & \omega+1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \omega \;\;, & 1 \\ \omega+1, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ 1, & \omega+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \;\;, & 1 \\ \omega+1, & \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \omega & 1 \end{pmatrix}.$$

Queste 36 sostituzioni, considerate (mod. 2), formano un gruppo nel quale Γ_9 è contenuto quale sottogruppo *eccezionale* d'indice 4. Resta a verificarsi che G contiene effettivamente sostituzioni di tutti questi caratteri (mod. 2), per il che, esaminando il quadro superiore, vediamo che basta riscontrare in G l'esistenza di una sostituzione congrua (mod. 2) con $\begin{pmatrix} \omega+1, & 1 \\ 1 \;\;, & \omega \end{pmatrix}$; questa si trova immediamente nella sostituzione $\begin{pmatrix} \omega+1, & 2\omega - \frac{D+5}{4} \\ 1 \;\;, & \omega \end{pmatrix}$. Possiamo ora enunciare il risultato finale:

Il sottogruppo G' di G ha l'indice 10 *o* 6 *secondo che* $D \equiv 3$ *o* $D \equiv 7$ (*mod.* 8).

Osservazione. In modo del tutto analogo a quello tenuto nel presente paragrafo per lo studio del sottogruppo G' di G, si può procedere alla ricerca di quei sottogruppi G_1 di G, nei quali $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ percorrono soltanto gli interi di un determinato *ordine* $[1, k\,\omega]$, essendo k un numero fisso razionale intero. In ogni caso G_1, come sottogruppo congruenziale di G ha indice finito. Per tal modo ad esempio il caso in cui $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ percorrono gli interi della forma $m + in\sqrt{D}$, ove D *ammetta fattori quadrati* si riconduce a quello da noi esclusivamente considerato in cui D è privo di tali fattori.

§ 6.

Doppio ampliamento del gruppo — Riflessioni.

Fino adora abbiamo considerato nel corpo quadratico Ω soltanto quelle sostituzioni

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \tag{1}$$

con coefficienti interi il cui determinante è eguale a $+1$; ma è chiaro che otteniamo un gruppo più ampio Γ, se esigiamo soltanto che $\alpha\delta - \beta\gamma$ sia un' *unità*. Eccettuati i casi $D = 1$, $D = 3$ nei quali vi sono rispettivamente 4 e 6 unità, abbiamo in effetto le due sole unità ± 1 e però G è sottogruppo eccezionale d'indice 2 in Γ. Se riflettiamo poi che le sostituzioni (1) non sono alterate quando si moltiplichino i quattro coefficienti per un medesimo fattore e per questo prendiamo un' unità, vediamo che lo stesso accade per $D = 1$, $D = 3$. Il gruppo Γ formato da tutte le sostituzioni (1) con

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1, \tag{2}$$

condizione questa che nel caso $D = 1$ si sostituirà coll' altra

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1 \quad \text{o} \quad \alpha\delta - \beta\gamma = \pm i,$$

sarà indicato nel seguito con

$$\Gamma^{(i\sqrt{D})} \quad \text{o} \quad \Gamma^{\left(\frac{1+i\sqrt{D}}{2}\right)} \quad \text{per } D \equiv 3 \pmod{4}$$

ed anche talora più brevemente con $\Gamma^{(\omega)}$ ed è di questo gruppo che particolarmente ci occuperemo.

Procediamo ora ad un secondo ampliamento di $\Gamma^{(\omega)}$ ben più importante pel nostro scopo, all' *ampliamento per riflessione* (Erweiterung durch Spiegelung). Consideriamo perciò insieme alle sostituzioni lineari dirette (o di 1ª specie) sulla variabile z le altre

$$z' = \frac{\alpha z_0 + \beta}{\gamma z_0 + \delta}, \tag{3}$$

z_0 essendo la coniugata di z, sostituzioni che diremo *di 2ª specie*. Le formole per la relativa trasformazione dello spazio si ottengono da quelle di Poincaré ((2) § 1) semplicemente scambiandovi z con z_0. Riguardando il mezzo spazio R come immagine (conforme) dello spazio a curvatura costante negativa, le prime trasformazioni rappresentano un puro movimento e le seconde invece un tale movimento combinato con una riflessione o simmetria rispetto ad un piano.

Se nella (2), (3) immaginiamoche $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ percorrano tutti gli interi in Ω che soddisfano alla condizione $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$ (o alle altre $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$, $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm i$ per $D = 1$) otterremo un gruppo che indicheremo con

$$\bar{\Gamma}^{(i\sqrt{D})},\quad \bar{\Gamma}^{\left(\frac{1+i\sqrt{D}}{2}\right)}\quad \text{o}\quad \bar{\Gamma}^{(\omega)},$$

nel quale $\Gamma^{(\omega)}$ è evidentemente contenuto come sottogruppo eccezionale d'indice 2.

Per la determinazione del poliedro fondamentale dei gruppi $\bar{\Gamma}^{(\omega)}$ e $\Gamma^{(\omega)}$ ha singolare importanza la ricerca di quelle sostituzioni di 2^a specie in $\bar{\Gamma}^{(\omega)}$, che sono a periodo 2 cioè coincidono colla propria inversa. Queste sostituzioni si diranno *riflessioni* (Spiegelungen). Gli elementi per questa determinazione si trovano già sviluppati da Fricke nel citato libro di Klein (p^a 196 s. s), al quale qui ci riferiremo.

L'inversa della sostituzione di 2^a specie

$$z' = \frac{\alpha z_0 + \beta}{\gamma z_0 + \delta} \quad \text{è} \quad z' = \frac{-\delta_0 z_0 + \beta_0}{\gamma_0 z_0 - \alpha_0}$$

e perchè le due sostituzioni coincidano occorre che si abbia:

$$-\delta_0 = k\alpha,\quad \beta_0 = k\beta,\quad \gamma_0 = k\gamma,\quad -\alpha_0 = k\delta$$

dove k è un fattore di proporzionalità. Lasciando per un momento da parte il caso $D = 1$ sarà $\alpha\delta - \beta\gamma = \alpha_0\delta_0 - \beta_0\gamma_0 = \pm 1$, onde risulta $k^2 = 1$, $k = \pm 1$. Si presenterà dunque uno dei due casi seguenti

$$\begin{array}{lllll} 1^0 & -\delta_0 = \alpha, & \beta_0 = \beta, & \gamma_0 = \gamma, & -\alpha_0 = \delta, \\ 2^0 & \delta_0 = \alpha, & \beta_0 = -\beta, & \gamma_0 = -\gamma, & \alpha_0 = \delta. \end{array}$$

Scindendo ciascun coefficiente nella sua parte reale ed immaginaria troviamo in $\bar{\Gamma}^{(\omega)}$, quando non è $D \equiv 3$ (mod. 4), i due tipi seguenti di riflessioni

$$\text{Tipo I:}\qquad z' = \frac{(a_1 + i a_2\sqrt{D}) z_0 + b_1}{c_1 z_0 - (a_1 - i a_2\sqrt{D})},$$

$$\text{Tipo II:}\qquad z' = \frac{(a_1 + i a_2\sqrt{D}) z_0 + i b_1\sqrt{D}}{i c_1\sqrt{D} z_0 + (a_1 - i a_2\sqrt{D})},$$

dove a_1, a_2, b_1, c_1 sono interi reali che debbono corrispondentemente soddisfare alla condizione:

$$\begin{array}{ll} \text{I*)} & a_1^2 + D a_2^2 + b_1 c_1 = \pm 1, \\ \text{II*)} & a_1^2 + D a_2^2 + D b_1 c_1 = \pm 1 \end{array}$$

secondo che si tratta del tipo I o del tipo II.

Similmente procedendo per $D \equiv 3$ (mod. 4), troviamo in $\Gamma^{\left(\frac{1+i\sqrt{D}}{2}\right)}$ le riflessioni dei due tipi:

$$\text{Tipo III:} \qquad z' = \frac{\left(a_1 + a_2 \frac{1+i\sqrt{D}}{2}\right) z_0 + b_1}{c_1 z_0 - \left(a_1 + a_2 \frac{1-i\sqrt{D}}{2}\right)},$$

$$\text{Tipo IV:} \qquad z' = \frac{\left(a_1 + a_2 \frac{1+i\sqrt{D}}{2}\right) z_0 + i b_1 \sqrt{D}}{i c_1 \sqrt{D}\, z_0 + \left(a_1 + a_2 \frac{1-i\sqrt{D}}{2}\right)}$$

ove a_1, a_2, b_1, c_1 sono interi reali assoggettati alle rispettive condizioni:

$$\text{III*)} \quad (2a_1 + a_2)^2 + D a_2^2 + 4 b_1 c_1 = \pm 4,$$
$$\text{IV*)} \quad (2a_1 + a_2)^2 + D a_2^2 + 4 D b_1 c_1 = \pm 4.$$

Se $D = 1$, la condizione $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$ dovendo essere surrogata dalle altre $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$, $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm i$, i risultati sono leggiermente diversi. Per $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$ troviamo ancora $k = \pm 1$ ma qui il doppio segno di k non porta differenza alcuna perchè col moltiplicare simultaneamente $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ per i si passa dall' un segno di k all' altro. Per $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm i$ si ha invece $k^2 = -1$, $k = \pm i$, dove nuovamente possiamo trascurare il doppio segno di k. Così troviamo in $\Gamma^{(i)}$ le riflessioni dei due tipi

$$\text{Tipo A:} \quad z' = \frac{(a_1 + i a_2) z_0 + b_1}{c_1 z_0 - (a_1 - i a_2)}, \qquad a_1^2 + a_2^2 + b_1 c_1 = \pm 1,$$

$$\text{Tipo B:} \quad z' = \frac{(a_1 + i a_2) z_0 + (1-i) b_1}{(1-i) c_1 z_0 + a_2 + i a_1}, \qquad a_1^2 + a_2^2 + 2 b_1 c_1 = \pm 1.$$

§ 7.

Sfere di riflessione propria ed impropria.

Calcoliamo ora le trasformazioni dello spazio R corrispondenti alle sostituzioni di 2ª specie a periodo 2 trovate in $\Gamma^{(\omega)}$. Usiamo per ciò delle formole (2) § 1 nelle quali, come già superiormente è stato avvertito, deve a questo oggetto scambiarsi z con z_0.

Consideriamo dapprima il caso in cui sia $c_1 = 0$, ove evidentemente nelle I*), II*), III*), IV*) può valere soltanto il segno superiore. Se si tratta del gruppo $\Gamma^{(i\sqrt{D})}$ per $D > 1$, o del gruppo $\Gamma^{\left(\frac{1+i\sqrt{D}}{2}\right)}$ per $D > 3$, avremo manifestamente

$$a_1 = \pm 1, \quad a_2 = 0$$

restando b_1 arbitrario e per le relative formole di trasformazione troviamo

$$\xi' = -\xi + b_1,\quad \eta' = \eta,\qquad \zeta' = \zeta \quad \text{pel tipo I) o III)},$$
$$\xi' = \xi,\qquad \eta' = -\eta + b_1\sqrt{D},\quad \zeta' = \zeta \quad \text{pel tipo II) o IV)}.$$

Queste rappresentano una simmetria o riflessione sul piano

$$(1)\qquad 2\xi = b_1,\quad 2\eta = b_1\sqrt{D}.$$

Percorrendo b_1 tutti i numeri razionali interi le (1) ci danno tutti i *piani di riflessione*. Però nel caso $D = 1$ abbiamo oltre i piani di riflessione (1) gli altri

$$(2)\qquad \xi - \eta = b_1,\quad \xi + \eta = b_1$$

e nel caso $D = 3$

$$(3)\quad \pm\xi + \eta\sqrt{3} + \tfrac{1}{2}b_1 = 0,\qquad \pm\xi\sqrt{3} + \eta + \tfrac{1}{2}b_1\sqrt{3} = 0,$$

come subito si rileva dalle formole del precedente paragrafo.

Supponendo ora c_1 diverso da zero e considerando dapprima il caso in cui nel 2° membro delle I*), II*), III*), IV*) del § 6 vale il segno superiore, dalle formole (2) del § 1 troviamo i risultati seguenti. La sostituzione del tipo I)

$$z' = \frac{(a_1 + ia_2\sqrt{D})z_0 + b_1}{c_1 z_0 - (a_1 - ia_2\sqrt{D})},\quad a_1^2 + Da_2^2 + b_1c_1 = 1$$

produce la trasformazione dello spazio data dalle formole:

$$\left\{\begin{aligned}
\xi' - \frac{a_1}{c_1} &= \frac{1}{c_1^2}\,\frac{\xi - \frac{a_1}{c_1}}{\left(\xi - \frac{a_1}{c_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{a_2\sqrt{D}}{c_1}\right)^2 + \zeta^2},\\
\eta' - \frac{a_2\sqrt{D}}{c_1} &= \frac{1}{c_1^2}\,\frac{\eta - \frac{a_2\sqrt{D}}{c_1}}{\left(\xi - \frac{a_1}{c_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{a_2\sqrt{D}}{c_1}\right)^2 + \zeta^2},\\
\zeta' &= \frac{\zeta}{\left(\xi - \frac{a_1}{c_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{a_2\sqrt{D}}{c_1}\right)^2 + \zeta^2}.
\end{aligned}\right.$$

Come si vede, questa è un' inversione per raggi vettori reciproci rispetto alla sfera:

$$\left(\xi - \frac{a_1}{c_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{a_2\sqrt{D}}{c_1}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{c_1^2}.$$

Tale inversione si dirà anche una *riflessione* su questa sfera che prenderà il nome di *sfera di riflessione.* Similmente si vedrà che le sostituzioni dei tipi II), III), IV) § 6 corrispondono a riflessioni sulle rispettive sfere

$$\left(\xi - \frac{a_2}{c_1}\right)^2 + \left(\eta + \frac{a_1}{c_1\sqrt{D}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{Dc_1^2},$$

$$\left(\xi - \frac{2a_1+a_2}{2c_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{a_2\sqrt{D}}{2c_1}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{c_1^2},$$

$$\left(\xi - \frac{a_2}{2c_1}\right)^2 + \left(\eta + \frac{2a_1+a_2}{2c_1\sqrt{D}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{Dc_1^2}.$$

Riepiloghiamo i risultati in un quadro a cui dovremo ricorrere in seguito

$$D \text{ qualunque} \begin{cases} \text{Tipo I)} \begin{cases} \text{Sostituzione } z' = \dfrac{(a_1 + ia_2\sqrt{D})\,z_0 + b_1}{c_1 z_0 - (a_1 - ia_2\sqrt{D})}, \\ \qquad\qquad \text{(A)} \quad a_1^2 + Da_2^2 + b_1c_1 = 1, \\ \text{Sfera di riflessione } \left(\xi - \dfrac{a_1}{c_1}\right)^2 + \left(\eta - \dfrac{a_2\sqrt{D}}{c_1}\right)^2 + \zeta^2 = \dfrac{1}{c_1^2}; \end{cases} \\ \text{Tipo II)} \begin{cases} \text{Sostituzione } z' = \dfrac{(a_1 + ia_2\sqrt{D})\,z_0 + ib_1\sqrt{D}}{ic_1\sqrt{D}\,z_0 + (a_1 - ia_2\sqrt{D})}, \\ \qquad\qquad \text{(B)} \quad a_1^2 + Da_2^2 + Db_1c_1 = 1, \\ \text{Sfera di riflessione } \left(\xi - \dfrac{a_2}{c_1}\right)^2 + \left(\eta + \dfrac{a_1}{c_1\sqrt{D}}\right)^2 + \zeta^2 = \dfrac{1}{Dc_1^2}; \end{cases} \end{cases}$$

$$D \equiv 3 \pmod{4} \begin{cases} \text{Tipo III)} \begin{cases} \text{Sostituzione } z' = \dfrac{\left(a_1 + a_2\dfrac{1+i\sqrt{D}}{2}\right) z_0 + b_1}{c_1 z_0 - \left(a_1 + a_2\dfrac{1-i\sqrt{D}}{2}\right)}, \\ \qquad\qquad \text{(C)} \quad (2a_1+a_2)^2 + Da_2^2 + 4b_1c_1 = 1, \\ \text{Sfera di riflessione } \left(\xi - \dfrac{2a_1+a_2}{2c_1}\right)^2 + \left(\eta - \dfrac{a_2\sqrt{D}}{2c_1}\right)^2 + \zeta^2 = \dfrac{1}{c_1^2}; \end{cases} \\ \text{Tipo IV)} \begin{cases} \text{Sostituzione } z' = \dfrac{\left(a_1 + a_2\dfrac{1+i\sqrt{D}}{2}\right) z_0 + ib_1\sqrt{D}}{ic_1\sqrt{D}\,z_0 + \left(a_1 + a_2\dfrac{1-i\sqrt{D}}{2}\right)}, \\ \qquad\qquad \text{(D)} \quad (2a_1+a_2)^2 + Da_2^2 + 4Db_1c_1 = 1, \\ \text{Sfera di riflessione } \left(\xi - \dfrac{a_2}{2c_1}\right)^2 + \left(\eta + \dfrac{2a_1+a_2}{2c_1\sqrt{D}}\right)^2 + \zeta^2 = \dfrac{1}{Dc_1^2}. \end{cases} \end{cases}$$

Per ottenere tutte le sfere di riflessione basta far percorrere nelle formole precedenti ad a_1, a_2, c_1 tutti gli interi reali che soddisfano alle congruenze rispettive

$$a_1^2 + Da_2^2 \equiv 1 \pmod{c_1}, \qquad a_1^2 + Da_2^2 \equiv 1 \pmod{Dc_1},$$
$$(2a_1+a_2)^2 + Da_2^2 \equiv 4 \pmod{4c_1}, \quad (2a_1+a_2)^2 + Da_2^2 \equiv 4 \pmod{4Dc_1}.$$

In fine nel caso $D = 1$ abbiamo i risultati seguenti:

$$D = 1 \begin{cases} \text{Tipo A)} \begin{cases} \text{Sostituzione } z' = \dfrac{(a_1 + i a_2) z_0 + b_1}{c_1 z_0 - (a_1 - i a_2)}, \\ \qquad\qquad a_1^2 + a_2^2 + b_1 c_1 = 1, \\ \text{Sfera di riflessione } \left(\xi - \frac{a_1}{c_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{a_2}{c_1}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{c_1^2}; \end{cases} \\ \text{Tipo B)} \begin{cases} \text{Sostituzione } z' = \dfrac{(a_1 + i a_2) z_0 + (1 - i) b_1}{(1 - i) c_1 z_0 + (a_2 + i a_1)}, \\ \qquad\qquad a_1^2 + a_2^2 + 2 b_1 c_1 = 1, \\ \text{Sfera di riflessione } \left(\xi - \frac{a_1 - a_2}{2 c_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{a_1 + a_2}{2 c_1}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{2 c_1^2}. \end{cases} \end{cases}$$

Consideriamo ora quelle sostituzioni di 2ª specie a periodo 2, che corrispondono nelle formole (A), (B), (C), (D) del quadro superiore ad un cangiamento di segno nel 2º membro. Per la trasformazione dello spazio corrispondente ad esempio ad una tale sostituzione del tipo I) troviamo:

$$\begin{cases} \xi' - \dfrac{a_1}{c_1} = - \dfrac{1}{c_1^2} \dfrac{\xi - \frac{a_1}{c_1}}{\left(\xi - \frac{a_1}{c_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{a_2 \sqrt{D}}{c_1}\right)^2 + \zeta^2}, \\ \eta' - \dfrac{a_2 \sqrt{D}}{c_1} = - \dfrac{1}{c_1^2} \dfrac{\eta - \frac{a_2 \sqrt{D}}{c_1}}{\left(\xi - \frac{a_1}{c_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{a_2 \sqrt{D}}{c_1}\right)^2 + \zeta^2}, \\ \zeta' = + \dfrac{1}{c_1^2} \dfrac{\zeta}{\left(\xi - \frac{a_1}{c_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{a_2 \sqrt{D}}{c_1}\right)^2 + \zeta^2}. \end{cases}$$

È chiaro che questa trasformazione consiste in una riflessione sulla sfera

$$\left(\xi - \frac{a_1}{c_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{a_2 \sqrt{D}}{c_1}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{c_1^2},$$

congiunta con una rotazione di π attorno a quel diametro della sfera che è perpendicolare al piano $\xi\eta$. Diremo questo diametro *asse* della sfera, la sostituzione si chiamerà una *riflessione impropria* e la sfera stessa *sfera di riflessione impropria*. Analogamente procedendo per gli altri casi si vede che le formole riunite nei quadri superiori ci danno tutte le sfere di riflessione *impropria*, quando alle condizioni (A), (B), (C), (D) si sostituiscano quelle che ne risultano cangiando il segno del 2º membro.

È da notarsi che una sfera può figurare simultaneamente come sfera di riflessione propria ed impropria. Ciò accade per tutte e sole le sfere dei tipi I) o III) di raggio eguale ad 1 o a $\frac{1}{2}$. La combinazione delle due riflessioni propria ed impropria dà allora una rotazione di π attorno all' asse della sfera cioè una sostituzione ellittica a periodo 2 in $\Gamma^{(\infty)}$.

§ 8.

Periodicità delle sostituzioni in $\Gamma^{(\infty)}$.

Le sostituzioni lineari

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}$$

si dividono, come è noto, inquattro classi cioè: ellittiche, paraboliche, iperboliche e lossodromiche*). Supposto ridotto, come sempre è possibile, il determinante $ad - bc$ eguale all' unità, la natura della sostituzione dipende dalla somma $a + d$ del 3° e 4° coefficiente. Se $a + d$ è reale, essa è ellittica, parabolica od iperbolica secondo che

$$(a + d)^2 < 4, \quad (a + d)^2 = 4, \quad (a + d)^2 > 4;$$

quando $a + d$ non è reale la sostituzione è lossodromica.

Per lo studio del nostro gruppo $\Gamma^{(\infty)}$ ci interessa specialmente di conoscere le sostituzioni ellittiche in $\Gamma^{(\infty)}$ ed il loro periodo, che è necessariamente finito, il gruppo essendo propriamente discontinuo. Il periodo della sostituzione si deduce dal valore del moltiplicatore

$$k = \frac{\{a + d - \sqrt{(a + d)^2 - 4}\}^2}{4};$$

per le sostituzioni ellittiche di un gruppo propriamente discontinuo esso è eguale ad una radice n^ma^ dell' unità e il corrispondente periodo è allora $= n$. Ricordiamo inoltre che nella trasformazione dello spazio dovuta ad una sostituzione ellittica rimangono fissi tutti i punti di un circolo (o retta) ortogonale al piano $\xi\eta$**).

Supposto $D > 1$ si hanno in $\Gamma^{(\infty)}$ due sorta di sostituzioni, quelle a determinante $+1$ e quelle a determinante -1. Le prime sono ellittiche se $\alpha + \delta = 0$ o $\alpha + \delta = \pm 1$ ed hanno per rispettivo moltiplicatore

$$k = -1 \quad \text{o} \quad k = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad = -\frac{1 + i\sqrt{3}}{2};$$

esse sono quindi a periodo 2 o 3, qualunque sia D.

Una sostituzione $z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ di $\Gamma^{(\infty)}$ a determinante -1 si riduce a determinante $+1$ moltiplicando i suoi quattro coefficienti per i; essa sarà dunque ellittica se $i(\alpha + \delta)$ è reale ed il suo modulo è < 2. Sarà dunque $\alpha + \delta = in\sqrt{D}$ con n razionale intero e la condizione $Dn^2 < 4$ porta subito, per $D > 3$, $n = 0$ e però $\alpha + \delta = 0$. Queste nuove sostituzioni ellittiche sono a periodo 2; dunque: *Nel gruppo* $\Gamma^{(\infty)}$, *appena* $D > 3$, *esistono soltanto sostituzioni ellittiche coi periodi* 2 *e* 3.

Nei casi esclusi $D = 1$, $D = 2$, $D = 3$, considerando dapprima i due ultimi, sono possibili sostituzioni ellittiche di periodo diverso da

*) Cf. Klein, Vorlesungen etc. pag. 163 s. s. e Poincaré, Acta Mathematica Bd. 3.

**) Nello spazio non-euclideo essa è una pura rotazione.

2, 3 solo fra quelle di determinante -1. Riprendendo la considerazione superiore, alla condizione $Dn^2 = 4$, oltre che con $n = 0$, si soddisfa anche con $n = \pm 1$ e corrispondentemente risulta

$$k = \pm i \text{ per } D = 2, \quad k = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} \text{ per } D = 3$$

ed abbiamo quindi per $D = 2$ delle sostituzioni ellittiche a periodo 4, per $D = 3$ delle sostituzioni a periodo 3 e 6.

In fine se $D = 1$ troviamo delle nuove sostituzioni ellittiche solo fra quelle a determinante $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm i$ e possiamo senz' altro supporre $\alpha\delta - \beta\gamma = i$. Per ridurre il determinante $= + 1$ basta allora moltiplicare i quattro coefficienti per $\frac{1-i}{\sqrt{2}}$ e, dovendo essere per le sostituzioni cercate

$$\frac{1-i}{\sqrt{2}}(\alpha + \delta) = \frac{1-i}{\sqrt{2}}(m + in)$$

reale, sarà $n = m$ quindi

$$\frac{1-i}{\sqrt{2}}(\alpha + \delta) = m\sqrt{2}$$

e la corrispondente condizione $2m^2 < 4$ si soddisfa, oltre che con $m = 0$, anche con $m = \pm 1$. Le relative sostituzioni in $\Gamma^{(i)}$ sono a periodo 4. Ci saranno poi utili anche le osservazioni seguenti che riguardano le sostituzioni paraboliche in $\Gamma^{(\infty)}$. Una tale sostituzione lascia invariato un solo punto del piano $\xi\eta$ che è indice di un numero frazionario in $\Gamma^{(\infty)}$. Inversamente ogni tale punto $z_0 = \frac{a}{b}$ è punto fisso di infinite sostituzioni paraboliche in $\Gamma^{(\infty)}$; queste hanno la forma $\begin{pmatrix} 1 + \gamma\frac{a}{b}, & -\gamma\left(\frac{a}{b}\right)^2 \\ \gamma \quad , & 1 - \gamma\frac{a}{b} \end{pmatrix}$ ove γ percorre tutti gli interi in Ω che rendono $\gamma\frac{a}{b}$, $\gamma\frac{a^2}{b^2}$ interi. Il sottogruppo di $\Gamma^{(\infty)}$ che lascia fisso il punto $\frac{a}{b}$ consta di tutte e sole queste sostituzioni a determinante $+1$ combinate con una sostituzione ellittica a determinante -1 e a periodo 2. I numeri γ formano manifestamente un ideale riconducibile ad una base binaria e però bastano due sostituzioni paraboliche elementari per generare tutte quelle del sottogruppo descritto. Fra le sostituzioni paraboliche osserviamo quelle che lasciano fisso il punto $z = \infty$; esse hanno la forma

$$z' = z + \beta$$

e se ad esse si associano le sostituzioni della forma

$$z' = -z + \beta.$$

che sono ellittiche a periodo 2 si ha il gruppo di tutte le sostituzioni di $\Gamma^{(\infty)}$ che lasciano invariato $z = \infty$. Da quanto abbiamo visto ai §§ 2, 3 risulta che per ogni punto $z_0 = \frac{a}{b}$ indice di un numero frazionario in Ω con a, b primi fra loro il gruppo delle sostituzioni che lo lasciano fermo consta egualmente di sostituzioni paraboliche e di sostituzioni ellittiche a periodo 2 ed è affine al gruppo sopra descritto. Lo stesso risulta per qualsiasi numero frazionario in Ω, da quanto è detto superiormente.

§ 9.

Angoli sotto cui s'intersecano le sfere di riflessione.

In questo paragrafo per sfere di riflessione s'intenderanno quelle di *riflessione propria* soltanto; supporremo inoltre $D > 3$ notando semplicemente i risultati speciali per $D = 1, 2, 3$. Per angolo A di due sfere fisseremo di considerare quello che vien formato nella regione interna ad ambedue le sfere, per cui se d è la distanza dei centri ed r, r', sono i raggi si avrà

$$d^2 = r^2 + r'^2 + 2rr' \cos A.$$

Quando due sfere di riflessione s'incontrano, la sostituzione di 1ª specie che nasce dalla combinazione delle due riflessioni è ellittica o parabolica secondo che le due sfere si tagliano effettivamente oppure si toccano. Siccome le sostituzioni ellittiche in $\Gamma^{(\omega)}$, per $D > 3$, sono soltanto a periodo 2 o 3 ne segue che l'angolo A sotto cui si tagliano due sfere di riflessione potrà soltanto avere uno dei tre valori $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$. Ciò vogliamo qui confermare con un calcolo diretto sulle formole del § 7.

Prendiamo due sfere di riflessione appartenenti ambèdue al tipo I) del § 7 e siano

$$\left(\xi - \frac{a_1}{c_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{a_2\sqrt{D}}{c_1}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{c_1^2},$$

$$\left(\xi - \frac{\alpha_1}{\gamma_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{\alpha_2\sqrt{D}}{\gamma_1}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{\gamma_1^2}$$

le loro equazioni essendo a_1, a_2, b_1, c_1; α_1, α_2, β_1, γ_1 numeri razionali interi che soddisfano alle condizioni

$$(2) \qquad a_1^2 + Da_2^2 + b_1c_1 = 1, \quad \alpha_1^2 + D\alpha_2^2 + \beta_1\gamma_1 = 1,$$

ove supporremo c_1, γ_1 positivi, come evidentemente è lecito. Se le due sfere s'incontrano, per l'angolo A di loro intersezione risulta dalla (1)

$$\left(\frac{a_1}{c_1} - \frac{\alpha_1}{\gamma_1}\right)^2 + D\left(\frac{a_2}{c_1} - \frac{\alpha_2}{\gamma_1}\right)^2 = \frac{1}{c_1^2} + \frac{1}{\gamma_1^2} + \frac{2\cos A}{c_1\gamma_1},$$

ovvero, per le (2)

$$\cos A = -\frac{1}{2}\left\{2a_1\alpha_1 + 2Da_2\alpha_2 + b_1\gamma_1 + \beta_1c_1\right\}.$$

La quantità fra parentesi essendo un numero intero, troviamo possibili per $\cos A$ soltanto invalori $\cos A = 0$, $\cos A = \pm 1$, $\cos A = \pm \frac{1}{2}$ e però

$$A = \frac{\pi}{2}; \quad A = 0,\ \pi; \quad A = \frac{\pi}{3},\ \frac{2\pi}{3}.$$

La combinazione delle due riflessioni

$$z' = \frac{(a_1 + i a_2 \sqrt{D})\, z_0 + b_1}{c_1 z_0 - (a_1 - i a_2 \sqrt{D})}, \quad z' = \frac{(\alpha_1 + i \alpha_2 \sqrt{D})\, z_0 + \beta_1}{\gamma_1 z_0 - (\alpha_1 - i \alpha_2 \sqrt{D})}$$

dà la sostituzione di 1ª specie a determinante $+1$: $\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$ dove

$$\begin{aligned} \alpha &= a_1 \alpha_1 + D a_2 \alpha_2 + b_1 \gamma_1 + i\sqrt{D}(a_2 \alpha_1 - a_1 \alpha_2), \\ \beta &= a_1 \beta_1 - b_1 \alpha_1 + i\sqrt{D}(a_2 \beta_1 - b_1 \alpha_2), \\ \gamma &= c_1 \alpha_1 - a_1 \gamma_1 + i\sqrt{D}(a_2 \gamma_1 - c_1 \alpha_2), \\ \delta &= a_1 \alpha_1 + D a_2 \alpha_2 + c_1 \beta_1 - i\sqrt{D}(a_2 \alpha_1 - a_1 \alpha_2), \end{aligned}$$

questa è ellittica a periodo 2 se

$$2 a_1 \alpha_1 + 2 D a_2 \alpha_2 + b_1 \gamma_1 + c_1 \beta_1 = 0, \quad \cos A = 0$$

ellittica a periodo 3 se

$$2 a_1 \alpha_1 + 2 D a_2 \alpha_2 + b_1 \gamma_1 + c_1 \beta_1 = \pm 1, \quad \cos A = \pm \tfrac{1}{2},$$

parabolica se

$$2 a_1 \alpha_1 + 2 D a_2 \alpha_2 + b_1 \gamma_1 + c_1 \beta_1 = + 2, \quad \cos A = \pm 1$$

ed iperbolica negli altri casi (se le due sfere non s'incontrano).

Se le due sfere di riflessione si toccano è chiaro che nello stesso punto del piano $\xi\eta$ si toccano infinite sfere di riflessione. Se si incontrano ortogonalmente, non può pel loro circolo comune C passare alcun' altra sfera di riflessione, altrimenti questa sfera apparterrebbe al medesimo tipo I), come ora vedremo e taglierebbe le precedenti sotto l'angolo $\frac{\pi}{3}$ o $\frac{2\pi}{3}$ avremmo quindi due sostituzioni ellittiche l'una a periodo 2 l'altra a periodo 3 che lascierebbero ambedue fissi i punti del cerchio C; la loro combinazione darebbe luogo ad una sostituzione ellittica a periodo 6, che nel nostro gruppo $\Gamma^{(\omega)}$ per $D > 3$ è impossibile (§ 8). Se le due sfere si tagliano secondo un angolo di $\frac{\pi}{3}$ o $\frac{2\pi}{3}$, facendo subire ad una delle due sfere una riflessione sull' altra, si ottiene una terza sfera di riflessione che passa pel loro circolo comune. In questo caso si ha

$$2 a_1 \alpha_1 + 2 D a_2 \alpha_2 + b_1 \gamma_1 + c_1 \beta_1 = \pm 1$$

e per l'equazione di questa terza sfera si ottiene facilmente

$$\left(\xi - \frac{a_1 \mp \alpha_1}{c_1 \mp \gamma_1}\right)^2 + \left(\eta - \sqrt{D}\, \frac{a_2 \mp \alpha_2}{c_1 \mp \gamma_1}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{(c_1 \mp \gamma_1)^2}.$$

Come caso limite se $c_1 = \gamma_1$, valendo i segni superiori, la terza sfera si riduce al piano (di riflessione) che contiene il circolo comune alle altre due. D'altronde risulta subito dalle considerazioni superiori che oltre queste tre sfere non vi ha alcun' altra sfera di riflessione che appartenga allo stesso fascio.

Risultati perfettamente simili si otterrebbero per due sfere appartenenti simultaneamente al tipo II), III) o IV) § 7.

Consideriamo ora due sfere di riflessione di tipo diverso p. e. dei tipi I), II) § 7 e siano

$$\left(\xi - \frac{a_1}{c_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{a_2\sqrt{D}}{c_1}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{c_1^2},$$

$$\left(\xi - \frac{\alpha_2}{\gamma_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{\alpha_1\sqrt{D}}{\gamma_1}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{D\gamma_1^2}$$

le loro equazioni essendo $a_1, a_2, b_1, c_1; \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \gamma_1$ numeri interi che soddisfano le condizioni:

$$a_1^2 + Da_2^2 + b_1c_1 = 1, \quad \alpha_1^2 + D\alpha_2^2 + D\beta_1\gamma_1 = 1.$$

Per l'angolo A sotto cui si tagliano troviamo dalla (1) avendo riguardo alle precedenti

$$\cos A = -\frac{\sqrt{D}}{2}\{2a_1\alpha_2 + 2a_2\alpha_1 + b_1\gamma_1 + c_1\beta_1\}.$$

La quantità fra parentesi essendo un numero intero ed avendosi $D > 3$ ne risulta necessariamente $\cos A = 0$, $A = \frac{\pi}{2}$. Corrispondentemente la sostituzione di 1ª specie (a determinante -1), composta delle due riflessioni, è ellittica a periodo 2.

Riassumendo abbiamo: *Se due sfere di riflessione del medesimo tipo s'incontrano, esse si tagliano sotto un angolo retto oppure eguale a* $\frac{\pi}{3}$ $\left(o\ \frac{2\pi}{3}\right)$, *ovvero si toccano. Per due sfere di riflessione di diverso tipo l'incontro non può avvenire che ortogonalmente.*

Nei casi esclusi $D = 1, 2, 3$ si vedrà facilmente che oltre agli indicati valori per l'angolo A si presenta anche il valore $\frac{\pi}{4}$ per $D = 1, 2$ e il valore $\frac{\pi}{6}$ per $D = 3$ (Cf. § 7).

§ 10.

Generalità sulla ricerca del poliedro fondamentale per $\overline{\Gamma}^{(\omega)}$.

Consideriamo l'insieme di tutti i piani e di tutte le sfere di riflessione e in particolare le loro traccie (rette e circoli) sul piano $\xi\eta$. È facile vedere che qualsiasi porzione di questo piano, per quanto piccola, è sempre attraversata da sfere di riflessione. E infatti in questa area giacciono infiniti punti equivalenti al punto $z = \infty$ cioè punti $z = \frac{a}{b}$ indici di numeri frazionarii in Ω con a, b primi fra loro (§ 4). Ora come pel punto $z = \infty$ passano le due serie di piani di riflessione (§ 7)

$$\xi = \frac{1}{2} b_1, \quad \eta = \frac{1}{2} b_1 \sqrt{D},$$

ove b_1 è un numero intero razionale qualunque così per ogni tale punto $z = \frac{a}{b}$ passano due serie di sfere di riflessione, appartenenti a due diversi tipi, rispettivamente fra loro tangenti ed ortogonali nel punto z; tali sfere si ottengono trasformando i detti piani per mezzo di una sostituzione che trasporti $z = \infty$ in $z = \frac{a}{b}$. Così p. e. pel punto $z = 0$ passano le due serie di sfere di riflessione dei tipi I), II) § 7:

$$\left(\xi - \frac{1}{c_1}\right)^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \frac{1}{c_1^2}, \quad \xi^2 + \left(\eta - \frac{1}{c_1\sqrt{D}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{Dc_1^2}$$

essendo c_1 un intero arbitrario.

Per quei valori di D, che noi considereremo, avviene che questi circoli e rette di riflessione ricoprono interamente il piano $\xi\eta$ e ci sarà ogni volta possibile limitare con un numero finito di piani e sfere di riflessione un poliedro P nell' interno del quale non penetri più alcuna sfera (o piano) di riflessione. Gliangoli diedri di questo poliedro, trascurando i casi $D = 1, 2, 3$, saranno o angoli retti o angoli di ampiezza $\frac{\pi}{3}$, poichè se ad uno spigolo si trovasse un angolo eguale a $\frac{2\pi}{3}$, la terza sfera di riflessione che passa per questo spigolo (§ 9) penetrerebbe nell' interno del poliedro. Gliangoli di P essendo sottomultipli di π, se facciamo subire a P successive riflessioni sulle sue faccie e nello stesso modo operiamo coi nuovi poliedri ottenuti veniamo a riempire con questi poliedri una ed una sola volta lo spazio R (Poincaré l. c.). A questa divisione dello spazio R con poliedri, le cui faccie danno complessivamente tutte le sfere e piani di riflessione, corrisponde un sottogruppo $\overline{\Gamma}_r^{(\omega)}$ di $\overline{\Gamma}^{(\omega)}$ pel quale P è il poliedro fondamentale. Se osserviamo inoltre che ogni sostituzione di $\overline{\Gamma}^{(\omega)}$ scambia fra loro le sfere e i piani di riflessione e cangia per conseguenza la rete di poliedri sopra considerata in sè medesima, vediamo che $\overline{\Gamma}_r^{(\omega)}$ è un sottogruppo di $\overline{\Gamma}^{(\omega)}$ permutabile con tutte le sue sostituzioni cioè *eccezionale* in $\overline{\Gamma}^{(\omega)}$.*) Il poliedro P avendo un numero

*) In altre parole si osservi che $\overline{\Gamma}_r^{(\omega)}$ si genera con sole riflessioni e d'altra parte contiene tutte le riflessioni di $\overline{\Gamma}^{(\omega)}$. Ora qualunque trasformata di una riflessione è pure una riflessione e però $\overline{\Gamma}_r^{(\omega)}$ è eccezionale in $\overline{\Gamma}^{\omega}$.

finito di faccie, spigoli e vertici, le sostituzioni di $\bar{\Gamma}^{(\infty)}$ che lo trasformano in sè medesimo sono necessariamente in numero limitato. Se indichiamo con r questo numero abbiamo evidentemente: $\bar{\Gamma}_r^{(\infty)}$ *è sotto gruppo eccezionale di indice r in* $\bar{\Gamma}^{(\infty)}$. Il poliedro fondamentale di $\bar{\Gamma}^{(\infty)}$ si otterrà da P suddividendo convenientemente questo poliedro in r poliedri parziali. (Cf. Fricke, Vol. XXXIX di questi Annali).

§ 11.

Continuazione.

Da queste considerazioni generali scendiamo ad alcune osservazioni utili per l'effettiva applicazione ai singoli casi. Supponendo sempre $D > 3$, i piani di riflessione dividono lo spazio R in prismi eguali a base rettangolare di lati $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{D}}{2}$; in particolare fissiamo il prisma limitato in R dai quattro piani di riflessione

$$\xi = 0, \quad \xi = \frac{1}{2}, \quad \eta = 0, \quad \eta = \frac{\sqrt{D}}{2},$$

che evidentemente non è attraversato da alcun altro piano di riflessione. Il poliedro P che formeremo consterà di quella porzione del prisma, che è esterna ad un conveniente numero di sfere di riflessione, così determinate che il poliedro P non abbia a comune col piano $\xi\eta$ che qualche vertice. In tutti i casi una di queste sfere sarà quella col centro in $z = 0$ e col raggio $r = 1$:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1,$$

che appartiene al tipo I) § 7 ove si prenda $a_1 = a_2 = 0$, $c_1 = 1$.

È facile vedere direttamente, servendosi di un noto metodo, che, trovato un tale poliedro P, ogni punto dello spazio R troverà certamente il suo equivalente rispetto a $\bar{\Gamma}^{(\infty)}$ in un punto di P. E infatti é chiaro in primo luogo che usando delle sostituzioni

$$z' = \pm z + \beta, \quad z' = \pm z_0 + \beta$$

che lasciano invariate le ordinate ζ dei punti, si potrà trasportare ogni punto p di R entro il prisma. Se supponiamo già dimostrato che mediante sostituzioni di $\bar{\Gamma}^{(\infty)}$ si possa trasportare un punto p di R nell' interno del prisma ed esternamente ad $n-1$ fra le sfere di riflessione che limitano p, *ingrandendone o lasciandone invariata l'ordinata,* lo stesso proveremo accadere ove alle $n-1$ sfere precedenti se ne aggiunga una n^{ma} del contorno di P. Indicando per un momento con Π la regione di R interna al prisma ed esterna alle $n-1$ sfere e con S la n^{ma} sfera di riflessione si trasporti dapprima p in p_1 internamente a Π. Se p_1 è interno ad S colla riflessione su S che *ne ingrandisce l'ordinata*, si trasporti esternamente e il nuovo punto, se esterno a Π, si trasporti internamente a Π in p_2. Operando su p_2 come prima su p_1 e così via otteniamo una serie di punti $p_1, p_2, p_3, \ldots$ con ordinate crescenti tutti interni al prisma ed alla sfera. Tale serie di punti è quindi necessariamente finita (§ 1) e perveniamo così certamente ad un punto p_n equivalente a p esterno a Π e non interno ad S c. d. d. Distinguendo ora i valori di D rispetto al modulo 4 notiamo ancora quanto segue.

1°. *Sia* $D \equiv 1$ (*mod.* 4). Il punto $\frac{1+i\sqrt{D}}{2}$ del piano $\xi\eta$ non è *interno* ad alcuna sfera di riflessione, ma per esso passano, tangenzialmente ai rispettivi piani $\xi = \frac{1}{2}$, $\eta = \frac{\sqrt{D}}{2}$, due serie di sfere di riflessione tra le quali notiamo quelle di massimo raggio che hanno le equazioni

$$\text{a)}\quad \xi^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{D}}{2}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{2^2},$$

$$\text{Tipo I)}\quad a_1 = 0,\quad a_2 = 1,\quad c_1 = 2,\quad b_1 = \frac{1-D}{2},$$

$$\text{b)}\quad \left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{D-1}{2\sqrt{D}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{2^2 . D},$$

$$\text{Tipo II)}\quad a_1 = 1 - D,\quad a_2 = 1,\quad c_1 = 2,\quad b_1 = \frac{1-D}{2}.$$

2°. *Sia* $D \equiv 3$ (*mod.* 4). Abbiamo allora la sfera di riflessione

$$\text{c)}\quad \left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{D}}{2}\right)^2 + \zeta^2 = 1$$

che appartiene al tipo III) § 7 e corrisponde a

$$a_1 = 0,\quad a_2 = 1,\quad c_1 = 1,\quad b_1 = -\frac{D-3}{4}.$$

Se di più $D \equiv 3$ (mod. 8) si osserverà la sfera di riflessione

$$\text{d)}\quad \left(\xi - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{D}}{4}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{2^2},$$

$$\text{Tipo III)}\quad a_1 = 0,\quad a_2 = 1,\quad c_1 = 2,\quad b_1 = -\frac{D-3}{8}.$$

3. *Sia D pari*. Il punto $z = \frac{i\sqrt{D}}{2}$ non è interno ad alcuna sfera di riflessione; per esso passano tangenzialmente ai piani $\xi = 0$, $\eta = \frac{\sqrt{D}}{2}$ due serie di tali sfere di cui segniamo le due col massimo raggio:

e) $\left(\xi-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\eta-\frac{\sqrt{D}}{2}\right)^2+\zeta^2=\frac{1}{2^2}$,

Tipo I) $a_1=1,\quad a_2=1,\quad c_1=2,\quad b_1=-\frac{D}{2}$,

f) $\xi^2+\left(\eta-\frac{D-1}{2\sqrt{D}}\right)^2+\zeta^2=\frac{1}{2^2 D}$,

Tipo II) $a_2=0,\quad a_1=1-D,\quad c_1=2,\quad b_1=1-\frac{D}{2}$.

Le sfere di riflessione qui indicate a), b), c), d), e), f) bastano già per i piccoli valori di D a separare il poliedro P cercato,

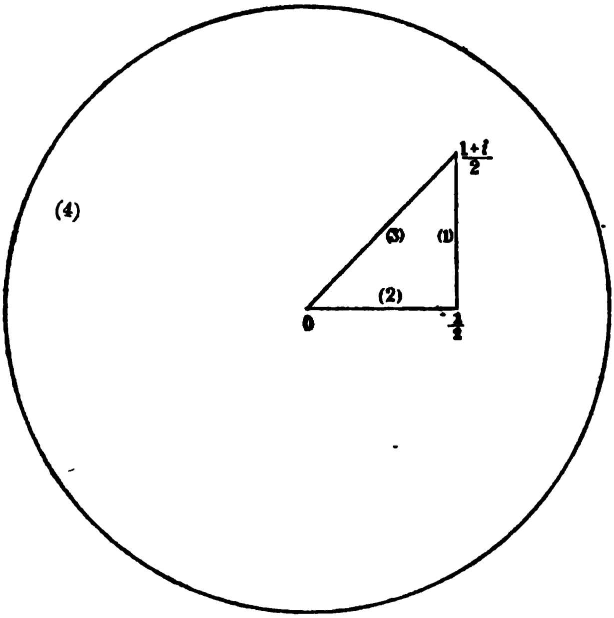
§ 12.

Il gruppo $\bar{\Gamma}^{(1)}$.

Benchè i casi $D=1$, $D=3$ siano già stati trattati nel lavoro precedente, non sembra qui inutile coordinare la determinazione dei poliedri fondamentali corrispondenti alle osservazioni generali del paragrafo precedente.

Se $D=1$, si considerino i tre piani di riflessione

(1) $\xi=\frac{1}{2}$, (2) $\eta=0$, (3) $\xi-\eta=0$



Fig^a 1^a

e si indichi con P il poliedro racchiuso in R da questi tre pianie-sternamente alla sfera

(4) $$\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1.^{*})$$

*) In questa come nelle figure seguenti si osservano le traccie sul piano $\xi\eta$ dei piani e delle sfere di riflessioni numerati come nel testo.

Questo poliedro ha 4 vertici di cui uno all' infinito e gli altir tre nei punti

$$V_1 \equiv (0, 0, 1), \quad V_2 \equiv \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad V_3 \equiv \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right);$$

i suoi angoli diedri sono di ampiezza $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ agli spigoli rettilinei e $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}$ agli spigoli circolari. È evidente che nessun piano di riflessione attraversa P, nè può attraversarlo alcuna sfera di riflessione che altrimenti dovrebbe contenere nel suo interno o V_1, o V_2, o V_3, ciò che facilmente si vede essere impossibile. Conseguentemente P è il poliedro generatore di un sottogruppo eccezionale $\bar{\Gamma}_\nu^{(i)}$ in $\bar{\Gamma}^{(i)}$. Qui troviamo subito $\nu = 1$, cioè $\bar{\Gamma}_\nu^{(i)}$ coincide con $\bar{\Gamma}^{(i)}$. E infatti una sostituzione di $\bar{\Gamma}^{(i)}$, che trasformi P in sè medesimo, deve lasciar fermo il vertice all' infinito e scambiare gli altri tre ed è quindi visibilmente l'identità.

Determinato così il poliedro fondamentale per $\bar{\Gamma}^{(i)}$, basta per esempio associarvi quello che se ne ottiene per riflessione sul piano $\xi - \eta = 0$ per avere il poliedro fondamentale del gruppo $\Gamma^{(i)}$ definito dalle diseguaglianze

$$0 \leq \xi \leq \frac{1}{2}, \quad 0 \leq \eta \leq \frac{1}{2}, \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \geq 1.$$

Esso è naturalmente la metà di quello determinato nella precedente nota, ove si consideravano soltanto le sostituzioni a determinante $+1$. Questo poliedro Π fondamentale per $\Gamma^{(i)}$ ha un quinto vertice nel punto $V_4 = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Applicando al poliedro Π le infinite sostituzioni di $\Gamma^{(i)}$ otterremo quella rete di poliedri che effettua la divisione dello spazio R corrispondente a questo gruppo. I poliedri della rete corrispondendo univocamente alle sostituzioni di $\Gamma^{(i)}$, potremo nominare ciascun poliedro colla sostituzione che lo fa nascere dal fondamentale, il quale sarà rappresentato dall' identità.

Per le applicazioni aritmetiche alla teoria delle forme occorre conoscere i nomi dei poliedri che circondano il fondamentale. Notiamo dunque in primo luogo i nomi dei poliedri aderenti a Π per le cinque faccie; essi sono i seguenti:

$$\begin{pmatrix} i, & 1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, & -1 \\ 0, & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0, & -1 \\ i, & 0 \end{pmatrix}.$$

Ne segue che $\Gamma^{(i)}$ si genera colle tre sostituzioni elementari

$$\begin{pmatrix} i, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i, & 1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0, & -1 \\ i, & 0 \end{pmatrix}.$$

È anche opportuno conoscere i nomi dei poliedri che si attaccano a Π lungo gli spigoli circolari come risultano dallo schema seguente

$$\begin{array}{c|c} \begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & i\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix}0, & i\\ i, & 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0, & -1\\ i, & 0\end{pmatrix}\end{array} \text{ lungo lo spigolo } V_1 V_2, \qquad \begin{array}{c|c} \begin{pmatrix}i, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix}0, & -1\\ 1, & 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0, & -1\\ i, & 0\end{pmatrix}\end{array} \text{ lungo } V_1 V_4$$

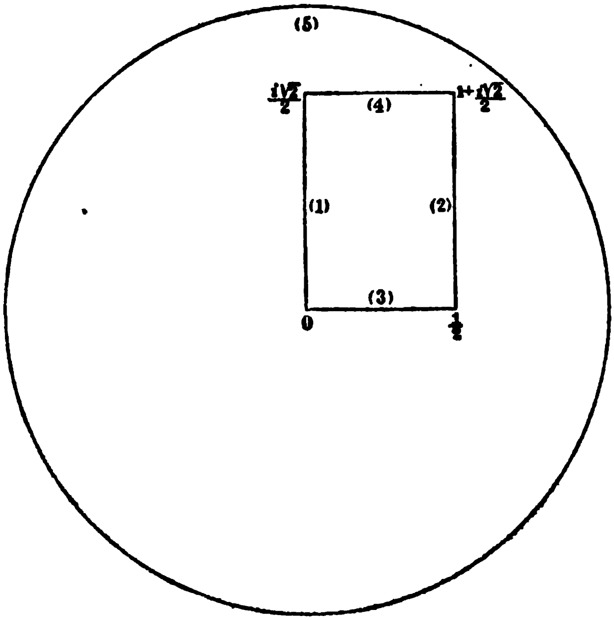
$$\begin{array}{ccc} & \begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix} & \\ \begin{pmatrix}1, & -1\\ 0, & i\end{pmatrix} & & \begin{pmatrix}0, & -1\\ i, & 0\end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix}-1, & i\\ i, & 0\end{pmatrix} & & \begin{pmatrix}0, & i\\ i, & 1\end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix}1, & 0\\ -i, & i\end{pmatrix} & \end{array} \text{ lungo } V_3 V_4, \qquad \begin{array}{ccc} & \begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix} & \\ \begin{pmatrix}0, & -1\\ i, & 0\end{pmatrix} & & \begin{pmatrix}i, & 1\\ 0, & 1\end{pmatrix} \\ \hline \begin{pmatrix}0, & 1\\ -1, & 1\end{pmatrix} & & \begin{pmatrix}1, & -1\\ 1, & 0\end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix}i, & 0\\ i, & 1\end{pmatrix} & \end{array} \text{ lungo } V_2 V_3.$$

§ 13.

I gruppi $\bar{\Gamma}^{(i\sqrt{2})}$, $\bar{\Gamma}^{\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)}$.

a) Nel caso $D = 2$ nel poliedro P racchiuso in R fra i quattro piani

$$(1)\ \xi = 0, \quad (2)\ \xi = \frac{1}{2}, \quad (3)\ \eta = 0, \quad (4)\ \eta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$



Fig^a 2^a

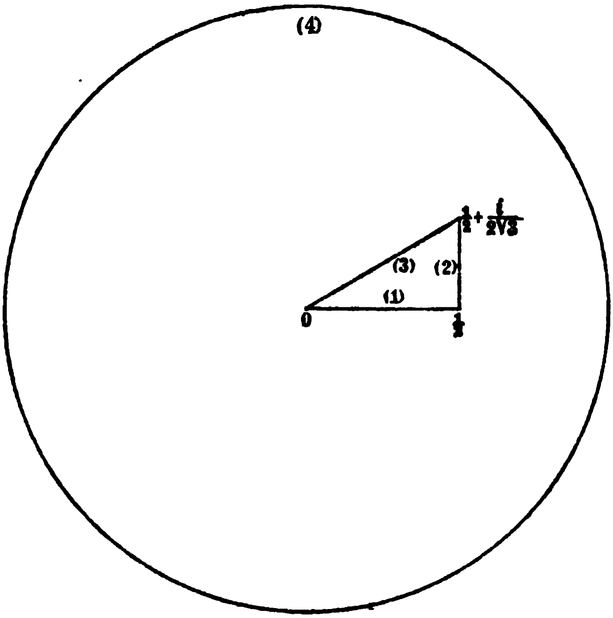
esternamente alla sfera

(5) $$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

abbiamo già il poliedro fondamentale per $\overline{\Gamma}^{(i\sqrt{2})}$. E infatti osserviamo che questo poliedro ha cinque vertici di cui uno all' infinito e gli altri quattro nei punti

$$V_1 \equiv (0, 0, 1),\quad V_2 \equiv \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right),\quad V_3 \equiv \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right),$$
$$V_4 \equiv \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right);$$

i suoi angoli diedri sono tutti retti salvo due agli spigoli circolari $V_2 V_3$, $V_3 V_4$ di rispettiva ampiezza $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$. Esso non è attraversato da alcuna sfera diriflessione e poichè si vede subito che nessuna sosti-



Fig^{a} 3^{a}

tuzione di $\overline{\Gamma}^{(i\sqrt{2})}$, tranne l'identità, può trasformarlo in sè medesimo si conclude che P è il poliedro fondamentale di $\overline{\Gamma}^{(i\sqrt{2})}$. Questo gruppo può dunque generarsi colle cinque sostituzioni seguenti che corrispondono alle riflessioni sulle faccie:

$$z' = z_0,\quad z' = -z_0,\quad z' = -z_0 + 1,\quad z' = z_0 + i\sqrt{2},\quad z' = \frac{1}{z_0}.$$

Associando al poliedro P il suo simmetrico rispetto al piano $\xi = 0$ abbiamo il poliedro fondamentale per $\Gamma^{(i\sqrt{2})}$. A generare quest' ultimo gruppo bastano le sostituzioni di 1^{a} specie che nascono per combinazione delle precedenti con una determinata fra esse, cioè:

$$z' = -z,\quad z' = z + 1,\quad z' = -z + i\sqrt{2},\quad z' = -\frac{1}{z}.$$

b) Nel caso $D=3$ si consideri il prisma a base triangolare racchiuso dai tre piani di riflessione (§ 7)

$$(1)\ \eta=0,\quad (2)\ \xi=\frac{1}{2},\quad (3)\ \xi=\eta\sqrt{3};$$

la porzione di esso giacente in R all' esterno della sfera

$$(4)\ \xi^2+\eta^2+\zeta^2=1$$

è il poliedro fondamentale per $\bar{\Gamma}^{\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)}$. Questo poliedro ha infatti, oltre il vertice all' infinito, i tre vertici:

$$V_1\equiv(0,0,1),\quad V_2\equiv\left(0,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\quad V_3\equiv\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2\sqrt{3}},\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

con angoli diedri eguali a $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}$ agli spigoli rettilinei e $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ agli spigoli circolari. Esso non è attraversato da alcuna sfera di riflessione e non è trasformato in sè medesimo che dalla sostituzione identica in $\bar{\Gamma}^{\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)}$. Associando a P il suo simmetrico rispetto al piano $\eta=0$ si ha il poliedro fondamentale per $\Gamma^{\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)}$ formato dalla porzione di prisma a base triangolare equilatera

$$\xi-\eta\sqrt{3}=0,\quad \xi+\eta\sqrt{3}=0,\quad \xi=\frac{1}{2}$$

esterna alla sfera

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1\ ^{*)}.$$

Per sostituzioni generatrici di $\bar{\Gamma}^{\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)}$ troviamo le quattro.

$$z'=z_0,\quad z'=-z_0+1,\quad z'=\frac{\omega-1}{2}z_0,\quad z'=\frac{1}{z_0},\quad \left(\omega=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)$$

e quindi per quelle di $\Gamma^{\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)}$ le tre:

$$z'=-z+1,\quad z'=\frac{\omega-1}{\omega}z,\quad z'=\frac{1}{z}.$$

§ 14.

Il gruppo $\bar{\Gamma}^{(i\sqrt{5})}$.

Se $D=5$ consideriamo il poliedro P a 7 faccie limitato in R dai quattro piani

$$(1)\ \xi=0,\quad (2)\ \xi=\frac{1}{2},\quad (3)\ \eta=0,\quad (4)\ \eta=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

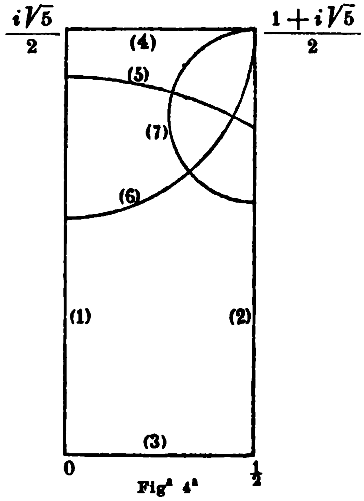
---

*) Anche qui si osserverà che il poliedro fondamentale per $\Gamma^{(\omega)}$ è la metà di quello determinato nella nota precedente, ove si consideravano le sole sostituzioni a determinante $+1$.

esternamente alle tre sfere di riflessione (§ 14):

$$(5)\ \xi^2+\eta^2+\zeta^2=1,\quad (6)\ \xi^2+\left(\eta-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2+\zeta^2=\frac{1}{4},$$

$$(7)\ \left(\xi-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\eta-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2+\zeta^2=\frac{1}{20}.$$



Fig^a 4^a

Esso possiede 8 vertici dei quali uno all' infinito e gli altri sette nei punti

$V_1\equiv(0,\ 0,\ 1)$ intersezione di (1) (3) (5),

$V_2\equiv\left(0,\ \frac{2}{\sqrt{5}},\ \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ „ „ (1) (5) (6),

$V_3\equiv\left(0,\ \frac{\sqrt{5}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ „ „ (1) (4) (6),

$V_4\equiv\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{5}}{2},\ 0\right)$ „ „ (2) (4) (6) (7),

$V_5\equiv\left(\frac{1}{2},\ \frac{3\sqrt{5}}{8},\ \frac{\sqrt{3}}{8}\right)$ „ „ (2) (5) (7).

$V_6\equiv\left(\frac{2}{5},\ \frac{2}{\sqrt{5}},\ \frac{1}{5}\right)$ „ „ (5) (6) (7),

$V_7\equiv\left(\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ „ „ (2) (3) (5).

Fra questi si ha il solo vertice *singolare* sul piano $\xi\eta$ $V_4\equiv\frac{1+i\sqrt{5}}{2}$. Dei 13 angoli diedri in P ve ne ha uno solo di ampiezza $\frac{\pi}{3}$ cioè quello allo spigolo $V_5 V_7$, gli altri 12 sono retti. Con semplici calcoli, di cui qui daremo soltanto un esempio, ci accertiamo che non vi è nessuna sfera di riflessione (o piano) che attraversi P. Una tale sfera dovrebbe in fatti contenere nel suo *interno* almeno uno dei sette vertici. Ora prendiamo p. e. il vertice $V_6\equiv\left(\frac{2}{5},\ \frac{2}{\sqrt{5}},\ \frac{1}{5}\right)$; se una sfera del tipo 1) § 7:

$$\left(\xi - \frac{a_1}{c_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{a_2\sqrt{5}}{c_1}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{c_1^2}, \quad a_1^2 + 5a_2^2 + b_1 c_1 = 1$$

contenesse V_6 nel suo interno dovremmo avere

$$(5a_1 - 2c_1)^2 + 5(5a_2 - 2c_1)^2 + c_1^2 < 25.$$

Questa diseguaglianza consente a c_1 i soli valori $c_1 = 1, 2, 3, 4$, i valori negativi opposti potendosi evidentemente trascurare. Essa si traduce nelle rispettive diseguaglianze

$$\begin{aligned} c_1 &= 1, \ (5a_1 - 2)^2 + 5(5a_2 - 2)^2 < 24, \\ c_1 &= 2, \ (5a_1 - 4)^2 + 5(5a_2 - 4)^2 < 21, \\ c_1 &= 3, \ (5a_1 - 6)^2 + 5(5a_2 - 6)^2 < 16, \\ c_1 &= 4, \ (5a_1 - 8)^2 + 5(5a_2 - 8)^2 < 9, \end{aligned}$$

delle quali soltanto la seconda e la terza ammettano la soluzione intera $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, incompatibile per altro colla condizione

$$a_1^2 + 5a_2^2 + b_1 c_1 = 1$$

essendo nel 1° caso $c_1 = 2$ e nel 2° $c_1 = 3$. Similmente per una sfera del tipo II) § 7

$$\left(\xi - \frac{a_2}{c_1}\right)^2 + \left(\eta + \frac{a_1}{c_1\sqrt{5}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{5c_1^2}$$

che contenesse V_6 nel suo interno dovrebbe aversi

$$(5a_2 - 2c_1)^2 + 5(a_1 + 2c_1)^2 + c_1^2 < 5$$

onde $c_1 = 1$ o $c_1 = 2$ e però:

$$\begin{aligned} c_1 &= 1, \ (5a_2 - 2)^2 + 5(a_1 + 2)^2 < 4, \\ c_1 &= 2, \ (5a_2 - 4)^2 + 5(a_1 + 4)^4 < 1, \end{aligned}$$

diseguaglianze ambedue impossibili in numeri interi. In modo del tutto simile si procederà per gli altri vertici.

Per dimostrare che il poliedro P superiormente definito è il poliedro fondamentale per $\overline{\Gamma}^{(i\sqrt{5})}$ resta a provarsi che nessuna sostituzione del gruppo, diversa dall' identità, cangia P in sè medesimo. Poichè il vertice singolare $z = \infty$ non è equivalente all' altro vertice singolare $V_6 \equiv \frac{1 + i\sqrt{5}}{2}$ (nella frazione irreducibile $\frac{1 + i\sqrt{5}}{2}$ non essendo numeratore e denominatore primi fra loro) (Cf. §§ 2, 3), una tale sostituzione dovrebbe lasciare fissi ambedue questi vertici, ciò che manifestamente è impossibile. Ma se domandiamo di trovare una sostituzione lineare che cangi P in sè medesimo, senza esigere che appartenga a $\overline{\Gamma}^{(i\sqrt{5})}$, vediamo che effettivamente ne esiste una ed una soltanto cioè:

$$z' = \frac{\frac{1 + i\sqrt{5}}{\sqrt{2}} z_0 - \sqrt{2}}{\sqrt{2} z_0 + \frac{-1 + i\sqrt{5}}{\sqrt{2}}}$$ — Ne concludiamo che $\overline{\Gamma}^{(i\sqrt{5})}$ è contenuto quale

sottogruppo eccezionale d'indice 2 nel gruppo ampliato colla sostituzione scritta. Nei casì precedenti invece un tale ampliamento è impossibile.

Quali sostituzioni generatrici di $\overline{\Gamma}^{(i\sqrt{5})}$ troviamo le 7 riflessioni:

$$z' = z_0,\quad z' = -z_0,\quad z' = -z_0 + 1,\quad z' = z_0 + i\sqrt{5},\quad z' = \frac{1}{z_0},$$
$$z' = \frac{i\sqrt{5}z_0 - 2}{2z_0 + i\sqrt{5}},\quad z' = \frac{(-4+i\sqrt{5})\,z_0 - 2i\sqrt{5}}{2i\sqrt{5}\,z_0 - (4+i\sqrt{5})}:$$

Associando a P il suo simmetrico rispetto al piano $\xi = 0$ troviamo il poliedro fondamentale di $\Gamma^{(i\sqrt{5})}$, gruppo che si genera colle 6 sostituzioni elementari di 1ª specie:

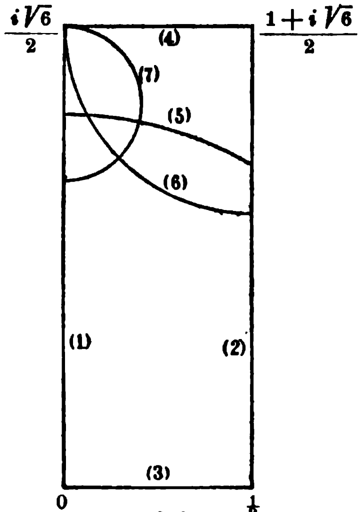
$$z' = -z,\quad z' = z + 1,\quad z' = -z + i\sqrt{5},\quad z' = -\frac{1}{z},$$
$$z' = \frac{i\sqrt{5}z + 2}{2z - i\sqrt{5}},\quad z' = \frac{(-4+i\sqrt{5})z + 2i\sqrt{5}}{2i\sqrt{5}z + (4+i\sqrt{5})}.$$

§ 15.

Il gruppo $\Gamma^{(i\sqrt{6})}$.

Per $D = 6$ prendiamo per poliedro P quello compreso in R entro il prisma

$$(1)\ \xi = 0,\quad (2)\ \xi = \frac{1}{2},\quad (3)\ \eta = 0,\quad (4)\ \eta = \frac{\sqrt{6}}{2}$$



Figª 5ª

esternamente alle tre sfere di riflessione (§ 11)

$$(5)\ \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1,\quad (6)\ \left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{4},$$
$$(7)\ \xi^2 + \left(\eta - \frac{5}{2\sqrt{6}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{24}.$$

Esso ha, oltre il vertice all' infinito, i sette verticì:

$V_1 \equiv (0,\ 0,\ 1)$ intersezione di (1) (3) (5);

$V_2 \equiv \left(0,\ \frac{2\sqrt{6}}{5},\ \frac{1}{5}\right)$ „ „ (1) (5) (7);

$V_3 \equiv \left(0,\ \frac{\sqrt{6}}{2},\ 0\right)$ „ „ (1) (4) (6) (7);

$V_4 \equiv \left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{6}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ „ „ (2) (4) (6);

$V_5 \equiv \left(\frac{1}{10},\ \frac{2\sqrt{6}}{5},\ \frac{\sqrt{3}}{10}\right)$ „ „ (5) (6) (7);

$V_6 \equiv \left(\frac{1}{2},\ \frac{2}{\sqrt{6}},\ \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)$ „ „ (2) (5) (6);

$V_7 \equiv \left(\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ „ „ (2) (3) (5);

tutti i suoi angoli diedri sono retti salvo i due agli spigoli $V_5 V_6$, $V_6 V_7$ di ampiezza $\frac{\pi}{3}$.

Nel modo solito, conoscendo le coordinate dei vertici, ci accertiamo che nessuna sfera di riflessione attraversa P. Inoltre siccome qui si hanno due soli vertici singolari cioè $z = \infty$, $z = \frac{i\sqrt{6}}{2}$, che non sono fra loro equivalenti, nè si trova alcuna sostituzione in $\overline{\Gamma}^{(i\sqrt{6})}$ che li lasci fissi ambedue, vediamo che P è il poliedro fondamentale di $\overline{\Gamma}^{(i\sqrt{6})}$.*) Quello di $\Gamma^{(i\sqrt{6})}$ si ottiene associando a P il suo simmetrico rispetto al piano $\xi = 0$.

Ritroviamo cosí che l'intero gruppo $\overline{\Gamma}^{(i\sqrt{6})}$ si genera colle 7 riflessioni

$$z' = z_0, \quad z' = -z_0, \quad z' = z_0 + 1, \quad z' = z_0 + i\sqrt{6}, \quad z' = \frac{1}{z_0},$$
$$z' = \frac{(1+i\sqrt{6})z_0 - 3}{2z_0 - (1-i\sqrt{6})}, \quad z' = \frac{5z_0 + 2i\sqrt{6}}{-2i\sqrt{6}z_0 + 5}$$

ed il gruppo $\Gamma^{(i\sqrt{6})}$ colle 6 sostituzioni di 1ª specie

$$z' = -z, \quad z' = z + 1, \quad z' = z + i\sqrt{6}, \quad z' = \frac{1}{z},$$
$$z' = \frac{(1+i\sqrt{6})z - 3}{2z - (1-i\sqrt{6})}, \quad z' = \frac{5z + 2i\sqrt{6}}{-2i\sqrt{6}z + 5}.$$

§ 16.

I gruppi $\overline{\Gamma}^{\left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)}$, $\overline{\Gamma}^{\left(\frac{1+i\sqrt{11}}{2}\right)}$.

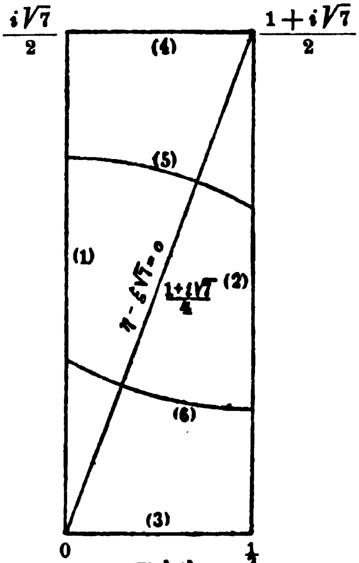
a) Nel caso del gruppo $\overline{\Gamma}^{\left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)}$ consideriamo il poliedro P racchiuso dai quattro piani

*) Fuori del gruppo vi ha la riflessione $z' = \frac{i\sqrt{3}z_0 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}z_0 + i\sqrt{3}}$ che cangia P in sè stesso. Anche in questo caso è quindi possibile un nuovo ampliamento del gruppo.

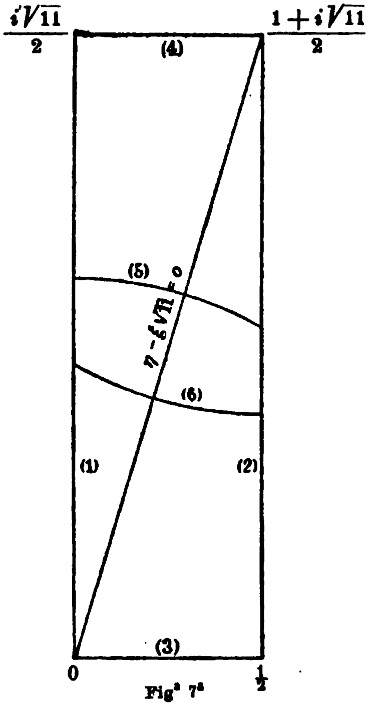
$$(1)\ \xi=0,\quad (2)\ \xi=\frac{1}{2},\quad (3)\ \eta=0,\quad (4)\ \eta=\frac{\sqrt{7}}{2}$$

esternamente alle due sfere di riflessione (§ 11)

$$(5)\ \xi^2+\eta^2+\zeta^2=1,\quad (6)\ \left(\xi-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\eta-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2+\zeta^2=1.$$



Fig^a 6^a



Fig^a 7^a

Esso ha un solo vertice singolare all' infinito e i sei vertici

$V_1 \equiv (0,\ 0,\ 1)$ intersezione di (1) (3) (5);

$V_2 \equiv \left(0,\ \frac{2}{\sqrt{7}},\ \sqrt{\frac{3}{7}}\right)$ " " (1) (5) (6);

$V_3 \equiv \left(0,\ \frac{\sqrt{7}}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ " " (1) (4) (6);

$V_4 \equiv \left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{7}}{2},\ 1\right)$ " " (2) (4) (6);

$V_5 \equiv \left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{2\sqrt{7}},\ \sqrt{\frac{3}{7}}\right)$ " " (2) (5) (6);

$V_6 \equiv \left(\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ " " (2) (3) (5),

con 9 diedri retti e 2 di ampiezza $\frac{\pi}{3}$. Nessuna sfera di riflessione lo attraversa e P è quindi il poliedro generatore di un sottogruppo eccezionale $\bar{\Gamma}_\nu^{(\omega)}$ in $\bar{\Gamma}^{(\omega)}$, il cui indice ν eguaglia il numero delle sostituzioni in $\bar{\Gamma}^{(\omega)}$ che trasformano P in sèmedesimo. Una tale sostituzione deve lasciar fisso l'unico vertice singolare ∞ ed avere quindi la forma

$$z' = \pm z + \beta, \quad z' = \pm z_0 + \beta$$

secondo che è 1ª o di 2ª specie. Come trasformazione dello spazio, essa non altera le ordinate e perciò lascierà invariati i vertici di ciascuna coppia $(V_1 V_4)$, $(V_2 V_5)$, $(V_3 V_6)$ ovvero li scambierà fra loro.

Il 1° caso si riscontra subito impossibile, onde risulta che la sostituzione supposta deve essere a periodo 2. Oltre l'identità esiste solo una tale sostituzione cioè $z' = -z + \frac{1+i\sqrt{7}}{2}$, che dà una rotazione di ampiezza π attorno alla retta normale al piano $\xi\eta$ condotta pel punto $\frac{1+i\sqrt{7}}{4}$. È evidente che questa rotazione sovrappone effetivamente il poliedro P a sè stesso. Abbiamo dunque $\nu = 2$ e se suddividiamo il poliedro P in due parti, p. e. col piano $\xi\sqrt{7} - \eta = 0$ normale al piano $\xi\eta$ condotto pei punti 0, $\frac{1+i\sqrt{7}}{2}$, una qualunque di queste parti potrà prendersi per poliedro fondamentale di $\bar{\Gamma}^{\left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)}$. Cosi potremo definire il detto poliedro colle diseguaglianze

$$0 < \xi < \tfrac{1}{2}, \quad 0 < \eta < \tfrac{\sqrt{7}}{2}, \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 > 1,$$

$$\left(\xi - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\eta - \tfrac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 + \zeta^2 > 1, \quad \eta > \xi\sqrt{7}\cdot$$

Esso ha oltre il vertice all' infinito i quattro vertici

$$V_1 \equiv (0, 0, 1), \quad V_2 \equiv \left(0, \tfrac{2}{\sqrt{7}}, \sqrt{\tfrac{3}{7}}\right), \quad V_3 \equiv \left(0, \tfrac{\sqrt{7}}{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$V_4' \equiv \left(\tfrac{1}{4}, \tfrac{\sqrt{7}}{4}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Mentre in tutti i casi precedenti il gruppo $\bar{\Gamma}^{(\omega)}$ si generava con sole riflessioni, nel caso attuale ciò non è possibile.*) Fra le sostituzioni generatrici di $\bar{\Gamma}^{\left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)}$ oltre le riflessioni

---

*) E chiaro infatti che il gruppo $\bar{\Gamma}_2^{\left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)}$, che ha P per poliedro fondamentale, contiene tutte le riflessioni di $\bar{\Gamma}^{\left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)}$.

$$z' = z_0, \quad z' = -z_0, \quad z' = -z_0 + 1, \quad z' = z_0 + i\sqrt{7}, \quad z' = \frac{1}{z_0},$$

$$z' = \frac{\frac{1+i\sqrt{7}}{2} z_0 - 1}{z_0 - \frac{1-i\sqrt{7}}{2}}$$

figura la sostituzione ellittica a periodo 2

$$z' = -z + \frac{1+i\sqrt{7}}{2}.$$

b) Affatto analogamente si comporta il gruppo $\overline{\Gamma}^{\left(\frac{1+i\sqrt{11}}{2}\right)}$, ove considereremo il poliedro P compreso fra i quattro piani

$$(1)\ \xi = 0, \quad (2)\ \xi = \frac{1}{2}, \quad (3)\ \eta = 0, \quad (4)\ \eta = \frac{\sqrt{11}}{2}$$

esternamente alle due sfere di riflessione

$$(5)\ \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1, \quad (6)\ \left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{11}}{2}\right)^2 + \zeta^2 = 1.^{*)}$$

Abbiamo qui, oltre il vertice all' infinito i sei vertici

$V_1 \equiv (0, 0, 1)$	intersezione di	(1) (3) (5);
$V_2 \equiv \left(0, \frac{3}{\sqrt{11}}, \sqrt{\frac{2}{11}}\right)$	„ „	(1) (5) (6);
$V_3 \equiv \left(0, \frac{\sqrt{11}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	„ „	(1) (4) (6);
$V_4 \equiv \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{11}}{2}, 1\right)$	„ „	(2) (4) (6);
$V_5 \equiv \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2\sqrt{11}}, \sqrt{\frac{2}{11}}\right)$	„ „	(2) (5) (6);
$V_6 = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	„ „	(2) (3) (5);

eccetto i tre diedri agli spigoli $V_2 V_3$, $V_3 V_5$, $V_5 V_6$ di ampiezza $\frac{\pi}{3}$ gli altri sono retti. Nessuna sfera di riflessione attraversa P e, come pel caso superiore, si vede che una sola sostituzione di $\overline{\Gamma}^{(\omega)}$ cioè

$$z' = -z + \frac{1+i\sqrt{11}}{2},$$

oltre l'identità, trasforma P in sè medesimo. Se del poliedro P consideriamo dunque la regione in cui è soddisfatta la diseguaglianza:

$$\eta > \xi\sqrt{11}$$

avremo definito il poliedro fondamentale di $\overline{\Gamma}^{\left(\frac{1+i\sqrt{11}}{2}\right)}$. In fine osserviamo che in ambedue questi casi un nuovo ampliamento del gruppo è impossibile.

*) Fig^a 7^a.

§ 17.

Il gruppo $\bar{\Gamma}^{(i\sqrt{10})}$.

Tracciamo dapprima i quattro piani di riflessione

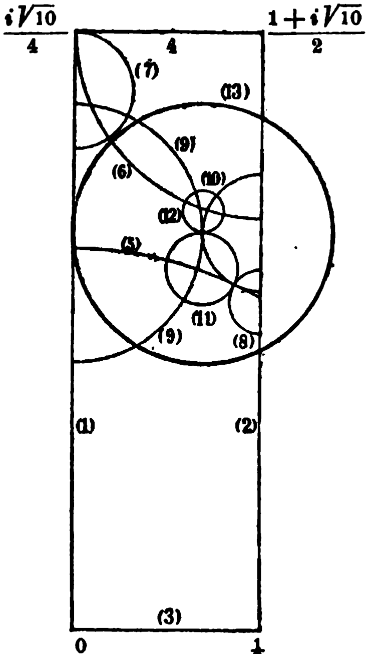
$$(1)\ \xi = 0, \quad (2)\ \xi = \frac{1}{2}, \quad (3)\ \eta = 0, \quad (4)\ \eta = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

e le tre sfere di riflessione (§ 11)

$$(5)\ \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1, \quad (6)\ \left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{4},$$

$$(7)\ \xi^2 + \left(\eta - \frac{9}{2\sqrt{10}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{40}.$$

Indi osservando che dentro il rettangolo delle rette (1), (2), (3), (4), oltre il punto singolare $\frac{i\sqrt{10}}{2}$, esistono i due punti singolari $\frac{1+i\sqrt{10}}{3}$, $\frac{3+2i\sqrt{10}}{7}$, che non sono interni ad alcuna sfera di riflessione, deter-



Figª 8ª

miniamo per ciascuno di essi le sfere di riflessione di massimo raggio che vi passano. Troviamo così le nuove sfere:

$$(8)\ \left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{11}{4\sqrt{10}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{160},$$

$$(9)\ \xi^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{10}}{3}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{9},$$

$$(10)\quad \left(\xi-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\eta-\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^2+\zeta^2=\frac{1}{36},$$

$$(11)\quad \left(\xi-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\eta-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)^2+\zeta^2=\frac{1}{90},$$

$$(12)\quad \left(\xi-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\eta-\frac{7}{2\sqrt{10}}\right)^2+\zeta^2=\frac{1}{360}.\text{*)}$$

Queste, insieme coi piani e colle sfere superiori, limitano un poliedro P con 16 vertici dei quali uno all' infinito e gli altri 15 nei punti

$V_1\equiv(0,\ 0,\ 1)$	intersezione di	(1) (3) (5);
$V_2\equiv\left(0,\ \frac{3}{\sqrt{10}},\ \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$	„ „	(1) (5) (9);
$V_3\equiv\left(0,\ \frac{3\sqrt{10}}{7},\ \frac{1}{7}\right)$	„ „	(1) (7) (9);
$V_4\equiv\left(0,\ \frac{\sqrt{10}}{2},\ 0\right)$	„ „	(1) (4) (6) (7);
$V_5\equiv\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{10}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$	„ „	(2) (4) (6);
$V_6\equiv\left(\frac{1}{2},\ \frac{7}{2\sqrt{10}},\ \frac{1}{2\sqrt{10}}\right)$	„ „	(2) (6) (10);
$V_7\equiv\left(\frac{1}{2},\ \frac{2\sqrt{10}}{7},\ \frac{1}{14}\right)$	„ „	(2) (8) (10);
$V_8\equiv\left(\frac{1}{2},\ \frac{3\sqrt{10}}{11},\ \frac{\sqrt{3}}{22}\right)$	„ „	(2) (5) (8);
$V_9\equiv\left(\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	„ „	(2) (3) (5);
$V_{10}\equiv\left(\frac{3}{7},\ \frac{2\sqrt{10}}{7},\ 0\right)$	„ „	(5) (8) (10) (11);
$V_{11}\equiv\left(\frac{3}{10},\ \frac{3}{\sqrt{10}},\ \frac{1}{10}\right)$	„ „	(5) (9) (11);
$V_{12}\equiv\left(\frac{7}{20},\ \frac{7}{2\sqrt{10}},\ \frac{1}{20}\right)$	„ „	(6) (10) (12);
$V_{13}\equiv\left(\frac{1}{14},\ \frac{3\sqrt{10}}{7},\ \frac{\sqrt{3}}{14}\right)$	„ „	(6) (7) (9);
$V_{14}\equiv\left(\frac{11}{34},\ \frac{6\sqrt{10}}{17},\ \frac{\sqrt{3}}{34}\right)$	„ „	(6) (9) (12);
$V_{15}\equiv\left(\frac{1}{3},\ \frac{\sqrt{10}}{3},\ 0\right)$	„ „	(9) (10) (11) (12).

Fra gli angoli diedri di P due soltantŏ sono di ampiezza $\frac{\pi}{3}$ i rimanenti essendo retti.

Colcalcolo effettivo, dai valori superiori per le coordinate dei

*) Fig.ᵃ 8ᵃ.

vertici, ci accertiamo che nessuna sfera di riflessione attraversa P*), che è dunque il poliedro generatore di un sottogruppo eccezionale $\overline{\Gamma}_{v}^{(i\sqrt{10})}$ in $\overline{\Gamma}^{(i\sqrt{10})}$.

Ora se osserviamo che P ha i 4 vertici singolari

$$\infty,\quad \frac{1+i\sqrt{10}}{3},\quad \frac{i\sqrt{10}}{2},\quad \frac{3+2i\sqrt{10}}{7}$$

dei quali solo il secondo è equivalente al primo (§§ 2, 3), vediamo che una sostituzione S di $\overline{\Gamma}^{(i\sqrt{10})}$ che trasformi P in sè medesimo deve o lasciar fermi ambedue i vertici ∞, $\frac{1+i\sqrt{10}}{3}$ o scambiarli fra loro. Il 1° caso si presenta soltanto per la sostituzione identica, come subito si vede, onde risulta intanto che la S sarà a periodo 2.

Ma una sostituzione di 1ª specie che cangia ∞ in $\frac{1+i\sqrt{10}}{3}$ è data da $\begin{pmatrix}1+i\sqrt{10}, & 4\\ 3 & , 1-i\sqrt{10}\end{pmatrix}$ e tutte le altre della stessa specie si ottengono combinandola colle sostituzioni $\begin{pmatrix}1, & m+in\sqrt{10}\\ 0, & \pm 1\end{pmatrix}$ (m, n razionali interi) che lasciano fermo ∞; esse hanno perciò la forma

$$\begin{pmatrix}1+i\sqrt{10}, & (1+i\sqrt{10})(m+in\sqrt{10})\pm 4\\ 3 & , 3(m+in\sqrt{10})\pm(1-i\sqrt{10})\end{pmatrix}$$

e non sono mai a periodo 2. La S dovrà dunque essere una riflessione (impropria) e se ricorriamo alle formole dei §§ 6, 7 troviamo che esiste effetivamente una ed una sola tale sostituzione, cioè

$$(S)\qquad z' = \frac{(1+i\sqrt{10})\,z_0 - 4}{3z_0 - (1-i\sqrt{10})}.$$

È questa una riflessione impropria colla sfera di riflessione (impropria)

$$(13)\qquad \left(\xi-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\eta-\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^2+\zeta^2=\frac{1}{9}.$$

È facile ora verificare che la (S) cangià effettivamente P in sè medesimo scambiando fra loro le faccie

[(1) (10)], [(2) (9)], [(3) (12)], [(4) (11)], [(5) (6)], [(7) (8)]

e conseguentemente i vertici

$(V_1 V_{12}), (V_2 V_6), (V_3 V_7), (V_4 V_{10}), (V_5 V_{11}), (V_8 V_{13}), (V_9 V_{14}), (V_{15} V_\infty)$**).

*) Per l'abbreviazione di questo calcolo veggasi la nota seguente.

**) L' esistenza della riflessione impropria S che produce i detti scambî fra i vertici e l'osservazione che nessuna sfera di riflessione propria contiene nel suo

Abbiamo dunque $\nu = 2$ e per ottenere da P il poliedro fondamentale per $\bar{\Gamma}^{(i\sqrt{10})}$ basta dividere P in due parti equivalenti mediante la sfera (13) di riflessione impropria, scegliendo una qualunque di queste parti p. e. la esterna per nuovo poliedro P'. Così si rendono evidentemente inutili le sfere (8) (10) (11) (12) e P' resta definito dalle di seguaglianze

$$0 < \xi < \frac{1}{2}, \quad 0 < \eta < \frac{\sqrt{10}}{2}, \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 > 1,$$

$$\left(\xi - \frac{1}{2}\right) + \left(\eta - \frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 + \zeta^2 > \frac{1}{4}, \quad \xi^2 + \left(\eta - \frac{9}{2\sqrt{10}}\right)^2 + \zeta^2 > \frac{1}{40},$$

$$\xi^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{10}}{3}\right)^2 + \zeta^2 > \frac{1}{9}, \quad \left(\xi - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{10}}{3}\right)^2 + \zeta^2 > \frac{1}{9}.$$

Qui per la prima volta vediamo spontaneamente presentarsi a limitare il poliedro fondamentale *una sfera di riflessione impropria;* un secondo esempio si vedrà ora per $D = 13$. A generare il gruppo $\bar{\Gamma}^{(i\sqrt{10})}$, oltre le riflessioni proprie sui piani (1) (2) (3) (4) e sulle sfere (5) (6) (7) (9) occorre la riflessione impropria sulla sfera (13). Osserviamo però che vi ha fuori del gruppo la riflessione $z' = \frac{i\sqrt{5}z_0 - \sqrt{2}}{\sqrt{2}z_0 + i\sqrt{5}}$ che cangia P in sè medesimo e però come nei casi $D = 5$, $D = 6$ è qui possibile un nuovo ampliamento del gruppo.

§ 18.

Il gruppo $\bar{\Gamma}^{(i\sqrt{13})}$.

Consideriamo i quattro piani di riflessione:

$$(1)\ \xi = 0, \quad (2)\ \xi = \frac{1}{2}, \quad (3)\ \eta = 0, \quad (4)\ \eta = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

e le tre sfere (V[1] § 11)

$$(5)\ \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1, \quad (6)\ \xi^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{4},$$

$$(7)\ \left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{6}{\sqrt{13}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{52}.$$

Indi osserviamo che oltre il punto $\frac{1 + i\sqrt{13}}{2}$ esistono entro il rettangolo 1) 2) 3) 4) i due punti singolari $\frac{1 + i\sqrt{13}}{3}$, $2\frac{1 + i\sqrt{13}}{7}$, che non sono interni ad alcuna sfera di riflessione ma pei quali passano

---

interno il centro della (13) permette di ridurre alla metà i calcoli da farsi per constatare che nessuna sfera di riflessione propria contiene nel suo interno un vertice di P. Basta in fatti fare questa verifica per un vertice in ciascuna coppia.

due serie di tali sfere dei tipi I), II), § 7; scegliendo fra queste per ciascuno le sfere di massimo raggio abbiamo le ulteriori sfere:

$$(8)\quad \left(\xi-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\eta-\frac{\sqrt{13}}{4}\right)^2+\zeta^2=\frac{1}{16},$$

$$(9)\quad \left(\xi-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\eta-\frac{\sqrt{13}}{3}\right)^2+\zeta^2=\frac{1}{36},$$

$$(10)\quad \xi^2+\left(\eta-\frac{\sqrt{13}}{3}\right)^2+\zeta^2=\frac{1}{9},$$

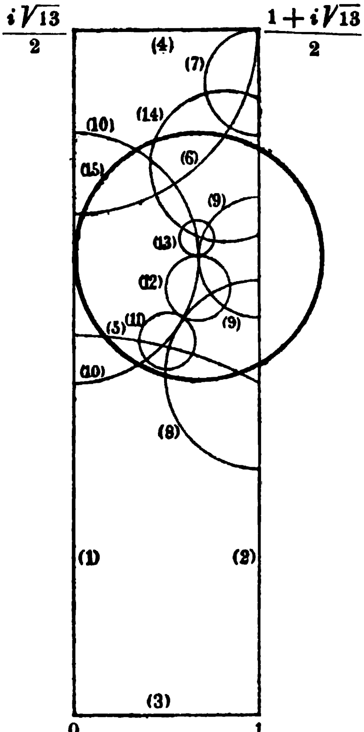
$$(11)\quad \left(\xi-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\eta-\frac{7}{2\sqrt{13}}\right)^2+\zeta^2=\frac{1}{208},$$

$$(12)\quad \left(\xi-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\eta-\frac{4}{\sqrt{13}}\right)^2+\zeta^2=\frac{1}{117},$$

$$(13)\quad \left(\xi-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\eta-\frac{9}{2\sqrt{13}}\right)^2+\zeta^2=\frac{1}{468}.$$

Se vi associamo in fine la sfera di riflessione

$$(14)\quad \left(\xi-\frac{2}{5}\right)^2+\left(\eta-\frac{2\sqrt{13}}{5}\right)^2+\zeta^2=\frac{1}{25},$$



Figª 9ª

avremo definito un poliedro P con 20 vertici, di cui uno V_∞ all' infinito e gli altri nei punti:

$$
\begin{array}{lll}
V_1 \equiv (0,\ 0,\ 1) & \text{intersezione di} & (1)\,(3)\,(5); \\
V_2 \equiv \left(0,\ \frac{7}{2\sqrt{13}},\ \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}\right) & \text{„} \quad \text{„} & (1)\,(5)\,(10); \\
V_3 \equiv \left(0,\ \frac{5}{\sqrt{13}},\ \frac{1}{\sqrt{13}}\right) & \text{„} \quad \text{„} & (1)\,(6)\,(10); \\
V_4 \equiv \left(0,\ \frac{\sqrt{13}}{2},\ \frac{1}{2}\right) & \text{„} \quad \text{„} & (1)\,(4)\,(6); \\
V_5 \equiv \left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{13}}{2},\ 0\right) & \text{„} \quad \text{„} & (2)\,(4)\,(6)\,(7); \\
V_6 \equiv \left(\frac{1}{2},\ \frac{91}{16\sqrt{13}},\ \frac{\sqrt{3}}{16}\right) & \text{„} \quad \text{„} & (2)\,(7)\,(14); \\
V_7 \equiv \left(\frac{1}{2},\ \frac{19}{4\sqrt{13}},\ \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{13}}\right) & \text{„} \quad \text{„} & (2)\,(4)\,(9); \\
V_8 \equiv \left(\frac{1}{2},\ \frac{4}{\sqrt{13}},\ \frac{1}{2\sqrt{13}}\right) & \text{„} \quad \text{„} & (2)\,(8)\,(9); \\
V_9 \equiv \left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{\sqrt{13}},\ \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}\right) & \text{„} \quad \text{„} & (2)\,(5)\,(8); \\
V_{10} \equiv \left(\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right) & \text{„} \quad \text{„} & (2)\,(3)\,(5); \\
V_{11} \equiv \left(\frac{3}{13},\ \frac{7}{2\sqrt{13}},\ \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{13}}\right) & \text{„} \quad \text{„} & (5)\,(10)\,(11); \\
V_{12} \equiv \left(\frac{4}{15},\ \frac{4\sqrt{13}}{15},\ \frac{1}{15}\right) & \text{„} \quad \text{„} & (5)\,(8)\,(11); \\
V_{13} \equiv \left(\frac{1}{4},\ \frac{5}{\sqrt{13}},\ \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{13}}\right) & \text{„} \quad \text{„} & (6)\,(10)\,(14); \\
V_{14} \equiv \left(\frac{2}{7},\ \frac{2\sqrt{13}}{7},\ 0\right) & \text{„} \quad \text{„} & (8)\,(10)\,(11)\,(12); \\
V_{15} \equiv \left(\frac{1}{3},\ \frac{\sqrt{13}}{3},\ 0\right) & \text{„} \quad \text{„} & (9)\,(10)\,(12)\,(13); \\
V_{16} \equiv \left(\frac{18}{40},\ \frac{7\sqrt{13}}{40},\ \frac{\sqrt{3}}{40}\right) & \text{„} \quad \text{„} & (10)\,(13)\,(14); \\
V_{17} \equiv \left(\frac{5}{13},\ \frac{4}{\sqrt{13}},\ \frac{1}{13}\right) & \text{„} \quad \text{„} & (8)\,(9)\,(12); \\
V_{18} \equiv \left(\frac{8}{23},\ \frac{8\sqrt{13}}{23},\ \frac{1}{23}\right) & \text{„} \quad \text{„} & (9)\,(13)\,(14); \\
V_{19} \equiv \left(\frac{4}{9},\ \frac{4\sqrt{13}}{9},\ \frac{1}{9}\right) & \text{„} \quad \text{„} & (6)\,(7)\,(14).
\end{array}
$$

Si verifica anche qui che nessuna sfera di riflessione attraversa P e che oltre l'identità vi ha una sola sostituzione in $\overline{\Gamma}^{(i\sqrt{P8})}$ che trasforma P in sè medesimo, cioè la riflessione impropria

$$z' = \frac{(1 + i\sqrt{13})\,z_0 - 5}{3z_0 - (1 - i\sqrt{13})}.$$

Questa scambia fra di loro effettivamente le faccie

[(1) (9)], [(2) (10)], [(3) (13)], [(4) (12)], [(5) (14)], [(6) (8)], [(7) (11)]

e conseguentemente i vertici

$$(V_1 V_{18})\ (V_2 V_7)\ (V_3 V_8)\ (V_4 V_{17})\ (V_5 V_{14})\ (V_6 V_{11})\ (V_9 V_{13})\ (V_{10} V_{16})$$
$$(V_{12} V_{19})\ (V_{15} V_\infty).$$

Mediante la corrispondente sfera di riflessione impropria

$$(15)\quad \left(\xi - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{13}}{3}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{9}$$

dividiamo il poliedro P in due parti equivalenti; una qualunque di esse può assumersi per poliedro fondamentale del gruppo $\bar{\Gamma}^{(i\sqrt{13})}$. (Cf. § prec^{te}). Fuori del gruppo esiste la riflessione $z' = \dfrac{\frac{1+i\sqrt{13}}{\sqrt{2}} z_0 - 3\sqrt{2}}{\sqrt{2} z_0 + \frac{-1+i\sqrt{13}}{\sqrt{2}}}$, che trasforma P in sè stesso ed un nuovo ampliamento è possibile.

§ 19.

I gruppi $\bar{\Gamma}^{\left(\frac{1+i\sqrt{15}}{2}\right)}$, $\bar{\Gamma}^{\left(\frac{1+i\sqrt{19}}{2}\right)}$.

a) Se $D = 15$, oltre i quattro piani

$$(1)\ \xi = 0,\quad (2)\ \xi = \frac{1}{2},\quad (3)\ \eta = 0,\quad (4)\ \eta = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

consideriamo le due sfere di riflessione (§ 11)

$$(5)\ \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1,\quad (6)\ \left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2 + \zeta^2 = 1,$$

che nel caso attuale si toccano nel punto $\frac{1+i\sqrt{15}}{4}$. È questo un punto singolare e determinando le sfere di riflessione del tipo IV, § 7 che ivi passano troviamo

$$(7)\quad \left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{7}{2\sqrt{15}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{15},$$

$$(8)\qquad \xi^2 + \left(\eta - \frac{4}{\sqrt{15}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{15}.\ ^{*)}$$

Cosi abbiamo definito un poliedro P coi vertici

$V_1 \equiv (0,\ 0,\ 1)$	intersezione di	(1) (3) (5);
$V_2 \equiv \left(0,\ \frac{\sqrt{15}}{4},\ \frac{1}{4}\right)$	„ „	(1) (5) (8);
$V_3 \equiv \left(0,\ \frac{2\sqrt{15}}{7},\ \frac{\sqrt{3}}{7}\right)$	„ „	(1) (6) (8);
$V_4 \equiv \left(0,\ \frac{\sqrt{15}}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	„ „	(1) (4) (6);
$V_5 \equiv \left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{15}}{2},\ 1\right)$	„ „	(2) (4) (6);

*) Fig^a 10^a.

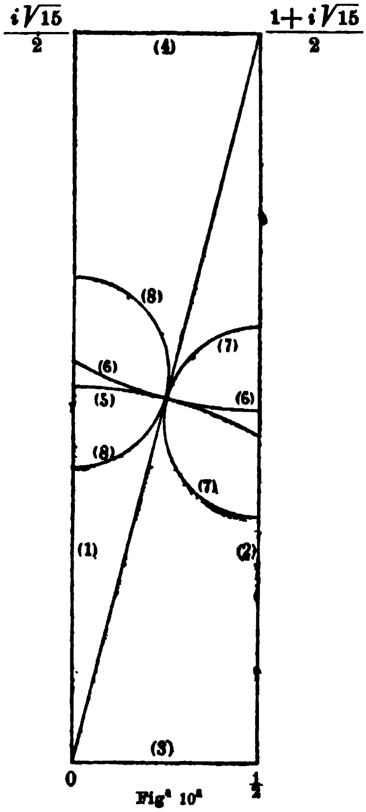
$V_6 \equiv \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{15}}{4}, \frac{1}{4}\right)$ intersezione di (2) (6) (7);

$V_7 \equiv \left(\frac{1}{2}, \frac{3\sqrt{15}}{14}, \frac{\sqrt{3}}{7}\right)$ „ „ (2) (5) (7);

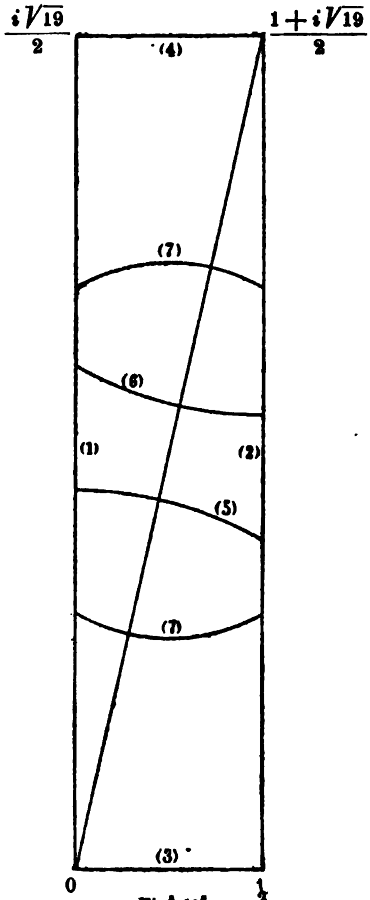
$V_8 \equiv \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ „ „ (2) (3) (5);

$V_9 \equiv \left(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{15}}{4}, 0\right)$ „ „ (5) (6) (4) (8);

$V_\infty \equiv (0, 0, \infty)$ „ „ (1) (2) (3) (4)



Fig^a 10^a



Fig^a 11^a

con angoli diedri retti salvo due di ampiezza $\frac{\pi}{3}$. Ove si osservi che P non è attraversato da alcuna sfera di riflessione e che, oltre l'identità, la sola sostituzione: $z' = -z + \frac{1+i\sqrt{15}}{2}$ lo cangia in sè medesimo, si deduce, precisamente come per $D = 7, 11$ (§ 16) che il poliedro fondamentale di $\bar{\Gamma}^{\left(\frac{1+i\sqrt{15}}{2}\right)}$ si ottiene dividendo P mediante il piano $\eta = \xi\sqrt{15}$ in due parti (equivalenti) e scegliendo ad arbitrio una di queste parti. Fuori del gruppo vi sono per altro le due sostituzioni:

$$z' = \frac{\frac{-\sqrt{3}+i\sqrt{5}}{2}z + \frac{\sqrt{3}+i\sqrt{5}}{2}}{\frac{\sqrt{3}+i\sqrt{5}}{2}z + \frac{\sqrt{3}-i\sqrt{5}}{2}}, \quad z' = \frac{\frac{-\sqrt{3}+i\sqrt{5}}{2}z + \sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}+i\sqrt{5}}{2}z + \frac{\sqrt{3}-i\sqrt{5}}{2}}$$

che trasformano P in sè medesimo. Il gruppo è quindi suscettibile d'ampliamento, ma il gruppo ampliato non contiene alcuna nuova riflessione.

b) Nel caso $D = 19$, oltre i quattro piani di riflessione

$$(1)\ \xi = 0, \quad (2)\ \xi = \frac{1}{2}, \quad (3)\ \eta = 0, \quad (4)\ \eta = \frac{\sqrt{19}}{2}$$

e le due sfere (§ 11)

$$(5)\ \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1, \quad (6)\ \left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{19}}{2}\right)^2 + \zeta^2 = 1,$$

che attualmente sono esterne, basta considerare la terza sfera di riflessione (§ 11)

$$(7)\ \left(\xi - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{19}}{4}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{4}\ ^{*})$$

che le taglia ortogonalmente ambedue. Abbiamo così definito un poliedro P coi 9 vertici

$V_1 \equiv (0,\ 0,\ 1)$ intersezione di (1) (3) (5);

$V_2 \equiv \left(0,\ \frac{4}{\sqrt{19}},\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{19}}\right)$ „ „ (1) (5) (7);

$V_3 \equiv \left(0,\ \frac{6}{\sqrt{19}},\ \sqrt{\frac{2}{19}}\right)$ „ „ (1) (6) (7);

$V_4 \equiv \left(0,\ \frac{\sqrt{19}}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ „ „ (1) (4) (6);

$V_5 \equiv \left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{19}}{2},\ 1\right)$ „ „ (2) (4) (6);

$V_6 \equiv \left(\frac{1}{2},\ \frac{11}{2\sqrt{19}},\ \sqrt{\frac{3}{19}}\right)$ „ „ (2) (6) (7);

$V_7 \equiv \left(\frac{1}{2},\ \frac{7}{2\sqrt{19}},\ \sqrt{\frac{2}{19}}\right)$ „ „ (2) (5) (7);

*) Figa 11a.

$$V_8 \equiv \left(\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \text{intersezione di} \quad (2)\,(3)\,(5);$$

$$V_\infty \equiv (0,\ 0,\ \infty) \qquad \text{,,} \qquad \text{,,} \quad (1)\,(2)\,(3)\,(4).$$

Nessuna sfera di riflessione lo attraversa e la sola sostituzione di $\overline{\Gamma}^{\left(\frac{1+i\sqrt{19}}{2}\right)}$ che lo cangi in sè medesimo è: $z' = -z + \frac{1+i\sqrt{19}}{2}$. Dividendo questo poliedro in due parti (equivalenti) mediante il piano

$$\eta = \xi\sqrt{19},$$

una qualunque di queste può assumersi per poliedro fondamentale di $\overline{\Gamma}^{\left(\frac{1+i\sqrt{19}}{2}\right)}$. Osserviamo in fine che questo gruppo non è suscettibile di alteriore ampliamento.

§ 20.

Osservazioni circa i casi superiori.

La ricerca dei poliedri fondamentali pei nostri gruppi $\overline{\Gamma}^{(\infty)}$ potrebbe forse spingersi più avanti sulla medesima via. Ma, oltre alla difficoltà pratica che nasce dalla crescente complicazione di questi poliedri, ve ne ha una di ordine teorico, che i mezzi di cui fin qui abbiamo disposto sono insufficienti a vincere. Essa consiste in ciò che: *Nei casi superiori esistono sul piano $\xi\eta$ dei punti esterni a qualsiasi sfera di riflessione, per quanto vi siano sfere di riflessione che passano ad essi vicino quanto si vuole* (§ 10). Tale circostanza, che ora andiamo a verificare, rende evidentemente inapplicabile, senza alteriori modificazioni, il metodo tenuto nei casi sopra trattati.

Supponiamo dapprima che *non sia* $D \equiv 3 \pmod{4}$, talchè tutte le sfere di riflessione si trovano raccolte nei tipi I), II) § 7

$$\text{I)}\ \left(\xi - \frac{a_1}{c_1}\right)^2 + \left(\eta - \frac{a_2\sqrt{D}}{c_1}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{c_1^2},\quad a_1^2 + Da_2^2 \equiv (\text{mod.}\, c_1),$$

$$\text{II)}\ \left(\xi - \frac{a_2}{c_1}\right)^2 + \left(\eta + \frac{a_1}{c_1\sqrt{D}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{Dc_1^2},\quad a_1^2 + Da_2^2 \equiv (\text{mod.}\, Dc_1).$$

Sia ora n un numero dispari, primo con D, inferiore a $\sqrt{D}$ di cui $-D$ sia residuo quadratico; sia inoltre s un numero qualunque primo con n ed r una soluzione della congruenza

$$r^2 \equiv -Ds^2 \pmod{n}.$$

Dimostriamo che: *il punto* $z = \frac{r + is\sqrt{D}}{n}$ *è esterno a qualsiasi sfera di riflessione.* E infatti se la sfera I) lo contenesse nel suo interno o alla superficie, dovremmo avere

$$\left(\frac{r}{n}-\frac{a_1}{c_1}\right)^2+D\left(\frac{s}{n}-\frac{a_2}{c_1}\right)^2\leqq\frac{1}{c_1^2},$$

ovvero

$$(1)\qquad (na_1-rc_1)^2+D(na_2-sc_1)^2\leqq n^2.$$

Essendo per ipotesi $D>n^2$ sarà necessariamente $na_2=sc_1$, e quindi, poichè s, n sono primi fra loro:

$$a_2=s\alpha,\quad c_1=n\alpha,$$

ove α è intero. La diseguaglianza (1) si cangià così nell' altra

$$(a_1-r\alpha)^2\leqq 1,$$

onde deducesi

$$a_1=r\alpha \quad \text{o} \quad a_1=r\alpha\pm 1.$$

Ma in ambedue ì casi riesce impossibile soddisfare con un conveniente valore di α la congruenza $a_1^2+Da_2^2\equiv 1 \pmod{c_1}$ che nel primo caso diventa

$$(r^2+Ds^2)\alpha^2\equiv 1 \pmod{n\alpha}$$

e nel 2°

$$(r^2+Ds^2)\alpha^2\pm 2r\alpha\equiv 0 \pmod{n\alpha}$$

mentre r^2+Ds^2 è divisibile per n ed r è primo con n.

Analogamente per una sfera di riflessione II) dovrebbe sussistere la diseguaglianza

$$D(na_2+rc_1)^2+(na_1-Dsc_1)^2\leqq n^2,$$

onde segue

$$a_2=r\alpha,\quad c_1=n\alpha$$

con α intero. Di piu risulterebbe

$$a_1=Ds\alpha \quad \text{o} \quad a_1=Ds\alpha\pm 1$$

ma in ambedue i casi è impossibile soddisfare la congruenza

$$a_1^2+Da_2^2\equiv 1 \pmod{Dn\alpha}.$$

Nel caso $D\equiv 3 \pmod 4$, ove si hanno le sfere di riflessione dei tipi III), IV), § 7 si traggono ancora le medesime conclusioni appena $D>4n^2$.

Per esempio, se prendiamo $n=3$ e supponiamo $D>9$ $\big($o $D>36$ quando sia $D\equiv 3 \pmod 4\big)$, vediamo che il punto $\frac{1+i\sqrt{D}}{3}$ sarà esterno a tutte le sfere di riflessione per i valori di D della forma $3h+2$, di cui il primo esempio si ha per $D=14$.*)

*) Le difficoltà qui accennate possono, almeno in parte, superarsi con nuovi ampliamenti del gruppo. Riserbo per un' altra memoria lo sviluppo di queste nuove ricerche istituite dopo lo presentazione del presente lavoro e non ancora condotte a termine.

Parte seconda.

Forme quadratiche di Dirichlet e di Hermite.

§ 21.

Forme di Dirichlet ridotte.

Premettiamo l'avvertenza che i corpi quadratici Ω, che intenderemo di considerare in seguito, saranno sempre di quelli pei quali superiormente abbiamo fissato il poliedro fondamentale del corrispondente gruppo $\Gamma^{(\infty)}$. Però le medesime considerazioni saranno applicabili ad ogni altro corpo quadratico immaginario pel quale si riesca a determinare il poliedro fondamentale di $\Gamma^{(\infty)}$.

Una forma binaria quadratica

$$ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

nella quale coefficienti e variabili siano numeri interi del corpo quadratico Ω si dirà una *forma di Dirichlet*. Spesso, ponendo in evidenza i soli coefficienti, la indicheremo simbolicamente con (a, b, c). Escluderemo senz' altro il caso che il determinante della forma:

$$d = b^2 - ac$$

sia un quadrato perfetto; in tal caso la forma è decomponibile in due fattori lineari con coefficienti razionali in Ω e i problemirelativi a questa specie di forme possono facilmente trattarsi dietro i risultati del § 2.

Dimostreremo come, mediante la rappresentazione geometrica studiata nella prima parte della presente memoria, si possa stabilire la teoria generale di queste forme e in particolare risolvere i due problemi fondamentali della teoria dell' equivalenza (A § 7).

Diciamo *radici* della forma (a, b, c) le due radici z_1, z_2 dell' equazione

$$az^2 + 2bz + c = 0.$$

Non essendo $d = b^2 - ac$ un quadrato perfetto, z_1, z_2 non sono numeri razionali in Ω e i punti del piano $\xi\eta$ indici di queste radici sono esterni alla rete poliedrica di $\Gamma^{(\infty)}$. Descriviamo sul segmento che unisce questi due punti, come diametro, il circolo C ortogonale al piano $\xi\eta$; questo diremo il *circolo indicatore* della forma $f = (a, b, c)$. Una forma f è fissata, a meno di un cangiamento simultaneo di segno dei suoi coefficienti, dati che ne siano il determinante ed il circolo indicatore.

Chiamiamo *ridotta* una forma f quando il suo circolo indicatore attraversa il poliedro fondamentale P di $\Gamma^{(\infty)}$. Precisamente come pel gruppo $\Gamma^{(i)}$ (A § 7) si dimostra il teorema: *Ogni forma di Dirichlet ammette una forma ridotta equivalente.*

§ 22.

Numero delle forme ridotte di un dato determinante.

Sussiste il teorema: *Il numero delle forme ridotte di un dato determinante è finito.*

Nel caso che il poliedro fondamentale non abbia alcun vertice sul piano $\xi\eta$, come accade per $D = 1, 2, 3, 7, 11, 19$ la dimostrazione si può fare precisamente come nel campo $(1, i)$ A, § 8). Ma quando il poliedro presenta di tali vertici singolari occorrono alcune considerazioni complementari che qui svilupperemo.

Consideriamo dapprima, come al § 1, la regione (V) di R limitata dai quattro piani

$$\xi = l, \quad \xi = m, \quad \eta = l', \quad \eta = m'$$

al di sopra del piano

$$\zeta = \varepsilon,$$

essendo $l, m, l', m', \varepsilon$ cinque costanti dalle quali l'ultima positiva e dimostriamo il lemma:

Esiste soltanto un numero finito di forme (a, b, c) *di Dirichlet con assegnato determinante* $d = b^2 - ac$, *i cui circoli indicatori attraversino la regione* (V).

Per la forma (a, b, c) a determinante d il raggio r del circolo indicatore è dato da

$$r = \frac{\sqrt{|d|}}{|a|},$$

e poichè la massima ordinata di un punto del circolo è r mentre la minima per i punti della regione (V) è ε, dovremo avere intanto $\frac{\sqrt{|d|}}{|a|} \geqq \varepsilon$, cioè $a \leqq \frac{\sqrt{|d|}}{\varepsilon}$. Il primo coefficiente a della forma non può dunque assumere che un numero finito di valori. Per ogni tale valore di a consideriamo la serie di forme *parallele* ad una singola forma (a, b, c):

$$(a, b, c), \ (a, b', c'), \ (a, b'', c'') \ldots,$$

nella quale cioè i coefficienti medii $b, b', b'' \ldots$ sono congrui fra loro (mod. a). Se osserviamo che i loro circoli indicatori nascono da quello di (a, b, c) per una traslazione $z' = z + \beta$ del gruppo $\Gamma^{(\infty)}$, riesce evidente, per la forma della regione (V), che soltanto un numero finito di questi circoli attraverserà (V). E poichè il numero dei valori di b incongrui (mod. a) è finito, il lemma è dimostrato. Siano ora $v_1, v_2, v_3 \ldots$ i vertici singolari sulpiano $\xi\eta$ del poliedro P. Isoliamo un intorno di ciascuno di essi da P, descrivendo per esempio altrettante sfere di raggio arbitrariamente piccolo coi centri in $v_1, v_2, v_3 \ldots$ e indichiamo con

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \ldots$ le piccole porzioni di P interne rispettivamente alle sfere descritte. Il numero delle forme ridotte di dato determinante d, i cui circoli indicatori attraversano la regione di P, che si ottiene sottraendo da P le regioni $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \ldots$ è finito, pel lemma premesso. Basterà dunque provare che per ciascuna regione σ_i non vi ha che un numero finito di forme a determinante d i cui circoli indicatori la attraversino. Osserviamo per ciò che la regione σ_i è racchiusa da cinque faccie sferiche, delle quali le quattro uscenti dal vertice singolare v_i, che è indice di un numero frazionario in Ω, si dividono in due coppie di sfere tangenti fra loro ed ortogonali a quelle dell' altra coppia, mentre la quinta giace sopra una sfera col centro in v_i. Per quanto abbiamo dimostrato ai §§ 2, 3, possiamo supporre che il valore di z in v_i abbia la forma $\frac{r+i\sqrt{D}}{m}$, cioè v_i sia indice di una forma quadratica ordinaria (m, r, k) a determinante $-D$. Se operiamo allora la sostituzione a determinante m:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -m, & r+i\sqrt{D} \end{pmatrix}$$

che trasporta v_i nel punto all' infinito, la corrispondente trasformazione dello spazio cangierà la regione σ_i in una nuova regione Σ_i limitata da quattro piani due a due paralleli e normali al piano $\xi\eta$ e da una quinta faccia sferica e tutti i punti di Σ_i rimarranno *al di sopra* del piano $\xi\eta$. Supponendo ora che il circolo indicatore della forma di Dirichlet

$$f = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

a determinante d attraversi σ_i, applichiamo alla forma f la sostituzione a determinante m

$$\begin{cases} x = (r+i\sqrt{D})\,X - Y, \\ y = mX, \end{cases}$$

che trasformerà f nella forma a determinante dm^2:

$$F = AX^2 + 2BXY + CY^2,$$

dove A, B, C hanno i valori

$$A = a(r+i\sqrt{D})^2 + 2bm(r+i\sqrt{D}) + cm^2,$$
$$B = -a(r+i\sqrt{D}) - bm, \quad C = a.$$

Il circolo indicatore di F attraverserà Σ_i. Ora, secondo il lemma, il numero delle forme F a determinante dm^2, il cui circolo indicatore attraversa Σ_i è limitato e poichè, come risulta dalle formole superiori, ad ogni forma F corrisponde una sola forma f, risulta così dimostrato il teorema.

§ 23.

Risoluzione dei due problemi della teoria dell' equivalenza.

Consideriamo una forma ridotta f_1 ed il suo circolo indicatore C. I punti ove C interseca il piano $\xi\eta$ sono esterni alla rete poliedrica del gruppo $\Gamma^{(\infty)}$ (§ 21) e conseguentemente C attraversa un numero infinito di poliedri della rete. Questi intercettano sopra C una serie di archi

$$\ldots \overline{A_{-2}A_{-1}},\ \overline{A_{-1}A_1},\ \overline{A_1A_2},\ \overline{A_2A_3},\ \overline{A_3A_4}\ldots$$

estesa nei due sensi all' infinito, ove $\overline{A_1A_2}$ indicherà l'arco intercetto dal poliedro fondamentale P. Ora osserviamo che gli archi $\overline{A_2A_3}$, $\overline{A_{-1}A_1}$, che comprendono $\overline{A_1A_2}$, possono essere cangiati con due sostituzioni di $\Gamma^{(\infty)}$ *perfettamente determinate* in due archi *ridotti*, che giacciono cioè nel poliedro fondamentale. Le sostituzioni inverse trasformano f_1 in due forme ridotte che si diranno le *ridotte contigue* di f_1. Così ogni forma ridotta f_1 ha due ridotte contigue determinate senza ambiguità da f_1 ed è chiaro che la relazione di contiguità fra due forme ridotte è invertibile. Ora prendiamo una ridotta contigua f_2 di f_1, di f_2 prendiamo la seconda ridotta contigua f_3 oltre f_1 e così di seguito. Poichè il numero delle forme ridotte è finito, costituiremo un gruppo di forme ridotte

$$f_1 f_2 f_3 \ldots f_n$$

tutte fra loro equivalenti e tale che le ridotte contigue di ogni forma del gruppo si troveranno nel gruppo stesso. Si dimostra subito inversamente (Cf. A § 10) che ogni forma ridotta equivalente a f_1 si trova nel gruppo così costruito, che si dirà il *periodo* delle forme ridotte equivalenti a f_1; dunque: *Due forme ridotte sono equivalenti solo quando appartengono al medesimo periodo.*

Il primo problema della teoria dell' equivalenza: *decidere se due forme f, f' dello stesso determinante sono equivalenti* resta così risoluto, potendosi ricondurre al caso delle forme ridotte. E poichè, se f, f' sono equivalenti, col nostro metodo troviamo anche *una* sostituzione che trasforma effettivamente f, in f', per trovarle tutte resta a risolvere la questione: *Determinare nel gruppo $\Gamma^{(\infty)}$ il sottogruppo riproduttivo di una forma data f, che si può senz' altro supporre ridotta.*

Per maggiore chiarezza limitiamoci dapprima a ricercare le sostituzioni di $\Gamma^{(\infty)}$ a determinante $+1$ che trasformano la forma ridotta f_1 in sè stessa; invece di operare cioè col gruppo $\Gamma^{(\infty)}$, operiamo con quel suo sottogruppo eccezionale $\Gamma_2^{(\infty)}$ d'indice 2 che comprende le sole sostituzioni a determinante $+1$. Al poliedro P sostituiremo adunque il poliedro Π che risulta associando a P il suo simmetrico rispetto al piano $\eta = 0$, che sarà il poliedro fondamentale del gruppo $\Gamma_2^{(\infty)}$ ed i concetti di forme equivalenti e forme ridotte si riferiranno al gruppo $\Gamma_2^{(\infty)}$ ed al suo poliedro Π.

Una forma $f = ax^2 + 2bxy + cy^2$ a determinante d ha le due radici

$$z_1 = -\frac{b+\sqrt{d}}{a}, \quad z_2 = -\frac{b-\sqrt{d}}{a},$$

ove pel radicale $\sqrt{d}$ fisseremo una volta per tutte un senso determinato p. e. quello che dà alla parte reale di $\sqrt{d}$ il segno positivo se $\sqrt{d}$ non è puramente immaginario e, inquest' ultimo caso, quello pel quale $\frac{\sqrt{d}}{i}$ è positivo. Chiameremo allora z_1 la *prima* e z_2 la *seconda* radice e fisseremo per senso positivo del circolo indicatore quello che in R va da z_1 verso z_2. Una forma f risulta per tal modo individuata dal suo determinante d, dal suo circolo indicatore e dal senso positivo di questo. Se una sostituzione $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ a determinante $+1$ trasforma f in f', la sua inversa cangia il circolo indicatore di f in quello di f' e precisamente il senso positivo dell' uno nel senso positivo dell' altro.*)

Sia ora f_1 una forma ridotta, $\overline{A_1A_2}$ l'arco del suo circolo indicatore intercettato da Π e il senso da A_1 verso A_2 il senso positivo. La ridotta contigua a f_1 che si incontra dopo A_2 si dirà la contigua a *destra* di f_1 e quella prima di A_1 la contigua a *sinistra*. Così è chiaro, per quanto precede, che se f_2 è contigua a destra di f_1, questa è contigua a sinistra di f_2. Ciò posto, prendiamo la contigua a destra f_2 di f_1, la contigua a destra f_3 di f_2 e così via. La prima forma a ripetersi nella serie

$$f_1 f_2 f_3 \cdots$$

è certamente f_1 e se ciò accade immediatamente dopo f_n, alla forma f_{n+1}, diremo che

$$f_1 f_2 f_3 \cdots f_n$$

costituisce un *periodo* di forme ridotte. Componendo successivamente la sostituzione (data dal metodo stesso) che trasforma f_1 in f_2 conquella che porta f_2 in f_3 etc. e in fine con quella che porta f_n in $f_{n+1} = f_1$ troviamo una sostituzione S che trasforma f_1 in sè medesima. D'altra parte ogni sostituzione che trasforma f_1 in sè stessa cangia il circolo indicatore di f_1 in sè medesimo e se, come qui supponiamo, è a determinante $+1$ ne conserva altresì il senso positivo; se ne conclude subito che è una potenza di S. Dunque: *Il gruppo delle sostituzioni*

*) Cf. Dirichlet, Zahlentheorie § 72, e Klein, Modulfunctionen p. 251.

di $\Gamma^{(\infty)}$ *a determinante* $+1$ *riproduttrici di* f_1 *è un gruppo ciclico generato da una sostituzione minima* S *che sappiamo determinare.**)

Volendo da questo gruppo risalire all' intero sottogruppo di $\Gamma^{(\infty)}$ riproduttivo di f_1, osserveremoche se τ, τ' sono due sostituzioni a determinante -1 riproduttrici di f_1 il prodotto $\tau^{-1}\tau'$ è necessariamente una potenza di S. Quindi il sottogruppo cercato o coincide col gruppo ciclico superiore o lo contiene come sottogruppo eccezionale d'indice 2, constando delle sostituzioni della forma

$$\text{a)}\quad S^n,\ \tau S^n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Ogni sostituzione τS^n cangia il circolo indicatore di f_1 in sè medesimo rovesciandone il senso positivo; essa ha perciò necessariamente un punto fisso sul circolo ed è quindi ellittica a periodo 2, il suo determinante essendo eguale $a - 1$**). La costituzione del gruppo a) corrisponde quindi evidentemente a quella di un gruppo diedrale.

È chiaro che in tal caso fra le sostituzioni τS^n se ne troverà una che lascierà fermo A_1 ovvero seambierà A_1 con A_2. Se tale sostituzione esiste è ben facile determinarla dalle coordinate note di A_1, A_2 e si ottiene così la determinazione completa del sottogruppo cercato.

§ 24.

Forme definite di Hermite.

Consideriamo una forma quadratica:

$$Axx_0 + Bxy_0 + B_0x_0y + Cyy_0$$

dove i coefficienti A, C sono razionali interi; B è un intero nel corpo quadratico, B_0 il coniugato, x, y due interi variabili in Ω e $x_0\,y_0$ i loro coniugati. Una tale forma si dirà una *forma di Hermite* e sarà rappresentata per brevità col simbolo [A, B, C]. Per ogni sostituzione lineare

$$x = \alpha x' + \beta y', \quad y = \gamma x' + \delta y'$$

eseguita sulle variabili, ove α, β, γ, δ sono interi in Ω (quando contemporaneamente si eseguisca la sostituzione coniugata sulle variabili coniugate) la F si trasforma in una forma

$$F' = A'x'x_0' + B'x'y_0' + B_0'x_0'y' + C'y'y_0'$$

della stessa natura e si hanno le formole di trasformazione:

---

*) Nel corrispondente § 10 (A) è incorso un errore che facilmente si correggerà dietro le indicazioni del testo.

**) Alla medesima conclusione si arriva direttamente osservando che in una tale sostituzione il 1° ed il 4° coefficiente sono eguali e di segno contrario (V. Dirichlet, Zahlentheorie § 57).

$$(1)\qquad\begin{cases} A' = A\alpha\alpha_0 + B\alpha\gamma_0 + B_0\alpha_0\gamma + C\gamma\gamma_0, \\ B' = A\alpha\beta_0 + B\alpha\delta_0 + B_0\beta_0\gamma + C\gamma\delta_0, \\ B_0' = A\alpha_0\beta + B_0\alpha_0\delta + B\beta\gamma_0 + C\gamma_0\delta, \\ C' = A\beta\beta_0 + B\beta\delta_0 + B_0\beta_0\delta + C\delta\delta_0. \end{cases}$$

Se il determinante della sostituzione è un' unità le due forme F, F' si diranno equivalenti rispetto a $\Gamma^{(\omega)}$.

La forma F è *definita* o *indefinita* secondo che il determinante $\Delta = BB_0 - AC$ è negativo o positivo. In una forma definita A, C hanno lo stesso segno e ci possiamo limitare, come faremo, a considerare il caso dei coefficienti estremi positivi. Ad una forma definita $[A, B, C]$ corrisponde in R un punto perfettamente determinato le cui coordinate sono date dalle formole

$$(2)\qquad \xi = -\frac{B+B_0}{2A}, \quad \eta = \frac{B-B_0}{2iA}, \quad \zeta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{A};$$

questo punto si dirà *l'indice* della forma (Cf. A § 11). Una forma definita (positiva) è individuata dal suo determinante e dal suo indice. *Due forme definite equivalenti hanno indici equivalenti ed inversamente.* (ibid.).

Diremo *ridotta* una forma definita quando il suo indice giaccia nel poliedro fondamentale. Ne segue subito: *Ogni forma definita è equivalente ad una forma ridotta.*

Ora riferendoci alle considerazioni del § 22 possiamo dimostrare il teorema: *Il numero delle forme ridotte definite di un dato determinante* Δ *è limitato.* Se riprendiamo infatti a considerare in R una regione (V) come quella del § 1 definita dalle diseguaglianze

$$l < \xi < m, \quad l' < \eta < m', \quad \zeta > \varepsilon,$$

dimostriamo dapprima facilmente che *entro* (V) *non può cadere che un numero finito di punti indici di forme a determinante* Δ. Per una tale forma dovendo aversi $\frac{\sqrt{-\Delta}}{A} > \varepsilon$, cioè $A < \frac{\sqrt{-\Delta}}{\varepsilon}$, il 1º coefficiente A non può assumere che un numero finito di valori. Per ogni valore ammissibile di A, tanto la parte reale quanto il coefficiente dell' immaginario in B debbono giacere fra limiti assegnati e però risulta evidente l'ultima asserzione.

Ora se il poliedro P ha vertici singolari sul piano $\xi\eta$ si escludano al modo del § 22 e le considerazioni stesse di questo paragrafo dimostreranno il teorema enunciato. Basta per ciò osservare che la sostituzione

$$\begin{cases} x = (r + i\sqrt{D})\,x' - y', \\ y = mx' \end{cases}$$

a determinante m ivi considerata trasforma la $F = [A, B, C]$ a determinante Δ nella $F' = [A', B', C']$ a determinante Δm^2, ove

$$(3)\quad \begin{cases} A' = A(r^2+D) + Bm(r+i\sqrt{D}) + B_0 m(r-i\sqrt{D}) + Cm^2, \\ B' = -A(r+i\sqrt{D}) - B_0 m, \\ C' = A \end{cases}$$

e mentre ad ogni forma F ne corrisponde una sola F', inversamente ad ogni forma F' corrisponde per le (3) una sola forma F.

Ove si aggiunga in fine che due forme ridotte non sono in generale equivalenti salvo quando i loro due indici si trovino su due faccie coniugate di P e l'uno risulti dall' altro per la sostituzione di $\Gamma^{(\omega)}$ che cangia l'una faccia nella coniugata, si hanno tutti gli elementi necessarii per risolvere, nel caso delle forme definite di Hermite, i problemi della teoria dell' equivalenza.

§ 25.

Esempi numerici.

Per mostrare in qualche esempio l'effettiva applicazione dei risultati precedenti, prendiamo dapprima il caso del corpo quadratico

$$\left(1,\ \frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)$$

e scriviamo le condizioni affinchè una forma definita positiva $[A, B, C]$ sia ridotta. Secondo il § 16 possiamo definire il poliedro fondamentale P di $\Gamma^{\left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)}$ colle diseguaglianze

$$-\tfrac{1}{2} \leq \xi \leq \tfrac{1}{2},\quad 0 \leq \eta \leq \frac{\sqrt{7}}{2},\quad \eta - \xi\sqrt{7} \geq 0,\quad \eta + \xi\sqrt{7} \geq 0,$$

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \geq 1,\quad \left(\xi - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 + \zeta^2 \geq 1,$$

$$\left(\xi + \tfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 + \zeta^2 \geq 1.$$

Ora se poniamo

$$B = B_1 + B_2\,\frac{1+i\sqrt{7}}{2},$$

essendo B_1, B_2 razionali interi, il punto indice della forma avrà per le (2) § 24 le coordinate

$$\xi = -\frac{2B_1 + B_2}{2A},\quad \eta = \frac{B_2\sqrt{7}}{2A},\quad \zeta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{A}$$

e le precedenti diseguaglianze si tradurranno per una forma ridotta nelle seguenti

$$|2B_1 + B_2| \leq A, \quad 0 \leq B_2 \leq A, \quad B_1 + B_2 \geq 0, \quad B_1 \leq 0, \quad C \geq A,$$
$$2C + (2B_1 + B_2) - 7B_2 + 2A \geq 0,$$
$$2C - (2B_1 + B_2) - 7B_2 + 2A \geq 0.\text{*)}$$

L'ordinata minima di un punto del poliedro P è $= \sqrt{\frac{3}{7}}$; in conseguenza deve aversi

$$A \leq \sqrt{-\frac{7}{3}\Delta},$$

il che dà per A un numero finito di valori. Indi le diseguaglianze superiori, unitamente alla condizione

$$AC - B_1{}^2 - 2B_2{}^2 - B_1 B_2 = -\Delta,$$

danno un numero finito di forme ridotte. Così se prendiamo $\Delta = -3$ troviamo le 5 forme ridotte

$$[1, 0, 3], \quad \left[1, \frac{1+i\sqrt{7}}{2}, 5\right], \quad \left[1, \frac{-1+i\sqrt{7}}{2}, 5\right], \quad [2, -1, 2],$$
$$[2, i\sqrt{7}, 5]$$

delle quali le tre prime sono equivalenti mentre le ultime due non sono equivalenti fra loro nè alla prima. Le forme di Hermité a determinante -3 nel campo $\left(1, \frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)$ si ripartiscono dunque in tre classi rappresentate dalle forme ridotte

$$[1, 0, 3], \quad [2, -1, 2], \quad [2, i\sqrt{7}, 5].$$

Come secondo esempio consideriamo il caso del campo quadratico $(1, i\sqrt{5})$. Il poliedro fondamentale del corrispondente gruppo $\Gamma^{(i\sqrt{5})}$ è stato definito al § 14 mediante le diseguaglianze

$$-\frac{1}{2} \leq \xi \leq \frac{1}{2}, \quad 0 \leq \eta \leq \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \geq 1,$$
$$\xi^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \zeta^2 \geq \frac{1}{4},$$
$$\left(\xi + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + \zeta^2 \geq \frac{1}{20},$$
$$\left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + \zeta^2 \geq \frac{1}{20},$$

che per una forma definita $[A, B, C]$, ponendo

$$B = B_1 + iB_2\sqrt{5},$$

*) Che le diseguaglianze caratterizzanti una forma ridotta siano lineari rispetto ai coefficienti della forma non è una particolarita di questo caso ma una proprietà generale.

si traducono nelle altre:

$$(\mathrm{a})\begin{cases}-\frac{A}{2}\leq B_1\leq\frac{A}{2}, \quad 0\leq B_2\leq\frac{A}{2}, \quad C\geq A, \quad C-5B_2+A\geq 0,\\ C-B_1-4B_2+A\geq 0, \quad C+B_1-4B_2+A\geq 0.\end{cases}$$

Ora, secondo quanto abbiamo detto al § 22, descriviamo attorno ai due vertici singolari $\frac{-1+i\sqrt{5}}{2}$, $\frac{1+i\sqrt{5}}{2}$ come centri due sfere di raggio ε così piccolo che stacchino dal poliedro P due intorni dei vertici singolari e ricerchiamo separatamente per ciascuna delle tre parti, in cui P risulta diviso, quali indici di forme dell' assegnato determinante (negativo) Δ vi sono contenuti. Se prendiamo l'intorno del vertice singolare $\frac{-1+i\sqrt{5}}{2}$ definito dalle diseguaglianze

$$\xi\geq-\tfrac{1}{2}, \quad \eta\leq\frac{\sqrt{5}}{2},$$

$$\xi^2+\left(\eta-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2+\zeta^2\geq\tfrac{1}{4}, \quad \left(\xi+\tfrac{1}{2}\right)^2+\left(\eta-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2+\zeta^2\geq\tfrac{1}{20},$$

$$\left(\xi+\tfrac{1}{2}\right)^2+\left(\eta-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2+\zeta^2\leq\varepsilon^2,$$

le forme ridotte $[A, B, C]$ i cui indici cadono in quest' intorno dovranno soddisfare alle diseguaglianze:

$$(\mathrm{b})\begin{cases}B_1\leq\frac{A}{2}, \quad B_2\leq\frac{A}{2}, \quad C-5B_2+A\geq 0,\\ C-B_1-4B_2+A\geq 0, \quad C-B_1-5B_2+\left(\frac{3}{2}-\varepsilon^2\right)A\leq 0.\end{cases}$$

Se ad una tale forma $[A, B, C]$ applichiamo (§ 24) la sostituzione

$$\begin{pmatrix}-1+i\sqrt{5}, & -1\\ 2\quad, & 0\end{pmatrix}$$

a determinante 2, ne deriviamo una forma $[A', B', C']$ a determinante 4Δ e i coefficienti A, B, C della 1ª forma si deducono da quelli della 2ª colle formole

$$A=C', \quad B_1=\frac{C_1-B_1'}{2}, \quad B_2=\frac{C'+B_2'}{2},$$

$$C=\frac{A'+6C'-2B_1'+10B_2'}{4},$$

ove si è posto $B'=B_1'+iB_2'\sqrt{5}$. Per la forma $[A', B', C']$ le diseguaglianze (b) si mutano nelle altre

$$0\leq B_1'\leq\frac{A'}{2}, \quad \frac{-A'}{2}\leq B_2'\leq 0, \quad A'\leq 4\varepsilon^2C';$$

ma poichè deve essere

$$A'C'-B_1'^2-5B_2'^2=4\Delta,$$

ponendo in questa per C' il limite inferiore $\frac{A'}{4\varepsilon^2}$ e per $B_1'^2$, $B_2'^2$ i limiti superiori $\frac{A'^2}{4}$ ne deduciamo

$$A'^2\left(\frac{1}{\varepsilon^2} - 6\right) \leq -16\Delta.$$

Questa ci dà per A' un numero finito di valori e a ciascuno di essi corrisponde un numero finito di valori per B_1', B_2'. Se prendiamo

$$\varepsilon = \frac{1}{3\sqrt{5}}$$

risulta $A'^2 \leq -\frac{16}{39}\Delta$, sicchè per $\Delta = -1$, $\Delta = -2$, nessun indice di forme ridotte cade negli intorni dei vertici singolari.

Nel poliedro che risulta togliendo da P gli intorni dei due vertici singolari la minima ordinata di un vertice è $\frac{\sqrt{39}}{45}$. Per una forma ridotta $[A, B, C]$ a determinante -1 dovremo dunque avere

$$\frac{1}{A} \geq \frac{\sqrt{39}}{45}$$

e quindi $A \leq 7$. Tenendo presenti le diseguaglianze (a) troviamo le seguenti quattro forme ridotte a determinante $\Delta = -1$:

$$[1, 0, 1], \quad [2, i\sqrt{5}, 3], \quad [5, 2+2i\sqrt{5}, 5], \quad [5, -2+2i\sqrt{5}, 5],$$

delle quali soltanto le due ultime sono equivalenti fra loro. Nel campo $(1, i\sqrt{5})$ le forme a determinante -1 si distribuiscono dunque in tre classi.

§ 26.

Forme di Hermite indefinite.

Una forma di Hermite indefinita $[A, B, C]$ individua nel piano $\xi\eta$ il circolo reale:

$$(1) \qquad A z z_0 + B z + B_0 z_0 + C = 0,$$

che soltanto se il primo coefficiente A è nullo si riduce ad una linea retta. In tal caso il determinante $\Delta = BB_0$ è scindibile nel prodotto di due fattori coniugati nel corpo quadratico Ω ed il gruppo riproduttivo della forma, la cui determinazione forma l'oggetto principale delle ricerche seguenti, deducesi per trasformazione da un sottogruppo modulare*). Generalmente intenderemo escluso questo caso che consente una trattazione più semplice.

La sfera descritta sul circolo (1), come cerchio massimo, si dirà

*) Cf. pel gruppo $\Gamma^{(i)}$ la mia nota nei. Rendiconti Accademia Lincei 4 maggio 1890.

la *sfera indicatrice* della forma $[A, B, C]$. Ove si scinda B nella sua parte reale ed immaginaria, ponendo

$$B = M + iN,$$

l'equazione della sfera indicatrice è:

$$(2) \qquad \left(\xi + \frac{M}{A}\right)^2 + \left(\eta - \frac{N}{A}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{\Delta}{A^2}.$$

La forma $[A, B, C]$ è determinata, a meno di un cangiamento simultaneo di segno nei coefficienti, quando ne sia fissato il determinante e la sfera indicatrice.

Diciamo la $[A, B, C]$ *ridotta* quando la sua sfera indicatrice attraversa il poliedro fondamentale P; sussiste allora il teorema: *Ogni forma di Hermite indefinita ammette una forma ridotta equivalente.*

Ed ora andiamo a dimostrare l'altro teorema fondamentale: *Il numero delle forme ridotte di assegnato determinante* Δ *è finito.*

Perchè una forma sia ridotta è *necessario* che la sua sfera indicatrice o contenga *nel suo interno* qualche vertice non singolare di P, ovvero contenga nel suo interno o alla superficie un vertice singolare. Sia dapprima $v_0 \equiv (\xi_0\, \eta_0\, \zeta_0)$ un vertice non singolare e però $\zeta_0 > 0$; se la sfera (4) contiene nel suo interno v_0 dovremo avere

$$(3) \qquad (A\xi_0 + M)^2 + (A\eta_0 - N)^2 + A^2\zeta_0^2 < \Delta;$$

ne segue intanto che il 1° coefficiente A non può assumere che un numero finito di valori e poichè inoltre la parte reale ed immaginaria in B, per ogni tale valore di A, debbono giacere, in forza della (3) stessa, fra limiti assegnati, il numero di queste sfere è limitato.

Se v_0 è un vertice singolare le sue coordinate saranno

$$\xi_0 = \frac{r}{n}, \quad \eta_0 = \frac{s\sqrt{D}}{n}, \quad \zeta_0 = 0,$$

essendo r, s, n razionali interi. Supponiamo che non sia $D \equiv 3 \pmod{4}$, il caso $D \equiv 3 \pmod{4}$ consentendo una trattazione del tutto simile; allora il 2° coefficiente B avrà la forma

$$B = B_1 + iB_2\sqrt{D},$$

con B_1, B_2 interi ordinarii. Se la sfera (2) contiene *nel suo interno* v_0 dovremo avere

$$(Ar + B_1 n)^2 + D(As - B_2 n)^2 < \Delta n^2.$$

Ponendo per un momento

$$(4) \qquad Ar + B_1 n = \alpha, \quad As - B_2 n = \beta$$

le coppie di valori ammissibili per α, β sono evidentemente in numero limitato. Per ogni tale coppia di valori di α, β essendo

$$\alpha^2 + D\beta^2 \equiv n^2(B_1^2 + DB_2^2) \pmod{A}$$

e però

$$\alpha^2 + D\beta^2 - n^2\Delta \equiv n^2\{B_1{}^2 + DB_2{}^2 - \Delta\} \equiv 0 \pmod{A}$$

deve essere A un divisore del numero *diverso da zero* $\alpha^2 + D\beta^2 - n^2\Delta$ e però A e quindi B_1, B_2 (per le (4)) non possono ricevere corrispondentemente che un numero finito di valori.

Resta che proviamo che vi ha soltanto un numero finito di forme a determinante Δ le cui sfere indicatrici passano pel vertice singolare $v_0 \equiv \frac{r + is\sqrt{D}}{n}$, ivi attraversando il poliedro P. Sia $[A, B, C]$ una tale forma per la quale risulti adunque per la (1)

$$(5)\quad A(r^2 + Ds^2) + nB(r + is\sqrt{D}) + nB_0(r - is\sqrt{D}) + Cn^2 = 0.$$

Ricorrendo al processo già usato ai §§ 22, 24, applichiamo ad $[A, B, C]$ la sostituzione a determinante n

$$\begin{cases} x = (r + is\sqrt{D})\, x' - y', \\ y = nx', \end{cases}$$

che la cangia in una forma $[0, B', C']$ a determinante Δn^2 col primo coefficiente nullo, a causa della (5) e gli altri due dati dalle formole

$$(6)\qquad \begin{cases} B' = -A(r + is\sqrt{D}) - B_0 n, \\ C' = A. \end{cases}$$

La sfera indicatrice della forma trasformata si riduce dunque al piano

$$(7)\qquad B'z + B_0'z_0 + C' = 0,$$

mentre l'intorno del vertice singolare v_0 si muta in una regione Σ della natura di quella considerata al § 22. Per ipotesi deve il piano (7) traversare questa regione Σ e quindi la sua distanza p dall' origine non potrà manifestamente superare un certo limite. Ma troviamo

$$p = \frac{C'}{2n\sqrt{\Delta}},$$

onde segue che C' non può assumere che un numero finito di valori e poichè lo stesso accade di B' in forza della condizione $B'B_0' = n^2\Delta$, le formole (6) dimostrano subito la proprietà enunciata.

§ 27.

Periodi delle forme ridotte.

Per ciò che riguarda la distribuzione delle forme ridotte in periodi, e la risoluzione dei due problemi della teoria della equivalenza, poco vi è da aggiungere a quanto è esposto pel gruppo $\Gamma^{(i)}$ nel lavoro precedente (A. §§ 13, 14). Sulla sfera indicatrice di una forma ridotta f_1 la divisione poliedrica, corrispondente al nostro gruppo $\Gamma^{(\omega)}$, darà una rete di poligoni con lati circolari normali all' equatore*) della sfera. Consideriamo il polygono π_1 della rete tagliato sulla sfera dal poliedro fondamentale P e i poligoni della rete contigui a π_1. Ciascuno di questi con una sostituzione di $\Gamma^{(\omega)}$ perfettamente determinata può essere trasportato in un poligono *ridotto*, giacente cioè nel poliedro fondamentale; la sostituzione inversa applicata alla forma f_1 la cangia in una forma ridotta equivalente ad f_1, che diremo una *ridotta contigua* di f_1. È chiaro che in generale il passaggio dalla forma ridotta f_1 ad una contigua si opera per mezzo di una delle sostituzioni elementari del gruppo, che cangiano cioè il poliedro P in uno degli aderenti *per una faccia*. Fa eccezione il caso in cui la sfera indicatrice di f_1 attraversa uno spigolo di P, chè allora la sostituzione da adoperarsi è quella che cangia P nel poligono della rete opposto lungo questo spigolo. Immaginiamo ora scritte tutte le forme ridotte contigue ad f_1 e di ciascuna prendiamo nuovamente le ridotte contigue, omettendo quelle che eventualmente ripetessero forme già ottenute e così continuiamo. Il numero delle forme ridotte di un dato determinante Δ essendo limitato (§ 26), costituiremo un aggregato di forme ridotte differenti

A) $$f_1\, f_2\, f_3 \ldots f_n,$$

tutte equivalenti fra loro, tale che le ridotte contigue di ogni forma f_i in A) si trovano in A) stesso. Diremo questo aggregato A) un *periodo di forme ridotte* e, come in (A) § 14) dimostreremo il teorema: *Due forme ridotte equivalenti appartengono al medesimo periodo.*

Con ciò viene risoluto il problema di riconoscere se due forme indefinite dello stesso determinante sono equivalenti o no; nel caso affermativo si trova anche un' effettiva sostituzione che trasforma l'una nell' altra. Rimane così soltanto da risolvere il 2° problema della teoria dell' equivalenza:

Determinare in $\Gamma^{(\omega)}$ il sottogruppo riproduttivo di un' assegnata forma indefinita, che è lecito supporre ridotta.

Questa ricerca offre interesse non soltanto per la teoria dei numeri ma ben più per quella delle funzioni *automorfe*. Tale sottogruppo è infatti un gruppo *automorfo* e le corrispondenti funzioni hanno stretta analogia colle funzioni modulari, colle quali hanno a comune una teoria della trasformazione e il gruppo delle corrispondenti equazioni di trasformazione (gruppo delle equazioni modulari) **).

*) Intendiamo per equatore il circolo massimo nel piano $\xi\eta$.

**) Cf. Fricke, Math. Annalen Bd. 39.

§ 28.

Gruppo riproduttivo di una forma di Hermite indefinita.

Essendo

A) $$f_1 f_2 f_3 \dots f_n$$

il periodo delle forme ridotte individuato da f_1, consideriamo i corrispondenti poligoni ridotti

B) $$\pi_1', \pi_2', \pi_3' \dots \pi_n'.$$

Poichè due forme distinte $[A, B, C]$, $[A', B', C']$ dello stesso determinante hanno a comune la sfera indicatrice solo quando i coefficienti dell' una siano eguali e di segno contrario ai corrispondenti dell' altra, vediamo che la serie B) consterà di poligoni tutti distinti, ovvero due a due coincidenti. Il secondo caso si presenterà quando il periodo A) contenga la forma contraria $[-A, -B, -C]$ di $f_1 = [A, B, C]$ e quindi anche la forma contraria di ogni forma nel periodo.

Se procediamo dunque direttamente sui poligoni della rete che la sfera indicatrice di f_1 taglia dalla divisione poliedrica e formiamo il poligono Π constante degli m poligoni contigui

$$\pi_1 \pi_2 \dots \pi_m$$

che formano un sistema completo di poligoni non equivalenti della rete, sarà $m = n$ nel 1° caso e $m = \frac{1}{2} n$ nel 2°. Determiniamo ora, nel noto modo (A) § 13), il sottogruppo Φ di $\Gamma^{(\infty)}$, che trasforma in sè medesima la rete sferica di f_1, sottogruppo che avrà precisamente per poligono fondamentale Π. Il gruppo Φ coinciderà col sottogruppo riproduttivo Φ_1 di f_1 nel 1° caso e lo conterrà invece come sottogruppo eccezionale d'indice 2 nel 2° caso, ove le sostituzioni di Φ che non appartengono a Φ_1 trasformeranno f_1 nella sua contraria. Ora colle formole effettive di trasformazione si prova facilmente che una sostituzione di Φ_1 produce un semplice scorrimento (nel senso non-euclideo) della sfera indicatrice in sè medesima, mentre una sostituzione di Φ fuori di Φ_1 produce un tale scorrimento combinato con un ribaltamento o inversione delle due faccie della sfera. Nel secondo caso adunque il gruppo Φ non è altro che il gruppo Φ_1 *ampliato per riflessione*.

Per chiarire con un esempio queste osservazioni consideriamo il gruppo $\Gamma^{(i)}$ e la divisione poliedrica corrispondente (§ 12) e prendiamo la forma

$$f_1 = ixy_0 - ix_0y,$$

la cui sfera indicatrice si riduce al piano $\eta = 0$. Questo taglia dalla divisione poliedrica precisamente la figura corrispondente al gruppo modulare *ampliato per riflessione*.

§ 29.

Esempio numerico pel gruppo $\Gamma^{(i)}$.

Alla discussione di alcuni esempi numerici facciamo precedere l'osservazione seguente. La distribuzione delle forme ridotte in periodi operandosi per forme contigue, per ottenere da una forma ridotta tutte le ridotte contigue basterà in generale applicare a ciascuna forma ridotta f_i le sostituzioni elementari del gruppo $\Gamma^{(\infty)}$. Solo quando la sfera indicatrice di f_i attraversi uno spigolo di P converrà usare inoltre la sostituzione che trasforma P nel poligono opposto lungo questo spigolo (§ 27). Ciò del resto avverrà soltanto per valori speciali di Δ e per particolari forme ridotte. Basterà dunque, scritto il sistema completo delle forme ridotte, osservare l'effetto permutativo prodotto sopra di esse dalle sostituzioni elementari del gruppo (alle quali eventualmente saranno da aggiungersi le sostituzioni sopra indicate) per conoscere la distribuzione in classi delle forme a determinante Δ. Dopo di ciò si calcoleranno facilmente le sostituzioni generatrici del sottogruppo riproduttivo di ogni forma ridotta.

Come primo esempio prendiamo il gruppo $\Gamma^{(i)}$ col poliedro fondamentale del § 12 avente, oltre il vertice all' infinito, i quattro vertici

$$V_1 \equiv (0,\ 0,\ 1), \quad V_2 \equiv \left(0,\ \tfrac{1}{2},\ \sqrt{\tfrac{3}{2}}\right), \quad V_3 \equiv \left(\tfrac{1}{2},\ 0,\ \sqrt{\tfrac{3}{2}}\right),$$
$$V_4 \equiv \left(\tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Una forma indefinita $[A,\ B,\ C]$ a determinante Δ è ridotta se la sua sfera indicatrice

$$\left(\xi + \frac{M}{A}\right)^2 + \left(\eta - \frac{N}{A}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{\Delta}{A^2}, \tag{1}$$

(ove si è posto, scindendo B nella sua parte réale ed immaginaria, $B = M + iN$, contiene *nel suo interno* almeno uno dei quattro vertici $V_1,\ V_2,\ V_3,\ V_4$.

Scriviamo le rispettive condizioni di riduzione che sono

$$(2)\quad \begin{cases} \text{pel vertice } V_1 \cdots M^2 + N^2 + A^2 < \Delta, \\ \quad\text{,,}\quad\ \text{,,}\quad V_2 \cdots 4M^2 + (2N - A)^2 + 3A^2 < 4\Delta, \\ \quad\text{,,}\quad\ \text{,,}\quad V_3 \cdots (2M + A)^2 + 4N^2 + 3A^2 < 4\Delta, \\ \quad\text{,,}\quad\ \text{,,}\quad V_4 \cdots (2M + A)^2 + (2N - A)^2 + 2A^2 < 4\Delta. \end{cases}$$

Osserviamo poi se la sfera (1) può contenere uno spigolo del poliedro. Se essa contenesse lo spigolo $V_1 V_2$ che è l'intersezione della sfera

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

col piano $\xi = 0$, la sua equazione dovrebbe avere la forma

$$(\xi + \lambda)^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1 + \lambda^2,$$

essendo λ una costante. Dal confronto colla (1) risulta

$$\lambda = \frac{M}{A}, \quad N = 0, \quad \Delta = A^2 + M^2,$$

e però Δ sarebbe scindibile nella somma di due quadrati, caso che escludiamo (§ 26). Le stesso accadrebbe se la sfera indicatrice passasse per lo spigolo $V_1 V_3$.

Un calcolo del tutto simile prova che se la sfera (1) passa per lo spigolo $V_2 V_4$ o per l'altro $V_3 V_4$ deve presentarsi uno dei due casi seguenti

(3) $\quad f = [A, iN, N - A]$ con $\Delta = A^2 + N^2 - AN,$

(4) $\quad f = [A, M, -(A+M)]$ con $\Delta = A^2 + M^2 + AM.$

Come si vede, ciò può accadere soltanto per un valore di Δ scindibile in fattori coniugati nel campo quadratico $\left(1, \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)$.

Le sostituzioni elementari di $\Gamma^{(i)}$ sono le tre seguenti

$$S_1 = \begin{pmatrix} i, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} i, & 1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \quad S_3 = \begin{pmatrix} 0, & -1 \\ i, & 0 \end{pmatrix},$$

alle quali sono da associarsi per le forme delle rispettive specie (3), (4) le sostituzioni

$$S_4 = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ -i, & i \end{pmatrix}, \quad S_5 = \begin{pmatrix} i, & 0 \\ i, & 1 \end{pmatrix}.$$

Ora, essendo $[A, B, C]$ una forma qualunque di Hermite, notiamo gli effetti prodotti dalle sostituzioni S_1, S_2, S_3 dati dalle formole seguenti

$$(5) \quad \begin{cases} S_1[A, B, C] = [A, iB, C], \\ S_2[A, B, C] = [A, i(A+B), C'], \\ S_3[A, B, C] = [C, -iB_0, A]. \end{cases}$$

Se prendiamo come esempio $\Delta = 3$, usando delle (2), troviamo che si danno qui 16 forme ridotte cioè le 8:

$$\begin{aligned} f_1 &= [1, 0, -3], & f_2 &= [1, 1, -2], \\ f_3 &= [1, -1, -2], & f_4 &= [1, i, -2], \\ f_5 &= [1, -i, -2], & f_6 &= [1, 1+i, -1], \\ f_7 &= [1, -1+i, -1], & f_8 &= [1, -1-i, -1], \end{aligned}$$

e le 8 contrarie che indicheremo rispettivamente con $f_1' f_2' f_3' f_4' f_5' f_6' f_7' f_8'$. Calcolando secondo le (5) l'effetto prodotto sulle forme ridotte da S_1, S_2, S_3 troviamo*).

*) Qui si rende necessaria una spiegazione delle notazioni usate. Nel primo modo di scrittura sopra ciascuna forma ridotta della linea inferiore collochiamo la forma trasformata surrogandola conuna lineetta quando questa non è ridotta. Il secondo modo di scrittura mostra la permutazione prodotta decomposta in cicli.

$$S_1 \equiv \begin{pmatrix} f_1 & f_4 & f_5 & f_3 & f_2 & f_7 & f_8 & - \\ f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 & f_6 & f_7 & f_8 \end{pmatrix} \equiv (f_1)\,(f_2\,f_4\,f_3\,f_5)\,(f_6\,f_7\,f_8 -),$$

$$S_2 \equiv \begin{pmatrix} f_4 & -f_1 & f_7 & f_6 & - & f_3 & f_2 \\ f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 & f_6 & f_7 & f_8 \end{pmatrix} \equiv (f_1\,f_4\,f_7\,f_3)\,(f_5\,f_6 -)\,(f_8\,f_2 -),$$

$$S_3 \equiv \begin{pmatrix} - & - & - & - & - & - & f_6' & -f_8' \\ f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 & f_6 & f_7 & f_8 \end{pmatrix} \equiv (f_6\,f_6')\,(f_8\,f_8').$$

La semplice ispezione di queste formole dimostra che le sostituzioni S_1, S_2, S_3 bastano già a congiungere fra loro transitivamente tutte le 16 forme ridotte, le quali formano adunque un unico periodo.

Vogliamo ora calcolare le sostituzioni fondamentali del sottogruppo Φ che trasforma in sè medesima la sfera indicatrice di f_1, che nel caso attuale sarà il gruppo ampliato per riflessione del sottogruppo riproduttivo di f_1. Alla sua determinazione, avendosi qui le due forme ridotte

$$f_5 = [1,\ -i,\ -2], \qquad f_2 = [1,\ 1,\ -2]$$

delle specie (3), (4), occorre inoltre segnare gli effetti delle rispettive sostituzioni $S_4\,S_5$, cioè

$$S_4 f_5 = f_2, \qquad S_5 f_2 = f_5.$$

Dopo di ciò costruendo un semplice schema per figurare la successione delle forme ridotte contigue, troviamo come sostituzioni generatrici di Φ le tre seguenti

$$\begin{pmatrix} i, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2, & -3 \\ -i, & 2i \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1+i, & -3i \\ 1, & -1-i \end{pmatrix},$$

delle quali le prime due trasformano la f_1 in sè medesima mentre la terza la trasforma nella contraria.

§ 30.

Esempio numerico pel gruppo $\Gamma^{(i\sqrt{5})}$.

Il gruppo $\Gamma^{(i\sqrt{5})}$ ha il poliedro fondamentale descritto al § 14 con nove vertici di cui uno all' infinito e gli altri 8 nei punti:

$$V_1 \equiv \left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{5}}{2},\ 0\right), \qquad V_2 \equiv \left(\frac{1}{2},\ \frac{3\sqrt{5}}{8},\ \frac{\sqrt{3}}{8}\right),$$

$$V_3 \equiv \left(\frac{2}{5},\ \frac{2}{\sqrt{5}},\ \frac{1}{5}\right), \qquad V_4 \equiv \left(\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$V_1' \equiv \left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{5}}{2},\ 0\right), \qquad V_2' \equiv \left(-\frac{1}{2},\ \frac{3\sqrt{5}}{8},\ \frac{\sqrt{3}}{8}\right),$$

$$V_3' \equiv \left(-\frac{2}{5},\ \frac{2}{\sqrt{5}},\ \frac{1}{5}\right), \qquad V_4' \equiv \left(-\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

fra i quali sono da notarsi i due vertici singolari sul piano $\xi\eta$

$$V_1 \equiv \frac{1+i\sqrt{5}}{2}, \qquad V_1' \equiv \frac{-1+i\sqrt{5}}{2}.$$

Perchè una forma indefinita $[A, B, C]$ sia ridotta è necessario e sufficiente che la sua sfera indicatrice contenga *nel suo interno* almeno uno degli otto vertici, giacchè nel caso attuale non può darsi che essa passi per uno dei vertici singolari. E infatti se ciò accadesse p. e. pel vertice $\frac{1+i\sqrt{5}}{2}$ dovremmo avere (ponendo al solito $B = B_1 + iB_2\sqrt{5}$):

$$(2B_1 + A)^2 + 5(2B_2 - A)^2 = 4\Delta,$$

il numero A dovrebbe essere manifestamente pari e dalla precedente equazione, divisa per 4, risulterebbe Δ decomponibile in due fattori coniugati in Ω, caso che escludiamo (§ 26).

Scrivendo ora che la sfera indicatrice della forma $[A, B, C]$, la cui equazione è:

$$\left(\xi + \frac{B_1}{A}\right)^2 + \left(\eta - \frac{B_2\sqrt{5}}{A}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{\Delta}{A^2},$$

contiene nel suo interno uno degli otto vertici troviamo le diseguaglianze:

$$\begin{cases} (2B_1+A)^2+5(2B_2-A)^2<4\Delta, \quad (2B_1-A)^2+5(2B_2-A)^2<4\Delta, \\ 16(2B_1+A)^2+5(8B_2-3A)^2+3A^2<64\Delta, \\ 16(2B_1-A)^2+5(8B_2-3A)^2+3A^2<64\Delta, \\ (5B_1+2A)^2+5(5B_2-2A)^2+A^2<25\Delta, \\ (5B_1-2A)^2+5(5B_2-2A)^2+A^2<25\Delta, \\ (2B_1+A)^2+5B_2^2+3A^2<4\Delta, \quad (2B_1-A)^2+5B_2^2+3A^2<4\Delta, \end{cases}$$

delle quali una almeno deve essere soddisfatta se la forma è ridotta. Prendiamo p. e. $\Delta = 2$: troviamo 16 forme ridotte, cioè le otto forme

$$\begin{array}{ll} f_1 = [1, 0, -2], & f_2 = [1, i\sqrt{5}, 3], \\ f_3 = [1, -1, -1], & f_4 = [1, 1, -1], \\ f_5 = [1, -1+i\sqrt{5}, 4], & f_6 = [1, 1+i\sqrt{5}, 4], \\ f_7 = [2, -1+i\sqrt{5}, 2], & f_8 = [2, 1+i\sqrt{5}, 2] \end{array}$$

insieme colle otto contrarie. Pel gruppo $\Gamma^{(i\sqrt{5})}$ abbiamo le sei sostituzioni generatrici (§ 14)

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & -1 \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \quad S_3 = \begin{pmatrix} -1, & i\sqrt{5} \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \quad S_4 = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix},$$

$$S_5 = \begin{pmatrix} i\sqrt{5}, & 2 \\ 2, & -i\sqrt{5} \end{pmatrix}, \qquad S_6 = \begin{pmatrix} -4+i\sqrt{5}, & 2i\sqrt{5} \\ 2i\sqrt{5}, & 4+i\sqrt{5} \end{pmatrix},$$

il cui effetto permutativo sulle forme ridotte sopra scritte è dato dalle formole seguenti:

$$S_1 \equiv (f_1)(f_2 f_4), \quad S_2 = (f_3 f_1 f_4 -)(f_5 f_2 f_6 -)(f_7 f_8 -),$$
$$S_3 \equiv (f_1 f_2)(f_3 f_6)(f_4 f_5)(f_7 f_8), \quad S_4 \equiv (f_3 f_3')(f_4 f_4')(f_7 f_8),$$
$$S_5 = (f_3 f_4)(f_5 f_6)(f_7 f_7')(f_8 f_8'),$$

mentre la S_6 trasforma ciascuna delle forme ridotte in una forma non ridotta.

Abbiamo qui adunque due periodi di forme ridotte, l'uno formato dalle 12 forme

$$f_1\, f_2\, f_3\, f_4\, f_5\, f_6\, f_1'\, f_2'\, f_3'\, f_4'\, f_5'\, f_6'$$

e l'altro dalle 4 forme

$$f_7\, f_8\, f_7'\, f_8';$$

il numero delle classi delle forme indefinite a determinante $\Delta = 2$ nel campo $(1, i\sqrt{5})$ è quindi eguale a 2.

Parte terza.

Involuzione ed ortogonalità delle forme di Dirichlet e di Hermite.

§ 31.

Forme di Dirichlet in involuzione colla forma fondamentale F od ortogonali a questa.

Consideriamo un determinato campo quadratico $(1, i\sqrt{D})$, o $\left(1, \frac{1+i\sqrt{D}}{2}\right)$ ed in esso una forma di Hermite indefinita:

$$F = [A, B, C], \quad \Delta = BB_0 - AC > 0$$

che intenderemo fissata una volta per tutte e chiameremo la *forma fondamentale*. Le ricerche seguenti si riferiranno a quel sottogruppo Φ di $\Gamma^{(\omega)}$ che trasforma in sè medesima la sfera indicatrice di F, sottogruppo che coincide col sottogruppo riproduttivo della forma F, ovvero lo contiene come sottogruppo eccezionale d'indice 2 (§ 28). Esse avranno per iscopo di costruire rispetto ad una certa classe di forme quadratiche, sulle quali si opereranno le sostituzioni di Φ, una teoria intieramente analoga a quella delle forme binarie quadratiche ordinarie rispetto al gruppo modulare. Se il circolo indicatore di una forma di Dirichlet φ giace sulla sfera indicatrice Σ di F, diremo che *φ è in involusione con F.* Quando accada invece che il circolo di φ sia ortogonale alla detta sfera, diremo che *φ è ortogonale a F.*

È chiaro che operando sopra una forma φ in involuzione con F od ortogonale a F una sostituzione qualunque di Φ, otterremo una forma trasformata φ' egualmente in involuzione con F od ortogonale a F. Considerando adunque la totalità delle forme φ di un dato determinante in involuzione con F od ortogonali a F, diremo *equivalenti rispetto a* Φ due tali forme φ, φ' quando esista in Φ una sostituzione che trasformi φ in φ'. Potremo quindi distribuire le forme φ di egual determinante in classi e facilmente dimostreremo che: *Il numero delle classi delle forme φ di egual determinante in involuzione colla forma fondamentale F, o a questa ortogonali, è sempre finito.*

Immaginiamo per ciò costruito sulla sfera Σ indicatrice di F il poligono fondamentale Π del gruppo Φ (§ 28). Se si tratta di una forma φ in involuzione con F diremo che φ è *ridotta* quando il suo circolo indicatore, che giace sopra Σ, attraversi Π; una forma φ ortogonale a F sarà invece *ridotta* se il punto ove il circolo indicatore di φ incontra (ortogonalmente) Σ giace nel poligono Π. Essendo Π sulla sfera Σ il poligono fondamentale del gruppo Φ, ogni punto di questa sfera fuori dell' equatore può trasportarsi con una sostituzione di Φ entro Π, onde segue subito il teorema: *Ogni forma φ è equivalente ad una forma ridotta.* In secondo luogo sussiste il teorema: *Il numero delle forme ridotte φ di egual determinante è finito.* Per dimostrarlo osserviamo che il poligono Π attraversa un certo numero di poliedri

$$P_1 \, P_2 \ldots P_m$$

della rete corrispondente algruppo $\Gamma^{(\infty)}$; questi poliedri nascono dal fondamentale P_1 per mezzo di determinate sostituzioni di $\Gamma^{(\infty)}$ che indicheremo rispettivamente con $S_1 = 1$, S_2, $S_3 \ldots S_m$. Se φ e una forma ridotta, sia essa in involuzione con F od ortogonale a F, il suo circolo indicatore attraversa uno dei poliedri $P_1, P_2 \ldots P_m$, sia P_i; allora la sostituzione S_i cangierà la forma φ in una forma *assolutamente ridotta*, il cui circolo indicatore cioè attraversa il poliedro fondamentale. Per ottenere adunque le forme ridotte richieste basterà costruire tutte le forme assolutamente ridotte dell' assegnato determinante (§ 22) e a ciascuna di essa applicare le sostituzioni $S_2^{-1}, S_3^{-1} \ldots S_m^{-1}$. Quelle fra le forme ottenute che hanno circoli indicatori giacenti sopra Σ od ortogonali a Σ sono le forme ridotte richieste.

Dimostrati così i due teoremi fondamentali, è chiaro che per le nostre forme φ, considerate rispetto al gruppo Φ, siamo ora in grado di risolvere, coi noti metodi, i corrispondenti problemi della teoria dell' equivalenza e in particolare di determinare entro Φ il sottogruppo riproduttivo di una forma φ.

Come esempio consideriamo il gruppo $\Gamma^{(i)}$ e prendiamo per forma fondamentale

$$F = ixy_0 - ix_0y$$

la cui sfera indicatrice si riduce al piano $\eta = 0$ (Cf. § 28). Se ci limitiamo a considerare le sostituzioni del gruppo riproduttivo di F troviamo tutte e sole le sostituzioni $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ a coefficienti reali e a determinante $+1$. Una forma φ in involuzione con F deve avere le sue radici reali e però, sopprimendo dai coefficienti un eventuale fattore comune, essa resterà a coefficienti reali con determinante positivo. Per una forma φ ortogonale alla F le due radici debbono essere coniugate immaginarie onde nuovamente Φ si può ridurre a coefficienti reali con determinante negativo. Qui adunque otteniamo, come caso particolare, la teoria delle ordinarie forme quadratiche considerate rispetto al gruppo modulare $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$.

§ 32.

Condizioni d'involuzione.

Ricerchiamo ora le effettive relazioni cui debbono soddisfare i coefficienti di una forma di Dirichlet

$$\varphi = (a, b, c)$$

perchè essa stia in involuzione colla forma fondamentale

$$F = [A, B, C].$$

Per brevità ci limiteremo al caso del campo quadratico $(1, i\sqrt{D})$ e porremo quindi

$$a = a_1 + ia_2\sqrt{D}, \quad b = b_1 + ib_2\sqrt{D}, \quad B = B_1 + iB_2\sqrt{D} \tag{1}$$

ove $a_1, a_2, b_1, b_2, B_1, B_2$ sono interi razionali. Indicando con d il determinante $b^2 - ac$ di φ, poniamo altresì

$$d = d_1 + id_2\sqrt{D} \tag{2}$$

e inoltre

$$d = \varrho e^{i\psi} \tag{3}$$

ove

$$\varrho = \sqrt{d_1^2 + Dd_2^2}, \quad \cos\psi = \frac{d_1}{\varrho}, \quad \operatorname{sen}\psi = \frac{d_2\sqrt{D}}{\varrho}. \tag{3*}$$

Per le radici

$$z_1 = \xi_1 + i\eta_1, \quad z_2 = \xi_2 + i\eta_2$$

della forma φ troviamo

$$\left\{\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{\left(\sqrt{\varrho}\cos\frac{\psi}{2} - b_1\right)a_1 + \left(\sqrt{\varrho}\operatorname{sen}\frac{\psi}{2} - b_2\sqrt{D}\right)a_2\sqrt{D}}{a_1^2 + Da_2^2}, \\ \eta_1 &= \frac{\left(\sqrt{\varrho}\operatorname{sen}\frac{\psi}{2} - b_2\sqrt{D}\right)a_1 - \left(\sqrt{\varrho}\cos\frac{\psi}{2} - b_1\right)a_2\sqrt{D}}{a_1^2 + Da_2^2} \end{aligned}\right. \tag{4}$$

i valori di $\xi_2 \eta_2$ deducendosi da questi col cangiare $+\sqrt{\varrho}$ in $-\sqrt{\varrho}$. Perchè la forma φ sia in involuzione con F è necessario e sufficiente che i due punti $(\xi_1 \eta_1)$ $(\xi_2 \eta_2)$ siano situati sull' equatore della sfera indicatrice di F, cioè sul circolo

$$(5) \qquad A(\xi^2+\eta^2)+2B_1\xi-2B_2\sqrt{D}\,\eta+C=0.$$

Sostituendo in questa i valori di $\xi_1 \eta_1$, indi quelli di $\xi_2 \eta_2$, troviamo le due equazioni

$$(6) \quad \begin{cases} A(b_1^2+Db_2^2+\varrho)-2B_1(a_1b_1+Da_2b_2)+2DB_2(a_1b_2-a_2b_1) \\ \qquad\qquad +C(a_1^2+Da_2^2)=0, \\ (a_1B_1+Da_2B_2-Ab_1)\cos\frac{\psi}{2}+\sqrt{D}\,(a_2B_1-a_1B_2-Ab_2)\,\mathrm{sen}\,\frac{\psi}{2}=0, \end{cases}$$

la prima delle quali dimostra che ϱ deve essere un numero razionale e però, come radice quadrata dell' intero $d_1^2+Dd_2^2$, un numero intero. Come primo risultato abbiamo dunque: *Le forme φ di Dirichlet in involuzione con una forma indefinita di Hermite hanno un determinante la cui norma è un quadrato perfetto.*

Ora se il determinante d non ha un valore *reale negativo* non può essere $\cos\frac{\psi}{2}=0$ e alla 2ª delle (6) possiamo sostituire quella che se ne ottiene moltiplicandola per $2\cos\frac{\psi}{2}$, il che dà per le richieste condizioni d'involuzione:

$$(7) \quad \begin{cases} A(b_1^2+Db_2^2+\varrho)-2B_1(a_1b_1+Da_2b_2)+2DB_2(a_1b_2+a_2b_1) \\ \qquad\qquad +C(a_1^2+Da_2^2)=0, \\ (a_1B_1+Da_2B_2-Ab_1)(\varrho+d_1)+(a_2B_1-a_1B_2-Ab_2)Dd_2=0. \end{cases}$$

Nel caso escluso $d=d_1<0$ lé condizioni d'involuzione si scrivono evidentemente

$$(7^*) \quad \begin{cases} A(b_1^2+Db_2^2-d_1)-2B_1(a_1b_1+Da_2b_2)+2DB_2(a_1b_2-a_2b_1) \\ \qquad\qquad +C(a_1^2+Da_2^2)=0, \\ a_2B_1-a_1B_2-Ab_2=0. \end{cases}$$

Si osserverà che queste equazioni sono lineari rispetto ai coefficienti della forma fondamentale, onde segue subito che ogni forma di Dirichlet, *il cui determinante abbia per norma un quadrato perfetto,* è in involuzione con infinite forme di Hermite. Le forme di Dirichlet, che soddisfano a questa condizione, possono anche caratterizzarsi dicendo che: *Il loro gruppo riproduttivo contiene un sottogruppo di sostituzioni iperboliche.*

E infatti se la forma φ è in involuzione colla F, nel gruppo Φ riproduttivo di F vi ha un sottogruppo ciclico di sostituzioni iperboliche, che riproduce altresì la forma φ. Reciprocamente se la forma di Dirichlet φ ammette nel suo sottogruppo riproduttivo una sostituzione iperbolica $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$, che si può supporre a determinante $+1$, nella quale quindi $\alpha + \delta$ sarà reale, potremo sempre determinare una forma di Hermite indefinita F invariabile per la sostituzione $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$. La F sarà in involuzione con φ e il determinante di quest' ultima avrà conseguentemente per norma un quadrato perfetto.

Rileviamo particolarmente il caso in cui la forma fondamentale F sia la forma principale

$$F = [1, 0, -\Delta]$$

a determinante positivo Δ e il determinante d della φ sia reale. Distinguendo i due casi di d positivo o negativo le (7), (7*) danno per le condizioni d'involuzione

$$d = d_1 > 0 \begin{cases} b b_0 + d_1 = \Delta a a_0 \\ \quad b_1 = 0 \end{cases}, \qquad d = d_1 < 0 \begin{cases} b b_0 - d_1 = \Delta a a_0 \\ \quad b_2 = 0 \end{cases}.$$

Dunque: *Le forme φ di Dirichlet a determinante reale in involusione colla forma principale* $[1, 0, -\Delta]$ *hanno l'una o l'altra delle espressioni seguenti, secondo che il loro determinante è positivo o negativo:*

$$\text{(A)} \qquad \varphi = \left(a_1 + i a_2 \sqrt{D}, \quad i b_2 \sqrt{D}, \quad -\Delta(a_1 - i a_2 \sqrt{D})\right),$$

$$\text{(B)} \qquad \varphi = \left(a_1 + i a_2 \sqrt{D}, \qquad b_1, \qquad \Delta(a_1 - i a_2 \sqrt{D})\right).$$

Vediamo di qui che la ricerca di tutte le forme φ di asseguato determinante reale $\pm m$ (m positivo) in involuzione con $[1, 0, -\Delta]$ equivale alla ricerca di tutte le possibili rappresentazioni del numero m per la forma reale ternaria

$$\Delta(X^2 + D Y^2) - D Z^2$$

ovvero per l'altra

$$\Delta(X^2 + D Y^2) - Z^2,$$

problema che sappiamo dunque completamente risolvere. Facilmente si potrebbe dimostrare che alla teoria sopra esposta si riconduce altresì l'altro problema del campo ternario: *Determinare il gruppo delle sostitusioni lineari a coefficienti interi riproduttivo della forme ternarie*

$$\Delta(X^2 + D Y^2) - D Z^2, \quad \Delta(X^2 + D Y^2) - Z^2,$$

ove D, Δ sono interi positivi arbitrarii. Ma di questa come di altre questioni che si collegano alle attuali ricerche non tratteremo in questo luogo.

§ 33.

Condizioni d'ortogonalità.

Affinchè la forma $\varphi = (a, b, c)$ sia ortogonale alla forma fondamentale $F = [A, B, C]$ è necessario e sufficiente che i due punti $(\xi_1 \eta_1)$, $(\xi_2 \eta_2)$ indici delle radici di φ si trovino in linea retta col centro del circolo (5) (§ 32) e siano coniugati armonici rispetto al circolo stesso. Ora dalle formole del § precedente, per l'equazione della retta che unisce questi due punti troviamo

$$\left(a_1 \operatorname{sen} \frac{\psi}{2} - a_2 \sqrt{D} \cos \frac{\psi}{2}\right) \xi - \left(a_1 \cos \frac{\psi}{2} + a_2 \sqrt{D} \operatorname{sen} \frac{\psi}{2}\right) \eta$$
$$+ b_1 \operatorname{sen} \frac{\psi}{2} - b_2 \sqrt{D} \cos \frac{\psi}{2} = 0$$

ed il centro del circolo avendo le coordinate $-\frac{B_1}{A}, \frac{B_2\sqrt{D}}{A}$, la prima condizione ci dà

$$\text{(a)} \quad \sqrt{D}(a_2 B_1 - a_1 B_2 - A b_2) \cos \frac{\psi}{2} - (a_1 B_1 + D a_2 B_2 - A b_1) \operatorname{sen} \frac{\psi}{2} = 0.$$

L'altra che i punti $(\xi_1 \eta_1)$, $(\xi_2 \eta_2)$ siano coniugati rispetto al circolo (5) si traduce nell' equazione

$$A(\xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2) + B_1(\xi_1 + \xi_2) - B_2 \sqrt{D}(\eta_1 + \eta_2) + C = 0,$$

la quale, sostituendovi i valori effettivi di $\xi_1 \eta_1$, $\xi_2 \eta_2$, diventa

$$\text{(b)} \quad A(b_1^2 + D b_2^2 - \varrho) - 2B_1(a_1 b_1 + D a_2 b_2) + 2DB_2(a_1 b_2 - a_2 b_1)$$
$$+ C(a_1^2 + D a_2^2) = 0.$$

Questa ci dimostra che *anche per le forme φ ortogonali ad una forma indefinita di Hermite la norma del determinante deve essere un quadrato perfetto.*

Procedendo colla equazione (a) come nel § precedente diamo alle condizioni d'ortogonalità la forma:

$$\begin{cases} A(b_1^2 + D b_2^2 - \varrho) - 2B_1(a_1 b_1 + D a_2 b_2) + 2DB_2(a_1 b_2 - a_2 b_1) \\ \qquad\qquad + C(a_1^2 + D a_2^2) = 0, \\ (a_1 B_2 - a_2 B_1 + A b_2)(\varrho + d_1) + (a_1 B_1 + D a_2 B_2 - A b_1)\, d_2 = 0 \end{cases}$$

che valgono nel caso generale, mentre se il determinante d della forma φ è reale negativo dobbiamo sostituirvi le altre

$$\begin{cases} A(b_1^2 + D b_2^2 + d_1) - 2B_1(a_1 b_1 + D a_2 b_2) + 2DB_2(a_1 b_2 - a_2 b_1) \\ \qquad\qquad + C(a_1^2 + D a_2^2) = 0, \\ a_1 B_1 + D a_2 B_2 - A b_1 = 0. \end{cases}$$

Rileveremo anche qui il caso particolare che la forma fondamentale F sia la principale $F = [1, 0, -\Delta)$ e il determinante d assegnato delle forme φ sia reale. Troviamo subito per queste forme le espressioni stesse (A), (B) del § precedente colla differenza che nel caso attuale le forme del tipo (A) hanno determinante negativo e quelle del tipo (B) determinante positivo.

§ 34.

Riduzione a forma reale.

Il gruppo Φ rispetto alle cui sostituzioni abbiamo sopra costruita la teoria dell' equivalenza delle forme φ è un gruppo automorfo che lascia invariata la sfera indicatrice della forma fondamentale F ed il suo equatore; esso è quindi riducibile a forma reale. Ora, limitandoci per brevità al caso di $F=[1, 0, -\Delta]$, vogliamo appunto effettuare la riduzione del gruppo Φ e contemporaneamente delle forme φ a forma reale; in tal modo si renderà manifesta la relazione delle presenti ricerche con quelle sviluppate da Fricke nell' ultimo lavoro citato (Annalen Bd. 39). Nelle sostituzioni $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \gamma\end{pmatrix}$ scindiamo ciascun coefficiente nella sua parte reale ed immaginaria, ponendo:

$$\alpha=\alpha_1+i\alpha_2\sqrt{D},\quad \beta=\beta_1+i\beta_2\sqrt{D},\quad \gamma=\gamma_1+i\gamma_2\sqrt{D},$$
$$\delta=\delta_1+i\delta_2\sqrt{D}.$$

Troviamo così nel gruppo Φ quattro specie di sostituzioni cioè le due specie

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{I)}\begin{pmatrix}\alpha_1+i\alpha_2\sqrt{D}, & \Delta(\gamma_1-i\gamma_2\sqrt{D})\\ \gamma_1+i\gamma_2\sqrt{D}, & \alpha_1-i\alpha_2\sqrt{D}\end{pmatrix}\\[2ex] \mathrm{II)}\begin{pmatrix}\alpha_1+i\alpha_2\sqrt{D}, & -\Delta(\gamma_1-i\gamma_2\sqrt{D})\\ \gamma_1+i\gamma_2\sqrt{D}, & -(\alpha_1-i\alpha_2\sqrt{D})\end{pmatrix}\end{array}\right\}\ \alpha_1^2+D\alpha_2^2-\Delta(\gamma_1^2+D\gamma_2^2)=1$$

che costituiscono il gruppo riproduttivo di $F=[1, 0, -\Delta]$ ed altre due specie della medesima forma, ove però si ha

$$\alpha_1^2+D\alpha_2^2-\Delta(\gamma_1^2+D\gamma_2^2)=-1,$$

le quali trasformano F nella sua contraria.

Le forme φ sulle quali eseguiamo le sostituzioni di Φ sono delle due specie (§§ 32, 33)

$$\text{(A)}\qquad \varphi=(a_1+ia_2\sqrt{D})x^2+2ib_2\sqrt{D}\,xy-\Delta(a_1-ia_2\sqrt{D})\,y^2,$$
$$\text{(B)}\qquad \varphi=(a_1+ia_2\sqrt{D})x^2+2b_1xy+\Delta(a_1-ia_2\sqrt{D})\,y^2.$$

Ora se eseguiamo sulle variabili x, y la sostituzione

$$\begin{cases} x = \sqrt{\Delta}\, X - i\sqrt{\Delta}\, Y, \\ y = -X - i\, Y \end{cases}$$

e chiamiamo φ' le forme trasformate, divise per $-2i\sqrt{\Delta}$ nel caso (A) e per $-2\sqrt{\Delta}$ nel caso (B), troviamo rispettivamente:

$$(A^*)\quad \varphi' = \sqrt{D}\,(b_2 - a_2\sqrt{\Delta})\, X^2 + 2a_1\sqrt{\Delta}\, XY + \sqrt{D}(b_2 + a_2\sqrt{\Delta})\, Y^2,$$

$$(B^*)\quad \varphi' = (b_1 - a_1\sqrt{\Delta})\, X^2 - 2a_2\sqrt{D}\sqrt{\Delta}\, XY + (b_1 + a_1\sqrt{\Delta})\, Y^2,$$

dove attualmente il segno del determinante positivo o negativo distingue le forme φ' derivate dalle forme φ in involuzione con F da quelle derivate da forme ortogonali a F. Si osserverà che i coefficienti delle φ' sono reali e contengono le sole irrazionalità $\sqrt{D}$, $\sqrt{\Delta}$. Corrispondentemente il gruppo Φ si trasforma nel gruppo Φ composto dalle sostituzioni reali della forma seguente a determinante $+1$:

$$(I^*)\qquad \begin{pmatrix} \alpha_1 - \gamma_1\sqrt{\Delta}, & \sqrt{D}\,(\alpha_2 - \gamma_2\sqrt{\Delta}) \\ -\sqrt{D}\,(\alpha_2 + \gamma_2\sqrt{\Delta}), & \alpha_1 + \gamma_1\sqrt{\Delta} \end{pmatrix},$$

$$(II^*)\qquad \begin{pmatrix} \sqrt{D}\,(\alpha_2 - \gamma_2\sqrt{\Delta}), & -(\alpha_1 - \gamma_1\sqrt{\Delta}) \\ \alpha_1 + \gamma_1\sqrt{\Delta}, & \sqrt{D}\,(\alpha_2 + \gamma_2\sqrt{\Delta}) \end{pmatrix},$$

e dalle sostituzioni della medesima forma il cui determinante però è eguale a -1.

§ 35.

Forme di Hermite in involuzione colla forma fondamentale od ortogonali a questa.

Diciamo che una forma *definita* di Hermite $F' = [A', B', C')$ è in involuzione colla forma fondamentale indefinita $F = [A, B, C]$ se il punto indice di F' (§ 24) giace sulla sfera indicatrice di F. La condizione d'involuzione si trova subito espressa dall' equazione

$$(1)\qquad AC' + A'C - BB_0' - B_0B' = 0,$$

ove il 1^0 membro, come facilmente si dimostra è un *invariante simultaneo* delle due forme.

Diciamo poi che una forma *indefinita* $F' = [A', B', C']$ è ortogonale a $F = [A, B, C]$ se le due sfere indicatrici di F, F' sono ortogonali. Tale condizione d'ortogonalità si trova ancora espressa dalla (1). Ora se a queste forme F' applichiamo le sostituzioni del solito gruppo Φ, esse si trasformano evidentemente in forme della medesima specie. Dopo di ciò è chiaro il significato da darsi all' *equivalensa rispetto al gruppo* Φ di due tali forme F' e considerazioni affato analoghe a quelle del § 31 serviranno a definire le forme ridotte delle due specie e a dimostrare i teoremi fondamentali della teoria dell' equivalenza.

Ma possiamo riportare immediatamente questa teoria a quella dei §§ precedenti relativa a forme φ con determinante reale mediante le osservazioni seguenti:

1°. *Se le sfere indicatrici di due forme indefinite di Hermite si tagliano, il loro circolo d'intersezione è il circolo indicatore di una forma φ di Dirichlet a determinante reale, in involuzione con ambedue.*

Per le equazioni dei due circoli massimi di queste sfere sul piano $\xi\eta$ abbiamo infatti, se $[A, B, C]$, $[A', B', C']$ sono le due forme:

$$A z z_0 + B z + B_0 z_0 + C = 0,$$
$$A' z z_0 + B' z + B_0' z_0 + C' = 0$$

e i valori di z ai due punti d'intersezione sono quindi le radici dell' equazione di 2° grado

$$\begin{vmatrix} Az + B_0, & Bz + C \\ A'z + B_0', & B'z + C' \end{vmatrix} = 0,$$

ossia le radici della forma di Dirichlet

$$\varphi = \begin{vmatrix} Ax + B_0 y, & Bx + Cy \\ A'x + B_0' y, & B'x + C'y \end{vmatrix}$$

che si può scrivere sotto la forma

$$\varphi = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_0} & \frac{\partial F}{\partial y_0} \\ \frac{\partial F'}{\partial x_0} & \frac{\partial F'}{\partial y_0} \end{vmatrix}.$$

La forma φ è un *covariante simultaneo* delle forme F, F' e il suo determinante è reale poichè si ha identicamente

$$(AC' - A'C + B_0 B' - B B_0')^2 - 4(AB' - A'B)(B_0 C' - B_0' C) =$$
$$= (AC' - A'C + B B_0' - B_0 B')^2 - 4(A B_0' - A' B_0)(BC' - B'C).$$

Il circolo indicatore di φ è appunto il circolo d'intersezione delle due sfere indicatrici di F, F'.

Supponiamo ora che F' sia una forma definita in involuzione con F e dimostriamo:

2°. *La forma φ covariante simultaneo di F, F' ha un circolo indicatore che taglia la sfera indicatrice di F ortogonalmente nel punto indice di F'.*

La proprietà da dimostrarsi essendo invariantiva, la verifichiamo nel modo più semplice sottoponendo F, F', φ ad una trasformazione

$\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ a coefficienti complessi e a determinante $+1$ che cangi la sfera indicatrice di F nel piano $\eta = 0$*). Per le forme trasformate avremo dunque $A = C = 0$, $B = -B_0$, cioè B sarà puramente immaginario e la condizione d'involuzione (1) darà $B' = B_0'$, cioè il coefficiente medio di F' diventa reale. Dopo ciò troviamo per la forma φ

$$\varphi = -B(A'x^2 + 2B'xy + C'y^2)$$

e però, essendo A', B', C' reali e $B'^2 - A'C'$ essendo negativo come determinante della F', le due radici di φ sono coniugate immaginarie, quindi il circolo indicatore di φ è ortogonale al piano $\eta = 0$. Inoltre per le coordinate del punto d'incontro del circolo con questo piano troviamo

$$\xi = -\frac{B'}{A'}, \quad \eta = 0, \quad \zeta = \frac{\sqrt{A'C' - B'^2}}{A'},$$

formole che definiscono appunto l'indice di F'.

Notiamo anche qui il caso in cui si assuma la forma principale $F = [1, 0, -\Delta]$ a forma fondamentale, ove la condizione (1) d'involuzione o di ortogonalità prende semplicemente la forma

$$C' = \Delta A',$$

e indicando con Δ' il determinante di F' si ha

$$B'B_0' - \Delta A'^2 = \Delta'.$$

Nel caso del campo quadratico $(1, i\sqrt{D})$ ponendo adunque

$$B' = X + iY\sqrt{D}, \quad A' = Z$$

vediamo che la ricerca delle forme F' di assegnato determinante Δ' equivale a quella della rappresentazione del numero Δ' per mezzo della forma ternaria

$$X^2 + DY^2 - \Delta Z^2.$$

Alla presente teoria si può altresì ricondurre il problema di costruire il gruppo riproduttivo di questa forma ternaria.

---

*) È appena necessario avvertire che i coefficienti della sostituzione, come i coefficienti delle forme trasformate, non saranno più interi.

Le rappresentazioni reali delle forme complesse e gli enti iperalgebrici.

Nota di

Corrado Segre a Torino.

Indem die Mathematik darnach strebt, Ausnahmen von Regeln zu beseitigen und verschiedene Sätze aus einem Gesichtspunkte aufzufassen, wird sie häufig genöthigt, Begriffe zu erweitern oder neue Begriffe aufzustellen, was beinahe immer einen Fortschritt in der Wissenschaft bezeichnet. *)

Con queste parole si apre l'opera profonda in cui lo Staudt ha dato alla scienza la teoria sintetica degli elementi imaginari. Esse caratterizzano un importante indirizzo della Matematica: quell' indirizzo appunto da cui son derivate in particolare le estensioni dei numeri e degli elementi geometrici *reali* in numeri ed elementi *complessi*.

Lo stesso indirizzo, lo scopo di generalizzare sempre più, e di toglier via le eccezioni, distinzioni di casi, ecc., conduce a nuove estensioni. Anzitutto, — introdotti gli elementi complessi, — gli enti **) definiti da legami *analitici*, *funzionali* fra le coordinate degli

---

*) Staudt, *Beiträge zur Geometrie der Lage*, Vorwort.

**) Gli *enti* di cui parliamo e parleremo possono esser composti in diversi modi: cioè *varietà* di *elementi* — punti, rette, piani, ecc., — (o dei *numeri* che rappresentano analiticamente questi elementi); ed anche ad esempio varietà di *coppie di elementi*, cioè *corrispondenze:* usando questo vocabolo (come c'accadrà pure in seguito) nel senso più largo, abbracciante i connessi, ecc., sicchè ad un elemento ne possano anche corrispondere infiniti.

Quando di un elemento od ente qualsiasi non si dica altro, s'intenderà sempre che è *complesso*, cioè *reale od imaginario.* L'ente *coniugato* di un dato è quello che ha per elementi i conjugati degli elementi di questo: così la *corrispondenza coniugata* di una data è quella in cui si corrispondono due elementi quando sono i coniugati di due elementi omologhi della data, ecc. L'ente si dirà *reale* oppure *imaginario* secondo che coincide o no col coniugato. Non esigiamo dunque per chiamar *reale* un ente che esso si componga solo di elementi reali, e nemmeno che ne contenga; ma invece che per ogni suo elemento esso contenga anche il coniugato.

elementi (come le curve e superficie, i complessi e sistemi di rette, ecc.) si posson generalizzare in quelli definiti da analoghi legami *fra le componenti reali* (parti reali e coefficienti di i) di quelle coordinate — o, ciò che è lo stesso, fra le coordinate stesse e le loro coniugate. In particolare quando i detti legami siano *algebrici* si vengono a generalizzare gli *enti algebrici* in quelli che io chiamo *enti iperalgebrici*. D'altra parte, come per lo studio degli enti algebrici fu necessaria l'introduzione degli elementi complessi, così per quello più vasto degli enti iperalgebrici si rivela necessaria, od almeno utilissima, una nuova estensione di questi elementi in quelli che dico *elementi bicomplessi*.

Lo studio degli enti iperalgebrici si può fare *direttamente* con procedimenti analoghi a quelli usati per gli enti algebrici. Così, a quel modo che le più semplici corrispondenze algebriche, *le projettività*, servono per la generazione e lo studio successivo delle varietà algebriche di 2°, 3°, ... ordine, ecc., così le più semplici corrispondenze iperalgebriche, *le antiprojettività*, servono a generare ed a studiare successivamente i più semplici enti iperalgebrici. Di questo procedimento, per così dire *elementare*, ho dato un Saggio in un lavoro che, sotto il titolo «*Un nuovo campo di ricerche geometriche*», ho publicato (e non ancora completamente) negli ultimi vol[i] (XXV e XXVI) degli Atti dell' Accademia di Torino.*)

Un' altra via per lo studio degli enti iperalgebrici parte dalle *rappresentazioni* di questi con enti *algebrici reali*, le quali si hanno mediante rappresentazioni reali degli elementi complessi delle forme fondamentali di 1ª, 2ª, ... specie. È questa la via che sarà seguita nel presente lavoro: essa ci farà ritrovare alcuni dei risultati di quel Saggio**), ma ci condurrà pure in modo semplice ad alcune proposizioni molto più generali che quelle ivi contenute. Scegliendo fra le rappresentazioni reali delle forme fondamentali quelle che meglio soddisfano ai requisiti desiderabili in tali rappresentazioni (ad esempio quelle, perfettamente univoche, delle forme semplici sulla sfera reale, delle forme fondamentali doppie su una certa varietà reale a 4 dimensioni e del 6° ordine di S_8 luogo di due schiere di piani imaginari, ecc.), si hanno dalla natura delle varietà imagini degli utili suggerimenti di

*) Le mie ricerche ivi esposte e quelle (già ivi annunziate) che si troveranno in questa Nota hanno alcuni punti di contatto colla Dissertazione del sig. Juel: *Bidrag til den imaginære Linies og den imaginære Plans Geometri* (Kjøbenhavn 1885), sebbene fossero fatte indipendentemente da essa. Rammaricando di non esser in grado di farne citazioni più precise, rimando senz' altro il lettore a quella Dissertazione.

**) I concetti di quel lavoro (che citerò sempre col nome di *Saggio*) che sono più essenziali per lo scopo di questo, saranno quì riportati, sicchè non sarà necessario di conoscere quello per intendere questo. Però nel *Saggio* si trovano anche molti sviluppi e dimostrazioni che qui non starò a ripetere.

proprietà e di generalizzazioni. È così che ci si presenteranno spontanei i suddetti *elementi bicomplessi* (i quali saranno poi illuminati analiticamente da considerazioni sui *numeri bicomplessi* che rientrano nelle recenti ricerche dei sig[i] Weierstrass, Dedekind, ecc. sui numeri a più unità); e che poi saremo condotti ad estendere indefinitamente tanto questa nozione quanto quella degli enti iperalgebrici.

Non è forse inopportuno di rilevare che gli argomenti accennati in questa Nota non offrono solo interessi, sì geometrici che analitici e specialmente algebrici, per se stessi, ma possono fornire molteplici aiuti a parecchie teorie matematiche. Dovunque compajono variabili complesse accanto a cui si debbano considerare le coniugate, — o, ciò che fa lo stesso, dovunque accade di dover considerare, nelle variabili complesse o nelle loro funzioni, staccatamente le due componenti reali: quindi in generale nella teoria delle funzioni di una o più variabili complesse (ad esempio di quelle *automorfe*); nelle questioni, strettamente connesse a quella teoria, delle rappresentazioni conformi, delle superficie minime, ecc.*); in certe moderne ricerche sulla teoria dei numeri (interi complessi) e di particolari gruppi di sostituzioni**); ecc. ecc.; sempre gli enti generali introdotti in questo scritto possono giovare a generalizzare e semplificare i risultati e ad ottenerne dei nuovi.

Torino, Settembre 1891.

Indice.

---

*) Riemann, Weierstrass, Schwarz, ecc.

**) Come le ricerche sulle *forme a variabili coniugate* iniziate dal sig. Hermite e proseguite in questi ultimi tempi dai sig[i] Picard, Bianchi, Fricke, ecc.

Le rappresentazioni reali delle forme semplici.*)

1. Un concetto generale, che può servire ad ottenere rappresentazioni reali degli elementi imaginari di una forma qualunque, consiste nel ricorrere agli elementi reali che sono *incidenti* ad essi (o nel considerare le coppie reali costituite da quegli elementi imaginari presi coi loro coniugati). — Questo concetto conduce anzitutto alle tre principali fra le rappresentazioni reali note delle forme semplici.

Invero a rappresentante di queste forme si assuma in primo luogo un fascio di rette, il quale giaccia in un piano σ reale, ma abbia il centro C imaginario (ad esempio in un punto ciclico di σ); e come imagine di ogni elemento del fascio si prenda il suo punto reale (intersezione con l'elemento coniugato del fascio C', coniugato al fascio C). La rappresentazione che così si avrà mediante i punti reali di σ coincide in sostanza**) con quella di Argand e di Gauss della variabile complessa $x+iy$, — l'equivalente analitico dell' elemento complesso di una forma geometrica semplice — mediante i punti reali (x, y) del piano σ. Il numero $x+iy$ si può in fatti riguardare come il parametro, o coordinata, della retta che passa pel punto (x, y) *entro al fascio* avente per centro uno determinato, C, dei due punti ciclici di σ: cioè della retta, che in coordinate variabili X, Y di punti ha per equazione $X+iY=x+iy$. — Questa rappresentazione presenta, com' è noto, l'inconveniente di dar luogo ad un *elemento eccezionale:* il valore ∞ della variabile complessa, ossia la retta reale del fascio C (la retta CC', — la retta all' infinito di σ), la quale ha per imagini gl' infiniti suoi punti reali.

Seguendo la legge di dualità piana, a questa rappresentazione corrisponderebbe quella in cui i punti di una retta *imaginaria di* 1ª *specie* si rappresentano con le rette reali che li contengono, rette che riempiono il piano reale in cui sta quella retta imaginaria: il punto reale di questa apparirebbe quì come elemento eccezionale. Si fa sparire quest' elemento e si ottiene una seconda rappresentazione, perfettamente univoca, quella di Staudt, se a sostegno della forma semplice si prende invece una retta s *imaginaria di* 2ª *specie;* i punti (od i piani) di questa hanno allora par imagini le rette reali di una *congruenza lineare reale, ellittica,* cioè dotata di direttrici imaginarie: la retta s e la coniugata s'.

Basandosi sul concetto generale accennato non si ottengono altre rappresentazioni, sostanzialmente diverse da queste, se la forma semplice

*) Queste rappresentazioni sono note: però è opportuno pel seguito del lavoro che cominciamo col ricordarle brevemente.

**) Cfr. per esº Staudt, *Beiträge*, n. 410.

che si considera è *fondamentale.* Invece assumendo per questa forma una *schiera (Regelschaar)* di rette imaginarie di 1ª specie, cioè una schiera di generatrici di una *quadrica reale a punti reali ellittici* (una *sfera*), e rappresentando ancora ogni retta col suo punto reale (intersezione con la retta coniugata dell' altra schiera), si ottiene una terza rappresentazione delle forme semplici, sui punti reali di quella quadrica: la rappresentazione di Riemann e Neumann (della variabile complessa $x+iy$, distesa su quella schiera di rette).

2. Queste tre rappresentazioni sono strettamente legate fra loro. La 1ª si deduce dalla 2ª segando con un piano reale le rette della congruenza lineare ellittica; e dalla 3ª, com' è noto, mediante projezione (stereografica) della quadrica sul piano, od anche mediante degenerazione della quadrica. Infine se la congruenza si considera dal punto di vista della *geometria della retta*, nella quale le rette sono *punti* di una varietà quadratica a quattro dimensioni di S_5, le rette della congruenza lineare reale ellittica vengono a costituire, come ben si sa, i punti di una quadrica reale ellittica: la rappresentazione di Staudt s'identifica con quella di Riemann.

È opportuno vedere in formole analitiche l'identità fra le ultime due rappresentazioni: ne trarremo poi una guida nella ricerca analoga relativa alle rappresentazioni reali delle forme fondamentali di specie superiore. Prendiamo le due direttrici s, s' di una congruenza lineare come rette fondamentali in un sistema di riferimento dello spazio: le coordinate di due loro punti qualunque x, y siano

$$x(x_1,\ x_2,\ 0,\ 0),$$
$$y(0,\ 0,\ y_1,\ y_2);$$

allora la retta xy della congruenza avrà evidentemente 2 delle 6 coordinate spaziali nulle, e le rimanenti 4 espresse rispettivamente da

$$X_{11}=x_1y_1,\quad X_{12}=x_1y_2,\quad X_{21}=x_2y_1,\quad X_{22}=x_2y_2, \tag{1}$$

donde appare che

$$X_{11}X_{22}-X_{12}X_{21}=0, \tag{2}$$

relazione a cui si riduce in questo caso la relazione quadratica che lega in generale le 6 coordinate di una retta. Ora se le X_{lm} si considerano come le 4 coordinate di un punto dello spazio, la (2) è l' equazione di una quadrica, di cui le (1) dànno la rappresentazione parametrica (mediante i due parametri $x_1:x_2$, $y_1:y_2$); e la congruenza lineare di rette viene ad equivalere, oppure ad esser riferita *linearmente*, a questa quadrica di punti. Alle due serie di fasci di rette contenuti nella congruenza, aventi i centri risp. su s, s' ed i piani per s', s, (fasci che si ottengono tenendo fisso x, oppure y), corrispondono le due schiere di generatrici della quadrica (generatrici determinate risp. dai parametri $x_1 : x_2$ e $y_1 : y_2$); quindi (assunta reale la corrispondenza) se la congruenza lineare è ellittica, sarà pure ellittica la quadrica, e viceversa. — Aggiungiamo che nelle rette della congruenza lineare o nei punti della quadrica si ha, mediante le formole (1), una rappresentazione assai naturale delle coppie di elementi x, y di due forme semplici (distinte, o considerate come tali); rappresentazione che geometricamente si effettua assumendo risp. le due serie di fasci di rette della congruenza, ovvero le due schiere di generatrici della quadrica, come le due forme semplici in questione, e riguardando le rette della congruenza, od i punti della quadrica, come imagini delle coppie di fasci o di generatrici a cui sono comuni (nel che restano incluse in particolare le rappresentazioni reali degli elementi complessi di una forma semplice — accoppiandoli ai coniugati —, quando si supponga che quelle due serie di fasci, o schiere di rette, siano mutuamente coniugate). Così le projettività fra le due forme semplici essendo date da equazioni del tipo

$$\sum a_{lm} x_l y_m = 0 \tag{3}$$

saranno rappresentate, in forza delle (1), da

$$\sum a_{lm} X_{lm} = 0, \tag{4}$$

cioè da schiere rigate nella congruenza lineare, e dalle sezioni piane nella quadrica: cose evidenti anche geometricamente. Si ricade così in una rappresentazione lineare ben nota*) della varietà costituita dalle projettività fra due forme semplici su quella composta dei piani dello spazio; la quadrica (2), come inviluppo di piani, viene a rappresentare l'insieme delle projettività degeneri, ecc.

Le rappresentazioni reali del piano complesso, ecc.

3. Per rappresentare gli elementi complessi di una forma fondamentale di 2ª specie, o doppia, — ad esempio i punti complessi di un piano π, — mediante i punti reali di uno spazio reale a quattro dimensioni S_4, è naturale (per analogia colla 1ª rappresentazione reale delle forme semplici) di scegliere come forma fondamentale doppia, — a cui si può riferire collinearmente il piano π, — la *rete* costituita dai piani di S_4 i quali passano per una retta fissa r imaginaria di 2ª specie, cioè sghemba con la coniugata r'. Allora come imagine di ogni punto di π, cioè di ogni piano della rete, si assumerà il punto reale del piano stesso. Questo punto è unico *in generale*, cioè se il

*) V. ad esº Stéphanos, Math. Ann. XXII; e Aschieri, Rendⁱ Ist. Lombardo, ser. 2ª, t. XXII (1889).

piano è *imaginario di* 2^a *specie**). Quando invece è *imaginario di* 1^a *specie*, e quindi sta nell' unico spazio**) reale della rete r, cioè lo spazio I che congiunge r, r', il piano contiene infiniti punti reali costituenti una retta appoggiata ad r, r'. Allo spazio I della rete corrisponderà su π una retta i, la quale sarà dunque il luogo dei *punti eccezionali* della corrispondenza fra π ed S_4: i punti di i avranno cioè per imagini le rette reali della congruenza lineare ellittica che ha per direttrici le rette r, r'.

Se poi consideriamo un' altra retta qualunque di π, ai suoi punti, — cioè ai piani di un fascio della rete r, giacente in uno spazio diverso da I, corrisponderanno i punti reali di questo spazio, punti che costituiscono un piano reale (d' intersezione del detto spazio col coniugato) appoggiato ad r, r'. Dunque le rette di π, fatta eccezione per la i, hanno per imagini in S_4 quei piani reali che s'appoggiano ad r, r'. E precisamente le rappresentazioni di quelle rette su questi piani reali sono rappresentazioni di Gauss, mentre la rappresentazione di i sulla congruenza lineare avente per direttrici r, r' è una rappresentazione di Staudt (cfr. n. 1). —

Appunto questa rappresentazione di π su S_4 si ottiene, quando — come già è accaduto di fare, specialmente agli analisti nello studio delle funzioni di 2 variabili complesse — si adotta per imagine del punto di π avente le coordinate $x + iy$, $u + iv$, — ossia per imagine di questo gruppo di valori di due variabili complesse — il punto di S_4 avente le 4 coordinate reali x, y, u, v.***) In fatti *entro la rete di piani* il cui sostegno è la retta r (all' infinito) comune agli spazi $X + iY =$ cost., $U + iV =$ cost., quel piano ($X + iY = x + iy$, $U + iV = u + iv$) che passa pel punto reale (x, y, u, v) si può appunto riguardare come avente per *coordinate* i valori $x + iy$, $u + iv$. Lo spazio reale I passante per r è allora lo spazio all' infinito di S_4; come la retta i che gli corrisponde è la retta all' infinito di π. Ecc.

4. Se per forma fondamentale doppia si prende un piano π imaginario, allora i punti complessi di questo si potranno rappresentare mediante le rette reali che li contengono; e la corrispondenza sarà in generale univoca e tale che i punti di una retta di π avranno per imagini reali le rette reali di una congruenza lineare ellittica.

---

*) Un piano si dice *imaginario di* 1^a, 2^a, 3^a *specie* secondo che il minimo spazio reale in cui è contenuto, cioè lo spazio che lo congiunge al piano coniugato, è di dimensione 3, 4, 5; vale a dire secondo che i punti reali del piano (intersezioni col piano coniugato) formano una retta reale, o si riducono ad un solo, o mancano affatto.

**) *Entro* S_4 parlando di *spazi* intendiamo *spazi ordinari* (S_3).

***) V. anche Palatini: *Sopra una trasformazione delle figure del piano in figure dello spazio a 4 dimensioni*, ecc. (Palmi, 1891).

Così se π è imaginario di 1ª specie, cioè sta (col coniugato π') in uno spazio ordinario reale, esso darà per imagini dei suoi punti le ∞^4 rette reali di questo spazio, le quali hanno precisamente quei punti come tracce su π. Si ottiene così una rappresentazione delle forme doppie *mediante le rette reali dello spazio ordinario*. Faranno eccezione all' univocità della corrispondenza: 1º ogni punto della retta reale di π (la retta $\pi\pi'$), perchè avrà per imagini una stella di rette reali; 2º quella stessa retta, considerata nello spazio rigato, perchè sarà imagine di tutti i suoi punti. — Questa rappresentazione, che presenta il vantaggio di *non uscire dallo spazio ordinario*, si collega a quella del n. prec. coi punti reali di S_4, ricorrendo ad una nota corrispondenza fra le rette dello spazio ordinario ed i punti di S_4, la quale proviene dal riferire collinearmente i due piani π, π' del primo alle due reti r, r' del secondo e far corrispondere la retta che congiunge due punti qualunque di π, π' al punto d'intersezione dei due piani omologhi di r, r' *).

Se π è imaginario di 2ª specie, si avrà una rappresentazione dotata di un solo elemento eccezionale: l'unico punto reale di π.

Finalmente se π si suppone imaginario di 3ª specie, cioè non incontrante il suo coniugato π', sicche il minimo spazio reale in cui esso è contenuto (con π') sia un S_5, allora nella corrispondenza fra i punti di π e le loro rette reali, cioè le ∞^4 rette reali di S_5 appoggiate a π e π', *non vi saranno elementi eccezionali*. — Anche in questo caso la rappresentazione che otteniamo sarà strettamente legata con quella del n. 3. Basta segare quelle ∞^4 rette reali di S_5 con un S_4 reale: i piani π, π' daranno per tracce le due rette r, r'; ecc. —

5. Il fatto di non aver elementi eccezionali dà una speciale importanza all' ultima rappresentazione. La varietà, a cui essa ricorre, delle rette reali appoggiate ad un piano imaginario di 3ª specie, e quindi anche al coniugato, si rappresenta analiticamente in modo molto semplice, analogo a quello che abbiam tenuto per le rette di una congruenza lineare.

Prendiamo i due piani direttori π, π' come piani fondamentali opposti nella piramide a cui riferiamo i punti di S_5. Allora se le sei coordinate omogenee di due loro punti qualunque x, y sono

$$x(x_1,\ x_2,\ x_3,\ 0,\ 0,\ 0),$$
$$y(0,\ 0,\ 0,\ y_1,\ y_2,\ y_3),$$

fra le 15 coordinate omogenee della retta di S_5 che li congiunge 6 s' annulleranno, e le rimanenti 8 avranno i valori $x_1y_1, x_1y_2, \ldots, x_3y_3$, che possiam rappresentare brevemente con

*) Cfr. Chizzoni, Atti Acc. Gioenia (Catania), ser. 3, t. 20 (1888); Loria, e specialmente Pieri, Giornale di mat., t^i 27 (1889) e 28 (1890); Schumacher, Math. Ann. t. 37, p. 100.

$$(1) \qquad X_{lm} = x_l y_m. \qquad (l, m = 1, 2, 3)$$

Si può dunque dire che le rette appoggiate a π e π', od anche le coppie di punti xy di questi due piani, stanno in una varietà lineare ad 8 dimensioni — corrispondentemente alle 9 coordinate omogenee X_{lm} — e vi formano una varietà a 4 dimensioni, che è rappresentata parametricamente dalle (1), il che equivale al sistema delle equazioni quadratiche provenienti dall' annullare i determinanti di 2° ordine tolti dalla matrice quadrata di 3° ordine $|X_{lm}|$. Od in altri termini, le rette appoggiate a π, π', ossia le coppie di punti di questi piani, si rappresentano linearmente coi punti di una varietà Σ a 4 dimensioni di un S_8 qualunque, la quale, indicando con X_{lm} le 9 coordinate omogenee di punti in S_8, è rappresentata parametricamente dalle (1), ossia è definita dalle equazioni quadratiche anzidette.

Di questa varietà Σ ho fatto un breve studio in una Nota *Sulle varietà che rappresentano le coppie di punti di due piani o spazi**), alla quale rimanderò per le dimostrazioni e gli sviluppi delle proprietà di Σ che ci serviranno in seguito. Del resto le principali proprietà di questa varietà appajono subito, sia dalla rappresentazione analitica (1), sia da quella geometrica mediante le coppie di punti xy di π, π'. Così si vede subito che essa è *del* 6° *ordine;* e che contiene *due schiere di* ∞^2 *piani*, corrispondenti la 1ª alle coppie xy in cui x è fisso, la 2ª a quelle in cui y è fisso, sicchè per ogni punto di Σ passano due piani risp. delle due schiere (congiunti medianti l' S_4 tangente a Σ in quel punto). I piani dell' una schiera (1ª o 2ª) son punteggiati collinearmente (a π' o π) da quelli dell' altra, sicchè si può considerare ognuna delle due schiere, 1ª o 2ª, come una forma geometrica di 2ª specie, riferibile projettivamente (mediante sezione con un piano qualunque dell' altra) ad un piano, π o π'. Allora ai punti di una retta di π o di π' corrispondono gli ∞^1 piani della 1ª o della 2ª schiera formanti una varietà cubica M_3^3 appartenente ad un S_5: e si hanno così su Σ *due schiere* ∞^2 *di varietà cubiche* siffatte, le quali stanno risp. su *due schiere di spazi* S_5. Queste ultime godono di proprietà duali a quelle delle due schiere di piani. Due S_5 di schiere diverse stanno in un *iperpiano* di S_8**), cioè si tagliano in un S_3, che contiene una quadrica di Σ, quadrica d' intersezione delle due varietà cubiche di quegli S_5. Viceversa ogni quadrica giacente in Σ ha i suoi due sistemi di generatrici rispettivamente su due ∞^1 di piani delle due schiere di Σ, costituenti due varietà cubiche delle due schiere; pel suo spazio S_3 passano dunque due spazi S_5 risp. delle due schiere. La ∞^4 degl' iperpiani Ξ passanti per gli S_5 (ogni iperpiano

*) Rendici Circolo mat. Palermo, t. V (1891).

**) In un *iperspazio* S_n chiamo *iperpiani* gli S_{n-1}.

per due S_5 di schiere opposte) è rappresentata parametricamente dalle equazioni, duali alle (1):

$$(1') \qquad \Xi_{lm} = \xi_l \eta_m . \quad (l, m = 1, 2, 3)$$

Ecc. ecc. —

La varietà Σ serve poi anche utilmente a rappresentare le corrispondenze projettive fra π e π'. Così se una reciprocità qualunque fra questi due piani ha per equazione

$$(2) \qquad \sum a_{lm} x_l y_m = 0,$$

ove xy indica una qualunque delle coppie di *punti reciproci*, i punti che su Σ saranno imagini di tali coppie formeranno, in forza delle (1), la sezione determinata su Σ dell' iperpiano

$$(2) \qquad \sum a_{lm} X_{lm} = 0 .$$

6. Consideriamo ora in particolare il caso, importante pei nostri scopi, che π e π' siano imaginari coniugati. Il sistema di riferimento delle coordinate X in S_8 dovrà assumersi tale che, qualunque siano l ed m, $X_{lm} = 0$ e $X_{ml} = 0$ sian sempre due iperpiani fondamentali coniugati; e più precisamente, che per punti reali si possan sempre ritenere le coordinate X_{lm} e X_{ml} conjugate: ed allora la varietà Σ definita dalle (1) conterrà ∞^4 punti reali, corrispondenti all' assumere coniugati i punti x, y di π, π'. Tutti i piani (e quindi le rette) di Σ saranno imaginari, e precisamente quelli dell' una schiera saran coniugati a quelli dell' altra; sicchè ogni piano avrà *un* punto reale (sarà cioè imaginario di 2ª specie). La rappresentazione degli elementi complessi di π, od in generale di qualunque forma fondamentale doppia, coi punti reali di Σ si potrà considerare come ottenuta sostituendo a quella forma (ossia riferendole projettivamente) una delle due schiere di piani di Σ, e poi rappresentando i piani di questa schiera coi loro rispettivi punti reali.

Anche le due schiere di varietà cubiche, e quindi di S_5, saranno imaginarie e coniugate l' una all' altra. Invece le quadriche di Σ nelle quali si tagliano due varietà cubiche coniugate saranno a punti reali ellitici: esse, come luoghi di questi punti reali, saranno le imagini su Σ delle rette di π (rappresentazioni di Riemann).

Dallo spazio S_3 di una di queste quadriche si può projettare la varietà Σ su un S_4 reale (di S_8) in guisa da avere una corrispondenza, in generale univoca, fra i punti reali di Σ e quelli reali di S_4. Gli S_5 delle due varietà cubiche imaginarie coniugate della 2ª e della 1ª schiera che si tagliano in quella quadrica dànno per tracce su S_4 due rette imaginarie coniugate r, r'; ed i piani della 1ª schiera di Σ si projetteranno nei piani di S_4 passanti per r, e quelli della 2ª nei piani per r'. Quindi la rappresentazione data al n. 3 degli elementi complessi di una forma fondamentale doppia coi punti reali di S_4, la quale consisteva nel ricorrere alla rete r di piani imaginari di S_4, rappresentandoli coi loro punti reali, non è altro che una projezione della rappresentazione su Σ. Le eccezioni all' univocità della rappresentazione, che colà si avevano nei punti di una retta i di π, ai quali venivano a corrispondere le rette reali di S_4 appoggiate ad r, r', risultano ora da ciò, che eccezione all' univocità della nostra projezione di Σ per quanto riguarda i punti reali fanno appunto quelli della quadrica considerata (cui corrisponderà la retta i di π), e che ognuno di questi si projetta precisamente secondo una retta di quella congruenza lineare.

7. Dopo i particolari in cui così siamo entrati sulle rappresentazioni reali degli elementi complessi di una forma fondamentale semplice o doppia, non è più necessario che ci dilunghiamo intorno alle analoghe rappresentazioni reali degli elementi complessi di una forma fondamentale di specie qualunque n, cioè dei punti complessi di uno spazio S_n qualunque. Il lettore vedrà subito come si ottengano rappresentazioni: 1° sui punti reali di un S_{2n} (aventi per coordinate le $2n$ componenti reali delle n coordinate dei punti dell' S_n), considerando in questo la forma fondamentale (riferita collinearmente all' S_n) composta degli S_n passanti per un S_{n-1} fisso *completamente imaginario*. 2° sulla ∞^{2n} delle rette reali che contengono i punti complessi dell' S_n, se questo si assume imaginario; ed allora non vi saranno elementi eccezionali per la rappresentazione se esso sarà *completamente* imaginario. 3° sugli ∞^{2n} punti reali di una varietà di dimensione $2n$ (analoga alla sfera, ed alla Σ dei n[i] 5 e 6, varietà atta a rappresentare le *coppie di punti* di due spazi S_n) appartenente ad $S_{n(n+2)}$ e con le coordinate rappresentate parametricamente da

$$X_{lm} = x_l y_m: \qquad (l, m = 1, \ldots, n+1)$$

varietà d' ordine $\binom{2n}{n}$ contenente due *schiere* ∞^n, fra loro coniugate di S_n imaginari, tali che per ogni punto della varietà passa un solo spazio di ciascuna schiera, e che gli spazi dell' una schiera son punteggiati collinearmente da quelli dell' altra, ecc. ecc. — Anche i legami fra queste rappresentazioni, — cioè l' equivalenza *matematica* (analitica) della 3ª con la 2ª (nel caso accennato in cui la 2ª non ha elementi eccezionali), la sezione e la projezione con cui risp. dalla 2ª e dalla 3ª si passa alla 1ª, — appajono senz' altro per analogia con quanto si disse nei casi di $n = 1, 2$.

Del resto (è bene tenerlo sempre presente) in tutte queste rappresentazioni il concetto in sostanza è sempre uno stesso (cfr. n. 1). Si hanno cioè sulla varietà reale rappresentativa Φ due *schiere* coniugate di varietà particolari, tali che si può sostituire (riferire projettivamente) alla forma fondamentale oggettiva F una di queste schiere*): allora ogni elemento di quella schiera insieme col conjugato dell' altra dà una coppia reale, un ente (punto o retta) reale, che serve a rappresentare quell' elemento della 1ª schiera, e quindi l' elemento complesso di F. —

Le rappresentazioni reali dei punti di un S_n, quando si sostiuiscano questi punti coi gruppi di valori di n numeri complessi — le loro coordinate —, diventano rappresentazioni che possono servire utilmente nello studio delle funzioni di n variabili complesse. D'altra parte per tale studio si presenta anche naturale di rappresentare le singole variabili complesse su altrettanti piani di Gauss, o sfere di Riemann, ecc.**); e ciò porterebbe a nuove rappresentazioni reali non solo per le funzioni di n variabili complesse, ma anche per i punti complessi di un S_n, cioè a rappresentazioni sui gruppi di n punti reali presi risp. su n piani o sfere ecc., e quindi sulla varietà degli spazi (od altri enti) reali che congiungono quei gruppi di n punti, ecc. ecc. È così che ad esempio il Weierstrass cominciava le sue *Lezioni sulle funzioni Abeliane* rappresentando il campo di 2 variabili complesse indipendenti mediante le rette congiungenti i punti reali imagini di quelle variabili su 2 piani (paralleli) di Gauss (e quindi l' *ente algebrico* dato da un' equazione algebrica fra due variabili, mediante un particolare sistema algebrico di rette reali). — Noi però non ricorreremo a queste nuove rappresentazioni.

I gruppi fondamentali. Projettività ed antiprojettività.

8. Per bén caratterizzare dal punto di vista della geometria projettiva le rappresentazioni di cui abbiam parlato sinora, conviene anche vedere quale gruppo di trasformazioni esse faccian corrispondere al gruppo delle projettività della forma complessa oggettiva nella sua imagine reale.

La cosa riesce molto ovvia quando per questa imagine si assume rispettivamente la sfera, la varietà Σ a 4 dimensioni, ecc. (cioè in quelle rappresentazioni che abbiamo considerate come 3°). — Premettiamo che una trasformazione collineare della sfera, o di Σ, ecc., in se stessa

*) Nel seguito di questo lavoro ci accadrà ancora di usare i simboli F e Φ, ed il vocabolo «*schiera*» (di Φ) in questi significati generali.

**) Ciò sarà da preferirsi quando di una funzione importi considerare le n variabili *staccatamente*. Ma in caso contrario possono essere più opportune le rappresentazioni precedenti. Così per le funzioni che non mutano per gruppi di trasformazioni lineari delle n variabili *prese complessivamente* (funzioni linearmente *automorfe*), — come le funzioni *iperfuchsiane* di due variabili, introdotte dal sig. Picard —, sembrano più utili le rappresentazioni prima esposte, perchè con esse le trasformazioni lineari delle n variabili (collineazioni di S_n) trovano un' imagine più semplice.

genera una trasformazione projettiva di ogni schiera (di rette, o piani, ecc.) o in se stessa (collineazioni *di* 1ª *specie*), oppure nell' altra schiera (collineazioni *di* 2ª *specie*); e che queste due trasformazioni projettive subordinate, o di ogni schiera in se, ovvero della 1ª schiera nella 2ª e della 2ª nella 1ª, si possono assumere *ad arbitrio,* e sempre definiscono una trasformazione collineare della sfera, o di Σ, ecc. (come subito si vede, sia geometricamente, sia mediante la rappresentazione analitica $X_{lm} = x_l y_m$). Però, se si vuole che questa collineazione sia *reale,* cioè muti i punti reali in punti reali, e quindi gli elementi imaginari coniugati in elementi imaginari coniugati, si potrà assumere ad arbitrio una sola delle due projettività, ad esempio quella che trasforma la 1ª schiera (in se, o nella 2ª), chè allora l' altra sarà la projettività coniugata (che trasformerà la 2ª schiera in se, o nella 1ª).

Segue che *una projettività fra gli elementi della forma fondamentale semplice, doppia, ecc.* (*collineazione*), rispecchiandosi in una trasformazione projettiva *entro* la 1ª schiera di rette della sfera; o piani di Σ, ecc., *avrà per imagine reale una collineazione reale di* 1ª *specie della sfera, o di* Σ, *ecc.* —

Similmente si hanno due specie di trasformazioni lineari di una congruenza lineare in se stessa (ognuna delle quali si può considerare come prodotta tanto da collineazioni dello spazio quanto da reciprocità), e cioè quelle che mutano in se ciascuna delle due direttrici (ossia ciascuna delle due schiere di fasci di rette della congruenza), e quelle che le scambiano fra loro. Le projettività della forma semplice corrispondono nella rappresentazione di Staudt alle *trasformazioni lineari reali di* 1ª *specie della congruenza ellittica.* — Analogamente per le analoghe rappresentazioni delle forme fondamentali doppie, ecc.

9. Nella rappresentazione di Gauss della forma semplice sul piano σ, come corrispondenti (projezioni stereografiche) alle due specie di collineazioni reali della sfera, od alle due specie di trasformazioni lineari reali della congruenza ellittica, si hanno due specie di trasformazioni reali puntuali di σ tali da mutare i cerchi in cerchi (*trasformazioni circolari,* o *gruppo delle inversioni*). Una 1ª specie rappresenta le projettività della forma semplice oggettiva e si compone di quelle trasformazioni che mutano in se ognuno dei due fasci di rette aventi i centri nei punti ciclici C, C', cioè delle trasformazioni quadratiche reali dei punti di σ che si determinano fissando una projettività arbitraria nel fascio C, e quindi la sua coniugata nel fascio C'; la 2ª specie invece muta C in C' e quindi C' in C.*) —

*) A ciò, ed al fatto corrispondente sulla sfera, si collega, com' è noto, la proprietà di conservare inalterati *gli angoli* o di mutarne soltanto il verso, che distingue le due specie di trasformazioni circolari del piano e della sfera.

Analogamente nello spazio reale S_4 possiamo avere due sorta di trasformazioni reali fissando: o una collineazione qualunque entro la rete r, e quindi la coniugata nella rete coniugata r', — oppure una collineazione qualunque fra la rete r e la r', e quindi la coniugata fra r' ed r; e considerando in ambi i casi come omologhi due punti quando stanno in piani omologhi di quelle due collineazioni fra le reti, sicchè in particolare al punto reale di un piano di r corrisponderà il punto reale del piano omologo (risp. di r o di r'). Le trasformazioni che si ottengono nel 1° caso saranno le imagini reali delle collineazioni di una forma fondamentale doppia; però molte proprietà son comuni ad entrambe le specie.

Così è chiaro anzitutto che in una tale trasformazione di S_4, sia di 1ª o di 2ª specie, ad un piano reale appoggiato ad r, r' (cioè intersezione di due spazi delle due reti) corrisponderà un altro piano siffatto; e la corrispondenza tra i due piani sarà della natura stessa delle trasforzioni circolari dianzi accennate, cioè muterà le coniche appoggiate ad r, r' in coniche appoggiate ad r, r'. In particolare segue che ad ogni retta di S_4 (la quale giace sempre in un piano, generalmente unico, appoggiato ad r, r') corrisponde in generale una conica appoggiata ad r, r'. Dunque anche queste trasformazioni di S_4 sono trasformazioni *quadratiche*.

Abbiasi poi in S_4 un piano *qualunque*. Esso sarà in generale projettato dalle rette r, r' mediante due reti collineari (prospettive) le quali dalle due collineazioni coniugate che son date entro o fra le reti r, r', saran mutate in reti collineari (aventi ancora le rette r, r' per sostegni); e queste come intersezioni dei piani omologhi daranno in generale, com' è noto, i punti di una rigata cubica razionale normale di S_4 avente r, r' per generatrici. Dunque i piani di S_4 si mutano in rigate cubiche così fatte.

Similmente per vedere come si trasformi in generale uno spazio ordinario contenuto in S_4, osserviamo che esso si può considerare come costituito da un fascio di piani avente per asse la congiungente dei suoi due punti d' incontro con r, r', e quindi come generato da due fasci projettivi (prospettivi) di spazi delle reti r, r'. Ora, mediante le due collineazioni fisse entro o fra queste reti, quei fasci si mutano in due fasci projettivi di spazi (ancora della reti r, r'), i quali genereranno una varietà quadratica $M_3{}^2$: e precisamente un cono avente il centro nel punto comune ai piani base dei due fasci, e contenente quel piano ω nel quale si tagliano i due spazi che nelle due collineazioni fisse delle reti r, r' corrispondono allo spazio I comune a queste*).

*) Ogni punto del piano ω è l' omologo di tutti i punti di una retta appoggiata ad r, r'. Analogamente ad ω si ha poi un altro piano ω_1 che dalla data trasformazione di S_4 è mutato nello spazio I. La conica che corrisponde ad una retta passante per un punto di ω_1 si spezza nella retta, appoggiata ad r, r', in

Segue che la nostra trasformazione quadratica di S_4 muta gli spazi nei coni quadrici (a 3 dimensioni) passanti per r, r' e pel piano fisso ω (appoggiato ad r, r').*)

Se poi si considera una *qualunque* varietà quadratica $M_3{}^2$ passante per r, r' come generata da due reti reciproche aventi r, r' per sostegni, si vede subito con ragionamenti identici ai precedenti che essa si muta in una varietà quadratica passante similmente per r, r'. Tali varietà sono le projezioni delle sezioni della Σ di S_8 cogl' iperpiani di questo spazio; poichè appunto queste sezioni iperplanari son generate su Σ dalle reciprocità fra le due schiere di piani che si projettano nelle reti r, r' (n. 5). E come le collineazioni di Σ son caratterizzate dal mutare le sezioni iperplanari in sezioni iperplanari e dall' essere algebriche, od almeno analitiche, così avremo che le nostre trasformazioni quadratiche di S_4 sono *tutte* quelle trasformazioni analitiche che mutano in se l' insieme delle varietà quadratiche passanti per le rette fisse r, r'. Ecc. —

Analogamente alle trasformazioni circolari del piano e a quelle trasformazioni quadratiche di S_4, si hanno più in generale due specie di trasformazioni quadratiche nell' S_{2n} reale rappresentativo delle forme fondamentali n-ple, trasformazioni che si determinano dando due collineazioni entro o fra le forme aventi per sostegni due S_{n-1} non incidenti di quello spazio, ecc. ecc.; le trasformazioni *reali* di 1ª specie (per cui quegli S_{n-1} sono imaginari coniugati) rappresentano le collineazioni delle forme fondamentali n-ple. —

Infine, se in luogo di fissare due *collineazioni*, come in questo n° ed in quello preced° s' è fatto, si fissano due *reciprocità* entro o fra le due schiere di piani ecc. di Σ o di S_4 ecc., si avranno similmente due specie di trasformazioni, analoghe alle precedenti (ma non più puntuali); e le trasformazioni reali della 1ª specie (provenienti cioè da reciprocità coniugate entro le due schiere rispettivamente) saranno le imagini reali delle reciprocità della forma oggettiva.

10. Abbiamo così nei nⁱ 8 e 9 incontrato in ogni caso, accanto alle *trasformazioni reali di* 1ª *specie* — che nella imagine reale della forma fondamentale rappresentavano le trasformazioni projettive (collineazioni o reciprocità) di questa —, quelle che abbiamo chiamate *trasformazioni reali di* 2ª *specie;* ed abbiamo visto molti punti di contatto di queste con quelle, sì che siamo naturalmente indotti a considerare nella forma oggettiva anche quelle trasformazioni — analoghe

cui si trasforma quel punto, ed una retta incidente ad ω: si corrispondono dunque nella nostra trasformazione le rette che si appoggiano risp. ai due piani ω_1 e ω.

*) Da ciò si deducono di nuovo le rigate cubiche corrispondenti ai piani di S_4 e si vede inoltre che esse sono soggette a tagliare secondo coniche il piano fisso ω.

alle projettive ma essenzialmente distinte da esse — che sulla imagine son rappresentate da corrispondenze reali di 2ª specie. Sono queste le *antiprojettività* (risp. *anticollineazioni* ed *antireciprocità**)), che direttamente e con maggiori ragguagli si trovano studiate nel *Saggio***). Qui ci limitiamo ad accennarne le prime proprietà che si leggono subito su quelle rappresentazioni reali.

Anzitutto abbiamo che in una forma semplice vi sono *due* specie di corrispondenze continue***) che mutano i gruppi armonici in gruppi armonici: le *projettività* e le *antiprojettività*. E che fra i punti di un piano vi sono *due* specie di corrispondenze continue che mutano le rette in rette, cioè oltre alle note *collineazioni* altre corrispondenze che chiamiamo *anticollineazioni;* e similmente, oltre alle *reciprocità*, vi sono in un piano altre corrispondenze continue che mutano i punti in rette e i punti di una retta nelle rette passanti per un punto: le *antireciprocità*. Analogamente per lo spazio ordinario e per quelli superiori. — E si fa poi subito il passaggio a corrispondenze tra forme distinte.

In un' antiprojettività qualunque (anticollineazione od antireciprocità) due forme fondamentali omologhe sono pure riferite antiprojettivamente. Mentre in due forme projettive le tetradi (*Würfe*) omologhe hanno birapporti *uguali*, e quindi sono della stessa specie rispetto al verso (secondo Staudt), in forme antiprojettive le tetradi omologhe hanno birapporti *coniugati*, e sono quindi di specie opposta. Due corrispondenze antiprojettive dànno per prodotto una projettività; il prodotto di un' antiprojettività e di una projettività (o viceversa) è ancora un' antiprojettività.†)

Un esempio ovvio di antiprojettività si ha nel *conjugio*, cioè nella corrispondenza tra gli elementi di una forma ed i loro conjugati (della forma conjugata). *Le corrispondenze antiprojettive si possono anche definire come prodotti del coniugio e di projettività (o viceversa).* Ed è appunto così che in sostanza ci si presentano le antiprojettività nelle loro rappresentazioni reali; poichè se per forma fondamentale oggettiva si assume la 1ª delle due schiere coniugate (cfr. n. 7) a cui ricorrono quelle rappresentazioni, l'antiprojettività in essa vien precisamente ad essere il prodotto del coniugio (che muta la 1ª schiera nella 2ª) e della

*) Questa distinzione è essenziale solo nelle forme fondamentali doppie, triple, ecc.; non in quelle semplici.

**) Come ivi è dichiarato, le antiprojettività nelle forme semplici e le anticollineazioni in quelle doppie erano state studiate prima di me dal sig. Juel nella Dissertazione già citata. V. anche la Nota dello stesso geometra: *Ueber einige Grundgebilde der projectiven Geometrie* (Acta mathematica, t. 14, 1890).

***) Riguardo alla condizione della *continuità* veggasi il n. 1 del *Saggio*.

†) In conseguenza il gruppo di corrispondenze che abbraccia tutte quelle antiprojettive si compone di esse e delle projettive.

projettività che si è fissata fra la 2ª e la 1ª schiera nel definire la trasformazione reale di 2ª specie che è imagine dell' antiprojettività.

Da questa, ovvero anche dalle precedenti definizioni, segue subito che un' antiprojettività tra due forme semplici, doppie, ecc., s'individua mediante coppie di elementi omologhi al modo stesso che una projettività, cioè dando di 3,4,... elementi (omonimi ed indipendenti ecc.) dell' una forma gli omologhi nell' altra. Ed inoltre segue la *rappresentazione analitica delle antiprojettività*, cioè mediante equazioni

$$x_i' \equiv \sum_m a_{im} \bar{x}_m ,$$

le quali esprimono le coordinate di un elemento x' dell' una forma come forme lineari nei valori coniugati $\bar{x}_m$ delle coordinate x_m che ha l'elemento omologo x nell' altra forma. Ecc.

Antiprojettività involutorie. Catene.

11. Fra le corrispondenze antiprojettive — anticollineazioni ed antireciprocità —, hanno uno speciale interesse quelle *involutorie* — *antinvolusioni* ed *antipolarità*. Esse dànno coi loro elementi uniti le prime e più semplici varietà iperalgebriche.

Se l' antiprojettività si considera come il prodotto del coniugio $\mathfrak{C}$ e di una projettività $\mathfrak{P}$ o viceversa (n. 10), la condizione d' involutorietà $\mathfrak{C}\mathfrak{P} = \mathfrak{P}^{-1}\mathfrak{C}$, equivale a $\mathfrak{C}\mathfrak{P}\mathfrak{C} = \mathfrak{P}^{-1}$, cioè all' avere $\mathfrak{P}$ per coniugata (trasformata mediante $\mathfrak{C}$) la propria inversa. Questo fatto evidente vale anche se si tratta del prodotto di due corrispondenze qualunque $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{P}$, quando l' una, $\mathfrak{C}$, di esse, è involutoria: la detta relazione, che s' è presentata ripetutamente nel caso di due projettività*), è stata chiamata *armonia*. Le antiprojettività involutorie sono dunque *i prodotti del coniugio e di projettività armoniche al coniugio (cioè aventi per coniugate le proprie inverse), o viceversa.*

Le trasformazioni reali di 2ª specie della varietà reale Φ (n. 7) (piano σ, sfera, o congruenza lineare; ecc.), che su questa rappresentano un' antiprojettività della forma fondamentale oggettiva F, eran definite mediante una projettività fra la 1ª e la 2ª schiera di Φ, ed una fra la 2ª e la 1ª schiera, *coniugate* fra loro. Orbene è evidente che la condizione d' *involutorietà* pcr l' antiprojettività, ossia per la trasformazione reale che ne è imagine, equivale all' essere quelle due projettività *inverse* l'una dell' altra (e quindi *armoniche al coniugio*). Ciò

*) V. ad es° Segre, *Le coppie di elementi imaginari nella geometria projettiva sintetica* (Memorie Acc. Torino, ser. 2ª vol. 38); e *Note sur les homographies binaires et leurs faisceaux* (Journal für Math., t. 100). V. anche H. Wiener, *Ueber geometrische Analysen* (Berichte der k. sächs. Ges. t. 42, 1890), pag. 262.

si può anche esprimere in altro modo, considerando le due varietà costituite dalle intersezioni degli elementi omologhi delle due projettività, fra loro coniugate, che si hanno tra le due schiere di Φ: l' essere queste due projettività inverse l' una dall' altra equivale a dire che quelle due varietà, pure coniugate, coincidono; cioè che *le intersezioni degli elementi omologhi delle due schiere projettive formano una varietà reale.* Le intersezioni poi di elementi omologhi *e coniugati* saranno gli elementi reali di questa varietà e rappresenteranno su Φ quegli elementi della forma fondamentale F i quali sono *uniti* par l' antiprojettività.

12. Applicando anzitutto queste osservazioni generali al caso di un' *antinvoluzione in una forma semplice*, avremo che ad essa è congiunta una projettività, fra i due fasci di rette C, C' del piano σ, o fra le due schiere di generatrici della sfera, o fra le due direttrici della congruenza lineare ellittica, la quale ha se stessa (o meglio la sua inversa) per coniugata: sicchè il cerchio luogo dei punti d' intersezione delle rette omologhe (o la schiera di rette generata entro la congruenza lineare) sarà coniugato di se stesso; nella sfera sarà la sezione con un piano reale. In generale questo cerchio o è affatto privo di punti reali, o ne ha infiniti (e analogamente quella schiera di rette). Dunque: *un' antinvoluzione in una forma fondamentale semplice o non ha elementi uniti o ne ha infiniti formanti una catena semplice.* Adoperiamo quì la voce introdotta dallo Staudt, il quale chiama *catena* un insieme di ∞^1 elementi di una forma fondamentale semplice, che sulla congruenza lineare imagine sia rappresentato da una schiera reale di rette, e quindi sul piano σ o sulla sfera da un cerchio reale.*) Noi vediamo che una tal catena si può anche definire come il luogo degli elementi uniti di un' antinvoluzione ben determinata.

L' imagine di un' antinvoluzione sul piano σ (o sulla sfera) non è altro che un' ordinaria *inversione.*

13. Trattisi ora di un' *antinvoluzione del piano π.*

Essa sarà rappresentata sulla varietà Σ da una collineazione reale di 2ª specie involutoria; e questa**) ha per luogo dei punti uniti, cioè dei punti in cui si tagliano i piani omologhi delle due schiere, una superficie del 4º ordine F^4 appartenente ad un S_5 e luogo di ∞^2 coniche, ecc., cioè una *superficie di* Veronese. Sono *assi* della collineazione involutoria lo spazio S_5 di quella superficie, ed un piano.

---

*) Dalla loro rappresentazione reale sulla sfera appare che le antiprojettività di forme semplici si possono anche definire come quelle corrispondenze non projettive che mutano le catene in catene (cfr. *Saggio*, nota alla fine del n. 1).

**) V. il n. 8 della Nota *Sulle varietà* ecc. citata più sopra (al n. 5).

La stessa antinvoluzione è rappresentata su S_4 dalla trasformazione quadratica involutoria di 2ª specie che è definita da una collineazione fra le reti r, r' coincidente (o meglio inversa) con la coniugata: sicchè la rigata cubica normale F^3 (projezione di quella F^4 di Veronese) che è luogo dei punti d' incontro dei piani omologhi delle due reti, cioè dei punti uniti della trasformazione involutoria di S_4, sarà coniugata di se stessa, e però conterrà ∞^2 punti reali. Le corde di questa rigata le quali s'appoggiano al piano ω trasformato dello spazio I di r, r', formano un sistema ∞^3 di 1° ordine di *rette unite* (cfr. n. 9 e specialmente la nota a pag. 426) per la trasformazione involutoria: sicchè questa si può anche definire con ciò che due punti omologhi qualunque stanno su una retta di quel sistema e sono armonici ai due punti d'incontro della retta stessa colla rigata cubica.*)

Infine si consideri la rappresentazione di π, reso imaginario di 1ª specie, sulle ∞^4 rette reali dello spazio ordinario. Un' antinvoluzione di π risulta dal prodotto pel coniugio di una collineazione fra π ed il piano conjugato π' la quale sia coniugata di se stessa (o meglio della inversa). Le rette congiungenti le coppie di punti omologhi di questa collineazione formano un sistema reale di rette (3, 1), cioè del 3° ordine e di 1ª classe, il sistema delle tangenti doppie di una sviluppabile reale di 3ª classe tangente a π e π': e le ∞^2 rette *reali* di questo sistema segano π nei punti uniti dell' antinvoluzione. —

Segue da queste rappresentazioni — e del resto si vede subito anche direttamente — che: Un' antinvoluzione piana ha sempre ∞^2 punti uniti, il cui insieme diremo una *catena piana* (o doppia, o di 2ª specie, ecc.), e corrisponde alla superficie F^4 di Veronese, od alla F^3 normale di S_4, od al sistema di rette (3, 1). Inoltre essa ha ∞^2 rette unite, le *corde della catena:* mentre una retta qualunque del piano incontra la catena piana in un punto solo (quello d' intersezione con la retta che le corrisponde nell' antinvoluzione), una corda la incontra negli ∞^1 punti di una catena semplice. Queste catene semplici contenute nella catena piana corrispondono alle coniche della F^4 od F^3**), ed alle schiere di rette reali contenute nel sistema (3, 1) di rette***). Ecc.

*) Questa definizione mediante il piano ω e la rigata cubica F^3 è l' analoga della definizione dell' inversione piana mediante il centro ed il cerchio direttore.

**) I piani reali di S_4, i quali come vedemmo (n. 9) fan *corpo* colle rigate cubiche reali passanti per r, r', rappresentano quelle catene doppie di π che hanno la retta fissa i per corda.

***) La rappresentazione della catena piana col sistema di rette reali (3, 1) è già fatta dal sig. Juel, il quale rileva anche i casi particolari di degenerazione di quel sistema. Questi casi appajono subito dal ragionamente che sopra ci ha condotti a quel sistema di rette, mediante la collineazione fra i piani π e π'.

14. Analogamente si hanno delle *antinvoluzioni nello spazio ordinario* e in generale *in uno spazio qualunque* S_n; e si hanno delle *catene n-ple*, luoghi degli ∞^n punti uniti di antinvoluzioni siffatte. Per n pari ogni antinvoluzione di S_n produce una tal catena (poichè due $S_{\frac{n}{2}}$ omologhi si tagliano sempre in un punto unito); mentre per n impari vi sono anche antinvoluzioni prive di punti uniti. — Nella rappresentazione dei punti complessi dell' S_n sui punti reali di S_{2n} una catena n-pla ha per imagine una varietà reale M_n^{n+1} generata dalle intersezioni degli S_n omologhi di due forme collineari aventi per sostegni i due S_{n-1} fissi*). — Nella rappresentazione sui punti reali della varietà di dimensione $2n$ e d' ordine $\binom{2n}{n}$ di $S_{n(n+2)}$ la catena n-pla ha per imagine una varietà d' ordine 2^n appartenente ad un $S_{\frac{n(n+3)}{2}}$ e rappresentabile univocamente su un S_n mediante il sistema lineare di tutte le varietà quadratiche M_{n-1}^2 di tale spazio. — Ecc. ecc. —

Il *coniugio* su una retta, piano, o spazio reale qualunque, è una particolare antinvoluzione; e quindi l' insieme (dei suoi punti uniti, cioè) dei punti reali di una retta, piano o spazio reale qualunque è una catena. Ogni catena n-pla si può trasformare projettivamente in quella costituita dai punti reali di un S_n reale.

Antipolarità, iperconiche, iperquadriche, ecc.

15. Le considerazioni generali del n. 11 applicate alla questione delle *antireciprocità* involutorie, od antipolarità, dànno subito i risultati che ora esporremo.

Ogni antipolarità nella retta, nel piano, o nello spazio, ... si può rappresentare con un' equazione (fra punti x, y reciproci)

$$\sum a_{lm} x_l \bar{y}_m = 0,$$

nella quale sia sempre $a_{ml} = \bar{a}_{lm}$. Assumendo una coppia, o triangolo,

---

Il sistema si riduce cioè a (2, 1) se la catena piana di π ha un punto reale (il quale starà sulla retta reale $\pi\pi'$ e sarà unito per quella collineazione); ad una *congruenza lineare* (1, 1) se la catena ha una corda reale (la retta $\pi\pi'$, su cui vi saranno allora 2 punti uniti della collineazione); ad una *stella* di rette reali se la catena piana contiene tutta la catena rettilinea dei punti reali di π (la retta $\pi\pi'$ è luogo di punti uniti per la collineazione).

*) Il fatto che se l'ordine $n+1$ di quella varietà è dispari, essa ha *sempre* ∞^n punti reali corrisponde appunto al fatto già menzionato che per n pari un' antinvoluzione di S_n ha *sempre* una catena n-pla di punti uniti.

o tetraedro, ... *polare* come sistema di riferimento, quell' equazione prende la forma *canonica*

$$\sum a_i x_i \bar{y}_i = 0.$$

ove le a_i sono reali. I *punti uniti* (ossia autoreciproci) sono quelli soddisfacenti alla equazione

$$\sum a_{lm} x_l \bar{x}_m = 0,$$

ossia

$$\sum a_l x_l \bar{x}_l = 0;$$

e di qui, considerando le varie ipotesi che si posson fare intorno ai segni dei coefficienti reali a_l, appare che si possono avere vari casi, analoghi a quelli che presenta una polarità (ordinaria) reale $\Sigma a_l x_l y_l = 0$ nella retta, nel piano, nello spazio, ... Possono mancare affatto i punti uniti dell' antipolarità (quando le a_l son tutte d' un segno). In caso contrario essi formeranno in generale una ∞^1 nella retta, cioè una *catena* semplice; una ∞^3 che diremo *iperconica*, nel piano; una ∞^5, *iperquadrica*, nello spazio; e un' iperquadrica potrà essere *rigata* o no; ecc. ecc. — L' antipolarità può anche essere *degenere* (come una reciprocità): corrispondentemente a ciò la catena rettilinea può ridursi ad un sol punto (*catena nulla*, o *catena-punto*), l' iperconica ad una catena semplice di rette di un fascio, ecc. (In tali casi è nullo qualche coefficiente della forma canonica). —

Sulla varietà Σ di S_8 imagine reale del piano π, l' antipolarità fra i piani della 1ª schiera produce fra la 1ª e la 2ª schiera una reciprocità tale che i punti d' incontro dei piani reciproci costituiranno la sezione di Σ con un iperpiano *reale* (v. nⁱ 5 e 11). Se tra questi punti ve ne sono di reali, cioè se quell' iperpiano sega realmente Σ, i punti reali d' intersezione rappresenteranno i punti di un' iperconica di π. Sicchè *le iperconiche di π hanno per imagini su Σ le sue sezioni iperplanari reali* (come le catene di una retta hanno per imagini sulla sfera i cerchi reali di questa). Se l' iperpiano è tangente a Σ, l' iperconica corrispondente è degenere.

Nello spazio reale S_4 l' antipolarità della rete r induce una reciprocità fra r ed r' tale che la varietà quadratica generata dalle rette d' intersezione dei piani cogli spazi omologhi sarà reale. *Le iperconiche di π hanno per imagini in S_4 le ∞^8 varietà quadratiche M_3^2 reali e con punti reali che passano per r, r'.* Le iperconiche degeneri, o catene semplici di rette, corrispondono alle varietà *coni:* e quei piani generatori reali di un tal cono quadrico, i quali sono incidenti ad r, r', rappresentano le rette della catena semplice.*)

Infine rappresentando il piano π imaginario di 1ª specie sulle rette reali dello spazio ordinario, un' antipolarità di π dà luogo ad una reciprocità fra π ed il coniugato π' inversa della reciprocità coniugata; ed una retta congiungente due punti reciproci di π e π' è reale quando e solo quando quei due punti sono coniugati, cioè il punto di π è unito per l' antipolarità. Ora le rette che congiungono i punti reciproci di quella reciprocità fra π e π' formano un *complesso quadratico reale di* Hirst**) (cioè un complesso quadratico reale caratterizzato dal contenere tutte le rette di π e quindi di π', od in altri termini ancora un complesso reale di caratteristica [(11)(11)2] nella nota classificazione di Klein e Weiler): le rette reali di questo complesso (se ne esistono) segano su π l' iperconica luogo dei punti uniti (se esistono) dell' antipolarità. Così *le iperconiche di π si posson riguardare come le sezioni delle rette reali dei complessi quadratici reali che contengono il piano rigato π e quindi il coniugato.* — Il complesso generato dai due piani reciproci π, π' si riduce ad un complesso lineare quando la retta $\pi\pi'$ è luogo di punti uniti della reciprocità: ne segue che l' iperconica di π è rappresentata da un *complesso lineare* di rette reali quando (solo) essa contiene la catena rettilinea composta dei punti reali di π.***) —

Proprietà perfettamente analoghe si avrebbero similmente per le rappresentazioni reali delle iperquadriche, ecc.

16. Mediante queste rappresentazioni delle catene rettilinee, iperconiche, iperquadriche ecc. si ritrovano facilmente anche le proprietà delle loro intersezioni, come pure dei sistemi lineari di tali enti, il cui studio si trova avviato nel *Saggio*. Diamo qui un cenno di ciò, considerando per fissar le idee i *sistemi lineari d' iperconiche*, e quindi le loro imagini reali: che in S_4 son date dai sistemi lineari di $M_3{}^2$ reali passanti per r, r'; su Σ dalle intersezioni con un fascio, rete, ecc., d' iperpiani; e nello spazio rigato reale ordinario da sistemi lineari di complessi quadratici reali di rette contenenti il piano rigato π (e π').

*) Abbiamo visto (n. 9) che gli spazi di S_4 equivalgono per noi a coni quadrici $M_2{}^2$ passanti per r, r'. Effettivamente uno spazio reale rappresenta una catena semplice di rette di π contenente la retta fissa i.

Il fatto che una F^2 normale di S_4 passante per r, r' è projettata da ogni suo punto secondo un cono $M_3{}^2$ del detto sistema, corrisponde a questo: che una catena piana è projettata da ogni suo punto secondo una catena semplice di rette.

**) Hirst, *On the complexes generated by two correlative planes* (Collectanea mathematica in mem. Chelini, pag. 51—73).

***) Ciò concorda col fatto che (v. *Saggio*, nota al n. 32) l'insieme di tutti i punti posti sulle rette reali di un complesso lineare reale è un' iperquadrica; e però è segato da un piano qualunque secondo un' iperconica.

L' ente Q d' intersezione di 2 iperconiche del piano π ha per imagine in S_4 la superficie del 4^0 ordine F^4 che è intersezione di due M_3^2 reali per r, r', e che quindi è base per un fascio di M_3^2 siffatte. In questo fascio vi sono 3 *coni* coi centri fuori dello spazio I di r, r' (oltre a 2 coni coi centri in questo spazio): o tutti e tre questi centri son reali, oppure uno è reale e gli altri due — e siano A, A' — imaginari coniugati. Nel 2^0 caso saranno projettivi, perchè generatori del cono A, i fasci di spazi che dai piani fissi rA, $r'A$ contenuti in quel cono projettano i punti reali di F^4 (cioè del cono): e quindi, sostituendo al fascio $r'A$ il suo coniugato rA', saranno antiprojettivi i fasci che dai piani rA, rA' projettano i punti reali di F^4. Ritornando a π segue che: in generale l' ente Q intersezione di (2 e quindi di) un fascio d' iperconiche sta o su 3 iperconiche degeneri, cioè catene semplici di rette, o su una sola; ma in questo 2^0 caso Q si può generare come luogo delle intersezioni dei raggi omologhi di due fasci antiprojettivi di rette. Viceversa, ecc. ecc.

Per imagine di Q nell' ordinario spazio rigato reale si ottiene in generale l' *insieme delle rette reali di una congruenza reale* (4, 2) (intersezione, coi due piani rigati π, π', di un fascio di complessi quadratici) generata dalle congiungenti i punti omologhi di una corrispondenza univoca quadratica fra π e π' (la corrispondenza d' *intersezione* delle 2 reciprocità congiunte alle 2 iperconiche di π). Però, profittando del fatto che Q contiene sempre delle catene rettilinee (sulle rette delle iperconiche degeneri che contengono Q), si può fare che Q contenga precisamente la catena rettilinea dei punti reali di π: allora le 2 iperconiche primitive saranno (n. 15) le sezioni di 2 complessi lineari reali e quindi *Q la sezione con π delle rette reali di una congruenza lineare reale*. Viceversa ogni congruenza lineare reale dà in generale un tal ente Q come sezione delle sue rette reali con un piano imaginario*). I due casi che sopra abbiamo distinto per Q corrispondono risp. all' essere reali o no le 2 direttrici della congruenza. —

Tre iperconiche quando abbiano punti comuni ne hanno in generale una ∞^1 Ω cui corrisponde in generale: nello spazio rigato reale una rigata reale di 6^0 grado generata da due cubiche risp. dei piani π, π' in corrispondenza univoca (corrispondenza d' *intersezione* delle 3 reciprocità fra π, π' congiunte alle 3 iperconiche); su Σ una curva reale del 6^0 ordine sezione di questa varietà con un S_5; e su S_4 una curva reale del 6^0 ordine che con r, r' completa l' intersezione di 3 M_3^2 indipendenti, e quindi di una rete di tali varietà quadratiche.

*) Se il piano contiene una retta reale della congruenza, Q si spezza in questa retta ed una catena piana (cfr. la nota alla fine del n. 13).

La prima rappresentazione mette in evidenza *una cubica piana entro cui l' ente* Ω *è contenuto;* la considerazione della corrispondenza nominata fra quella cubica e la sua coniugata di π' semplifica lo studio di Ω (v. *Saggio* n^i 54 e seg^i). Ma si può anche ricorrere utilmente ad esempio alla rappresentazione con la curva reale nominata del 6^0 ordine di S_4. Dalla definizione di questa C^6 risulta che essa avrà r, r' per trisecanti, e però sarà projettata da r secondo un cono cubico $M_3{}^3$. Su questo stanno pure gli ∞^1 centri dei coni della rete di varietà quadratiche $M_3{}^2$, poichè se A è centro di un tal cono, il piano Ar di questo dovrà tagliar la rete in un fascio di coniche, cioè, oltre che in r, in un fascio di rette, sicchè quel piano projetterà un punto di C^6 e però farà parte del detto cono cubico $M_3{}^3$; viceversa ogni piano generatore di questo sta in un determinato cono della rete di $M_3{}^2$. Le stesso fatto accadendo pel cono cubico che da r' projetta la C^6, si conclude che quegli ∞^1 centri dei coni $M_3{}^2$ della rete formano anche essi una curva del 6^0 ordine con r, r' per trisecanti. E così si giunge a questo risultato: le ∞^2 iperconiche passanti per 6 punti dati di un piano si tagliano in generale in ∞^1 punti, i quali giacciono su una cubica; gli ∞^1 centri delle catene semplici di rette (iperconiche degeneri) che fan parte di quella rete d' iperconiche, cioè che contengono quei punti, formano una varietà che sta pure su quella cubica piana e si può a sua volta riguardare come intersezione di una rete d' iperconiche (cfr. *Saggio* n. 49 e segu^i). —

Un S_4 di S_8 taglia la varietà Σ del 6^0 ordine in 6 punti, e da 5 di questi è determinato il 6^0. Così pure in S_4 quattro $M_3{}^2$ passanti per r, r' si tagliano inoltre in 6 punti, per modo che solo 5 di questi si possono prendere ad arbitrio ed allora è determinato il 6^0. A ciò corrisponderà il fatto che su π vi sono dei *gruppi di* 6 *punti associati* tali che tutte le ∞^3 iperconiche passanti per 5 punti qualunque vengono necessariamente a passare anche pel 6^0 associato. Una tal sestupla insieme con la coniugata dànno due sestuple di coppie di punti di π, π' tali che ogni reciprocità fra questi piani la quale contenga 5 di quelle coppie contiene sempre la 6^a. —

Cose analoghe si posson dire per le intersezioni di iperquadriche dello spazio ordinario, od in generale di S_n. Così in questo si hanno dei *gruppi di* $\binom{2n}{n}$ *punti associati* tali che tutte le ∞^{2n-1} iperquadriche che passano per n^2+1 qualunque di quei punti, passano pure di conseguenza pei rimanenti. Ecc. ecc. — Non ci fermiamo su queste proprietà, e passiamo invece a considerare una serie di enti, di cui quelli finora accennati non sono che casi particolarissimi.

Gli enti iperalgebrici in generale.

17. Le antiprojettività in se e per gli enti che generano dànno i primi e più semplici esempi di una classe di enti diversi da quelli di cui si occupa la geometria ordinaria, ma pur interessanti: classe entro cui del resto quegli enti geometrici ordinari si posson considerare inclusi, come casi particolari.

In generale, se fra i punti reali, o le rette reali, ecc., con cui noi rappresentiamo i punti complessi di un dato spazio (od anche gli elementi complessi di una varietà qualunque), consideriamo quelli che costituiscono una curva, superficie, M_3, ..., ovvero una rigata, congruenza, complesso, ..., e così via; essi saranno imagini dei punti complessi di una varietà $\infty^1, \infty^2, \infty^3, \ldots$, che noi chiameremo *monovarietà* o *filo*, *bivarietà* o *tela*, *trivarietà*, ... Così gli $\infty^2, \infty^4, \ldots$ punti *complessi* di una *curva*, *superficie*, ecc. costituiscono delle particolari bivarietà, tetravarietà, ecc.*); mentre gli $\infty^1, \infty^2, \ldots$ punti *reali* di un' ordinaria curva, superficie, ... reale formano dei particolari fili, tele, ecc. Le catene rettilinee, le iperconiche, le iperquadriche, ... sono esempi di fili rettilinei, di trivarietà piane, di pentavarietà dello spazio, ecc.; le catene piane, e gli enti Q (n. 16) basi di fasci d'iperconiche sono tele; ecc. ecc.

La rappresentazione reale di questi nuovi enti serve ad ottenerne le proprietà. Ad esempio essa permette di risolvere subito la questione delle rette, piani, ... *tangenti* (cfr. *Saggio*, n. 15, ove la questione è trattata direttamente e in modo più completo). Per fissar le idee limitiamoci alle varietà piane. Un filo del piano oggettivo π ci dà per imagine reale in S_4 una curva; per ogni tangente (reale) di questa passa *un* piano reale appoggiato ad r, r'. A tali piani corrispondono in π le *rette tangenti al filo* nei suoi punti; se quella curva di S_4 ha un punto doppio, nodale od isolato, lo stesso accadrà pel filo, e questo avrà in generale due tangenti in un nodo; ecc. — Una tela di π ha per imagine in S_4 una superficie: i piani passanti per un punto ordinario di questa, i quali contengono risp. le varie tangenti (che formano il piano tangente) in quel punto e si appoggiano ad r, r', sono evidentemente una schiera di piani di un cono quadrico $M_3{}^2$ avente quel punto per centro: corrispondentemente (n. 15) si avrà su π una *catena semplice di rette tangenti alla tela* in un suo punto ordinario. — Una trivarietà di π è rappresentata in S_4 da una M_3 reale: fra i piani

*) A partire di qui la dimensione, od indice d'infinità, di una varietà qualunque di enti sarà sempre il numero dei corrispondenti parametri *reali* indipendenti (*dimensione reale*): è perciò che alle varietà *ordinarie* (cioè curve, superficie, ecc.) i cui elementi dipendono da parametri *complessi* dobbiamo assegnare una dimensione doppia di quella che nelle considerazioni solite si pone, e che, quando occorra ancora di parlarne, distingueremo col nome di *dimensione complessa*.

tangenti a questa in un suo punto ordinario (piani che costituiscono lo spazio S_3 tangente) uno ve n' ha che s'appoggia ad r, r': dunque la trivarietà di π ha in generale *una retta tangente* in ogni suo punto ordinario (retta cioè che incontra la trivarietà secondo un filo avente quel punto per doppio, nodale od isolato).

Si può pure parlare di *connessione* di un filo, tela, trivarietà, ecc.: sarà cioè quella della linea, superficie, varietà, ecc. *reale* che ne è l'imagine. Essa costituisce un carattere invariabile per trasformazioni univoche e continue *qualunque*.

18. Se l'ente reale, che in una delle nostre rappresentazioni è imagine di un ente complesso, è algebrico, l'ente complesso si dirà *iperalgèbrico*. Questa definizione è indipendente dalla rappresentazione che si sceglie, poichè tutte le varietà reali Φ su cui noi rappresentiamo una stessa forma fondamentale F vengono con ciò ad essere fra loro in corrispondenza algebrica*). Essa equivale evidentemente a dire iperalgebrico un ente quando si compone di quegli elementi le cui coordinate (complesse) hanno le componenti reali legate da una o più equazioni algebriche date. L'ente iperalgebrico può essere una varietà di punti, rette, ecc., od anche un connesso, una corrispondenza, ecc. La denominazione scelta è motivata da ciò che il nuovo concetto abbraccia quello consueto di ente *algebrico* come caso particolare: effettivamente *nelle nostre rappresentazioni l'imagine reale di un ente algebrico è evidentemente ancora un ente algebrico* (*reale*)**).

Le antiprojettività e gli enti da esse generati e di cui abbiam fatto

*) Oltre alle rappresentazioni su varietà reali a cui sempre ci riferiamo, si posson dunque considerare tutte quelle che se ne traggono mediante trasformazioni birazionali reali di quelle varietà: vale a dire tutte le rappresentazioni univoche su varietà di elementi reali le cui coordinate dipendano *algebricamente* dalle componenti reali delle coordinate degli elementi complessi aggetivi.

**) Questo fatto non sembra privo d'importanza. Nelle rappresentazioni reali che ordinariamente si considerano per gli enti algebrici non si bada che le imagini siano ancora algebriche: così ad es^0 quando una curva algebrica (od un *algebraische Gebilde* qualunque) si rappresenta coi punti reali di una superficie di Riemann. Le nostre rappresentazioni dànno invece per imagine reale di una curva algebrica una superficie reale *algebrica* (cfr. n. 21); e tutte le superficie che si ottengono così come imagini di una stessa curva algebrica sono fra loro in corrispondenza univoca reale *algebrica* (laddove le varie superficie Riemanniane sono in corrispondenza univoca reale *conforme*). Che le superficie reali che noi otteniamo siano in S_4 o sulla Σ di S_8 non importa: con una projezione si porterebbero nello spazio ordinario. Del resto si può direttamente avere nel nostro spazio una superficie reale algebrica imagine di una data curva algebrica: per es^0 assumendo come imagine reale di un punto qualunque di questa curva il punto medio fra esso ed il coniugato (ciò dopo aver resa imaginaria la curva data, affinchè la rappresentazione sia univoca).

cenno sono enti iperalgebrici. Alcune delle considerazioni relative ad essi si possono, come vedremo, estendere a tutti gli enti iperalgebrici.

Le *corrispondenze iperalgebriche* — cioè aventi per imagini reali delle corrispondenze algebriche — formano un *gruppo*. Ricordando che l'essenza della rappresentazione della forma oggettiva F sulla varietà reale Φ (ad es^0 sulla sfera o varietà Σ, ecc.) consiste nel sostituire ad F una *schiera* (di rette, piani, ecc.) di Φ, si vede che dentro a quel gruppo si può caratterizzare il gruppo delle *corrispondenze algebriche* come quello che è rappresentato su Φ da quelle corrispondenze algebriche reali che mutano ogni schiera di Φ in se stessa (cioè in rette, piani, ecc. della stessa schiera). *) Una 2^a *specie particolare di corrispondenze iperalgebriche* è rappresentata da corrispondenze algebriche reali di Φ che trasformano gli elementi di ogni schiera in quelli dell' altra: esse si posson riguardare come i prodotti delle corrispondenze algebriche e del coniugio. Le antiprojettività sono appunto di tal natura. In generale però una corrispondenza iperalgebrica ha per imagine reale su una Φ una corrispondenza che *non* muta gli elementi (rette, piani, ecc.) delle due schiere in elementi della stessa natura.

Dall' osservazione già fatta sulla natura della rappresentazione della forma F sulla varietà reale Φ segue similmente che fra le *varietà iperalgebriche* si posson caratterizzare le *varietà algebriche* come quelle le cui imagini su Φ sono costituite dai punti ... reali di una varietà composta di elementi (rette, piani, ecc.) di una schiera di Φ, ossia dalla intersezione di questa varietà con la coniugata dell' altra schiera.

Rispetto al gruppo delle corrispondenze iperalgebriche *gli enti iperalgebrici formano un corpo* (che abbraccia nel modo detto quello degli enti algebrici). In altri termini, per corrispondenze od operazioni iperalgebriche qualunque da enti iperalgebrici si ottengono sempre enti iperalgebrici. — La parte reale di un ente algebrico è un ente iperalgebrico (intersezione dell' ente algebrico con una catena, ecc.).

Un filo iperalgebrico ha un *genere*, invariantivo per trasformazioni iperalgebriche: il genere delle curve o rigate ecc. algebriche, che ne sono imagini. Similmente una tela iperalgebrica ha due *generi*, invariabili per trasformazioni iperalgebriche, e cioè i due generi delle superficie algebriche che la rappresentano. Ecc. Accanto a quei generi si hanno poi similmente dei *moduli*, relativi allo stesso gruppo di trasformazioni.

---

*) S'intende, qui e nel seguito, che la corrispondenza algebrica su Φ, imagine reale di una corrispondenza (iperalgebrica) di F, non si limiti solo agli elementi *reali* di Φ, ma venga estesa, *proseguita analiticamente*, anche agli elementi *imaginari*. — Così pure nelle varietà algebriche reali che su Φ rappresentano le varietà iperalgebriche di F noi considereremo non solo i punti reali, ma anche quelli imaginari.

19. Altri caratteri, soltanto *projettivi*, delle varietà iperalgebriche si hanno considerando le varietà algebriche in cui esse son contenute e certe corrispondenze algebriche a cui esse dànno origine e che posson servire a generarle.

Se prendiamo in un piano π imaginario di 1ª specie un filo, od una tela, o trivarietà iperalgebrica, abbiamo per definizione che essi provengono risp. come intersezione di π con le rette reali di una rigata algebrica reale (inviluppo piano di rette se il filo è su una retta imaginaria di 1ª specie), o di un sistema, o complesso reale algebrico di rette. Similmente in generale se in un S_n abbiamo una varietà iperalgebrica V_r (vale a dire di dimensione r, dipendente cioè da r parametri reali), reso quell' S_n imaginario (ad esempio mediante una projezione, che si può intender fatta da un centro reale), la varietà si potrà considerare come la traccia sull' S_n delle rette reali di un sistema algebrico reale avente la dimensione *complessa* r, cioè dipendente da r parametri *complessi*. Ora le tracce sull' S_n di *tutte le rette complesse* di questo sistema formeranno una varietà algebrica avente una certa dimensione complessa k, ossia una M_k, la quale però potrà anche essere tutto l' S_n. Potrà darsi che per un punto di questa M_k passi solo una, od almeno un numero finito di rette di quel sistema; ed allora sarà evidentemente $k = r$. Ovvero ogni punto di quella M_k è traccia d'infinite rette del sistema (la M_k è *focale* pel sistema), ed allora $k < r$; e precisamente sarà allora $r - k$ la dimensione complessa del cono di rette del sistema uscente da ogni punto della M_k. Dunque: *una varietà iperalgebrica è sempre contenuta in una varietà algebrica la cui dimensione complessa non supera la dimensione reale della varietà iperalgebrica.* Così un filo iperalgebrico sta sempre in una curva algebrica; una tela iperalgebrica in una superficie algebrica; ecc. — Nel seguito con M_k intenderemo la *minima* varietà algebrica contenente la V_r.

Considerando ancora quel sistema algebrico di rette, e le coppie di punti che esso dà come tracce sul dato S_n e sul suo coniugato, si vede poi che: *Se si unisce ad ogni punto di una varietà iperalgebrica il punto coniugato, si hanno le coppie reali* (*cioè composte di due punti coniugati*) *di punti di una varietà algebrica reale di coppie;* in altri termini *i punti di una varietà iperalgebrica, insieme coi loro coniugati, dànno le coppie di punti omologhi e coniugati di una corrispondenza algebrica armonica al coniugio* (cfr. n. 11), cioè tale che i coniugati di due punti omologhi sono omologhi nella corrispondenza inversa. Diremo che quella corrispondenza algebrica è *congiunta* alla varietà iperalgebrica: essa lega la varietà algebrica M_k entro cui sta la V_r alla varietà coniugata, facendo corrispondere ad ogni punto dell' una una M_{r-k} sull' altra (sichè gl' indici della corrispondenza sono finiti se $k = r$). Il prodotto di essa, corrispondenza algebrica armonica al coniugio, pel coniugio sarà (n. 11) *una corrispondenza involutoria, iperalgebrica di* 2^a *specie* (v. n. 18), *fra i punti della varietà algebrica* M_k, *la qual corrispondenza avrà la varietà iperalgebrica* V_r *per luogo dei punti uniti* (o, come anche diremo, per varietà fondamentale). Essa è la corrispondenza che si ha sulla M_k fra le tracce delle rette coniugate del sistema algebrico reale considerato.

I caratteri della M_k e quelli della corrispondenza algebrica congiunta alla V_r, o della corrispondenza iperalgebrica di 2^a specie che ha la V_r per varietà fondamentale, sono altrettanti nuovi caratteri di questa varietà iperalgebrica. In particolare se l'indice di quelle corrispondenze è finito, sicchè $k = r$, noi lo diremo *indice* della V_r. In tal caso conviene poi chiamare *grado* di questa varietà iperalgebrica il prodotto dell' indice per l'ordine della varietà algebrica M_r; mentre la locuzione di *ordini* della V_r si può riservare per gli *ordini*, convenientemente definiti, di quelle corrispondenze. — Il grado della V_r coinciderà dunque coll' ordine della M_r *quando l'indice è* $= 1$: allora la corrispondenza algebrica congiunta fra la M_r e la varietà coniugata è univoca, e però *l'insieme dei moduli della* M_r *è coniugato di se stesso, cioè reale*. Segando il sistema di rette reali contenente la V_r con un iperpiano reale si ha una nuova M_r la quale sarà reale ed in corrispondenza algebrica univoca con la primitiva, sì che *la* V_r *d'indice* 1 *viene trasformata* (algebricamente ed univocamente) *nell' insieme dei punti reali della nuova* M_r, e la corrispondenza iperalgebrica involutoria che aveva quella V_r per fondamentale vien trasformata nel coniugio*). Si noti inoltre che in questo caso dell' indice 1 i generi ed i moduli della V_r (definiti alla fine del n⁰. prec.) sono gli stessi che quelli della M_r che la contiene. —

Le proprietà che così (in questo n⁰) abbiam lette sulla rappresentazione dei punti complessi mediante le loro rette reali, sono pure rappresentate semplicemente sulle altre varietà reali Φ di cui sogliamo servirci. La corrispondenza algebrica congiunta ad una varietà iperalgebrica si ha allora fra le due schiere di una Φ considerandovi come omologhi due elementi che passino per uno stesso punto della varietà

*) Il sig. Klein nell' opuscolo *Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale* (Leipzig 1882), e specialmente nei §§ 20 e 21, considera su una superficie di Riemann le due specie di rappresentazioni conformi, cioè quelle che conservano e quelle che cambiano il segno degli angoli: come quelle *di* 1^a *specie* corrispondono alle trasformazioni *algebriche* del corrispondente ente algebrico, così quelle *di* 2^a *specie* equivalgono alle corrispondenze *iperalgebriche*. E la proposizione, che il Klein dimostra con semplici considerazioni funzionali, che se una superficie di Riemann è *simmetrica* (cioè ammette una trasformazione univoca involutoria di 2^a specie) l'ente algebrico corrispondente si può rendere *reale*, equivale al caso di $r = 1$ nel teorema sopra esposto.

algebrica reale che sulla Φ rappresenta quella iperalgebrica della forma oggettiva; e la corrispondenza iperalgebrica involutoria si ha entro l'una schiera fra gli elementi che vanno a due punti coniugati di quella varietà algebrica reale. Ecc.

Si avverta infine che quasi tutte le considerazioni che finora abbiam fatto intorno agli enti *iperalgebrici*, cioè aventi per imagini reali enti *algebrici*, si potrebbero svolgere in modo pienamente analogo per classi più vaste di enti, ad es° per gli enti, *iperanalitici*, le cui imagini reali sono enti *analitici*, cioè definiti da *funzioni analitiche* (nel senso di Weierstrass): non vi sarebbe in generale da far altro appunto che mutare le parole «*algebrico*» ed «*iperalgebrico*» in «*analitico*» ed «*iperanalitico*».

20. Applichiamo ai primi casi, cioè ai fili (monovarietà), alle tele (bivarietà), ecc. le definizioni e le proposizioni generali sulle varietà iperalgebriche finora esposte. Ciò gioverà anche a chiarir meglio le idee in proposito.

Per un *filo* chiamiamo indifferentemente *grado* od *ordine* il prodotto del suo indice per l'ordine della curva in cui esso giace. — Allora un filo rettilineo d'ordine n avrà pure n per indice. Esso sarà rappresentato risp. sulla sfera o sul piano σ o sulla congruenza lineare mediante una corrispondenza (n, n) fra le due schiere di generatrici, o fra i due fasci C, C' di rette, o fra le punteggiate s, s': ossia da una curva reale d'ordine $2n$ della sfera, o del piano — con C, C' per punti n-pli in questo secondo caso —*), o da una rigata reale di grado $2n$ della congruenza lineare.

Un filo piano d'ordine n e indice α è rappresentato nello spazio rigato reale da una rigata algebrica reale di grado $2n$ generata dalla curva d'ordine $\frac{n}{\alpha}$ che contiene il filo, in corrispondenza algebrica (α, α) con la coniugata. Sulla varietà Σ il filo stesso è rappresentato da una curva reale, che è incontrata dalle varietà cubiche di ciascuna schiera in n punti $\left(\text{distribuiti ad } \alpha \text{ ad } \alpha \text{ su } \frac{n}{\alpha} \text{ piani di } \Sigma\right)$, e però è d'ordine $2n$. E su S_4 ha per imagine una curva reale che sarà pure in generale d' ordine $2n$**), avrà le rette r, r' per n-secanti, e sarà projettata da ciascuna di queste in modo che ogni piano projettante

*) La curva piana può abbassarsi d'ordine (purchè sia sempre incontrata in n punti mobili dalle rette passanti per C o C'): ciò accadrà quando il filo rettilineo contenga il punto — all' infinito — corrispondente alla retta CC' di σ.

**) Ma se il filo incontra la retta all' infinito del piano π, si abbasserà l'ordine di quest' imagine.

projetti in pari tempo α punti della curva — cioè mediante un cono d'ordine $\frac{n}{\alpha}$.

Analogamente pei fili dello spazio ordinario, ecc.

Da queste e dalle precedenti proposizioni si traggono in particolare i seguenti risultati. — Un *filo di* 1^0 *ordine* sta sempre su una retta e non è altro che una *catena semplice rettilinea.* — Un *filo di* 2^0 *ordine* o è rettilineo (ed è rappresentato sul piano σ da una quartica bicircolare, ecc., sicchè in generale sarà *di genere* 1); oppure sta su una conica e vi costituisce una *catena semplice conica,* cioè il luogo dei punti uniti di un' antinvoluzione fra i punti della conica. — Un *filo di* 3^0 *ordine* o è rettilineo, o sta su una cubica (di modulo od invariante assoluto reale). Se questa cubica è razionale (piana o sghemba), il filo è ancora il luogo dei punti uniti di un' antinvoluzione, cioè fra i punti della cubica. Se il filo cubico è ellittico, oppure se razionale è dotato di punto doppio, esso sarà piano, ed avrà per imagine in S_4 una C^6 ellittica, oppure dotata di punto doppio; e poichè una tal curva sta, come subito si vede, in ∞^2 $M_3{}^2$ reali che si tagliano in essa e nelle sue trisecanti r, r', così il filo cubico sarà allora l'*intersezione di una rete d'iperconiche* (cfr. n. 16). Invece un filo cubico razionale piano privo di punto doppio sta solo in un fascio d'iperconiche. (cfr. *Saggio* n. 58).

21. Una tela iperalgebrica ha per caratteri l'ordine della superficie algebrica che la contiene, e l'indice e gli altri caratteri (ordini) della corrispondenza algebrica congiunta. Se ci limitiamo per brevità alle tele piane, ci rimangono in esse due caratteri essenziali da considerare: l'*indice* o *grado* α, e l'*ordine* ν, cioè l'indice α e l'ordine ν della corrispondenza algebrica congiunta fra π et π' (intendendo per *ordine* della corrispondenza il numero delle coppie di punti omologhi costituite da punti di due rette date di π et π'). *) — Le rette congiungenti i punti omologhi dei due piani formano nell' ordinario spazio rigato un sistema algebrico reale di rette, che, come subito si vede, ha in generale su π e π' due inviluppi di rette di classe $\nu + \alpha$ (con la retta $\pi\pi'$ per ν-pla), ed è esso stesso di classe ν e d' ordine $\nu + 2\alpha$**): le sue rette reali saranno le imagini dei punti della tela. — In S_4 la tela medesima è rappresentata da una superficie che deter-

*) Si noti che questi due numeri non possono prendersi completamente ad arbitrio. Così l'indice α della corrispondenza algebrica non può superare il quadrato ν^2 dell' ordine (cioè il numero delle intersezioni delle curve che su π' corrispondono a due rette di π).

**) Se l'indice $\alpha = 1$, la corrispondenza fra π e π' è *Cremoniana*, e si ha una *congruenza Cremoniana* secondo la denominazione introdotta dal sig. Hirst.

mina fra le due reti di piani (projettanti) r, r' una corrispondenza d'indice α e d'ordine ν; donde si trae, applicando il principio di corrispondenza ad una sezione piana, che la superficie è d'ordine $\nu + 2\alpha$. Essa ha le rette r, r' per α-ple ed è segata inoltre in α punti mobili da ogni piano per r od r', ed in ν rette appoggiate ad r, r' dallo spazio I di queste. — Infine su Σ l'imagine della tela è una superficie che viene incontrata da ogni piano di Σ in α punti e da ogni quadrica in ν punti: donde si trae che è d'ordine $2\nu + 2\alpha$.*) —

Tutto ciò va alquanto modificato, od almeno interpretato convenientemente, nel caso che la tela si riduca all' insieme dei punti (complessi) di una curva piana algebrica d'ordine m. Allora non si ha più una corrispondenza ordinaria fra π e π', o fra le due schiere di piani di S_4 o di Σ. L'imagine reale della curva è allora in generale: il sistema reale di rette (m^2, m^2) che ha quella curva e la sua coniugata per linee focali; una superficie reale d'ordine m^2 in S_4, intersezione di due coni coniugati M_3^m aventi per assi r, r' ed uno dei quali è projettivo alla data curva; una superficie reale d'ordine $2m^2$ su Σ, intersezione di due varietà composte risp. di piani delle due schiere.**) Si conservano dunque in generale i risultati precedenti, purchè per l'ordine ν della tela si ponga il quadrato m^2 dell' ordine della curva, e si annulli l'indice α. —

Una *tela piana di* 1° *ordine* $\nu = 1$, la quale non sia una retta, ha per corrispondenza algebrica congiunta una collineazione. Essa ha l'indice $\alpha = 1$ ed è l'insieme dei punti uniti di un' antinvoluzione piana: cioè una *catena piana*. Effettivamente la sua imagine in S_4 risulta una superficie d'ordine $\nu + 2\alpha = 3$ contenente r, r', e quindi (non giacendo nello spazio I di r, r') una rigata cubica normale avente queste rette per generatrici (cfr. n. 13); ecc. — Una *tela piana di* 2° *ordine e d'indice* 1 ha per congiunta un' ordinaria corrispondenza univoca quadratica fra π e π'. Essa è rappresentata in S_4 da una superficie del 4° ordine passante per r, r' e segante inoltre lo spazio I secondo due rette appoggiate a quelle: questa superficie sarà perciò incontrata da ogni S_3 secondo una quartica di 1ª specie, e per due di queste ed un punto della superficie esterno ad esse si potrà far passare un sistema di M_3^2 di dimensione complessa (almeno) $14 - 4 - 2 \cdot 4 - 1 = 1$, sicchè la superficie sarà la base di un fascio di M_3^2 per r, r'. Dunque (come anche altrimenti si poteva vedere) la tela piana d' indice 1 e

*) Gli ordini $\nu + 2\alpha$ e $2\nu + 2\alpha$ delle superficie imagini in S_4 e su Σ sono pure caratteri che può esser opportuno di considerare in modo speciale nel classificare le tele piane iperalgebriche.

**) Cfr le osservazioni fatte in nota a pag. 438 su queste superficie *algebriche reali* con cui rappresentiamo i punti complessi di una curva algebrica, od in generale gli elementi di un ente algebrico.

di 2⁰ ordine non è altro che *l'intersezione Q di un fascio d'iperconiche* (cfr. n. 16). — Ecc. ecc. —

In certi casi una tela piana può presentarsi come definita da una equazione algebrica

$$(1) \qquad f(x, \bar{x}) = 0$$

di grado μ nelle coordinate x di punti del piano e di grado μ_1 nelle coniugate $\bar{x}$. Ciò significa che la si considera come luogo dei punti uniti di un connesso iperalgebrico di 2ª specie *non involutorio* (cfr. n. 19 e 22) $f(x, \bar{y}) = 0$. Indicando con $\bar{f}$ la funzione *coniugata* di f (cioè avente i coefficienti coniugati), l'equazione (1) trae con se:

$$(2) \qquad \bar{f}(\bar{x}, x) = 0.$$

La tela piana avrà una corrispondenza algebrica congiunta che si può intender definita (come *coincidenza*) dalle due equazioni (connessi algebrici fra π e π')

$$f(x, y) = 0, \quad \bar{f}(y, x) = 0.$$

Ne segue subito che per questa corrispondenza algebrica, e quindi anche per la tela piana rappresentata dalla (1) *l'indice è $\mu\mu_1$ e l'ordine $\mu^2 + \mu_1^2$*. Quindi, ad esempio, la superficie imagine di questa tela in S_4 sarà d'ordine $(\mu + \mu_1)^2$, e precisamente l'intersezione di due $M_3^{\mu+\mu_1}$ generate da quei due connessi algebrici (considerati fra le reti r, r'); ecc. — Così per $\mu = \mu_1 = 1$: un' antireciprocità piana ha per luogo di punti uniti la base Q di un fascio d'iperconiche; ecc.

22. Consideriamo un filo iperalgebrico sulla retta, una trivarietà iperalgebrica nel piano ed in generale una varietà iperalgebrica di dimensione $2n - 1$ in S_n. La corrispondenza algebrica congiunta sarà un connesso $f(x, y) = 0$ avente i due ordini uguali fra loro (l'*ordine* della varietà iperalgebrica); e l'essere questo connesso armonico al coniugio (n. 19) significa, come tosto si vede, che si può render la f tale che per ogni termine $Cx_1^{\alpha_1} \ldots y_1^{\beta_1} \ldots$ essa contenga anche il termine $\bar{C} x_1^{\beta_1} \ldots y_1^{\alpha_1} \ldots$. Ponendo poi per y il coniugato di x, si ha che l'equazione

$$f(x, \bar{x}) = 0$$

rappresenta un filo iperalgebrico rettilineo, od una trivarietà iperalgebrica nel piano, ecc., solo quando per ogni suo termine essa contenga anche il coniugato (od almeno a ciò si possa ridurre); nel qual caso, essendo coniugata di se stessa, diremo *reale* l'equazione, o la forma $f(x, \bar{x})$. *) La stessa cosa si scorge partendo da un' equazione algebrica reale fra le componenti reali delle coordinate x_i di un punto: esprimendo queste componenti mediante le x_i e le coniugate $\bar{x}_i$ si può ridurre l'equazione alla forma che abbiam detta. —

Servendosi dei connessi algebrici congiunti rispettivamente a quelle varietà iperalgebriche si ottengono subito le rappresentazioni reali di queste. Ciò s'è già fatto nel 1° caso, quello dei fili rettilinei (n. 20). Accenniamo ancora al caso successivo, cioè quello delle trivarietà piane (donde il lettore passerà subito al caso generale).

Se le due forme doppie tra cui è dato un connesso ternario sono ad es° le due schiere di piani della varietà Σ di S_8 e questo connesso è dello stesso ordine ν rispetto ad ambe le forme, cioè dato dalla equazione $f(x, y) = 0$ di grado ν nelle x e di grado ν nelle y; applicando le formole (n. 5) $X_{lm} = x_l y_m$ si può, ed anzi in più modi se $\nu > 1$, ridurre quell' equazione ad un' equazione fra le X_{lm} e del grado ν. Dunque il connesso è rappresentato su Σ dall' intersezione *completa* con una $M_7{}^\nu$: intersezione che sarà d'ordine 6ν, cioè una $M_3{}^{6\nu}$. E quella $M_7{}^\nu$ si potrà assumere reale se quel connesso è armonico al coniugio, ed allora la $M_3{}^{6\nu}$ intersezione sua e di Σ sarà *l'imagine reale della trivarietà iperalgebrica d'ordine* ν di π.**) — In S_4 invece

*) Propriamente può accadere che una tal equazione non sia soddisfatta da alcun punto complesso, o che si verifichi solo per una varietà a dimensione minore di quanto sopra è detto. Ciò accade ad es° per l'equazione $\Sigma a_l x_l \bar{x}_l = 0$ (equazione canonica di un' *iperquadrica*) quando i coefficienti che non s'annullano son tutti dello stesso segno. — Ma questa cosa sarà illuminata in seguito con l'introduzione dei punti bicomplessi.

**) In generale se le coppie di punti x, y di due S_n si rappresentano (n. 7) coi singoli punti X della varietà M_{2n} di S_N, ove $N = n(n+2)$, definita da

(1) $$X_{lm} = x_l y_m:$$

varietà a cui è collegata (cfr. n. 5 e la Nota di Palermo ivi citata) quella M_{2n} *d'iperpiani* (rappresentante le coppie di S_{n-1} di quei due S_n)

(1') $$\Xi_{lm} = \xi_l \eta_m;$$

un connesso

(2) $$f(x, y) = 0$$

fra quei due S_n, il quale abbia entrambi gli ordini uguali a ν, sarà rappresentato sulla M_{2n} da una M_{2n-1}, che si può riguardare come l'intersezione completa di quella varietà con una varietà M_{N-1}^ν d'ordine ν di S_N

(3) $$f(X) = 0.$$

Anzi: se $\nu > 1$, valendosi delle relazioni quadratiche

(4) $$X_{lm} X_{l'm'} - X_{lm'} X_{l'm} = 0,$$

che valgono in forza delle (1), cioè rappresentano altrettante varietà M_{N-1}^2 passanti il connesso fra le due reti r, r' genera una $M_3^{2\nu}$ (projezione di quella $M_3^{6\nu}$) incontrata da ogni piano di ciascuna rete in una curva mobile

---

per la M_{2n}, si può modificare in infiniti modi la (3); aggiungendole cioè le (4) moltiplicate per forme arbitrarie di grado $\nu - 2$. Orbene da una semplice enumerazione delle costanti del problema (le quali vengono assoggettate ad altrettante equazioni lineari) appare — e non sembra difficile completarla con qualche opportuna considerazione o con un calcolo effettivo — che *fra le M_{N-1}^{ν} che così si posson condurre per quella M_{2n-1} ve n'è sempre una ben determinata alla quale è apolare la M_{2n} suddetta* — ossia una tale che le polari quadratiche rispetto ad essa sono apolari, e cioè armonicamente circoscritte, alle varietà quadratiche analoghe alle (4)

$$(4') \qquad \Xi_{lm}\Xi_{l'm'} - \Xi_{lm'}\Xi_{l'm} = 0$$

entro cui la M_{2n} (1') è contenuta, — vale a dire tale che sian soddisfatte identicamente le relazioni

$$(5) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial X_{lm}\partial X_{l'm'}} - \frac{\partial^2 f}{\partial X_{lm'}\partial X_{l'm}} = 0.$$

(Nel caso che $n = 1$, cioè che la M_{2n} sia una quadrica ordinaria, la dimostrazione si completa facilmente; e si ritrova una proposizione che il sig. Study a pag. 177 dei Sächs. Berichte 1890 ottiene come caso particolare di un suo teorema di apolarità relativo a forme quadratiche qualunque). Questa varietà, o forma, f, che possiam chiamare *normale* (come fa Clebsch in un caso analogo, sebbene diverso dall' attuale), è importante specialmente per la *polarità* rispetto al connesso. Sostituendo nella forma normale $f(X)$ le (1) e polarizzando colle $X'_{lm} = x'_l y'_m$, in forza delle (5) si trova subito

$$(6) \qquad \sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial y_m} x'_l y'_m \equiv \nu \sum \frac{\partial f}{\partial X_{lm}} X'_{lm}.$$

Il 1° membro di quest' identità, posto $= 0$, dà la *polarità rispetto al connesso;* e il 2° membro mostra che *essa si riduce alla polarità ordinaria rispetto alla varietà normale* $f(X) = 0$.

Segue che la *polarità* (*iperalgebrica*), che noi possiamo costruire *in base ad una varietà iperalgebrica d'ordine ν data da un' equazione reale*

$$f(x, \bar{x}) = 0$$

(una V_{2n-1}^{ν} di S_n), polarità che deriverebbe dalla considerazione della varietà iperalgebrica d'ordine $\nu - 1$

$$\sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial \bar{x}_m} x'_l \bar{x}'_m = 0$$

come 1ª *polare di x', si può riguardare come equivalente alla polarità che in S_N è definita da una M_{N-1}^{ν} (normale).*

[Il sig. Study, rispondendo ad una mia domanda in proposito, mi comunicò gentilmente che le proposizioni accennate su l'apolarità della M_{2n} e le M_{N-1}^{ν} normali ecc., come pure varie altre analoghe a quelle e già note, rientrano tutte in teoremi molto più generali di apolarità in cui, in luogo ad esempio d'ordine ν, ed avente r, r' per rette ν-ple. — Infine nello spazio rigato reale la trivarietà piana dà come imagine un complesso reale di rette di grado 2ν con le rette dei due piani π, π' per ν-ple. —

Segando una trivarietà piana iperalgebrica con una retta, una pentavarietà spaziale iperalgebrica con una retta o con un piano, ecc., si ha risp. un filo rettilineo od una trivarietà piana, ecc., *dello stesso ordine*. Ciò è evidente sì per via analitica che mediante le rappresentazioni reali; ma esige restrizioni come quelle contenute nella penultima nota.

Introduzione di punti bicomplessi.

23. Le definizioni che abbiam date degli ordini e degl' indici delle varietà iperalgebriche erano *indirette*, ricorrevano cioè alle corrispondenze algebriche congiunte delle varietà, oppure alle rappresentazioni reali di queste. Se si vogliono delle definizioni *dirette*, che cioè ricorrano soltanto alle varietà come luoghi di punti (inviluppi di rette, ecc.), si è condotti a riportare su queste le definizioni degli ordini ecc. delle varietà reali imagini: ma allora si presentano delle difficoltà inerenti alla limitazione degli elementi rappresentativi, cioè di esser *reali*. Così per una tela piana d'ordine ν e d'indice x l'imagine in S_4 (cfr. n 21) è una superficie d'ordine $\nu + 2\alpha$ con r, r' per rette α-ple, e quindi incontrata da ogni piano reale appoggiato ad r, r' in ν punti fuori di queste rette; sicchè si avrebbe che la retta di π che ha quel piano reale per imagine taglia la tela in ν punti: cioè l'ordine di una tela piana sarebbe definibile direttamente come il numero dei punti d'incontro con una retta qualunque del suo piano. Ma un ostacolo a ciò si ha nel fatto che quei ν punti di S_4 possono, tutti od in parte, essere *imaginari*, e quindi non rappresentare più punti complessi di π: sicchè l'enunciato precedente non sarebbe esatto; si avrebbe solo che una retta qualunque sega in generale la tela d'ordine ν *al più* in ν punti (od altrimenti in un numero che ne è inferiore per un numero pari).

Inconvenienti simili si avrebbero evidentemente più in generale, se si volesse parlare dell' intersezione di due o più varietà iperalgebriche qualunque: le varietà reali che le rappresentano possono ad esempio segarsi secondo varietà prive di punti reali, od in un numero finito di punti non tutti reali, ecc. ecc.: donde una serie di distinzioni di

della varietà rappresentante le coppie di punti di due S_n, compare la varietà rappresentante i gruppi di punti, rette, ecc. (ogni elemento contato un dato numero di volte) presi risp. in dati spazi qualunque. — Auguro che il sig. Study publichi presto questi suoi teoremi. —

Giugno 1892.]

casi, enunciati complicati e poco precisi, disuguaglianze anzi che uguaglianze, ecc. — E di tal natura sono appunto alcune distinzioni di casi che già abbiamo incontrate, ad es^0 a proposito delle antinvoluzioni ed antipolarità — le quali possono avere catene, iperconiche, iperquadriche, ecc. di punti uniti, od anche non averne affato; delle intersezioni di catene, iperconiche, iperquadriche, ecc.; dei fasci d'iperconiche — che possono contenere una sola, ovvero tre iperconiche degeneri; ecc. ecc.

Tutto ciò è del resto l'analogo di quanto accade quando nello studio di varietà algebriche reali si voglion considerare in queste solo gli elementi reali. Ed appunto da questa restrizione trae origine: restrizione che quì, come già accennammo, ha luogo per le varietà reali rappresentanti le nostre iperalgebriche; in quanto che in quelle son solo i punti reali che si devon considerare, perchè solo essi sono imagini dei punti della forma oggettiva.

Ma questi inconvenienti si posson togliere, quelle distinzioni di casi si posson far cadere, seguendo quel principio dell' ampliamento delle nozioni, a cui la Matematica deve tanti progressi, e che in particolare per la geometria delle varietà algebriche aveva portato dai *punti reali* ai *punti complessi.* Ora si presenta opportuna un' ulteriore estensione. Non sono più sufficienti i punti complessi. Conviene introdurre dei *punti bicomplessi*, cioè degli enti che abbiano per imagini i punti complessi delle forme rappresentative; ed attribuire questi punti bicomplessi a date linee, superficie, fili, tele, ecc. quando i punti complessi che ne sono imagini stanno sulle varietà reali con cui quelle son rappresentate. Con ciò spariranno tutti gl' inconvenienti accennati.

24. Quanto a definire questi punti bicomplessi direttamente, cioè senza ricorrere alla rappresentazione, sarà cosa facile: basterà cioè prendere una qualunque delle note definizioni geometriche *reali* dei punti complessi dello spazio rappresentativo, ad esempio la definizione di Staudt mediante un' involuzione reale ellittica con un verso della forma, e riportarla alla forma oggettiva.

Per ciò osserviamo anzitutto che *un punto bicomplesso P sta sempre in una retta complessa determinata;* poichè ad es^0 in S_4 pel punto imaginario P_1 rappresentante di P (e pel coniugato Q_1) passa un piano reale determinato σ incidente ad r, r'.

Ciò posto possiamo per brevità limitarci a considerare la rappresentazione reale di quella retta complessa che contiene P sul piano σ o sulla sfera. I cerchi reali (di σ o della sfera) che passano pel rappresentante P_1 di P (e quindi anche per Q_1) sono le imagini di un *fascio di catene semplici* di punti della retta oggettiva, ed il punto bicomplesso P va considerato come uno dei 2 punti comuni a tutte queste catene: l'altro sarà quel punto bicomplesso Q che ha per imagine il coniugato Q_1 di P_1, e che diremo punto bicomplesso *gemello* di P (sicchè proprietà caratteristica di un punto complesso fra i punti bicomplessi sarà quella di coincidere col suo gemello). Possiamo dunque considerare come definizione geometrica diretta del punto bicomplesso P, o meglio della *coppia di punti bicomplessi gemelli* PQ, sulla retta complessa che li contiene, due catene rettilinee prive di punti complessi d'intersezione, ovvero il fascio di catene determinato da quelle due; si potrà poi dire per definizione ulteriore che quella coppia di punti bicomplessi è l'*intersezione* di queste catene. Si può anche assumere in uno qualunque dei cerchi reali suddetti l'involuzione reale ellittica avente P_1 e Q_1 per punti doppi; e quindi sulla retta oggettiva una catena rettilinea (del detto fascio) e *su essa* un' involuzione ordinaria che non abbia punti doppi complessi (sulla catena): quest' involuzione sulla catena si dirà «coppia di punti bicomplessi gemelli», od anche si dirà che l'involuzione ha questa coppia di *punti doppi* *). Volendo poi *separare* i due punti gemelli non ci sarà che da aggiungere in questa definizione all' involuzione sulla catena un *verso* di questa: a seconda che si sceglie l'un verso o l'altro si avrà l'uno o l'altro punto. **)

25. Questi nuovi elementi, i punti bicomplessi, si possono aggiungere opportunemente, come abbiam detto, ai punti complessi di qualunque varietà iperalgebrica. Ad esempio mediante quest' aggiunzione si posson subito enunciare (traendole dalle rappresentazioni viste di queste varietà) le proposizioni seguenti.

L'ordine di un filo iperalgebrico è la metà del numero dei punti d'incontro del filo con un' iperquadrica qualunque del suo spazio, ed in particolare se il filo è rettilineo, oppure piano, con una catena semplice della retta, ovvero con un' iperconica del piano.

*) Un' involuzione della retta è rappresentata sulla sfera da un' involuzione assiale avente per direttrici due rette polari fra loro rispetto alla sfera: vi sono quindi due fasci mutuamente ortogonali di cerchi uniti per quell' involuzione; ed in conseguenza sulla retta (cfr. Staudt, *Beiträge* n. 242) due fasci di catene unite per l'involuzione: l'uno ha per punti base i due punti doppi *complessi* dell' involuzione; l'altro comprende due catene nulle ridotte risp. a questi due punti ed ha poi per punti base i due punti doppi *bicomplessi* dell' involuzione.

**) Nella geometria projettiva *reale*, cioè avente per gruppo fondamentale quello delle projettività *reali*, ha luogo (è invariante) il concetto di punti complessi *coniugati*. Nella geometria projettiva *complessa* questo concetto si perde (non è più invariantivo): il *coniugio* equivale ad un' *antinvoluzione* qualunque (avente una catena fondamentale); ma si conserva in essa (come invariante) la nozione di punti bicomplessi *gemelli* (la quale a sua volta svanirebbe poi nel passaggio alla geometria projettiva *bicomplessa*, che più oltre accenneremo).

L'ordine di una tela piana è il numero dei suoi punti d'incontro con una retta.

L'ordine di una trivarietà piana, o di una pentavarietà spaziale, ecc. è la metà del numero dei punti d'incontro con una catena rettilinea qualunque. — Ecc. —

Naturalmente nei gruppi di *punti d'incontro* che qui son nominati i punti bicomplessi compajono sempre a coppie di punti bicomplessi gemelli. — Lo stesso vale per le proposizioni più generali che ora accenneremo, e che ancora scaturiscono subito dalle rappresentazioni reali, relative alle intersezioni di varietà iperalgebriche qualunque di una retta o di un piano.

Due curve reali di ordini 2ν, $2\nu'$ della sfera si tagliano in $2\nu\nu'$ punti: ne segue che *due fili di ordini ν, ν' di una retta si tagliano in $2\nu\nu'$ punti.*

Sulla varietà Σ di S_8 le imagini di trivarietà d'ordine $\nu, \nu_1, \ldots$ di π sono le intersezioni con delle M_7 d'ordine $\nu, \nu_1, \ldots$. Ne segue: *Quattro trivarietà (di π) di ordini ν, ν_1, ν_2, ν_3 si tagliano in generale in $6\nu\nu_1\nu_2\nu_3$ punti. — Tre trivarietà di ordini ν, ν_1, ν_2 s'incontrano in un filo d'ordine $3\nu\nu_1\nu_2$. — Due trivarietà di ordini ν, ν_1 s'incontrano secondo una tela d'ordine $2\nu\nu_1$ e d'indice $\nu\nu_1$. — Una trivarietà d'ordine ν ed un filo d'ordine ν_1 si tagliano in $2\nu\nu_1$ punti. — Una tela d'ordine ν e d'indice α* [essendo rappresentata su Σ da una superficie d'ordine $2(\nu + \alpha)$] *vien segata da una trivarietà d'ordine ν_1 secondo un filo d'ordine $\nu_1(\nu + \alpha)$.* *) — Quindi (combinando le ultime due proposizioni) *una tela d'ordine ν e d'indice α e due trivarietà di ordini ν_1, ν_2 si tagliano in $2\nu_1\nu_2(\nu + \alpha)$ punti.* — Ecc. ecc. —

Per queste proposizioni si può anche ricorrere (e in fondo non vi è differenza sostanziale) alle corrispondenze algebriche congiunte delle varietà iperalgebriche: si tratta allora delle (intersezioni, ossia) coppie comuni a due o più corrispondenze algebriche. Per far un esempio, possiamo risolvere in tal modo la questione dei punti comuni a due tele iperalgebriche di ordini ν, ν_1 e d'indici α, α_1 di uno stesso piano. Ciò equivarrà a cercare le coppie di punti che son comuni alle due corrispondenze algebriche congiunte fra π e π', corrispondenze risp. d'ordini ν e ν_1 e d'indici α e α_1; cioè i punti uniti di una corrispondenza (prodotto di una di quelle per l'inversa dell' altra) d'indice $\alpha\alpha_1$ e d'ordine $\nu\nu_1$ fra i punti di π. Il numero di questi punti uniti è dato in generale, per una nota formola, dalla somma $\nu\nu_1 + 2\alpha\alpha_1$ Dunque: *due tele di ordini ν, ν_1 e d'indici α, α_1 di un piano si tagliano*

---

*) In particolare una trivarietà d'ordine μ sega una curva algebrica d'ordine m secondo un filo d'ordine μm^2.

in generale in $\nu\nu_1 + 2\alpha\alpha_1$ *punti* *). — Così, posto $\nu_1 = \alpha_1 = 1$ si ha che *una tela piana d'ordine* ν *e d'indice* α *è segata da una catena piana in* $\nu + 2\alpha$ *punti.*

Quel teorema generale, supponendovi che una od ambe le tele sian date come intersezioni di trivarietà, ci ricondurrebbe a proposizioni precedenti. Supponendovi invece che l'una delle tele od entrambe siano curve, abbiamo:

Una tela d'ordine ν ed una curva d'ordine m di uno stesso piano si tagliano in νm^2 punti. — Due curve algebriche di ordini m, m_1 di un piano hanno comuni $m^2 m_1{}^2$ punti bicomplessi (di cui, com' è noto, solo $m m_1$ sono complessi). In particolare una curva piana d'ordine m è incontrata da una retta in m^2 punti bicomplessi (fra cui m soli complessi). **)

26. Una generalizzazione che naturalmente è suggerita dall' introduzione dei punti bicomplessi consiste nel considerare nella forma oggettiva F non più solo le precedenti varietà e corrispondenze *complesse*, le cui imagini sulle Φ sono *reali*, ma delle varietà e corrispondenze *bicomplesse* (in particolare *iperalgebriche*), che si rispecchiano nelle varietà e corrispondenze *complesse* (in particolare *algebriche*) delle Φ. — Così le ordinarie trasformazioni projettive (complesse), le quali mutano gli elementi complessi in elementi complessi, sono così particolari di *projettività bicomplesse*, le quali mutano in generale gli elementi complessi in bicomplessi, e costituiscono il gruppo fondamentale per una *geometria projettiva bicomplessa*, nella quale l' ordinaria geometria projettiva complessa rientra se si *fissa* la varietà costituita da tutti i punti complessi: come nella geometria projettiva complessa rientra la geometria projettiva reale se vi si fissa la varietà dei punti reali. Mentre le projettività *complesse* di F determinano nelle due schiere di una Φ delle projettività *coniugate*, le projettività *bicomplesse* corrispondono a trasformazioni della Φ determinate da due projettività arbitrarie *indipendenti* delle due schiere.

Introducendo le varietà iperalgebriche *bicomplesse* occorrono alcune modificazioni (generalizzazioni) ai caratteri: ordini, indici, ecc., che abbiam definiti per le varietà complesse. Così *ogni* curva algebrica della sfera reale che incontri le due schiere di generatrici risp. in ν, ν' punti, quand' anche questi due numeri sian diversi e quindi la curva (d' ordine $\nu + \nu'$) sia imaginaria, sarà sempre imagine di un filo

*) In particolare, basandoci su un' osservazione fatta alla fine del n. 21 abbiamo che due tele rappresentate dalle equazioni $f(x, \bar{x}) = 0$ di gradi λ, λ_1, e $\varphi(x, \bar{x}) = 0$ di gradi μ, μ_1 si tagliano generalmente in un numero di punti espresso da $(\lambda^2 + \lambda_1{}^2)(\mu^2 + \mu_1{}^2) + 2\lambda\lambda_1\mu\mu_1$.

**) Cfr. n. 27.

rettilineo *bicomplesso*, pel quale v, v' dànno *due* caratteri (che nel caso del filo complesso coincidevano nell' unico *ordine* del filo). Similmente una varietà iperalgebrica bicomplessa qualunque avrà per corrispondenza algebrica congiunta una corrispondenza algebrica *qualunque* (cioè non più necessariamente armonica al coniugio; cfr. n. 19), e però avrà, come questa corrispondenza, *due indici* distinti α, α'; ecc. ecc. Quindi anche i teoremi del n. prec. sulle intersezioni delle varietà iperalgebriche dovrebbero essere opportunemente modificati (estesi). — Quanto alle varietà bicomplesse *algebriche*, sarebbero da definirsi come tali quelle che hanno per imagine su una Φ l' intersezione di due varietà algebriche (complesse) qualunque delle due schiere; e analogamente per le corrispondenze bicomplesse *algebriche* (cfr. n. 18). —

Noi però non staremo ora a considerare in generale tali varietà bicomplesse: ma solo accenniamo ad una serie particolare di esse, la più semplice ed importante. Sulla retta abbiamo cioè due schiere infinite di fili, che diremo *protofili*, corrispondenti alle due schiere de generatrici delle sfera, o di rette per C, C' nel piano σ, ecc. Sul piano π abbiamo due schiere di tele, *prototele*, che corrispondono alle due schiere di piani di Σ, o di S_4, ecc. Nello spazio S_3 (S_n) avremmo similmente due schiere di *protovarietà* a 3 dimensioni (n dimensioni) corrispondenti alle due schiere di una Φ rappresentativa. Per ogni punto della retta, o del piano, . . ., passa un sol protofilo, od una sola prototela, . . ., di ogni schiera; due protofili di una retta, o due prototele di un piano, . . ., quando siano di schiere diverse si segano in un punto. Le due schiere son sempre gemelle l' una all' altra (come le schiere imagini son coniugate); ogni protofilo della retta, o prototela del piano, . . ., contiene un sol punto complesso, quello d' incontro colla protovarietà gemella: gli altri suoi punti son bicomplessi. La geometria dei punti bicomplessi di una prototela, . . ., o protovarietà a n dimensioni, è simile — come appare dalla rappresentazione — a quella dei punti complessi di un piano, . . ., o spazio ad n dimensioni, complessi: le rette di questi hanno per analoghi dei *protofili* *) in quelle, ecc. — Per trasformazioni collineari (complesse o bicomplesse) della retta, o del piano,..., ogni schiera di protofili, o di prototele,..., si muta in se stessa; mentre per anticollineazioni le due schiere si scambiano fra loro.

Dalla rappresentazione si trae subito un altro fatto relativo alle due schiere di protofili, o prototele, . . ., o protovarietà ad n dimensioni, il quale semplifica la geometria dei punti bicomplessi. Essa

*) Qui estendiamo la nozione di *protofili:* ne introduciamo cioè di quelli che non stanno su alcuna retta *complessa* e che quindi non contengono alcun punto *complesso*.

mostra cioè che ognuna di quelle schiere si può rappresentare come una forma fondamentale complessa semplice, o doppia, ..., o di specie n, sicchè gli elementi complessi di questa corrispondono agli elementi (protovarietà) di quella schiera. Ora, potendosi ogni punto bicomplesso della retta, o del piano, ..., o dell' S_n determinare come l' intersezione di due qualunque protofili, o prototele, ..., o protovarietà (gemelle nel caso particolare che il punto sia complesso) delle due schiere; e d' altra parte ricordando un' osservazione precedente di questo stesso n⁰ sull' effetto che una projettività bicomplessa (o complessa) di una forma oggettiva F ha sulle due schiere di una Φ imagine; segue che: *Lo studio dei punti bicomplessi di una forma fondamentale F, retta, piano, ..., od S_n, equivale a quello delle coppie di punti complessi di due forme fondamentali complesse della stessa specie f, f', cioè di due rette, piani, ..., od S_n indipendenti* (imagini delle due schiere di protovarietà della forma F)*): *la geometria projettiva bicomplessa* (v. sopra) *di F corrisponde alla geometria delle trasformazioni projettive complesse indipendenti di f ed f'* (mentre la geometria projettiva *complessa* di F si avrebbe *fissando* una certa corrispondenza antiprojettiva tra f ed f': quella che equivale alla corrispondenza fra gli elementi gemelli delle due schiere di protovarietà di F). I punti bicomplessi di F che stanno in una stessa protovarietà della 1ª (o 2ª) schiera corrispondono alle coppie di punti complessi di f e f' in cui il 1⁰ (o 2⁰) punto è fisso. Ecc.

27. Alcuni caratteri — gli *indici* — delle varietà iperalgebriche ottengono una definizione diretta mediante le protovarietà: sono cioè i numeri di punti d' incontro con queste.

A ciò si collega il fatto che appunto dal modo di comportarsi negl' incontri con le protovarietà si posson caratterizzare fra le varietà iperalgebriche quelle algebriche. Basta perciò riportare alle due schiere di protovarietà di F quanto abbiamo rilevato al n. 18 intorno all' imagine di una varietà algebrica di F su una Φ. Abbiamo così: *Una varietà (complessa) algebrica è caratterizzata fra le iperalgebriche dall' essere l' intersezione di una varietà composta di protovarietà dell' una schiera con la varietà gemella composta di protovarietà dell' altra schiera***).

---

*) Ne segue che, ad esempio, i punti bicomplessi di una retta o piano trovano la loro *rappresentazione reale* nelle coppie di punti reali di due sfere (o piani di Gauss, ecc.), o varietà Σ, ecc.

**) Per esempio, una curva piana algebrica è l' intersezione di due varietà (trivarietà) gemelle costituite risp. da prototele delle due schiere; sicchè una prototela qualunque del piano o non incontra affatto la curva ovvero la incontra in infiniti punti (mentre una tela iperalgebrica qualunque è tagliata in generale da ogni prototela in un numero finito di punti: l' indice della tela).

Similmente (v. ancora n. 18): *una corrispondenza (complessa)* **algebrica** *è caratterizzata fra le corrispondenze iperalgebriche dal fatto di mutare ogni schiera di protovarietà in se stessa; e precisamente le due corrispondenze che così si hanno entro le due schiere sono gemelle.* Il gruppo delle protovarietà unite dell' una schiera sarà segato dal gruppo delle protovarietà gemelle (cioè delle protovarietà unite dell' altra schiera) nell' insieme dei punti uniti (bicomplessi) della corrispondenza (e precisamente fra i punti uniti contenuti in una protovarietà unita vi sarà il suo punto complesso).

Da queste proposizioni si traggono subito alcune conseguenze. Se A, B sono due punti di una varietà *algebrica* non posti in uno stesso protofilo, o prototela, ecc., anche i due punti d' incontro delle due protovarietà passanti per A colle due protovarietà passanti per B staranno sulla varietà algebrica. I punti d' incontro di una retta con una curva piana, o superficie, ..., algebrica d' ordine m, od anche i punti uniti di una corrispondenza algebrica (α, β) su una retta, ove $\alpha + \beta = m$, sono le m^2 intersezioni di m protofili di una schiera della retta col gruppo dei loro gemelli*). Ecc. ecc. —

Rileviamo espressamente che, come già avvertimmo al n. 26, noi non consideriamo le varietà *bicomplesse;* sicchè gli enti algebrici di cui parliamo son sempre quelli ordinari, *complessi.* Senza di ciò le ultime cose dette esigerebbero delle modificazioni (ovvie del resto), di cui alcune son degne di nota. Così *due rette bicomplesse* del piano π aventi per imagini in S_4 due piani (imaginari, incidenti ad r, r') i quali si taglino secondo una retta appoggiata ad r (o ad r'), *avrebbero comuni gl' infiniti punti di un protofilo senza coincidere;* e *due punti cesserebbero d' individuare una retta (bicomplessa) quando stanno in uno stesso protofilo.* E fatti analoghi si avrebbero per le intersezioni di curve algebriche bicomplesse di ordini qualunque, per le corrispondenze algebriche bicomplesse, ecc.: fatti che si vedono subito sulle rappresentazioni con cui si definiscono (n. 26) gli enti bicomplessi *algebrici.*

Confronto coi numeri bicomplessi.

28. L' introduzione dei *punti* imaginari in Geometria corrisponde all' introduzione dei *numeri* imaginari (coordinate) in Analisi. Quale sarà l' ulteriore generalizzazione del concetto di *numero,* che corri-

*) Le $\frac{m m_1 (m m_1 - 1)}{2}$ coppie di punti bicomplessi gemelli distinti comuni a due curve complesse algebriche di ordini m, m_1 di un piano (v. la fine del n. 25) stanno risp. sulle rette che congiungono a due a due gli $m m_1$ punti complessi comuni alle due curve.

sponderà all' estensione che abbiam fatta del campo geometrico introducendo i *punti bicomplessi?*

La risposta si ha subito, ricorrendo alle rappresentazioni con cui siam giunti a questi punti. Basterà che ci limitiamo a considerare i punti di una retta. I punti complessi di questa son rappresentati dai punti reali del piano σ, e precisamente il punto che sulla retta ha per coordinata il numero complesso $x+iy$, ove x, y son reali, ed $i^2=-1$, ha per imagine nel piano σ il punto di coordinate x, y. Ora per ottenere sulla retta anche i punti bicomplessi, dovremo nel piano σ considerare anche i punti (x, y) complessi, e ne potremo indicare le coordinate con

$$x=x_1+hx_2, \qquad y=y_1+hy_2,$$

ove x_1, x_2, y_1, y_2 son reali, e $h^2=-1$; e per conservare la stessa legge di corrispondenza fra i punti della retta e quelli del piano, si dovrà assumere pel punto bicomplesso corrispondente della retta ancora la coordinata $x+iy$, ossia

$$x_1+hx_2+i(y_1+hy_2)=x_1+hx_2+iy_1+hiy_2.$$

Per tal modo siam condotti ad assumere sulla retta per coordinate dei punti bicomplessi, dei numeri, che diremo pure *bicomplessi*, del tipo $x_1+hx_2+iy_1+hiy_2$*), ove x_1, x_2, y_1, y_2 son reali, ed h, i son due unità *essenzialmente distinte* tali che $h^2=i^2=-1$ (mentre $h \neq \pm i$). Inoltre, sempre per ragione d' uniformità col caso in cui x, y erano reali, mantenendo le definizioni di addizione, moltiplicazione, ecc. che si sogliono usare pei numeri complessi a più unità, convien fissare che il prodotto delle nostre unità sia commutativo ed associativo, sicchè $hi=ih$, $(hi)i=h(ii)=-h$, ecc. Si otterrà così nell' insieme di questi numeri bicomplessi uno particolare di quei campi o corpi di numeri complessi a più unità, pei quali l' addizione, la sottrazione e la moltiplicazione soddisfano alle stesse leggi dell' aritmetica ordinaria.

Tali corpi furono studiati *in generale* dal sig. Weierstrass; i cui risultati vennero publicati (almeno in parte) solo recentemente nelle *Nachrichten* di Gottinga in una lettera al sig. Schwarz**). Questa publicazione fu tosto seguita nella medesima raccolta da altre sullo stesso soggetto dei sig^{i} Schwarz (ib. 1884), Dedekind (ib. 1885),

*) Se si vuole, son numeri del tipo $x_1+hx_2+iy_1+kx_2$, ove le *tre* unità h, i, k soddisfano alle relazioni

$$h^2=i^2=-1, \quad k^2=1;$$
$$hi=k, \quad ik=-h, \quad kh=-i.$$

**) *Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten complexen Grössen* (Gött. Nachr. 1884, pag. 395—419).

Hölder (ib. 1886), ecc.*) Però, riguardo al nostro caso *particolare*, cioè ai nostri numeri bicomplèssi, possiamo rilevare che essi si trovano già in sostanza nelle ricerche di Hamilton sui *quaternioni*, sebbene essi differiscano essenzialmente da questi numeri (pei quali, com' è noto, la moltiplicazione *non è* commutativa). Hamilton in fatti osserva (ad es° negli *Elements of Quaternions*, London 1866, n. 228) che i quaternioni di un piano si posson tutti mettere sotto la forma $x + iy$, ove x ed y son numeri (*scalari*) reali ed i è un *versore* retto (di quel piano) tale che $i^2 = -1$; ma dai bisogni della risoluzione delle equazioni algebriche in cui le incognite sono quaternioni, essendo poi condotto a considerare accanto ai quaternioni, ordinari o *reali*, i cui 4 coefficienti (scalari) son reali, i quaternioni *imaginari* o *biquaternioni***) in cui quei coefficienti sono imaginari, ottiene per i *biquaternioni di un dato piano* la rappresentazione (*Elements*, n. 257) $x + iy = x_1 + hx_2 + i(y_1 + hy_2)$, ove h è un *numero* imaginario tale che $h^2 = -1$. A parte la distinzione fra i significati di *versore* e di *numero* che Hamilton attribuisce risp. ai due simboli i ed h, i suoi biquaternioni di un dato piano son la stessa cosa che i nostri numeri bicomplessi.

A questi numeri poi l' Hankel dedica un cenno nel § 30 delle sue *Vorlesungen über die complexen Zahlen* u. s. w. (Leipzig 1867); mentre più diffusamente se ne occupa (appunto col nome di *bicomplessi*) facendone anche il raffronto coi concetti generali del Weierstrass il sig. Lipschitz nella 3ª delle sue *Untersuchungen über die Summen von Quadraten* (Bonn 1886).

29. Il punto fondamentale in cui i numeri complessi generali a più unità ai quali già accennammo si staccano dagli ordinari numeri complessi ad una sola unità imaginaria, è quello che, come ben si sa, pare sia stato notato dal Gauss, e che poi fu rilevato esplicitamente da Hankel (*Vorlesungen* § 29) e da Weierstrass (loc. cit.): cioè che,

*) I metodi seguiti dai sig[i] Weierstrass e Dedekind nello studio dei numeri complessi ad n unità furono ampiamente esposti (con aggiunte) dal sig. Berloty nella sua Tesi «*Théorie des quantités complexes à n unités principales* (Gauthier-Villars 1886). Inoltre ad essi è dedicato il 1° Capo della 2ª Parte delle *Vorlesungen über allgemeine Arithmetik* del sig. Stolz (Teubner 1886). — Dopo gli scritti citati si ha una serie molto recente e già ampia di lavori tedeschi (Schur, Study, Scheffers, ecc.) che studiano i sistemi di numeri complessi collegandoli con le teorie del Lie dei gruppi di trasformazioni. [V. del resto più complete e precise citazioni] alla fine del nuovo lavoro del sig. Scheffers, Math. Ann. 39, p. 388].

**) V. *Lectures on Quaternions* (Dublin 1853), n[i] 637, 644; oppure *Elements*, n. 214. — Più recentemente la denominazione di «*biquaternione*» è stata usata, ad es° dal Clifford, in un altro senso.

mentre pei numeri complessi ordinari un prodotto s'annulla solo quando s'annulla uno dei suoi fattori, nei campi più generali esistono sempre dei numeri particolari non nulli, i quali moltiplicati per convenienti numeri parimenti non nulli dànno zero per prodotto (proprietà a cui si collega l' indeterminazione in certi casi del *quoziente*, ecc.). I numeri (lo zero incluso) che godono di tal proprietà furon chiamati dal Weierstrass «*divisori dello zero*»: noi invece per brevità maggiore adotteremo la denominazione che Hamilton (*Lectures*, n. 674) proponeva pei biquaternioni che moltiplicati per altri opportuni non nulli dànno zero, cioè «*nullifici*» (*nullific*, o *nullifiers*).

Nel caso particolare dei nostri numeri bicomplessi i nullifici sono strettamente legati ai protofili di una retta, dei quali ci siamo occupati nel Cap⁰ preced.: perciò è opportuno che ci tratteniamo ora su essi. — Siano $x+iy$, $x'+iy'$ due numeri bicomplessi, ove x, y, x', y' indichino numeri *complessi ordinari* (relativi all' unità imaginaria h) $x=x_1+hx_2, \ldots$ $(x_1, x_2, \ldots$ reali). Sarà il loro prodotto

$$(x+iy)(x'+iy')=(xx'-yy')+i(xy'+yx');$$

sicchè esso s' annullerà solo se

$$xx'-yy'=0, \qquad xy'+yx'=0. \tag{1}$$

Queste due equazioni si posson soddisfare con valori non nulli di x', y', cioè senza che s' annulli il 2⁰ fattore $x'+iy'$ solo quando

$$x^2+y^2=0;$$

la qual condizione, poichè x, y son complessi ordinari, equivale a

$$x\mp hy=0. \tag{2}$$

Allora poi, se neppure il 1⁰ fattore $x+iy$ non è nullo, dalle (1) si trae risp.:

$$x'\pm hy'=0. \tag{2'}$$

Le (2) e (2') si possono anche scrivere così:

$$x+iy=(\pm h+i)y, \tag{3}$$

$$x'+iy'=(\mp h+i)y'. \tag{3'}$$

Concludiamo: *Nel campo dei numeri bicomplessi vi sono due schiere infinite di nullifici.* Quelli della 1ª *schiera* sono quei numeri bicomplessi che si annullerebbero ove in luogo del simbolo i vi si ponesse $-h$: essi sono i prodotti di numeri bicomplessi qualunque (che si posson supporre complessi ordinari) pel numero $h+i$ [o, ciò che è lo stesso, per $-h(h+i)$ ossia $1-hi$]. Quelli della 2ª *schiera* sono quei numeri bicomplessi che s' annullerebbero per $i=h$; ossia i prodotti di numeri bicomplessi qualunque (che si posson supporre complessi ordinari) pel numero $-h+i$ (o, ciò che è lo stesso, per $1+hi$). Le due schiere di nullifici non hanno altro numero a comune che lo zero. Il prodotto di due nullifici risp. delle due schiere è nullo; e viceversa un prodotto qualunque di numeri bicomplessi non è nullo se non quando tra i fattori vi è un nullifico di ogni schiera. Rispetto alle operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione, e quindi anche elevazione a potenze intere positive, i nullifici della 1ª schiera formano corpo; e così pure i nullifici della 2ª schiera.

Ciò posto, è facile vedere il legame dei nullifici coi protofili. Per un numero bicomplesso qualunque $x+iy$ formiamo le espressioni $x+hy$, $x-hy$ dei valori (complessi ordinari) che esso assumerebbe per $i=h$, oppure $i=-h$. Dato uno di questi valori, ad esempio il 1^0, non sarà determinato il numero bicomplesso $x+iy$ che *a meno di un nullifico della 2ª schiera*, poichè la differenza di due valori di $x+iy$ vien solo assoggettata alla condizione di annullarsi per $i=h$. D' altra parte il dare $x+hy$ costringe il punto (x, y) del piano rappresentativo σ a stare su una determinata retta ciclica della 1ª schiera (retta di equazione $x+hy=$ cost.); e quindi il punto della retta oggettiva, che ha quello per imagine, a stare su un determinato protofilo della 1ª schiera della retta stessa. Dunque: *i punti della retta oggettiva che stanno su uno stesso protofilo della 1ª schiera sono quelli che hanno per coordinate numeri bicomplessi differenti per nullifici della 2ª schiera.* Similmente i punti che stanno su un dato protofilo della 2ª schiera sono quelli le cui coordinate differiscono per nullifici della 1ª schiera.

30. Ma possiamo dir di più. Supponiamo dati pel numero bicomplesso $x+iy$ tanto il valore di $x+hy$ quanto quello di $x-hy$, cioè:

(1) $$x+hy=Z, \qquad x-hy=Z'.$$

Ne deduciamo subito per valore del numero bicomplesso

(2) $$x+iy=Zg+Z'g';$$

ove si è posto

(3) $$g=\frac{1-hi}{2}, \qquad g'=\frac{1+hi}{2},$$

sicchè g e g' son nullifici risp. della 1ª e della 2ª schiera. Dunque: *ogni numero bicomplesso $x+iy$ si può scomporre in un modo ben determinato nella somma di due nullifici, l'uno (Zg) della 1ª schiera, l' altro $(Z'g')$ della 2ª* *). Il *componente* che è nullifico della 1ª schiera è deter-

*) Non vi possono essere *due* scomposizioni così fatte; altrimenti se ne trarrebbe subito l' uguaglianza di due nullifici (non nulli) di schiere diverse.

minato dal valore (complesso ordinario) Z di $x+hy$, e però riman costante per tutti i punti di un protofilo della 1ª schiera della retta oggettiva; similmente l' altro componente, nullifico della 2ª schiera, è determinato dal valore Z' di $x-hy$ e quindi è uno stesso per tutti i punti di un protofilo della 2ª schiera.

La scomposizione del numero bicomplesso si può completare scindendo ulteriormente i nullifici di ogni schiera. Posto cioè

$$Z = X + hY, \qquad Z' = X' - hY' \tag{4}$$

(ove X, Y, X', Y' son reali), avremo

$$\begin{aligned} Zg &= Xg + Yk, \\ Z'g' &= X'g' + Y'k', \end{aligned} \tag{5}$$

essendo

$$k = hg = \frac{h+i}{2}, \qquad k' = -hg' = \frac{-h+i}{2}. \tag{3'}$$

I nullifici della 1ª schiera sono dunque ridotti a numeri complessi (a coefficienti reali X, Y) con le due unità g, k; e similmente i nullifici della 2ª schiera con le due unità g', k'. Le unità g, k, come subito appare dai loro valori (3), (3'), soddisfano alle relazioni

$$g^2 = g, \; k^2 = -g, \; kg = gk = k; \tag{6}$$

e analogamente le g', k', sostituendole qui alle g, k. Segue che nella moltiplicazione di due nullifici di una stessa schiera si deve operare sui coefficienti reali X, Y, ecc. nell' identico modo che nel caso dei numeri complessi ordinari con le componenti reali, cioè coi coefficienti reali di 1 e i: le relazioni (6) fra le unità g e k (o g' e k') son quelle stesse che sussistono fra 1 e i.

I coefficienti reali X, Y e X', Y' hanno un semplice significato geometrico. Fra i numeri bicomplessi $x+iy$ tali che $x+hy=Z$, cioè aventi Zg per componente della 1ª schiera, vi sarà precisamente il numero $X+iY$: dunque $X+iY$ è sulla retta il punto *complesso* del protofilo della 1ª schiera che corrisponde a quella componente. Similmente $X'+iY'$ è il punto complesso del protofilo della 2ª schiera corrispondente alla componente $Z'g'$. Quando dunque noi poniamo la (2), cioè

$$x_1 + hx_2 + iy_1 + hiy_2 = Xg + Yk + X'g' + Y'k',$$

ove, come mostrano le (1), (4),

$$\begin{aligned} X &= x_1 - y_2, \qquad & Y &= x_2 + y_1, \\ X' &= x_1 + y_2, \qquad & Y' &= -x_2 + y_1; \end{aligned}$$

i nuovi coefficienti reali X, Y, X', Y', che così veniamo a sostituire a quelli primitivi del numero bicomplesso, non sono altro che i coefficienti dei punti complessi $X + iY$, $X' + iY'$ giacenti risp. sui due protofili che contengono il corrispondente punto bicomplesso: per questo cioè passano due catene nulle ridotte ai punti complessi $X + iY$, $X' + iX'$. Nel piano rappresentativo σ sarebbero (X, Y) e (X', Y') le coordinate dei due punti reali *limiti* (o cerchi nulli) del fascio di cerchi reali passanti pel punto imaginario (x, y): il che si può anche verificare direttamente.*) —

La possibilità della scomposizione dei numeri bicomplessi da noi operata rientra come caso particolare in un' analoga scomposizione che il Weierstrass ed il Dedekind fanno per numeri a quante si vogliano unità (nei campi parziali, *Theilgebiete*, G_μ di Weierstrass**). La natura di quella scomposizione mostra subito (come il Weierstrass stesso rileva; loc. cit. pag. 407) che: *volendo eseguire un determinato calcolo di addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni e divisioni, con cui da certi numeri bicomplessi a, b, c, ... si debba ottenerne un altro, la componente di ciascuna schiera di questo si otterrà eseguendo lo stesso calcolo sulle componenti della stessa schiera di a, b, c, ...*

Applichiamo questa proposizione generale al caso di una *trasformazione lineare bicomplessa.* Come i punti bicomplessi di una retta, così quelli di un piano o spazio qualunque si posson rappresentare analiticamente assumendo per loro coordinate dei numeri bicomplessi. In ogni caso una trasformazione lineare a coefficienti qualunque bicomplessi delle coordinate di un punto bicomplesso si spezzerà subito in due trasformazioni lineari parziali — simili alle complesse ordinarie, cioè *interne* risp. alle due schiere — delle componenti di una stessa schiera di quelle coordinate. Ciò mostra in particolare che è carattere invariantivo (projettivo) per due o più punti l' aver comuni le componenti della 1ª (o 2ª) schiera delle coordinate: ed effettivamente tutti i punti per cui quelle componenti hanno gli stessi valori costituiscono un protofilo, o prototela, o protovarietà della 1ª (o 2ª) schiera. Ed in generale poi quello *spezzamento* della trasformazione lineare bicomplessa conferma analiticamente quanto già geometricamente era apparso evidente (alla fine del n. 26), cioè che *la geometria projettiva bicom-*

*) Questa rappresentazione del punto imaginario (x, y) di un piano σ mediante i due punti reali (X, Y), (X', Y') di σ stesso è già usata in sostanza nel Trattato di Mac-Laurin delle curve geometriche (cfr. la parte che ne è riportata nei *Mélanges de géométrie pure del* De Jonquières, a pag. 199, 203, 222), — ove però, trattandosi delle coppie di punti imaginari *di una data retta*, si adopera uno solo di quei due punti reali —; e si ritrova poi, com'è noto, in vari geometri moderni.

**) Cfr. anche, per quanto riguarda il caso attuale, Lipschitz, loc. cit.

plessa di una forma fondamentale (retta, piano, ecc.) *coincide colla geometria projettiva complessa di due distinte forme della stessa specie* (ad es[0] delle due schiere di protofili, prototele, ecc.)*).

31. Anche le osservazioni del n. 27 sulla dipendenza mutua degli elementi bicomplessi di un ente *algebrico* trovano ora un' evidente rappresentazione analitica. Poniamo (col Weierstrass) di avere *un' equazione algebrica qualunque di grado m ad un' incognita bicomplessa.* Separando nei coefficienti e nell' incognita le componenti delle due schiere, e distinguendo con un accento le componenti della 2ª schiera da quelle della 1ª; l' equazione sia

$$\sum_0^m{}^i (a_i + a_i')(z + z')^i = 0. \tag{1}$$

Il fatto che il prodotto di due nullifici di schiere diverse è nullo riduce quell' equazione a

$$\sum a_i z^i + \sum a_i' z'^i = 0,$$

che si spezza nelle due

$$\begin{aligned} \sum a_i z^i &= 0, \\ \sum a_i' z'^i &= 0. \end{aligned} \tag{2}$$

E poichè ciascuna di queste equazioni, pei coefficienti e per l' incognita, entra in una schiera di nullifici, cioè in un campo simile a quello dei numeri complessi ordinari, essa, ove non si riduca ad un' identità, avrà tante radici quanto è il grado. — Segue anzitutto che un' equazione algebrica di grado m la cui incognita sia un numero bicomplesso *ha infinite radici* solo quando tutti i suoi coefficienti siano *nullifici di una stessa schiera* (cioè sian nulle tutte le a_i, o tutte le a_i'): se ciò accade senza che i detti coefficienti sian tutti *nulli* (nel qual caso ogni numero sarebbe radice), le infinite radici son rappresentate dai *punti di m protofili della schiera omologa.*

Se poi nessuna delle due equazioni (2) è un' identità e se i loro gradi sono risp. m, m', noi avremo che i punti $z + z'$ radici della equazione primitiva (1) sono le mm' intersezioni di m protofili della 1ª

*) Così da un ordinario invariante di enti algebrici si hanno nel campo bicomplesso, considerandone i due nullifici componenti, *due* invarianti relativi risp. alle due schiere (invarianti ordinari *entro* queste schiere).

schiera con m' protofili della 2ª schiera. Le due equazioni bicomplesse che risp. (secondo il caso precedente) rappresentano quei due gruppi di protofili sono

$$\sum a_i(z+z')^i = 0.$$
$$\sum a_i'(z+z')^i = 0,$$

e si potrebbero anche avere moltiplicando la data (1) risp. per un nullifico della 1ª e della 2ª schiera (ad es⁰ per g e g'). Quando l' equazione data è di grado m, ed il coefficiente del termine di grado m non è un nullifico, allora l'equazione ha m^2 radici. Questo caso in particolare si presenta se i coefficienti dell' equazione data sono numeri complessi ordinari: nel qual caso i due gruppi di m protofili saranno gemelli.

Per tal modo si ritrovano analiticamente i risultati precedenti che una retta taglia una curva piana o superficie algebrica d' ordine m *complessa* in m^2 punti bicomplessi, che due curve piane algebriche *complesse* di ordini m, m_1 si tagliano in $m^2 m_1{}^2$ punti bicomplessi, ecc. Ma si vede anche come queste proposizioni possano esigere delle modificazioni essenziali se le curve, superficie, ecc. algebriche si suppongono *bicomplesse*. Possono cioè allora quelle intersezioni dipendere da un' equazione ad un' incognita, che senz' essere identica ammetta infinite soluzioni (come ad es⁰ quando due rette bicomplesse si tagliano secondo un protofilo; v. la fine del n. 27). Non solo; ma una curva, superficie ecc. algebrica *bicomplessa* può avere *due ordini* diversi: gli ordini delle due equazioni (interne risp. alle due schiere di nullifici ecc.) in cui si spezza la sua equazione bicomplessa, a quel modo che la (1) si spezzava nelle due (2). Ecc. ecc.

Cenno di ulteriori indefinite estensioni.

32. Se ci rifacciamo a dare uno sguardo al processo con cui siamo giunti ai concetti degli enti *iperalgebrici* da un lato, degli elementi *bicomplessi* dall' altro, noi saremo condotti naturalmente ad una serie indefinita di successive generalizzazioni.

Partendo anzitutto da una forma reale F coi soli elementi *reali*, e studiando le varietà *algebriche* formate con questi, i geometri furono condotti ad introdurre in F una nuova specie di elementi: gli elementi *complessi* (od i numeri complessi). Se ∞^n erano gli elementi reali di F, ∞^{2n} sono i suoi elementi complessi. — Questa varietà di elementi complessi noi l' abbiamo rappresentata su una varietà Φ di ∞^{2n} elementi reali.

Ma allora è apparso naturale di valersi di tutta la geometria *reale* che già potevam supporre di possedere per lo studio della varietà Φ; e quindi in particolare di considerare su Φ le varietà algebriche reali, e di trasportarne le proprietà nella forma F. Così su questa abbiamo ottenuto le varietà *iperalgebriche* di elementi·complessi. — Però, a togliere eccezioni o distinzioni di casi ecc. nello studio degli enti algebrici reali di Φ, conveniva fare in questa forma ciò che già per lo stesso scopo s' era fatto su F: introdurvi elementi complessi. Corrispondentemente a tali elementi di Φ si ebbero su F dei nuovi elementi: gli elementi *bicomplessi* (in numero ∞^{4n}).

Ora il proseguimento è facile. Nella forma rappresentativa Φ in cui ora consideriamo anche elementi complessi possiamo introdurre non più solo le varietà algebriche, ma più in generale le varietà iperalgebriche: ad esse corrisponderanno sulla forma oggettiva F una specie di varietà di elementi bicomplessi che abbraccia quelle iperalgebriche, e che, per un momento almeno, potremo chiamare *biiperalgebriche*. Esse si otterrebbero ponendo legami algebrici fra i coefficienti reali delle coordinate bicomplesse degli elementi di F. — D'altra parte in Φ è complemento utile all' introduzione di varietà iperalgebriche di elementi complessi l' introduzione di elementi bicomplessi. Similmente in F converrà introdurre una nuova specie di elementi, più ampia degli elementi bicomplessi, e cioè gli elementi *tricomplessi* (∞^{8n}), i quali hanno per imagini gli elementi bicomplessi di Φ. Le definizioni di questi ultimi mediante elementi complessi si muteranno in definizioni degli elementi tricomplessi di F mediante elementi bicomplessi. Analiticamente poi le coordinate che li rappresentano saran numeri bicomplessi in cui i 4 coefficienti, anzi che reali, sono a lor volta numeri complessi ordinari con una nuova unità l (o viceversa numeri complessi $x+iy$ in cui i due coefficienti x, y son numeri bicomplessi relativi alle unità h, l); cioè saran numeri *tricomplessi* (con 8 coefficienti reali) composti coll' unità reale e con le tre unità indipendenti i, h, l (aventi per quadrato -1) ed i loro prodotti il, hl, hi, hil.

In generale, ottenuto il concetto di elementi $(s-1)$-complessi e di varietà $(s-1)$-iperalgebriche*), a tali elementi ed a tali varietà della forma rappresentativa Φ corrisponderanno su F nuove specie di elementi e di varietà: elementi *s-complessi*, e varietà *s-iperalgebriche*. La forma F di specie n contiene $\infty^{n\cdot 2^s}$ elementi s-complessi, e questi formano corpo rispetto alle operazioni $(s-1)$-iperalgebriche; sicchè ad esempio per lo studio delle intersezioni mutue di varietà $(s-1)$-iperalgebriche non occorrono altri elementi che quelli s-complessi. Fra

*) Per $s-1=0$ s' intenda elementi *reali*, varietà *algebriche*. Elementi *monocomplessi* sarebbero poi gli ordinari elementi *complessi*, ecc.

gli elementi s-complessi stanno quelli reali, complessi, bicomplessi,... $(s-1)$-complessi. E così fra le varietà s-iperalgebriche che si posson fare con elementi s-complessi vi sono *in particolare* quelle algebriche, iperalgebriche,... $(s-1)$-iperalgebriche. — Quanto alla rappresentazione analitica dei punti s-complessi, essa si fa mediante i numeri *s-complessi* composti con s unità (oltre a quella reale) $i_1, i_2, \ldots, i_s$ aventi per quadrato -1, ed i loro prodotti $i_1 i_2, \ldots, i_1 i_2 i_3, \ldots, \ldots, i_1 i_2 \ldots i_s$: tali numeri hanno dunque 2^s termini. —

Queste successive estensioni degli *elementi* (geometrici od analitici) e delle *varietà* formate con essi appajono per tal modo *naturali*, *spontanee*, ed in pari tempo *utili*, anzi *necessarie*. Per gli antichi studi degli enti algebrici bastavano gli elementi reali: ma per studi più profondi fu necessaria l' introduzione degli elementi complessi (ordinari). Nel concetto di questi nuovi elementi vi era certo dell' arbitrio, e gli elementi reali si sarebbero potuti generalizzare anche in altri modi. La scelta fatta fu però la più opportuna pel campo algebrico (in quanto per essa un' equazione algebrica veniva ad avere sempre tante radici quanto è il grado, ecc.). Una volta che tal scelta si è fatta l'introduzione delle varietà iperalgebriche, degli elementi bicomplessi, e così via, non è più un artificio: è, come abbiam detto, una *necessità* *).

33. Si può obiettare che con tali generalizzazioni la matematica acquista una *complicazione* eccessiva. Ma a ciò si potrebbe subito replicare che contro la *necessità* non v'è rimedio; e che del resto l' introduzione degli elementi bicomplessi non si deve fare (come già

---

*) A ciò, e in particolare alla teoria dei numeri *bicomplessi* (tricomplessi ecc.) si possono applicare quasi completamente le considerazioni che Hamilton faceva sui biquaternioni (dei quali abbiam già rilevato il legame con quei numeri) «The Theory of such *biquaternions* is as necessary and important a complement to the theory of *single* or *real quaternions*, as in algebra the theory of *couples*, or of expression of the form $x' + \sqrt{-1}\, x''$, where x' and x'' denote some *two* positive or negative or null numbers, is to the theory of *single* or *real numbers* or quantities. It is admitted that the doctrine of *algebraic equations* would be entirely incomplete, if their *imaginary roots*, or solutions of the above written and well known *couple form* $(x + \sqrt{-1}\, y)$, were to be neglected, or kept out of view. And in like manner we may already clearly see, from the foregoing remarks and examples, that no theory of *equations in quaternions* can be considered as complete, wich refuses or neglets to take into account the *biquaternion solutions* that may exist, of the form above assigned, in any particular or general inquiry. The subject indeed is one of wast extent, and of no little difficulty: but it appears to me to be one wich will amply repay the labour of future research.» (*Lectures* n. 644; cfr. anche *Elements* n. 257 (4), ove ritorna ad insistere sulla «utilità, o meglio necessità» di considerare i biquaternioni in Geometria).

quella degli ordinari elementi complessi) se non quando appunto essa si è resa veramente necessaria per *evitare* complicazioni maggiori; e così poi quella degli elementi tricomplessi, ecc.

Ma possiamo dir di più: possiamo considerar la cosa da un punto di vista che toglie via ogni complicazione. Abbiamo già notato in fatti che un punto bicomplesso della retta, o del piano ... F si può rappresentare mediante una coppia di punti complessi di due rette, piani, ... f, f', ad esempio mediante i punti complessi situati risp. sui due protofili, prototele, ... delle due schiere di F, che passano pel punto bicomplesso: quelle due schiere van considerate come due forme (di 1ª, 2ª, ... specie) di cui i protofili, le prototele, ... sono gli *elementi complessi* (quantunque, se considerati come luoghi, risultino luoghi di punti bicomplessi); e dal congiungere insieme un elemento complesso dell' una schiera con uno dell' altra nasce il punto bicomplesso. Ora il passaggio ai punti tricomplessi che sopra abbiam fatto equivale a considerare in ogni schiera di F gli *elementi bicomplessi*: il punto tricomplesso di F risulta allora da due elementi bicomplessi delle due schiere (come intersezione), e quindi si può intender rappresentato da una *coppia di punti bicomplessi* di f, f'. Ma ognuno di questi punti bicomplessi, o di quegli elementi bicomplessi delle due schiere, è a sua volta definito entro la relativa forma mediante due elementi complessi di questa. Dunque il punto tricomplesso di una retta, piano, ... risulta dato da due coppie di ordinari protofili, prototele, ... risp. delle due schiere, ossia da *due coppie di punti complessi* di rette, piani, ... E così in generale si può dire che la nozione di punto s-complesso si riduce a quella di due elementi $(s - 1)$-complessi in due forme distinte (o riguardabili come tali), ad es° nelle due schiere di protovarietà; sicchè per successive riduzioni viene ad equivalere alla nozione di 2^{s-1} punti complessi di altrettante rette, piani, ... distinti, oppure di 2^{s-1} punti complessi di una sola forma, ma in un ordine determinato.

Anche analiticamente la cosa appare evidente. I numeri bicomplessi li abbiamo già scissi in somme $z + z'$ di numeri simili ai complessi ordinari, ma tolti rispettivamente da due corpi distinti. Se ora a loro volta assumiamo pei due coefficienti di ognuno di questi numeri z, z' dei numeri complessi, z e z' verranno ad essere bicomplessi (di corpi distinti) ed ognuno di essi si spezzerà quindi nella somma di due numeri analoghi ai complessi ordinari $z = \zeta + \zeta_1$, $z' = \zeta' + \zeta_1'$, sicchè il numero *tricomplesso* apparirà come somma $\zeta + \zeta_1 + \zeta' + \zeta_1'$ di 4 numeri simili ai complessi ordinari ma tolti da altrettanti corpi distinti. E così in generale i nostri numeri s-complessi si posson rappresentare come somme di 2^{s-1} *componenti* appartenenti risp. ad altrettanti campi parziali determinati e distinti analoghi al campo dei numeri complessi ordinari. Le relazioni fra questi campi parziali sono di tal natura che per eseguire delle operazioni aritmetiche elementari sui numeri s-complessi basta eseguirle successivamente sulle componenti di ogni campo parziale. Perciò si può (come rilevano i sig[i] Weierstrass e Dedekind più in generale nei lavori citati) riguardare l' aritmetica di quei numeri s-complessi come ridotta in fondo all' aritmetica degli ordinari numeri complessi, cioè di *aggregati* di numeri complessi.

Benecke'sche philosophische Preisaufgabe.

Für das Jahr 1895 stellt die philosophische Facultät der Universität Göttingen die folgende Aufgabe:

„Die philosophische Facultät wünscht Untersuchungen, welche in der Theorie der, von mehr als drei Veränderlichen abhängigen, allgemeinen Thetafunctionen einen erheblichen Fortschritt bilden".

Bewerbungsschriften sind in deutscher, lateinischer, französischer oder englischer Sprache abzufassen und bis zum 31. August 1894, auf dem Titelblatte mit einem Motto versehen, an uns einzusenden, zusammen mit einem versiegelten Briefe, welcher auf der Aussenseite das Motto der Abhandlung, innen Namen, Stand und Wohnort des Verfassers anzeigt. In anderer Weise darf der Name des Verfassers nicht angegeben werden. Auf dem Titelblatte der Arbeit muss ferner die Adresse verzeichnet sein, an welche die Arbeit zurückzusenden ist, falls sie nicht preiswürdig befunden wird.

Der erste Preis beträgt 1700 Mk., der zweite 680 Mk.

Die Zuerkennung der Preise erfolgt am 11. März 1895, dem Geburtstage des Stifters, in öffentlicher Sitzung der philosophischen Facultät zu Göttingen.

Die gekrönten Arbeiten bleiben unbeschränktes Eigenthum der Verfasser.

Göttingen, den 12. März 1892.

Die philosophische Facultät.
Der Dekan
Riecke.

INHALT.

Wir ersuchen unsere geehrten Herren Mitarbeiter, etwaige, den Abhandlungen beizufügende Figuren — gleichviel ob dieselben im Texte selbst oder auf besonderen Tafeln veröffentlicht werden sollen — im Interesse einer raschen und exacten Ausführung stets auf besonderen Blättern, wenn möglich in der gewünschten Grösse und in thunlichst präciser Zeichnung dem Manuscripte beilegen zu wollen.

Die Redaction.

Jeder Band der Annalen wird 36—38 Druckbogen umfassen. Um jedoch in jedem Heft nur abgeschlossene Artikel zu geben, werden die einzelnen Hefte mitunter von ungleicher Stärke sein.

Verantwortliche Redaction: W. Dyck, F. Klein, A. Mayer.

MATHEMATISCHE ANNALEN.

IN VERBINDUNG MIT C. NEUMANN

BEGRÜNDET DURCH

RUDOLF FRIEDRICH ALFRED CLEBSCH.

Unter Mitwirkung der Herren

Prof. P. Gordan zu Erlangen, Prof. C. Neumann zu Leipzig,
Prof. K. VonderMühll zu Basel

gegenwärtig herausgegeben

von

Prof. **Felix Klein**
zu Göttingen.

Prof. **Walther Dyck**
zu München.

Prof. **Adolph Mayer**
zu Leipzig.

XL. Band. 4. Heft.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1892.

Neue Beiträge zur Transformationstheorie der elliptischen Functionen.

Von

Robert Fricke in Kiel.

Den Modulargleichungen, welche Jacobi gelegentlich der Transformation n^{ter} Ordnung der elliptischen Functionen für den Integralmodul k auffand, hat man bekanntermassen neuerdings eine grössere Reihe analoger Gleichungen für andere Modulfunctionen des Periodenquotienten ω an die Seite gestellt. Hierbei nehmen aus naheliegendem Grunde die „Modulargleichungen erster Stufe", welche aus der Transformation n^{ter} Ordnung der „Modulfunction erster Stufe" $J(\omega)$ entspringen, die erste Stelle ein. Freilich fallen gerade diese Gleichungen, ihrer äusseren Gestalt nach betrachtet, sehr complicirt aus; dafür aber hat sich gezeigt, dass das „algebraische Gebilde", welches durch die Modulargleichung *erster* Stufe definirt ist, bei einer und derselben Ordnung n einfacher ausfällt, als die übrigen algebraischen Gebilde, wie sie den Jacobi'schen oder sonstigen Modulargleichungen höherer Stufe entsprechen. *) Wenn man also der Untersuchung die Wendung giebt, dass man das Studium des algebraischen Gebildes voranstellt, die Aufstellung der Modulargleichung selbst in expliciter Gestalt aber nur mehr als etwas Nebensächliches ansieht, so wird uns die Transformation *erster* Stufe zu den einfachsten Verhältnissen hinführen.

Von der letztgenannten Tendenz sind meine nachfolgenden Ausführungen beherrscht, die sich übrigens an die vorausgegangenen Arbeiten der Herren Klein, Gierster und Kiepert unmittelbar anschliessen. Mag es der Kürze halber gestattet sein, ausführlicher

---

*) Es bezieht sich diese Angabe indes einzig auf das Gebiet der elliptischen Modulfunctionen. Bei der Transformation anderer automorpher Functionen trifft man gelegentlich auf Modulargleichungen, welche an Einfachheit des algebraischen Gebildes die Modulargleichungen für $J(\omega)$ noch überbieten.

nur auf die Entwicklungen Kiepert's Bezug zu nehmen*); denn während Klein und Gierster (in Bd. 14 der Mathem. Annalen) nur jene Fälle behandelt haben, in denen das in Rede stehende algebraische Gebilde zum Geschlechte $p = 0$ gehört, hat Hr. Kiepert durch Aufnahme analytischer Hülfsmittel die Betrachtung weit über diese Anfangsfälle hinaus fortsetzen können. Freilich kommen a. a. O. mit Ausnahme des Falles $n = 11$ ausschliesslich zusammengesetzte Transformationsgrade zur Geltung. Man kann es demnach als eine Ergänzung der Untersuchungen von Hrn. Kiepert ansehen, wenn ich in der Folge nur Primzahlordnungen betrachte.

Andrerseits aber wollte ich durch das Folgende ein Beispiel dafür beibringen, wie erfolgreich sich bei Fragen unserer Art der consequente Gebrauch einer *formentheoretischen* Schlussweise gestaltet. Das Wesentliche dieser Betrachtungsweise ist, dass man die Formen unmittelbar als Grössen ansieht, die auf der gerade in Betracht kommenden Riemann'schen Fläche existiren; in welchem Sinne dies gemeint ist und inwiefern darin eine Vereinfachung zu erblicken ist, wird sich bald zeigen. Uebrigens ist die formentheoretische Untersuchungsmethode ganz allgemein für die Theorie der Functionen einer beliebigen Riemann'schen Fläche von grösster Bedeutung**).

Die analytischen Hülfsmittel, deren ich mich weiterhin bediene, sind zu einem Theile sehr bekannte Grössen aus der Transformations- und Theilungstheorie. Ich stelle dieselben sogleich in Artikel I kurz zusammen; sodann aber füge ich eine Reihe bislang noch nicht benutzter, in der Folge jedoch sehr wichtiger Modulformen hinzu, welche ich im Verfolg einer noch ausführlich zu nennenden Arbeit von Hrn. Hurwitz gewonnen habe. Eben diese letzteren Grössen liessen es wünschenswerth erscheinen, den Transformationsgrad n als ganze Zahl der Gestalt $4h + 3$ vorauszusetzen; denn für diese Grade werden von dem erwähnten Hurwitz'schen Ansatze ganz besonders brauchbare Moduln geliefert. Dass n überdies eine Primzahl sein sollte, wurde bereits oben festgesetzt.

I.

Zusammenstellung analytischer und geometrischer Hülfsmittel.

Bei Primzahltransformation n^{ter} Ordnung treten bekanntlich $(n+1)$ verschiedene Repräsentanten auf, und die $(n+1)$ transformirten Werthe

---

*) Es kommen namentlich die beiden Abhandlungen in Betracht: *Ueber die Transformation der elliptischen Functionen bei zusammengesetztem Transformationsgrade*, Math. Ann. Bd. 32; *Ueber gewisse Vereinfachungen der Transformationsgleichungen in der Theorie der elliptischen Functionen*, ebenda Bd. 37.

**) Man vergl. hierüber die Entwicklungen von Klein in den Math. Ann. Bd. 36, p. 5.

J' von J sind die Wurzeln der Modulargleichung $f(J', J) = 0$. Um aber das durch diese Gleichung definirte algebraische Gebilde zu untersuchen, ist hinreichend, neben dem ursprünglichen $J(\omega)$ nur einen einzelnen transformirten Werth heranzuziehen, und ich bevorzuge in diesem Betracht $J'(\omega) = J(n\omega)$. Die zugehörige Untergruppe ist durch die Bedingung zu definiren, dass ihre Substitutionen $\omega' = v(\omega)$ durch n theilbare dritte Coefficienten γ haben; diese Untergruppe ist eine Γ_{n+1} des Index $(n+1)$, und das zugehörige Fundamentalpolygon F_{n+1} der ω-Halbebene ragt nur mit zwei Spitzen an die reelle ω-Axe heran.*)

Indem nun unsere Aufgabe sein soll, den Charakter des Polygons F_{n+1} oder der ihm entsprechenden Riemann'schen Fläche F_{n+1} aufzuweisen, müssen wir uns gleich nach möglichst einfachen algebraischen Functionen dieser Riemann'schen Fläche F_{n+1} umsehen. Schon hierbei wenden wir uns der Formentheorie zu, indem wir nicht die Modulfunctionen der Γ_{n+1}, sondern vielmehr ihre *Modulformen* heranziehen, die wir dann hernach auch auf der geschlossenen Fläche F_{n+1} betrachten. Die weiterhin zur Benutzung kommenden Modulformen der Gruppe Γ_{n+1} sind aber die folgenden:

Wenn man abgekürzt unter $\wp_{\lambda,\mu}$ die Grösse:

$$\wp_{\lambda,\mu} = \wp\left(\frac{\lambda\omega_1 + \mu\omega_2}{n}\,\middle|\,\omega_1, \omega_2\right)$$

versteht, so ist die $\frac{n-1}{2}$-gliedrige Summe:

$$n \cdot P(\omega_1, \omega_2) = \wp_{0,1} + \wp_{0,2} + \cdots + \wp_{0,\frac{n-1}{2}} \tag{1}$$

eine Modulform, die bei allen homogenen Substitutionen der Γ_{n+1} absolut unverändert bleibt. Diese Modulform besitzt eine äusserst einfache Entwicklung nach ganzen Potenzen der Grösse $r = e^{2\pi i\omega}$, wie man aus bekannten Darstellungen der $\wp$-Function ableiten kann. Man findet nämlich:

$$P = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 \left\{\frac{n-1}{24} + \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_n(m)\, r^m\right\}, \tag{2}$$

*wobei $\Phi_n(m)$ die Summe aller gegen n primen Divisoren von m ist.***)

---

*) Ueber das Nähere betreffs dieser Gegenstände muss ich auf den zweiten Band der gegenwärtig (bei Teubner) im Druck befindlichen „*Vorlesungen über die Modulfunctionen*" verweisen.

**) Die in (2) definirte Modulform ist bereits seit langer Zeit in der Transformationstheorie in Betracht gezogen worden; in den älteren an Weierstrass sich anschliessenden Arbeiten ist sie durch G_1 bezeichnet; man sehe z. B. F. Müller, *De transformatione functionum ellipticarum* (Berlin 1867).

Als weitere Modulformen der Γ_{n+1} reihe ich diejenigen an, deren Kenntnis ich, wie schon gesagt, einer früheren Arbeit von Hrn. Hurwitz*) verdanke. Hierher gehören erstlich die Moduln, welche ich in der Folge durch $B(\omega_1, \omega_2)$ bezeichne, und die zu definiren sind durch die Reihenentwicklung:

$$B = \frac{2\pi}{\omega_2} \sum_{x,y} r^{Px^2+Qxy+Ry^2}, \tag{3}$$

summirt über alle Paare positiver und negativer ganzer Zahlen x, y. Dabei steht im Exponenten von r eine für die Modulform B charakteristische *ganzzahlige binäre quadratische Form* (P, Q, R), welche nur der einen Bedingung zu genügen hat, *dass ihre Determinante* $D = Q^2 - 4PR$ *den Werth* $D = -n$ *haben soll.* Ordnet man die Reihe (3) nach ansteigenden Potenzen von r an, so kommt:

$$B = \frac{2\pi}{\omega_2} \sum_{m=0}^{\infty} \Omega(m)\, r^m, \tag{4}$$

wo offenbar $\Omega(m)$ *die Anzahl unterschiedener Darstellungen von* m *durch die quadratische Form* (P, Q, R) *vermöge ganzer Zahlen* x, y *ist.* Eigentlich oder uneigentlich äquivalente Formen (P, Q, R) liefern dasselbe $B(\omega_1, \omega_2)$. Die Anzahl unterschiedener Modulformen B, welche beim einzelnen Transformationsgrad n auftreten, ist demnach höchstens gleich der Anzahl ambiger Formclassen der Determinante $D = -n$, vermehrt um die halbe Anzahl der übrigen Classen dieser Determinante. Als Modulform *ungerader* Dimension kann sich B gegenüber homogenen Substitutionen der Γ_{n+1}, allgemein zu reden, nur erst bis auf das Vorzeichen reproduciren. Die Γ_{2n+2}, zu welcher B im absoluten Sinne gehört, ist in der That erst durch die Forderungen

$$\gamma \equiv 0 \ (\mathrm{mod.}\ n), \qquad \left(\frac{\alpha}{n}\right) = +1 \tag{5}$$

zu definiren, wobei in der letzten Gleichung auf der linken Seite das Legendre'sche Zeichen gemeint ist. Uebrigens ist bei den weiter zu entwickelnden Schlussfolgerungen einige Male von dem Umstande Gebrauch gemacht, dass für sehr kleine ω_2 näherungsweise die Formel gilt:

$$i\sqrt{n}\ \ B(-\omega_2, \omega_1) = B(\omega_1, \omega_2), \tag{6}$$

wobei $\sqrt{n}$ positiv zu nehmen ist. Es ergiebt sich diese Formel leicht in der ausführlichen Theorie der Grössen B, auf welche ich hier nicht näher eingehen kann (cf. „Modulfunctionen" II, p. 313).

*) *Ueber endliche Gruppen, die in der Theorie der elliptischen Transcendenten auftreten*, Math. Ann. Bd. 27.

Die Moduln B sind diejenigen, deren ich mich in der Folge fast ausschliesslich bediene. Zwei oder drei Male sollen indessen noch weitere Modulformen zur Verwendung kommen; ich definire diese letzteren einmal durch die Reihenentwicklung:

$$A = \frac{2\pi}{\omega_2} \sum_{x,y} (-1)^y \, r^{\frac{1}{2}(p_1 x^2 + n p_2 x y + n p_3 y^2)}, \tag{7}$$

wo p_1, p_2, p_3 irgend ein Tripel ganzer Zahlen ist, das der Bedingung:

$$n p_2^2 + 1 = 4 p_1 p_3, \quad p_3 \equiv 1 \pmod{2} \tag{8}$$

genügt; die Summation bezieht sich auf alle Paare ganzer Zahlen x, y, von denen jedoch die erste x stets ungerade sein soll. Im Falle $n = 8h + 3$ bekommen wir eine zweite Form A, wenn wir an den Voraussetzungen (7) und (8) festhalten, jedoch als Summationsbedingung:

$$x + y \equiv 1 \pmod{2} \tag{9}$$

vorschreiben. Endlich ist in eben diesem Falle $n = 8h + 3$ als dritte Form A die nachfolgende anzumerken:

$$A = \frac{2\pi}{\omega_2} \sum (-1)^x \, r^{\frac{1}{2}(p_1 x^2 + n p_2 x y + n p_3 y^2)}, \tag{10}$$

wobei die Vorschriften (8) in Kraft bleiben sollen, während als Summationsbedingung $y \equiv 1 \pmod{2}$ hinzutritt. — Die Modulformen A, welche ich gleichfalls aus den Untersuchungen von Herrn Hurwitz hergenommen habe, sind übrigens *im Falle* $n = 8h + 3$ *nur erst nach Normirung mit* $\sqrt{\Delta}$ *Grössen der* n^{ten} *Stufe.* Die (eventuell normirten) A gehören alsdann, absolut genommen, wieder zu der durch (5) definirten Untergruppe Γ_{2n+2}. Ueber den Charakter der Exponenten von r in (7) und (10), sowie betreffs der Umordnung dieser Reihen nach ansteigenden Potenzen von r gelten ähnliche Sätze, wie vorhin bei den B. Doch sind hier die betreffenden Entwicklungscoefficienten $\Omega'(m)$ immer als *Differenzen* ganzer Zahlen zu definiren; eben deshalb tritt es wiederholt ein, dass eine einzelne der definirten Reihen A identisch verschwindet.

Bei der Untersuchung der Transformation n^{ter} Ordnung der Modulformen erster Stufe ist es nun fundamental, dass die Gruppe Γ_{n+1}, welche unserer ganzen Betrachtung zu Grunde liegt, mit der ganzzahligen Substitution der Determinante n:

$$w(\omega) = -\frac{1}{n\omega} \tag{11}$$

vertauschbar ist. Wir entwickeln hier vorab gleich eine Reihe von Folgerungen, welche sich aus diesem Umstande für die Gruppe Γ_{n+1}

und ihr Fundamentalpolygon F_{n+1} ergeben. Combinirt man die Substitutionen v der Γ_{n+1} mit der einen Operation w und fügt die entspringenden Substitutionen der Γ_{n+1} hinzu, so ergiebt sich eine erweiterte Gruppe, die wir $\Gamma_{(n)}$ nennen mögen, und in welcher Γ_{n+1} eine ausgezeichnete Untergruppe des Index zwei ist. Das Polygon (oder die Riemann'sche Fläche) F_{n+1} erfährt der Substitution w entsprechend, eine Transformation der Periode zwei in sich, und man gewinnt ein Polygon $F_{(n)}$ der $\Gamma_{(n)}$, indem man F_{n+1} dermassen hälftet, dass die eine Hälfte gerade durch w in die andere übergeführt wird. Formt man das Polygon der $\Gamma_{(n)}$ zu einer geschlossenen Fläche $F_{(n)}$ um, so lässt sich durch doppelte Ueberdeckung dieser letzteren die Riemann'sche Fläche F_{n+1} herstellen. Die babei auftretenden Verzweigungspunkte rühren von jenen Punkten ω des ursprünglichen Polygons F_{n+1} her, welche bei der Operation $\omega' = w(\omega)$ sich selbst zugewiesen werden. Diese Punkte w — ich nenne sie in der Folge kurz die Fixpunkte der Operation w — haben eine wichtige arithmetische Bedeutung, deren Kenntniss uns in der Folge sehr nützlich sein wird. *Es ist nämlich die Anzahl der fraglichen Punkte des Polygons F_{n+1} identisch mit der Classenanzahl der Formen (P, Q, R) der Determinante $D = -4n$ und zwar sowohl der ursprünglichen Formen, als derjenigen des Theilers* 2; *die Punkte selbst aber sind repräsentirende Punkte jener Classen.* In zahlreichen Fällen, wo F_{n+1} selbst ein Geschlecht $p > 0$ hat, sinkt das Geschlecht des Polygons $F_{(n)}$ auf $p = 0$ herab; in diesen Fällen ist alsdann F_{n+1} entweder elliptisch oder hyperelliptisch.

Um jetzt aus den Modulformen erster Stufe vermöge der Transformation n^{ter} Ordnung besonders einfache Grössen des Polygons $F_{(n)}$ herzustellen, schreibe ich die Operation w in der nachfolgenden homogenen Gestalt:

$$(12) \qquad (w) \quad \omega_1' = \frac{i\omega_2}{\sqrt{n}}, \quad \omega_2' = \frac{\omega_1\sqrt{n}}{i}.$$

Auch diese homogene Operation w hat die Periode zwei. Ist alsdann $f(\omega_1, \omega_2)$ eine Modulform erster Stufe, so setze man:

$$f'(\omega_1, \omega_2) = f\left(\frac{i\omega_2}{\sqrt{n}}, \frac{\omega_1\sqrt{n}}{i}\right)$$

und bilde in diesem Sinne aus den ganzen Modulformen g_2, g_3, Δ die sechs Ausdrücke:

$$(13) \qquad g_2' \pm g_2, \quad g_3' \pm g_3, \quad \Delta' \pm \Delta.$$

Dieselben sind nicht nur Modulformen der Γ_{n+1}, sondern wir können überdies gleich noch aussagen, dass sie bei Ausübung von w erhalten bleiben oder einen Zeichenwechsel erfahren, je nachdem in (13) das obere oder untere Zeichen gilt.

Eine Modulform, welche sich bei Ausübung einer Substitution der Γ_{n+1} bez. $\Gamma_{(n)}$ nur erst bis auf einen numerischen Factor reproducirt, nennen wir *dieser Gruppe oder auch ihrem Polygon adjungirt.* Von Grössen dieser Art, wie solche ja z. T. in (13) bereits vorliegen, benutze ich aber weiter noch $\sqrt{\Delta}$ und $\sqrt[3]{\Delta}$, welche Modulformen durch Ausübung der homogenen Substitution (12) in $\sqrt{\Delta'}$ bez. $\sqrt[3]{\Delta'}$ übergehen mögen. Auf Grund des bekannten Verhaltens der Wurzeln aus der Discriminante Δ zeigt man, dass für $n = 3h + 1$ die Form $\sqrt[3]{\Delta'}$ bei einer Substitution v der Γ_{n+1} sich um den gleichen Factor ändert, wie $\sqrt[3]{\Delta}$; für $n = 3h - 1$ ist dies freilich nur erst bei $\sqrt{\Delta}$ der Fall. Allgemein werden wir demnach in $(\sqrt{\Delta'} \pm \sqrt{\Delta})$, für $n = 3h + 1$ überdies noch in $(\sqrt[3]{\Delta'} \pm \sqrt[3]{\Delta})$ eine der Γ_{n+1} adjungirte Modulform besitzen; gegenüber w wird dieselbe erhalten bleiben oder Zeichenwechsel erfahren, je nachdem das obere oder untere Zeichen gilt.

Stets haben wir endlich in

$$(14) \qquad \sqrt[12]{\Delta' \Delta}$$

eine der Γ_{n+1} adjungirte Modulform, und ein Gleiches gilt auch noch von der Quadratwurzel aus diesem Ausdruck. Die Modulform (14) verhält sich bei Substitutionen v der Γ_{n+1} gerade so wie $\Delta^{\frac{n+1}{12}}$; übrigens ist die Form (14) sehr häufig mit dem Quadrate einer Modulform A identisch, oder sie lässt sich auch wohl als lineare Combination der unterschiedenen zum gleichen n gehörenden Formen B herstellen. Wir werden weiter unten Beispiele dieser Art kennen lernen.

Die sämmtlichen angeführten Modulformen zeichnen sich dadurch aus, dass sie weder im Innern des Polygons F_{n+1}, noch auch in einer der beiden Spitzen unendlich werden können. Sie sind demgemäss ganze algebraische Functionen von g_2 und g_3, und wir bezeichnen sie in diesem Sinne kurz als *ganze* Modulformen. Für diese ganzen Modulformen gilt nun der nachfolgende wichtige Satz: *Ist $-\nu$ die Dimension einer einzelnen der Γ_{n+1} entweder im absoluten Sinne zugehörigen oder adjungirten ganzen Modulform, so ist die Gesammtordnung des Verschwindens derselben auf dem Polygon oder der Fläche F_{n+1} durch $\frac{\nu(n+1)}{12}$ gegeben;* ich werde diese Zahl in der Folge kurz als *Werthigkeit* der fraglichen Modulform auf F_{n+1} bezeichnen.

Wie man sieht, kann es vorkommen, dass die Werthigkeit einer ganzen Modulform eine gebrochene Zahl ist; es müssen alsdann Nullpunkte gebrochener Ordnung auftreten, obgleich wir mit einer auf der Fläche F_{n+1} eindeutigen Form zu thun haben. Es stellt sich dieses Vorkommnis bereits ein, falls man die Modulformen erster Stufe g_2, g_3 als eindeutige in der J-Ebene existirende Grössen betrachtet; da verschwindet g_2 im Grade $\frac{1}{3}$ bei $J = 0$, g_3 aber im Grade $\frac{1}{2}$ bei $J = 1$. Auch im Allgemeinen können Nullpunkte gebrochener Ordnung auf der Fläche F_{n+1} nur an solchen als *„Ausnahmepunkte"* zu bezeichnenden Stellen eintreten, wo die Beziehung der Fläche auf die ω-Halbebene aufhört eine conforme zu sein. Es können das bekanntermassen nur Punkte sein, wo $J = 0$ oder 1 oder ∞ ist; bei der geschlossenen Fläche $F_{(n)}$ treten ausserdem noch jene Punkte hinzu, in welchen bei der zur F_{n+1} führenden doppelten Ueberlagerung Verzweigungen eintreten.

Die in den Formeln (1) u. s. w. definirten ganzen Modulformen sind keineswegs stets alle von einander verschieden. So z. B. zeigt man bei $n = 7$ aus den vorstehenden Betrachtungen über die Werthigkeit, dass es überhaupt nur eine einzige ganze, zur Γ_8 gehörende Form $(-2)^{\text{ter}}$ Dimension geben kann. Es muss also die zweite Potenz der für die binäre quadratische Form

$$(P, Q, R) = (1, 1, 2)$$

gebildeten Modulform B bis auf einen numerischen Factor mit der aus (2) für $n = 7$ entspringenden Grösse $P(\omega_1, \omega_2)$ identisch sein. Indem man die Coefficienten der beiderlei Reihenentwicklungen für eine und dieselbe Modulform einander entsprechend identisch setzt, ergeben sich arithmetische Resultate, welche als Verallgemeinerungen eines bekannten Jacobi'schen Satzes über die Zerlegung ganzer Zahlen in vier Quadrate angesehen werden können. Im fraglichen Falle $n = 7$ würde z. B. die Anzahl der Darstellungen von $4m$ in der Gestalt:

$$4m = x_1^2 + x_2^2 + 7y_1^2 + 7y_2^2$$

vermöge ganzer Zahlen x, y unmittelbar zurückzuführen sein auf die oben definirte Theilersumme $\Phi_7(m)$; zahlentheoretische Ergebnisse dieser Art habe ich andrenorts ausführlich entwickelt.

II.

Die Flächen F_{n+1} für $n = 11$ und $n = 19$ und die zugehörigen Formen der Dimensionen -1 und -2.

Unter den für uns in Betracht kommenden Transformationsgrades n giebt es zwei, die zum Geschlechte $p = 1$ gehören, es sind $n = 11$ und $n = 19$. In beiden Fällen aber müssen die Flächen $F_{(n)}$ auf das Geschlecht $p = 0$ zurückkommen, wie man aus dem Umstande folgert, dass sich die Substitution w durch das zweckmässig fixirte Integral erster Gattung u der F_{n+1} in der Gestalt $u' = -u$ darstellt. F_{n+1} wird sich alsdann über der „Ebene" $F_{(n)}$ als zweiblättrige Riemann'sche Fläche mit vier Verzweigungspunkten anordnen lassen, welche letztere den ursprünglichen Formclassen (P, Q, R) der Determinanten $D = -n$ und $-4n$ zugeordnet sind. In der That finden wir denn auch bei $n = 11$ die eine reducirte Form $(1, 1, 3)$ für $D = -11$ und die drei $(1, 0, 11)$, $(3, \pm 2, 4)$ für $D = -44$, während sich für $D = -19$ die eine reducirte Form $(1, 1, 5)$, für $D = -76$ aber die drei Formen $(1, 0, 19)$, $(4, \pm 2, 5)$ anschliessen. Im einzelnen Falle sind die vier innerhalb F_{n+1} gelegenen Fixpunkte von w mit den repräsentirenden Punkten ω der in Betracht kommenden vier Classen äquivalent; insbesondere entspricht der auf der imaginären Axe gelegene Fixpunkt $\omega = i : \sqrt{n}$ der ambigen Classe $(1, 0, n)$ der Determinante $D = -4n$.

Um nun gleich eine Reihe wichtiger Modulformen unserer Flächen zu gewinnen, so beginnen wir hier zuvörderst mit dem Falle $n = 11$ und specialisiren erstlich $\sqrt[2]{\Delta' \Delta}$ für $n = 11$; diese Form heisse kurz A, da sie uns in der That auch von einer der obigen Reihen A geliefert wäre. Hier und in der Folge behalten wir uns immer noch vor, die einzelne Form mit einem zweckmässig gewählten numerischen Factor zu versehen; wie derselbe im Einzelfalle gewählt ist, geht stets aus dem Anfangsgliede der Reihenentwicklung hervor, und in diesem Betracht notiren wir hier:

$$(1) \qquad A = \frac{2\pi}{\omega_2}\left(r^{\frac{1}{2}} - r^{\frac{3}{2}} - r^{\frac{5}{2}} + r^{\frac{11}{2}} + r^{\frac{15}{2}} - \cdots\right).$$

Sodann bilde man die Modulform B für die zu $D = -11$ gehörende binäre quadratische Form $(1, 1, 3)$; die Anfangsterme für B sind:

$$(2) \qquad B = \frac{2\pi}{\omega_2}(1 + 2r + 4r^3 + 2r^4 + 4r^5 + \cdots).$$

Die beiden Modulformen A, B sind auf F_{12} *einwerthig*, und zwar liegen für A zwei Nullpunkte je von der Ordnung $\frac{1}{2}$ in den beiden Polygonspitzen, während B einfach verschwindet in demjenigen auf F_{12} gelegenen Fixpunkte von w, welcher die eine Formclasse der Determinante $D = -11$ repräsentirt; man wird dies Letztere mit Hülfe einer kleinen Zwischenbetrachtung leicht von der Formel (6) des vorigen Artikels aus beweisen können. Ueben wir die Operation w aus, so werden sich sowohl A wie B nur um einen numerischen Factor ändern können, da die transformirten Formen A, B dieselben Nullpunkte haben, wie die ursprünglichen. Jener zutretende Factor kann aber nur den Werth ± 1 haben, da w die Periode zwei hat; man setze also:

$$A\left(\frac{i\omega_2}{\sqrt{11}},\ \frac{\omega_1\sqrt{11}}{i}\right) = \pm A(\omega_1, \omega_2)$$

und entsprechend für B. Hier wähle man für ω_1 und ω_2 die Specialwerthe $\omega_1 = i$, $\omega_2 = \sqrt{11}$, womit ein in der positiven Halbebene gelegener Quotient ω getroffen wird, für welchen weder A noch B verschwindet. Es ist demnach evident, dass A und B durch w direct in sich transformirt werden:

$$(3)\qquad \begin{aligned} A\left(\frac{i\omega_2}{\sqrt{11}},\ \frac{\omega_1\sqrt{11}}{i}\right) &= A(\omega_1, \omega_2),\\ B\left(\frac{i\omega_2}{\sqrt{11}},\ \frac{\omega_1\sqrt{11}}{i}\right) &= B(\omega_1, \omega_2). \end{aligned}$$

Die Quadrate A^2 und B^2 sowie auch die linearen Verbindungen:

$$(4)\qquad \alpha A^2 + \beta B^2$$

derselben bleiben gegenüber den Substitutionen der $\Gamma_{(11)}$ absolut invariant. Eine solche Verbindung (4) ist aber auf $F_{(11)}$ einwerthig, und es kann durch zweckmässige Wahl der Parameter α, β der Nullpunkt von (4) an jede gewünschte Stelle von $F_{(11)}$ gelegt werden. *Als eine einwerthige Function der $\Gamma_{(11)}$ wollen wir daraufhin*

$$(5)\qquad \tau(\omega) = \left(\frac{A}{B}\right)^2$$

heranziehen; ihre beiden auf F_{12} gelegenen Nullpunkte sind die Polygonspitzen, während sie in dem zur Determinante -11 *gehörenden Fixpunkte von w doppelt unendlich wird.*

Specialisiren wir die Form $P(\omega_1, \omega_2)$ der $(-2)^{\text{ten}}$ Dimension für $n = 11$, so ergeben sich für die Reihenentwicklung derselben die Anfangsterme:

$$(6)\qquad P = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 \left\{\frac{5}{12} + r + 3r^2 + 4r^3 + 7r^4 + 6r^5 + \cdots\right\}.$$

Diese Modulform wird nun in der Gestalt (4) darstellbar sein, und man berechne, um dieses zu verificiren, für A^2 und B^2 die folgenden Anfangsglieder der Reihenentwicklungen:

$$(7)\qquad A^2 = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 \{r - 2r^2 - r^3 + 2r^4 + r^5 + \cdots\},$$

$$(8)\qquad B^2 = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 \{1 + 4r + 4r^2 + 8r^3 + 20r^4 + 16r^5 + \cdots\}.$$

In der That zeigt sich jetzt unmittelbar, dass die Gleichung

$$-\frac{2}{3}A^2 + \frac{5}{12}B^2 = P$$

identisch besteht, insofern die linke Seite, nach Potenzen von r angeordnet, gerade wieder auf die Entwicklung (6) zurückführt. —

Analoge Entwicklungen finden in dem gleichfalls zum Geschlechte 1 gehörenden Falle $n = 19$ statt. Man setze hier erstlich

$$A = \frac{\pi}{\omega_2} \sum_{x, y} (-1)^y r^{\frac{x^2 + 19 y^2}{8}}$$

mit den Summationsbedingungen:

$$x \equiv y \pmod{2}, \qquad x - y \equiv 2 \pmod{4},$$

die hier ausführlich formulirt wurden, weil sie aus den allgemeinen Formeln (7), (8), (9) des vorigen Artikels nur erst vermöge einer kleinen Zwischenrechnung hervorgehen. Die Anfangsglieder der Potenzentwicklung der Modulform 19[ter] Stufe A sind:

$$(9) \qquad A = \frac{2\pi}{\omega_2}\left(r^{\frac{1}{2}} + * - r^{\frac{5}{2}} - r^{\frac{7}{2}} + r^{\frac{9}{2}} - r^{\frac{11}{2}} + \cdots\right).$$

Hieran reihen wir die für die quadratische Form (1, 1, 5) zu bildende Modulform B, für welche die Anfangsterme der Entwicklung nach ansteigenden Potenzen von r die folgenden sind:

$$(10) \qquad B = \frac{2\pi}{\omega_2}(1 + 2r + * + * + 2r^4 + 4r^5 + * + \cdots).$$

Diese beiden Modulformen A, B sind auf der F_{20} von der Werthigkeit $\frac{5}{3}$; und zwar entfallen zwei Nullpunkte je von der Ordnung $\frac{1}{3}$ in die beiden „Ausnahmepunkte“ mit $J = 0$, welche F_{20} aufweist; der übrigbleibende Nullpunkt spaltet sich aber für A in zwei je von der Ordnung $\frac{1}{2}$, die in den Polygonspitzen gelegen sind, während B einfach in dem zur Formclasse $D = -19$ gehörenden Fixpunkt von w verschwindet. Für die Ausübung der Substitutionen w auf A und B bleiben unverändert die Formeln (3) in Kraft (nur dass wir in derselben 19 statt 11 einzusetzen haben); und wir gewinnen wieder in der durch (5) zu definirenden Modulfunction $\tau(\omega)$ eine Hauptfunction der $\Gamma_{(19)}$, für welche Null- und Unstetigkeitspunkte auf F_{20} durchaus wieder eben jene Lage aufweisen, die wir vorhin bei dem zu $n = 11$ gehörigen $\tau(\omega)$ auf dem Polygon F_{12} bezeichneten.

Die zu $n = 19$ gehörende Form P besitzt die Potenzentwicklung:

$$(11) \quad P = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 \left\{\frac{3}{4} + r + 3r^2 + 4r^3 + 7r^4 + 6r^5 + 12r^6 + \cdots\right\},$$

während andrerseits die Quadrate der A, B die Anfangsterme besitzen:

$$(12) \quad A^2 = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 \{r + * - 2r^3 - 2r^4 + 3r^5 + * \cdots\},$$

$$(13) \quad B^2 = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 \{1 + 4r + 4r^2 + * + 4r^4 + 16r^5 + 16r^6 + \cdots\}.$$

Als eine Bestätigung unserer bisherigen Angaben dürfen wir ansehen, dass die Gleichung:

$$-2A^2 + \frac{3}{4}B^2 = P \tag{14}$$

identisch besteht. Setzt man nämlich linker Hand die Entwicklungen (12) und (13) ein und ordnet wiederum nach ansteigenden Potenzen von r an, so wird man zur Entwicklung (11) zurückgeführt.

III.

Die dreiwerthigen Functionen $\tau'(\omega)$ der Flächen F_{12} und F_{20} und ihre Beziehung zu den $\tau(\omega)$.

Wenn wir den Unstetigkeitspunkt der Function $\tau(\omega)$ als untere Grenze für das überall endliche Integral u der Fläche F_{n+1} des Geschlechtes $p = 1$ wählen, so wird $\tau(\omega)$ entweder direct mit der zugehörigen Function $\wp(u)$ identisch sein oder doch eine lineare ganze Function von $\wp(u)$ vorstellen. Wir gehen jetzt weiter darauf aus, eine Function $\tau'(\omega)$ zu bilden, welche in gleicher Weise dem $\wp'(u)$ entspricht; zu dem Ende verfahren wir, wie folgt:

Jeder der beiden Ausdrücke:

$$\int \frac{d\tau}{\tau'}, \qquad \int A^2 \cdot (\omega_1 d\omega_2 - \omega_2 d\omega_1) \tag{1}$$

stellt ein überall endliches Integral der Fläche F_{n+1} vor; für den ersten Ausdruck ergiebt sich dies aus der *algebraischen* Theorie der elliptischen Gebilde, für den letzteren auf *transcendentem* Wege aus den Reihenentwicklungen. Man darf also die beiden Differentiale von (1) direct einander gleich setzen und wolle dabei übrigens für die ganze Modulform $\tau' B^3$ abkürzend die Bezeichnung:

$$\tau' B^3 = E(\omega_1, \omega_2) \tag{2}$$

einführen. Indem wir uns zugleich der Abkürzungen:

$$A_0 = \frac{\omega_2}{2\pi} A, \quad B_0 = \frac{\omega_2}{2\pi} B, \quad E_0 = \left(\frac{\omega_2}{2\pi}\right)^3 E \tag{3}$$

bedienen, entspringt nach kurzer Zwischenrechnung *für die ganze Modulform* 11*ter bez.* 19*ter Stufe E die Definition:*

$$E_0 = \frac{2rB_0}{A_0} \cdot \frac{dA_0}{dr} - 2r\frac{dB_0}{dr}. \tag{4}$$

Als Anfangsterme der Potenzentwicklung der zu $n = 11$ gehörenden Form E der $(-3)^{\text{ten}}$ Dimension ergeben sich daraufhin:

$$E = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^3 \{1 - 4r - 10r^2 - 40r^3 - 52r^4 - 104r^5 - \cdots\}, \tag{5}$$

während sich für $n = 19$ die Entwicklung anschliesst:

(6) $$E = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^3 \{1 - 2r - 4r^2 - 14r^3 - 22r^4 - 48r^5 - \cdots\}.$$

Es muss sich nun weiter E als eine ganze homogene Function dritten Grades von A^2 und B^2 darstellen lassen, die wir sogleich in der Gestalt ansetzen können:

(7) $$E^2 = B^6 + aB^4A^2 + bB^2A^4 + cA^6.$$

Die numerischen Coefficienten a, b, c bestimmt man durch Einsetzung der Reihenentwicklungen; *es ergiebt sich als fertige Gestalt der algebraischen Relation* (7):

(8) (*für* $n = 11$) $E^2 = B^6 - 20B^4A^2 + 56B^2A^4 - 4 \,.\, 11A^6$,

(9) (*für* $n = 19$) $E^2 = B^6 - 16B^4A^2 + 64B^2A^4 - 4 \,.\, 19A^6$.

Indem wir zu den Modulfunctionen zurückgehen, *werden wir beide Male in τ' und τ ein volles Modulsystem der Γ_{n+1} besitzen; die algebraischen Relationen, durch welche diese beiden Grössen an einander gebunden sind, weisen alsdann die Gestalt auf**):

(10) (*für* $n = 11$) $\tau'^2 = -2^2 \cdot 11\tau^3 + 2^3 \cdot 7\tau^2 - 2^2 \cdot 5\tau + 1$,

(11) (*für* $n = 19$) $\tau'^2 = -2^2 \cdot 19\tau^3 + 2^6\tau^2 - 2^4\tau + 1$.

Die Transformation w der Fläche F_{n+1} in sich stellt sich nun einfach durch Zeichenwechsel des τ' bei unverändertem τ dar; eben dieserhalb wird für E die Bedingung bestehen:

(12) $$E\left(\frac{i\omega_2}{\sqrt{n}}, \frac{\omega_1\sqrt{n}}{i}\right) = -E(\omega_1, \omega_2), \quad (n = 11, 19).$$

Uebrigens wird E auf F_{n+1} beide Male je einfach in jenen drei Fixpunkten von w verschwinden, welche wir oben den drei ursprünglichen Formclassen der Determinante $D = -4n$ zuzuweisen hatten; im Falle $n = 19$ kommen für E noch zwei weitere Nullpunkte hinzu, welche in den beiden Ausnahmepunkten mit $J = 0$ gelegen sind.

Man könnte noch fragen, wie sich die Relationen (10) und (11) gestalten, wenn wir sie auf die Normalform:

$$\wp'^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$$

umrechnen, und welche Werthe daraufhin die absolute Invariante J für unsere beiden elliptischen Gebilde $n = 11$ und $n = 19$ besitzt. Um

*) In etwas andrer Gestalt findet sich die für $n = 11$ angegebene Relation (10) in der ersten der beiden in der Einleitung genannten Arbeiten von Hrn. Kiepert; man vergl. Formel (320) daselbst.

Verwechslungen zu vermeiden, wollen wir die hier in Betracht kommenden Werthe der rationalen Invarianten etc. statt durch die gewöhnlichen Bezeichnungen immer mit den entsprechenden deutschen Buchstaben benennen. Man findet alsdann als Normalgestalten unserer algebraischen Relation dritten Grades:

$$(\text{für } n = 11) \quad \mathfrak{p}'^2 = 4\mathfrak{p}^3 - \frac{2^2 . 31}{3}\mathfrak{p} - \frac{41 . 61}{3^3},$$

$$(\text{für } n = 19) \quad \mathfrak{p}'^2 = 4\mathfrak{p}^3 - \frac{2^4 . 7}{3}\mathfrak{p} - \frac{13 . 97}{3^3}.$$

Von hier aus berechnet man für die rationalen Invarianten die nachfolgenden Zahlwerthe:

$$(\text{für } n = 11) \quad \mathfrak{g}_2 = \frac{2^2 . 31}{3}, \quad \mathfrak{g}_3 = \frac{41 . 61}{3^3}, \quad \mathfrak{D} = -11^5,$$

$$(\text{für } n = 19) \quad \mathfrak{g}_2 = \frac{2^4 . 7}{3}, \quad \mathfrak{g}_3 = \frac{13 . 97}{3^3}, \quad \mathfrak{D} = -19^3;$$

für die absolute rationale Invariante ergeben sich demgemäss endlich die beiden Werthe:

$$\mathfrak{J} = -\frac{2^6 . 31^3}{3^3 . 11^5}, \qquad \mathfrak{J} = -\frac{2^{12} . 7^3}{3^3 . 19^3}.$$

IV.

Darstellung von g_2, g_3, Δ durch die Formen A, B, E der Flächen F_{12} und F_{20}. Rationaler Ausdruck von J durch τ, τ'.

Die Brauchbarkeit der formentheoretischen Schlussweise bewährt sich nun vor allem bei der Darstellung der Modulformen erster Stufe durch die für unsere beiden Flächen F_{n+1} zu Grunde gelegten Formen. Um mit $n = 11$ zu beginnen, so gehen wir hier auf die schon in Artikel I erwähnten Verbindungen $(g_2' \pm g_2)$ etc. zurück. Offenbar hat $(g_2' + g_2)$ als eine zur Fläche $F_{(11)}$ gehörende ganze Modulform der Dimension (-4) auf derselben zwei einfache Nullstellen und ist als solche eine ganze homogene Function zweiten Grades von A^2 und B^2:

$$(1) \qquad g_2' + g_2 = aB^4 + bB^2A^2 + cA^4.$$

Andrerseits ist der Quotient von $(g_2' - g_2)$ und BE eine eindeutige Function der $F_{(11)}$, so dass die vier Nullpunkte je der Ordnung $\frac{1}{2}$, welche das Product BE auf $F_{(11)}$ aufweist, durch ebensoviele Nullpunkte von $(g_2' - g_2)$ compensirt werden müssen. Im ganzen ist aber $(g_2' - g_2)$ auf $F_{(11)}$ nur zweiwerthig; ausser den vier Nullpunkten der Ordnung $\frac{1}{2}$, welche $(g_2' - g_2)$ an den vier Verzweigungsstellen der über $F_{(11)}$

zweiblättrig angeordneten Fläche F_{12} aufweist, können also keine weiteren Nullpunkte auftreten. Es gilt demnach der Ansatz:

$$g_2' - g_2 = d \cdot BE. \tag{2}$$

Zur Bestimmung der numerischen Constanten $a, \ldots, d$ in den Ansätzen (1) und (2) setze man links und rechts die Potenzentwicklungen nach r ein, verschaffe sich dabei aber stets noch eine überzählige lineare Gleichung für die $a, b, \ldots$, um die in bekannter Art berechneten Werthe der $a, \ldots$ einer Controlle zu unterziehen. Nach Beendigung der Rechnung wird man durch Combination von (1) und (2) g_2 und g_2' einzeln berechnen; *die so entspringenden Endformeln für die Darstellung von g_2 und g_2' durch die zu $n = 11$ gehörenden A, B, E sind:*

$$12 g_2,\ 12 g_2' = 2^5 \cdot 11 A^4 - 2^4 \cdot 23 A^2 B^2 + 61 B^4 \mp 2^2 \cdot 3 \cdot 5 BE, \tag{3}$$

wo das obere Zeichen für das ursprüngliche g_2, das untere aber für die durch Transformation 11[ter] Ordnung entspringende Form g_2' gilt.

Im weiteren bilden wir uns den Ausdruck:

$$\frac{\sqrt{\Delta'} - \sqrt{\Delta}}{AE(aA^2 + bB^2)}, \tag{4}$$

wo a und b zwei zunächst noch nicht näher bestimmte Constanten sind. Nach den früheren Regeln haben wir in (4) eine auf $F_{(11)}$ eindeutige Function, und deshalb muss der Zähler von (4) in jenen vier Punkten in der Ordnung $\frac{1}{2}$ verschwinden, in denen das Product AE eben dieses Verhalten zeigt. Dann bleibt für den Zähler (3) ein einziger Nullpunkt auf $F_{(11)}$ übrig, und wir wollen jetzt a und b derart bestimmen, dass $(aA^2 + bB^2)$ an eben dieser Stelle verschwindet; offenbar gilt alsdann die Gleichung:

$$\sqrt{\Delta'} - \sqrt{\Delta} = AE(aA^2 + b B^2).$$

Indem wir wiederum die Reihenentwicklungen eintragen, ergiebt sich nach ganz kurzer Rechnung:

$$\sqrt{\Delta'} - \sqrt{\Delta} = AE(11 A^2 - B^2). \tag{5}$$

Man bemerke nunmehr, dass $\sqrt{\Delta' \Delta}$ mit $11^3 A^{12}$ identisch sein muss. Die beiden Grössen $\sqrt{\Delta}$ und $-\sqrt{\Delta'}$ sind demgemäss die Wurzeln x der nachfolgenden quadratischen Gleichung:

$$x^2 + AE(11 A^2 - B^2) x - 11^3 A^{12} = 0. \tag{6}$$

Die Wurzel aus der Discriminante dieser quadratischen Gleichung muss also rational in A, B und E ausdrückbar sein; das ist in der That der Fall, *und wir erhalten als Ausdrücke für $\sqrt{\Delta}$ und $\sqrt{\Delta'}$:*

$$2\sqrt{\Delta},\ 2\sqrt{\Delta'} = AB(2^3 \cdot 11 A^4 - 3 \cdot 7 A^2 B^2 + B^4) \pm AE(B^2 - 11 A^2). \tag{7}$$

Für die Darstellung von J durch τ und τ' würden die Formeln (3) und (7) bereits ausreichen; der Vollständigkeit halber mögen wir indessen hier bei $n = 11$ auch noch *die Ausdrücke für* g_3, g_3' hinzusetzen:

$$(8)\quad 216 g_3, 216 g_3' = 7(2^3\cdot 11^2 A^6 - 2^6\cdot 3\cdot 11 A^4 B^2 + 2^4\cdot 3\cdot 23 A^2 B^4 - 5\cdot 19 B^6) \mp 2\cdot 3^2 BE(2^3\cdot 11 A^2 - 37 B^2).$$

Die analoge Behandlung der Transformation $n = 19$ ist deshalb etwas schwieriger, weil auf $F_{(19)}$ ein Ausnahmepunkt mit $J = 0$ existirt. In demselben verschwindet E in erster Ordnung, B, g_2 und g_2' aber in der Ordnung $\frac{1}{3}$. Aus der Betrachtung der Werthigkeit ergiebt sich demnach, dass der Quotient von $(g_2' - g_2)$ und BE eine lineare Function des zu $F_{(19)}$ gehörenden τ sein muss, die in jenem Ausnahmepunkte einfach ∞, in irgend einem andern Punkte aber einfach zu 0 wird. Ist also $(A^2 - \varkappa B^2)$ diejenige Verbindung, welche im Ausnahmepunkte im Grade $\frac{4}{3}$ verschwindet, so wird der Ansatz gelten:

$$(A^2 - \varkappa B^2)(g_2' - g_2) = BE(\alpha A^2 + \beta B^2).$$

Aus den Reihenentwicklungen berechnen wir in bekannter Art:

$$(9)\qquad g_2' - g_2 = \frac{10 BE(5A^2 - 3B^2)}{A^2 - B^2},$$

so dass wir insbesondere noch als Werth der eben mit $\varkappa$ bezeichneten Zahl $\varkappa = 1$ erhalten. Nun ergiebt eine leichte Fortsetzung der formentheoretischen Ueberlegung für $(g_2' + g_2)$ den Ansatz:

$$(B^2 - A^2)(g_2' + g_2) = \alpha B^6 + \beta B^4 A^2 + \gamma B^2 A^4 + \delta A^6,$$

dessen numerische Coefficienten wir wieder in gewohnter Weise berechnen. Die entspringende Formel combiniren wir mit (9) *und finden solchergestalt die nachfolgenden Ausdrücke für* g_2, g_2':

$$(10)\qquad 12(A^2 - B^2) g_2,\quad 12(A^2 - B^2) g_2' = 2^5\cdot 3\cdot 19 A^6 - 2^4\cdot 211 A^4 B^2 + 3\cdot 503 A^2 B^4 - 181 B^6 \mp 60 BE(5A^2 - 3B^2).$$

Besonders interessant gestaltet sich im gegenwärtigen Falle die Untersuchung der Discriminante Δ, weil nämlich $\left(\sqrt[6]{\Delta'} + \sqrt[6]{\Delta}\right)$ der Fläche $F_{(19)}$ als Modulform $(-2)^{\text{ter}}$ Dimension adjungirt ist. Der Quotient von $\left(\sqrt[6]{\Delta'} + \sqrt[6]{\Delta}\right)$ und AB ist demgemäss die Wurzel einer rationalen Function von τ, und man bestätigt sofort, dass Verzweigungen nur im Ausnahmepunkte mit $J = 0$ und in der Spitze $\omega = i\infty$ von $F_{(19)}$ eintreten können. An diesen beiden Stellen von $F_{(19)}$ wird unser Quotient, wie eine formentheoretische Betrachtung lehrt, ∞ im Grade $\frac{2}{3}$ bez. $\frac{1}{3}$, und man findet solchergestalt weiter, dass

$$\sqrt[3]{(\tau - 1)^2 \tau}\cdot \frac{\sqrt[6]{\Delta'} + \sqrt[6]{\Delta}}{AB}$$

eine lineare ganze Function von τ sein wird. Die Bestimmung derselben geschieht in gewohnter Weise und führt auf die Formel:

$$(11)\qquad \sqrt[6]{\Delta'}+\sqrt[6]{\Delta}=\frac{A^{\frac{1}{3}}B(B^2-8A^2)}{\left(\sqrt[3]{B^2-A^2}\right)^2}.$$

Des ferneren haben wir für $\sqrt[6]{\Delta'\Delta}$ die Darstellung:

$$(12)\qquad \sqrt[6]{\Delta'\Delta}=\frac{19A^{\frac{20}{3}}}{\left(\sqrt[3]{B^2-A^2}\right)^4};$$

denn es stimmen die rechte und linke Seite dieser Gleichung erstlich in betreff ihrer Nullpunkte auf $F_{(19)}$ überein, ausserdem aber im Anfangsgliede ihrer Potenzentwicklungen. Die beiden Werthe:

$$(13)\qquad A^{-\frac{1}{3}}(B^2-A^2)^{\frac{2}{3}}\sqrt[6]{\Delta},\qquad A^{-\frac{1}{3}}(B^2-A^2)^{\frac{2}{3}}\sqrt[6]{\Delta'}$$

müssen demzufolge die Wurzeln der quadratischen Gleichung sein:

$$(14)\qquad x^2-(B^3-8BA^2)x+19A^6=0.$$

In der That führt denn auch die Discriminante dieser Gleichung

$$(B^3-8BA^2)^2-4\,.\,19A^6$$

direct auf die rechte Seite der Gleichung (9) des Art. III d. h. auf E^2 zurück, *und wir erhalten als Ausdrücke für* $\sqrt[6]{\Delta}$, $\sqrt[6]{\Delta'}$ *die folgenden:*

$$(15)\qquad 2\sqrt[6]{\Delta},\ 2\sqrt[6]{\Delta'}=\frac{A^{\frac{1}{3}}(B^3-8BA^2\pm E)}{\left(\sqrt[3]{B^2-A^2}\right)^2}$$

Die rationalen Darstellungen von $J(\omega)$ in τ und τ' lassen sich jetzt einfach durch Quotientenbildung aus den bezüglichen voraufgehenden Formeln ableiten. *Dergestalt ergiebt sich erstlich für den Fall* $n=11$ *aus* (3) *und* (7) *nachfolgende Gleichung für* $J(\omega)$*):

$$(16)\qquad 432J=\frac{(2^5.11\tau^2-2^4.23\tau+61-2^2.3.5\tau')^3}{\tau(2^3.11\tau^2-3.7\tau+1-11\tau\tau'+\tau')^2};$$

analog folgt zweitens für den Fall $n=19$ *aus* (10) *und* (15)*:*

$$(17)\quad 27J=\frac{(\tau-1)\left(2^5.3.19\tau^3-2^4.211\tau^2+3.503\tau-181-2^2.3.5\tau'(5\tau-3)\right)^3}{\tau(8\tau-1-\tau')^6}.$$

Entsprechende Formeln bestehen für die transformirten $J'=J(11\omega)$ und $J'=J(19\omega)$; *wir brauchen in der That in* (16) *und* (17) *rechter Hand*

*) Formel (16) findet sich wieder in unwesentlich modificirter Gestalt bei Hrn. Kiepert l. c. Formel (325b).

nur das Zeichen von τ' zu wechseln, um die gemeinten Darstellungen von J' zu gewinnen. Indem man dann weiter jeweils aus den beiden Formeln für J und J', sowie der zwischen τ und τ' bestehenden Relation (10) bez. (11) Art. III die beiden Grössen τ, τ' eliminirt, würde man die *Modulargleichung erster Stufe* für $n = 11$ bez. 19 explicite gewinnen. Inzwischen würde diese Eliminationsrechnung eine sehr umfängliche werden, so dass wir den Complex der drei Gleichungen:

$$(18) \qquad J = f(\tau, \tau'), \quad J' = f(\tau, -\tau'), \quad g(\tau, \tau') = 0,$$

die wir in den beiden Fällen $n = 11$, 19 explicite hergestellt haben, als Ersatz für die fertige Modulargleichung $F(J, J') = 0$ vorschlagen wollen.

V.

Die zum Geschlechte $p = 2$ gehörenden Flächen F_{n+1} bei $n = 23$ und 31 und die zugehörigen zweiwerthigen Grössen.

Unter den Primzahlordnungen $n = 4h + 3$ gehören die beiden $n = 23$, 31 zum Geschlechte $p = 2$; hier haben wir also mit *hyperelliptischen* Gebilden zu thun. Beide Male hat die Transformation w der Fläche F_{n+1} in sich *sechs* Fixpunkte, insofern wir drei ursprüngliche Formclassen der Determinante $D = -n$ und ebenso viele für $D = -4n$ besitzen. Die reducirten Formen unserer beiden Determinanten $D = -n$ sind die folgenden:

$$\text{(für } n = 23) \quad (1, 1, 6), \quad (2, \pm 1, 3),$$
$$\text{(für } n = 31) \quad (1, 1, 8), \quad (2, \pm 1, 4);$$

für $D = -4n$ brauchen wir die reducirten Formen nicht besonders anzugeben.

Da unter den eben angegebenen Formentripeln sowohl bei 23 wie 31 nur *eine* ambige Form auftritt, so besitzen wir in beiden Fällen zwei Modulformen B. *Die beiden zur F_{24} gehörenden Modulformen B sind gegeben durch:*

$$(1) \quad B = \frac{2\pi}{\omega_2}(1 + 2r + 2r^4 + 4r^6 + 4r^8 + 2r^9 + \cdots),$$

$$(2) \quad B' = \frac{2\pi}{\omega_2}(1 + 2r^2 + 2r^3 + 2r^4 + 2r^6 + 2r^8 + 2r^9 + \cdots),$$

während sich für den Fall $n = 31$ die beiden Formen anschliessen:

$$(3) \qquad B = \frac{2\pi}{\omega_2}(1 + 2r + 2r^4 + 4r^8 + 2r^9 + \cdots),$$

$$(4) \qquad B' = \frac{2\pi}{\omega_2}(1 + 2r^2 + 2r^4 + 2r^5 + 2r^7 + 2r^8 + \cdots).$$

Die zu den ambigen Classen gehörenden Formen B sind hier beide Male vorangestellt.

Modulformen A definiren wir jetzt weiter durch die Bestimmung:

$$2A = B - B'. \tag{5}$$

Die Anfangsterme der Reihenentwicklungen für die A sind:

$$(n = 23), \qquad A = \frac{2\pi}{\omega_2}(r - r^2 - r^3 + r^6 + r^8 - r^{13} + \cdots), \tag{6}$$

$$(n = 31), \qquad A = \frac{2\pi}{\omega_2}(r - r^2 - r^5 - r^7 + r^8 + r^9 + \cdots). \tag{7}$$

Die erstere dieser beiden Modulformen steht zur Discriminante Δ in der nachfolgenden Beziehung:

$$A = \sqrt[24]{\Delta(23\,\omega_1, \omega_2) \,.\, \Delta(\omega_1, \omega_2)}. \tag{8}$$

Man bilde sich nunmehr die lineare Verbindung $(\alpha A + \beta B)$, wo α und β variabele Parameter sind. Diese Verbindung wird zwei mit dem Quotienten $\alpha : \beta$ bewegliche Nullpunkte auf F_{n+1} besitzen; bei $n = 31$ kommen ausserdem noch zwei feste Nullpunkte je von der Ordnung $\frac{1}{3}$ in den beiden Ausnahmepunkten der bezüglichen Fläche hinzu. *Bei dieser Sachlage werden wir in beiden Fällen in*

$$\tau(\omega) = \frac{A}{B} \tag{9}$$

eine zweiwerthige Function der Fläche F_{n+1} *haben.*

Jede hyperelliptische Fläche lässt eine *Transformation in sich* von der Periode zwei zu, bei welcher ihre zweiwerthigen Functionen unverändert bleiben; wir wollen zeigen, *dass diese Transformation für unsere Flächen einfach durch* w *gegeben ist.* Man zieht nämlich aus (6) Art. I leicht die Folgerung, dass die beiden Nullpunkte von A in die Polygonspitzen fallen; daraus ergiebt sich dann, wie bei $n = 11$, und 19, so auch für $n = 23$ und 31:

$$A\left(\frac{i\omega_2}{\sqrt{n}}, \frac{\omega_1\sqrt{n}}{i}\right) = A(\omega_1, \omega_2), \quad (n = 23, 31). \tag{10}$$

Nun gilt weiter jedenfalls der Ansatz:

$$B\left(\frac{i\omega_2}{\sqrt{n}}, \frac{\omega_1\sqrt{n}}{i}\right) = \varkappa B(\omega_1, \omega_2) + \lambda A(\omega_1, \omega_2).$$

Nimmt man hier ω_2 sehr klein, so folgt aus (6) Art. I näherungsweise:

$$i\sqrt{n}\,B(-\omega_2, n\omega_1) = B(n\omega_1, \omega_2) = \varkappa\, B(\omega_1, \omega_2)$$

und also ist in Folge der Gestalt des Anfangsgliedes in (1) bez. (3) nothwendig $\varkappa = 1$. Da aber w die Periode zwei hat, so ist nothwendig $\lambda = 0$. Wir haben also das Resultat:

$$B\left(\frac{i\omega_2}{\sqrt{n}}, \frac{\omega_1\sqrt{n}}{i}\right) = B(\omega_1, \omega_2), \quad (n = 23, 31); \tag{11}$$

durch (10) und (11) aber ist unsere Behauptung über die Bedeutung der Substitution w für die hyperelliptischen Flächen F_{n+1} bewiesen.

Auf einer hyperelliptischen Fläche giebt es ∞^2 äquivalente Systeme zu je vier beweglichen Punkten; wir können dieselben durch die Systeme der Nullpunkte von:

$$(12) \qquad \alpha A^2 + \beta AB + \gamma B^2$$

geben. In dieser Gestalt muss sich dann auch die Modulform $(-2)^{\text{ter}}$ Dimension $P(\omega_1, \omega_2)$ darstellen lassen; in der That bestehen die Relationen:

$$(13) \qquad (n = 23), \quad 12P = 24A^2 - 32AB + 11B^2,$$

$$(14) \qquad (n = 31), \quad 4P = 8A^2 - 16AB + 5B^2.$$

Aus Identitäten dieser Art lassen sich, wie schon in I bemerkt, immer eigenartige zahlentheoretische Gesetze folgern. Die Entwicklungscoefficienten der quadratischen Verbindungen A^2, AB, B^2 drücken sich als Anzahlen von Darstellungen des vierfach genommenen jeweiligen Exponenten m durch gewisse quaternäre Formen wie

$$x^2 + y^2 + 23z^2 + 23u^2$$

aus; die durch die Coefficienten auf der rechten Seite von (13) bez. (14) festgelegte lineare Verbindung jener zahlentheoretischen Functionen von m liefert alsdann den linksseitigen Entwicklungscoefficienten $12\Phi_{23}(m)$ bez. $4\Phi_{31}(m)$, wo $\Phi_n(m)$, wie schon in I bemerkt, die Summe aller gegen n primen Divisoren von m ist.

VI.

Bildung sechswerthiger Grössen E, τ' für $n = 23, 31$. Beziehung derselben zu den τ. Die Moduln Y, Z.

Unter den Formen $(\varkappa A + \lambda B)$ giebt es im ganzen sechs, bei denen die beiden mit $\varkappa, \lambda$ beweglichen Nullpunkte coincidiren. Das Product derselben nennen wir $f(A, B)$ und bezeichnen die Quadratwurzel aus dieser ganzen homogenen Function sechsten Grades durch

$$(1) \qquad E = \sqrt{f(A, B)}.$$

Es ist alsdann E eine *ganze Modulform* $(-3)^{\text{ter}}$ *Dimension* der F_{n+1}, welche wir hernach mit A und B zu einem vollen Modulsystem dieser Fläche zusammenstellen.

Um einige Anfangsterme der Reihenentwicklung von E zu erhalten, ziehen wir, wie schon in Artikel III die Integrale erster Gattung der Fläche F_{n+1} heran. Braucht man A_0, B_0, E_0 in demselben Sinne wie in III, so ist erstlich das allgemeinste auf algebraischem Wege hergestellte Integral erster Gattung der F_{n+1}:

(2) $$\int \frac{B_0\,dA_0 - A_0\,dB_0}{E_0}\cdot(\varkappa A_0 + \lambda B_0);$$

andrerseits aber gewinnen wir auf transcendentem Wege als allgemeinstes überall endliches Integral der F_{n+1}:

(3) $$\int (\varkappa' A + \lambda' B)\,A\cdot(\omega_1\,d\omega_2 - \omega_2\,d\omega_1).$$

Nimmt man $\omega = i\infty$ als untere Grenze des Integrals, so wird in dessen Potenzentwicklung nach r im allgemeinen ein Anfangsglied $a_1 r$ auftreten. Nur bei *einem* particulären Integral fällt dieses Glied aus, und dieses besondere Integral entsteht aus (2) für $\lambda = 0$, aus (3) aber für $\lambda' = 0$. Demgemäss werden wir setzen dürfen:

(4) $$\int \frac{A_0}{E_0}\cdot(B_0\,dA_0 - A_0\,dB_0) = c\int A^2\cdot(\omega_1\,d\omega_2 - \omega_2\,d\omega_1)$$

und finden von hieraus unter zweckmässiger Auswahl von c für E_0:

(5) $$E_0 = \frac{rB_0}{A_0}\cdot\frac{dA_0}{dr} - r\,\frac{dB_0}{dr},$$

eine Formel, welche wieder analoge Gestalt aufweist, wie die entsprechende Gleichung (4) des Artikel III. Aus (5) ergeben sich nun sehr leicht die nachfolgenden Anfangsglieder der Reihenentwicklungen für die Modulformen E unserer beiden Grade n:

(6) (bei $n=23$), $$E = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^3\{1 - r - 5r^2 - 10r^3 - 21r^4 - 22r^5 - 50r^6 - 44r^7 - 85r^8 - \cdots\},$$

(7) (bei $n=31$), $$E = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^3\{1 - r - 3r^2 - 3r^3 - 13r^4 - 18r^5 - 27r^6 - 36r^7 - 59r^8 - \cdots\}.$$

Um den Ausdruck von E^2 in A und B explicite kennen zu lernen, bilden wir den Ansatz:

$$E^2 = B^6 + aB^5A + bB^4A^2 + cB^3A^3 + dB^2A^4 + eBA^5 + fA^6$$

und tragen die Potenzentwicklungen für A, B, E ein; nach ziemlich kurzer numerischer Rechnung ergeben sich in gewohnter Art die Werthe der Zahlencoefficienten a, b, ... *Man findet als fertige Gestalt des Ausdrucks von E^2 in A und B:*

(8) (*für* $n=23$), $$E^2 = -19A^6 - 2^4A^5B + 2\cdot3^2\cdot5A^4B^2 - 2\cdot53A^3B^3 + 3\cdot19A^2B^4 - 2\cdot7AB^5 + B^6,$$

(9) (*für* $n=31$), $$E^2 = -3A^6 - 2^3A^5B + 2\cdot3\cdot11A^4B^2 - 2\cdot53A^3B^3 + 61A^2B^4 - 2\cdot7AB^5 + B^6.$$

Will man ein volles System von Modulfunctionen der einzelnen Fläche F_{n+1} haben, so wird man zweckmässiger Weise:

$$(10) \qquad \tau(\omega) = \frac{A}{B}, \quad \tau'(\omega) = \frac{E}{B^3}$$

neben einander stellen. *Diese beiden Modulfunctionen sind dann für* $n = 23$ *mit einander verknüpft durch die algebraische Relation:*

$$(11) \quad \tau'^2 + 19\tau^6 + 16\tau^5 - 90\tau^4 + 106\tau^3 - 57\tau^2 + 14\tau - 1 = 0$$

während an Stelle von (11) *im anderen Falle* $n = 31$ *die nachfolgende Gleichung tritt:*

$$(12) \quad \tau'^2 + 3\tau^6 + 8\tau^5 - 66\tau^4 + 106\tau^3 - 61\tau^2 + 14\tau - 1 = 0.$$

Aus den numerischen Coefficienten der Gleichungen (11) und (12) könnte man nun wieder die absoluten Invarianten unserer beiden hyperelliptischen Flächen berechnen. Es ist indessen noch eine andere Bemerkung, die wir hier an die Gestalt der Gleichungen (11) und (12) knüpfen wollen. In den sechs Punkten mit $\tau' = 0$ nimmt der reciproke Werth x von τ sechs Werthe an, die sich aus der algebraischen Gleichung:

$$\text{(für } n=23\text{)}, \quad x^6 - 14x^5 + 57x^4 - 106x^3 + 90x^2 - 16x - 19 = 0,$$
$$\text{(für } n=31\text{)}, \quad x^6 - 14x^5 + 61x^4 - 106x^3 + 66x^2 - 8x - 3 = 0.$$

berechnen. Es sind dies jedesmal diejenigen sechs „singulären" Werthe des Moduls x, welche den zweimal drei ursprünglichen Classen quadratischer Formen der Determinanten $D = -n$ und $D = -4n$ entsprechen. Da folgt nun aus bekannten Sätzen der complexen Multiplication der elliptischen Functionen, dass die linken Seiten der beiden letzten Gleichungen reducibel sind, indem sie in Producte je zweier irreducibeln cubischen Ausdrücke zerfallen. Die Rechnung bestätigt dies, indem sie in der That die nachfolgenden zerlegten Gleichungen liefert:

$$\text{(für } n=23\text{)}, \quad (x^3 - 3x^2 + 2x + 1)(x^3 - 11x^2 + 22x - 19) = 0,$$
$$\text{(für } n=31\text{)}, \quad (x^3 - 5x^2 + 6x + 1)(x^3 - 9x^2 + 10x - 3) = 0.$$

Aus der Lage der sechs Fixpunkte von w im Polygon F_{n+1} zieht man endlich den Schluss, dass in beiden Fällen der *erste* Factor die singulären Moduln der Determinante $D = -23$ bez. $D = -31$ liefert, während die beiden zweiten Factoren in den letzten Gleichungen in demselben Sinne zu den Determinanten $D = -92$ und $D = -124$ gehören.

Die in den beiden letzten Formeln geleisteten Zerlegungen der ganzen Functionen sechsten Grades führen uns in jedem der beiden Fälle $n = 23$ und 31 zu zwei neuen Modulformen $(-2)^{\text{ter}}$ Dimension, die wir für $n = 23$ durch die Quadratwurzeln definiren:

$$(13)\quad \begin{cases} Z(\omega_1, \omega_2) = \sqrt{AB^3 - 3A^2B^2 + 2A^3B + A^4}, \\ Y(\omega_1, \omega_2) = \sqrt{AB^3 - 11A^2B^2 + 22A^3B - 19A^4}. \end{cases}$$

Die Nullpunkte der ganzen Modulform Z sind die drei repräsentirenden Punkte der ursprünglichen Formclassen der Determinante $D = -23$, diejenigen von Y die repräsentirenden Punkte der ursprünglichen Classen $D = -92$; hier verschwinden unsere Modulformen auf F_{24} je in erster Ordnung, ausserdem kommt sowohl für Z als Y noch ein Nullpunkt der Ordnung $\frac{1}{2}$ in jeder der beiden Polygonspitzen hinzu. Da nur Y auf der imaginären ω-Axe einen Zeichenwechsel erleidet, so ist:

$$(14)\quad \begin{cases} Z\left(\frac{i\omega_2}{\sqrt{n}}, \frac{\omega_1\sqrt{n}}{i}\right) = Z(\omega_1, \omega_2), \\ Y\left(\frac{i\omega_2}{\sqrt{n}}, \frac{\omega_1\sqrt{n}}{i}\right) = -Y(\omega_1, \omega_2). \end{cases}$$

Als Anfangsterme der Reihenentwicklungen für unsere beiden neuen Modulformen gewinnen wir im vorliegenden Falle $n = 23$:

$$(15)\quad \begin{cases} Z = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 r^{\frac{1}{2}} (1 + r + * + 2r^3 - 2r^4 + * \cdots), \\ Y = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 r^{\frac{1}{2}} (1 - 3r - 2r^2 - 4r^3 + 6r^4 + 2r^5 \cdots). \end{cases}$$

Im anderen Falle, nämlich für $n = 31$, haben wir zu setzen:

$$(16)\quad \begin{cases} Z(\omega_1, \omega_2) = \sqrt{AB^3 - 5A^2B^2 + 6A^3B + A^4}, \\ Y(\omega_1, \omega_2) = \sqrt{AB^3 - 9A^2B^2 + 10A^3B - 3A^4}, \end{cases}$$

zwei Modulformen, deren Nullpunkte wieder dieselbe charakteristische Lage haben, wie diejenigen der Formen (13); nur kommt hier ausserdem noch jeweils ein Nullpunkt der Ordnung $\frac{2}{3}$ im einzelnen Ausnahmepunkte $J = 0$ des Polygons F_{32} hinzu. Auch die Gleichungen (14) bleiben unverändert bestehen, und wir gewinnen insbesondere noch als Anfangsglieder der Potenzentwicklungen für die Modulformen Z, Y der Stufe 31:

$$(17)\quad \begin{cases} Z = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 r^{\frac{1}{2}} (1 + * + r^2 + 3r^3 - 3r^4 + 6r^5 \cdots), \\ Y = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 r^{\frac{1}{2}} (1 - 2r - 3r^2 - r^3 + r^4 - 6r^5 \cdots). \end{cases}$$

VII.

Darstellung der Modulformen erster Stufe durch die Moduln A, B, etc. der Flächen F_{24} und F_{32}.

Bei der Darstellung der Modulformen erster Stufe g_2 etc. in den Grössen A, B, E etc., die zu $n = 23$ und 31 gehören, gehen wir wieder dieselben Wege, wie in den schon erledigten Fällen $n = 11$ und $n = 19$. Um hier vorerst den Fall $n = 23$ für sich zu behandeln, so bemerke man, dass $g_2' + g_2$ als Form $(-4)^{\text{ter}}$ Dimension auf dem Polygon $F_{(23)}$ vier Nullpunkte aufweisen wird und demnach mit einer ganzen homogenen Function vierten Grades von A und B identisch ist. Die Differenz $g_2' - g_2$ wird dagegen, da sie noch bei der Operation w das Zeichen wechselt, das Product von E in eine lineare homogene Function von A und B sein. Indem wir die Coefficienten in der üblichen Weise bestimmen, *erhalten wir für g_2, g_2' die Formeln:*

$$(1)\quad \begin{cases} 6g_2' + 6g_2 = +5(2^5\cdot 3^2 A^4 - 2^4\cdot 3\cdot 19 A^3B + 2^4\cdot 59 A^2B^2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - 2^4\cdot 5^2 AB^3 + 53B^4), \\ 6g_2' - 6g_2 = -2^5\cdot 3^2 E(2^4 A - 11B). \end{cases}$$

Wir behandeln demnächst $\sqrt{\Delta'} \pm \sqrt{\Delta}$, welche beiden Grössen dem Polygon $F_{(23)}$ adjungirt sind und auf demselben Nullpunkte in der Gesammtordnung 6 aufweisen. Davon entfällt sowohl für $\sqrt{\Delta'} + \sqrt{\Delta}$ wie für $\sqrt{\Delta'} - \sqrt{\Delta}$ ein Nullpunkt der Ordnung $\frac{1}{2}$ in die Polygonspitze $\omega = i\infty$; es müssen also noch weitere Nullpunkte der Ordnung $\frac{1}{2}$ auftreten, und diese können der Natur der Sache nach nur in jenen sechs Ecken des Polygons $F_{(23)}$ gelegen sein, welche die Fixpunkte der Operation w sind. Es können nun jedenfalls in den numerischen Coefficienten der Formeln, welche $\sqrt{\Delta'} \pm \sqrt{\Delta}$ in A, B etc. darstellen, nicht jene irrationalen Zahlen enthalten sein, welche wir soeben als singuläre Moduln τ den Determinanten $D = -23$ und $D = -92$ zuwiesen; denn die Entwicklungscoefficienten in den Reihen nach r für unsere Moduln sind ausnahmslos *rationale* Zahlen. Die einzelne der beiden Grössen $\sqrt{\Delta'} \pm \sqrt{\Delta}$ wird demnach immer in *den* drei Polygoneckpunkten von $F_{(23)}$, welche wir der Determinante $D = -23$ bez. der anderen $D = -92$ zugewiesen fanden, übereinstimmendes Verhalten aufweisen. Im Hinblick auf die Formeln (14) des vorigen Artikels entspringt solchergestalt das Resultat: $\sqrt{\Delta'} + \sqrt{\Delta}$ *ist das Product der Modulform Z in eine ganze homogene Function vierten Grades von A und B; $\sqrt{\Delta'} - \sqrt{\Delta}$ aber ist das Product von Y in eine ebensolche Verbindung der A, B.*

Bei der Berechnung der Coefficienten dieser Verbindungen der A, B bestätigt die Hinzunahme einiger Controllglieder die Richtigkeit unseres Schlussverfahrens; wir erhalten die Formeln:

$$(2)\quad \begin{cases} \sqrt{\Delta'} + \sqrt{\Delta} = Z(2^2 \cdot 53 A^4 - 2^2 \cdot 5 \cdot 19 A^3 B + 2^2 \cdot 37 A^2 B^2 \\ \qquad\qquad\qquad - 3 \cdot 7 A B^3 + B^4), \\ \sqrt{\Delta'} - \sqrt{\Delta} = Y(2 \cdot 7 A^4 + 2 \cdot 71 A^3 B - 2 \cdot 3^2 \cdot 5 A^2 B^2 \\ \qquad\qquad\qquad + 17 A B^3 - B^4). \end{cases}$$

Durch Combination der erhaltenen Formeln drücken wir g_2 und $\sqrt{\Delta}$, sowie dann weiter Δ selbst aus und können daraufhin ohne weiteres J (sowie auch J') als rationale Function von τ und τ' hinschreiben. Wir führen diese Rechnungen hier nicht mehr explicite durch, da sie keine Schwierigkeiten darbieten, während andrerseits die betreffenden Formeln etwas umfänglich ausfallen.

Bei $n = 31$ beginnen wir mit der Behandlung der Discriminante, da hier die beiden Grössen $(-2)^{\text{ter}}$ Dimension $\sqrt[6]{\Delta} \pm \sqrt[6]{\Delta'}$ dem Polygon $F_{(31)}$ adjungirt sind. Die Werthigkeit von $\sqrt[6]{\Delta} \pm \sqrt[6]{\Delta'}$ auf $F_{(31)}$ ist $\frac{16}{6}$, und da bei $\omega = i\infty$ ein Nullpunkt der Ordnung $\frac{1}{6}$ gelegen ist, so bleibt für die übrigen Nullpunkte nur noch die Gesammtordnung $\frac{5}{2}$ übrig. Es treten also noch weitere Nullpunkte der Ordnung $\frac{1}{2}$ auf, und da ist es sofort wieder deutlich, dass $\sqrt[6]{\Delta} + \sqrt[6]{\Delta'}$ den Factor Z aufweisen wird, $\sqrt[6]{\Delta} - \sqrt[6]{\Delta'}$ aber den Factor Y. Man bilde sich daraufhin die beiden Modulfunctionen:

$$\frac{\sqrt[6]{\Delta} + \sqrt[6]{\Delta'}}{Z}, \qquad \frac{\sqrt[6]{\Delta} - \sqrt[6]{\Delta'}}{Y},$$

welche dem Polygon $F_{(31)}$ adjungirt sind, und bestimme deren Null- und Unstetigkeitspunkte im Polygon. Unter Rücksicht auf das Verhalten von A, B etc. in den beiden Ausnahmepunkten mit $J = 0$, welche F_{32} aufweist, gewinnt man leicht die Ansätze:

$$(3)\quad \frac{\sqrt[6]{\Delta} + \sqrt[6]{\Delta'}}{Z} = \frac{B + aA}{\sqrt[3]{A(B + \varkappa A)^2}}, \qquad \frac{\sqrt[6]{\Delta} - \sqrt[6]{\Delta'}}{Y} = \frac{B + bA}{\sqrt[3]{A(B + \varkappa A)^2}};$$

Hierbei ist unter $B + \varkappa A$ diejenige lineare Verbindung von A und B verstanden, deren einfacher Nullpunkt auf $F_{(31)}$ in jenen Ausnahmepunkt fällt.

Indem wir die drei Zahlen a, b, $\varkappa$ in üblicher Weise berechnen, finden wir bei der Gelegenheit zugleich wieder eine Bestätigung unserer Ueberlegung. Aus den entspringenden Formeln berechnen wir hier übrigens gleich die Ausdrücke für $\sqrt[6]{\Delta}$, $\sqrt[6]{\Delta'}$ selbst, als welche sich ergeben:

$$(4)\qquad 2\sqrt[6]{\Delta},\ 2\sqrt[6]{\Delta'} = \frac{Z(B-7A) \pm Y(B-5A)}{\sqrt[3]{A(3A-B)^2}}.$$

Merken wir uns daraufhin an: *Die beiden beweglichen Nullpunkte der linearen Verbindungen von A und B auf F_{32} fallen für $(3A-B)$ in die zwei Ausnahmepunkte.* Uebrigens lässt sich noch eine neue Bestätigung unserer Untersuchung dadurch bewerkstelligen, dass wir die beiden Formeln (4) mit einander multipliciren:

$$4\sqrt[6]{\Delta\Delta'}\sqrt[3]{A^2(3A-B)^4} = Z^2(B-7A)^2 - Y^2(B-5A)^2.$$

Indem wir nämlich hier für Z^2 und Y^2 ihre Ausdrücke nach Formel (16) des vorigen Artikels substituiren, müssen bei der Entwicklung der rechten Seite alle Glieder bis auf eine Potenz von A fortfallen. Die Rechnung bestätigt dies wirklich; sie ergiebt die Schlussformel:

$$(5)\qquad \sqrt[6]{\Delta\Delta'} = \frac{31A^{\frac{16}{3}}}{\left(\sqrt[3]{3A-B}\right)^4},$$

welche wir auch auf directem Wege leicht erhalten hätten.

Die beiden Modulformen $(g_2' \pm g_2)$ besitzen auf $F_{(31)}$ die Werthigkeit $\left(5+\frac{1}{3}\right)$, und zwar liegt ein Nullpunkt der Ordnung $\frac{1}{3}$ im Ausnahmepunkte mit $J=0$. Die beiden Producte:

$$(6)\qquad (g_2'+g_2)(B-3A),\quad (g_2'-g_2)(B-3A)$$

werden demgemäss an der in Rede stehenden Stelle in der Ordnung $\frac{5}{3}$ verschwinden; damit stimmt überein, wie man durch leichte Fortsetzung der Betrachtung sieht, dass der erste Ausdruck (6) mit einer ganzen homogenen Function fünften Grades von A und B identisch ist, während der zweite Ausdruck das Product von E in eine ebensolche Verbindung zweiten Grades von A und B vorstellt. Die fertigen Gestalten dieser Verbindungen berechnen wir in der bisherigen Weise und finden:

$$(7)\qquad \begin{cases} 6(g_2'+g_2)(B-3A) = 13\cdot 37B^5 - 5171B^4A + 2^5\cdot 5\cdot 11^2B^3A^2 \\ \qquad\qquad - 2^4\cdot 23\cdot 83B^2A^3 + 2^4\cdot 3^2\cdot 131BA^4 - 2^5\cdot 5\cdot 23A^5, \\ (g_2'-g_2)(B-3A) = 20E(4B^2 - 17AB + 16A^2). \end{cases}$$

Die Darstellung von J durch die beiden Moduln 31[ster] *Stufe* τ *und* τ' lässt sich nun wieder ohne Schwierigkeit angeben. Die betreffende Formel fällt sogar noch ein wenig einfacher aus, als die analoge für $n = 23$, so dass wir dieselbe hier wirklich angeben wollen; wir setzen sie etwa in die Gestalt:

$$(8)\quad \begin{cases} \sqrt[3]{J}\cdot 6\sqrt[3]{\tau}\,[(13\tau^5 - 2^3\cdot 5\cdot 7\tau^4 + 2^3\cdot 41\tau^3 - 5^3\tau^2 + 19\tau - 1) \\ -\tau'(5\cdot 7\tau^2 - 2^2\cdot 3\tau + 1)] = \sqrt[3]{1-3\tau}\cdot[(2^5\cdot 5\cdot 23\tau^5 - 2^4\cdot 3^2\cdot 131\tau^4 \\ + 2^4\cdot 23\cdot 83\tau^3 - 2^5\cdot 5\cdot 11^2\tau^2 + 5171\tau - 13\cdot 37) - 2^3\cdot 3\cdot 5\tau'(2^4\tau^2 - 17\tau + 2^2)]. \end{cases}$$

Die beiden Grössen τ und τ' sind dabei, um es zu wiederholen, an einander gebunden durch die Relation:

$$(9)\qquad \tau'^2 = (1 - 5\tau + 6\tau^2 + \tau^3)(1 - 9\tau + 10\tau^2 - 3\tau^3).$$

Für die Darstellung von $J' = J(31\omega)$ haben wir nur in (8) das Vorzeichen von τ' zu wechseln; die so entspringende Gleichung ist uns dann im Verein mit (8) und (9) im gewohnten Sinne ein Ersatz der Modulargleichung erster Stufe für $n = 31$.

VIII.

Die zur Ordnung $n = 47$ gehörende Fläche F_{48} und die zugehörigen Modulformen B und E.

Für die Behandlung des Transformationsgrades $n = 43$ sind die in I zu Grunde gelegten analytischen Hülfsmittel noch nicht ausreichend. Die Fläche F_{44} ist vom Geschlechte $p = 3$, und auf ihr besitzt die Operation w vier Fixpunkte; $F_{(43)}$ gehört demnach zum Geschlechte $p = 1$. Von den drei überall endlichen Integralen der Fläche F_{44} liefern die Ansätze des Artikel I nur erst zwei, und die Herstellung des dritten Integrals auf algebraischem Wege, wozu freilich die Ansätze zur Hand wären, würde sich zu umständlich gestalten.

Bei dieser Sachlage gehe ich sogleich zum Falle $n = 47$, der sich als leicht zugänglich erweist. Die reducirten Formen der Determinante $D = -47$ sind:

$$(1)\qquad (1,\ 1,\ 12),\quad (2,\ \pm 1,\ 6),\quad (3,\ \pm 1,\ 4),$$

diejenigen der Determinante $D = -188$ aber:

$$(2)\qquad (1,\ 0,\ 47),\quad (3,\ \pm 2,\ 16),\quad (7,\ \pm 6,\ 8),$$

so dass die Operation w auf F_{48} *zehn* Fixpunkte besitzt, die wir zur Hälfte der Determinante $D = -47$, zur Hälfte $D = -188$ zuzuweisen haben. Die Fläche F_{48} ist vom Geschlechte $p = 4$, und dieserhalb hat $F_{(47)}$ nothwendig das Geschlecht $p = 0$; denn bereits eine Fläche des Geschlechtes $p = 1$ liefert, doppelt überdeckt und mit zehn Verzweigungspunkten versehen, das Geschlecht $p = 6$. Merken wir uns demnach als erstes Resultat: *Die Riemann'sche Fläche F_{48} ist hyperelliptisch, und es bedeutet w jene Transformation der Periode zwei der Fläche F_{48} in sich, bei der die zweiwerthigen Functionen unverändert bleiben.*

Zu dem gleichen Resultate gelangen wir nun auch auf functionentheoretischem Wege. Da unter den fünf quadratischen Formen (1) nur die erste ambig ist, so erhalten wir nach I für $n = 47$ *drei* Modulformen B, deren analytische Darstellungen wir durch leichte Umsetzungen in die Gestalt überführen:

$$B = \frac{2\pi}{\omega_2} \sum_{x,y} r^{\frac{x^2+47y^2}{4}}, \quad x \equiv y \pmod{2},$$

$$B' = \frac{2\pi}{\omega_2} \sum_{x,y} r^{\frac{x^2+47y^2}{8}}, \quad x \equiv y \pmod{4},$$

$$B'' = \frac{2\pi}{\omega_2} \sum_{x,y} r^{\frac{x^2+47y^2}{12}}, \quad x \equiv y \pmod{6}.$$

Statt diese drei Formen direct zu gebrauchen, erscheint es indessen zweckmässig, mit folgenden linearen Combinationen derselben zu rechnen:

$$B_0 = \tfrac{1}{2}(B + B''), \qquad B_1 = \tfrac{1}{2}(B - B''), \qquad B_2 = \tfrac{1}{2}(B' - B'');$$

die Anfangsterme der Potenzentwicklungen für diese letzteren Modulformen sind:

$$(3)\quad \begin{cases} B_0 = \frac{2\pi}{\omega_2}(1 + r + r^3 + 2r^4 + r^6 + r^8 + r^9 + r^{12} + 3r^{14} + \cdots), \\ B_1 = \frac{2\pi}{\omega_2}(r - r^3 - r^6 - r^8 + r^9 + r^{12} + r^{14} + \cdots), \\ B_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}(r^2 - r^3 - r^4 + r^7 + r^9 - r^{14} + \cdots). \end{cases}$$

Uebrigens ist die dritte dieser Modulformen abgesehen von einem numerischen Factor mit $\sqrt[2]{\Delta' \cdot \Delta}$ identisch, und die Form $(-2)^{\text{ter}}$ Dimension:

$$P = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 \left\{23 + 12 \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_{47}(m)\, r^m\right\}$$

ist als quadratische Verbindung der B in der Gestalt:

$$P = 23B_0^2 - 34B_0B_1 + 47B_0B_2 - 32B_1B_2 + 8B_2^2$$

darstellbar.

Da die B zufolge (3) offenbar von einander linear-unabhängig sind, so wird die lineare Verbindung:

$$(4)\qquad x_0B_0 + x_1B_1 + x_2B_2$$

auf F_{48} eine doppelt-unendliche Schaar von Systemen zu je vier beweglichen Punkten festlegen. Anders ausgesprochen heisst dies, dass die B, zu homogenen Coordinaten der Ebene gesetzt, die Fläche F_{48} auf eine ebene Curve *vierter* Ordnung abbilden. Aber eine solche Curve kann, wofern sie nicht zerfällt, höchstens das Geschlecht $p=3$ aufweisen. Also ergiebt sich: *Die Curve vierter Ordnung der B ist nothwendig ein doppelt-überdeckter Kegelschnitt, womit der hyperelliptische Charakter von F_{48} wiederum evident ist.*

Dass aber zwischen den drei Moduln B eine quadratische Relation besteht, sieht man auch so: Unter den sechs quadratischen Verbindungen der B verschwinden fünf in den Polygonspitzen. Diese fünf geben, mit $(\omega_1 d\omega_2 - \omega_2 d\omega_1)$ multiplicirt und integrirt, fünf Integrale erster Gattung von F_{48}: zwischen ihnen besteht also eine lineare Relation identisch. Was die Gestalt dieser Relation angeht, so haben wir mit Rücksicht auf (3) für dieselbe jedenfalls den Ansatz:

$$B_1^2 = B_0 B_2 + a B_1 B_2 + b B_2^2.$$

Indem man aber hier die Entwicklungen (3) einträgt, kommt $a=b=0$, *so dass die drei Moduln* 47ter *Stufe B durch die algebraische Identität an einander gebunden sind:*

$$B_1^2 - B_0 B_2 = 0. \tag{5}$$

Als *zweiwerthige* Function der Fläche F_{48} schlagen wir daraufhin vor:

$$\tau(\omega) = \frac{B_2}{B_1} = \frac{B_1}{B_0}. \tag{6}$$

Die beiden Nullpunkte von τ liegen in den Polygonspitzen von F_{48}; die Lage der beiden Unstetigkeitspunkte ist hier indessen nicht näher angebbar; nur dass sie nicht coincidiren geht aus späteren Formeln hervor. Natürlich kann $\tau(\omega)$ auch als Hauptfunction des Polygons $F_{(47)}$ aufgefasst werden.

Um jetzt eine Modulform E zu erhalten, die mit B_1 und B_2 ein volles System von Modulformen der Fläche F_{48} bildet, gehen wir in gewohnter Weise auf die überall endlichen Integrale zurück. Man bezeichne zu diesem Ende die in den Klammern der Formeln (3) stehenden Potenzentwicklungen abgekürzt mit β_0, β_1, β_2 und hat dann erstlich, auf transcendentem Wege gebildet, als die vier überall endlichen Integrale der Fläche F_{48}:

$$\int \beta_0\beta_1 \, d\omega, \quad \int \beta_0\beta_2 \, d\omega, \quad \int \beta_1\beta_2 \, d\omega, \quad \int \beta_2^2 \, d\omega. \tag{7}$$

Um die Integrale andrerseits auf algebraischem Wege zu bilden, bezeichne man durch $f(B_1, B_2)$ diejenige ganze homogene Function zehnten Grades von B_1, B_2, welche in den zehn Fixpunkten der Operation w je einfach verschwindet. Die Wurzel aus diesem Ausdruck ist alsdann unsere Modulform E:

$$E = \sqrt{f(B_1, B_2)}; \tag{8}$$

für die Integrale aber erhalten wir die vier Ausdrücke:

$$\int \frac{\beta_1 d\beta_2 - \beta_2 d\beta_1}{\sqrt{f(\beta_1, \beta_2)}} \cdot \beta_1^{\nu} \beta_2^{3-\nu}, \quad \nu = 0, 1, 2, 3. \tag{9}$$

Aus den Anfangsgliedern der Potenzentwicklungen ist nun sofort evident, dass das Integral (9) für $\nu = 0$ mit dem vierten Integrale (7) identisch zu setzen ist. *Von da aus erhalten wir alsdann für E die Darstellung:*

$$\left(\frac{\omega_2}{2\pi}\right)^5 E(\omega_1, \omega_2) = r\beta_2 \cdot \frac{\beta_1 d\beta_2 - \beta_2 d\beta_1}{dr}, \tag{10}$$

so dass sich insbesondere als die Anfangsterme der Reihenentwicklung dieser Modulform die nachfolgenden berechnen:

$$E = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^5 r^5(1 - 3r - r^2 + 4r^3 + 3r^4 + 10r^5 - 16r^6 + * - 19r^8 - r^9 + 30r^{10} - 12r^{11} + \cdots). \tag{11}$$

Um E^2 durch B_1 und B_2 auszudrücken, d. h. um den Ausdruck von $f(B_1, B_2)$ explicite zu bestimmen, haben wir nun wieder die Reihenentwicklungen zu benutzen. Es ergiebt sich solchergestalt als *algebraische Relation zwischen* E, B_1 *und* B_2:

$$\begin{aligned} E^2 = B_1^{10} &- 6B_1^9 B_2 + 11B_1^8 B_2^2 - 24B_1^7 B_2^3 + 19B_1^6 B_2^4 \\ &- 16B_1^5 B_2^5 - 13B_1^4 B_2^6 + 30B_1^3 B_2^7 - 38B_1^2 B_2^8 \\ &+ 28B_1 B_2^9 - 11B_2^{10}. \end{aligned} \tag{12}$$

Zu einem vollen System von *Modulfunctionen* der F_{48} stelle ich

$$\tau(\omega) = \frac{B_2}{B_1}, \quad \tau'(\omega) = \frac{E}{B_1^5} \tag{13}$$

zusammen; beide Grössen sind dann an einander gebunden durch die algebraische Gleichung zehnten Grades:

$$\begin{aligned} \tau'^2 = 1 &- 6\tau + 11\tau^2 - 24\tau^3 + 19\tau^4 - 16\tau^5 - 13\tau^6 + 30\tau^7 \\ &- 38\tau^8 + 28\tau^9 - 11\tau^{10}. \end{aligned} \tag{14}$$

Substituiren wir in (14) rechter Hand $\tau^{-1} = x$ und setzen $\tau' = 0$, so kommt in:

$$\begin{aligned} x^{10} - 6x^9 + 11x^8 - 24x^7 + 19x^6 - 16x^5 - 13x^4 + 30x^3 \\ - 38x^2 + 28x - 11 = 0 \end{aligned} \tag{15}$$

die Gleichung für die zehn singulären Moduln x, die zu den Determinanten $D = -47$ und $D = -4 \cdot 47$ gehören. Die Gleichung (15) muss demgemäss reducibel sein, indem ihre linke Seite sich in zwei (im natürlichen Rationalitätsbereich irreducibele) Factoren fünften Grades zerlegen wird. Dem ist in der That so; denn es spaltet sich (15) in die beiden Gleichungen:

$$(16)\begin{cases}(D=-47) & x^5-x^4+x^3+x^2-2x+1=0,\\ (D=-188) & x^5-5x^4+5x^3-15x^2+6x-11=0.\text{*)}\end{cases}$$

Dass wirklich die erste dieser beiden Gleichungen die singulären Moduln der Determinante $D=-47$ giebt, die zweite aber diejenigen von $D=-4\cdot 47$, folgt leicht aus der Werthevertheilung von τ auf dem Polygon F_{48}.

Im Anschluss an die Gleichungen (16) kann man gerade wie bei $n=23$ und 31 zwei Modulformen Z und Y vermöge der Gleichungen definiren:

$$(17)\begin{cases}Z=\sqrt{B_1^5B_2^{-1}-B_1^4+B_1^3B_2+B_1^2B_2^2-2B_1B_2^3+B_2^4},\\ Y=\sqrt{B_1^5B_2^{-1}-5B_1^4+5B_1^3B_2-15B_1^2B_2^2+6B_1B_2^3-11B_2^4},\end{cases}$$

für welche man als Anfangsglieder der Entwicklungen nach ansteigenden Potenzen von r findet:

$$(18)\quad Z=\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 r^{\frac{3}{2}}(1-r^2+r^3-2r^4-r^7-2r^8+2r^9+2r^{10}+\cdots),$$

$$(19)\quad Y=\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^2 r^{\frac{3}{2}}(1-2r-r^2-3r^3+4r^4+4r^5+2r^6+3r^7-8r^8-6r^9-14r^{10}+\cdots).$$

Die Modulform Z, ebenso wie Y, verschwindet in jeder der beiden Spitzen des Polygons F_{48} je im Grade $\frac{3}{2}$; ausserdem wird Z einfach Null in jedem der fünf repräsentirenden Punkte der Formclassen $D=-47$, Y aber in den fünf im gleichen Sinne zu $D=-188$ gehörenden Punkten des Polygons F_{48}. Für die Wirkung der Operation w auf Z und Y finden wir:

$$(20)\quad\begin{aligned}Z\left(\frac{i\omega_2}{\sqrt{47}},\ \frac{\omega_1\sqrt{47}}{i}\right)&=Z(\omega_1,\omega_2),\\ Y\left(\frac{i\omega_2}{\sqrt{47}},\ \frac{\omega_1\sqrt{47}}{i}\right)&=-Y(\omega_1,\omega_2).\end{aligned}$$

Für die Darstellung der Modulformen erster Stufe in den voraufgehend gewonnenen Grössen entwickeln wir leicht die Ansätze:

*) Die hiermit gegebene Zerlegung der Gleichung (15) konnte deshalb mühelos aufgefunden werden, weil die linke Seite von (15) für $x=\pm 1$ die primzahligen Werthe -19 bez. -43 annimmt.

$$B_2^4(g_2' + g_2) = aB_1^8 + bB_1^7B_2 + \cdots,$$
$$B_2^4(g_2' - g_2) = E(\alpha B_1^3 + \beta B_1^2 B_2 + \cdots),$$

sowie andrerseits zur Gewinnung des Ausdrucks von Δ:

$$B_2^5(\sqrt{\Delta} + \sqrt{\Delta'}) = Z(B_1^9 + aB_1^8B_2 + \cdots),$$
$$B_2^5(\sqrt{\Delta} - \sqrt{\Delta'}) = Y(B_1^9 + \alpha B_1^8 B_2 + \cdots).$$

Die Bestimmung der numerischen Coefficienten in diesen Ansätzen, welche man natürlich wie bisher leisten kann, erfordert hier indessen bereits ein wenig umständliche Rechnungen; wir führen dieselben deshalb nicht mehr explicite durch.

IX.

Grundlagen für die Behandlung der Transformation der Ordnung $n = 71$.

Die beiden nächstfolgenden Fälle $n = 59$ und 67 gestalten sich für die zur Verfügung stehenden Hülfsmittel wieder weniger einfach; dagegen ist $n = 71$ auf's Neue sehr zugänglich, so dass wir hier wenigstens noch die Grundlagen für diesen Grad entwickeln wollen.

Die Classenanzahlen für die ursprünglichen quadratischen Formen der Determinanten $D = -71$ und $D = -4 \cdot 71$ sind beide Male sieben; die betreffenden reducirten Formen sind:

$$D = -\ 71,\quad (1,\ 1,\ 18),\quad (2,\ \pm 1,\ 9),\quad (3,\ \pm 1,\ 6),\quad (4,\ \pm 3,\ 5),$$
$$D = -284,\quad (1,\ 0,\ 71),\quad (3,\ \pm 2,\ 24),\quad (8,\ \pm 2,\ 9),\quad (5,\ \pm 4,\ 15).$$

Die Riemann'sche Fläche F_{72} ist vom Geschlechte $p = 6$ und lässt sich als doppelt überdeckte Fläche $F_{(71)}$ mit *vierzehn* Verzweigungspunkten anordnen. Wegen des letzteren Umstandes ist die Fläche $F_{(71)}$ vom Geschlechte $p = 0$, *so dass F_{72} abermals eine hyperelliptische Fläche ist.*

Da unter den sieben Classen der Determinante $D = -71$ nur eine ambig ist, so besitzen wir im Ganzen *vier* Modulformen B, welche durch die Reihenentwicklungen zu definiren sind:

$$(1)\ \begin{cases} \dfrac{2\pi}{\omega_2}\sum r^{\frac{x^2+71y^2}{4}},\quad x \equiv y\ (\text{mod.}\,2); & \dfrac{2\pi}{\omega_2}\sum r^{\frac{x^2+71y^2}{8}},\quad x \equiv y\ (\text{mod.}\,4); \\[2ex] \dfrac{2\pi}{\omega_2}\sum r^{\frac{x^2+71y^2}{12}},\quad x \equiv y\ (\text{mod.}\,6); & \dfrac{2\pi}{\omega_2}\sum r^{\frac{x^2+71y^2}{16}},\quad x \equiv 3y\ (\text{mod.}\,8). \end{cases}$$

Statt indessen mit diesen vier Moduln direct zu operiren, nehme man wieder zweckmässige lineare Combinationen derselben, für deren Potenzentwicklungen dann insbesondere die Anfangsterme zu gewinnen sind:

$$(2)\qquad \begin{cases} B_1 = \frac{2\pi}{\omega_2}(1 + 2r^4 + 2r^5 + 2r^6 + \cdots), \\ B_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}(r - r^5 - r^6 + \cdots), \\ B_3 = \frac{2\pi}{\omega_2}(r^2 - r^4 - r^5 - r^6 + \cdots), \\ B_4 = \frac{2\pi}{\omega_2}(r^3 - r^4 - r^5 + \cdots). \end{cases}$$

Eine Modulform $(-1)^{\text{ter}}$ Dimension der F_{72} ist auf dieser Fläche sechswerthig. Wählt man also die vier B zu Coordinaten eines Raumes von drei Dimensionen, so erscheint die Fläche F_{72} eindeutig auf eine in diesem Raume gelegene *Curve sechster Ordnung* bezogen. Ohne nun die Frage zu entscheiden, ob überhaupt eine nicht-zerfallende Raumcurve sechster Ordnung das Geschlecht $p = 6$ aufweisen kann, ist in unserem Falle sofort deutlich, *dass die C_6 der B eine doppelt-überdeckte Raumcurve dritter Ordnung sein wird.* Wir leiten dies einfach aus dem Umstande ab, *dass zwischen den B drei linear-unabhängige quadratische Relationen bestehen.* Es giebt nämlich neun quadratische Verbindungen der B, die in den beiden Polygonspitzen verschwinden und demzufolge durch Integration auf Integrale erster Gattung führen; zwischen diesen neun quadratischen Verbindungen müssen also *drei* lineare Identitäten bestehen. Da nun drei linear-unabhängige Flächen zweiten Grades keine nicht-zerfallende C_6 gemeinsam haben können, so ist unsere obige Behauptung betreffs der C_6 bewiesen und damit auf's Neue der hyperelliptische Charakter der Fläche F_{72} dargethan.

Als die Gestalten der drei in Rede stehenden quadratischen Relationen der B ergeben sich leicht:

$$(3)\qquad \begin{cases} B_2^2 - B_3^2 - B_3(B_1 + B_4) = 0, \\ B_3^2 + B_4^2 + B_1B_4 - B_2B_3 = 0, \\ \qquad B_3^2 - B_4(B_2 + B_3) = 0. \end{cases}$$

Wenn man nämlich die linken Seiten dieser Gleichungen nach ansteigenden Potenzen von r entwickelt, so treten jedenfalls keine Glieder mit einem Exponenten $\nu < 7$ auf. Die einzelne quadratische Verbindung (3) müsste also, wofern sie nicht identisch Null wäre, in der Spitze $\omega = i\infty$ des Polygons $F_{(71)}$ wenigstens einen Nullpunkt der Ordnung 7 aufweisen; das widerstreitet aber gegen den Betrag 6 der Werthigkeit einer Modulform $(-2)^{\text{ter}}$ Dimension auf $F_{(71)}$. Dass übrigens die drei Relationen (3) linear-unabhängig sind, ist aus ihrer Gestalt ohne Weiteres evident; die Gleichungen (3) werden also die C_3 der B rein zur Darstellung bringen.

Als zweiwerthige Function $\tau(\omega)$ der F_{72} benutze man etwa den Quotienten $B_4 : B_3$; eine zugehörige 14-werthige Function $\tau'(\omega)$ gewinnt man wieder leicht durch Vermittlung der Integrale erster Gattung. Die weitere Vervollständigung in der Behandlung des Falles $n = 71$ kann alsdann durch gewohnte numerische Rechnungen geleistet werden.

Die besondere Einfachheit der Ordnungen $n = 24h - 1$ fanden wir überall darin begründet, dass für diese Werthe n die zugehörigen Classenanzahlen quadratischer Formen besonders gross ausfielen. Man kann geradezu den Satz aufstellen: *Erreicht für die Primzahlordnung $n = 24h - 1$ die Classenanzahl ursprünglicher Formen der Determinanten $D = -n$ und $-4n$ den Maximalwerth $\frac{n+13}{6}$, so definirt die zugehörige Modulargleichung erster Stufe ein hyperelliptisches Gebilde.* Es scheint nun, dass die Fälle n dieses einfachen Charakters durch die voraufgehenden Untersuchungen bereits erschöpft sind; wenigstens ist im nächstfolgenden Falle $n = 167$ die Classenanzahl 22, bleibt also hinter jenem Maximalbetrage bereits um 8 Einheiten zurück. —

Nichts würde hindern, unsere Betrachtungen nun auch auf zusammengesetzte Zahlen n auszudehnen. Dieselben sind zumeist sogar noch leichter zugänglich in Folge der grösseren Anzahl zur Verfügung stehender analytischer Ansätze. Demgegenüber erleidet bei den zusammengesetzten n die klare Uebersichtlichkeit der geometrischen Verhältnisse Einbusse, welche für primzahlige n in erster Linie durch die einfache Gestaltung des Fundamentalpolygons F_{n+1} begründet ist. Es seien also unsere Betrachtungen zur Transformation erster Stufe der elliptischen Functionen mit dem Vorstehenden abgeschlossen.

Berlin, im October 1891.

Bestimmung einer binären Form aus Anfangsgliedern ihrer Covarianten.

Von

PAUL GORDAN in Erlangen.

Unter den associirten Systemen von Grundformen einer binären Form

$$f(x) = a_0 x_1^n + n a_1 x_1^{n-1} x_2 + \binom{n}{2} a_2 x_1^{n-2} x_2^2 \cdots,$$

von denen jede Covariante von f in rationaler Weise abhängt, giebt es*), wie durch Hermite und Clebsch gezeigt wurde, zwei durch ihre Einfachheit ausgezeichnete von der Art, dass jede Covariante von f, bis auf eine Potenz von f im Nenner eine ganze rationale Function derselben ist.

Es sind das einmal Formen zweiten und dritten Grades in den Coefficienten a, nämlich die geraden Ueberschiebungen von f über sich selbst nebst deren Functionaldeterminanten mit f:

$$J_{2\nu} = (f, f)^{2\nu}; \quad J_{2\nu+1} = \big((f, f)^{2\nu}, f\big) = (J_{2\nu}, f),$$

andrerseits die „Schwesterformen" G, welche bereits in der elementaren Gleichungstheorie auftreten.

Führt man nämlich die Originalform $f(x)$ durch die Substitution

$$x_1 = a_0 y_1 - a_1 y_2, \quad x_2 = a_0 y_2$$

in eine Form $F(y)$ über (mit verschwindendem 2ten Coefficienten), so sind die Coefficienten von $F(y)$ unmittelbar die Anfangsglieder der Schwesterformen G.

Nun lässt sich zwar, wie Hermite gezeigt hat, eine beliebige Covariante durch die G ausdrücken, dagegen fehlte bisher die Kenntniss des allgemeinen Gesetzes, nach dem eine Covariante von f als Function der J zu bilden ist.

---

*) Vgl. Gordan's Vorlesungen über Invariantentheorie, herausgegeben von Kerschensteiner, Bd. II, § 34, sowie Gundelfinger's Darstellung in Salmon-Fiedler's Algebra der linearen Transformationen. II. Auflage pag. 451.

Allerdings haben Clebsch und Gundelfinger Formeln gegeben für die Berechnung der J, welche diese (wiederum bis auf eine Potenz von f im Nenner) als ganze rationale Functionen 2ten Grades der G hinzuschreiben gestatten, so dass die Aufgabe auf die Umkehrung dieses Gleichungssystemes zurückkommt; man begnügte sich aber damit, die Unbekannten G *successive* daraus zu ermitteln, indem man stets die bereits berechneten G in die nächste Gleichung einsetzte, um zu den Werthen der folgenden zu gelangen.

Die damit gekennzeichnete Lücke wird im Folgenden ausgefüllt. Dabei stellt sich heraus (§ 3), dass die Lösung der in Rede stehenden Aufgabe gleichzeitig diejenige von zwei weiteren Aufgaben nach sich zieht, welche für die Theorie der binären Formen eine grundlegende Bedeutung haben und überdies zu der neueren Theorie der Differentialinvarianten in enger Beziehung stehen.

Die Frage nach der Darstellung der Formen G als Functionen der Formen J wird zunächst auf eine einfachere reducirt. Man kennt nämlich a priori (§ 4) die Producte der J, welche auf der rechten Seite der Gleichungen für die G auftreten, und es handelt sich daher nur noch um die Ermittlung der numerischen Factoren C, mit welchen diese Producte behaftet sind. Die nämlichen Grössen C kommen in der That noch bei folgenden beiden Aufgaben vor.

Man soll berechnen:

1. Die Coefficienten $a_\varkappa$ der Originalform f als Functionen von a_0, a_1 und den Leitgliedern der Formen J.

2. Die Coefficienten $a_\varkappa$ als Functionen von a_0, a_1 und den jeweiligen *beiden* ersten Coefficienten der Formen $J_{2\nu}$ (nur dass für eine gerade Ordnung $2n$ von f die letzte Form J_{2n} sich auf ein einziges Glied reducirt).

Es wird dargelegt, wie man jede der drei formulirten Aufgaben aus jeder der beiden andern ableiten kann, so dass die Behandlung einer einzigen unter ihnen genügt. (§ 3).

Verlangt wird die independente Auflösung eines Systems von in ebensoviel Unbekannten C *quadratischen* Gleichungen von der besondern Beschaffenheit, dass stets die $\varkappa$te Unbekannte in der $\varkappa$ten Gleichung nur linear auftritt (§ 6). —

Man kann allerdings nicht diese *rationalen* Zahlen C als independente Functionen ihrer Indices ausdrücken, indessen gelingt es doch, jenes System von quadratischen Gleichungen in ein solches überzuführen, welches aus Recursionsformeln besteht, welche die C nur linear enthalten von der Art, dass, nachdem die einfachsten der C direct berechnet sind, für die übrigen geschlossene Darstellungsformeln resultiren (§ 11).

Die Möglichkeit dieser Ueberführung ist darin begründet, dass die als ursprüngliche Unbekannte fungirenden Coefficienten a gegen die Mitte hin zu Producten $a_\varkappa a_{n-\varkappa}$ combinirt erscheinen. Zum Schlusse werden die gewonnenen Darstellungsformeln der C einer Reihe von besonderen Fällen angepasst und aus ihnen die wirklichen Zahlenwerthe der C berechnet. (§§ 12, 13).

§ 1.

Die einfachsten Covarianten einer binären Form.

Die einfachsten Covarianten einer binären Form:

$$f = a_0 x_1^n + \binom{n}{1} a_1 x_1^{n-1} x_2 + \binom{n}{2} a_2 x_1^{n-2} x_2^2 \cdots,$$
$$= a_x^n = b_x^n = c_x^n \cdots$$

sind:

$$J_{2\nu} = (f,f)^{2\nu} = (ab)^{2\nu} a_x^{n-2\nu} b_x^{n-2\nu},$$
$$J_{2\nu+1} = \left((f,f)^{2\nu}, f\right) = (ab)^{2\nu} (ac)\, a_x^{n-2\nu-1} b_x^{n-2\nu} c_x^{n-1}.$$

Ihre Anfangsglieder, nämlich die Coefficienten der höchsten in ihnen auftretenden Potenz von x_1, sind:

$$(ab)^{2\nu} a_1^{n-2\nu} b_1^{n-2\nu},$$
$$(ab)^{2\nu} (ac)\, a_1^{n-2\nu-1} b_1^{n-2\nu} c_1^{n-1},$$

und der Coefficient der zweithöchsten Potenz von x_1 in $(f,f)^{2\nu}$ ist:

$$(ab)^{2\nu} a_1^{n-2\nu-1} a_2 b_1^{n-2\nu}.$$

In den Bezeichnungen:

$$(1) \begin{cases} a_\nu = \nu!\, v_\nu a_0^\nu, \\ (ab)^{2\nu} a_1^{n-2\nu} b_1^{n-2\nu} = 2(2\nu)!\, a_0^{2\nu} i_{2\nu} = 2(2\nu)!\, a_0^{2\nu} j_{2\nu}, \\ (ab)^{2\nu} a_1^{n-2\nu-1} a_2 b_1^{n-2\nu} = (2\nu+1)!\, a_0^{2\nu+1} j_{2\nu+1}, \\ (ab)^{2\nu} (ac)\, a_1^{n-2\nu-1} b_1^{n-2\nu} c_1^{n-1} = (2\nu+1)!\, a_0^{2\nu+1} i_{2\nu+1} \end{cases}$$

hat man die Relationen*):

$$(2) \begin{cases} f = v_0 x_1^n + n v_1 x_1^{n-1} x_2 a_0 + n(n-1) v_2 x_1^{n-2} x_2^2 a_0^2 \cdots, \\ i_{2\nu} = j_{2\nu} = \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=2\nu} (-1)^\varkappa v_\varkappa v_{2\nu-\varkappa}, \\ j_{2\nu+1} = \dfrac{1}{2(2\nu+1)} \displaystyle\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=2\nu+1} (-1)^\varkappa v_\varkappa v_{2\nu+1-\varkappa} (2\nu+1-\varkappa), \\ i_{2\nu+1} = \dfrac{2}{2\nu+1} j_1 j_{2\nu} - j_{2\nu+1}. \end{cases}$$

*) Die Grösse $v_0 = 0$ ist hierin nur der Homogenität halber eingeführt, die Grössen j_1 und i_1 werden beide $= v_1$.

Die Grössen $i_{2\nu}$ und $i_{2\nu+1}$ genügen als Anfangsglieder von Covarianten einer partiellen Differentialgleichung*); setzt man nämlich:

$$\delta v_{\varkappa} = v_{\varkappa-1},$$

so wird:

$$\delta i_{2\nu} = 0; \quad \delta i_{2\nu+1} = 0,$$

und:

$$(3) \qquad \delta j_1 = 1; \quad \delta j_{2\nu} = 0; \quad \delta j_{2\nu+1} = \frac{2}{2\nu+1} j_{2\nu}.$$

Als Beispiel hat man für die Indices 1 bis 9 die Formeln:

$$(4) \qquad \begin{cases} j_1 = v_1, \\ j_2 = v_2 - \frac{1}{2} v_2^2, \\ j_3 = v_3 - \frac{1}{8} v_1 v_2, \end{cases}$$

---

*) In den ursprünglichen Coefficienten a lautet bekanntlich diese Differentialgleichung:

$$a_0 \frac{\partial i}{\partial a_1} + 2a_1 \frac{\partial i}{\partial a_2} + 3a_2 \frac{\partial i}{\partial a_3} \cdots + na_{n-1} \frac{\partial i}{\partial a_n} = 0.$$

Jede in den a ganze, homogene und isobare Function C, welche der vorstehenden Gleichung genügt, ist das Leitglied einer Covariante von f; a_0 und die $i_{2\nu}$, $i_{2\nu+1}$ sind die einfachsten Lösungen der Gleichung.

Da im Texte das Problem erledigt wird, die a (bis auf eine Potenz von a_0 im Nenner) als ganze Functionen der

$$a_0, \quad i_{2\nu}, \quad i_{2\nu+1}$$

darzustellen, so hat man dadurch zugleich jede weitere Lösung C (von der bezeichneten Art) der obigen Differentialgleichung durch die einfachsten Lösungen ausgedrückt.

Ferner findet hierdurch noch eine fundamentale Aufgabe aus der Theorie der Differentialinvarianten ihre Beantwortung. Setzt man nämlich: (vgl. Forsyth Messenger of Math. New. Ser. No. 202. 1888):

$$\nu!\, a_{\nu-1} = y_\nu = \nu!\,(\nu-1)!\, v_{\nu-1} a_0^{\nu-1},$$

so geht die Differentialgleichung für C in diese über:

$$1 \cdot 2y_1 \frac{\partial C}{\partial y_2} + 2 \cdot 3y_2 \frac{\partial C}{\partial y_3} + 3 \cdot 4y_3 \frac{\partial C}{\partial y_4} \cdots (n-1)ny_{n-1} \frac{\partial C}{\partial y_n} = 0.$$

Lässt man nunmehr y_ν den ν^{ten} Differentialquotienten einer Function y von x bedeuten und ist C wiederum eine ganze homogene und isobare Function der y_ν, so wird C zu einer Differentialinvariante d. h. es erfüllt die Functionalgleichung:

$$C(y, x) = \frac{(ad-bc)^\mu}{(cx+d)^{2\mu}}\, C\left(y, \frac{ax+b}{cx+d}\right).$$

Ihre einfachsten Lösungen i' entstehen aus den i durch die Substitution der y an Stelle der a. Jede weitere Lösung ist wiederum durch jene ausdrückbar. Demnach lassen sich die Differentialquotienten $y_\varkappa$ als Brüche darstellen, deren Nenner eine Potenz von y_1 und deren Zähler eine ganze rationale Function der y_1, y_2 und der i' ist.

$$(4)\qquad \begin{cases} j_4 = v_4 - v_1 v_3 + \frac{1}{2} v_2^2, \\ j_5 = v_5 - \frac{3}{5} v_1 v_4 + \frac{1}{5} v_2 v_3, \\ j_6 = v_6 - v_1 v_5 + v_2 v_4 - \frac{1}{2} v_3^2, \\ j_7 = v_7 - \frac{5}{7} v_1 v_6 + \frac{3}{7} v_2 v_5 - \frac{1}{7} v_3 v_4, \\ j_8 = v_8 - v_1 v_7 + v_2 v_6 - v_3 v_5 + \frac{1}{2} v_4^2, \\ j_9 = v_9 - \frac{7}{9} v_1 v_8 + \frac{5}{9} v_2 v_7 - \frac{1}{3} v_3 v_6 + \frac{1}{9} v_4 v_5 \end{cases}$$

und:

$$(5)\qquad \begin{cases} i_2 = v_2 - \frac{1}{2} v_1^2, \\ i_3 = - v_3 + v_1 v_2 - \frac{1}{3} v_1^2, \\ i_4 = v_4 - v_1 v_3 + \frac{1}{2} v_2^2, \\ i_5 = - v_5 + v_1 v_4 - \frac{1}{5} v_2 v_3 - \frac{2}{5} v_1^2 v_3 + \frac{1}{5} v_1 v_2^2, \\ i_6 = v_6 - v_1 v_5 + v_2 v_4 - \frac{1}{2} v_3^2, \\ i_7 = - v_7 + v_1 v_6 - \frac{3}{7} v_2 v_5 + \frac{1}{7} v_3 v_4 - \frac{2}{7} v_1^2 v_5 + \frac{2}{7} v_1 v_2 v_4 \\ \qquad - \frac{1}{7} v_1 v_3^2, \\ i_8 = v_8 - v_1 v_7 + v_2 v_6 - v_3 v_5 + \frac{1}{2} v_4^2, \\ i_9 = - v_9 + v_1 v_8 - \frac{5}{9} v_2 v_7 + \frac{1}{3} v_3 v_6 - \frac{1}{9} v_4 v_5 - \frac{2}{9} v_1^2 v_7 \\ \qquad + \frac{2}{9} v_1 v_2 v_6 - \frac{2}{9} v_1 v_3 v_5 + \frac{1}{9} v_1 v_4^2. \end{cases}$$

§ 2.

Die Schwesterformen.

Die Schwesterformen $G_\varkappa$ sind durch die Formel definirt*):

$$(af)^\varkappa a_x^{n-\varkappa} = f G_\varkappa;$$

man kann durch sie mittelst der Identität:

$$f(ab) = b_x(af) - a_x(bf)$$

*) Dabei bedeutet der Klammerfactor (af) das symbolische Product $(ab) b_x^{n-1}$.

alle Covarianten von f als Quotienten ausdrücken, deren Zähler eine ganze Function der G und deren Nenner eine Potenz von f ist.

Wendet man diese Operation auf die Covarianten J an, so erhält man die Formeln:*)

$$f^{2\nu-1}J_{2\nu} = \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=2\nu}(-1)^{\varkappa}\binom{\nu}{2\varkappa}G_{\varkappa}G_{2\nu-\varkappa},$$

$$f^{2\nu-1}J_{2\nu+1} = \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=2\nu+1}(-1)^{\varkappa}\binom{2\nu}{\varkappa}G_{\varkappa}G_{2\nu+1-\varkappa}$$

und, wenn man die Bezeichnungen einführt:

$$J_{2\nu} = 2(2\nu)!\,f^2\mathfrak{J}_{2\nu}; \quad J_{2\nu+1} = (2\nu+1)!\,f^3\mathfrak{J}_{2\nu+1}; \quad G_{\varkappa} = \varkappa!\,f^{\varkappa}H_{\varkappa}:$$

$$\begin{cases} \mathfrak{J}_{2\nu} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=2\nu}(-1)^{\varkappa}H_{\varkappa}H_{2\nu-\varkappa}, \\ \mathfrak{J}_{2\nu+1} = \dfrac{1}{2(2\nu+1)}\displaystyle\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=2\nu+1}(-1)^{\varkappa}H_{\varkappa}H_{2\nu+1-\varkappa}(2\nu+1-2\varkappa). \end{cases}$$

Als Beispiele mögen die Formeln dienen:

$$(6) \qquad \begin{cases} \mathfrak{J}_1 = 0, \\ \mathfrak{J}_2 = H_2, \\ \mathfrak{J}_3 = H_3, \\ \mathfrak{J}_4 = H_4 + \frac{1}{2}H_2^2, \\ \mathfrak{J}_5 = H_5 + \frac{1}{5}H_2H_3, \\ \mathfrak{J}_6 = H_6 + H_2H_4 - \frac{1}{2}H_3^2, \\ \mathfrak{J}_7 = H_7 + \frac{3}{7}H_2H_5 - \frac{1}{7}H_3H_4, \\ \mathfrak{J}_8 = H_8 + H_2H_6 - H_3H_5 + \frac{1}{2}H_4^2, \\ \mathfrak{J}_9 = H_9 + \frac{5}{9}H_2H_7 - \frac{1}{3}H_3H_6 + \frac{1}{9}H_4H_5. \end{cases}$$

Sie entstehen aus (5), *wenn man die j und v durch die $\mathfrak{J}$ und H ersetzt, und dabei bemerkt, dass $H_1 = 0$ ist.*

---

*) Vgl. Gordan's Vorlesungen II. Bd., pag. 360, wo an Stelle der im Texte gebrauchten Zeichen $J_{2\nu}$, $J_{2\nu+1}$, $G_{\varkappa}$ steht $G_{2\nu}$, $H_{2\nu}$, $u_{\varkappa}$.

§ 3.

Berechnung der Coefficienten von f aus den j und i.

Die Formeln (4), (5), (6) lassen sich successive nach den v und H auflösen. Hat man z. B. $v_1, v_2 \ldots v_{n-1}$ aus den j berechnet, so liefern die Formeln (4) resp. (5), den Werth von v_n. In dieser Weise erhält man z. B. für die:

$$v_1, v_2 \ldots v_9, \quad H_1, H_2 \ldots H_9$$

die Werthe:

$$
(7\,\mathrm{a})\left\{
\begin{aligned}
v_1 &= j_1,\\
v_2 &= j_2 + \tfrac{1}{2} j_1^2,\\
v_3 &= j_3 + \tfrac{1}{3} j_1 j_2 + \tfrac{1}{6} j_1^3,\\
v_4 &= j_4 - \tfrac{1}{2} j_2^2 + j_1 j_3 - \tfrac{1}{6} j_1^2 j_2 + \tfrac{1}{24} j_1^4,\\
v_5 &= \begin{cases} j_5 - \frac{1}{5} j_2 j_3 + \frac{3}{5} j_1 j_4 - \frac{11}{30} j_1 j_2^2 + \frac{1}{2} j_1^2 j_3 - \frac{1}{6} j_1^3 j_2 \\ \quad + \frac{1}{5!} j_1^5, \end{cases}\\
v_6 &= \begin{cases} j_6 - j_2 j_4 + \frac{1}{2} j_3^2 + \frac{1}{2} j_2^3 + j_1 j_5 - \frac{13}{15} j_1 j_2 j_3 + \frac{1}{60} j_1^2 j_4 \\ \quad + \frac{19}{180} j_1^2 j_2^2 + \frac{1}{6} j_1^3 j_3 - \frac{5}{72} j_1^4 j_2 + \frac{1}{6!} j_1^6, \end{cases}\\
v_7 &= \begin{cases} j_7 - \frac{3}{7} j_2 j_5 + \frac{1}{7} j_3 j_4 + \frac{1}{70} j_2^2 j_3 + \frac{5}{7} j_1 j_6 + \frac{1}{2} j_1 j_3^2 \\ \quad + \frac{103}{210} j_1 j_2^3 - \frac{97}{105} j_1 j_2 j_4 + \frac{1}{2} j_1^2 j_5 - \frac{23}{30} j_1^2 j_2 j_3 \\ \quad - \frac{1}{30} j_1^3 j_4 + \frac{37}{180} j_1^3 j_2^2 + \frac{1}{24} j_1^4 j_3 - \frac{7}{360} j_1^5 j_2 + \frac{1}{7!} j_1^7, \end{cases}\\
v_8 &= \begin{cases} j_8 - j_2 j_6 + j_3 j_5 - \frac{1}{2} j_4^2 - \frac{5}{8} j_2^4 - \frac{7}{10} j_2 j_3^2 + \frac{3}{2} j_2^2 j_4 \\ \quad + j_1 j_7 - \frac{23}{21} j_1 j_2 j_5 + \frac{199}{210} j_1 j_2^2 j_3 - \frac{9}{35} j_1 j_3 j_4 + \frac{3}{14} j_1^2 j_6 \\ \quad - \frac{11}{70} j_1^2 j_2 j_4 - \frac{89}{1260} j_1^2 j_2^3 + \frac{1}{4} j_1^2 j_3^2 + \frac{1}{6} j_1^3 j_5 - \frac{11}{30} j_1^3 j_2 j_3 \\ \quad - \frac{1}{40} j_1^4 j_4 + \frac{9}{80} j_2^4 j_2^2 + \frac{1}{120} j_1^5 j_3 - \frac{1}{240} j_1^6 j_2 + \frac{1}{8!} j_1^8, \end{cases}\\
v_9 &= \begin{cases} j_9 - \frac{5}{9} j_2 j_7 + \frac{1}{3} j_3 j_6 - \frac{1}{9} j_4 j_5 + \frac{37}{126} j_1^2 j_5 - \frac{41}{105} j_2 j_3 j_4 \\ \quad + \frac{31}{210} j_2^3 j_3 + \frac{1}{6} j_3^3 + \frac{7}{9} j_1 j_8 - \frac{67}{63} j_1 j_2 j_6 + j_1 j_3 j_5 - \frac{41}{90} j_1 j_4^2 \\ \quad - \frac{1823}{2520} j_1 j_2^4 + \frac{23}{14} j_1 j_2^2 j_4 - \frac{31}{30} j_1 j_2 j_3^2 + \frac{1}{2} j_1^2 j_7 - \frac{37}{42} j_1^2 j_2 j_5 \end{cases}
\end{aligned}\right.
$$

$$v_9 = \left\{\begin{array}{l} -\frac{23}{70} j_1^2 j_3 j_4 + \frac{293}{252} j_1^2 j_2^2 j_3 + \frac{1}{42} j_1^3 j_4 + \frac{29}{210} j_1^3 j_2 j_4 + \frac{1}{12} j_1^3 j_3^2 \\ -\frac{3197}{81.140} j_1^3 j_2^3 + \frac{1}{24} j_1^4 j_5 - \frac{43}{360} j_1^4 j_2 j_3 - \frac{1}{120} j_1^5 j_4 \\ + \frac{83}{2160} j_2^5 j_2^2 + \frac{1}{6!} j_1^6 j_3 - \frac{11}{3.7!} j_1^7 j_2 + \frac{1}{9!} j_1^9. \end{array}\right.$$

$$(7\,\mathrm{b}) \left\{\begin{array}{l} v_1 = i_1, \\ v_2 = i_2 + \frac{1}{2} i_1^2, \\ v_3 = -i_3 + i_1 i_2 + \frac{1}{6} i_1^3, \\ v_4 = i_4 - \frac{1}{2} i_2^2 - i_1 i_3 + \frac{1}{2} i_1^2 i_2 + \frac{1}{24} i_1^4, \\ v_5 = -i_5 + \frac{1}{5} i_2 i_3 + i_1 i_4 - \frac{1}{2} i_1 i_2^2 - \frac{1}{2} i_1^2 i_3 + \frac{1}{6} i_1^3 i_2 + \frac{1}{5!} i_1^5, \\ v_6 = \left\{\begin{array}{l} i_6 - i_2 i_4 + \frac{1}{2} i_3^2 + \frac{1}{2} i_2^3 - i_1 i_5 + \frac{1}{5} i_1 i_2 i_3 + \frac{1}{2} i_1^2 i_4 \\ -\frac{1}{4} i_1^2 i_2^2 - \frac{1}{6} i_1^3 i_3 + \frac{1}{24} i_1^4 i_2 + \frac{1}{6!} i_1^6, \end{array}\right. \\ v_7 = \left\{\begin{array}{l} -i_7 + \frac{3}{7} i_2 i_5 - \frac{1}{7} i_3 i_4 - \frac{1}{70} i_2^2 i_3 + i_1 i_6 - i_1 i_2 i_4 \\ + \frac{1}{2} i_1 i_3^2 + \frac{1}{2} i_1 i_2^3 - \frac{1}{2} i_1^2 i_5 + \frac{1}{10} i_1^2 i_2 i_3 + \frac{1}{6} i_1^3 i_4 \\ -\frac{1}{12} i_1^3 i_2^2 - \frac{1}{24} i_1^4 i_3 + \frac{1}{120} i_1^5 i_2 + \frac{1}{7!} i_1^7, \end{array}\right. \\ v_8 = \left\{\begin{array}{l} i_8 - i_2 i_6 + i_3 i_5 - \frac{1}{2} i_4^2 - \frac{5}{8} i_2^4 - \frac{7}{10} i_2 i_3^2 + \frac{3}{2} i_2^2 i_4 - i_1 i_7 \\ + \frac{3}{7} i_1 i_2 i_5 - \frac{1}{7} i_1 i_3 i_4 - \frac{1}{70} i_1 i_2^2 i_5 + \frac{1}{2} i_1^2 i_6 - \frac{1}{2} i_1^2 i_2 i_4 \\ + \frac{1}{4} i_1^2 i_3^2 + \frac{1}{4} i_1^2 i_2^3 - \frac{1}{6} i_1^3 i_5 + \frac{1}{30} i_1^3 i_2 i_3 + \frac{1}{24} i_1^4 i_4 \\ -\frac{1}{48} i_1^4 i_2^2 - \frac{1}{120} i_1^5 i_3 + \frac{1}{6!} i_1^6 i_2 + \frac{1}{8!} i_1^8, \end{array}\right. \\ v_9 = \left\{\begin{array}{l} -i_9 + \frac{5}{9} i_2 i_7 + \frac{3}{9} i_3 i_6 + \frac{1}{9} i_4 i_5 - \frac{37}{126} i_2^2 i_5 - \frac{31}{200} i_2^3 i_3 \\ -\frac{1}{6} i_3^3 + \frac{41}{105} i_2 i_3 i_4 + i_1 i_8 - i_1 i_2 i_6 + i_1 i_3 i_5 - \frac{1}{2} i_1 i_4^2 \\ -\frac{5}{8} i_1 i_2^4 + \frac{3}{2} i_1 i_2^2 i_4 - \frac{7}{10} i_1 i_2 i_3^2 - \frac{1}{2} i_1^2 i_7 + \frac{3}{14} i_1^2 i_2 i_5 \\ -\frac{1}{14} i_1^2 i_2 i_4 - \frac{1}{140} i_1^2 i_2^2 i_3 + \frac{1}{6} i_1^3 i_6 - \frac{1}{6} i_1^3 i_2 i_4 + \frac{1}{12} i_1^3 i_3^2 \\ + \frac{1}{12} i_1^3 i_2^3 - \frac{1}{24} i_1^4 i_5 + \frac{1}{120} i_1^4 i_2 i_3 + \frac{1}{120} i_1^5 i_4 - \frac{1}{240} i_1^5 i_2^2 \\ -\frac{1}{6!} i_1^6 i_3 + \frac{1}{7!} i_1^7 i_2 + \frac{1}{9!} i_1^9. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$(7\,c)\quad \begin{cases} H_1 = 0, \\ H_2 = \mathfrak{J}_2, \\ H_3 = \mathfrak{J}_3, \\ H_4 = \mathfrak{J}_4 - \frac{1}{2}\mathfrak{J}_2^2, \\ H_5 = \mathfrak{J}_5 - \frac{1}{5}\mathfrak{J}_2\mathfrak{J}_3, \\ H_6 = \mathfrak{J}_6 - \mathfrak{J}_2\mathfrak{J}_4 + \frac{1}{2}\mathfrak{J}_3^2 + \frac{1}{2}\mathfrak{J}_2^3, \\ H_7 = \mathfrak{J}_7 - \frac{3}{7}\mathfrak{J}_2\mathfrak{J}_5 + \frac{1}{7}\mathfrak{J}_3\mathfrak{J}_4 + \frac{1}{70}\mathfrak{J}_2^2\mathfrak{J}_3, \\ H_8 = \mathfrak{J}_8 - \mathfrak{J}_2\mathfrak{J}_6 + \mathfrak{J}_3\mathfrak{J}_5 - \frac{1}{2}\mathfrak{J}_4^2 - \frac{5}{8}\mathfrak{J}_2^4 - \frac{7}{10}\mathfrak{J}_2\mathfrak{J}_3^2 + \frac{3}{2}\mathfrak{J}_2^2\mathfrak{J}_4, \\ H_9 = \mathfrak{J}_9 - \frac{5}{9}\mathfrak{J}_2\mathfrak{J}_7 + \frac{1}{3}\mathfrak{J}_3\mathfrak{J}_6 - \frac{1}{9}\mathfrak{J}_4\mathfrak{J}_5 - \frac{37}{126}\mathfrak{J}_2^2\mathfrak{J}_5 + \frac{41}{105}\mathfrak{J}_2\mathfrak{J}_3\mathfrak{J}_4 \\ \qquad\qquad - \frac{31}{210}\mathfrak{J}_2^3\mathfrak{J}_2 - \frac{1}{6}\mathfrak{J}_3^3. \end{cases}$$

Die 3 *Formelsysteme* (7) *sind äquivalent, man kann jedes aus den beiden andern ableiten.*

Die Formeln (7a) und (7b) gehen in einander über mittelst der Relationen (2):

$$i_{2\nu} = j_{2\nu}; \quad i_1 = j_1; \quad i_{2\nu+1} + j_{2\nu+1} = \frac{2}{2\nu+1} i_1 j_{2\nu} \qquad (\text{für } \nu > 0).$$

Die Formeln (7a) entstehen aus den Formeln (7b), indem man die i durch $\mathfrak{J}$ und die v durch H ersetzt und dabei bemerkt, dass:

$$\mathfrak{J}_1 = H_1 = 0$$

ist.

Die Formeln (7b) entstehen aus den Formeln (7a) dadurch, dass man in dem Aggregat:

$$H_\nu + i_1 H_{\nu-1} + \frac{i_1^2}{2!} H_{\nu-2} + \cdots$$

die $\mathfrak{J}$ durch die i ersetzt.

Ich will mich deshalb von jetzt ab nur noch mit den Formeln (7a) beschäftigen, also mit der Auflösung der Formeln (2):

$$(8)\quad \begin{cases} j_N = \frac{1}{2}\sum\limits_{R=0}^{R=N} (-1)^R v_{N-R} v_R, \\ j_N = \frac{1}{2N}\sum\limits_{R=0}^{R=N} (-1)^R v_{N-R} v_R (N - 2R) \end{cases}$$

nach den v, von denen die erste gilt, wenn die Zahl N gerade ist und die zweite, wenn N ungerade ist.

§ 4.

Die Producte der j.

Die Werthe der v_N, welche man durch Auflösung der Formeln (8) erhält, sind ganze*) Functionen der j also Aggregate von gewissen Producten P dieser Grössen.

Bezeichnet man die Indices der j, je nachdem sie gerade oder ungerade Zahlen sind, durch μ und ν, so haben diese Producte P die Form:

$$P = j_{\mu_1}^{m_1} j_{\mu_2}^{m_2} \cdots j_{\mu_p}^{m_p} j_{\nu_1}^{n_1} j_{\nu_2}^{n_2} \cdots j_{\nu_q}^{n_q}.$$

Die Anzahl der Factoren j_μ und j_ν in P ist:

$$m = m_1 + m_2 \ldots m_p,$$
$$n = n_1 + n_2 \ldots n_q.$$

Der Grad in den Coefficienten von f ist

(9) $N = m_1\mu_1 + m_2\mu_2 \cdots m_p\mu_p + n_1\nu_1 + n_2\nu_2 \cdots n_q\nu_q = m_\mu + n_\nu,$

eine Zahl, welche mit n gerade oder ungerade ist.

Jedem Producte P entspricht ein Zahlensystem:

$$m_1, m_2 \ldots m_p, \quad n_1, n_2 \ldots n_q,$$

und umgekehrt entspricht jeder Lösung:

$$m_1, m_2 \ldots m_p, \quad n_1, n_2 \ldots n_q$$

der Formel (9) ein Product P, welches in dem Ausdruck von v_N vorkommt.**)

In den Formeln (8) treten in den Summen rechter Hand Producte $v_R v_{N-R}$ auf; die Factoren v_R und v_{N-R} sind Aggregate von Producten P_1 und P_2 der j.

Ist:

$$P_1 = j_{\mu_1}^{r_1} j_{\mu_2}^{r_2} \cdots j_{\mu_p}^{r_p} j_{\nu_1}^{s_1} j_{\nu_2}^{s_2} \cdots j_{\nu_q}^{s_q},$$

so wird:

$$P_2 = j_{\mu_1}^{m_1-r_1} j_{\mu_2}^{m_2-r_2} \cdots j_{\mu_p}^{m_p-r_p} j_{\nu_1}^{n_1-s_1} j_{\nu_2}^{n_2-s_2} \cdots j_{\nu_q}^{n_q-s_q}.$$

Die P_1 und P_2 haben in den j_μ und j_ν und den Coefficienten v von f die Grade

---

*) Denkt man sich diese ganzen Functionen der j mittelst der Grösse $j_1 = 1$ homogen gemacht, so werden sie zugleich isobar. Ihr Grad und Gewicht wird dann gleich N.

**) Dabei ist nicht ausgeschlossen, dass der numerische Coefficient eines solchen Productes P verschwindet; dies tritt jedoch, wie sich später zeigt, von einigen einfachsten Fällen abgesehen, nicht ein.

***) Vgl. die Anmerkung zu Beginn dieses Paragraphen.

$$r = r_1 + r_2 \cdots r_p,$$
$$s = s_1 + s_2 \cdots s_q,$$
$$R = r_1\mu_1 + r_2\mu_2 \cdots r_p\mu_p + s_1\nu_1 + s_2\nu_2 \cdots s_q\nu_q = r_\mu + s_\nu$$

und:

$$m - r, \quad n - s, \quad N - R = m_\mu - r_\mu + n_\nu - s_\nu.$$

Die Zahlen R und S sind gleichzeitig gerade und ungerade. Im ersten und letzten Gliede der Summen in den Formeln (8) tritt das Product auf:

$$v_N v_0 = v_N.$$

Die übrigen Glieder sind Producte von Grössen v, deren Indices kleiner als N sind. Um alle P zu erhalten, welche gleichzeitig auf der rechten Seite der Formeln (8) vorkommen, wenn man für die v ihre Werthe in den j einträgt, kann man zwei Wege einschlagen.

Der erste besteht darin, dass man die Gleichung

$$N = m_\mu + n_\nu$$

auflöst und zu jeder Lösung

$$m_1, m_2, \ldots, m_p, \quad n_1, n_2, \ldots, n_q$$

das zugehörige P bildet.

Auf dem zweiten Wege stelle man alle Lösungen

$$r_1, r_2, \ldots, r_p, \quad s_1, s_2, \ldots, s_q,$$
$$m_1 - r_1, \; m_2 - r_2 \cdots m_p - r_p, \quad n_1 - s_1, \; n_2 - s_2 \cdots n_q - s_q$$

der Gleichungen:

$$R = r_\mu + s_\nu; \quad N - R = m_\mu - r_\mu + n_\nu - s_\nu$$

auf und bilde zu jedem die Producte P_1 und P_2.

Wenn man für R der Reihe nach alle Zahlen:

$$0, 1, 2, \ldots, N$$

nimmt, so bilden die Producte $P_1 P_2$ gleichfalls alle zur Zahl N gehörigen P.

Die beiden Wege verhalten sich so zu einander, dass man auf dem ersten Wege P nur einmal erhält, während auf dem zweiten Wege die Factoren P_1 und P_2, also alle Zerlegungen der P in zwei Factoren $P_1 P_2$, erhalten werden.

§ 5.

Die Coefficienten C.

Durch Auflösung der Formeln (8) erhalten wir für die v Ausdrücke der Form:

$$v_N = \sum C_{m_1, m_2 \cdots m_p, \; n_1, n_2 \cdots n_q} P,$$

welche wir auch, wenn es ohne Missverständniss angeht, kurz so schreiben wollen:

$$v_N = \sum C_{m,n} P;$$

oder, wenn im Besondern die Indices:

$$n_1, n_2 \ldots n_q$$

verschwinden:

$$v_N = \sum C_m P.$$

Die Bestimmung der P ist im vorigen Paragraphen angegeben worden; will man also die v in den j wirklich ausdrücken, so kommt es nur noch auf die Berechnung der numerischen Constanten C an.

Da die in den P vorkommenden j nur Exponenten besitzen, welche positive ganze Zahlen (0 eingeschlossen) sind, so kommen auch nur solche C vor, deren Indices positive ganze Zahlen sind. Führen wir der Bequemlichkeit der Rechnung halber auch C mit negativen Indices ein, so wollen wir ein für alle Mal festsetzen, dass jedes C verschwindet, bei dem auch nur ein Index negativ ist.

Die einfachsten der Coefficienten C entnehmen wir den Formeln (7a). Der Coefficient desjenigen Productes P, bei dem alle Indices m, n verschwinden, hat den Werth 1; denselben Werth haben die Coefficienten derjenigen P, welche nur aus einem j bestehen:

$$C_{1,0} = C_{0,1} = 1.$$

Die Producte $j_R j_{N-R}$ haben, wenn N eine gerade Zahl ist, den Coefficienten:

$$C_{1,1} = (-1)^{R-1} \quad \text{für} \quad R \lessgtr \frac{N}{2},$$

$$C_{1,1} = (-1)^{R-1} \cdot \frac{1}{2} \quad \text{für} \quad R = \frac{N}{2},$$

und, wenn N eine ungerade Zahl ist, den Coefficienten:

$$C_{1,1} = (-1)^{R-1} \frac{N-2R}{N}.$$

§ 6.

Die Bestimmungsgleichungen der Coefficienten C.

Denkt man sich die v aus den Formeln (8) ausgerechnet und dann wieder in dieselben eingetragen, so erhält man die in den j identischen Gleichungen:

$$\begin{cases} 2 j_N = \sum (-1)^s C_{m-r,\, n-s} C_{r,s} P, \\ 2 N j_N = \sum (-1)^s C_{m-r,\, n-s} C_{r,s} P (m_\mu - 2 r_\mu + n_\nu - 2 s_\nu), \end{cases}$$

von denen die erstere gilt, wenn N eine gerade Zahl ist und die letztere, wenn N eine ungerade Zahl ist. Die Summen sind über alle Zahlen:

$$r_1, r_2 \ldots r_p, s_1, s_2 \ldots s_q,$$

$$m_1 - r_1, m_2 - r_2 \ldots m_p - r_p, n_1 - s_1, n_2 - s_2 \ldots n_q - s_q,$$

welche den Gleichungen genügen:

$$r_\mu + s_\nu = R; \quad m_\mu + n_\nu = N$$

auszudehnen, und R hat alle Zahlen von 0 bis N zu durchlaufen. Da auf der linken Seite nur ein j steht, so verschwinden in unsern Summen die Coefficienten derjenigen Producte P:

$$P = j_{\mu_1}^{m_1} j_{\mu_2}^{m_2} \ldots j_{\mu_p}^{m_p} j_{\nu_1}^{n_1} j_{\nu_2}^{n_2} \ldots j_{\nu_q}^{n_q},$$

welche mehr als einen Factor besitzen, bei denen also:

$$m + n > 1 \tag{11}$$

ist. Ist Formel (11) erfüllt, so gelten zur Bestimmung der C, je nachdem N, also auch n gerade oder ungerade ist, die Relationen:

$$\begin{cases} (12\text{a}) \quad \sum (-1)^s C_{m-r,n-s} C_{r,s} = 0, \\ (12\text{b}) \quad \sum (-1)^s C_{m-r,n-s} C_{r,s} (m_\mu - 2r_\mu + r_\nu - 2s_\nu) = 0; \end{cases}$$

in denselben sind die Summen über die $r_\varkappa$, $s_\varkappa$ von 0 bis $m_\varkappa$ und $n_\varkappa$ auszudehnen. Jedem Zahlensysteme:

$$m_1, m_2 \ldots m_p, n_1, n_2 \ldots n_q,$$

bei dem:

$$m + n > 1$$

ist, entspricht eine solche Relation.

Sind alle $m_\varkappa$, $n_\varkappa = 0$, so geht der Ausdruck linker Hand in Formel (12a) in 1 über; verschwinden alle $n_\varkappa$ und alle m bis auf eines der letzteren, welches den Werth 1 hat, so erhält dieser Ausdruck den Werth 2; verschwinden endlich alle m, $n_\varkappa$ bis auf eines der letzteren etwa n_ϱ, welches den Werth 1 hat, so hat der Ausdruck linker Hand in Formel (12b) den Werth $2\nu_\varrho$.

Die Formeln (12) sind, wie oben bemerkt, in der That Bestimmungsgleichungen für die Coefficienten C; sind nämlich alle C, bei denen kein Index grösser und mindestens einer kleiner ist, als die Zahlen:

$$m_1, m_2 \ldots m_p, n_1, n_2 \ldots n_q$$

bereits berechnet, so liefern sie den Werth von $C_{m,n}$.

Ein Umstand tritt aber hier erschwerend auf, nämlich der, dass die C in den Formeln (12) in der *zweiten* Dimension auftreten. Um diesen Uebelstand zu beseitigen, will ich aus ihnen *lineare* Bestimmungsgleichungen für die C ableiten.

§ 7.

Die Summen S_m, $S_{m,n}$, $T_{m,n}$.

Die Summen, welche in den Formeln (12) auftreten, will ich durch S_m, $S_{m,n}$, $T_{m,n}$ bezeichnen, diese Formeln also so schreiben:

$$\begin{cases} S_m = \sum C_{m-r}\, C_r = 0, \\ S_{m,n} = \sum (-1)^s\, C_{m-r,\,n-s}\, C_{r,s} = 0, \\ T_{m,n} = \sum (-1)^s\, C_{m-r,\,n-s}\, C_{r,s}(m_\mu - 2r_\mu + n_\nu - 2s_\nu) = 0. \end{cases}$$

Sie gelten, wenn:

$$m + n > 1$$

ist und zwar die zweite, wenn n eine gerade Zahl ist, und die dritte, wenn n ungerade ist. Ist jedoch:

$$m + n \leqq 1,$$

so haben die

$$S_m,\; S_{m,n},\; T_{m,n}$$

von 0 verschiedene Werthe.

Für $m = 0$ und $m = 1$ wird $S_m = 1$ bez. 2, also auch $S_{m,n}$, wenn $n = 0$ und zugleich $m = 0$ oder 1 ist.

Ist $m = 0$ und $n = 1$, so verschwinden von den Indices:

$$n_1,\; n_2 \ldots n_q$$

alle bis auf einen etwa n_ϱ, welcher den Werth 1 erhält; $T_{m,n}$ ist in diesem Falle $= 2\nu_\varrho$.

Wir haben allerdings im vorigen Paragraphen festgesetzt, dass sich die Summation der:

$$S_m,\; S_{m,n},\; T_{m,n}$$

über alle Indices:

$$r_1,\; r_2 \ldots r_p,\; s_1,\; s_2 \ldots s_q$$

erstreckt. Wir dürfen sie aber auf alle Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ ausdehnen. Es treten dann nämlich nur solche Glieder hinzu, bei denen einer der Factoren C mindestens einen negativen Index besitzt, welche also verschwinden.

§ 8.

Identische Relationen zwischen den C_m und den $C_{m,n}$.

Die Differenzen:

$$m_\varrho - 2r_\varrho \quad \text{und} \quad n_\varrho - 2s_\varrho,$$

also auch die Differenzen:

$$m - 2r \quad \text{und} \quad n - 2s$$

ändern ihr Vorzeichen, wenn man die Indices:

$$r_1, r_2 \ldots r_p, s_1, s_2 \ldots s_q$$

durch:

$$m_1 - r_1, m_2 - r_2 \ldots m_p - r_p, n_1 - s_1, n_2 - s_2 \ldots n_q - s_q$$

ersetzt. Durch diese Operation erhält die Summe:

$$\sum (-1)^s (m_\varrho - 2r_\varrho)^i (n_\sigma - 2s_\sigma)^\varkappa C_{m-r,n-s} C_{r,s}$$

den Factor:

$$(-1)^{n+i+\varkappa};$$

sie verschwindet identisch, wenn der Exponent:

$$n + i + \varkappa$$

ungerade ist. —

Zunächst folgt hieraus, dass $S_{m,n}$ verschwindet, wenn die Zahl n ungerade ist, und dass $T_{m,n} = 0$ ist, wenn n gerade ist. Das Product $n_\varrho S_{m,n}$ verschwindet für alle Indicessysteme.

Man kann diese Bemerkung aber auch dazu benutzen, um Ausdrücke, bei denen in den Coefficienten der C die Grössen m, n in hoher Dimension auftreten, in solche umzuformen, bei denen sie in niedrigerer Dimension vorkommen.

So hat man z. B.:

$$\begin{cases} m_\varrho S_m = 2 \sum r_\varrho C_{m-r} C_r, \\ m\ S_m = 2 \sum r\ C_{m-r} C_r, \end{cases}$$

ferner, wenn die Zahl n gerade ist:

$$\begin{cases} n_\varrho S_{m,n} = 2 \sum (-1)^s \varrho\, C_{m-r,n-s} C_{r,s} = 0, \\ T_{m,n} = \sum (-1)^s C_{m-r,n-s} C_{r,s} (m_\mu - 2r_\mu + n_\nu - 2s_\nu) = 0, \end{cases}$$

also, wenn c ein beliebiger Factor ist:

$$c S_{m,n} = \sum (-1)^s C_{m-r,n-s} C_{r,s} (m_\mu - 2r_\mu + r_\nu - 2s_\nu + c).$$

Ist n ungerade, so ist:

$$n_\varrho T_{m,n} = 2 \sum (-1)^s s_\varrho C_{m-r,n-s} C_{r,s} (m_\mu - 2r_\mu + r_\nu - 2s_\nu).$$

§ 9.

Veränderung der Indices.

Analog den früheren Abmachungen will ich diejenigen Coefficienten C, welche die Indices haben:

$$\begin{cases} r_1, r_2 \ldots r_{\varrho-1}, r_\varrho + 1, r_{\varrho+1}, r_{\varrho+2} \ldots r_p, 0, 0, 0 \ldots, \\ r_1, r_2, \ldots r_p, s_1, s_2 \ldots s_{\varrho-1}, s_\varrho + 1, s_{\varrho+1}, s_{\varrho+2} \ldots s_q, \\ r_1 - \nu_1, r_2 - \nu_2, \ldots r_p - \nu_p, s_1, s_2 \ldots s_q \end{cases}$$

durch C_{r+1}, $C_{r,s+1}$, $C_{r-\nu,s}$ und die Summen:

$$\begin{cases} S_{m+1} = \sum C_{m-r}\, C_{r+1}, \\ S_{m,n+1} = \sum (-1)^s\, C_{m-r,\,n-s}\, C_{n,\,s+1}, \\ T_{m,n+1} = \sum (-1)^s\, C_{m-r,\,n-s}\, C_{\nu,\,s+1}\, (m_\mu - 2r_\mu + n_\nu - 2s_\nu - \nu_\varrho), \\ S_{m-\varkappa,n} = \sum (-1)^s\, C_{m-r,\,n-s}\, C_{r-\varkappa,\,s}, \\ T_{m-\varkappa,n} = \sum (-1)^s\, C_{m-r,\,n-s}\, C_{r-\varkappa,\,s}\, (m_\mu - 2r_\mu + n_\nu - 2s_\nu + \varkappa_\mu) \end{cases}$$

durch:

$$S_{m+1},\; S_{m,n+1},\; T_{m,n+1},\; S_{m-\varkappa,n},\; T_{m-\varkappa,n}$$

bezeichnen. Die $\varkappa$ sind beliebige ganze Zahlen, deren Summe ich gleich:

$$\varkappa_1 + \varkappa_2 \ldots \varkappa_p = \varkappa$$

setze.

Hierbei gehen die Formeln des vorigen Paragraphen in eine etwas andere Form über.

Ebenso wie früher die Summen

$$S_m,\; S_{m,n},\; T_{m,n}$$

für nur wenige Indicessysteme von Null verschiedene Werthe hatten, so gilt ein Gleiches für unsre neuen S, T.

Das Product $(m_\varrho + 1)\, S_{m+1}$ verschwindet stets, ausser für $m = 0$, wo es gleich 1 wird und genügt der Formel:

$$(13) \qquad (m_\varrho + 1)\, S_{m+1} = 2 \sum (r_\varrho + 1)\, C_{m-r}\, C_{r+1}.$$

Ist $n = 0$, so haben die $S_{m-\varkappa,n}$, je nachdem entweder die Differenzen:

$$m_1 - r_1,\; m_2 - r_2 \ldots m_p - r_p$$

sämmtlich verschwinden, oder alle bis auf eine, etwa $m_\varrho - r_\varrho$ verschwinden und diese gleich 1 ist, die Werthe 1 und 2; ist n ungerade, so verschwinden die $S_{m-\varkappa,n}$, und ist n gerade, so genügen sie der Gleichung:

$$(14) \quad c_\varkappa S_{m-\varkappa,n} = \sum (-1)^s\, C_{m-r,\,n-s}\, C_{r-\varkappa,\,s}\, (m_\mu - 2r_\mu + n_\nu - 2s_\nu + \varkappa_\mu + c_\varkappa),$$

worin die $c_\varkappa$ beliebig sind.

Das Product $(n_\varrho + 1)\, S_{m,n+1}$ verschwindet für alle Indicessysteme und genügt, wenn n ungerade ist, der Relation:

$$(15) \quad (n_\varrho + 1)\, S_{m,n+1} = 2 \sum (-1)^s\, (s_\varrho + 1)\, C_{m-r,\,n-s}\, C_{n,\,s+1}.$$

Das Product $(n_\varrho + 1)\, T_{m,n+1}$ hat, wenn alle Indices:

$$m_1,\; m_2 \ldots m_p,\; n_1,\; n_2 \ldots n_q$$

verschwinden, den Werth $-2\nu_\varrho$ und genügt, wenn n gerade ist, der Relation:

$$(16)\qquad (n_\varrho+1)\,T_{m,n+1}=2\sum(-1)^s(s_\varrho+1)\,C_{m-r,n-s}\,C_{r,s+1}\,(m_\mu-2r_\mu+n_\nu-2s_\nu-\nu_\varrho).$$

Es verschwindet, wenn:

$$m+n\gtrless 0$$

ist.

§ 10.

Relationen zwischen den S und den T.

Die S und die T haben, ebenso wie ihre Aggregate, nur für wenige Indicessysteme von Null verschiedene Werthe. Man kann diese Aggregate so wählen, dass sie entweder für alle Indicessysteme verschwinden oder doch für einen grossen Theil derselben und dadurch Relationen zwischen den C erzielen.

Wir wollen drei solcher Relationen aufstellen, eine erste, welche nur die S_m enthält; eine andre zwischen den $S_{m,n}$, und endlich eine dritte zwischen den $S_{m,n}$ und $T_{m,n}$.

I. Der Ausdruck:

$$\frac{m_\varrho+1}{2}\,S_{m+1}+(m-1)\,S_m$$

verschwindet für alle Indicessysteme:

$$m_1,\ m_2\ldots m_p$$

und liefert nach Formel (13) die Formel:

$$(17)\qquad \sum\Big((r_\varrho+1)\,C_{r+1}+(2r-1)\,C_r\Big)\,C_{m-r}=0.$$

II. Die Grösse $\frac{n_\varrho+1}{2}\,S_{m,n+1}$ verschwindet für alle Indicessysteme, und $S_{m-\varkappa,n}$ wenigstens für diejenigen, bei denen n ungerade ist. Für die letzteren ist daher:

$$\frac{n_\varrho+1}{2}\,S_{m,n+1}+\sum_\varkappa d_\varkappa\,S_{m-\varkappa,n}=0,$$

für beliebige Werthe $d_\varkappa$, also nach Formel (15):

$$(18\text{a})\qquad \sum(-1)^s\,C_{m-r,n-s}\Big((s_\varrho+1)\,C_{r,s+1}+\sum_\varkappa d_\varkappa\,C_{r-\varkappa,s}\Big)=0.$$

III. Die Summe:

$$Q_{m,n}=\sum_\varkappa(-2)^\varkappa\binom{\varkappa}{\varkappa_1,\ \varkappa_2\ldots}\,S_{m-\varkappa,n}$$

möge über alle Indicessysteme:

von 0 bis:
$$\varkappa_1,\ \varkappa_2 \ldots \varkappa_p$$
$$m_1,\ m_2 \ldots m_p$$
erstreckt werden. Ist $n \gtrless 0$, so ist $Q_{m,n} = 0$.

Ist $n = 0$, $m > 0$, so giebt es in $Q_{m,n}$ nur wenige von Null verschiedene Glieder, nämlich dasjenige Glied, für welches alle Differenzen:
$$m_1 - \varkappa_1,\ m_2 - \varkappa_2 \ldots m_p - \varkappa_p$$
verschwinden und die Glieder, für welche alle diese Differenzen ausser einer, etwa $m_\sigma - \varkappa_\sigma$, verschwinden und diese eine gleich Eins ist.

Diese nicht verschwindenden Glieder haben die Werthe 1 und 2 und somit $Q_{m,n}$ den Werth:
$$Q_{m,n} = (-2)^m \binom{m}{m_1,\ m_2 \ldots m_p}$$
$$+ 2 \sum_{\sigma=0}^{\sigma=p} (-2)^{m-1} \binom{m-1}{m_1,\ m_2 \ldots m_{\sigma-1},\ m_\sigma + 1,\ m_{\sigma+1} \ldots m_p} = 0.$$

Ist endlich $m = 0$, $n = 0$, so reducirt sich $Q_{m,n}$ auf ein Glied, das den Werth 1 hat.

$Q_{m,n}$ verschwindet also für alle Indicessysteme ausser demjenigen, bei dem die Indices:
$$m_1,\ m_2 \ldots m_p,\ n_1,\ n_2 \ldots n_q$$
verschwinden und hat für dieses den Werth 1.

Da das Product $-\frac{n_\varrho + 1}{2\nu_\varrho} T_{m,n+1}$ dieselben Eigenschaften hat, so verschwindet die Summe:
$$(n_\varrho + 1)\, T_{m,n+1} + 2\nu_\varrho \sum_\varkappa (-2)^\varkappa \binom{\varkappa}{\varkappa_1,\ \varkappa_2 \ldots \varkappa_p} S_{m-\varkappa,n}$$
für alle Indicessysteme.

Trägt man hier für das Product $(n_\varrho + 1)\, T_{m,n+1}$ und für die $S_{m-\varkappa,n}$ ihre Werthe aus Formel (16) und Formel (14) ein, so erhält man die Relation:
$$\text{(18b)}\quad \sum (-1)^s C_{m-r,n-s}\Big\{(s_\varrho + 1)\, C_{r,s+1}(m_\mu - 2r_\mu + n_\nu - 2s_\nu - \nu_\varrho)$$
$$+ \nu_\varrho \sum C_{r-\varkappa,s} \frac{(-2)^\varkappa}{c_\varkappa} \binom{\varkappa}{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p} (m_\mu - 2r_\mu + n_\nu - 2s_\nu + \varkappa_\mu + c_\varkappa\Big\} = 0,$$
welche gilt, so lange die Zahl n gerade ist.

§ 11.

Die linearen Bestimmungsgleichungen der C.

Aus den Formeln (17) und (18):

$$\begin{cases} (17) \quad \sum \left((r_\varrho + 1)\, C_{r+1} + (2r - 1)\, C_r\right) C_{m-r} = 0, \\ (18\,\mathrm{b}) \quad \sum (-1)^s\, C_{m-r,\,n-s}\Big((s_\varrho + 1)\, C_{r,\,s+1}(m_\mu - 2r_\mu + n_\nu - 2s_\nu - \nu_\varrho) \\ \qquad + \nu_\varrho \sum\limits_\varkappa \frac{(-2)^\varkappa}{c_\varkappa} \binom{\varkappa}{\varkappa_1, \varkappa_2 \ldots \varkappa_p} C_{r-\varkappa,\,s}(m_\mu - 2r_\mu + n_\nu - 2s_\nu + n_\mu + c_\varkappa)\Big) = 0, \\ (18\,\mathrm{a}) \quad \sum (-1)^s\, C_{m-r,\,n-s}\Big((s_\varrho + 1)\, C_{r,\,s+1} + \sum\limits_\varkappa d_\varkappa\, C_{r-\varkappa,\,s}\Big) = 0, \end{cases}$$

von denen die erste für alle Indicessysteme besteht, und die zweite und dritte gilt, je nachdem n gerade ist oder ungerade, lassen sich leicht die linearen Bestimmungsgleichungen der C herstellen.

Die erste liefert unmittelbar die Formel:

$$(19) \qquad (r_\varrho + 1)\, C_{r+1} + (2r - 1)\, C_r = 0.$$

Setzt man in den Formeln (18):

$$\nu_\varrho = -c_\varkappa - \varkappa_\mu; \quad d_\varkappa = \frac{(-2)^\varkappa \nu_\varrho}{c_\varkappa} \binom{\varkappa}{\varkappa_1, \varkappa_2 \ldots \varkappa_p},$$

so gehen sie in diese über:

$$\begin{cases} \sum (-1)^s\, C_{m-r,\,n-s}(m_\mu - 2r_\mu + n_\nu - 2s_\nu - \nu_\varrho) \\ \qquad \times \Big((s_\varrho + 1)\, C_{r,\,s+1} - \nu_\varrho \sum\limits_\varkappa \frac{(-2)^\varkappa}{\nu_\varrho + \varkappa_\mu} \binom{\varkappa}{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p} C_{r-\varkappa,\,s}\Big) = 0, \\ \sum (-1)^s\, C_{m-r,\,n-s}\Big\{(s_\varrho + 1)\, C_{r,\,s+1} - \nu_\varrho \sum\limits_\varkappa \frac{(-2)^\varkappa}{\nu_\varrho + \varkappa_\mu} \binom{\varkappa}{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p} C_{r-\varkappa,\,s}\Big\} \end{cases}$$

und liefern die Relation:

$$(20) \qquad (s_\varrho + 1)\, C_{r,\,s+1} = \nu_\varrho \sum_\varkappa \frac{(-2)^\varkappa}{\nu_\varrho + \varkappa_\mu} \binom{\varkappa}{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p} C_{r-\varkappa,\,s},$$

welche durch die Substitution:

$$m_1!\; n_2! \ldots n_q!\; C_{m,n} = D_{m,n}$$

in die etwas einfachere übergeht:

$$(21) \qquad D_{r,\,s+1} = \nu_\varrho \sum_\varkappa \frac{(-2)^\varkappa}{r_\varrho + \varkappa_\mu} \binom{\varkappa}{\varkappa_1 \ldots \varkappa_p} D_{r-\varkappa,\,s}.$$

In ihr sind die $D_{m,n}$ die Coefficienten der Producte:

$$P = \frac{1}{n_1!\, n_2! \dots n_p!}\, j_{\mu_1}^{\cdot m_1} j_{\mu_2}^{\cdot m_2} \dots j_{\mu_p}^{\cdot m_p} j_{\nu_1}^{\cdot n_1} j_{\nu_2}^{\cdot n_2} \dots j_{\nu_q}^{\cdot n_q}.$$

Die Coefficienten C_0 und C_1 haben den Werth 1; die übrigen C_m lassen sich aus der Formel (19) berechnen und sodann die $D_{m,n}$ aus der Formel (21).

Die gewünschten linearen Bestimmungsgleichungen für die Coefficienten C sind somit durch die Formeln (19) und (21) dargestellt.

§ 12.

Eintheilung der Producte P.

Die Formeln (19) und (21) nehmen in gewissen Fällen, wenn die Producte P, deren Coefficienten C_m und $D_{m,n}$ berechnet werden sollen, besonders einfache sind, eine übersichtlichere Form an. Um dieselbe anschaulich zu machen, will ich die P in die folgenden 9 Classen eintheilen und für jede Classe diejenige Formel hinschreiben, welche zur Berechnung der C am zweckmässigsten erscheint.

1te Classe.

$$P_1 = j_\mu^{\cdot m}.$$

Hier ist: $n = 0$; $p = 1$; $m > 1$.

2te Classe.

$$P_1 = j_{\mu_1} j_{\mu_2}.$$

Für sie ist $n = 0$; $p = 2$; $m_1 = 1$, $m_2 = 1$.

3te Classe.

$$P_3 = j_{\mu_1}^{\cdot m_1} j_{\mu_2}^{\cdot m_2} \dots j_{\mu_p}^{\cdot m_p}.$$

Für sie ist: $n = 0$; $p > 1$; $m > 2$.

4te Classe.

$$P_4 = \frac{1}{n_1!\, n_2! \dots n_q!}\, j_{\nu_1}^{\cdot n_1} j_{\nu_2}^{\cdot n_2} \dots j_{\nu_q}^{\cdot n_q}.$$

Für sie ist: $m = 0$.

5te Classe.

$$P_5 = j_\mu j_\nu.$$

Für sie ist: $m = 1$ und $n = 1$.

6$^{\text{te}}$ Classe.

$$P_6 = j_{\mu} j_{\nu}^{\cdot n}.$$

Für sie ist: $m = 1$, $p = 1$ und $q = 1$, $n > 1$.

7$^{\text{te}}$ Classe.

$$P_7 = j_{\mu} j_{\nu_1}^{\cdot n_1} j_{\nu_2}^{\cdot n_2} \ldots j_{\nu_q}^{\cdot n_q}.$$

Für sie ist: $m = 1$; $q > 1$.

8$^{\text{te}}$ Classe.

$$P_8 = \frac{1}{n_1!\, n_2! \ldots n_q!}\, j_{\mu}^{m} j_{\nu_1}^{\cdot n_1} j_{\nu_2}^{\cdot n_2} \ldots j_{\nu_q}^{\cdot n_q}.$$

Für sie ist: $p = 1$, $q > 0$, $m > 1$.

9$^{\text{te}}$ Classe.

$$P_9 = \frac{1}{n_1!\, n_2! \ldots n_q!}\, j_{\mu_1}^{m_1} j_{\mu_2}^{m_2} \ldots j_{\mu_p}^{m_p} j_{\nu_1}^{\cdot n_1} j_{\nu_2}^{\cdot n_2} \ldots j_{\nu_q}^{\cdot n_q}.$$

Für sie ist: $p > 1$, $n > 0$

§ 13.

Specielle Fälle der Formeln (19) und (21).

Für jede der Classen P eignet sich zur Berechnung der Coefficienten C, D eine besondere Form der Formeln (19) und (21). —

Der Coefficient C_m von:

$$P_1 = j_{\mu}^{m}$$

wird aus der Formel bestimmt:

$$(22) \qquad (r + 1)\, C_{r+1} + (2r - 1)\, C_r = 0.$$

Der Coefficient C_{11} des Productes:

$$P_2 = j_{\mu_1} j_{\mu_2}$$

hat, wie die Formel:

$$C_{11} + C_1 = 0$$

zeigt, den Werth -1. —

Die übrigen C_m, also die Coefficienten der Producte:

$$P_3 = j_{\mu_1}^{m_1} j_{\mu_2}^{m_2} \ldots j_{\mu_p}^{m_p}$$

muss man aus der allgemeinen Formel:

$$(19) \qquad (r_{\varrho} + 1)\, C_{r+1} + (2r - 1)\, C_r = 0$$

berechnen.

Die Coefficienten D_n der Producte:

$$P_4 = \frac{1}{n_1!\, n_2! \dots n_q!}\, j_{\nu_1}^{n_1} j_{\nu_2}^{n_2} \dots j_{\nu_q}^{n_q}$$

bestimmt man aus der Formel:

$$D_{s+1} = D_s;$$

sie haben sämmtlich den Werth 1.

Die Coefficienten $D_{1,n}$ der Producte:

$$P_5 = j_\mu j_\nu; \quad P_6 = \frac{1}{n!}\, j_\mu j_\nu^n; \quad P_7 = \frac{1}{n_1!\, n_2! \dots n_q!}\, j_\mu j_{\nu_1}^{n_1} j_{\nu_2}^{n_2} \dots j_{\nu_q}^{n_q}$$

berechnet man aus der Formel:

$$D_{1,s+1} = \nu_\varrho \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=1} \frac{(-2)^\varkappa}{\nu_\varrho + \varkappa_\mu}\, D_{r-\varkappa,s} = D_{1,s} - \frac{2\nu_\varrho}{\mu+\nu_\varrho}.$$

Aus derselben ergiebt sich im Besonderen für die $D_{1,n}$ der Werth:

$$D_{1,n} = 1 - 2 \sum_{\varrho=0}^{\varrho=q} \frac{\nu_\varrho n_\varrho}{\nu_\varrho + \mu}.$$

Im Speciellen haben die Coefficienten D_{11} der P_5 den Werth:

$$D_{11} = \frac{\mu - \nu}{\mu + \nu}$$

und die der P_6 den Werth:

$$D_{1,n} = 1 - \frac{2n\nu}{\mu+\nu}.$$

Zur Bestimmung der Coefficienten C der Producte:

$$P_8 = \frac{1}{n_1!\, n_2! \dots n_q!}\, j_\mu^m j_{\nu_1}^{n_1} j_{\nu_2}^{n_2} \dots j_{\nu_q}^{n_q}$$

dient die Formel:

$$D_{r,s+1} = \nu_\varrho \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=r} \frac{(-2)^\varkappa}{\nu_\varrho + \mu_\varkappa}\, D_{r-\varkappa,s},$$

und zu derjenigen der Producte P_9 die allgemeine Formel (21):

$$(21) \qquad D_{r,s+1} = \nu_\varrho \sum_\varkappa \frac{(-2)^\varkappa}{\nu_\varrho + \mu_\varkappa} \binom{\varkappa}{\varkappa_1,\ \varkappa_2 \dots \varkappa_p} D_{r-\varkappa,s}.$$

§ 14.

Die Producte P in den Formeln (7a).

Zur Bestätigung unsrer Formeln entnehmen wir den Formeln (7a) die Producte P gemäss der Eintheilung des § 12 und schreiben unter sie jedesmal die in Formel (7a) berechneten Coefficienten C_m und $D_{m,n}$. Sie befriedigen in der That die Formeln des vorigen Paragraphen.

Producte P_1 in den Formeln (7a).

$j_2^2, j_2^3; j_2^4; j_4^2$ mit den Coefficienten:

$$-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \quad -\frac{5}{8}; \quad -\frac{1}{2}.$$

Producte P_2 in den Formeln (7a).

$j_2 j_4, j_2 j_6$ mit den Coefficienten: -1.

Producte P_3 in den Formeln (7a).

$j_2^2 j_4$ mit dem Coefficienten: $\frac{3}{2}$.

Producte P_4 in den Formeln (7a).

$$\frac{1}{2!} j_1^2; \ \frac{1}{3!} j_1^3; \ \frac{1}{4!} j_1^4; \ \frac{1}{5!} j_1^5; \ \frac{1}{6!} j_1^6; \ \frac{1}{7!} j_1^7; \ \frac{1}{8!} j_1^8; \ \frac{1}{9!} j_1^9; \ j_1 j_3;$$
$$\frac{1}{2!} j_1^2 j_3; \ \frac{1}{3!} j_1^3 j_3; \ \frac{1}{4!} j_1^4 j_3; \ \frac{1}{5!} j_1^5 j_3; \ \frac{1}{6!} j_1^6 j_3; \ j_1 j_5; \ \frac{1}{2!} j_1^2 j_5;$$
$$\frac{1}{3!} j_1^3 j_5; \ \frac{1}{4!} j_1^4 j_5; \ j_1 j_7; \ \frac{1}{2!} j_1^2 j_7; \ \frac{1}{2!} j_3^2; \ \frac{1}{2!\,2!} j_1^2 j_3^2; \ \frac{1}{2!\,3!} j_1^3 j_3^2;$$
$$j_3 j_5; \ j_1 j_3 j_5; \ \frac{1}{3!} j_3^3.$$

Sie haben sämmtlich den Coefficienten 1.

Producte P_5 in den Formeln (7a).

$$j_1 j_2; \ j_1 j_4; \ j_1 j_6; \ j_1 j_8; \ j_2 j_3; \ j_2 j_5; \ j_2 j_7; \ j_3 j_4; \ j_3 j_6; \ j_4 j_5$$

mit den Coefficienten:

$$\frac{1}{3}; \ \frac{3}{5}; \ \frac{5}{7}; \ \frac{7}{9}; \ \frac{-1}{5}; \ \frac{-3}{7}; \ \frac{-5}{9}; \ \frac{1}{7}; \ \frac{1}{3}; \ \frac{-1}{9}.$$

Producte P_6 in den Formeln (7a).

$$\frac{1}{2!} j_1^2 j_2; \ \frac{1}{3!} j_1^3 j_2; \ \frac{1}{4!} j_1^4 j_2; \ \frac{1}{5!} j_1^5 j_2; \ \frac{1}{6!} j_1^6 j_2; \ \frac{1}{7!} j_1^7 j_2; \ \frac{1}{2!} j_1^2 j_4;$$
$$\frac{1}{3!} j_1^3 j_4; \ \frac{1}{4!} j_1^4 j_4; \ \frac{1}{5!} j_1^5 j_4; \ \frac{1}{2!} j_1^2 j_6; \ \frac{1}{3!} j_1^3 j_6; \ \frac{1}{2!} j_2 j_3^2$$

mit den Coefficienten:

$$-\frac{1}{3}; \ -1; \ -\frac{5}{3}; \ -\frac{7}{3}; \ -3; \ -\frac{11}{3}; \ \frac{1}{5}; \ -\frac{1}{5}; \ -\frac{3}{5}; \ -1; \ \frac{3}{7};$$
$$\frac{1}{7}; \ -\frac{7}{5};$$

Producte P_7 in den Formeln (7a).

$$j_1 j_2 j_3;\ j_1 j_2 j_5;\ j_1 j_3 j_4;\ \frac{1}{2!} j_1^2 j_2 j_3;\ \frac{1}{3!} j_1^3 j_2 j_3;\ \frac{1}{4!} j_1^4 j_2 j_3;$$
$$\frac{1}{2!} j_1^2 j_2 j_5;\ \frac{1}{2!} j_1^2 j_3 j_4;\ \frac{1}{2!} j_1 j_2 j_3^2$$

mit den Coefficienten:

$$-\frac{13}{15};\ -\frac{23}{21};\ -\frac{9}{35};\ -\frac{23}{15};\ -\frac{11}{5};\ -\frac{43}{15};\ -\frac{37}{21};\ -\frac{23}{35};\ -\frac{31}{15}.$$

Producte P_8 in den Formeln (7a).

$$j_1 j_2^2;\ \frac{1}{2!} j_1^2 j_2^2;\ \frac{1}{3!} j_1^3 j_2^2;\ \frac{1}{4!} j_1^4 j_2^2;\ \frac{1}{5!} j_1^5 j_2^2;\ j_1 j_2^3;\ \frac{1}{2!} j_1^2 j_2^3;$$
$$\frac{1}{3!} j_1^3 j_2^3;\ j_1 j_2^4;\ j_1 j_4^2;\ j_2^2 j_3;\ j_1 j_2^2 j_3;\ \frac{1}{2!} j_1^2 j_2^2 j_3;\ j_2^2 j_5;\ j_2^3 j_3$$

mit den Coefficienten:

$$-\frac{11}{30};\ \frac{19}{90};\ \frac{37}{30};\ \frac{27}{10};\ \frac{83}{18};\ \frac{103}{210};\ -\frac{89}{630};\ -\frac{3197}{1890};\ -\frac{1823}{2520};\ -\frac{41}{90};$$
$$\frac{1}{70};\ \frac{199}{210};\ \frac{293}{126};\ \frac{37}{126};\ \frac{31}{210}.$$

Producte P_9 in den Formeln (7a).

$$j_1 j_2 j_4;\ j_2 j_3 j_4;\ j_1 j_2 j_6;\ \frac{1}{2!} j_1^2 j_2 j_4;\ \frac{1}{3!} j_1^3 j_2 j_4;\ j_1 j_2^2 j_4$$

mit den Coefficienten:

$$-\frac{97}{105};\ -\frac{41}{105};\ -\frac{67}{63};\ -\frac{11}{35};\ \frac{29}{35};\ \frac{23}{14}.$$

Erlangen, im December 1891.

Zur Theorie der Systeme linearer Differentialgleichungen mit einer unabhängigen Veränderlichen. II.

Von

J. Horn in Freiburg i. Br.

Ein System linearer Differentialgleichungen

$$\frac{dy_\alpha}{dx} = \sum_\beta F_{\alpha\beta}(x) \cdot y_\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, m),$$

dessen sämmtliche Lösungen sich an der singulären Stelle $x = 0$ regulär verhalten, wollen wir kurz ein an der singulären Stelle $x = 0$ reguläres System nennen. Bezeichnet man ein Differentialgleichungensystem von der Form

$$x\frac{dy_\alpha}{dx} = \sum_\beta (a_{\alpha\beta} + a'_{\alpha\beta}x + a''_{\alpha\beta}x^2 + \cdots) y_\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, \cdots, m),$$

wie es im ersten Theil dieser Arbeit*) behandelt wurde, als ein kanonisches System, so besteht der Satz, dass sich jedes reguläre System durch eine Reihe von Substitutionen von der Form

$$y_\alpha = \sum_\beta h_{\alpha\beta} z_\beta \qquad (\alpha, \beta = 1, \ldots, m)$$

und von der Form

$$y_\alpha = x z_\alpha \qquad (\alpha \text{ eine der Zahlen } 1, \ldots, m)$$

in ein kanonisches System überführen lässt. Dieser Satz ist zwar bereits von Herrn Sauvage und Herrn Koenigsberger ausgesprochen worden**); aber meines Wissens ist noch kein vollständiger Beweis für denselben erbracht, weshalb mir eine erneute Behandlung dieses Gegenstandes nothwendig erscheint. Zweck des Folgenden ist die Entwicklung einer Methode, welche jedes reguläre System in ein kanonisches überzuführen gestattet und zugleich einen Beweis für die

*) Math. Ann. Bd. 39, S. 391.

**) Sauvage, Ann. de l'Éc. norm. 1889. (S. 166 ist der Fall, dass die Determinante (3) identisch in r verschwindet, ausser Acht gelassen.) — Koenigsberger, Lehrbuch der Theorie der Differentialgleichungen, Cap. 6, II. (S. 448 ist nicht bewiesen, dass $F(x)$ für $x = a$ von Null verschieden ist.)

Möglichkeit dieser Ueberführung enthält. Die Methode gründet sich auf die Weierstrass'sche Theorie der bilinearen Formen und ist verschieden von dem Verfahren, welches ich früher bei zwei speciellen Fällen angewandt habe.*)

§ 1.

Nothwendige Bedingung für die Regularität.

Wenn das Differentialgleichungensystem

$$\frac{dy_\alpha}{dx} = \sum_\beta F_{\alpha\beta}(x) \cdot y_\beta \quad (\alpha, \beta = 1, \ldots, m)$$

an der singulären Stelle $x = 0$ regulär ist, so können die Coefficienten $F_{\alpha\beta}(x)$ nur eine endliche Anzahl negativer Potenzen von x enthalten.**) Setzt man demgemäss

$$F_{\alpha\beta}(x) = \frac{a_{\alpha\beta} + a'_{\alpha\beta}x + a''_{\alpha\beta}x^2 + \cdots}{x^{h+1}},$$

wo h eine ganze positive Zahl oder Null bedeutet, so erhält das System (1) die Form

$$\begin{aligned} x^{h+1}\frac{dy_1}{dx} &= a_{11}y_1 + \cdots + a_{1m}y_m + \cdots, \\ (2) \qquad & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x^{h+1}\frac{dy_m}{dx} &= a_{m1}y_1 + \cdots + a_{mm}y_m + \cdots.^{***)} \end{aligned}$$

Der Fall $h = 0$ ist im ersten Theil behandelt worden, wir nehmen jetzt $h > 0$ an.

Das als regulär vorausgesetzte System (2) besitzt jedenfalls eine Lösung von der Gestalt

$$y_1 = x^\rho \eta_1, \cdots y_m = x^\rho \eta_m,$$

wo $\eta_1, \ldots \eta_m$ Potenzreihen

$$\eta_\alpha = \varepsilon_\alpha + \varepsilon_\alpha' x + \varepsilon_\alpha'' x^2 + \cdots$$

sind, deren Anfangswerthe $\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_m$ nicht sämmtlich verschwinden.

Durch Einsetzen der angegebenen Lösung in das System (2) erhält man, wenn man nach Division mit x^ρ $x = 0$ setzt, die Gleichungen

---

*) Habilitationsschrift § 3 und § 4.

**) Königsberger's Lehrbuch S. 446.

***) An Stelle der Punkte am Ende stehen hier wie später lineare homogene Functionen der abhängigen Veränderlichen, deren Coefficienten durch x theilbare Potenzreihen sind.

$$a_{11}\varepsilon_1 + \cdots + a_{1m}\varepsilon_m = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{m1}\varepsilon_1 + \cdots + a_{mm}\varepsilon_m = 0,$$

woraus die Bedingung

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} = 0$$

hervorgeht. Wenn das System (2) eine reguläre Lösung besitzt, ist also

$$\begin{vmatrix} a_{11}-s & \cdots & a_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm}-s \end{vmatrix} \equiv 0, \quad \text{mod. } s.$$

Wir wollen nun beweisen, dass das Vorhandensein von μ regulären Lösungen die Relation

$$\begin{vmatrix} a_{11}-s & \cdots & a_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm}-s \end{vmatrix} \equiv 0, \quad \text{mod. } s^{\mu}$$

zur Folge hat. Wir zeigen, dass dieser Satz, wenn er für einen gewissen Werth von μ richtig ist, auch für $\mu+1$ gilt.

Wir nehmen ε_m von Null verschieden an. Die Grössen*)

$$z_1 = y_1 - \frac{\mathfrak{y}_1}{\mathfrak{y}_m} y_m, \cdots z_{m-1} = y_{m-1} - \frac{\mathfrak{y}_{m-1}}{\mathfrak{y}_m} y_m$$

genügen dem Differentialgleichungensystem

$$x^{\lambda+1}\frac{dz_1}{dx} = b_{11}z_1 + \cdots + b_{1,m-1}z_{m-1} + \cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$x^{\lambda+1}\frac{dz_{m-1}}{dx} = b_{m-1,1}z_1 + \cdots + b_{m-1,m-1}z_{m-1} + \cdots,$$

worin

$$b_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} - \frac{\varepsilon_\alpha}{\varepsilon_m} a_{m\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, \cdots m-1)$$

ist. Hieraus folgt die Beziehung

$$\begin{vmatrix} a_{11}-s & \cdots & a_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm}-s \end{vmatrix} = -s \begin{vmatrix} b_{11}-s & \cdots & b_{1,m-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{m-1,1} & \cdots & b_{m-1,m-1}-s \end{vmatrix}.$$

Da, wenn man von $\mathfrak{y}_1, \ldots \mathfrak{y}_m$ absieht, jeder regulären Lösung $y_1, \ldots y_m$

*) Vgl. Koenigsberger und Sauvage. Es ist jedoch zweckmässig, $\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_{m-1}$ nicht wie dort in den Nenner zu bringen.

des Systems (2) eine reguläre Lösung $z_1, \dots z_{m-1}$ des z-Systems entspricht, so hat letzteres System μ reguläre Lösungen, wenn das System (2) deren $\mu + 1$ besitzt. Dann besteht aber die für den Werth μ als richtig angenommene Beziehung

$$\begin{vmatrix} b_{11} - s & \dots & b_{1,m-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{m-1,1} & \dots & b_{m-1,m-1} - s \end{vmatrix} \equiv 0, \quad \text{mod. } s^{\mu},$$

folglich ist

$$\begin{vmatrix} a_{11} - s & \dots & a_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} - s \end{vmatrix} = 0, \text{ mod. } s^{\mu+1}.$$

Wenn das System (2) m reguläre Lösungen besitzt, ist hiernach

$$\begin{vmatrix} a_{11} - s & \dots & a_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} - s \end{vmatrix} \equiv 0, \text{ mod. } s^{m}.$$

Wir können also den Satz aussprechen:

Ist das Differentialgleichungensystem (2) *regulär, so ist*

$$(3) \qquad \Delta(s) = \begin{vmatrix} a_{11} - s & \dots & a_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} - s \end{vmatrix} = (-1)^m s^m.$$

Die Determinante $\Delta(s)$ *besitzt also lauter Elementartheiler von der Form* s^e.

§ 2.

Gang der weiteren Untersuchungen.

Die Determinante $\Delta(s)$ möge i mehrfache Elementartheiler $s^{e'}, s^{e''}, \dots s^{e^{(i)}}$ besitzen, wobei wir $e' \geqq e'' \cdots \geqq e^{(i)}$ annehmen, und ausserdem k einfache Elementartheiler s. Die Gesammtzahl der Elementartheiler der Determinante $\Delta(s)$ ist also gleich $i + k$, folglich ihr Rang gleich $m - i - k$. Wir wollen die Determinante $\Delta(s)$ die charakteristische Determinante des Differentialgleichungensystems (2) nennen und die Zahl $i + k$ ihrer Elementartheiler einfach als Zahl der Elementartheiler des Systems (2) bezeichnen.

Durch Transformation der Variablen $y_1, \dots y_m$, wie sie in § 4 und § 5 auseinandergesetzt wird, führen wir das System (2) in ein anderes über, für welches die Zahl der Elementartheiler grösser geworden ist. Durch wiederholte Anwendung dieses Transformationsverfahrens gelangt man zu einem System von der Form (2), dessen Determinante m Elementartheiler besitzt, die natürlich von der Form s

sein müssen. Dann sind aber sämmtliche Coefficienten $a_{\alpha\beta}$ gleich Null, so dass die Zahl h um 1 erniedrigt werden kann. Das beschriebene Verfahren wird so lange fortgesetzt, bis $h = 0$ wird, bis man also zu einem kanonischen System gelangt.

Die Transformation, durch welche ein reguläres Differentialgleichungensystem von der Form (2) in ein anderes mit grösserer Elementartheilerzahl übergeführt werden kann, möge zunächst einmal kurz skizzirt werden.

Zuerst wird das System (2) in ähnlicher Weise in die Normalform übergeführt, wie in § 1 des ersten Theils das dort mit (1) bezeichnete Differentialgleichungensystem. Unter Einführung der Unbestimmten $u_1, \dots u_m$ werden die m Differentialgleichungen (2) zusammengefasst in

$$x^{k+1} \frac{d \sum\limits_\alpha u_\alpha y_\alpha}{dx} = \sum_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} u_\alpha y_\beta + \cdots \quad (\alpha, \beta = 1, \dots m).$$

Vermittelst linearer Transformationen führen wir an Stelle von $u_1, \dots u_m$; $y_1, \dots y_m$ die neuen Variablen $U_1, \dots U_m$; $Y_1, \dots Y_m$, die wir auch mit

$$U_1', \dots U_{e'}'; \dots; U_1^{(i)}, \dots U_{e^{(i)}}^{(i)}; U', \dots U^{(k)},$$
$$Y_1', \dots Y_{e'}'; \dots; Y_1^{(i)}, \dots Y_{e^{(i)}}^{(i)}; Y', \dots Y^{(k)}$$

bezeichnen, in solcher Weise ein, dass das bilineare Formenpaar

$$\sum_\alpha u_\alpha y_\alpha, \quad \sum_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} u_\alpha y_\beta$$

in die Weierstrass'sche Normalform, also unter unseren Voraussetzungen in

$$\sum_\alpha u_\alpha y_\alpha = \sum_\alpha U_\alpha Y_\alpha = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=i} \left(U_1^{(\lambda)} Y_1^{(\lambda)} + \cdots + U_{e^{(\lambda)}}^{(\lambda)} Y_{e^{(\lambda)}}^{(\lambda)}\right) + \sum_{\mu=1}^{\mu=k} U^{(\mu)} Y^{(\mu)},$$
$$\sum_{\alpha\beta} a_{\alpha\beta} u_\alpha y_\beta = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=i} \left(U_2^{(\lambda)} Y_1^{(\lambda)} + \cdots + U_{e^{(\lambda)}}^{(\lambda)} Y_{e^{(\lambda)}-1}^{(\lambda)}\right)$$

übergeht. Die zusammenfassende Gleichung wird hiernach

$$x^{k+1} \frac{d \sum\limits_\alpha U_\alpha Y_\alpha}{dx} = \sum_\lambda \left(U_2^{(\lambda)} Y_1^{(\lambda)} + \cdots + U_{e^{(\lambda)}}^{(\lambda)} Y_{e^{(\lambda)}-1}^{(\lambda)}\right) + \cdots;$$

wegen der Unbestimmtheit von $U_1, \dots U_m$ zerfällt sie wieder in m Gleichungen.

Das System (2) wird also durch eine lineare Transformation

$$(4)\qquad \begin{aligned} y_1 &= h_{11}\,Y_1 + \cdots + h_{1m}\,Y_m,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ y_m &= h_{m1}\,Y_1 + \cdots + h_{mm}\,Y_m \end{aligned}$$

mit constanten Coefficienten in die Normalform

$$(5)\qquad \begin{aligned} x^{h+1}\frac{dY_1^{(\lambda)}}{dx} &= \qquad\qquad + \cdots,\\ x^{h+1}\frac{dY_2^{(\lambda)}}{dx} &= Y_1^{(\lambda)} \qquad + \cdots, \quad (\lambda = 1, \cdots i)\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ x^{h+1}\frac{dY_{e^{(\lambda)}}^{(\lambda)}}{dx} &= Y_{e^{(\lambda)}-1}^{(\lambda)} + \cdots,\\ x^{h+1}\frac{dY^{(\mu)}}{dx} &= \qquad\qquad + \cdots, \quad (\mu = 1, \ldots k) \end{aligned}$$

übergeführt.

Nun ist aber die lineare Substitution (4) nicht vollständig bestimmt; man sieht, dass man auf Y noch gewisse lineare Transformationen, z. B. beliebige lineare Transformationen der Grössen $Y', \ldots Y^{(k)}$ unter sich, anwenden kann, ohne dass das Differentialgleichungensystem die Normalform (5) verliert. Man kann nun die Variablen $Y', \ldots Y^{(k)}$ so bestimmen, dass das System (5) durch eine Substitution von der Gestalt

$$(6)\qquad \begin{aligned} &Y_1^{(\lambda)} = x z_1^{(\lambda)}, \ldots Y_{e^{(\lambda)}-1}^{(\lambda)} = x z_{e^{(\lambda)}-1}^{(\lambda)}, \; Y_{e^{(\lambda)}}^{(\lambda)} = z_{e^{(\lambda)}}^{(\lambda)}, \quad (\lambda = 1, \ldots i)\\ &Y' = x z', \quad \ldots Y^{(t)} = x z^{(t)}, \; Y^{(t+1)} = z^{(t+1)}, \ldots Y^{(k)} = z^{(k)} \end{aligned}$$

in ein anderes System übergeht, dessen Elementartheilerzahl grösser ist als diejenige des Systems (2).

Die Hauptschwierigkeit liegt in der zweckmässigen Bestimmung der Variablen Y der Normalform. Da in § 4 und § 5 ohnehin eine Reihe linearer Transformationen ausgeführt werden muss, um die Grössen $Y', \ldots Y^{(t)}$ zu ermitteln, so richten wir es so ein, dass das z-System in der Normalform erscheint, aus welcher die Zahl seiner Elementartheiler unmittelbar zu ersehen ist.

Die bisherigen Behauptungen fassen wir in folgenden Satz zusammen:

Das als regulär vorausgesetzte Differentialgleichungensystem (2) *wird durch zwei Transformationen* (4) *und* (6) *in ein Differentialgleichungensystem mit grösserer Elementartheilerzahl übergeführt. Die wiederholte Anwendung dieses Transformationsverfahrens führt zu einem kanonischen Differentialgleichungensystem.*

Der Beweis dieses Satzes beruht auf einem Hilfssatz, welcher in § 3 behandelt wird.

§ 3.

Beweis eines Hilfssatzes.

In einem Theil der Differentialgleichungen der Normalform (5) kann die Zahl $h+1$ auf h erniedrigt werden. Für derartige Systeme gilt der folgende Satz:

Ist das Differentialgleichungensystem

$$
(7)\qquad \begin{array}{l}
x^{h+1}\dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + \cdots + a_{1\mu}y_\mu + a_{1,\mu+1}y_{\mu+1} + \cdots + a_{1m}y_m + \cdots \\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\
x^{h+1}\dfrac{dy_\mu}{dx} = a_{\mu 1}y_1 + \cdots + a_{\mu\mu}y_\mu + a_{\mu,\mu+1}y_{\mu+1} + \cdots + a_{\mu m}y_m + \cdots \\
x^{h}\dfrac{dy_{\mu+1}}{dx} = a_{\mu+1,1}y_1 + \cdots + a_{\mu+1,\mu}y_\mu + a_{\mu+1,\mu+1}y_{\mu+1} + \cdots + a_{\mu+1,m}y_m + \cdots, \\
\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\
x^{h}\dfrac{dy_m}{dx} = a_{m1}y_1 + \cdots + a_{m\mu}y_\mu + a_{m,\mu+1}y_{\mu+1} + \cdots + a_{mm}y_m + \cdots
\end{array}
$$

an der singulären Stelle $x=0$ regulär, so ist die Gleichung

$$
(8)\qquad \Delta(s) = \begin{vmatrix}
a_{11} & \ldots a_{1\mu} & a_{1,\mu+1} & \ldots a_{1m} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{\mu 1} & \ldots a_{\mu\mu} & a_{\mu,\mu+1} & \ldots a_{\mu m} \\
a_{\mu+1,1} & \ldots a_{\mu+1,\mu} & a_{\mu+1,\mu+1}-s & \ldots a_{\mu+1,m} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
a_{m1} & \ldots a_{m\mu} & a_{m,\mu+1} & \ldots a_{mm}-s
\end{vmatrix} = 0
$$

identisch in s erfüllt.

Wenn wir die μ ersten Differentialgleichungen als solche der ersten Art und die $m-\mu$ letzten als solche der zweiten Art bezeichnen, so ist nach § 1 die Gleichung (8) erfüllt, wenn keine Differentialgleichungen der zweiten Art vorhanden sind, wenn $m-\mu=0$ ist. Wenn der Satz richtig ist, wenn $m-\mu-1$ Differentialgleichungen der zweiten Art vorhanden sind, so gilt er, wie wir jetzt zeigen wollen, auch dann, wenn die Zahl derselben $m-\mu$ beträgt.

Das Differentialgleichungensystem (7) besitzt jedenfalls eine Lösung von der Form

$$\mathfrak{y}_\alpha = x^\rho\eta_\alpha,\ \eta_\alpha = \varepsilon_\alpha + \varepsilon'_\alpha x + \varepsilon''_\alpha x^2 + \cdots \qquad (\alpha = 1, \ldots m),$$

worin $\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_m$ nicht sämmtlich verschwinden.

Hat man gleichzeitig $\varepsilon_{\mu+1}=0, \ldots \varepsilon_m = 0$, so können $\varepsilon_1, \ldots \varepsilon_\mu$ nicht sämmtlich verschwinden. Man findet durch Einsetzen der Lösung in das System (7)

$$a_{11}\varepsilon_1+\cdots+a_{1\mu}\varepsilon_\mu=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{m1}\varepsilon_1+\cdots+a_{m\mu}\varepsilon_\mu=0;$$

folglich sind alle aus den m ersten Colonnen der Determinante $\Delta(s)$ gebildeten Unterdeterminanten m^{ten} Grades gleich Null, so dass $\Delta(s)$ unabhängig von dem Werthe von s verschwindet. Sind $\varepsilon_{\mu+1},\dots\varepsilon_m$ nicht sämmtlich Null, so möge etwa ε_m von Null verschieden sein. Die Grössen

$$z_1=y_1-\frac{\vartheta_1}{\vartheta_m}y_m,\;\dots\; z_{m-1}=y_{m-1}-\frac{\vartheta_{m-1}}{\vartheta_m}y_m$$

genügen dem Differentialgleichungensystem

$$\begin{aligned}
x^{h+1}\frac{dz_1}{dx}&=b_{11}z_1+\cdots+b_{1\mu}z_\mu+b_{1,\mu+1}z_{\mu+1}+\cdots+b_{1,m-1}z_{m-1}+\cdots,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x^{h+1}\frac{dz_\mu}{dx}&=b_{\mu1}z_1+\cdots+b_{\mu\mu}z_\mu+b_{\mu,\mu+1}z_{\mu+1}+\cdots+b_{\mu,m-1}z_{m-1}+\cdots,\\
x^h\frac{dz_{\mu+1}}{dx}&=b_{\mu+1,1}z_1+\cdots+b_{\mu+1,\mu}z_\mu+b_{\mu+1,\mu+1}z_{\mu+1}+\cdots+b_{\mu+1,m-1}z_{m-1}+\cdots,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x^h\frac{dz_{m-1}}{dx}&=b_{m-1,1}z_1+\cdots+b_{m-1,\mu}z_\mu+b_{m-1,\mu+1}z_{\mu+1}+\cdots+b_{m-1,m-1}z_{m-1}+\cdots,
\end{aligned}$$

worin im Falle $h>1$

$$b_{\alpha'\beta}=a_{\alpha'\beta},\qquad b_{\alpha''\beta}=a_{\alpha''\beta}-\frac{\varepsilon_{\alpha''}}{\varepsilon_m}a_{m\beta},\qquad\begin{pmatrix}\alpha'=1,\dots\mu;\;\alpha''=\mu+1,\dots m-1\\ \beta=1,\dots m-1\end{pmatrix}$$

im Falle $h=1$

$$b_{\alpha'\beta}=a_{\alpha'\beta},\qquad b_{\alpha''\beta}=a_{\alpha''\beta}-\frac{\varepsilon_{\alpha''}}{\varepsilon_m}a_{m\beta}-\delta_{\alpha''\beta}p\qquad\begin{pmatrix}\alpha'=1,\dots\mu;\;\alpha''=\mu+1,\dots m-1\\ \beta=1,\dots m-1\end{pmatrix}$$

ist. Setzt man

$$\Delta'(s)=\begin{vmatrix}
b_{11} & \dots b_{1\mu} & b_{1,\mu+1} & \dots b_{1,m-1}\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
b_{\mu1} & \dots b_{\mu\mu} & b_{\mu,\mu+1} & \dots b_{\mu,m-1}\\
b_{\mu+1,1} & \dots b_{\mu+1,\mu} & b_{\mu+1,\mu+1}-s & \dots b_{\mu+1,m-1}\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
b_{m-1,1} & \dots b_{m-1,\mu} & b_{m-1,\mu+1} & \dots b_{m-1,m-1}-s
\end{vmatrix},$$

so ist im Falle $h<1$ in Folge der Beziehungen zwischen $a_{\alpha\beta}$ und $b_{\alpha\beta}$

$$\Delta(s)=-s\,\Delta'(s).$$

Aus $\Delta'(s) = 0$ folgt also $\Delta(s) = 0$; wenn der ausgesprochene Satz für das z-System gilt, so gilt er auch für das y-System.

Für $h = 1$ ist

$$\Delta(s) = -s\Delta'(t),$$

wenn man $t = s - p$ setzt. Gilt nun der Satz für das z-System, so ist $\Delta'(t) = 0$ für alle Werthe von t, also auch $\Delta'(s-p) = 0$ für alle Werthe von s; mithin verschwindet $\Delta(s)$ für alle Werthe von s.

§ 4.

Erster Theil der Transformation.

Das Differentialgleichungensystem (2) sei durch die lineare Substitution (4) auf die Normalform (5) gebracht. Ausführlicher geschrieben möge dieselbe lauten:

$$\begin{aligned}
x^{h+1}\frac{dY_1^{(\lambda)}}{dx} &= x(P_{\lambda 1}Y_1 + \cdots + P_{\lambda m}Y_m) + \cdots,\\
x^{h+1}\frac{dY_2^{(\lambda)}}{dx} &= Y_1^{(\lambda)} + x(P'_{\lambda 1}Y_1 + \cdots + P'_{\lambda m}Y_m) + \cdots,\\
&\qquad (\lambda = 1, \dots i)\\
(9)\quad \cdot\;\cdot\;\cdot\;&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\
x^{h+1}\frac{dY^{(\lambda)}_{e^{(\lambda)}-1}}{dx} &= Y^{(\lambda)}_{e^{(\lambda)}-1} + x\left(P^{(e^{(\lambda)}-1)}_{\lambda 1}Y_1 + \cdots + P^{(e^{(\lambda)}-1)}_{\lambda m}Y_m\right) + \cdots,\\
x^{h+1}\frac{dY^{(\mu)}}{dx} &= x(Q_{\mu 1}Y_1 + \cdots + Q_{\mu m}Y_m) + \cdots\\
&\qquad (\mu = 1, \dots k).
\end{aligned}$$

Durch die Substitution

$$(10)\quad \begin{aligned}
&Y_1^{(\lambda)} = xz_1^{(\lambda)}, \dots Y^{(\lambda)}_{e^{(\lambda)}-1} = xz^{(\lambda)}_{e^{(\lambda)}-1}, \; Y^{(\lambda)}_{e^{(\lambda)}} = z^{(\lambda)}_{e^{(\lambda)}} \quad (\lambda = 1, \dots i),\\
&Y^{(\mu)} = z^{(\mu)} \quad (\mu = 1, \dots k)
\end{aligned}$$

erhält man ein Differentialgleichungensystem von der Form

$$\begin{aligned}
x^{h+1}\frac{dz_1^{(\lambda)}}{dx} &= A_{\lambda 1}z'_{e'} + \cdots + A_{\lambda i}z^{(i)}_{e^{(i)}} + B_{\lambda 1}z' + \cdots\\
&\qquad + B_{\lambda k}z^{(k)} + \cdots,\\
x^{h+1}\frac{dz_2^{(\lambda)}}{dx} &= z_1^{(\lambda)} + A'_{\lambda 1}z'_{e'} + \cdots + A'_{\lambda i}z^{(i)}_{e^{(i)}} + B'_{\lambda 1}z' + \cdots\\
&\qquad + B'_{\lambda k}z^{(k)} + \cdots,\\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\
x^{h+1}\frac{dz^{(\lambda)}_{e^{(\lambda)}-1}}{dx} &= z^{(\lambda)}_{e^{(\lambda)}-2} + A^{(e^{(\lambda)}-2)}_{\lambda 1}z'_{e'} + \cdots + A^{(e^{(\lambda)}-2)}_{\lambda i}z^{(i)}_{e^{(i)}} + B^{(e^{(\lambda)}-2)}_{\lambda 1}z' + \cdots\\
&\qquad + B^{(e^{(\lambda)}-2)}_{\lambda k}z^{(k)} + \cdots,
\end{aligned}$$

$$x^h \frac{d z^{(\lambda)}_{e^{(\lambda)}}}{dx} = z^{(\lambda)}_{e^{(\lambda)}-1} + A^{(e^{(\lambda)}-1)}_{\lambda 1} z'_{e'} + \cdots + A^{(e^{(\lambda)}-1)}_{\lambda i} z^{(i)}_{e^{(i)}} + B^{(e^{(\lambda)}-1)}_{\lambda 1} z' + \cdots + B^{(e^{(\lambda)}-1)}_{\lambda k} z^{(k)} + \cdots,$$
$$(\lambda = 1, \ldots i),$$
$$x^h \frac{d z^{(\mu)}}{dx} = C_{\mu 1} z'_{e'} + \cdots + C_{\mu i} z^{(i)}_{e^{(i)}} + D_{\mu 1} z' + \cdots + D_{\mu k} z^{(k)} + \cdots,$$
$$(\mu = 1, \ldots k),$$

welches in

$$\begin{aligned}
& x^{h+1} \frac{d z_1^{(\lambda)}}{dx} = A_{\lambda 1} z'_{e'} + \cdots + A_{\lambda i} z^{(i)}_{e^{(i)}} + B_{\lambda 1} z' + \cdots + B_{\lambda k} z^{(k)} + \cdots, \\
& x^{h+1} \frac{d z_2^{(\lambda)}}{dx} = z_1^{(\lambda)} + \cdots, \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
(11)\quad & x^{h+1} \frac{d z^{(\lambda)}_{e^{(\lambda)}-1}}{dx} = z^{(\lambda)}_{e^{(\lambda)}-2} + \cdots, \\
& x^h \frac{d z^{(\lambda)}_{e^{(\lambda)}}}{dx} = z^{(\lambda)}_{e^{(\lambda)}-1} + \cdots, \\
& \qquad \lambda = 1, \ldots i) \\
& x^h \frac{d z^{(\mu)}}{dx} = C_{\mu 1} z'_{e'} + \cdots + C_{\mu i} z^{(i)}_{e^{(i)}} + D_{\mu 1} z' + \cdots + D_{\mu k} z^{(k)} + \cdots, \\
& \qquad (\mu = 1, \ldots k)
\end{aligned}$$

übergeht, wenn man an Stelle von

$$\begin{aligned}
& z_1^{(\lambda)} + A'_{\lambda 1} z'_{e'} + \cdots + B'_{\lambda 1} z' + \cdots, \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& z^{(\lambda)}_{e^{(\lambda)}-1} + A^{(e^{(\lambda)}-1)}_{\lambda 1} z'_{e'} + \cdots + B^{(e^{(\lambda)}-1)}_{\lambda 1} z' + \cdots
\end{aligned}$$

neue Variable einführt, die wir wieder $z_1^{(\lambda)}, \ldots z^{(\lambda)}_{e^{(\lambda)}-1}$ nennen.

Wir wenden nun den für das System (7) bewiesenen Hilfssatz (8) auf das System (11) an. Da die Colonne der Coefficienten von $z_g^{(\lambda)} (\lambda = 1, \ldots i;\ g = 1, \ldots e^{(\lambda)} - 1)$ nur das einzige Element 1 enthält, welches in der der Ableitung $\frac{d z^{(\lambda)}_{g+1}}{dx}$ entsprechenden Zeile steht, so können in der Determinante $\Delta(s)$ die angegebenen Zeilen und Colonnen gestrichen werden, so dass die Gleichung (8) übergeht in

$$\begin{vmatrix}
A_{11} \ldots A_{1i} & B_{11} & \ldots D_{1k} \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
A_{i1} \ldots A_{ii} & B_{i1} & \ldots B_{ik} \\
C_{11} \ldots C_{1i} & D_{11} - s & \ldots D_{1k} \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
C_{k1} \ldots C_{ki} & D_{k1} & \ldots D_{kk} - s
\end{vmatrix} = 0;$$

daraus folgt aber

$$(12) \qquad \begin{vmatrix} A_{11} & \dots & A_{1i} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{i1} & \dots & A_{ii} \end{vmatrix} = 0.$$

Der Rang dieser Determinante, der hiernach kleiner als i sein muss, sei p, und es sei $\varrho_1, \dots \varrho_p$ die niedrigste aus den Zeilennummern $1, \dots i$ gebildete Combination*), zu welcher eine von Null verschiedene Determinante p^{ten} Grades, etwa

$$R = \begin{vmatrix} A_{\varrho_1 \varrho_1'} & \dots & A_{\varrho_1 \varrho_p'} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{\varrho_p \varrho_1'} & \dots & A_{\varrho_p \varrho_p'} \end{vmatrix}$$

gehört. Unter dieser Voraussetzung sind, wenn man

$$A_{\lambda 1} z_\sigma' + \dots + A_{\lambda i} z_{\sigma(i)}^{(i)} = P_\lambda \qquad (\lambda = 1, \dots i)$$

setzt, die Grössen $P_{\lambda_1}, \dots P_{\lambda_p}$ unabhängig von einander. Die Zahlenreihe $1, \dots i$ zerfalle einerseits in die beiden Gruppen $\varrho_1, \dots \varrho_p$; $\sigma_1, \dots \sigma_q$, andererseits in die beiden Gruppen $\varrho_1', \dots \varrho_p'$; $\sigma_1', \dots \sigma_q'$, so dass $p + q = i$ ist. Es besteht die Gleichung

$$\begin{vmatrix} P_{\varrho_1} & A_{\varrho_1, 1} & \dots & A_{\varrho_1, p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ P_{\varrho_p} & A_{\varrho_p, 1} & \dots & A_{\varrho_p, p} \\ P_{\sigma_\beta} & A_{\sigma_\beta, 1} & \dots & A_{\sigma_\beta, p} \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$R P_{\sigma_\beta} = R_1^{(\beta)} P_{\varrho_1} + \dots + R_p^{(\beta)} P_{\varrho_p},$$

wo $R_\alpha^{(\beta)}$ eine aus den Zeilen $\varrho_1, \dots \varrho_{\alpha-1}, \sigma_\beta, \varrho_{\alpha+1}, \dots \varrho_p$ des Systems der A gebildete Determinante p^{ten} Grades ist. Wenn σ_β zwischen ϱ_a und ϱ_{a+1} liegt, so ist im Falle $\alpha > a$ die Combination $\varrho_1, \dots \varrho_{\alpha-1}, \sigma_\beta, \varrho_{\alpha+1}, \dots \varrho_p$ niedriger als die Combination $\varrho_1, \dots \varrho_p$; denn wenn man die Zahlen der ersteren Combination ihrer Grösse nach ordnet, so schreibt sie sich $\varrho_1, \dots \varrho_a, \sigma_\beta \dots$, während die zweite $\varrho_1, \dots \varrho_a, \varrho_{a+1} \dots$ lautet, wo $\sigma_\beta < \varrho_{a+1}$ ist. Mithin ist $R_\alpha^{(\beta)} = 0$ für $\alpha > a$. Setzt man

$$R_\alpha^{(\beta)} = R J_\alpha^{(\beta)},$$

so wird

$$P_{\sigma_\beta} = J_1^{(\beta)} P_{\varrho_1} + \dots + J_a^{(\beta)} P_{\varrho_a}.$$

---

*) Wir nennen eine aus den Zahlen $1, \dots i$ gebildete Combination $\alpha_1' : \dots \alpha_p'$ niedriger als eine andere $\alpha_1'', \dots \alpha_p''$, wenn die erste der Differenzen $\alpha_1' - \alpha_1'', \dots \alpha_p' - \alpha_p''$, welche nicht verschwindet, einen negativen Werth hat.

Setzt man nun

$$
(13\text{a})\quad
\begin{aligned}
u_1^{(\alpha)} &= z_1^{(\varrho)},\\
&\;\ldots\ldots\\
u_{f^{(\alpha)}-1}^{(\alpha)} &= z_{e^{(\varrho)}-1}^{(\varrho)},\\
u^{(\alpha)} &= A_{\varrho 1} z'_{e'} + \cdots + A_{\varrho i} z_{e^{(i)}}^{(i)} + B_{\varrho 1} z' + \cdots + B_{\varrho k} z^{(k)},
\end{aligned}
\qquad (\alpha = 1, \ldots p)
$$

indem man unter ϱ die Zahl ϱ_α versteht und $f^{(\alpha)}$ an Stelle von $e^{(\varrho_\alpha)}$ schreibt, setzt man ferner

$$
(13\text{b})\quad
\begin{aligned}
v_1^{(\beta)} &= z_1^{(\sigma)} - \left(J_1^{(\beta)} z_1^{(\varrho_1)} + \cdots + J_a^{(\beta)} z_1^{(\varrho_a)}\right),\\
&\;\ldots\ldots\ldots\ldots\\
v_{g^{(\beta)}-1}^{(\beta)} &= z_{e^{(\sigma)}-1}^{(\sigma)} - \left(J_1^{(\beta)} z_{e^{(\sigma)}-1}^{(\varrho_1)} + \cdots + J_a^{(\beta)} z_{e^{(\sigma)}-1}^{(\varrho_a)}\right)^{*)}\\
v^{(\beta)} &= z_{e^{(\sigma')}}^{(\sigma')}\;{}^{**)}
\end{aligned}
\qquad (\beta = 1, \ldots q)
$$

wo $g^{(\beta)}$ an Stelle von $e^{(\sigma_\beta)}$ gesetzt und unter σ die Zahl σ_β, unter σ' die Zahl σ'_β zu verstehen ist, so geht die erste Gruppe der Differentialgleichungen (11) über in

$$
(14\text{a})\quad
\begin{aligned}
\text{I.}\quad x^{k+1}\frac{du^{(\alpha)}}{dx} &= \qquad\qquad\qquad\qquad + \cdots,\\
x^{k+1}\frac{du_1^{(\alpha)}}{dx} &= u^{(\alpha)} \qquad\qquad\qquad + \cdots,\\
x^{k+1}\frac{du_2^{(\alpha)}}{dx} &= u_1^{(\alpha)} \qquad\qquad\qquad + \cdots,\\
&\;\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x^{k+1}\frac{du_{f^{(\alpha)}-1}^{(\alpha)}}{dx} &= u_{f^{(\alpha)}-2}^{(\alpha)} \qquad\qquad + \cdots,
\end{aligned}
\qquad (\alpha = 1, \ldots p)
$$

$$
(14\text{b})\quad
\begin{aligned}
\text{II.}\quad x^{k+1}\frac{dv_1^{(\beta)}}{dx} &= \quad L_{p1} z' + \cdots + L_{pk} z^{(k)} + \cdots,\\
x^{k+1}\frac{dv_2^{(\beta)}}{dx} &= v_1^{(\beta)} \qquad\qquad\qquad + \cdots,\\
&\;\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x^{k+1}\frac{dv_{g^{(\beta)}-1}^{(\beta)}}{dx} &= v_{g^{(\beta)}-2}^{(\beta)} \qquad\qquad + \cdots,
\end{aligned}
\qquad (\beta = 1, \ldots q)
$$

$$
(14\text{c})\quad \text{III.}\quad x^{k+1}\frac{dv^{(\beta)}}{dx} = \qquad\qquad\qquad\qquad + \cdots \qquad (\beta = 1, \ldots q).
$$

---

*) $e^{(\sigma_\beta)}$ ist der in § 2 gemachten Voraussetzung gemäss nicht grösser als $e^{(\varrho_1)}, \ldots e^{(\varrho_a)}$.

**) Es treten also $u', \ldots u^{(p)}$ an Stelle von $z_{e^{(\lambda)}}^{(\lambda)}$ $(\lambda = \varrho'_1, \ldots \varrho'_p)$, $v', \ldots v^{(q)}$ an Stelle von $z_{e^{(\lambda)}}^{(\lambda)}$ $(\lambda = \sigma'_1, \ldots \sigma'_q)$, Das Coefficientensystem

$$(15)\qquad \begin{matrix} L_{11} & \dots & L_{1k}, \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ L_{q1} & \dots & L_{qk} \end{matrix}$$

habe den Rang $q' \leqq q$, und es sei $\beta_1', \dots \beta_{q'}'$ die niedrigste Zeilencombination, zu welcher eine von Null verschiedene Determinante vom Grade q' gehört. Die übrigen Zahlen β bezeichnen wir mit $\beta_1'', \dots \beta_{q''}''$, so dass $q' + q'' = q$ ist. Unter den Functionen

$$L_{\beta 1} z' + \dots + L_{\beta k} z^{(k)} = Q_\beta \qquad (\beta = 1, \dots q)$$

bestehen Relationen von der Form

$$Q_{\beta''} = K_1^{(\beta'')} Q_{\beta_1'} + \dots + K_b^{(\beta'')} Q_{\beta_b'},$$

wobei angenommen ist, dass β'' zwischen β_b' und β_{b+1}' liegt. Setzt man, indem man r statt k schreibt,

$$(13\,\mathrm{c})\qquad \begin{aligned} w^{(\gamma)} &= L_{\gamma 1} z' + \dots + L_{\gamma k} z^{(k)}, && (\gamma = 1, \dots q') \\ w^{(\gamma)} &= z^{(\gamma)}, && (\gamma = q' + 1, \dots r), \end{aligned}$$

setzt man weiter

$$(13\,\mathrm{b}'')\qquad \begin{aligned} &v_1^{(\beta'')} \quad \text{für} \quad v_1^{(\beta'')} - \sum_{i=1}^{i=b} K_i^{(\beta'')} v_1^{(\beta_i')}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad (\beta'' = 1, \dots q''), \\ &v_{g(\beta'')-1}^{(\beta'')} \quad \text{für} \quad v_{g(\beta'')-1}^{(\beta'')} - \sum_{i=1}^{i=b} K_i^{(\beta'')} v_{g(\beta'')-1}^{(\beta_i')}, \end{aligned}$$

so gehen die Differentialgleichungen (14b) über in

$$(14\,\mathrm{b}')\qquad \begin{aligned} \mathrm{II}'.\quad & x^{h+1} \frac{dv_1^{(\beta)}}{dx} = w^{(\beta)} + \dots, \\ & x^{h+1} \frac{dv_2^{(\beta)}}{dx} = v_1^{(\beta)} + \dots, \\ & \dots\dots\dots\dots\dots \qquad (\beta = \beta_1', \dots \beta_{q'}') \\ & x^{h+1} \frac{dv_{g(\beta)-1}^{(\beta)}}{dx} = v_{g(\beta)-2}^{(\beta)} + \dots, \end{aligned}$$

$$(14\,\mathrm{b}'')\qquad \begin{aligned} \mathrm{II}''.\quad & x^{h+1} \frac{dv_1^{(\beta)}}{dx} = \qquad + \dots, \\ & x^{h+1} \frac{dv_2^{(\beta)}}{dx} = v_1^{(\beta)} + \dots, \\ & \dots\dots\dots\dots\dots \qquad (\beta = \beta_1'', \dots \beta_{q''}'') \\ & x^{h+1} \frac{dv_{g(\beta)-1}^{(\beta)}}{dx} = v_{g(\beta)-2}^{(\beta)} + \dots, \end{aligned}$$

und die letzte Differentialgleichung (11) erhält die Form

$$(14\text{d})\quad \text{IV. } x^k \frac{dw^{(\gamma)}}{dx} = A_{\gamma 1} u' + \cdots + A_{\gamma p} u^{(p)} + B_{\gamma 1} v' + \cdots + B_{\gamma q} v^{(q)} + C_{\gamma 1} w' + \cdots + C_{\gamma r} w^{(r)} + \cdots \qquad (\gamma = 1, \ldots r).$$

Wir haben somit auf die Normalform (9) des gegebenen Differentialgleichungensystems (2) die Substitution (10) angewandt und das dadurch erhaltene Differentialgleichungensystem (11) vermittelst der linearen Substitutionen (13) wieder auf die Normalform gebracht, welche aus den Differentialgleichungen (14a), (14b′), (14b″), (14c) und (14d) besteht. Wir wollen dieses Differentialgleichungensystem kurz mit $\mathfrak{A}$ und seine einzelnen Gleichungsgruppen mit I, II′, II″, III, IV bezeichnen. Da das System $\mathfrak{A}$ die Normalform besitzt, so sind seine Elementartheiler unmittelbar ersichlich. Den Gleichungen I entsprechen p Elementartheiler $s^{f^{(\alpha)}}$ $(\alpha = 1, \ldots p)$, den Gleichungen II″ q'' Elementartheiler $s^{g^{(\beta)}-1}$ $(\beta = \beta_1'', \ldots \beta_{q''}'')$, der Gleichungen III q einfache Elementartheiler s, zu den Differentialgleichungen IV

$$x^{k+1} \frac{dw^{(\beta)}}{dx} = \qquad + \cdots \qquad (\beta = \beta_1', \ldots \beta_{q'}')$$

in Verbindung mit den Gleichungen II′ gehören q' Elementartheiler $s^{g^{(\beta)}}$ $(\beta = \beta_1', \ldots \beta_{q'}')$ und schliesslich zu den übrigen Gleichungen IV

$$x^{k+1} \frac{dw^{(\gamma)}}{dx} = \qquad + \cdots \quad (\gamma = \beta_1'', \ldots \beta_{q''}''; q+1, \ldots r)$$

$r - q'$ einfache Elementartheiler s. Die Gesammtzahl der Elementartheiler des Systems $\mathfrak{A}$ beträgt somit $p + q + r + q''$, während sie ursprünglich gleich $i + k = p + q + r$ war. Von den ursprünglichen Elementartheilern $s^{f^{(\alpha)}}(\alpha = 1, \ldots p)$, $s^{g^{(p)}}(\beta = 1, \ldots q)$, $s(\gamma = 1, \ldots r)$ hat sich $s^{g^{(\beta)}}$ $(\beta = \beta_1'', \ldots \beta_{q''}'')$ in $s^{g^{(\beta)}-1}$ und s zerlegt, während die übrigen unverändert geblieben sind. Die Elementartheilerzahl hat sich somit im Falle $q'' > 0$ vergrössert, während sie im Falle $q'' = 0$ unverändert geblieben ist.

Die Elementartheilerzahl des Differentialgleichungensystems (2) *wird vergrössert, indem man das System* (2) *durch die Substitution* (4) *in die Normalform* (5) *oder* (9) *überführt und auf diese die Substitution* (10) *anwendet, vorausgesetzt, dass $q' = q$ ist, oder, was auf dasselbe herauskommt, vorausgesetzt, dass der Rang des in dem System* (11) *vorkommenden Coefficientensystems*

$$(16)\qquad \begin{matrix} A_{11} \ldots A_{1i} B_{11} \ldots B_{1k}, \\ \cdots\cdots\cdots \\ A_{i1} \ldots A_{ii} B_{i1} \ldots B_{ik} \end{matrix}$$

kleiner als i ist.

Das Coefficientensystem von $\mathfrak{A}$, welches dem Coefficientensystem (16) von (2) entspricht, ist nämlich vom Rang $p + q' = i - q''$, und man braucht nur zu zeigen, dass der Rang von (16) durch die linearen Substitutionen (13) nicht geändert worden ist. Da die Coefficienten $A_{\lambda 1}, \ldots A_{\lambda i}, B_{\lambda 1}, \ldots B_{\lambda k}$ durch Hinzufügung linearer Verbindungen von $z'_{e'}, \ldots z^{(i)}_{e(i)}, z', \ldots z^{(k)}$ zu $z_1^{(\lambda)}$ nicht beeinflusst werden, so sind es nur lineare Transformationen der Grössen $z_1', \ldots z_1^{(i)}$ unter sich, sowie lineare Transformationen der Grössen $z'_{e'}, \ldots z^{(i)}_{e(i)}, z', \ldots z^{(k)}$ unter sich, welche hier in Betracht kommen.

§ 5.

Zweiter Theil der Transformation.

Im Falle $q'' = 0$ sind noch weitere Transformationen nöthig, um die Elementartheilerzahl des Systems $\mathfrak{A}$ zu vergrössern. In diesem Falle hat das System $\mathfrak{A}$ die Gestalt:

$$\text{(17a)}\quad \text{I.}\quad \begin{aligned} x^{h+1}\frac{du^{(\alpha)}}{dx} &= +\cdots, \\ x^{h+1}\frac{du_1^{(\alpha)}}{dx} &= u^{(\alpha)} + \cdots, \\ x^{h+1}\frac{du_2^{(\alpha)}}{dx} &= u_1^{(\alpha)} + \cdots, \qquad (\alpha = 1, \ldots p) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x^{h+1}\frac{du^{(\alpha)}_{f(\alpha)-1}}{dx} &= u^{(\alpha)}_{f(\alpha)-2} + \cdots. \end{aligned}$$

$$\text{(17b)}\quad \text{II.}\quad \begin{aligned} x^{h+1}\frac{dv_1^{(\beta)}}{dx} &= v^{(\beta)} + \cdots, \\ x^{h+1}\frac{dv_2^{(\beta)}}{dx} &= v_1^{(\beta)} + \cdots, \qquad (\beta = 1, \ldots q) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x^{h+1}\frac{dv^{(\beta)}_{g(\beta)-1}}{dx} &= v^{(\beta)}_{g(\beta)-2} + \cdots. \end{aligned}$$

$$\text{(17c)}\quad \text{III.}\quad x^{h+1}\frac{dv^{(\beta)}}{dx} = +\cdots. \qquad (\beta = 1, \ldots q)$$

$$\text{(17d)}\quad \text{IV.}\quad \begin{aligned} x^{h}\frac{dw^{(\gamma)}}{dx} = {} & A_{\gamma 1}u' + \cdots + A_{\gamma p}u^{(p)} + B_{\gamma 1}v' + \cdots + B_{\gamma q}v^{(q)} \\ & + C_{\gamma 1}w' + \cdots + C_{\gamma r}w^{(r)} + \cdots \\ & (\gamma = 1, \ldots r). \end{aligned}$$

Um den Hilfssatz des § 3 verwenden zu können, müssen wir die erste Gleichung I und die Gleichung III etwas näher betrachten. Mit Rücksicht auf die letzte Formel (13a) und die letzte Formel (13b) ergiebt sich

$$(\delta)\quad \begin{aligned} x^k \frac{du^{(\alpha)}}{dx} &= A_{\varrho_\alpha,1} z'_{e'-1} + \cdots + A_{\varrho_\alpha,p} z^{(p)}_{e^{(p)}-1} + B_{\varrho_\alpha,1} z' + \cdots B_{\varrho_\alpha,k} z^{(k)} + \cdots \\ & \qquad\qquad (\alpha = 1, \ldots p), \\ x^k \frac{dv^{(\beta)}}{dx} &= z^{(\sigma'_\beta)}_{e^{(\sigma'_\beta)}-1} + \cdots \quad (\beta = 1, \ldots q). \end{aligned}$$

In der nach dem Muster von (8) aus dem Differentialgleichungensystem (17) gebildeten Determinante $\Delta(s)$ enthalten die Colonnen der Coefficienten von $u^{(\alpha)}_{f^{(\alpha)}-1}$ $(\alpha = 1, \ldots p)$, $v^{(\beta)}_{g^{(\beta)}-1}$ $(\beta = 1, \ldots q)$ nur in denjenigen Zeilen von Null verschiedene Elemente, welche aus den Differentialgleichungen für $u^{(\alpha)} (\alpha = 1, \ldots p)$, $v^{(\beta)} (\beta = 1, \ldots q)$, also aus den soeben angeschriebenen Differentialgleichungen (δ), hervorgehen. Sonach ist die Determinante $\Delta(s)$ gleich dem Product aus der Determinante D der Coefficienten von $u'_{f'-1}, \ldots, v'_{g'-1}, \ldots$ in den Gleichungen (δ) und aus der Adjuncte D' dieser Determinante $(p+q)^{\text{ten}}$ Grades. Berücksichtigt man den durch die Gleichungen (13a) und (13b) festgestellten Zusammenhang zwischen $z'_{e'-1} \ldots$ und $u'_{f'-1} \ldots$, $v'_{g'-1} \ldots$, so findet man aus (δ)

$$D = \begin{vmatrix} A_{\varrho_1,\varrho_1'} & \ldots & A_{\varrho_1,\varrho_p'} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{\varrho_p,\varrho_1'} & \ldots & A_{\varrho_p,\varrho_p'} \end{vmatrix} = R.$$

Da hiernach D von Null verschieden ist, so muss D' identisch in s verschwinden. Da die Colonne der Coefficienten von $u^{(\alpha)}, u_1^{(\alpha)}, \ldots u^{(\alpha)}_{f^{(\alpha)}-2}$; $v_1^{(\beta)}, \ldots v^{(\alpha)}_{g^{(\beta)}-2}$; $w^{(\beta)}$ jede nur ein einziges von Null verschiedenes Element, nämlich 1, enthält und zwar in der Zeile, welche aus der Differentialgleichung für bezw. $u_1^{(\alpha)}, u_2^{(\alpha)}, \ldots u^{(\alpha)}_{f^{(\alpha)}-1}$; $v_2^{(\beta)}, \ldots v^{(\beta)}_{g^{(\beta)}-1}$; $v^{(\beta)}$ hervorgeht, so treten in D' nur die Coefficienten von $v', \ldots v^{(q)}$; $w^{(q+1)}, \ldots w^{(r)}$ aus den Differentialgleichungen für $w', \ldots w^{(r)}$ auf. Die Identität $\Delta(s) = 0$ wird somit

$$\begin{vmatrix} B_{11} & \ldots B_{1q} & C_{1,q+1} & \ldots C_{1r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ B_{q1} & \ldots B_{qq} & C_{q,q+1} & \ldots C_{qr} \\ B_{q+1,1} & \ldots B_{q+1,q} & C_{q+1,q+1} - s & \ldots C_{q+1,r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ B_{r1} & \ldots B_{rq} & C_{r,q+1} & \ldots C_{rr} - s \end{vmatrix} = 0$$

und liefert die Gleichung

$$(18)\qquad \begin{vmatrix} B_{11} & \dots & B_{1q} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ B_{q1} & \dots & B_{qq} \end{vmatrix} = 0.$$

Der Rang der Determinante (18) sei $q - \lambda$ ($\lambda > 0$). Unter Einführung der Unbestimmten $t', \dots t^{(q)}$ fassen wir die den Werthen $\gamma = 1, \dots q$ entsprechenden Differentialgleichungen (17c) zusammen in

$$x^h \frac{d \sum_\alpha t^{(\alpha)} w^{(\alpha)}}{dx} = \dots + \sum_{\alpha\beta} B_{\alpha\beta} t^{(\alpha)} v^{(\beta)} + \dots \qquad (\alpha, \beta = 1, \dots q).$$

An Stelle von $t^{(\alpha)}$ und $v^{(\beta)}$ können wir vermittelst einer linearen Substitution neue Variable $\bar{t}^{(\alpha)}$ und $\bar{v}^{(\beta)}$ so einführen, dass

$$\sum_{\alpha\beta} B_{\alpha\beta} t^{(\alpha)} v^{(\beta)} = \bar{t}^{(\lambda+1)} \bar{v}^{(\lambda+1)} + \dots + \bar{t}^{(q)} \bar{v}^{(q)}$$

wird; dann werden die $w^{(\alpha)}$ in neue Variable $\bar{w}^{(\alpha)}$ in solcher Weise transformirt, dass

$$\sum_\alpha t^{(\alpha)} w^{(\alpha)} = \sum_\alpha \bar{t}^{(\alpha)} \bar{w}^{(\alpha)}$$

wird. Dadurch geht die obige Gleichung über in

$$x^h \frac{d \sum_\alpha \bar{t}^{(\alpha)} \bar{w}^{(\alpha)}}{dx} = \dots + \bar{t}^{(\lambda+1)} \bar{w}^{(\lambda+1)} + \dots + \bar{t}^{(q)} \bar{w}^{(q)} + \dots;$$

sie zerfällt, wenn wir die Striche weglassen und auch den neuen Coefficienten wieder die ursprünglichen Zeichen geben, in die Differentialgleichungen

$$(19\text{a})\quad \begin{aligned} x^h \frac{dw'}{dx} &= A_{11} \quad u' + \cdots \qquad\qquad + C_{11} \quad w' + \cdots + C_{1r} \quad w^{(r)} + \cdots, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x^h \frac{dw^{(\lambda)}}{dx} &= A_{\lambda 1} \quad u' + \cdots \qquad\qquad + C_{\lambda 1} \quad w' + \cdots + C_{\lambda r} \quad w^{(r)} + \cdots, \end{aligned}$$

$$(19\text{b})\quad \begin{aligned} x^h \frac{dw^{(\lambda+1)}}{dx} &= A_{\lambda+1,1} u' + \cdots + v^{(\lambda+1)} + C_{\lambda+1,1} w' + \cdots + C_{\lambda+1,r} w^{(r)} + \cdots, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x^h \frac{dw^{(q)}}{dx} &= A_{q1} \quad u' + \cdots + v^{(q)} \quad + C_{q1} \quad w' + \cdots + C_{qr} \quad w^{(r)} + \cdots. \end{aligned}$$

Setzt man $v^{(\lambda+1)}, \dots v^{(q)}$ an Stelle von

$$\begin{array}{l} v^{(\lambda+1)} + C_{\lambda+1,1}\, w' + \cdots + C_{\lambda+1,r}\, w^{(r)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v^{(q)} + C_{q1}\, w' + \cdots + C_{qr}\, w^{(r)}, \end{array}$$

so gehen die Gleichungen (19b) über in

$$\text{(19b')}\quad \begin{array}{l} x^h \dfrac{dw^{(\lambda+1)}}{dx} = A_{\lambda+1,1} u' + \cdots + v^{(\lambda+1)} + \cdots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x^h \dfrac{dw^{(q)}}{dx} = A_{q1}\, u' + \cdots + v^{(q)} + \cdots. \end{array}$$

Die Form der übrigen Gleichungen (17) wird durch die vorgenommenen Transformationen nicht geändert.

Hat das in den Differentialgleichungen (19a) vorkommende Coefficientensystem

$$\text{(20)}\quad \begin{array}{l} C_{1,q+1} \ldots C_{1r}, \\ \cdots\cdots \\ C_{\lambda,q+1} \ldots C_{\lambda r} \end{array}$$

einen kleineren Rang als λ, so sind, wie wir später sehen werden, keine weiteren linearen Transformationen erforderlich. Ist der Rang des Systems (20) gleich λ, so setzen wir $w^{(q+1)}, \ldots w^{(q+\lambda)}$ an Stelle von

$$\begin{array}{l} C_{1,q+1}\, w^{(q+1)} + \cdots + C_{1r}\, w^{(r)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_{\lambda,q+1}\, w^{(q+1)} + \cdots + C_{\lambda r}\, w^{(r)}, \end{array}$$

so dass die Differentialgleichungen (19a) übergehen in

$$\text{(19a')}\quad \begin{array}{l} x^h \dfrac{dw'}{dx} = A_{11} u' + \cdots + C_{11} w' + \cdots + C_{1q}\, w^{(q)} + w^{(q+1)} + \cdots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x^h \dfrac{dw^{(\lambda)}}{dx} = A_{\lambda 1} u' + \cdots + C_{\lambda 1} w' + \cdots + C_{\lambda q}\, w^{(q)} + w^{(q+\lambda)} + \cdots. \end{array}$$

Wir haben somit die q ersten Differentialgleichungen (17d) durch lineare Transformation der Grössen $v^{(\beta)}$ und $w^{(\gamma)}$ auf die Form (19a'), (19b') gebracht.

Wenn man den Gleichungen (19a') entsprechend $B_{\lambda+1,\lambda+1} = 1, \ldots B_{qq} = 1, \ldots$, ferner $C_{1,q+1} = 1, \ldots C_{\lambda,q+\lambda} = 1$, die übrigen Grössen $B_{1\beta}, \ldots B_{q\beta}$; $C_{1\gamma} \ldots C_{q\gamma}$ gleich Null setzt*), so geht die Identität, aus welcher die Gleichung (18) hervorgegangen ist, über in

*) Um diese Vereinfachung zu erreichen, war allerdings eine lineare Transformation der $v^{(\beta)}$ nöthig, wodurch sich die Form der zweiten Gleichung (δ) geändert hat; die Determinante D bleibt aber von Null verschieden.

$$\begin{vmatrix} B_{q+1,1} & \dots & B_{q+1,\lambda} & C_{q+1,q+\lambda+1} & \dots & C_{q+1,r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ B_{q+\lambda,1} & \dots & B_{q+\lambda,\lambda} & C_{q+\lambda,q+\lambda+1} & \dots & C_{q+\lambda,r} \\ B_{q+\lambda+1,1} & \dots & B_{q+\lambda+1,\lambda} & C_{q+\lambda+1,q+\lambda+1}-s & \dots & C_{q+\lambda+1,r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ B_{r1} & \dots & B_{r\lambda} & C_{r,q+\lambda+1} & \dots & C_{rr}-s \end{vmatrix} = 0,$$

und hieraus folgt

$$\begin{vmatrix} B_{q+1,1} & \dots & B_{q+1,\lambda} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ B_{q+\lambda,1} & \dots & B_{q+\lambda,\lambda} \end{vmatrix} = 0. \tag{21}$$

Ist der Rang der Determinante (21) gleich $\lambda - \mu$ $(\mu > 0)$, so lassen sich ähnlich wie oben die Grössen $w^{(q+1)}, \dots w^{(q+\lambda)}$ und $v', \dots v^{(\lambda)}$ so transformiren, dass die Elemente der Determinante mit Ausnahme von $B_{q+\mu+1,\mu+1} = 1, \dots B_{q+\lambda,\lambda} = 1$ verschwinden. Dadurch werden die zu $\gamma = q+1, \dots q+\lambda$ gehörigen Differentialgleichungen (17d)

$$\begin{aligned}
x^h \frac{dw^{(q+1)}}{dx} &= A_{q+1,1}\, u' + \cdots + B_{q+1,\lambda+1}\, v^{(\lambda+1)} + \cdots + C_{q+1,1}\, w' + \cdots + \cdots, \\
&\cdots\cdots\cdots \\
x^h \frac{dw^{(q+\mu)}}{dx} &= A_{q+\mu,1}\, u' + \cdots + B_{q+\mu,\lambda+1}\, v^{(\lambda+1)} + \cdots + C_{q+\mu,1}\, w' + \cdots + \cdots, \\
x^h \frac{dw^{(q+\mu+1)}}{dx} &= A_{q+\mu+1,1}\, u' + \cdots + v^{(\mu+1)} + B_{q+\mu+1,\lambda+1}\, v^{(\lambda+1)} + \cdots + C_{q+\mu+1,1}\, w' + \cdots + \cdots, \\
&\cdots\cdots\cdots \\
x^h \frac{dw^{(q+\lambda)}}{dx} &= A_{q+\lambda,1}\, u' + \cdots + v^{(\lambda)} + B_{q+\lambda,\lambda+1}\, v^{(\lambda+1)} + \cdots + C_{q+\lambda,1}\, w' + \cdots + \cdots;
\end{aligned}$$

sie gehen über in

$$\text{(19c)}\quad \begin{aligned}
x^h \frac{dw^{(q+1)}}{dx} &= A_{q+1,1}\, u' + \cdots + C_{q+1,1}\, w' + \cdots + C_{q+1,r}\, w^{(r)} + \cdots, \\
&\cdots\cdots\cdots \\
x^h \frac{dw^{(q+\mu)}}{dx} &= A_{q+\mu,1}\, u' + \cdots + C_{q+\mu,1}\, w' + \cdots + C_{q+\mu,r}\, w^{(r)} + \cdots,
\end{aligned}$$

$$\text{(19d)}\quad \begin{aligned}
x^h \frac{dw^{(q+\mu+1)}}{dx} &= A_{q+\mu+1,1}\, u' + \cdots + v^{(\mu+1)} + \cdots, \\
&\cdots\cdots\cdots \\
x^h \frac{dw^{(q+\lambda)}}{dx} &= A_{q+\lambda,1}\, u' + \cdots + v^{(\lambda)} + \cdots,
\end{aligned}$$

wenn man $v^{(\mu+1)}, \dots$ an Stelle von $v^{(\mu+1)} + C_{q+\mu+1,1}\, w' + \cdots, \cdots,$ ferner $w^{(q+1)}, \dots$ an Stelle von $w^{(q+1)} - B_{q+1,\lambda+1}\, w^{(\lambda+1)} - \cdots, \cdots$ setzt.

Ist der Rang des Coefficientensystems

$$(22)\qquad \begin{matrix} C_{q+1,\,q+\lambda+1} & \dots & C_{q+1,\,r}, \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ C_{q+\mu,\,q+\lambda+1} & \dots & C_{q+\mu,\,r} \end{matrix}$$

gleich μ, so setzt man $w^{(q+\lambda+1)}, \dots w^{(q+\lambda+\mu)}$ an Stelle von

$$\begin{matrix} C_{q+\mu,\,q+\lambda+1}\, w^{(q+\lambda+1)} + \cdots, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ C_{q+1,\,q+\lambda+1}\, w^{(q+\lambda+1)} + \cdots \end{matrix}$$

und erhält die Differentialgleichungen

$$(19c')\qquad \begin{aligned} x^h \frac{dw^{(q+1)}}{dx} &= A_{q+1,1} \quad u' + \cdots + C_{q+1,1}\, w' + \cdots + C_{q+1,\,q+\lambda}\, w^{(q+\lambda)} + w^{(q+\lambda+1)} + \cdots, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x^h \frac{dw^{(q+\mu)}}{dx} &= A_{q+\mu,1} \quad u' + \cdots + C_{q+\mu,1}\, w' + \cdots + C_{q+\mu,\,q+\lambda}\, w^{(q+\lambda)} + w^{(q+\lambda+\mu)} + \cdots, \end{aligned}$$

$$(19d')\qquad \begin{aligned} x^h \frac{dw^{(q+\mu+1)}}{dx} &= A_{q+\mu+1,1}\, u' + \cdots + v^{(\mu+1)} + \cdots, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x^h \frac{dw^{(q+\lambda)}}{dx} &= A_{q+\lambda,1} \quad u' + \cdots + v^{(\lambda)} \quad + \cdots . \end{aligned}$$

Das beschriebene Verfahren wird so lange fortgesetzt, bis man unter Anwendung der Bezeichnung

$$\begin{aligned} s &= q + \lambda + \mu + \cdots + \varrho, \\ t &= q + \lambda + \mu + \cdots + \varrho + \sigma \end{aligned}$$

zu einer Gruppe von Differentialgleichungen von der Form

$$(19m)\qquad \begin{aligned} x^h \frac{dw^{(s+1)}}{dx} &= A_{s+1,1} \quad u' + \cdots + C_{s+1,1}\, w' + \cdots + C_{s+1,r}\, w^{(r)} + \cdots, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x^h \frac{dw^{(s+\varepsilon)}}{dx} &= A_{s+\varepsilon,1} \quad u' + \cdots + C_{s+\varepsilon,1}\, w' + \cdots + C_{s+\varepsilon,r}\, w^{(r)} + \cdots, \end{aligned}$$

$$(19o')\qquad \begin{aligned} x^h \frac{dw^{(s+\varepsilon+1)}}{dx} &= A_{s+\varepsilon+1,1}\, u' + \cdots + v^{(\varepsilon+1)} + \cdots, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x^h \frac{w^{(t)}}{dx} &= A_{t1} \quad u' + \cdots + v^{(\sigma)} \quad + \cdots \end{aligned}$$

gelangt, wo der Rang ε des Coefficientensystems

$$(23)\qquad \begin{matrix} C_{s+1,\,t+1} & \dots & C_{s+1,\,r}, \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ C_{s+\varepsilon,\,t+1} & \dots & C_{s+\varepsilon,\,r} \end{matrix}$$

kleiner als τ ist. Dies tritt spätestens dann ein, wenn $t = r$ geworden ist. Nun können wir die Variablen $w^{(s+1)}, \ldots, w^{(s+\tau)}$ und $w^{(t+1)}, \ldots, w^{(r)}$ so linear transformiren, dass die Gleichungen (19m) übergehen in

$$
\begin{aligned}
&x^h \frac{dw^{(s+1)}}{dx} = A_{s+1,1} \quad u' + \cdots + C_{s+1,1} \quad w' + \cdots + C_{s+1,t} \quad w^{(t)} \quad + w^{(t+1)} + \cdots, \\
(19\mathrm{m}')\quad &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&x^h \frac{dw^{(s+\sigma)}}{dx} = A_{s+\sigma,1} \quad u' + \cdots + C_{s+\sigma,1} \quad w' + \cdots + C_{s+\sigma,t} \quad w^{(t)} \quad + w^{(t+\sigma)} + \cdots, \\
&x^h \frac{dw^{(s+\sigma+1)}}{dx} = A_{s+\sigma+1,1} u' + \cdots + C_{s+\sigma+1,1} w' + \cdots + C_{s+\sigma+1,t} w^{(t)} \qquad + \cdots, \\
(19\mathrm{n}')\quad &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&x^h \frac{dw^{(s+\tau)}}{dx} = A_{s+\tau,1} \quad u' + \cdots + C_{s+\tau,1} \quad w' + \cdots + C_{s+\tau,t} \quad w^{(t)} \qquad + \cdots.
\end{aligned}
$$

Das Differentialgleichungensystem $\mathfrak{A}$ ist somit durch lineare Transformationen übergeführt in das System $\mathfrak{A}'$, welches besteht aus den Differentialgleichungen (17a), (17b), (17c), den zu $\gamma = t+1, \ldots r$ gehörigen Gleichungen (17d) und den Gleichungen (19a'), ... (19o'). Durch die im gegenwärtigen Paragraphen ausgeführten linearen Transformationen ist die Normalform des Systems $\mathfrak{A}$ nicht verloren gegangen, das System $\mathfrak{A}'$ lässt aber gewisse Grössen $w', \ldots w^{(t)}$, lineare Verbindungen von $Y', \ldots Y^{(k)}$, hervortreten.

Wir führen nun die Substitution

$$(24) \qquad w' = x\overline{w}', \ldots w^{(t)} = x\overline{w}^{(t)}$$

aus und setzen, um das entstehende System sogleich auf die Normalform zu bringen, für

$$
\begin{aligned}
&\overline{w}' - A_{11} u_1' - \cdots - A_{1p} u_1^{(p)}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\overline{w}^{(t)} - A_{t1} u_1' - \cdots - A_{tp} u_1^{(p)}
\end{aligned}
$$

wieder $w', \ldots w^{(t)}$. Dadurch geht das System $\mathfrak{A}'$ über in das System $\mathfrak{B}$

$$
\begin{aligned}
&x^{h+1} \frac{du^{(\alpha)}}{dx} = \qquad + \cdots, \\
(25\mathrm{a})\quad &x^{h+1} \frac{du_1^{(\alpha)}}{dx} = u^{(\alpha)} \quad + \cdots, \qquad (\alpha = 1, \ldots p) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&x^{h+1} \frac{du^{(\alpha)}_{f^{(\alpha)}-1}}{dx} = u^{(\alpha)}_{f^{(\alpha)}-2} + \cdots;
\end{aligned}
$$

$$x^{h+1}\frac{dv_1^{(\beta)}}{dx} = \qquad + \cdots,$$

(25 b)
$$x^{h+1}\frac{dv_2^{(\beta)}}{dx} = v_1^{(\beta)} + \cdots, \qquad (\beta = 1, \ldots q)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x^{h+1}\frac{dv_{g^{(\beta)}-2}^{(\beta)}}{dx} = v_{g^{(\beta)}-2}^{(\beta)} + \cdots;$$

$$x^{h+1}\frac{dv'}{dx} = \qquad + \cdots,$$

(25 c)
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x^{h+1}\frac{dv^{(\tau)}}{dx} = \qquad + \cdots;$$

$$x^{h+1}\frac{dv^{(\tau+1)}}{dx} = \qquad + \cdots,$$

(25 d)
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x^{h+1}\frac{dv^{(q)}}{dx} = \qquad + \cdots;$$

$$x^{h+1}\frac{dw'}{dx} = \qquad + \cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x^{h+1}\frac{dw^{(\lambda)}}{dx} = \qquad + \cdots,$$

$$x^{h+1}\frac{dw^{(q+1)}}{dx} = \qquad + \cdots,$$

(25 e)
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x^{h+1}\frac{dw^{(q+\mu)}}{dx} = \qquad + \cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x^{h+1}\frac{dw^{(s+e+1)}}{dx} = \qquad + \cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x^{h+1}\frac{dw^{(s+\varepsilon)}}{dx} = \qquad + \cdots;$$

$$x^{h+1}\frac{dw^{(\lambda+1)}}{dx} = v^{(\lambda+1)} + \cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

(25 f)
$$x^{h+1}\frac{dw^{(q)}}{dx} = v^{(q)} + \cdots,$$

$$x^{h+1}\frac{dw^{(q+\mu+1)}}{dx} = v^{(\mu+1)} + \cdots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$
(25\text{f}) \qquad \begin{aligned}
x^{h+1} \frac{dw^{(q+\lambda)}}{dx} &= v^{(\lambda)} + \cdots, \\
&\cdots\cdots\cdots \\
x^{h+1} \frac{dw^{(s+\tau+1)}}{dx} &= v^{(\tau+1)} + \cdots, \\
&\cdots\cdots\cdots \\
x^{h+1} \frac{dw^{(t)}}{dx} &= v^{(\sigma)} + \cdots;
\end{aligned}
$$

$$
(25\text{g}) \qquad \begin{aligned}
x^{h+1} \frac{dw^{(s+1)}}{dx} &= w^{(t+1)} + \cdots, \\
&\cdots\cdots\cdots \\
x^{h+1} \frac{dw^{(s+\varepsilon)}}{dx} &= w^{(t+\varepsilon)} + \cdots;
\end{aligned}
$$

$$
(25\text{h}) \qquad \begin{aligned}
x^{h+1} \frac{dw^{(t+1)}}{dx} &= \qquad + \cdots, \\
&\cdots\cdots\cdots \\
x^{h+1} \frac{dw^{(t+\varepsilon)}}{dx} &= \qquad + \cdots;
\end{aligned}
$$

$$
(25\text{i}) \qquad \begin{aligned}
x^{h+1} \frac{dw^{(t+\varepsilon+1)}}{dx} &= \qquad + \cdots, \\
&\cdots\cdots\cdots \\
x^{h+1} \frac{dw^{(r)}}{dx} &= \qquad + \cdots
\end{aligned}
$$

Da das System $\mathfrak{B}$ die Normalform besitzt, so ist seine Elementartheilerzahl unmittelbar zu erkennen. Zu (25a) gehören die p Elementartheiler $s^{f^{(\alpha)}}$ $(\alpha = 1, \ldots p)$, zu (25b) die q Elementartheiler $s^{g^{(\beta)}} - 1$ $(\beta = 1, \ldots q)$, zu (25d) in Verbindung mit (25f) die $q - \tau$ Elementartheiler s^2, zu (25h) in Verbindung mit (25g) die ε Elementartheiler s^2 und schliesslich zu (25d), (25e) und (25i) die $r + 2\tau - q - 2\varepsilon$ einfachen Elementartheiler s. Das System $\mathfrak{B}$ hat demnach $p + q + r + \tau - \varepsilon$ Elementartheiler, während die Elementartheilerzahl des ursprünglichen Systems $p + q + r$ betrug. Die Elementartheilerzahl hat sich vergrössert, da $\tau > \varepsilon$ ist.

Die Elementartheilerzahl des Systems (2) *wird stets vergrössert, wenn man dasselbe durch lineare Transformation auf die Normalform* (5) *bringt, auf diese die Substitution* (10) *und nach Ausführung gewisser linearer Transformationen die Transformation* (24) *anwendet.*

Man könnte die angegebenen Transformationen in anderer Reihenfolge ausführen. Die nach Anwendung der Substitution (10) und vor Anwendung von (24) ausgeführten linearen Transformationen haben nur den Zweck, die Grössen $w', \ldots w^{(t)}$ zu ermitteln, auf welche die Substitution (24) anzuwenden ist. Es sind, wenn wir die frühere Bezeichnung benutzen, lediglich lineare Transformationen der Grössen $z_1^{(\lambda)}, \dots z_{e^{(\lambda)}-1}^{(\lambda)}$ ($\lambda = 1, \dots i$) unter sich und lineare Transformationen der Grössen $Y'_{\iota}, \dots Y_{e^{(\iota)}}^{(\iota)}$; $Y', \dots Y^{(k)}$ unter sich. Man kann daher die letzteren Transformationen schon vor der Substitution (10) anwenden und ebenfalls vorher die Grössen $Y_1^{(\lambda)}, \dots Y_{e^{(\lambda)}-1}^{(\lambda)}$ ebenso transformiren, wie wir nachher die Grössen $z_1^{(\lambda)}, \dots z_{e^{(\lambda)}-1}^{(\lambda)}$ transformirt haben; es sind dies alles Transformationen, durch welche die Normalform (5) nicht verloren geht. Nach Ausführung derselben können die Substitutionen (10) und (24) gleichzeitig, oder was dasselbe ist, es kann eine Substitution von der Form (6) angewandt werden, um die Elementartheilerzahl zu vergrössern. Wir können somit unser Resultat in der am Schluss von § 2 angegebenen Form aussprechen, sowie auch alles in den Satz zusammenziehen:

Jedes reguläre Differentialgleichungensystem (2) *kann durch eine Reihe von Substitutionen, theils von der Form*

$$\begin{aligned} y_1 &= h_{11} z_1 + \cdots + h_{1m} z_m, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m &= h_{m1} z_1 + \cdots + h_{mm} z_m, \end{aligned}$$

theils von der Form

$$y_1 = x z_1, \dots y_\mu = x z_\mu, \quad y_{\mu+1} = z_{\mu+1}, \dots y_m = z_m$$

auf ein kanonisches System zurückgeführt werden.

Freiburg i. B., 23. November 1891.

Abbildung der Mannigfaltigkeit aller Kegelschnitte einer Ebene auf einen Punktraum.

Von

E. Study in Marburg.

In der Abhandlung „Ueber die Geometrie der Kegelschnitte" (Math. Ann. Bd. 27, S. 58 u. ff.) hat der Verfasser die von den Kegelschnitten einer Ebene gebildete algebraische Mannigfaltigkeit mit den Hülfsmitteln der Invariantentheorie näher untersucht. Der Kegelschnitt wurde hierbei gleichzeitig als Ort von Punkten und als Ort von Linien aufgefasst, entsprechend dem Principe der Dualität, das Punkte und gerade Linien als gleichberechtigt erscheinen lässt. Die Mannigfaltigkeit der so definirten Kegelschnitte konnte zwar nicht auf die Punkte, wohl aber auf gewisse durch eine quadratische Transformation verbundene Elementenpaare eines linearen fünffach ausgedehnten Raumes abgebildet werden; und in dieser Abbildung bestand das wichtigste Hülfsmittel der durchgeführten Untersuchung.

Hier soll in aller Kürze eine andere Abbildung derselben Mannigfaltigkeit besprochen werden, eine Abbildung auf die Punkte eines höheren Raumes. Diese vermeidet gewisse begriffliche Schwierigkeiten, die der erstgenannten Abbildung anhaften, und gewährt so einen besseren Einblick in das Wesen der Sache. Dies wird an einem Beispiel näher ausgeführt, an dem sogenannten Charakteristikenproblem.

Man kommt zu der fraglichen Abbildung durch Betrachtung der Connexe (2, 2).*) Ein Connex $(LX)^2(U\Lambda)^2$, dessen lineare Covariante

$$(L\Lambda)\,(LX)\,(U\Lambda) - \frac{1}{3}\,(L\Lambda)^2 . (UX)$$

identisch verschwindet, hängt von 28 Constanten linear und homogen ab.

*) Wegen der zu verwendenden Bezeichnungen, und wegen mehrerer Einzelheiten, die hier nur angedeutet sind, vergleiche man des Verfassers „Methoden zur Theorie der ternären Formen", insbes. II, § 3, 11, 12.

Man kann also die Mannigfaltigkeit dieser besonderen Connexe eindeutig-umkehrbar auf die Punkte eines Gebietes 28[ter] Stufe, eines Raumes R_{27} von 27 Dimensionen abbilden. Hierdurch wird der Gruppe aller ∞^8 collinearen und dualistischen Transformationen der Ebene eine Gruppe des Raumes R_{27} zugeordnet, die aus zwei getrennten Schaaren von collinearen Transformationen besteht. Bei dieser Gruppe bleiben zwei verschiedene lineare Punktmannigfaltigkeiten in Ruhe, entsprechend den beiden noch übrigen Entwickelungsgliedern der Gordan'schen Reihe

$$(LX)^2(U\Lambda)^2 = \left[(LX)^2(U\Lambda)^2 - \frac{1}{6}(L\Lambda)^2.(UX)^2\right] + \frac{1}{6}(L\Lambda)^2.(UX)^2,$$

die erste ein linearer Raum M_{26} von 26 Dimensionen, die zweite ein einzelner Punkt.

Ein sehr specieller Connex der von uns betrachteten Art entsteht nun, wenn man $(LX)^2 = 0$ die Punktgleichung und $(U\Lambda)^2 = 0$ die Liniengleichung eines und desselben Kegelschnittes bedeuten lässt. Da ein Kegelschnitt durch seine Punktgleichung und seine Liniengleichung zusammen in allen Fällen völlig bestimmt ist, so liefert uns die Abbildung der Connexe (2, 2) zugleich eine Abbildung der Mannigfaltigkeit aller Kegelschnitte in der Ebene auf die Punkte einer gewissen fünffach ausgedehnten algebraischen Mannigfaltigkeit M_5 des Raumes R_{27}, wobei jedem Kegelschnitt ein Punkt von M_5 entspricht, und umgekehrt.*)

Die Mannigfaltigkeit M_5 hat die Ordnung 102. *Durch sie können* 197 *linear-unabhängige Mannigfaltigkeiten* 2. *Ordnung hindurchgelegt werden, und sie ist als gemeinsamer Durchschnitt aller dieser Mannigfaltigkeiten vollständig definirt.*

Unter den Kegelschnitten der Ebene sind dreierlei ausgeartete Curven enthalten: ∞^4 Linienpaare, ∞^4 Punktepaare, und ∞^3 Kegelschnitte, die Beides zugleich sind, nämlich aus einem doppelt zählenden Punkt und aus einer mit diesem vereinigten doppelt zählenden Geraden bestehen. Da die Figur eines Punktes und einer Geraden in vereinigter Lage von Herrn S. Lie als „Linienelement" bezeichnet worden ist, so wollen wir die letzte Kegelschnittausartung *Linienelementkegelschnitt* nennen.

Den besprochenen Ausartungen sind nun drei auf M_5 verlaufende algebraische Mannigfaltigkeiten M_4, M_4' und M_3 zugeordnet, von vier, vier und drei Dimensionen.

*) Es ist nicht schwer, die Abbildung sammt ihrer Umkehrung durch entwickelte Formeln auszudrücken.

Die Hülfsmittel zum Beweise der nachfolgenden Sätze, soweit sie nicht unmittelbare Anwendungen der Charakteristikentheorie sind, findet man in der nachfolgenden Abhandlung „Ueber Systeme von Kegelschnitten". (S. S. 563 u. ff.)

Jede der Mannigfaltigkeiten M_4 und M_4' hat die Ordnung 51. *Sie bilden zusammen den vollständigen Durchschnitt von M_5 mit der invarianten linearen Mannigfaltigkeit M_{26}, und sie durchdringen sich in der Mannigfaltigkeit M_3. M_4, M_4' und M_3 können ebenfalls definirt werden als Durchschnitt von Mannigfaltigkeiten* 2. *O., und zwar M_4 und M_4' als Schnitt von je* 225, *und M_3 als Schnitt von* 253 *linear-unabhängigen Mannigfaltigkeiten* 2. *O. des Raumes M_{26}.*

Die Geometrie auf der Mannigfaltigkeit M_5 nun ist ein treues Abbild des besonderen Kreises geometrischer Forschung, dessen Inhalt der Verfasser als *Geometrie der Kegelschnitte* bezeichnet hat. Die Darstellung des Kegelschnittes in der Ebene durch den Punkt von M_5 kann verglichen werden mit der bekannten Darstellung des Punktepaares zweier binärer Gebiete durch den Punkt auf einer Fläche 2. Grades, mit deren Theorie die Theorie der Mannigfaltigkeit M_5 überhaupt eine gewisse Aehnlichkeit hat. Wie die F^2 des gewöhnlichen Raumes zwei Reihen von geraden Linien trägt, von denen je zwei nicht derselben Reihe angehörige durch eine Ebene verbunden werden können, so trägt M_5 zwei Reihen von je ∞^5 vierfach ausgedehnten Räumen der Ordnung 51, von denen je zwei nicht derselben Reihe angehörige in einem ebenen Raum von 26 Dimensionen liegen. Von den besprochenen ∞^8 collinearen Transformationen von M_5 lässt die eine Schaar, die eine Gruppe bildet, beide Mannigfaltigkeitsreihen ungeändert, die andere vertauscht sie; u. s. w. In anderen Stücken versagt die Analogie. Insbesondere haben die beiden ausgezeichneten Mannigfaltigkeiten M_4 und M_4', die nicht zu jenen beiden Reihen gehören, nichts Aehnliches in der Geometrie einer F^2.

Stellt man zwei algebraische Mannigfaltigkeiten nur dann in eine Classe, wenn sie ohne irgendwelche Ausnahmepunkte eindeutig-umkehrbar auf einander bezogen werden können, so gehören die Ebene und die Fläche 2. Grades verschiedenen Classen an; und ebenso gehört unser Kegelschnittraum M_5 in eine andere Classe als der lineare Raum von fünf Dimensionen. Lässt man aber Ausnahmepunkte zu, so können beide Mannigfaltigkeiten auf einander abgebildet werden. Genauer wird das Verhältniss durch den folgenden Satz bezeichnet:

Die Mannigfaltigkeit M_5 kann durch eine im Allgemeinen eindeutig-umkehrbare Abbildung auf einen linearen Raum R_5 von fünf Dimensionen so bezogen werden, dass die achtgliedrige projective Gruppe von M_5 wieder in eine projective Gruppe dieses Raumes übergeht; und zwar gibt es zwei verschiedene Abbildungen dieser Art.

Im einen Fall entsprechen den Punkten von M_4 in R_5 die Punkte einer Mannigfaltigkeit 3. *Ordnung, mit einer aus Doppelpunkten bestehenden singulären Fläche F_2^4* 4. *O., die Mannigfaltigkeit M_4' aber* *zieht sich in eben diese Fläche F_2^4 zusammen; im anderen Fall haben die Mannigfaltigkeiten M_4 und M_4' ihre Rolle gewechselt.*

Eben wegen des Auftretens von Ausnahmepunkten findet die Geometrie der Kegelschnitte bei Benutzung des Raumes M_5 oder einer in dem angegebenen Sinne zu derselben Classe gehörigen Mannigfaltigkeit einen weit vollkommeneren Ausdruck als bei der Darstellung durch einen linearen Raum, bei der man, um Eindeutigkeit zu erreichen, zu Elementenpaaren seine Zuflucht nehmen muss.

Es hat Interesse, näher zu untersuchen, als was für Gebilde sich die einfachsten Systeme von Kegelschnitten bei der Abbildung auf die Mannigfaltigkeit M_5 darstellen, insbesondere die Systeme, die zur Definition der Charakteristiken dienen. Wir wollen aber hierbei nicht verweilen, sondern wollen uns darauf beschränken, das sogenannte Charakteristikenproblem selbst von dem hier gewonnenen Standpunkt aus einer Besprechung zu unterziehen. Die neue Anschauung von der Geometrie der Kegelschnitte gestattet nämlich, das Eigenthümliche der vom Verfasser vertretenen Auffassung jenes Problems klarer hervortreten zu lassen, als es früher, bei Gebrauch einer weniger einfachen Vorstellung und Ausdrucksweise möglich war.

Es sei vorgelegt ein einfach ausgedehntes Kegelschnittsystem mit den Charakteristiken q und q', und ein vierfach ausgedehntes mit den Charakteristiken λ und λ'. Dem ersten entspricht in M_5 eine Curve $\mathfrak{C}$, die M_4 in $\delta = 2q - q'$ und M_4' in $\delta' = 2q' - q$ Punkten trifft, dem zweiten eine vierfach ausgedehnte Punktmannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_4$, die von den auf M_4, bez. M_4' verlaufenden geraden Linien in λ bez. λ' Punkten getroffen wird. Die Frage nun, die der vom Verfasser dargelegten Auffassung des Charakteristikenproblems entspricht, ist einfach diese:

In wievielen Punkten schneiden sich die Curve $\mathfrak{C}$ und die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_4$?

Die Antwort ist gegeben durch die Chasles'sche Formel $\lambda q' + \lambda' q$, wobei man natürlich jeden einzelnen Schnittpunkt mit der gehörigen Multiplicität in Anschlag zu bringen hat, gerade wie bei der Bézout'schen Aufgabe, deren genaues Analogon unser Problem vorstellt. (Vgl. den Schluss dieser Abhandlung, S. 556, 557).

Die von Halphen behandelte Aufgabe muss, wenn man seine eigene Ausdrucksweise bei der Uebertragung so weit als möglich beibehalten will, ebenso ausgesprochen werden, wie die unsere. Der Sinn ist aber ein anderer. Halphen dachte sich das System $\mathfrak{M}_4$ fest gegeben, und dann der Gesammtheit der ∞^8 linearen Transformationen unterworfen, die den collinearen Transformationen der Ebene entsprechen, während er die Curve $\mathfrak{C}$ festhielt. „Schnittpunkte" von $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{M}_4$*) heissen nach ihm nur solche $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{M}_4$ gemeinsame Punkte, die bei den genannten Transformationen innerhalb $\mathfrak{C}$ ihre Lage ändern. *Die Bestimmung der Zahl dieser, wie ich sage, (bei den Halphen'schen Transformationen) beweglichen Schnittpunkte ist Halphen's Aufgabe.* Es ist leicht zu sehen, dass diese Zahl unter Umständen einen kleineren Werth hat, als der Chasles'sche Ausdruck. Denn wenn die Curve $\mathfrak{C}$ die Mannigfaltigkeit M_3 trifft, und wenn gleichzeitig $\mathfrak{M}_4$ durch M_3 hindurchläuft, so wird mindestens ein Schnittpunkt von $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{M}_4$ nicht beweglich sein.

Um meine eigene Stellung zu Halphens Theorie genau zu bezeichnen, ist es nothwendig, auf die analytische Formulirung des Problems näher einzugehen. Sei $\Sigma a_{ik} x_i x_k = 0$ die Gleichung eines Kegelschnittes in der Ebene, so wird ein Kegelschnittsystem mit den Charakteristiken λ, λ' dargestellt durch eine Gleichung vom Grade $\lambda + 2\lambda'$ in den Coefficienten a_{ik}. Diese Gleichung nun stellt die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_4$ nicht *rein* dar. Sie bedeutet vielmehr eine Mannigfaltigkeit, die aus $\mathfrak{M}_4$ und aus der λ' mal zählenden Mannigfaltigkeit M_4' besteht. Die Zahl der Schnittpunkte der Curve $\mathfrak{C}$ mit dieser zerfallenden Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_4 + \lambda' M_4'$ kann nun (nach de Jonquières) ohne Weiteres angegeben werden. Sie hat den Werth $q'(\lambda + 2\lambda')$. Hiervon sind abzuziehen zunächst $\lambda'(2q' - q)$ auf M_4' fallende Schnittpunkte. Es bleiben die $\lambda q' + \lambda' q$ Punkte der Chasles'schen Formel, alles Punkte, die der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_4$ selbst angehören. Von diesen sind dann nach Halphen noch abzuziehen die erwähnten nicht beweglichen Schnittpunkte.

Wie man sieht, hat man, um zu Halphens Ergebniss zu kommen, zwei Reductionen von sehr verschiedenem Charakter auszuführen, die nur darin übereinstimmen, dass die beseitigten Punkte beidemal ausgearteten Kegelschnitten entsprechen. Bei der ersten Reduction werden Punkte weggelassen, die der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_4$ gar nicht angehören, bei der zweiten solche, die $\mathfrak{M}_4$ zwar angehören, aber bei den Halphen'schen Transformationen nicht beweglich sind.

Es versteht sich, dass in den Formeln Halphen's, der die zweite, weitergehende und schwierigere Aufgabe gelöst hat, die Verschiedenheit der besprochenen beiden Reductionen auch irgendwie zum Ausdruck kommen muss. Man könnte daher auf den Gedanken kommen, dass die von mir befürwortete Ansicht der Chasles'schen Formel nothwendig bereits in den Schriften Halphens enthalten sei. Diese Meinung

*) Vgl. Journal de l'Ecole polytechnique 1878 (t. 45) p. 6 die Worte: ... la courbe ... vient passer à l'origine des coordonnées et, par suite, ne coupe pas en un même nombre de points les deux droites ci dessus ...

wird indessen sogleich widerlegt durch den Hinweis auf Halphen's Kritik des Chasles'schen Satzes, die bei einer solchen Voraussetzung überhaupt ganz unverständlich wäre.

Um uns Rechenschaft davon zu geben, wieso Halphen an dem von uns eingenommenen Standpunkte vorbeigehen konnte, müssen wir uns erinnern, dass der von uns zu Grunde gelegte Kegelschnittbegriff nicht der einzig mögliche ist. Man kann den „Kegelschnitt" auch einfach definiren durch eine einzige quadratische Gleichung zwischen Punktcoordinaten. Die Mannigfaltigkeit aller „Kegelschnitte" kann dann nicht mehr eindeutig-umkehrbar abgebildet werden auf unseren Raum M_5, sondern auf einen linearen Raum von fünf Dimensionen; und das vorhin hervorgehobene Zerfallen der durch eine einzige Gleichung dargestellten Kegelschnittsysteme in der Form $\mathfrak{M}_4 + \lambda' M_4'$ findet nicht statt.

Wiewohl nun Halphen in seiner Analyse den von uns zu Grunde gelegten Kegelschnittbegriff ebenfalls verwerthet hat, so ist er doch bei seiner Problemstellung von dem anderen, einfacheren und historisch älteren Kegelschnittbegriff ausgegangen. Dadurch aber ist für ihn die Nothwendigkeit weggefallen, die beiden besprochenen Reductionen von vorn herein zu trennen: Sein Problem lautet, in unsere Ausdrucksweise übersetzt, genau genommen nicht:

„In wievielen beweglichen Punkten schneiden sich $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{M}_4$?"
sondern:

„In wievielen beweglichen Punkten schneiden sich $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{M}_4 + \lambda' M_4'$?"

Halphen hat also die besprochenen beiden Reductionen ebenfalls getrennt, aber erst auf einer späteren Stufe der Entwickelung, und *in anderer Weise*, als es von uns geschehen ist. Er konnte dies thun, weil er sich nur für die zuletzt übrig bleibenden, bei gewissen Aenderungen von $\mathfrak{M}_4$ oder von $\mathfrak{M}_4 + \lambda' M_4'$ beweglichen Kegelschnitte interessirte, deren Bestimmung nach seiner Ansicht genau das Chasles'sche Problem war.

Die principielle Verschiedenheit jener Reductionen ist aber durchaus nicht gleichgültig, wenn es sich um eine historische Würdigung der Chasles'schen Leistung handelt.

Eben die erste Reduction führt zu der auf S. 554 formulirten Deutung des Chasles'schen Satzes, wonach dieser als ein *Seitenstück zum Bézout'schen Theorem* aufgefasst wird. Wenn aber eine solche Auslegung möglich ist, so war es gewiss nicht richtig, den Chasles'schen Satz — für gewisse Fälle — als *falsch* hinzustellen, wie es Halphen versucht hat. Dies ist der Punkt, in dem ich mich in einem entschiedenen Gegensatz befinde zu den Anschauungen Halphens und der Mathematiker, die ihm beigepflichtet haben.

Ich sehe überhaupt nur einen Weg, auf dem man versuchen könnte, sich der Logik unserer Folgerung zu entziehen. Man kann sagen, Chasles hat offenbar die *im Allgemeinen* nicht ausgearteten Kegelschnitte gemeint — oder die Kegelschnitte eines einfach ausgedehnten Systems, die einer Bedingung *eigentlich* genügen — oder er hat eine gewisse *Unabhängigkeit* zwischen den beiden einander gegenübergestellten Kegelschnittsystemen vorausgesetzt. Hiergegen habe ich Nichts einzuwenden. Aber was heisst das, „im Allgemeinen" und „eigentlich", worin besteht diese Unabhängigkeit? Chasles selbst hat es nicht erklärt, und für uns Spätere sind wohl noch verschiedene Auffassungen möglich.

Halphen hat zuerst eine bestimmte Erklärung gegeben, die darin besteht, dass er das vierfach ausgedehnte System von vier veränderlichen Hülfspunkten oder von acht Parametern abhängig macht. Man kann aber statt der acht Parameter auch eine kleinere Anzahl von veränderlichen Grössen setzen: dann entsteht ein anderes Problem, mit einer geringeren Zahl von Lösungen. Oder man kann (was das Einfachste ist) bei dem vierfach ausgedehnten System *alle* $N(\lambda, \lambda') - 1$ Constantenänderungen (vgl. S. 567 u. ff.) zulassen, bei denen es seine Charakteristiken λ und λ' behält — dann kommt man wieder auf die Chasles'sche Formel.

Also auch dann, wenn man den Kegelschnitt durch eine einzige Gleichung zwischen Punktcoordinaten definirt, und die Frage nach den beizubehaltenden Lösungen von ihrer Beweglichkeit abhängig macht, kommt man nicht ausschliesslich zu dem Halphen'schen Problem, und man ist *nicht* genöthigt, den Chasles'schen Satz als in gewissen Fällen unzutreffend zu bezeichnen.

Wir fassen nun das Gesagte noch kurz zusammen. Halphens Fragestellung und die meinige weichen beide von der Chasles'schen nothwendig ab, weil diese der hinreichenden Schärfe entbehrte. Halphen's Problem, insofern dieses zur Definition der „Unabhängigkeit" beider Systeme gewisser acht Parameter bedarf, von denen sich in der überlieferten Fragestellung keine Andeutung findet; das meinige, insofern es auf einem Kegelschnittbegriff beruht, der erst später ausgebildet worden ist.

Halphen's Problem geht weiter als das meinige, da die natürliche Reihenfolge beider Aufgaben diese ist:

1) In wievielen Punkten schneiden sich $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{M}_4$?

2) Welche unter diesen sind beweglich?

Aber sowohl das Interesse, das das Problem 1) als Analogon des Bézout'schen Problems in Anspruch nehmen darf, als auch die Forderung der historischen Gerechtigkeit nöthigt uns, die Aufgabe 1) wirklich als Durchgangspunkt zu nehmen, da diese der Chasles'schen Fragestellung am nächsten steht, und das Halphen'sche Problem von vornherein in zwei Schritte zu zerlegen, mit dem Bewusstsein von deren gänzlich verschiedener Bedeutung.

Halphen's Kritik des Chasles'schen Satzes ist hiernach nur soweit gerechtfertigt, als sie sich auf dessen mangelhafte Formulirung bezieht, und seine eigene Theorie lässt die von uns angegebene Ergänzung nicht als überflüssig erscheinen. Diese Ergänzung aber könnte, wie ich gerne hinzufüge, nachdem ihre Nothwendigkeit einmal erkannt ist, auch aus Halphen's eigener Analyse abgeleitet werden.

Entgegnung.

Von

E. Study in Marburg.

Die im 27. Bande der Math. Annalen aufgestellte und in der vorausgehenden Abhandlung in etwas anderer Weise, aber im Wesentlichen übereinstimmend aufs Neue dargelegte Ansicht von dem sogenannten Charakteristikenproblem der Kegelschnitte ist vor einiger Zeit von Herrn **Zeuthen** bekämpft worden (Math. Ann. Bd. 37, S. 461.) Wenn ich auch der ganzen Streitfrage nicht gerade die Bedeutung beimessen kann, die mein Gegner — nach der Lebhaftigkeit seines Angriffs zu urtheilen — ihr zuzuschreiben scheint, so veranlasst mich doch das Ansehen, dessen sich Herr Zeuthen in der wissenschaftlichen Welt erfreut, zu einer ausdrücklichen Erwiderung. Dass diese erst so spät erfolgt, bitte ich mit anderer Arbeit zu entschuldigen.

Man wird wohl erkennen, dass meine Polemik gegen Halphen sich nicht auf dessen positive Leistung bezieht (der ich alle Anerkennung zolle), sondern nur auf seine Kritik des Chasles'schen Theorems. Rein sachlich ist also die Meinungsverschiedenheit geringfügig genug.

Herr Zeuthen indessen verlangt durchaus, dass man Halphen in allen Stücken Recht gibt. Hat dieser doch längst schon überhaupt Alles gesagt, was zu diesem Problem nur irgend gesagt werden kann. Er erklärt meine Auffassung des Chasles'schen Satzes für trivial: Sie habe sich allen Denen darbieten müssen, die sich mit dem Charakteristikenproblem beschäftigt haben (S. 462 Anm.). Indessen hat er weder aus den Schriften Halphen's, noch aus seinen eigenen Arbeiten, noch aus der sonstigen ausgedehnten Litteratur des Charakteristikenproblems eine Stelle angeführt, in der diese Auffassung vorkommt; und er würde dies gewiss nicht unterlassen haben, wenn ihm eine solche bekannt gewesen wäre.

Im Grunde kommt wohl wenig darauf an, ob man die besprochene Ansicht nachträglich trivial findet oder nicht. Mehr ist daran gelegen, ob sie richtig ist; und in der That ist dieses der eigentliche Differenzpunkt. Herr Zeuthen beruft sich auf das Zeugniss der Mathematiker, die nach dem Erscheinen von Halphens Arbeiten deren Inhalt zugestimmt hatten. Indessen glaubt er wohl selbst nicht, dass man diese Thatsache im Ernste als einen Grund gegen mich ins Feld führen kann. Er sucht daher seine abfällige Kritik meiner Aufstellungen noch in anderer Weise zu stützen. Er sucht zu zeigen, dass meine eigene Fragestellung überhaupt gar nicht unter dem Charakteristikenproblem mitbegriffen werden kann, dass ich vielmehr das Problem abgeändert habe.

Es handelt sich dabei um nichts Anderes, als um den *Begriff eines Kegelschnittes*, genauer um die dritte Kegelschnittausartung, die von uns als „Linienelementkegelschnitt" bezeichnet worden ist. (Vgl. S. 552) Herr Zeuthen vertritt die Ansicht, dass dieses Gebilde durch seinen Punkt und seine Linie noch nicht vollständig definirt ist.

Hat man nämlich eine einfach-unendliche Schaar von Kegelschnitten, in der die besprochene Ausartung vorkommt, so wird sich der Quotient $\frac{a^m}{b^n}$ zweier passend gewählter Potenzen der Hauptaxen a und b eines Kegelschnittes der Schaar beim Uebergang zu der ausgearteten Curve einem bestimmten (von Null verschiedenen) Grenzwerth nähern. Dieser Grenzwerth muss, so will es Herr Zeuthen, mit zum Begriff des Linienelementkegelschnittes gezogen werden, so dass dieser ausgeartete Kegelschnitt erst dann völlig bestimmt ist, wenn man seinen Punkt, seine Linie und ausserdem noch den zugehörigen Grenzwerth kennt. Daraus folgt dann wirklich, dass die Zahl der „Kegelschnitte" einer einfach-unendlichen Reihe, die einer gegebenen Bedingung genügen, nicht immer durch die Chasles'sche Formel dargestellt wird.

Gesetzt, man könnte den eigenthümlichen Kegelschnittbegriff, auf dem diese Folgerung beruht, an sich gelten lassen, so fehlt in der Schlusskette doch noch ein Glied: *Es müsste gezeigt werden, dass wenigstens von einigen der Vorgänger Halphens diese oder eine ähnliche Begriffsbildung verwendet worden ist;* denn doch nur dann könnte von mir, der ich von einem anderen Kegelschnittbegriff ausgegangen bin, mit Recht gesagt werden, dass ich das Problem abgeändert habe. Diesen Nachweis hat mein Gegner nicht angetreten. Er hat sich also selbst des Fehlers schuldig gemacht, den er mir mit Unrecht vorwirft*): eine Behauptung hinzustellen ohne auch nur den Versuch des Beweises.**)

---

*) Il n'est pas permis de nous traiter *sans preuve* . . .

**) Ein solcher dürfte ihm auch schwerlich gelingen. So viel ich weiss, kann nur eine einzige gelegentliche Bemerkung zu Zeuthens Gunsten angeführt werden (Schubert, Bull. de la Soc. Math. de France, 1880, t. 8, p. 61). Aber diese ist späteren Datums als Halphens Arbeiten, und sie war seither ganz ohne Folgen geblieben. Der von mir zu Grunde gelegte Kegelschnittbegriff kann dagegen

Aber Zeuthens Kegelschnittbegriff ist überhaupt gar nicht zulässig.

„Nous étions des naifs, en n'observant pas qu'une conique infiniment applatie à sommets coïncidents dans un système depend, non seulement des trois constantes qui déterminent la droite double et le sommet, mais aussi d'une quatrième constante finie: le rapport de puissances convenablement choisies des deux axes de cette conique singulière . . .“

Wirklich bin ich so „naiv“, zu finden, dass dem Linienelementkegelschnitt unter keinen Umständen mehr als drei Constanten beigelegt werden dürfen, und dass jener Inbegriff von unendlich vielen Kegelschnittsystemen, den Herr Z. als „conique applatie dans un système“ bezeichnet, gar nicht von vier, sondern von fünf Constanten abhängt: Die fünfte ist der Quotient der Exponenten, das Verhältniss $m : n$, das bei algebraischen Kegelschnittsystemen noch jeden rationalen Werth, und bei transcendenten Systemen überhaupt jeden beliebigen Werth annehmen kann.

Will man also dieses Gebilde, wie es Herr Zeuthen thut, und wie es für seinen Schluss auch durchaus nothwendig ist, einen Kegelschnitt nennen, so kommt man zu der — gelinde gesagt — paradoxen Folgerung, dass ein specieller „Kegelschnitt“ von gerade so vielen Constanten abhängt, wie der allgemeinste.

Wenn eine solche Begriffsbildung erlaubt ist, dann verlieren alle Mannigfaltigkeitsabzählungen der Geometer ihren Sinn; dann hat es keinen Sinn mehr zu sagen, dass der Raum, in dem wir leben, drei Dimensionen hat.

Mit Zeuthen's Kegelschnittbegriff fällt aber auch die darauf gegründete Folgerung. —

Auch der Auseinandersetzung über den Begriff der uneigentlichen Lösung, die Herr Zeuthen seiner Beweisführung vorausgeschickt hat (soviel ich sehe ohne zwingenden Grund), kann ich nicht ganz zustimmen.

„Une solution sera impropre si l'on peut l'éviter par une autre formulation de la question.“

Unmöglich kann Herr Zeuthen hiermit sagen wollen, dass es erlaubt ist, ein Problem nach Belieben anders zu formuliren: Dann könnte es leicht geschehen, dass man einmal nur einen Theil der gesuchten Lösungen erhielte.

Jede Aufgabe muss klar formulirt vorliegen, so dass gar kein Zweifel darüber bestehen kann, was man Lösung nennen soll und was nicht. Wo uns etwa eine unvollkommen formulirte Aufgabe überliefert ist,

---

genau in derselben Form in der älteren Litteratur nachgewiesen werden: In Clebsch's Vorlesungen über Geometrie [Bearbeitet von Lindemann, Bd. I, S. 119. (1876)] werden der Figur des Linienelementkegelschnittes ausdrücklich drei Constante zugeschrieben.

müssen wir diesen Mangel gleich von vorn herein zu beseitigen suchen. Kommt man nun bei der Analyse eines bestimmten Problems auf eine Gleichung, deren Wurzeln nur theilweise Lösungen geben, so kann man die anderen Wurzeln oder die ihnen entsprechenden geometrischen Gebilde „uneigentliche Lösungen“ nennen, wenn man das Wort Lösung hier überhaupt noch anwenden will. Dabei ist es offenbar ein nebensächlicher Umstand, dass bei einem etwaigen anderen Ansatz sich vielleicht andere „uneigentliche Lösungen“ einstellen. Ein hierauf zu gründendes Kriterium der uneigentlichen Lösungen scheint mir weder einem vorhandenen Bedürfniss zu entsprechen, noch auch überall anwendbar zu sein. —

Die Darstellungsweise des Herrn Zeuthen kann bei einem mit dem Gegenstande nicht vertrauten Leser leicht die Meinung hervorrufen, dass er ganz und gar den Standpunkt seines einem frühen Tode anheimgefallenen Freundes vertrete. Herr Zeuthen hat sich offenbar selbst in diesem Glauben befunden.

Dem gegenüber muss ich hervorheben, dass Herrn Zeuthens Auffassung der Halphen'schen Theorie meiner Ansicht nach auf einem Missverständniss beruht. Herr Zeuthen hat Grössen, die bei Halphen nur die Bedeutung eines analytischen Hülfsmittels haben, irrthümlicher Weise mit dem Begriff des Kegelschnittes selbst verschmolzen. Halphens Theorie muss vielmehr so aufgefasst werden, wie es in der vorausgehenden Abhandlung dargelegt ist. Die gegenwärtige Kritik richtet sich also nicht gegen Halphen, sondern nur gegen die Darstellung, die dessen Theorie durch Herrn Zeuthen erfahren hat.

Wenn diese Ueberlegungen richtig sind, so dürften die Gründe Zeuthens wenig geeignet sein, die Sprache zu entschuldigen, in der er seine Gedanken vorgetragen hat. Weder die Vertheidigung Halphens noch der Angriff gegen mich ist ihm gelungen. Er selbst hat Nichts beigetragen, was geeignet wäre, irgendwie zur Aufklärung zu dienen.

Ueber Systeme von Kegelschnitten.

Von

E. Study in Marburg.

In gegenwärtiger Abhandlung sollen die Anschauungen, die vom Verfasser in seiner Schrift „Methoden zur Theorie der ternären Formen“ (Leipzig 1889) dargelegt worden sind, auf ein besonderes Problem aus der Geometrie der Kegelschnitte angewendet werden.

Zunächst wird die Gleichung eines vierfach ausgedehnten Kegelschnittsystems in eine solche Form gebracht, dass man alle invarianten linearen Mannigfaltigkeiten solcher Systeme ohne Weiteres übersehen kann. Die gewonnenen Resultate werden sodann angewendet auf die Theorie der Fläche F_2^4 des fünffach ausgedehnten Raumes, deren Projection in den gewöhnlichen Raum die Steiner'sche Fläche ist.

Nach derselben Methode und mit ähnlichem Erfolg kann man noch zahlreiche andere Gegenstände behandeln; z. B. die Theorie der Systeme von Flächen 2. Grades, und die Theorie der Flächen n. O. des Raumes, unter Zugrundelegung der projectiven Gruppe einer Raumcurve 3. O. Einige auf den erstgenannten Gegenstand bezügliche Sätze, die den hier entwickelten analog sind, hat der Verfasser bereits hingestellt, freilich in einem ganz anderen, besonderen Forderungen angepassten Gewande.*) Die Theorie der Raumcurve 3. O. aber soll das Thema einer späteren Untersuchung bilden.

1.

Analytische Darstellung eines Kegelschnittsystems.

Um ein System von Kegelschnitten in einfacher Weise analytisch ausdrücken zu können, fassen wir den Kegelschnitt zunächst nur als Curve 2. Ordnung auf.

*) S. die Abhandlung „Zur Theorie der Kummer'schen Configuration und der orthogonalen Substitutionen“, Sitzungsber. d. K. Sächs. Academie, Sitzung vom 9. Mai 1892.

Wir bezeichnen mit $(LX)^2$ eine ternäre quadratische Form, mit $(U\Lambda)^2 = \frac{1}{2}(LL'U)^2$ ihre quadratische Covariante, und mit $J = \frac{1}{3}(L\Lambda)^2$ ihre Invariante.

Bekanntlich können in jede Form, die einen symbolischen Factor vom Typus $(LL'U)$ hat, mit Hülfe der Identität

$$(1) \qquad (LL'U)(LX)(L'Y) = (U\Lambda)(\Lambda XY)$$

Symbole Λ eingeführt werden; und ausserdem wird jede Form, die einen symbolischen Factor $(L\Lambda)$ oder $(\Lambda\Lambda'X)$ enthält, reducibel vermöge der Identitäten

$$(2) \qquad (L\Lambda)(LX)(U\Lambda) = (UX).J,$$

$$(3) \qquad (\Lambda\Lambda'X)(U\Lambda)(V\Lambda') = (LX)(LUV).J.$$

Hat man daher eine simultane Invariante der Form $(LX)^2$ und beliebiger anderer ternärer Grundformen zu bilden, so darf man annehmen, dass in ihr symbolische Factoren der drei Typen

$$(LL'U), \quad (L\Lambda), \quad (\Lambda\Lambda'X)$$

nicht vorkommen.

Wir betrachten jetzt das allgemeinste Kegelschnittsystem, das durch eine Gleichung vom Grade l' zwischen den Coefficienten der Form $(LX)^2$ vorgestellt wird. Ein solches System kann durch den gleich Null gesetzten symbolischen Ausdruck

$$(4) \qquad [(L\Pi)^2]^{l'}$$

dargestellt werden, sofern man annimmt, dass die Coefficienten der ternären quadratischen Form $(U\Pi)^2$ Symbole höherer Ordnung sind, die erst zu je l' vereinigt eine wirkliche Bedeutung erlangen.

Wenden wir auf die Form (4) den Evectantenprocess l' mal an, so entsteht eine gewöhnliche ternäre Form mit l' verschiedenen Veränderlichen $U_1 \dots U_{l'}$, deren jede quadratisch auftritt. Entwickeln wir diese Form nach Elementarcovarianten, und führen wir nachträglich wieder Symbole L ein, so geht (4) über in eine Summe von simultanen Invarianten der Form $(LX)^2$ und einer Reihe von Normalformen, wobei in jedem Gliede der Summe nur eine Normalform linear auftritt.

Die wirkliche Durchführung dieses Gedankens dürfte ihre Schwierigkeiten haben (ausser bei kleinen Werthen der Zahl l'), wegen der verwickelten Rechnungen, zu denen sie Anlass bieten muss.

Man kann aber das Ergebniss, soweit es für unseren Zweck nothwendig ist, übersehen, ohne die Reihenentwickelung wirklich vorzunehmen.

Die Form (4) ist, wie gesagt, darstellbar als Summe von simultanen Invarianten der Form $(LX)^2$ und je einer Normalform

$(BX)^m\,(UP)^n$, worin diese Normalformen immer nur linear auftreten. Es gelingt nun ohne Weiteres, die allgemeine Gestalt einer solchen Invariante hinzuschreiben. Da ein Factor (BP) nicht auftreten kann, da ferner nach Obigem auch Factoren der Typen $(LL'U)$, $(L\Lambda)$, $(\Lambda\Lambda' X)$ ausgeschlossen werden können, so wird die fragliche Invariante ein Product von Factoren der Typen $(L\Lambda)^2$, $(B\Lambda)^2$, $(LP)^2$. Daraus folgt, dass in unserer Reihenentwickelung nur solche Normalformen auftreten, deren Ordnungszahlen m und n beide gerade sind. Setzen wir also $m = 2j'$, $n = 2j$, so nimmt der Ausdruck (4) die Form

$$\sum J^k[(LP)^2]^j\,[(B\Lambda)^2]^{j'} \tag{5}$$

an, worin man sich die Symbole B und P zur Unterscheidung der einzelnen Glieder noch mit den beiden Indices j und j' ausgestattet denken mag. Die Summe (5) ist zu erstrecken über alle von einander verschiedenen Werthsysteme der Zahlen j, j', k, die der Bedingung

$$j + 2j' + 3k = l' \tag{6}$$

genügen; denn es entspricht auch umgekehrt jeder so beschaffene Ausdruck von der Form (5) einem Kegelschnittsystem von der Form (4).

Jedes Kegelschnittsystem, das durch eine Gleichung l'^{ten} Grades in den Symbolen (oder Coefficienten) einer ternären quadratischen Form $(LX)^2$ dargestellt werden kann, kann demnach (wie unsere Herleitung zeigt) auf eine und nur eine Weise dadurch erhalten werden, dass man einen Ausdruck von der Form (5) gleich Null setzt.

Wir wenden uns nun zur Erklärung der *Charakteristiken* λ, λ' eines Kegelschnittsystems.

Wir sagen, unser Kegelschnittsystem habe die Charakteristiken λ, λ', wenn $l' = \lambda + 2\lambda'$ angenommen wird, die Summe (5) keinen Factor J hat, und der Ausdruck (5), kurz gesagt, im Grade λ' verschwindet, wenn man für $(LX)^2$ das Quadrat einer wirklichen linearen Form setzt.

Um die letzte Bedingung genauer auszusprechen, bezeichnen wir mit V eine Gerade von allgemeiner Lage, und mit $(L_1X)^2 = 0$ die Gleichung eines unbestimmten Kegelschnittes. Unsere Forderung ist dann die, dass bei Substitution von $(VX)^2 + t(L_1X)^2$ an Stelle von $(LX)^2$ in (5) die Potenz $t^{\lambda'}$, aber keine höhere Potenz von t als Factor vor das Ganze tritt.†)

Drückt man dies analytisch aus, so findet sich, dass in (5) nur solche Glieder vorkommen können, die der Bedingung

$$2k + j' \geqq \lambda' \tag{7}$$

genügen, und dass mindestens ein Glied vorhanden sein muss, das

*) Vgl. Math. Ann. Bd. 27, S. 86, 87.

der *Gleichung* $2k + j' = \lambda'$ entspricht. Hierzu kommt noch die Bedingung, dass ein Glied vorhanden sein muss, dem der Werth $k = 0$ zugehört.

Wir wollen nun zeigen, dass der dualistisch entsprechende Begriff zu einem Kegelschnittsystem mit den Charakteristiken λ und λ' ein Kegelschnittsystem mit den Charakteristiken λ' und λ ist; mit anderen Worten, dass die Zahlen λ und λ' einfach ihre Rolle wechseln, wenn man nicht, wie wir es gethan haben, $(U\Lambda)^2$ als Covariante von $(LX)^2$ auffasst, sondern umgekehrt $(LX)^2$ als Covariante von $(U\Lambda)^2$.

Um diesen wichtigen Satz zu beweisen, stellen wir unsere bisherige Grundform $(LX)^2$ als Covariante einer Form 2. Classe $(\overline{U}\overline{\Lambda})^2$ dar:

$$(LX)^2 = \frac{1}{2}(\overline{\Lambda}\overline{\Lambda}'X)^2 = (\overline{L}X)^2.$$

Dann wird

$$(U\Lambda)^2 = \frac{1}{2}(LL'U)^2 = \frac{1}{3}(\overline{L}\overline{\Lambda})^2 . (\overline{U}\overline{\Lambda})^2 = \overline{J} . (U\overline{\Lambda})^2,$$

$$J = \frac{1}{3}(L\Lambda)^2 = \frac{1}{3}\overline{J} . (\overline{L}\overline{\Lambda})^2 = \overline{J}^2,$$

wenn $\overline{J} = \frac{1}{3}(\overline{L}\overline{\Lambda})^2$ die Invariante der neuen Grundform $(\overline{U}\overline{\Lambda})^2$ bedeutet.

Setzen wir nun diese Werthe von $(LX)^2$, $(U\Lambda)^2$ und J in (5) ein, so entsteht zunächst die Summe

$$\sum \overline{J}^{2k+j'} . [(\overline{L}P)^2]^j [(B\overline{\Lambda})^2]^{j'}.$$

Hier lässt sich aber wegen der Bedingung (7) der Factor $\overline{J}^{\lambda'}$ abscheiden. Setzen wir daher

(8) $$k' = 2k + j' - \lambda', \quad \text{also} \quad k = 2k' + j - \lambda,$$

so wird unser Kegelschnittsystem dargestellt durch die Summe

(9) $$\sum \overline{J}^{k'} . [(\overline{L}P)^2]^j [(B\overline{\Lambda})^2]^{j'},$$

worin die Zahlen k', j, j' den folgenden Bedingungen zu genügen haben:

Es ist für alle Glieder der Summe

(10) $$j' + 2j + 3k' = l = \lambda' + 2\lambda,$$

(11) $$2k' + j \geqq \lambda,$$

und es ist mindestens ein Glied vorhanden, das dem Werthe $k' = 0$, und mindestens ein Glied, das der Gleichung $2k' + j = \lambda$ entspricht

Wie man sieht, ist die nunmehr gefundene Darstellung des Kegelschnittsystems genau dualistisch zu der ursprünglichen: Es haben in allen unseren Bedingungsgleichungen und Ungleichungen einfach die Zahlen λ und λ', j und j' ihre Rolle gewechselt; und an Stelle der

Zahlen k und l' sind dabei neue Zahlen k' und l getreten. Bedeutet also Y einen Punkt von allgemeiner Lage, und $(U\overline{\Lambda}_1)^2 = 0$ die Gleichung einer unbestimmten Curve 2. Classe, so hebt sich bei Substitution von $(UY)^2 + t(U\overline{\Lambda}_1)^2$ an Stelle von $(U\overline{\Lambda})^2$ in (9) die Potenz t^2, und keine höhere Potenz von t als Factor heraus. Dies ist der zu beweisende Satz.

Indem wir das Ergebniss unserer Untersuchung nunmehr zusammenfassen, bringen wir zugleich unsere Bedingungen in eine Form, bei der die vollkommene Dualität der beiden Darstellungen (5) und (9) klar hervortritt.

Um das allgemeinste Kegelschnittsystem mit den Charakteristiken λ und λ' zu finden, bestimme man alle Systeme von positiven ganzen Zahlen j, j', k, k', die den Gleichungen genügen

$$(12) \qquad \begin{cases} j + 2j' + 3k = \lambda + 2\lambda', \\ j' + 2j + 3k' = \lambda' + 2\lambda. \end{cases}$$

Bedeutet sodann $(LX)^2$ eine ternäre Form 2. O., $(U\Lambda)^2$ ihre Covariante und J ihre Invariante, $(U\overline{\Lambda})^2$ eine Form 2. Cl., $(\overline{L}X)^2$ ihre Covariante und $\overline{J}$ ihre Invariante, ist endlich $(UP)^{2j}(BX)^{2j'}$ eine Normalform, so stellt jede der beiden Gleichungen

$$(13) \qquad \begin{cases} \sum J^k \cdot [(LP)^2]^j\,[(B\Lambda)^2]^{j'} = 0, \\ \sum \overline{J}^{k'} \cdot [(\overline{L}P)^2]^j\,[(B\overline{\Lambda})^2]^{j'} = 0 \end{cases}$$

das fragliche Kegelschnittsystem dar; und zwar kann jede dieser beiden Gleichungsformen nur auf eine Weise hergestellt werden.

Umgekehrt bedeutet eine Gleichung von der Form (13) *ein Kegelschnittsystem mit den Charakteristiken λ und λ', wenn alle Glieder der Summe den Bedingungen* (12) *genügen, und wenn ausserdem ein Glied vorhanden ist, das dem Werthe $k = 0$, und ein Glied, das dem Werthe $k' = 0$ entspricht.*

Sind die beiden letzten Forderungen nicht erfüllt, so scheidet sich entweder bei der ersten Darstellung der Factor J oder bei der zweiten der Factor $\overline{J}$ ab, und die übrig bleibende Mannigfaltigkeit ist ein Kegelschnittsystem mit anderen Charakteristiken.

Die Zahl der linear-unabhängigen Normalformen $(UP)^{2j}(BX)^{2j'}$ ist $(2j+1)(2j'+1)(j+j'+1)$; also ist die Zahl der homogenen Constanten, die in (13) vorkommen,

$$(14) \qquad N(\lambda, \lambda') = \sum (2j+1)(2j'+1)(j+j'+1),$$

die Summe erstreckt über alle Werthepaare (j, j'), die in den Lösungen der Gleichungen (12) vorkommen. Da diese Constanten in (13) nur linear auftreten, so folgt:

Durch $N(\lambda, \lambda') - 1$ Kegelschnitte von hinreichend allgemeiner Lage lässt sich ein einziges Kegelschnittsystem mit den Charakteristiken λ, λ' legen.

Die Zahl $N(\lambda, 0) = N(0, \lambda)$ hat den einfachen Werth $\binom{\lambda+5}{5}$; und es ist wahrscheinlich, dass die Zahl $N(\lambda, \lambda')$ sich auch im allgemeinen Falle als ganze rationale Function von λ und λ' schreiben lässt.

2.

Fortsetzung. — Besondere Kegelschnittsysteme.

Die hier zu Grunde gelegte Definition der Charakteristiken eines Kegelschnittsystems ist im Wesentlichen dieselbe, von der der Verfasser bei seinen bereits erwähnten älteren Untersuchungen über diesen Gegenstand ausgegangen ist; sie stimmt aber nicht überein mit der Darstellung bei Clebsch (Math. Ann. Bd. VI, S. 9 u. ff. (§ 5)). In der That sind die von Clebsch angegebenen Kriterien nicht richtig*). Wohl aber ist richtig seine Folgerung:

Jedes Kegelschnittsystem mit den Charakteristiken λ, λ' kann durch eine Gleichung dargestellt werden, die homogen ist vom Grade λ in den Coefficienten von $(LX)^2$ und homogen vom Grade λ' in den Coefficienten von $(U\Lambda)^2$.

Es geht das auch aus unseren jetzigen Formeln unmittelbar hervor. Um nämlich in (5) jedes Glied zunächst mit möglichst wenigen Symbolen von $(LX)^2$ und möglichst vielen Symbolen von $(U\Lambda)^2$ zu schreiben, haben wir folgende Mittel:

1) Wir ersetzen möglichst viele Factorenpaare $J.(LP)^2$ durch je einen Factor $\frac{1}{2}(\Lambda\Lambda'P)^2$. (Vgl. Formel (3)).

2) Wir ersetzen hierauf möglichst viele Factoren J^2 durch je einen Factor $\frac{1}{6}(\Lambda\Lambda'\Lambda'')^2$.

3) Wir schreiben den etwa noch übrigen Factor J in der Form $\frac{1}{3}(L\Lambda)^2$.

Ist nun $k \leq j$, so wird die Zahl der Symbole von $(U\Lambda)^2 = j' + 2k$, also $\geq \lambda'$, und sie wird insbesondere bei den Gliedern, die der Gleichung $j' + 2k = \lambda'$ entsprechen, geradezu $= \lambda'$. Ist ferner $k > j$, so wird die fragliche Zahl

$$= j' + 2j + 3\,\frac{k-j}{2} \quad \text{oder} \quad = j' + 2j + 3\,\frac{k-j-1}{2} + 1,$$

---

*) Auf diesen früher von mir übersehenen Umstand wurde ich im Jahre 1886 durch Halphen aufmerksam gemacht.

je nachdem λ gerade oder ungerade ist; und dies ist wieder $\gtreqless \lambda'$ (Nr. 12, § 1).

Ersetzt man dann nachträglich, soweit es nöthig ist, wieder einzelne Symbole von $(U\Lambda)^2$ durch Symbole von $\frac{1}{2}(LL'U)^2$, so wird der ganze Ausdruck homogen in $(LX)^2$ vom Grade λ und in $(U\Lambda)^2$ vom Grade λ'; und zwar ist λ' die grösste Zahl von Symbolen von $(U\Lambda)^2$, die auf diese Art eingeführt werden können, was auch von vornherein deutlich ist. —

Die beiden Zahlen λ und λ' haben für ein System von Kegelschnitten ganz dieselbe Bedeutung, wie etwa die Ordnung einer algebraischen Fläche (eines Systems von Punkten) für diese Fläche. Die Mannigfaltigkeit aller Kegelschnittsysteme mit denselben Charakteristiken ist zu vergleichen der Mannigfaltigkeit aller algebraischen Flächen von derselben Ordnung*). Es besteht aber ein charakteristischer Unterschied. Während nämlich in der linearen Mannigfaltigkeit aller Flächen *n*. O. keine kleinere lineare Mannigfaltigkeit enthalten ist, deren Flächen von den collinearen Transformationen des Raumes nur unter einander vertauscht würden, enthält die lineare Mannigfaltigkeit aller Kegelschnittsysteme mit den Charakteristiken (λ, λ') thatsächlich kleinere lineare Mannigfaltigkeiten, die gegenüber den collinearen Transformationen der Ebene invariant sind. Die Untersuchung des § 1 setzt uns offenbar in den Stand, *alle* diese Mannigfaltigkeiten von vornherein anzugeben. *Jede invariante lineare Mannigfaltigkeit von Kegelschnittsystemen lässt sich durch Gleichungen oder Ungleichungen zwischen den in* § 1 *eingeführten Zahlen* j, j' *kennzeichnen.*

Um dies durch ein einfaches *Beispiel* zu erläutern, wollen wir untersuchen, unter welchen Umständen ein Kegelschnittsystem (λ, λ') die Mannigfaltigkeit aller ∞^3 Linienelement-Kegelschnitte (s. S. 552) s-fach enthält, oder unter welchen Umständen die in der vorangehenden Abhandlung Nr. I (S. 554) besprochene Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_4$, das Bild unseres Kegelschnittsystems, s mal durch die invariante Mannigfaltigkeit M_3 hindurchläuft.

Dazu ist nothwendig und hinreichend, dass von den $\lambda + \lambda'$ Kegelschnitten, die das System mit einem Büschel einander vierpunktig berührender Kegelschnitte gemein hat, sich s Kegelschnitte mit dem Linienelement-Kegelschnitt des Büschels vereinigen. Sei also V eine Gerade von allgemeiner Lage, und sei $(L_1X)^2 = 0$ ein im Uebrigen unbestimmter Kegelschnitt, der die Gerade V berührt, so muss sich

*) In diesem Zusammenhang müssen natürlich die Systeme, von denen sich bei der Darstellung durch die Formeln (13), § 1 der Factor J oder $\bar{J}$ abscheidet, noch als (reducibele) Systeme (λ, λ') gezählt werden.

bei Substitution von $(VX)^2 + t(L_1X)^2$ an Stelle von $(LX)^2$ in den Ausdruck (5), § 1 nicht nur der Factor $t^{\lambda'}$, sondern der Factor $t^{\lambda'+s}$, aber keine höhere Potenz von t abscheiden. Dies tritt dann und nur dann ein, wenn für alle Glieder unserer Summe die Bedingung

$$j' + 3k \geqq \lambda' + s \quad \text{oder} \quad j + j' \leqq \lambda + \lambda' - s$$

erfüllt ist, und wenn für mindestens ein Glied die Gleichung

$$j + j' = \lambda + \lambda' - s$$

besteht. Soll diese Bedingung einem Kegelschnittsystem mit den Charakteristiken λ, λ' auferlegt werden können, ohne dass es zerfällt, d. h., ohne dass sich von der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_4$ eine der Mannigfaltigkeiten M_4 und M_4' abscheidet, so sind die Zahlen λ, λ' und s nicht ganz willkürlich. Es wird nämlich dann, nach dem Satze des § 1, ein Glied vorhanden sein müssen, das dem Werthe $k = 0$ entspricht. Für dieses Glied hat man

$$j + 2j' = \lambda + 2\lambda', \quad j' \geqq \lambda', \quad j + j' \leqq \lambda + \lambda' - s,$$

und hieraus folgt $\lambda \geqq 2s$. Ebenso ergibt sich $\lambda' \geqq 2s$ — ein Resultat, das auch unmittelbar aus der in der vorausgehenden Abhandlung I (S. 4) erwähnten geometrischen Bedeutung der Charakteristiken λ und λ' hervorgeht. Sind aber diese Bedingungen erfüllt, so gibt es auch wirklich Kegelschnittsysteme von der verlangten Art. Ein solches System ist z. B. jedes, in dessen Reihenentwickelung die beiden Glieder

$$(j = \lambda - 2s, \quad j' = \lambda' + s),$$
$$(j = \lambda + s, \quad j' = \lambda' - 2s)$$

vorkommen. Wir haben also bewiesen:

Ein Kegelschnittsystem mit den Charakteristiken λ und λ' (nämlich ein System, von dem weder die Mannigfaltigkeit aller Punktepaare, noch die Mannigfaltigkeit aller Linienpaare sich abscheiden soll), kann nur dann die Mannigfaltigkeit aller Linienelement-Kegelschnitte s-fach enthalten, wenn die Ungleichungen

(1) $$\lambda \geqq 2s, \quad \lambda' \geqq 2s$$

erfüllt sind. In der Reihenentwickelung eines solchen Systems kommen nur Glieder vor, die der Bedingung

(2) $$j + j' \leqq \lambda + \lambda' - s \quad \textit{oder} \quad k + k' \geqq s$$

genügen.

Im Falle $s = 1$ verlangt dieser Satz nur das Verschwinden der einzigen Elementarcovariante:

$$(UP)^{2\lambda} (BX)^{2\lambda'}:$$

Die Forderung, dass ein System (λ, λ') die Mannigfaltigkeit aller Linienelement-Kegelschnitte enthalte, zählt für

$$(2\lambda + 1)(2\lambda' + 1)(\lambda + \lambda' + 1)$$

lineare Bedingungsgleichungen.

Ist $s = 2$, so wird das Verschwinden von zwei weiteren Elementarcovarianten gefordert, nämlich der folgenden:

$$(UP)^{2\lambda-4}(BX)^{2\lambda'+2}, \quad (UP)^{2\lambda+2}(BX)^{2\lambda'-4},$$

man hat also im Ganzen

$$12\lambda\lambda'(\lambda + \lambda') + 2(\lambda^2 + \lambda'^2) - 15(\lambda + \lambda') + 19$$

lineare Bedingungsgleichungen zu erfüllen, u. s. w.

In ähnlicher Weise, wie wir hier die Bedingung dafür gefunden haben, dass die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}_4$ durch M_3 hindurchgeht, kann man weiter die Bedingung dafür aufsuchen, dass sie M_4 oder M_4' noch ausserdem längs M_3 berührt, u. dgl. m.

Wir schliessen mit einem *Zahlenbeispiel*, indem wir alle Kegelschnittsysteme mit den Charakteristiken (2, 2) hinschreiben. Sie werden dargestellt durch die Summe

$$[(LP_0)^2]^2\,[(B_0\Lambda)^2]^2 + \frac{1}{2}\,[(LP_1)^2]^2\,(P_1\Lambda\Lambda')^2 + \frac{1}{2}\,[(B_2\Lambda)^2]^2\,(B_2LL')^2 \\ + \frac{1}{3}\,(L\Lambda)^2\cdot(LP_3)^2\,(B_3\Lambda)^2 + \frac{1}{9}\,[(L\Lambda)^2]^2\cdot C_4.$$

Die einzelnen Glieder hängen ab von einem Normalconnex (4, 4), einer Curve 6. Classe, einer Curve 6. Ordnung, einem Normalconnex (2, 2) und einer Constanten C_4. Soll unser Ausdruck wirklich einem Kegelschnittsystem (2, 2) entsprechen, und nicht etwa einem System (3, 0) oder einem System (0, 3), so muss entweder das erste Glied von Null verschieden sein, oder das zweite und das dritte Glied müssen beide zugleich von Null verschieden sein. Die Constantenzahl unseres Systems ist

$$N(2, 2) = 125 + 28 + 28 + 27 + 1 = 209,$$

d. h., durch 208 passend gewählte Kegelschnitte geht *ein* System (2, 2). Soll aber das System die Mannigfaltigkeit aller Linienelement-Kegelschnitte enthalten, so muss das erste Glied verschwinden, und man kann nur noch $208 - 125 = 83$ weitere Kegelschnitte willkürlich annehmen. Das System enthält dann, ausser den Linienelement-Kegelschnitten, gar keine ausgearteten Curven mehr.

3.

Anwendung auf die Theorie der Fläche F_2^4.

Es ist eine interessante und in mancher Hinsicht wichtige Aufgabe der Algebra, in einem Raum R_n von n Dimensionen die algebraischen Gebilde zu studiren, die sich als Durchschnitt von Mannigfaltigkeiten M_{n-1}^2 2. Ordnung darstellen lassen. Auf wievielen und welchen linear-unabhängigen Mannigfaltigkeiten M_{n-1}^r r. Ordnung liegt ein solches Gebilde? Auf welchen unter ihnen ist es mehrfach enthalten? Diese und ähnliche Fragen übersteigen wohl in den meisten Fällen die Kräfte unserer heutigen Analysis. Es gibt aber eine Reihe solcher Gebilde, zu denen man von der Invariantentheorie aus gelangt, die einer verhältnissmässig einfachen und in gewissem Sinn erschöpfenden Behandlung fähig sind. Zu ihnen gehört die in der vorausgehenden Abhandlung I betrachtete Mannigfaltigkeit M_5 sowohl als die Fläche F_2^4, die bei der Abbildung der Curven 2. Classe in der Ebene auf die Punkte eines linearen R_5 den Punkten der Ebene entspricht. Sie beide können mit den in § 1 und § 2 gegebenen Hülfsmitteln in obigem Sinn behandelt werden.

Wir beschränken uns hier auf den zweiten Fall, die Theorie der Fläche F_2^4, weil er der einfachere ist, und weil er ausreicht, um die Tragweite der Methode zu zeigen.

Wir beginnen damit, die in § 6 der Abhandlung „Ueber die Geometrie der Kegelschnitte" angegebenen und durch den Inhalt von § 1 und § 2 der gegenwärtigen Untersuchung bestätigten Sätze in eine neue Form zu bringen, die besonders geeignet scheint, den geometrischen Kern dieser Theorie klar hervortreten zu lassen. Wir gelangen zu der neuen Formulirung, wenn wir die mit T bezeichnete quadratische Transformation mit den ∞^8 dualistischen Transformationen des Raumes R_5 zusammensetzen, die den dualistischen Transformationen der Ebene entsprechen, und die die Mannigfaltigkeiten F_2^4 und Φ_2^4 mit einander vertauschen.

Wir kommen dann fast unmittelbar zu dem folgenden Satz:

Mit der Fläche F_2^4 sind zwei Schaaren $\mathfrak{g}_8$, $\mathfrak{h}_8$, von je ∞^8 Cremonaschen Transformationen verknüpft, die zusammen eine zur Gruppe der collinearen und dualistischen Transformationen der Ebene eindeutig isomorphe) Gruppe bilden.*

Die Schaar $\mathfrak{g}_8$ ist die Gruppe aller collinearen Transformationen der Fläche F_2^4; die Schaar $\mathfrak{h}_8$ aber, die den dualistischen Transformationen der Ebene entspricht, besteht aus quadratischen Transformationen, deren singuläre Stellen die Punkte von F_2^4 sind.

Durch die Transformationen von $\mathfrak{h}_8$ wird eine Punktmannigfaltigkeit l. Ordnung M_4^l von R_5, die die Fläche F_2^4 λ-mal enthält, übergeführt in eine Mannigfaltigkeit l'. Ordnung $M_4^{l'}$, auf der die Punkte

*) Wir gestatten uns für die eindeutig-umkehrbar isomorphe Beziehung zweier Transformationsgruppen den Ausdruck „eindeutig-isomorph" anzuwenden, da nach den Definitionen von S. Lie für „holoedrischen" Isomorphismus eindeutige Zuordnung der endlichen Transformationen der Gruppen nicht erforderlich ist.

von F_2^4 λ'-fach enthalten sind, wobei zwischen den Zahlen l, l', λ, λ' die Relationen bestehen

$$l = 2\lambda + \lambda', \quad l' = 2\lambda' + \lambda.$$

Dabei entsprechen linear-abhängigen oder unabhängigen Mannigfaltigkeiten M_4^l in gleicher Weise linear-abhängige oder unabhängige Mannigfaltigkeiten $M_4^{l'}$.

Es ist dies im Grunde nur ein anderer Ausdruck des Satzes, dass aus einem Kegelschnittsystem (λ, λ') durch eine dualistische Transformation ein System (λ', λ) hervorgeht.

Wir betrachten nun eine beliebige Punktmannigfaltigkeit l. Ordnung M_4^l in R_5, und gleichzeitig eine R_4^1-Mannigfaltigkeit l. Classe M_4^l. Diesen mögen in der Ebene die Kegelschnittsysteme

$$[(B\Lambda)^2]^l = 0 \quad \text{und} \quad [(L\Pi)^2]^l = 0$$

entsprechen. Drücken wir aus, dass die Mannigfaltigkeiten M_4^l und M_4^l *conjugirt* sind, d. h., dass ihre zur allgemeinen projectiven Gruppe des R_5 gehörige bilineare Invariante verschwindet, so erhalten wir die folgende einfache Bedingungsgleichung

$$[(B\Pi)^2]^l = 0.$$

(S. a. a. O., § 3, Formel II). Uebertragen wir jetzt die beiden Reihenentwickelungen, die nach Formel (5) und (6) des § 1 aus den Formen $[(B\Lambda)^2]^l$ und $[(L\Pi)^2]^l$ hervorgehen, in die Sprache der Geometrie des R_5, so gelangen wir zu dem Satz:

Jede Form l. Ordnung in R_5 lässt sich in bestimmter Weise als Summe von Formen darstellen, von denen jede einzelne einer kleinsten bei den Transformationen von $\mathfrak{g}_8$ invarianten linearen Schaar angehört.

Jede Form l. Classe in R_5 lässt sich in bestimmter Weise als Summe von Formen darstellen, von denen jede einzelne einer kleinsten bei den Transformationen von $\mathfrak{g}_8$ invarianten linearen Schaar angehört.

Jedes Glied der Reihe links ist identisch conjugirt zu jedem Glied der Reihe rechts, mit Ausnahme des einen Gliedes, das ihm selbst dualistisch gegenübersteht.

Unter einer *kleinsten* invarianten linearen Schaar von Mannigfaltigkeiten l. O. ist hier eine solche zu verstehen, in der keine lineare Schaar mehr enthalten ist, die ebenfalls invariant wäre, also eine Schaar, die (nach Ersetzung von l' durch l) einem Lösungssystem der Gleichung (6), § 1 entspricht.

Wir wollen von den zahlreichen Folgerungen des letzten Satzes nur eine einzige anführen, die sich auf das erste Glied der Reihenentwickelung der Invariante $[(B\Pi)^2]^l$ bezieht.

Durch eine jede auf F_2^4 gelegene Curve $4l$. Ordnung kann eine einzige Mannigfaltigkeit M_4^l l. O. derart hindurchgelegt werden, dass alle Φ_2^4 eingeschriebenen Mannigfaltigkeiten M_4^2 2. Classe zu M_4^l apolar sind.

Einer jeden Curve $4l$. Classe der Mannigfaltigkeit Φ_2^4 kann eine einzige Mannigfaltigkeit M_4^l l. Cl. derart eingeschrieben werden, dass alle durch F_2^4 gehenden Mannigfaltigkeiten M_4^2 2. Ordnung zu M_4^l apolar sind.

Die Gesammtheit aller so bestimmten Mannigfaltigkeiten l. Ordnung (l. Classe) bildet eine bei den Transformationen von $\mathfrak{g}_8$ invariante lineare Schaar, entsprechend der linearen Schaar aller ebenen Curven $2l$. Ordnung ($2l$. Classe); und zwar ist diese die einzige kleinste invariante lineare Schaar, deren Mannigfaltigkeiten die Fläche F_2^4 nicht enthalten (Φ_2^4 nicht eingeschrieben sind).

Die Mannigfaltigkeiten M_4^l und M_4^l sind dann und nur dann conjugirt, wenn die zugehörigen ebenen Curven conjugirt sind.

Der grösste Theil vom Inhalte dieses Satzes ergibt sich so unmittelbar aus dem Anblick unserer Reihenentwicklung, dass wir nichts weiter darüber zu sagen brauchen. Einer Erläuterung bedarf nur die eine Behauptung, dass die den ebenen Curven $2l$. Ordnung $(CX)^{2l} = 0$ entsprechende Schaar $[(C\Lambda)^2]^l = 0$ von Mannigfaltigkeiten M_4^l dadurch definirt werden kann, dass alle Φ_2^4 eingeschriebenen Mannigfaltigkeiten 2. Classe zu M_4^l apolar sind.

Dies können wir auf verschiedene Arten einsehen. Ein erster, sehr einfacher Beweis ist der folgende.

Die Schaar der zu den Curven $(CX)^{2l} = 0$ gehörigen Mannigfaltigkeiten M_4^l kann nach dem vorigen Satze (S. 573) definirt werden als die Schaar aller der Mannigfaltigkeiten M_4^l, die conjugirt sind zu allen aus der Reihenentwickelung der Form $[(L\Pi)^2]^l$ hervorgehenden M_4^l, mit Ausnahme derer, die aus dem ersten von einer Curve $2l$. Classe abhängigen Glied entspringen. Alle jene M_4^l aber sind der Mannigfaltigkeit Φ_2^4 eingeschrieben, und daher in der Form $F_1\Phi_1 + \cdots + F_6\Phi_6$ darstellbar, sofern $\Phi_1 \ldots \Phi_6$ die sechs Φ_2^4 eingeschriebenen linear-unabhängigen Mannigfaltigkeiten 2. Classe bedeuten (Vgl. Math. Ann. Bd. 39, S. 532). Daher kann unsere den ebenen Curven $2l$. Ordnung zugeordnete Schaar von M_4^l definirt werden als die Schaar aller der M_4^l, zu denen $\Phi_1 \ldots \Phi_6$ apolar sind.

Umständlicher ist es, den Satz durch Rechnung abzuleiten. Wir wollen aber auch diesen Weg beschreiten, da die Rechnung selbst nicht ohne Interesse, und, als Beispiel für solche Rechnungen überhaupt, hier sehr wohl am Platze ist.

Wir bezeichnen die beiden Kegelschnittsysteme, die zwei Mannigfaltigkeiten M_4^l und M_4^l entsprechen, mit

$$[(C\Lambda)^2]^l = 0$$

und

$$[(L\Pi)^2]^l = 0.$$

Dann ist, wie bemerkt, die Bedingung des Conjugirtseins von M_4^l und M_4^l diese:

$$(1) \qquad [(C\Pi)^2]^l = 0.$$

Wir drücken nun aus, dass M_4^l zerfällt in eine M_4^{l-2} und eine Φ_2^4 eingeschriebene M_4^2:

$$(2) \qquad [L\Pi)^2]^l = (LL'G)^2 \,.\, [(LQ)^2]^{l-2}.$$

Die Gleichung (1) verwandelt sich dann in diese:

$$(3) \qquad (CC'G)^2\,[(CQ)^2]^{l-2} = 0.$$

Die Frage ist, unter welchen Umständen diese Bedingung *identisch* erfüllt ist, bei ganz beliebiger Wahl der Curve 2. O. $(GX)^2 = 0$ und des Systems von Curven 2. O. $[(LQ)^2]^{l-2} = 0$.

Um dies zu entscheiden, denken wir uns $[(C\Lambda)^2]^l$ durch Normalformen ausgedrückt,

$$(4) \qquad [(C\Lambda)^2]^l = \sum \left[\tfrac{1}{6}(\Lambda\Lambda'\Lambda'')^2\right]^{k'} \left[\tfrac{1}{2}(P\Lambda\Lambda')^2\right]^{j} [(B\Lambda)^2]^{j'}$$
$$(j' + 2j + 3k' = l)$$

und führen dann, durch zweimalige Anwendung des Aronhold'schen Processes, neben dem Kegelschnitt $(U\Lambda)^2 = 0$ einen weiteren Kegelschnitt $(U\Delta)^2 = 0$ ein:

$$l(l-1)\,[(C\Lambda)^2]^{l-2}[(C\Delta)^2]^2$$
$$= \sum \left[\tfrac{1}{6}(\Lambda\Lambda'\Lambda'')^2\right]^{k'} \left[\tfrac{1}{2}(P\Lambda\Lambda')^2\right]^{j} [(B\Lambda)^2]^{j'}$$
$$\cdot \Big\{ 6k' \frac{(\Lambda\Delta\Delta')^2}{(\Lambda\Lambda'\Lambda'')^2} + 9k'(k'-1)\frac{[(\Lambda\Lambda'\Delta)^2]^2}{[(\Lambda\Lambda'\Lambda'')^2]^2} + 2j\,\frac{(P\Delta\Delta')^2}{(P\Lambda\Lambda')^2}$$
$$+ 4j(j-1)\frac{[(P\Lambda\Delta)^2]^2}{[(P\Lambda\Lambda')^2]^2} + j'(j'-1)\frac{[(B\Delta)^2]^2}{[(B\Lambda)^2]^2} + 4jj'\,\frac{(P\Lambda\Delta)^2(B\Delta)^2}{(P\Lambda\Lambda')^2(B\Lambda)^2}$$
$$+ 12k'j\,\frac{(\Lambda\Lambda'\Delta)^2(P\Lambda\Delta)^2}{(\Lambda\Lambda'\Lambda'')^2(P\Lambda\Lambda')^2} + 6k'j'\,\frac{(\Lambda\Lambda'\Delta)^2(B\Delta)^2}{(\Lambda\Lambda'\Lambda'')^2(B\Lambda)^2} \Big\}.$$

Wir ersetzen nun $(C\Lambda)^2$ durch $(CQ)^2$ und $[(C\Delta)^2]^2$ durch $(CC'G)^2$. Dann wird, wenn $(U\mathrm{H})^2 = 0$, $(U\Theta)^2 = 0$ beliebige Curven 2. Classe bedeuten

$$(\Delta\mathrm{H}\Theta)^2(C\Delta)^2 = (CG\widehat{\mathrm{H}\Theta})^2 \qquad \text{(Vgl. „Methoden" S. 77.)}$$
$$= (C\mathrm{H})^2(G\Theta)^2 - 2(C\mathrm{H})(G\Theta)(C\Theta)(G\mathrm{H}) + (C\Theta)^2(G\mathrm{H})^2,$$

$$(\Delta \mathrm{H}\mathrm{H}')^2(C\Delta)^2 = 2(C\mathrm{H})^2(G\mathrm{H})^2 - 2[(C\mathrm{H})(G\mathrm{H})]^2,$$
$$(\Delta \mathrm{H}\mathrm{H}')^2(\Delta \mathrm{H}\Theta)^2 = (\mathrm{H}\mathrm{H}'\Theta)^2(G\mathrm{H})^2 + \tfrac{1}{3}(\mathrm{H}\mathrm{H}'\mathrm{H}'')^2(G\Theta)^2,$$
$$[(\Delta \mathrm{H}\mathrm{H}')^2]^2 = \tfrac{4}{3}(\mathrm{H}\mathrm{H}'\mathrm{H}'')^2(G\mathrm{H})^2,$$
$$[(\Delta \mathrm{H}\Theta)^2]^2 = (\mathrm{H}\mathrm{H}'\Theta)^2(G\Theta)^2 + (\Theta\Theta'\mathrm{H})^2(G\mathrm{H})^2 - 2(\mathrm{H}\mathrm{H}'\Theta)(\Theta\Theta'\mathrm{H}')(G\mathrm{H})(G\Theta'),$$
$$(\Delta\Delta'\mathrm{H})^2 = 3(G\mathrm{H})^2.$$

Mit Hülfe dieser Formeln finden wir nun, unter Berücksichtigung des Umstandes, dass die Formen $(UP)^{2j}\,(BX)^{2j'}$ sämmtlich Normalformen sind,

$$(5)\quad \begin{cases} \binom{l}{2}(CC'G)^2\,[(CQ)^2]^{l-2} \\ = \sum\left[\tfrac{1}{6}(QQ'Q'')^2\right]^{k'}\left[\tfrac{1}{2}(PQQ')^2\right]^{j}[(BQ)^2]^{j'} \\ \cdot\Big\{(1+2j+2j'+2k')\left[3k'\dfrac{(GQ)^2}{(QQ'Q'')^2}+j\dfrac{(GP)^2}{(PQQ')^2}\right] \\ \qquad -6k'j'\dfrac{[(BQ)(GQ)]^2}{(QQ'Q'')^2(BQ)^2}\Big\}. \end{cases}$$

Das identische Verschwinden des Ausdrucks auf der rechten Seite, worin $(GX)^2=0$ und $(UQ)^2=0$ veränderliche Kegelschnitte vorstellen, ist also äquivalent mit dem Bestehen der Gleichung (3).

Es ist von vorn herein deutlich, und der Anblick der Formel (5) macht es überdies augenscheinlich, dass man auf das Verschwinden einer Reihe von Normalformen geführt wird, die zu den auf der rechten Seite von (4) auftretenden Elementarcovarianten des Kegelschnittsystems $[(C\Lambda)^2]^l = 0$ gehören.

Wir behaupten, dass in Folge des Verschwindens von (5) überhaupt *alle* Elementarcovarianten verschwinden müssen, mit Ausnahme der einzigen, die von der Curve $2l$. O. $(CX)^{2l}$ abhängt, so dass man

$$(6)\qquad [(C\Lambda)^2]^l = \left[(CX)^{2l},\,[(U\Lambda)^2]^l\right]$$

setzen kann, wenn $[F,\Phi]$ das Zeichen für die letzte Ueberschiebung von F und Φ ist.

Zunächst bemerken wir, dass diese erste Elementarcovariante thatsächlich nicht verschwindet zufolge des Verschwindens von (5). Sie entspricht nämlich dem Werthepaar $k'=0$, $j'=0$, und ein hierzu gehöriges Glied kommt in (5) nicht vor. Alle anderen Elementarcovarianten treten aber in (5) wirklich auf.

Wählen wir die Form $(GX)^2$ speciell, als Covariante von $(UQ)^2$:

$$(GX)^2 = \tfrac{1}{2}(QQ'X)^2,$$

so geht der Ausdruck (5) über in

$$\frac{1}{2}\sum\{(1+2j+2j'+2k')(j+3k')-k'j'\}\cdot$$
$$\cdot\left[\tfrac{1}{6}(QQ'Q'')^2\right]^{k'}\left[\tfrac{1}{2}(PQQ')^2\right]^{j}[(BQ)^2]^{j'}.$$

Der Zahlencoefficient irgend eines Entwickelungsgliedes verschwindet hier nur dann, wenn $k'=0$, $j=0$ ist; es müssen also wirklich alle Elementarcovarianten unseres Kegelschnittsystems verschwinden, mit Ausnahme jener einen.

Dies ist der zu beweisende Satz. —

Zum Schluss geben wir noch einige ganz specielle Folgerungen unserer Theorie, Sätze von der zu Eingang des § besprochenen Art.

Die Fläche F_2^4 liegt auf

$$\binom{l+5}{5}-(l+1)(2l+1)$$

linear-unabhängigen Mannigfaltigkeiten M_4^l l. Ordnung.

Man erhält diese Mannigfaltigkeiten, wenn man in der Reihenentwicklung (4) das erste, dem Werthe $j'=l$ entsprechende Glied weglässt.

Verlangen wir weiter, dass jeder Punkt von F_2^4 ein Doppelpunkt von M_4^l ist, so wird ein weiteres Glied der Reihenentwickelung ausgeschlossen, nämlich das von der Normalform $(BX)^{2l-4}(UP)^2$ abhängige Glied. Es gibt also auch nur *eine* kleinste invariante Schaar von M_4^l, die die Fläche F_2^4 nur einfach enthalten, und wir kommen zu dem weiteren Satz:

Die Fläche F_2^4 ist auf

$$\binom{l+5}{5}-(2l-1)(4l-1)$$

linear-unabhängigen Mannigfaltigkeiten l. O. doppelt enthalten.

Ebenso ergibt sich:

Die Fläche F_2^4 ist auf

$$\binom{l+5}{5}-3(2l-3)(3l-4)$$

linear-unabhängigen Mannigfaltigkeiten M_4^l l. O. ($l>3$) in der Weise doppelt enthalten, dass die von den Sehnen von F_2^4 erfüllte invariante Mannigfaltigkeit 3. *O. längs der ganzen Fläche F_2^4 von den M_4^l berührt wird* (mit anderen Worten, dass der Tangentialkegel von M_4^l in einem Punkte von F_2^4 übereinstimmt mit dem Tangentialkegel jener invarianten Mannigfaltigkeit).

Hier und in ähnlichen Fällen erlaubt unsere Analyse nicht nur Zahlen zu bestimmen, wie sie in den letzten Sätzen angegeben sind, sondern auch die in Rede stehenden Mannigfaltigkeiten wirklich hinzuschreiben.

In derselben Weise, wie hier die Mannigfaltigkeiten M_4^l behandelt worden sind, die durch die Fläche F_2^4 hindurchlaufen, kann man auch die identischen Relationen behandeln, die zwischen den Coefficienten einer ternären, quaternären oder senären orthogonalen Substitution bestehen.

Marburg, 21. April 1892.

Berichtigungen zu dem Aufsatze:

Ueber Covarianten ebener Collineationen von P. Muth in Osthofen (Rheinhessen).

Seite 93,	Zeile 16	v. o.	ist nach dem mit dem Worte „an" schliessenden Satze der folgende einzuschalten: Von einem Netze der im System χ für $\varkappa = 1$, $\lambda = 0$, $\mu = 0$ auftretenden identischen Collineation $u_x = 0$ kann nicht gesprochen werden, da $C_\xi^2(u_x) = 0$ ist; dieses ist im Folgenden stets zu berücksichtigen.
„ 93,	„ 20	„ „	lies: $= \lambda^3$ statt $= \lambda^2$.
„ 93,	„ 1	v. u.	ist das Eingeklammerte zu streichen, ebenso die hier gemachte Anm. 2.
„ 94,	„ 8	v. o.	lies: die 3 Werthe statt die Werthe.
„ 94,	„ 25	„ „	lies: $\mu f^2(xu)$ statt $\mu f(xu)$.
„ 95,	„ 9	„ „	sind die Worte „und sämmtlich zu *abc*" überflüssig und deshalb zu streichen.
„ 95,	„ 24	„ „	lies: liegen in statt in.
„ 96,	„ 1	„ „	ist 2) und
„ 97,	„ 2	„ „	das Eingeklammerte zu streichen.

Verbesserung zu Pasch.

Seite 150, Zeile 7 v. u. ist am Ende hinzuzufügen: von Null verschieden.

Inhaltsverzeichniss der Bände 31—40.

C. Isenkrahe in Bonn. Band Seite

F. Junker in Schorndorf.

L. Kiepert in Hannover.

W. Killing in Münster i. W.

F. Klein in Göttingen.

A. Kneser in Dorpat.

G. Kober in Halle a. S.

J. König in Budapest.

INHALT.

Wir ersuchen unsere geehrten Herren Mitarbeiter, etwaige, den Abhandlungen beizufügende Figuren — gleichviel ob dieselben im Texte selbst oder auf besonderen Tafeln veröffentlicht werden sollen — im Interesse einer raschen und exacten Ausführung stets auf besonderen Blättern, wenn möglich in der gewünschten Grösse und in thunlichst präciser Zeichnung dem Manuscripte beilegen zu wollen.

Die Redaction.

Jeder Band der Annalen wird 36—38 Druckbogen umfassen. Um jedoch in jedem Heft nur abgeschlossene Artikel zu geben, werden die einzelnen Hefte mitunter von ungleicher Stärke sein.

Verantwortliche Redaction: **W. Dyck, F. Klein, A. Mayer.**

Hierzu Beilagen von **B. G. Teubner in Leipzig.**