近世幾何學練習

G. POPELIER著
郭堅白譯

商務印書館發行

近世幾何學練習

G. POPELIER著
郭堅白譯

商務印書館發行

目　錄

近世幾何學練習

有向幾何

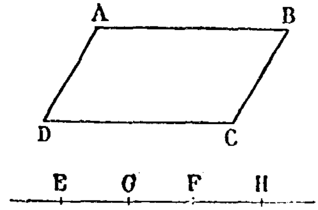
向量

1. 向量乃界於兩點間之一段直線.此兩點有別,一名向量之原點,一名終點.欲名一向量,當先名其原點,次名其終點.例如 A,B 為空間之任意二點,則向量 AB 乃以 A 為原點,B 為終點之向量,而向量 BA 則反是.因之,AB 及 BA 乃不同之二向量.

2. A,B 二點間之距離名曰向量 AB 之長或量.今依照初等幾何習慣,以 AB 代表之,向量 AB 及 BA 具相等之長,因 $AB=BA$ 故也.

一動點自原點 A 出發,沿直線 AB 向終點 B 前進之方向名曰向量 AB 之向,經過 A,B 二點之無限直線名曰向量 AB 之支線.

若二向量之支線平行或重合,且量相等而向相同,則稱為全等向量.例如平行四邊形 $ABCD$ 中,AB 及 DC 為全等之二

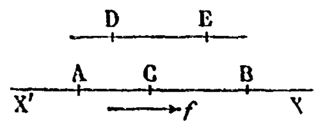


向量,又 AD 及 BC 亦然.又如於一直線上,取 E,F,G,H 四點,而使 $EF=GH$.且使自 E 至 F 之向與自 G 至 H 之向相同,則 EF 及 GH 二向量亦為全等.

同樣,EG 及 FH 二向量亦等.

3 **向量之代數值.** 有向軸,或簡稱軸者,乃曾經任意取定一向之無限直線也.此向名曰軸之正向.通常用一矢尖 f 或 X', X 二字母以顯之,且謂正向乃矢尖 f 之向,或 $X'X$ 之向與此相反之向,即 XX' 之向,名曰負向.

明乎此,欲計算任一向量,AB 之代數值,當先設一有向軸於向量之支線上,或與此支線平行,於是,所謂向量 AB 之代數值云者,乃一代數數,其絕對值即為量 AB 長之數,而其號或為 $+$ 或為 $-$,則視自 A 至 B 之動點,依正向或負向前進而定,換言之,即視向量之向與軸之正向相同或相反而定也.



此代數值之記號為 $\overline{AB}$,而讀為向量 AB.

例如上圖所示,$\overline{AB}$ 為正,而有:$\overline{AB}=+AB$

上式中,AB 所表者乃 A, B 二點之距離,如前所言.

反之,$\overline{BA}$ 為負,而有:$\overline{BA}=+BA=-AB$.

因之,

$$\overline{AB}=-\overline{BA} \text{ 或 } \overline{AB}+\overline{BA}=0$$

同樣,

$$\overline{AC}=+\overline{AC}, \qquad \overline{BC}=-CB,\dots\dots$$

再設有向量 DE,其支線與 $X'X$ 軸平行,於是,有

$$\overline{DE}=+\overline{DE}, \qquad \overline{ED}=-DE,$$

但吾人應注意者,欲計算一向量之代數值,必首須擇取一有向軸,使與向量之支線平行或重合,否則向量之向不可得而與軸之正向比較矣.

4. 若同時有數個向量,位於同一支線上,或平行之數個支線上,則欲定其代數值,當取軸與諸支線平行,而於軸上取同一之正向以爲準繩.

全等之二向量,其代數值亦必相等,此顯而易見者也.反之,代數值相等,而支線平行或重合之二向量,亦必全等.

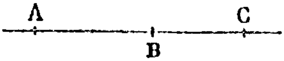
5. Chasles 氏定理. 有向軸上,已與三點 A, B, C, 則有等式:

$$\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}.$$

因居中之點,可爲三點之任何點,故分三種圖形論之.

1° 設 B 位於 A, C 間,於是,有

$$AC=AB+BC$$

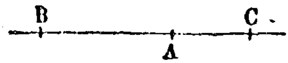


因 AC, AB, BC 三向量同向,故 $\overline{AC}$. $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ 三代數數同號.又因前者之絕對值等於其餘二者之絕對值之和,故代數值 $\overline{AC}$ 亦卽等於 $\overline{AB}$ 及 $\overline{BC}$ 二代數值之和,卽

$$\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}$$

2°. 設 A 位於 B, C 間,於是,有

$$BC=BA+AC$$



因 BC, BA, AC 諸向量同向,故有

$$\overline{BC}=\overline{BA}+\overline{AC}$$

試以 $-\overline{AB}$ 代 $\overline{BA}$,卽得

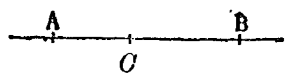
$$\overline{BC}=-\overline{AB}+\overline{AC}$$

或

$$\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC},$$

3°. 設 C 位於 A, B 間,於是,有

$$AB=AC+CB$$



故(理由同前)

$$\overline{AB}=\overline{AC}+\overline{CB}.$$

試以 $-\overline{BC}$ 代 $\overline{CB}$,卽得

$$\overline{AB}=\overline{AC}-\overline{BC}$$

或

$$\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}.$$

此種關係,名曰 Chasles 氏之關係,亦可書如:

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=0$$

6. 定理. 已與一有向軸上之 n 點 $A, B, C, \cdots\cdots H, K, L$, 則有等式

$$\overline{AL}=\overline{AB}+\overline{BC}+\cdots\cdots+\overline{HK}+\overline{KL}$$

上式中有當注意者,卽第二端之各向量之原點乃其前之向量之終點,而其終點又爲後者之原點是也.

此定理在僅有三點時,已證明如上.今假定其在 $n-1$ 點時爲眞,而證其在 n 點時亦眞.

設有 $n-1$ 點 $A, B, C, \cdots\cdots H, K$, 並假定有:

$$\overline{AK}=\overline{AB}+\overline{BC}+\cdots\cdots+\overline{HK}$$

於此式之兩端加同一數 $\overline{KL}$, 得

$$\overline{AK}+\overline{KL}=\overline{AB}+\overline{BC}+\cdots\cdots+\overline{HK}+\overline{KL}$$

但根據 Chasles 氏定理, $\overline{AK}+\overline{KL}=\overline{AL}$, 故

$$\overline{AL}=\overline{AB}+\overline{BC}+\cdots\cdots+\overline{HK}+\overline{KL}$$

而定理證明矣.

此等式亦可書如:

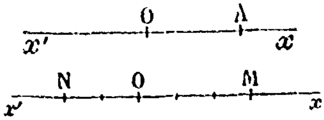
$$\overline{AB}+\overline{BC}+\cdots\cdots+\overline{HK}+\overline{KL}+\overline{LA}=0$$

若有向軸與負載 $A, B, \cdots\cdots KL$ 諸點之直線平行,則本定理亦眞.

7. 一點之橫標. 於以 $X'X$ 爲正向之軸上,任取一定點 O, 而名之曰軸之原點,於是,所謂軸上任一點 A 之橫標者,卽向量 OA 之代數値是也.若 a 代此代數値,卽有

$$a=\overline{OA}.$$

由是以觀:凡軸上之點均有其確定之橫標.特殊言之,原點之橫標爲零.反之,任與一代數數 X, 則軸上必有一點,但亦僅有一點以 x 爲其橫標,蓋此點至 O 之距離乃等於 X 之絕對値,而其位置或在 OX 上,或在 OX' 上.



則視X之爲正或爲負而定也.

例如$X=+3$,則得M點,$X=-2$,則得N點.

8. 問題 已與A,B二點之橫標a,b,求向量AB之代數值.

根據Chaslos氏定理,有

$$\overline{AB}=\overline{AO}+\overline{OB}=\overline{OB}-\overline{OA}$$

以a代$\overline{OA}$,b代$\overline{OB}$,卽得

$$\overline{AB}=b-a.$$

故,向量AB之代數值,乃其終點B之橫標與其原點A之橫標之差.

9. 問題. 已與A,B二點之橫標a,b,求AB之中點之橫標.

設I爲AB之中點.向量IA及IB具相反之代數值,故

$$\overline{IA}+\overline{IB}=0$$

今若命X爲I之橫標,則根據以上所述,卽得

$$\overline{IA}=a-x, \qquad \overline{IB}=b-x$$

因之,

$$a-x+b-x=0$$

故 $$x=\frac{a+b}{2}$$

故,AB之中點之橫標乃A,B二點之橫標之半和.

命O爲諸橫標之原點,則上式亦可書如:

$$\overline{OA}+\overline{OB}=2\overline{OI}.$$

且無論 O, A, B 爲軸上任何三點，若 I 爲 AB 之中點，則上式恆成立.

10. 問題. 有向軸上已與二點 A, B，則此軸上必有一唯一之點 M，使 $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$ 等於一與數 k. $(k\neq 1)$

命 a, b 爲 A, B 之横標，x 爲 M 點之横標. 則

$$\overline{MA}=a-x, \qquad \overline{MB}=b-x$$

而
$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=\frac{a-x}{b-x}$$

等此比於 k，卽得方程式

$$\frac{a-x}{b-x}=k \text{ 或 } x(1-k)=a-bk.$$

依題意 $1-k\neq 0$，故得

$$x=\frac{a-bk}{1-k}$$

此 x 之值卽於軸上確定一唯一之點 M，而定理明矣.

同時，並得以 A, B 二點之横標及與數 k 之函數式，表出 M 點之横標.

11. 反之，已與軸上之三點 A, B, M，若 a, b, x 依次爲各點之横標，而有

$$x=\frac{a-bk}{1-k} \qquad (1)$$

則亦必有
$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=k$$

蓋由(1)式,得 $$\frac{a-x}{b-x}=k$$

卽 $$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=k$$

12. 注意. 若k趨進於1,則x之值無限增加,因之,M點於軸上無限遠去.吾人因謂在$k=1$時,M點位於AB直線上無窮遠處,以表示此種事實焉.

由是可知:與k之任何值對應者,AB直線上必有一唯一之點M,俾

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=k$$

若k不等於1,則M點位於有限距離.若$k=1$,則M點位於無窮遠.

13. 推論: 已與AB直線上兩點M及M',若

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=\frac{\overline{M'A}}{\overline{M'B}}$$

則M,M'二點必重合.

此乃由於AB直線上,僅有一點M,能使$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$等於一與數故也.

本定理之應用極廣,後當見之.

14. 問題. 已與AB直線上二點M及N,若

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=\frac{\overline{NB}}{\overline{NA}}$$

則M,N二點對AB之中點I必為對稱.

設N'為M點對於I點之對稱點.於是顯見:

$$\overline{N'B}=-\overline{MA}, \qquad \overline{N'A}=-\overline{MB}$$

因之,得
$$\frac{\overline{N'B}}{\overline{N'A}}=\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$$

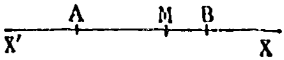
但因題設等式之關係,故

$$\frac{\overline{N'B}}{\overline{N'A}}=\frac{\overline{NB}}{\overline{NA}}$$

由此等式可見(13)N與N'二點重合.故N點為M點對於I點之對稱點.

15. 問題.求研究M點在經過A,B二點之無限直線上移動時,比$\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$之變跡.

首當注意者,即比之號與AB在線上選定之正向無關,蓋變更此正向,代數數$\overline{MA}$及$\overline{MB}$雖隨之變其號,然其比之號則仍舊故也.



今取自A至B之向,即$X'X$向,以為正向,且設A位於B之左,而使動點M依$X'X$向前進,自左端無窮遠處而向右端無窮遠處.

吾人可寫:

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=\frac{\overline{MB}+\overline{BA}}{\overline{MB}}=1+\frac{\overline{BA}}{\overline{MB}}$$

取B點為橫標原點,於是A點之橫標既為負,故以$-a$代

之,a為正,且代表AB之長,又命x為M點之橫標,於是,

$$BA=-a,\qquad \overline{BM}=x,\qquad \overline{MB}=-x$$

因之,命y為比$\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$之值,即有

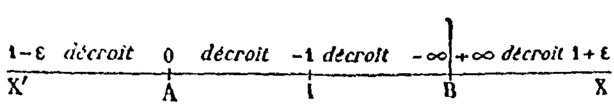
$$y=1+\frac{a}{x}$$

當M點自左端無窮遠處移至右端無窮遠處時,x自$-\infty$增至$+\infty$.

當x自$-\infty$增至0時,$\dfrac{a}{x}$自$-\varepsilon$減至$-\infty$,ε為一任何小之正數,因之,y自$1-\varepsilon$減至$-\infty$.當x自0增至$+\infty$時,$\dfrac{a}{x}$自$+\infty$減至$+\varepsilon$,而y自$+\infty$減至$1+\varepsilon$.

特殊言之,當$x=-a$時,y為零,M點重於A;當$x=-\dfrac{a}{2}$時,$y=-1$,M點位於AB之中點I上.

是故,y之變跡如下表:



關於此變跡,有尤當注意者二事:

1. 當M點位於A,B二點間時,比$\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$為負,而當$M$點位於

線分 AB 外(*)時，此比為正.

2. 當 M 點與 A 點同在 I 點之一側時，比 $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$ 之絕對值小於1. 又當 M 點與 B 點同在 I 點之一側時,此比之絕對值大於1

因向量之代數值之參加於關係比例線之初等幾何公式,定理之敍述往往較簡,今舉數例於下,以後當常見其應用也.

16. 定義. 設 Δ 及 Δ' 為一平面上之二有向軸，L 為直線之一方位,不與 Δ 及 Δ' 平行者,平行於 L 之任一直線交 Δ 及 Δ' 於 A 及 A' 點，此二點名曰對應點與 L 平行之另一直線交 Δ 及 Δ' 於 B 及 B' 點,於是,向量 AB 及 $A'B'$ 名曰對應向量,其二原點及二終點,均各個互為對應點.

定理. 位於 Δ 上之任意二向量之代數值之比等於位於 Δ' 上之二對應向量之代數值之比.

設 $(AB, A'B')$ 及 $(CD, C'D')$ 為二對對應向量,則應證明.

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}=\frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

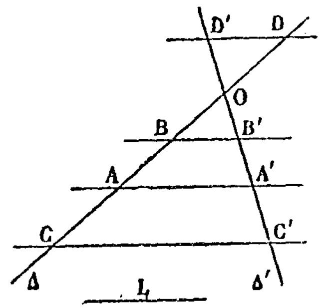
在初等幾何學中,就絕對值而論,常已證明此關係之成立,換言之,卽

$$\frac{AB}{CD}=\frac{A'B'}{C'D'}$$

但,若 AB 及 CD 二向量同向，卽 $\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ 為正.則 $A'B'$ 及 $C'D'$ 二

(*)直線分 AB，或簡稱線分 AB，乃介於 A,B 二點間之一段直線，斯處，A、B 二點并無區別，例如線分 AB 與線分 BA 乃同指一物者也.

向量亦同向，故比 $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$ 亦爲正．



又若 AB 及 CD 二向量異向，卽 $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$ 爲負，則 $A'B'$ 及 $C'D'$ 二向量亦異向，故比 $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$ 亦爲負．

因之 $\dfrac{AB}{CD}$ 及 $\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$ 二比．就量及號言之，均相等，而定理明矣．

A, B, C, D，諸點顯然爲 Δ 上之任意點．例如 C, D 二點之一可與 A, B 二點之一重合，因之，吾人亦有

$$\frac{AB}{AC}=\frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}},\quad \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{A'B'}{\overline{B'C'}}$$

注意．(1) 式亦可書如：

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}}$$

由此可見：任何二對應向量之代數值之比爲常數．卽無論此二向量如何，此比恆具同一之值也．

17. 逆定理． 設 (A, A') 及 (B, B') 二對對應點，今若於 Δ 上取一點 C，Δ' 上取一點 C'，俾有下列之一等式：

$$(1)\qquad \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}} \qquad\qquad (2)\qquad \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{A'C'}}{\overline{B'C'}}$$

則 C, C' 兩點卽爲兩對應點，或換言之，直線 CC' 平行於 AA' 及 BB'．

自 C' 點引一直線平行 AA'，而命其與 Δ 之交點為 C_1，於是，吾人所應證明者乃 C_1 與 C 重合.

根據上述定理，吾人有

$$(1)' \qquad \frac{\overline{AB}}{\overline{BC_1}}=\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}, \qquad\qquad (2)' \qquad \frac{\overline{AC_1}}{\overline{BC_1}}=\frac{\overline{A'C'}}{\overline{B'C'}}$$

假定題與之關係為 (1)，而比較 (1) 與 (1)′，即得

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{BC_1}} \quad \text{或} \quad \overline{BC}=\overline{BC_1}$$

由此可見 C_1 與 C 重合.

若題與之關係為 (2)，則比較 (2) 及 (2)′，即得

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{AC_1}}{\overline{BC_1}} \quad \text{或} \quad \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}=\frac{\overline{C_1A}}{\overline{C_1B}}$$

由此可見 C_1 與 C 重合 (13).

18. **定理**. 已與三角形 ABC 及與 BC 邊平行而與 AB 交於 B'，AC 交於 C' 之一直線. 求證：

$$\frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}}$$

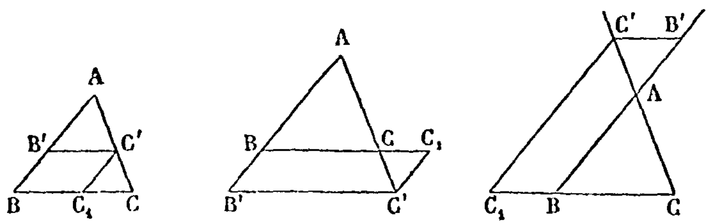
吾人當注意此三比之號與三角形三邊上所選定之三正向無關.

圖形不同之情形有三.

首先 $\dfrac{\overline{AB'}}{\overline{AB}}$，$\dfrac{\overline{AC'}}{\overline{AC}}$ 二比之相等已於16款中證明，故今只須證明

此二比等於$\dfrac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}}$已足.

爲此,自C'點引一直線平行於AB,而設其與BC之交點爲C_1,今$B'C'$, BC_1二向量旣屬全等,故有



$$\overline{B'C'}=\overline{BC_1}$$

直線CA, CB旣與平行直線$C'C_1$及AB相交,故應用16款之定理,卽得

$$\frac{\overline{BC_1}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}}$$

再以$\overline{B'C'}$代$\overline{BC_1}$,得

$$\frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{AC'}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}}$$

於是定理證明矣.

19. 逆定理. 設BC, $B'C'$爲二平行向量,A爲BB'直線上一點,若

$$\frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}}$$

則直線CC'必經過A點.

引直線AC'而命其與BC直線之交點爲C_1.

今當證明C_1與C重合.

根據前定理有

$$\frac{\overline{AB'}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC_1}}$$

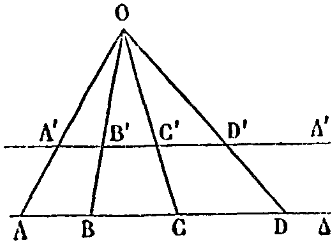
比較此式與題設之等式,得

$$\frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC_1}}=\frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}}$$

由此可見C_1與C重合.

20. 定理. 已與二平行有向軸Δ, Δ'及其平面上一點O過此點作截線與Δ及Δ'交於(A, A'), (B, B') (C, C'), ……諸對應點,求證Δ上任意二向量之代數值$\overline{AB}$, $\overline{CD}$之比等於Δ'上二對應向量之代數值$\overline{A'B'}$, $\overline{C'D'}$之比,即

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}=\frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$$



應用18款之定理於ΔOAB,得

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$$

又,由三角形OAC,得

$$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}$$

由三角形OCD,得

$$\frac{\overline{OC'}}{\overline{OC}}=\frac{\overline{C'D'}}{\overline{CD}}$$

由是，推得

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{C'D'}}{\overline{CD}}，\text{或}\quad\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}=\frac{\overline{A'B'}}{\overline{C'D'}}$$

於是定理證明矣.

注意. 上式亦可書如

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}}$$

故吾人亦謂二對應向量之代數值之比爲常數.

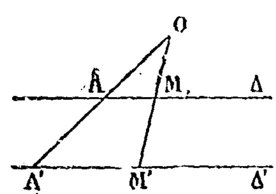
21. 逆定理. 已與二平行有向軸 Δ 及 Δ'，於 Δ 上取一定點 A，一動點 M，於 Δ' 上取一定點 A'，一動點 M'，而使

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{A'M'}}=k$$

k 爲一不等於 1 之常數.

求證直線 MM' 經過一定點.

k 既不等於 1，則直線 AA' 及 MM' 必相遇於一點 O，而在三角形 OAM 內，有 (18)



$$\frac{\overline{AM}}{\overline{A'M'}}=\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}}$$

因之.

$$\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}}=k$$

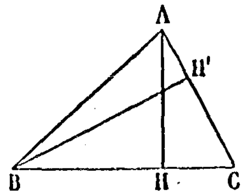
今 A，A'，二點既爲定點，故 O 點亦爲定點 (10)，於是定理證明矣.

22. 定理. 三角形任一邊之平方等於其餘二邊之平方

和,減去二向量之代數值之相乘積之二倍,此二向量具同一之原點,而乃其餘二邊中之一邊及他一邊在此邊上之射影.

取三角形 ABC 之 AB 邊論之,其餘二邊乃 CA 及 CB. 將 CA 射於 CB 上,而命其射影爲 CH,於是,題中所言之二向量卽 $\overline{CA}$ 及 $\overline{CH}$ 是也. 其公同之原點爲 C. 故今當證明者乃等式

$$\overline{AB}^2=\overline{CA}^2+\overline{CB}^2-2\overline{CB}\cdot\overline{CH}$$



但吾人亦可將 CB 射於 CA 上,而成射影 CH',於是,亦應有:

$$\overline{AB}^2=\overline{CA}^2+\overline{CB}^2-2\overline{CA}\cdot\overline{CH'}$$

茲取第一式證之,於三角形 ABH 內,得

$$\overline{AB}^2=\overline{AH}^2+\overline{BH}^2$$

但,根據 Chasles 氏公式 (5),有

$$\overline{BH}=\overline{BC}+\overline{CH}=\overline{CH}-\overline{CB}.$$

故 $$\overline{AB}^2=\overline{AH}^2+(\overline{CH}-\overline{CB})^2$$

展之,有 $$\overline{AB}^2=\overline{AH}^2+\overline{CH}^2+\overline{CB}^2-2\overline{CB}\cdot\overline{CH}.$$

但,自直角三角形 ACH, 得

$$\overline{AH}^2+\overline{CH}^2=\overline{CA}^2.$$

因之,上式變爲:

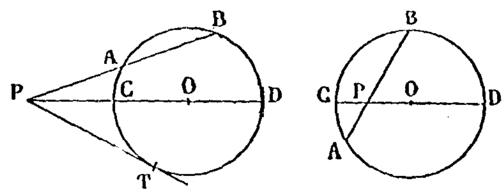
$$\overline{AB}^2=\overline{CA}^2+\overline{CB}^2-2\overline{CB}\cdot\overline{CH}.$$

而定理證明矣.

23. 一點對於一圓之羃. 已與一圓及不在圓上之一點 P. 自 P 點任引一割線與圓相交於 A, B 二點,相乘積:

$$\overline{PA}\cdot\overline{PB}$$

具一不變之值,與割線之位置無涉.是謂 P 點對於圓之羃.此相乘積之絕對值之爲常數,在初等幾何學中已證明.



若 P 點位於圓外,則此相乘積爲正,蓋斯時 $\overline{PA}, \overline{PB}$ 同號故也.若 P 點位於圓內,則此相乘積爲負,蓋斯時 $\overline{PA}, \overline{PB}$ 異號故也.但無論如何情形,此羃恆等於

$$\overline{PO}^2-\overline{R}^2$$

O 爲圓心, R 爲半徑.

蓋,吾人若過圓心引割線 PCD, 則有

$$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PC}\cdot\overline{PD}=(\overline{PO}+\overline{OC})(\overline{PO}+\overline{OD})$$

因 $\overline{OD}=-\overline{OC}$, 故

$$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=(\overline{PO}+\overline{OC})(\overline{PO}-\overline{OC})=\overline{PO}^2-\overline{OC}^2$$

或

$$\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PO}^2-R^2$$

在 P 點位與圓外之特殊情形下,此點之羃亦等於 $\overline{PT}^2$, T

乃自P點所引之一切線之切點也.

24. **定義.** 已與不同在一平面上之二有向軸Δ及Δ',及一不與此二軸平行之一平面方位P,於是與P平行之任一平面必與Δ, Δ'交於A, A'點,是謂對應點.另一與P平行之平面與Δ, Δ'交於B, B'二對應點,向量AB及$A'B'$名曰對應向量.其兩原點及兩終點均名爲對應點也.

定理. Δ上任二向量之代數值之比等於Δ'上二對應向量之代數值之比.證明與16款同.

25. **逆定理.** 設(A, A')及(B, B')爲二對對應點.若C爲Δ上一點,C'爲Δ'上一點.而有下列二等式之一:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}, \quad \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{A'C'}}{\overline{B'C'}}$$

則C與C'必爲對應點.換言之,卽直線CC'必與平面P平行也.

證明與17款同.

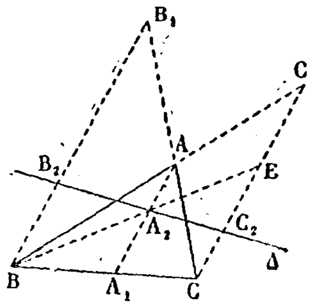
26. **問題.** 自三角形ABC之各角頂引出之三平行線與三對邊相交於A_1, B_1, C_1三點.而與任一截線Δ交於A_2, B_2, C_2三點.

求證:

$$\frac{\overline{AA_2}}{\overline{AA_1}}+\frac{\overline{BB_2}}{\overline{BB_1}}+\frac{\overline{CC_2}}{\overline{CC_1}}=1$$

設E爲BA_2與CC_1之交點.由AA_1, CC_1,二平行線與自B點引出之割線BAC_1, BA_2E, BA_1C得(20):

$$\frac{\overline{AA_2}}{\overline{AA_1}} = \frac{\overline{C_1E}}{\overline{CC_1}} = \frac{\overline{EC_1}}{\overline{CC_1}}$$



但 $$\overline{EC_1} = \overline{EC_2} + \overline{C_2C} + \overline{CC_1}$$

因之， $$\frac{\overline{EC_1}}{\overline{CC_1}} = \frac{\overline{EC_2}}{\overline{CC_1}} + \frac{\overline{C_2C}}{\overline{CC_1}} + 1$$

$$= 1 - \frac{\overline{CC_2}}{\overline{CC_1}} - \frac{\overline{C_2E}}{\overline{CC_1}}$$

故 $$\frac{\overline{AA_2}}{\overline{AA_1}} = 1 - \frac{\overline{CC_2}}{\overline{CC_1}} - \frac{\overline{C_2E}}{\overline{CC_1}}$$

今若比較此式與應證之等式，則見所應證明者，乃

$$\frac{\overline{C_2E}}{\overline{CC_1}} = \frac{\overline{BB_2}}{\overline{BB_1}}$$

因三角形 A_2EC_2 為與邊 EC_2 平行之直線 BB_2 所割，故有(18)

$$\frac{\overline{C_2E}}{\overline{B_2B}} = \frac{\overline{A_2C_2}}{\overline{A_2B_2}} = \frac{\overline{A_1C}}{\overline{A_1B}}$$

同樣，因三角形 ACC_1 為與邊 CC_1 平行之直線 BB_1 所割，故有

$$\frac{\overline{CC_1}}{\overline{B_1B}} = \frac{\overline{AC_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A_1C}}{\overline{A_1B}}$$

由是推得：

$$\frac{\overline{C_2E}}{\overline{B_2B}} = \frac{\overline{CC_1}}{\overline{B_1B}}$$

或

$$\frac{\overline{C_2E}}{\overline{CC_1}} = \frac{\overline{BB_2}}{\overline{BB_1}}$$

是即所應證明之關係.

27. 問題. 自 ABC 三角形之平面內一 P 點,引 $\beta\gamma'$ 平行 CB. $\gamma\alpha'$ 平行 AC, $\alpha\beta'$ 平行 BA. 此三直線於 BC, CA, AB 三邊上依次作成 $\alpha\alpha', \beta\beta', \gamma\gamma'$ 三向量,求證下列各式:

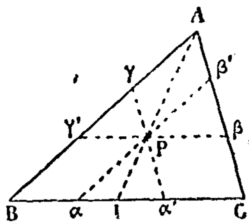
$$(1)\qquad \overline{P\alpha}\cdot\overline{P\beta}\cdot\overline{P\gamma}=-\overline{P\alpha'}\cdot\overline{P\beta'}\cdot\overline{P\gamma'}$$

$$(2)\qquad \frac{\overline{\alpha\alpha'}}{\overline{BC}}+\frac{\overline{\beta\beta'}}{\overline{CA}}+\frac{\overline{\gamma\gamma'}}{\overline{AB}}=1$$

$$(3)\qquad \frac{\overline{P\alpha}}{\overline{AB}}+\frac{\overline{P\beta}}{\overline{BC}}+\frac{\overline{P\gamma}}{\overline{CA}}=1$$

$$(4)\qquad \frac{\overline{P\alpha'}}{\overline{CA}}+\frac{\overline{P\beta'}}{\overline{AB}}+\frac{\overline{P\gamma'}}{\overline{BC}}=1$$

引直線 AP 與對邊相交於 I 點,即得(18)



$$\frac{\overline{IP}}{\overline{IA}}=\frac{\overline{P\alpha}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{P\alpha'}}{\overline{AC}}$$

及 $$\frac{\overline{IP}}{\overline{IA}}=\frac{\overline{I\alpha}}{\overline{IB}}=\frac{\overline{I\alpha'}}{\overline{IC}}=\frac{\overline{I\alpha'}-\overline{I\alpha}}{\overline{IC}-\overline{IB}}$$

或 $$\frac{\overline{IP}}{\overline{IA}}=\frac{\overline{\alpha\alpha'}}{\overline{BC}}$$

故 $$(a)\qquad \frac{\overline{P\alpha}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{P\alpha'}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{\alpha\alpha'}}{\overline{BC}}$$

由是用圓周輪換,可推得

$$(b)\qquad \frac{\overline{P\beta}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{P\beta'}}{\overline{BA}}=\frac{\overline{\beta\beta'}}{\overline{CA}}$$

$$(c)\qquad \frac{\overline{P\gamma}}{\overline{CA}}=\frac{\overline{P\gamma'}}{\overline{CB}}=\frac{\overline{\gamma\gamma'}}{\overline{AB}}$$

故 $$\frac{\overline{P\alpha}}{\overline{P\alpha'}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}},\ \frac{\overline{P\beta}}{\overline{P\beta'}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{BA}},\ \frac{\overline{P\gamma}}{\overline{P\gamma'}}=\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$$

並將各式兩端各自相乘,即得:

$$\frac{\overline{P\alpha}}{\overline{P\alpha'}}\cdot\frac{\overline{P\beta}}{\overline{P\beta'}}\cdot\frac{\overline{P\gamma}}{\overline{P\gamma'}}=1$$

或 $$\overline{P\alpha}\cdot\overline{P\beta}\cdot\overline{P\gamma}=-\overline{P\alpha'}\cdot\overline{P\beta'}\cdot\overline{P\gamma'}$$

是即所應證明之(1)式.

又,因 $$\frac{\overline{A\gamma}+\overline{\gamma\gamma'}+\overline{\gamma'B}}{\overline{AB}}=1$$

而 $$\overline{A\gamma}=\overline{\beta'P}=-\overline{P\beta'},\ \overline{\gamma'B}=\overline{P\alpha}$$

故 $$\frac{-\overline{P\beta'}+\overline{\gamma\gamma'}+\overline{P\alpha}}{\overline{AB}}=1$$

或 $$\frac{\overline{P\alpha}}{\overline{AB}}+\frac{\overline{P\beta'}}{\overline{BA}}+\frac{\overline{\gamma\gamma'}}{\overline{AB}}=1\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

但由$(a)(b)(c)$諸式,得

$$\frac{\overline{P\alpha}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{\alpha\alpha'}}{\overline{BC}},\ \frac{\overline{P\beta'}}{\overline{BA}}=\frac{\overline{\beta\beta'}}{\overline{CA}}$$

故有 $$\frac{\overline{\alpha\alpha'}}{\overline{BC}}+\frac{\overline{\beta\beta'}}{\overline{CA}}+\frac{\overline{\gamma\gamma'}}{\overline{AB}}=1$$

是即所應證明之(2)式.

於(5)式中以$\frac{\overline{P\beta}}{\overline{BC}}$代$\frac{\overline{P\beta'}}{\overline{BA}}$,$\frac{\overline{P\gamma}}{\overline{CA}}$代$\frac{\overline{\gamma\gamma'}}{\overline{AB}}$,即得

$$\frac{\overline{P\alpha}}{\overline{AB}}+\frac{\overline{P\beta}}{\overline{BC}}+\frac{\overline{P\gamma}}{\overline{CA}}=1$$

最後,於此(5)式中,以 $\frac{\overline{P\alpha'}}{\overline{AC}}$ 代 $\frac{\overline{P\alpha}}{\overline{AB}}$, $\frac{\overline{P\gamma'}}{\overline{CB}}$ 代 $\frac{\overline{\gamma\gamma'}}{\overline{AB}}$,即得

$$\frac{\overline{P\alpha'}}{\overline{AC}}+\frac{\overline{P\beta'}}{\overline{BA}}+\frac{\overline{P\gamma'}}{\overline{CB}}=1$$

或

$$\frac{\overline{P\alpha'}}{\overline{CA}}+\frac{\overline{P\beta'}}{\overline{AB}}+\frac{\overline{P\gamma'}}{\overline{BC}}=-1$$

23. **Euler 氏之關係.** 有向軸上,已與四點 A, B, C, P, 卽有:

$$\overline{PA}\cdot\overline{BC}+\overline{PB}\cdot\overline{CA}+\overline{PC}\cdot\overline{AB}=0$$

第一證明. 命 a, b, c, p 爲 A, B, C, P 四點之橫標,則有 (8) $\overline{PA}=a-p$, $\overline{BC}=c-b$……… 因之,所應證明之關係變爲:

$$(a-p)(c-b)+(b-p)(a-c)+(c-p)(b-a)=0$$

此式第一端中, p 之係數

$$-(c-b)-(a-c)-(b-a)$$

爲零,其不含 p 之項

$$a(c-b)+b(a-c)+c(b-a)$$

亦爲零,故第一端等於零也.

第二證明. 由 Chasles 氏之公式 (5),得

$$\overline{PA}=\overline{PC}+\overline{CA},\quad \overline{PB}=\overline{PC}+\overline{CB}$$

以 $\overline{BC}$ 乘第一式, $\overline{CA}$ 乘第二式,而加之,得

$$\overline{PA}\cdot\overline{BC}+\overline{PB}\cdot\overline{CA}=\overline{PC}(\overline{BC}+\overline{CA})+\overline{CA}\cdot\overline{BC}+\overline{CB}\cdot\overline{CA}$$

第二端中,$\overline{PC}$之係數$\overline{BC}+\overline{CA}$爲$\overline{BA}$,其餘兩項之和,$\overline{CA}\cdot\overline{BC}+\overline{CB}\cdot\overline{CA}$爲零,因$\overline{BC}=-\overline{CB}$故也.因之,有

$$\overline{PA}\cdot\overline{BC}+\overline{PB}\cdot\overline{CA}=\overline{PC}\cdot\overline{BA}$$

或

$$\overline{PA}\cdot\overline{BC}+\overline{PB}\cdot\overline{CA}+\overline{PC}\cdot\overline{AB}=0$$

第三證明. 設$f(P)=\overline{PA}\cdot\overline{BC}+\overline{PB}\cdot\overline{CA}+\overline{PC}\cdot\overline{AB}$

今先證明$f(P)$量之值,當P點於ABC直線上移動時,保持不變,然後證明此值爲零.

設P'爲直線上另一點,於是

$$f(P')=\overline{P'A}\cdot\overline{BC}+\overline{P'B}\cdot\overline{CA}+\overline{P'C}\cdot\overline{AB}$$

因之,

$$f(P)-f(P')=(\overline{PA}-\overline{P'A})\cdot\overline{BC}+(\overline{PB}-\overline{P'B})\cdot CA+(\overline{PC}-\overline{P'C})\cdot\overline{AB}$$

但

$$\overline{PA}-\overline{P'A}=\overline{PA}+\overline{AP'}=\overline{PP'}$$

同樣

$$\overline{PB}-\overline{P'B}=\overline{PC}-\overline{P'C}=\overline{PP'}$$

故

$$f(P)-f(P')=\overline{PP'}(\overline{BC}+\overline{CA}+\overline{AB})$$

根據Chasles氏公式,第二端爲零.故有

$$f(P)=f(P')$$

是卽顯明,無論P點之位置如何,$f(P)$恆保持一定之值而不變也.

欲求此值,可將P點置於ABC直線上任意一點.例如A點,於是

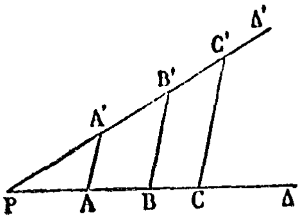
$$f(A)=\overline{AB}\cdot\overline{CA}+\overline{AC}\cdot\overline{AB}=\overline{AB}(\overline{CA}+\overline{AC})=0$$

因 $f(A)$ 爲零，故無論 P 爲何點，$f(P)$ 亦爲零

29. 問題. Δ 及 Δ' 二有向軸，依次與三平行直線交於 (A, A') (B, B')，(C, C') 諸點.

求證

$$\overline{AA'}\cdot\overline{BC}+\overline{BB'}\cdot\overline{CA}+\overline{CC'}\cdot\overline{AB}=0$$



設 P 爲 Δ 及 Δ' 之交點，AA' 旣與 BB' 平行. 故有 (18)

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=\frac{\overline{AA'}}{\overline{BB'}}$$

或
$$\frac{\overline{PA}}{\overline{AA'}}=\frac{\overline{PB}}{\overline{BB'}}$$

同樣.
$$\frac{\overline{PA}}{AA'}=\frac{\overline{PC}}{\overline{CC'}}$$

故
$$\frac{\overline{PA}}{\overline{AA'}}=\frac{\overline{PB}}{\overline{BB'}}=\frac{\overline{PC}}{\overline{CC'}}.$$

命 λ 爲此三比之公共值，於是

$$\overline{PA}=\lambda\cdot\overline{AA'},\ \overline{PB}=\lambda\cdot\overline{BB'},\ \overline{PC}=\lambda\cdot\overline{CC'}$$

將上列 $\overline{PA}$, $\overline{PB}$, $\overline{PC}$ 之各值代入 Eulor 氏關係 (28)，而以 λ 除之，卽得

$$\overline{AA'}\cdot\overline{BC}+\overline{BB'}\cdot\overline{CA}+\overline{CC'}\cdot\overline{AB}=0$$

30. 問題. 設 (A, A')，(B, B')，(C, C') 爲一有向軸上之三對點，a b，c 爲線分 AA' BB' CC' 之中點. 求證：若 P 爲軸上任一點，則

$$f(P)=\overline{PA}\cdot\overline{PA'}\cdot\overline{bc}+PB\cdot PB'\cdot\overline{ca}+\overline{PC}\cdot\overline{PC'}\cdot\overline{ab}$$

之值爲常數.

命Q爲軸上另一任意點,於是

$$\overline{PA}=\overline{PQ}+\overline{QA}$$

$$\overline{PA'}=\overline{PQ}+\overline{QA'}$$

兩端相乘,則得

$$\overline{PA}\cdot\overline{PA'}=\overline{PQ}^2+\overline{PQ}(\overline{QA}+\overline{QA'})+\overline{QA}\cdot\overline{QA'}$$

今a既爲AA'之中點,故(9)

$$\overline{QA}+\overline{QA'}=2\overline{Qa}$$

因之, $$\overline{PA}\cdot\overline{PA'}=\overline{PQ}^2+2\overline{PQ}\cdot\overline{Qa}+\overline{QA}\cdot\overline{QA'}$$

以$\overline{bc}$乘之,得

$$\overline{PA}\cdot\overline{PA'}\cdot\overline{bc}=\overline{PQ}^2\cdot\overline{bc}+2\overline{PQ}\cdot\overline{Qa}\cdot\overline{bc}+\overline{QA}\cdot\overline{QA'}\cdot\overline{bc}$$

同樣,得 $$\overline{PB}\cdot\overline{PB'}\cdot\overline{ca}=\overline{PQ}^2\cdot\overline{ca}+2\overline{PQ}\cdot\overline{Qb}\cdot\overline{ca}+\overline{QB}\cdot\overline{QB'}\cdot\overline{ca}$$

$$\overline{PC}\cdot\overline{PC'}\cdot\overline{ab}=\overline{PQ}^2\cdot\overline{ab}+2\overline{PQ}\cdot\overline{Qc}\cdot\overline{ab}+\overline{QC}\cdot\overline{QC'}\cdot\overline{ab}$$

將此三式兩端相加,則所得新等式之第一端卽爲$f(P)$.至於第二端中,$\overline{PQ}^2$之係數爲:

$$\overline{bc}+\overline{ca}+\overline{ab}$$

根據Chasles公式,是等於零.

$2\cdot\overline{PQ}$之係數爲:

$$\overline{Qa}\cdot\overline{bc}+\overline{Qb}\cdot\overline{ca}+\overline{Qc}\cdot\overline{ab}$$

根據Euler公式,是亦等於零.

最後,不含 $\overline{PQ}$ 之項卽爲 $f(Q)$,故有

$$f(P)=f(Q)$$

而定理證明矣.

31. Stewart 氏關係. 已與有向軸上四點, A, B, C, P,則有:

$$\overline{PA}^2\cdot\overline{BC}+\overline{PB}^2\cdot\overline{CA}+\overline{PC}^2\cdot\overline{AB}+\overline{BC}\cdot\overline{CA}\cdot\overline{AB}=0$$

第一證明. 命 a, b, c, p 爲 A, B, C, P 之橫標,則所應證明之等式乃:

$$(a-p)^2(c-b)+(b-p)^2(a-c)+(c-p)^2(b-a)+(c-b)(a-c)(b-a)=0$$

此式中, p^2 項之係數, $(c-b)+(a-c)+(b-a)=0$.

p 項之係數: $-2a(c-b)-2b(a-c)-2c(b-a)$ 亦等於零.

不含 p 之項爲:

$$a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)+(c-b)(a-c)(b-a)$$

欲證明此式爲零,可將其依 a 整列,而證明 a^2, a 及不含 a 之各項之係數均爲零.

今此多項式可書如:

$$a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)+(c-b)[-a^2+a(b+c)-bc]$$

故其 a^2 項之係數 $c-b-(c-b)$ 爲零.

a 項之係數 $b^2-c^2+(c-b)(b+c)$ 亦爲零.

最後,不含 a 項爲 $-b^2c+bc^2-bc(c-b)$ 仍等於零.

故所證之關係明矣.

第二證明. 將等式 $\overline{PA}=\overline{PC}+\overline{CA}$ 平方之,得

$$\overline{PA}^2=\overline{PC}^2+2\overline{PC}\cdot\overline{CA}+\overline{CA}^2$$

同樣，以 B 代 A，得

$$\overline{PB}^2=\overline{PC}^2+2\overline{PC}\cdot\overline{CB}+\overline{CB}^2$$

以 $\overline{BC}$ 乘第一式，$\overline{CA}$ 乘第二式，而加之，得

$\overline{PA}^2\cdot\overline{BC}+\overline{PB}^2\cdot\overline{CA}=\overline{PC}^2(\overline{BC}+\overline{CA})+2\overline{PC}(\overline{CA}\cdot\overline{BC}+\overline{CB}\cdot\overline{CA})+$
$\overline{CA}^2\cdot\overline{BC}+\overline{CB}^2\cdot\overline{CA}.$

第二端中，$\overline{PC}^2$ 項之係數 $\overline{BC}+\overline{CA}$ 卽 $\overline{BA}$，$2\cdot\overline{PC}$ 之係數可書如 $\overline{CA}(\overline{BC}+\overline{CB})$. 故爲零.最後，不含 $\overline{PC}$ 之項爲：

$$\overline{CA}^2\cdot\overline{BC}+\overline{CB}^2\cdot\overline{CA}$$

或
$$\overline{CA}\cdot\overline{BC}(\overline{CA}+\overline{BC})$$

又或
$$\overline{CA}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{BA}$$

故
$$\overline{PA}^2\cdot\overline{BC}+\overline{PB}^2\cdot\overline{CA}=\overline{PC}^2\cdot\overline{BA}+\overline{CA}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{BA}$$

或
$$\overline{PA}^2\cdot\overline{BC}+\overline{PB}^2\cdot\overline{CA}+\overline{PC}^2\cdot\overline{AB}+\overline{BC}\cdot\overline{CA}\cdot\overline{AB}=0.$$

第三證明. 此與前述之 Euler 公式第三證明相同.

設
$$f(P)=\overline{PA}^2\cdot\overline{BC}+\overline{PB}^2\cdot\overline{CA}+\overline{PC}^2\cdot\overline{AB}+\overline{BC}\cdot\overline{CA}\cdot\overline{AB}$$
$$f(P')=\overline{P'A}^2\cdot\overline{BC}+\overline{P'B}^2\cdot\overline{CA}+\overline{P'C}^2\cdot\overline{AB}+\overline{BC}\cdot\overline{CA}\cdot\overline{AB}$$

而自第一式減第二式，卽得

$$f(P)-f(P')=(\overline{PA}^2-\overline{P'A}^2)\overline{BC}+(\overline{PB}^2-\overline{P'B}^2)\cdot\overline{CA}+(\overline{PC}^2-\overline{P'C}^2)\cdot\overline{AB}$$

但
$$\overline{PA}^2-\overline{P'A}^2=(\overline{PA}+\overline{P'A})(\overline{PA}-\overline{P'A})$$

而
$$\overline{PA}-\overline{P'A}=\overline{PA}+\overline{AP'}=\overline{PP'}$$

又.命 O 爲 $\overline{PP'}$ 之中點，則

$$\overline{PA}+\overline{P'A}=2\overline{OA}$$

因吾人若取A點爲橫標原點,則有(9)

$$AO=\frac{\overline{AP+AP'}}{2}$$

故也.是以

$$\overline{PA}^2-\overline{P'A}^2=2\cdot\overline{PP'}\cdot\overline{OA}.$$

同樣.

$$\overline{PB}^2-\overline{P'B}^2=2\cdot\overline{PP'}\cdot\overline{OB}.$$

$$\overline{PC}^2-\overline{P'C}^2=2\cdot\overline{PP'}\cdot\overline{OC}.$$

於是, $$f(P)-f(P')=2\overline{PP'}[\overline{OA}\cdot\overline{BC}+\overline{OB}\cdot\overline{CA}+\overline{OC}\cdot\overline{AB}]$$

但根據 Euler 公式,大括符內之量爲零.故

$$f(P)=f(P')$$

是即明示$f(P)$保持一常數之值也.

次,置P點於A點,則得

$$f(A)=\overline{AB}^2\cdot\overline{CA}+\overline{AC}^2\cdot\overline{AB}+\overline{BC}\cdot\overline{CA}\cdot\overline{AB}$$

或,置$\overline{AB}\cdot\overline{CA}$爲因子,即有

$$f(A)=\overline{AB}\cdot\overline{CA}[\overline{AB}+\overline{CA}+\overline{BC}]=0$$

故$f(P)$無論P點之位置如何恆爲零.

上述各關係式乃更普通之關係式之特殊情形.今將證之於后,此等關係.由Chasles氏發見,詳載於其所著高等幾何第十六章.

32. 定理. 設有同在一有向軸上之n點$A, B, C, D, \ldots\ldots H, L$及$n-1$點$M, N, P, \ldots\ldots U, V$.求證關係:

$$(1)\quad \frac{\overline{AM}\cdot\overline{AN}\cdot\overline{AP}\cdots\cdots\overline{AU}\cdot\overline{AV}}{\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}\cdots\cdots\overline{AH}\cdot\overline{AL}}+\frac{\overline{BM}\cdot\overline{BN}\cdot\overline{BP}\cdots\cdots\overline{BU}\cdot\overline{BV}}{\overline{BC}\cdot\overline{BD}\cdots\cdots\overline{BH}\cdot\overline{BL}\cdot\overline{BA}}$$

$$+\frac{\overline{CM}\cdot\overline{CN}\cdot\overline{CP}\cdots\cdots\overline{CU}\cdot\overline{CV}}{\overline{CD}\cdots\cdots\overline{CH}\cdot\overline{CL}\cdot\overline{CA}\cdot\overline{CB}}+\cdots\cdots+\frac{\overline{LM}\cdot\overline{LN}\cdot\overline{LP}\cdots\cdots\overline{LU}\cdot\overline{LV}}{\overline{LA}\cdot\overline{LB}\cdot\overline{LC}\cdots\cdots\cdots\cdots\overline{LH}}=1$$

吾人首當注意者,卽此關係在$n=2$時,卽有二點A, B及一點M時爲眞,蓋斯時,等式(1)變爲:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}}+\frac{\overline{BM}}{\overline{BA}}=1$$

而此式之前端可書如:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}}+\frac{\overline{MB}}{\overline{AB}},\text{ 或 }\frac{\overline{AM}+\overline{MB}}{\overline{AB}},\text{ 又或 }\frac{\overline{AB}}{\overline{AB}}$$

是卽1也.

今假定此關係在$n-1$個$A, B\cdots\cdots$點及$n-2$個$M, N,\cdots\cdots$點時爲眞,而證其在n個$A,B,$點及$n-1$個$M, N,\cdots\cdots$點時亦眞.

爲此,可暫時假定,無論$A, B,\cdots\cdots M, N,\cdots\cdots$爲何點,等式(1)不眞,而求確定$V$點(其他諸點爲與點),使此關係成立,於是,命$V$點之未知橫標爲$x$, $A, B,\cdots\cdots$諸點之橫標爲$a, b\cdots\cdots$,而於(1)式中,以$x-a, x-b,\cdots\cdots$代$\overline{AV}, \overline{BV},\cdots\cdots$卽得一含$x$之一次方程式,普通言之,此方程式具唯一之根,故(1)式若爲不眞,則僅有一點V能使其爲眞.

置V點於L點,而考察(1)式之變化,卽見第一比之上下兩項均可爲$\overline{AL}$整除,第二比爲$\overline{BL}$整除,$\cdots\cdots$而最後一比爲零,是故(1)式變爲一同類之式,但僅含$n-1$個$A, B,\cdots\cdots H$點及

$n-2$ 個 $M, N, \cdots\cdots U$ 點而已. 然根據假定, 此關係爲眞, 故吾人由此推知, 當 V 點重於 L 點時, (1) 式爲眞. 同理可證明, 當 V 點重於 $A, B, \cdots\cdots H$ 各一點上時, (1) 式亦眞.

但吾人適已證明, 若 (1) 對於 $A, B, \cdots\cdots, M, N, \cdots\cdots$ 諸點之各位置爲不眞, 則僅有一 V 點能使之爲眞.

由是, 可推知 (1) 式對於 $A, B, \cdots\cdots M, N, \cdots\cdots$ 諸點之各位置爲眞矣.

例如, n 等於 3 時, 得

$$\frac{\overline{AM}\cdot\overline{AN}}{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}+\frac{\overline{BM}\cdot\overline{BN}}{\overline{BC}\cdot\overline{BA}}+\frac{\overline{CM}\cdot\overline{CN}}{\overline{CA}\cdot\overline{CB}}=1$$

又, $n=4$ 時, 得

$$\frac{\overline{AM}\cdot\overline{AN}\cdot\overline{AP}}{\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}}+\frac{\overline{BM}\cdot\overline{BN}\cdot\overline{BP}}{\overline{BC}\cdot\overline{BD}\cdot\overline{BA}}+\frac{\overline{CM}\cdot\overline{CN}\cdot\overline{CP}}{\overline{CD}\cdot\overline{CA}\cdot\overline{CB}}+\frac{\overline{DM}\cdot\overline{DN}\cdot\overline{DP}}{\overline{DA}\cdot\overline{DB}\cdot\overline{DC}}=1$$

$M, N, P, \cdots\cdots U, V$ 諸點中之數點可以重合, 例如諸點均重合於 M, 則

$$\frac{\overline{AM}^{n-1}}{\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdots\cdots\overline{AL}}+\frac{\overline{BM}^{n-1}}{\overline{BC}\cdot\overline{BD}\cdots\cdots\overline{BA}}+\cdots\cdots+\frac{\overline{LM}^{n-1}}{\overline{LA}\cdot\overline{LB}\cdots\cdots\overline{LH}}=1$$

特殊言之, 當 $n=3$ 時, 得

$$\frac{\overline{AM}^2}{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}+\frac{\overline{BM}^2}{\overline{BC}\cdot\overline{BA}}+\frac{\overline{CM}^2}{\overline{CA}\cdot\overline{CB}}=1$$

此式亦可書如:

$$-\frac{\overline{AM}^2}{\overline{AB}\cdot\overline{CA}}-\frac{\overline{BM}^2}{\overline{BC}\cdot\overline{AB}}-\frac{\overline{CM}^2}{\overline{CA}\cdot\overline{BC}}=1$$

以 $\overline{BC}\cdot\overline{CA}\cdot\overline{AB}$ 乘之, 得

$$\overline{MA}^2\cdot BC+\overline{MB}^2\cdot\overline{CA}+\overline{MC}^2\cdot AB+\overline{BC}\cdot\overline{CA}\cdot AB=0$$

是卽 Stowart 氏之公式也.

33. 定理. 設有同在一有向軸上之 n 點 $A, B, C, \cdots\cdots H, L$ 及 $n-p$ 點 $(p>1)$ $M, N, P\cdots\cdots$ 求證關係:

$$(2)\ \frac{\overline{AM}\cdot\overline{AN}\cdot\overline{AP}\cdots\cdots\cdots\cdots}{\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}\cdots\overline{AH}\cdot\overline{AL}}+\frac{\overline{BM}\cdot\overline{BN}\cdot\overline{BP}\cdots\cdots\cdots}{\overline{BC}\cdot\overline{BD}\cdots\cdot\overline{BL}\cdot\overline{BA}}+\cdots$$

$$\cdots+\frac{\overline{LM}\cdot\overline{LN}\cdot\overline{LP}\cdots\cdots}{\overline{LA}\cdot\overline{LB}\cdots\cdots\overline{LH}}=0$$

取 32 款之 (1) 式, 而以 AV 除其兩端, 則得:

$$\frac{\overline{AM}\cdot\overline{AN}\cdot\overline{AP}\cdots\cdots\overline{AU}}{\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}\cdots\overline{AH}\cdot\overline{AL}}+\frac{\overline{BM}\cdot\overline{BN}\cdots\cdots\overline{BU}}{\overline{BC}\cdot\overline{BD}\cdots\cdots\overline{BA}}\cdot\frac{\overline{BV}}{\overline{AV}}$$

$$+\frac{\overline{CM}\cdot\overline{CN}\cdots\cdots\overline{CU}}{\overline{CD}\cdots\cdots\overline{CA}\cdot\overline{CB}}\cdot\frac{\overline{CV}}{\overline{AV}}+\cdots\cdots+\frac{\overline{LM}\cdot\overline{LN}\cdots\cdots\overline{LU}}{\overline{LA}\cdot\overline{LB}\cdots\cdots\overline{LH}}\cdot\frac{\overline{LV}}{\overline{AV}}=\frac{1}{\overline{AV}}$$

假定 V 點在有向軸上無限遠去, 於是 $\dfrac{\overline{BV}}{\overline{AV}}$ 卽 $\dfrac{\overline{VB}}{\overline{VA}}$ 之極限為 1 (15). 同様, $\dfrac{\overline{CV}}{\overline{AV}}, \cdots\cdots, \dfrac{\overline{LV}}{\overline{AV}}$ 諸比之極限亦均為 1, 而 $\dfrac{1}{\overline{AV}}$ 之極限為零.

因之, (2) 式在 n 點 $A, B, \cdots\cdots$ 及 $n-2$ 點 $M, N, P, \cdots\cdots U$ 時已證明矣.

在此新等式中, 吾人可以 AU 除其兩端, 而假定 U 點無限遠去, 於是卽得 $n-3$ 點 $M, N, \cdots\cdots$ 時之 (2) 式矣, 餘仿此.

特殊言之, 假定 $M, N, P, \cdots\cdots$ 諸點均在無窮遠, 則得關於 n 個任意點 $A, B, C, \cdots\cdots H, L$ 之等式:

$$\frac{1}{\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}\cdots\cdots\overline{AH}\cdot\overline{AL}}+\frac{1}{\overline{BC}\cdot\overline{BD}\cdots\cdots\overline{BL}\cdot\overline{BA}}+$$

$$\frac{1}{\overline{CD}\cdots\cdots\overline{CL}\cdot\overline{CA}\cdot\overline{CB}}+\cdots\cdots+\frac{1}{\overline{LA}\cdot\overline{LB}\cdot\overline{LC}\cdots\cdots\overline{LH}}=0.$$

應用(2)式於 A, B, C 三點, 及 M 點, 則得:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}+\frac{\overline{BM}}{\overline{BC}\cdot\overline{BA}}+\frac{\overline{CM}}{\overline{CA}\cdot\overline{CB}}=0$$

以 $\overline{BC}\cdot\overline{CA}\cdot\overline{AB}$ 乘之, 得:

$$\overline{AM}\cdot\overline{BC}+\overline{BM}\cdot\overline{CA}+\overline{CM}\cdot\overline{AB}=0$$

或
$$\overline{MA}\cdot\overline{BC}+\overline{MB}\cdot\overline{CA}+\overline{MC}\cdot\overline{AB}=0$$

是卽 Euler 氏之關係也.

34. 問題. 求證 Stewart 氏之關係.

$$\overline{PA}^2\cdot\overline{BC}+\overline{PB}^2\cdot\overline{CA}+\overline{PC}^2\cdot\overline{AB}+\overline{BC}\cdot\overline{CA}\cdot\overline{AB}=0$$

在 P 點不位於有向軸 ABC 上時, 仍成立.

第一證明. 設 Q 爲 P 點在軸上之射影, 則有:

$$\overline{PA}^2=\overline{PQ}^2+\overline{QA}^2,\ \overline{PB}^2=\overline{PQ}^2+\overline{QB}^2,\ \overline{PC}^2=\overline{PQ}^2+\overline{QC}^2$$

於是, Stewart 氏之關係可書如:

$$(\overline{PQ}^2+\overline{QA}^2)\overline{BC}+(\overline{PQ}^2+\overline{QB}^2)\overline{CA}+(\overline{PQ}^2+\overline{QC}^2)\overline{AB}+\overline{BC}\cdot\overline{CA}\cdot\overline{AB}=0$$

上式中, $\overline{PQ}^2$ 項之係數 $\overline{BC}+\overline{CA}+\overline{AB}$ 爲零, 不含 $\overline{PQ}^2$ 之項爲:

$$\overline{QA}^2\cdot\overline{BC}+\overline{QB}^2\cdot\overline{CA}+\overline{QC}^2\cdot\overline{AB}+\overline{BC}\cdot\overline{CA}\cdot\overline{AB}$$

此亦爲零, 因 Q 點位於軸上故也.

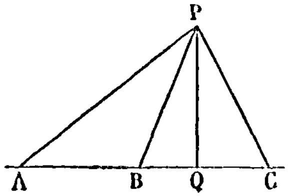
由是, 可知 Stewart 氏之關係, 對於平面上任一 P 點成立.

第二證明. 由三角形 PAC, 得 (22)

$$\overline{PA}^2=\overline{PC}^2+\overline{CA}^2-2\overline{CA}\cdot\overline{CQ}$$

又,由三角形PBC得

$$\overline{PB}^2=\overline{PC}^2+\overline{CB}^2-2\overline{CB}\cdot\overline{CQ}$$



於此二等式中,消去CQ,爲此,以$\overline{BC}$乘第一式,CA乘第二式,而加之,卽得:

$$\overline{PA}^2\cdot\overline{BC}+\overline{PB}^2\cdot\overline{CA}=\overline{PC}^2(\overline{BC}+\overline{CA})+\overline{CA}^2\cdot\overline{BC}+\overline{CB}^2\cdot\overline{CA}.$$

第二端中,$\overline{PC}^2$之係數爲$\overline{BA}$,或$-AB$,而其餘二項之和亦可書如:

$$\begin{aligned}\overline{CA}^2\cdot\overline{BC}+\overline{CB}^2\cdot\overline{CA}&=\overline{CA}^2\cdot\overline{BC}+\overline{BC}^2\cdot\overline{CA}\\&=\overline{CA}\cdot\overline{BC}(\overline{CA}+\overline{BC})=\overline{CA}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{CA}\\&=-\overline{BC}\cdot\overline{CA}\cdot\overline{AB}.\end{aligned}$$

故上式變爲　$\overline{PA}^2\cdot\overline{BC}+\overline{PB}^2\cdot\overline{CA}=-\overline{PC}^2\cdot\overline{AB}-\overline{BC}\cdot\overline{CA}\cdot\overline{AB}$

或　$\overline{PA}^2\cdot\overline{BC}+\overline{PB}^2\cdot\overline{CA}+\overline{PC}^2\cdot\overline{AB}+\overline{BC}\cdot\overline{CA}\cdot\overline{AB}=0$

35. 問題. 已與有向軸上三點A,B,C及一圓,設α,β,γ爲A,B,C三點對圓之冪,求證:

$$\alpha\cdot\overline{BC}+\beta\cdot\overline{CA}+\gamma\cdot\overline{AB}+\overline{BC}\cdot\overline{CA}\cdot\overline{AB}=0$$

設O爲圓心,R爲半徑,於是(23)

$$\alpha=\overline{OA}^2-R^2,\ \beta=\overline{OB}^2-R^2,\ \gamma=\overline{OC}^2-R^2$$

而所應證明之關係變爲:

$$(\overline{OA}^2-R^2)\overline{BC}+(\overline{OB}^2-R^2)\overline{CA}+(\overline{OC}^2-R^2)\overline{AB}+\overline{BC}\cdot\overline{CA}\cdot\overline{AB}=0$$

$-R^2$之係數爲$\overline{BC}+\overline{CA}+\overline{AB}$,卽零(5),不含$R^2$之項爲:

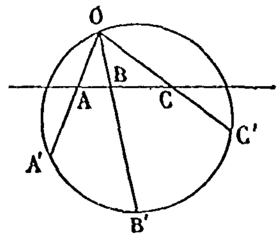
$$\overline{OA}^2\cdot\overline{BC}+\overline{OB}^2\cdot\overline{CA}+\overline{OC}^2\cdot\overline{AB}+\overline{BC}\cdot\overline{CA}\cdot\overline{AB}$$

根據 Stewart 氏公式,是亦為零.

故關係證明矣.

36. 問題. 已與有向軸上三點 A, B, C,一圓及圓上一點 O,連結 O 點及 A, B, C 三點,於是, OA, OB, OC 諸直線卽與圓周交於 A', B', C' 三點.

求證: $$\overline{BC}\cdot\overline{OA}\cdot\overline{OA'}+\overline{CA}\cdot\overline{OB}\cdot\overline{OB'}+\overline{AB}\cdot\overline{OC}\cdot\overline{OC'}=0$$



吾人首當注意者,卽相乘積 $\overline{OA}$, $\overline{OA'}$ 之號與直線 AA' 上選定之正向無關, $\overline{OB}$, $\overline{OB'}$ 及 $\overline{OC}$, $\overline{OC'}$ 之號亦然.

今 A 點對圓之羃為 $\overline{AO}\cdot\overline{AA'}$, B 點之羃為 $\overline{BO}\cdot\overline{BB'}$, C 點之羃為 $\overline{CO}\cdot\overline{CC'}$, 故根據前款得

$$\overline{AO}\cdot\overline{AA'}\cdot\overline{BC}+\overline{BO}\cdot\overline{BB'}\cdot\overline{CA}+\overline{CO}\cdot\overline{CC'}\cdot\overline{AB}+\overline{BC}\cdot\overline{CA}\cdot\overline{AB}=0$$

又,應用 Stewart 氏關係,於 A, B, C, O 四點,得

$$\overline{AO}^2\cdot\overline{BC}+\overline{BO}^2\cdot\overline{CA}+\overline{CO}^2\overline{AB}+\overline{BC}\cdot\overline{CA}\cdot\overline{AB}=0$$

故由前式減去後式,卽得

$$\overline{AO}\cdot\overline{BC}(\overline{AA'}-\overline{AO})+\overline{BO}\cdot\overline{CA}(\overline{BB'}-\overline{BO})+\overline{CO}\cdot\overline{AB}(\overline{CC'}-\overline{CO})=0$$

但 $$\overline{AA'}-\overline{AO}=\overline{OA}+\overline{AA'}=\overline{OA'}$$

同樣, $$\overline{BB'}-\overline{BO}=\overline{OB'},\quad \overline{CC'}-\overline{CO}=\overline{OC'}$$

故 $$\overline{AO}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{OA'}+\overline{BO}\cdot\overline{CA}\cdot\overline{OB'}+\overline{CO}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{OC'}=0$$

以 $-\overline{OA}$ 代 AO, $-\overline{OB}$ 代 $\overline{BO}$,……得

$$\overline{BC}\cdot\overline{OA}\cdot\overline{OA'}+\overline{CA}\cdot\overline{OB}\cdot\overline{OB'}+\overline{AB}\cdot\overline{OC}\cdot\overline{OC'}=0$$

Stewart 氏關係之應用

37. 問題. 已與三角形 ABC, 其三邊爲: $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$. 設 D 爲 BC 邊上之一點,俾有關係如:

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}=k$$

k 爲任意一非1之數.

求以 a, b, c, k 之函數表示 AD 之長.

應用: 求以三邊表示三角形之各中線及分角線之長.

於 BC 邊上任取一正向,而應用 Stewart 氏關係於 BC 軸上之三點 B, C, D 及軸外一點 A,卽得:

$$\overline{AD}^2\cdot\overline{BC}+\overline{AB}^2\cdot\overline{CD}+\overline{AC}^2\cdot\overline{DB}+\overline{BC}\cdot\overline{CD}\cdot\overline{DB}=0$$

由等式 $\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}=k$, 得

$$\frac{\overline{DB}}{k}=\frac{\overline{DC}}{1}=\frac{\overline{DC}-\overline{DB}}{1-k}=\frac{\overline{BC}}{1-k}$$

故 $$\overline{DB}=\frac{k}{1-k}\overline{BC},\quad \overline{CD}=-\frac{1}{1-k}\overline{BC}.$$

以 $\overline{DB}\cdot\overline{CD}$ 之值代 Stewart 氏關係,得

$$\overline{AD}^2\cdot\overline{BC}-\overline{AB}^2\cdot\frac{\overline{BC}}{1-k}+\overline{AC}^2\cdot\frac{k\overline{BC}}{1-k}-\frac{k\overline{BC}^3}{(1-k)^2}=0$$

以 $\overline{BC}$ 除上式,並以 a^2, b^2, c^2 代 $\overline{BC}^2$, $\overline{CA}^2$, $\overline{AB}^2$, 卽得

$$\overline{AD}^2-\frac{c^2}{1-k}+\frac{kb^2}{1-k}-\frac{ka^2}{(1-k)^2}=0$$

或

$$(4)\qquad \overline{AD}^2=\frac{ka^2}{(1-k)^2}+\frac{c^2-kb^2}{1-k}$$

是卽所求之公式

注意 欲使能用此式計算 $\overline{AD}$，其第二端應爲正數．然此乃恆有之事實，而極易瞥見者也，蓋此第二端可書如：

$$\frac{ka^2+(c^2-kb^2)(1-k)}{(1-k)^2}$$

或，依 k 整列分子，得

$$\frac{k^2b^2+k(a^2-b^2-c^2)+c^2}{(1-k)^2}$$

此分子乃 k 之二次式，其判根式爲：

$$(a^2-b^2-c^2)^2-4b^2c^2$$

此量可相繼書如：

$$(a^2-b^2-c^2+2bc)(a^2-b^2-c^2-2bc)$$

$$[a^2-(b-c)^2][a^2-(b+c)^2]$$

$$(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)(a-b-c)$$

因 a，b，c，爲三角形之三邊，故前三因子爲正，第四因子爲負，故判根式爲負，而三項式恆爲正也．

應用 I. 中線之計算 若 $k=-1$，則得自 A 點引出之中線之長 m_a，

$$m_a^2=-\frac{a^2}{4}+\frac{c^2+b^2}{2}$$

或
$$m_a^2=\frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}$$

將a, b, c三文字,依圓周輪換,即得其餘二中線之長m_b, m_c

$$m_b^2=\frac{2(c^2+a^2)-b^2}{4},\quad m_c^2=\frac{2(a^2+b^2)-c^2}{4}$$

II. 內分角線之計算 若AD爲A角之內分角線,則

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}=-\frac{AB}{AC}=-\frac{c}{b}$$

故於(1)式中,以$-\frac{c}{b}$代k,即得此內分角線之長l_a

$$l_a^2=-\frac{a^2\frac{c}{b}}{\left(1+\frac{c}{b}\right)^2}+\frac{c^2+bc}{1+\frac{c}{b}}=\frac{-a^2bc}{(b+c)^2}+\frac{bc(b+c)}{b+c}$$

或 $$l_a^2=\frac{bc[(b+c)^2-a^2]}{(b+c)^2}$$

又或 $$l_a^2=\frac{bc(b+c+a)(b+c-a)}{(b+c)^2}$$

或,命 $a+b+c=2p$,

$$l_a^2=\frac{4bcp(p-a)}{(b+c)^2}$$

用圓周輪換法得

$$l_b^2=\frac{4cap(p-b)}{(c+a)^2}$$

$$l_c^2=\frac{4abp(p-c)}{(a+b)^2}$$

III. 外分角線之計算 於(1)式中,以$+\frac{c}{b}$代k,即得

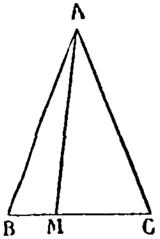
$$l_a'^2=\frac{bc[a^2-(b-c)^2]}{(b-c)^2}=\frac{bc(a+b-c)(a-b+c)}{(b-c)^2}$$

或 $$l_a'^2=\frac{4bc(p-b)(p-c)}{(b-c)^2}$$

同樣 $$l_b'^2=\frac{4ca(p-c)(p-a)}{(c-a)^2}$$

$$l_c'^2=\frac{4ab(p-a)(p-b)}{(a-b)^2}$$

38. 問題. 已與二等邊三角形ABC,及底邊BC上一動點M,求證$\overline{AM}^2+\overline{CM}\cdot\overline{MB}$為一常量.



應用Stowart氏關係於B, M, C三點,及BC直線外之一點A,即得

$$\overline{AM}^2\cdot\overline{BC}+\overline{AB}^2\cdot\overline{CM}+\overline{AC}^2\cdot\overline{MB}+\overline{BC}\cdot\overline{CM}\cdot\overline{MB}=0$$

或,以$\overline{AB}^2$代$\overline{AC}^2$.

$$\overline{AM}^2\cdot\overline{BC}+\overline{AB}^2(\overline{CM}+\overline{MB})+\overline{BC}\cdot\overline{CM}\cdot\overline{MB}=0$$

但$\overline{CM}+\overline{MB}=\overline{CB}=-\overline{BC}$,故上式變為:

$$\overline{AM}^2\cdot\overline{BC}-\overline{AB}^2\cdot\overline{BC}+\overline{BC}\cdot\overline{CM}\cdot\overline{MB}=0$$

又或,以$\overline{BC}$除之,

$$\overline{AM}^2+\overline{CM}\cdot\overline{MB}=\overline{AB}^2$$

39. 問題. 一點至兩定點之二距離之比為常數,求此點之軌跡.

應用Stowart氏關係,以解此問題,頗為簡便.(*)

設A, B為兩定點,k為題與之常比,并假定為正,命M為軌跡上一點,於是

(*) J. Tannery, Bulletin de Mathematiques élémentaires 1, 12, 1896.

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=k$$

設 C 為 AB 直線上任一點,則由 Stewart 氏關係得

(1) $$\overline{MA}^2\cdot\overline{BC}+\overline{MB}^2\cdot\overline{CA}+\overline{MC}^2\cdot\overline{AB}+\overline{BC}\cdot\overline{CA}\cdot\overline{AB}=0$$

確定 C 點,而使

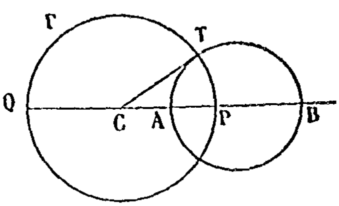
$$\overline{MA}^2\cdot\overline{BC}+\overline{MB}^2\cdot\overline{CA}=0$$

即

(2) $$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}=\frac{\overline{MA}^2}{\overline{MB}^2}=k^2$$

此關係界定一惟一之 C 點,且位於 AB 線分外,良以 $\overline{CA}$ 與 $\overline{CB}$ 同號故也.

C 點既如是確定,則以 $\overline{AB}$ 除 (1) 式,即得:



$$\overline{MC}^2=\overline{CA}\cdot\overline{CB}$$

今 C 既為定點,故由上式可見 M 點之軌跡為一圓 Γ,其圓心為 C,半徑為 CA 及 CB 之比例中項,且自 C 點引以 AB 為直徑之圓之切線 CT,即得此半徑矣.

圓心為 C,半徑為 CT 之 Γ 圓與 AB 相交於二點 P, Q, 各位於直徑之一端,且 P 點位於 A, B, 二點間,而 Q 點位於 AB 線分外.

欲確定此二點,可取 CAB 向以為向量之正向.而設 $\overline{CA}=\alpha$, $\overline{CB}=\beta$. α, β 為二正數,圓之半徑(CP 或 CQ)即為 $\sqrt{\alpha\beta}$.向量 $\overline{PC}$

爲負，$\overline{QC}$ 爲正．於是，有

$$\overline{PA}=\overline{PC}+\overline{CA}=-\sqrt{\alpha\beta}+\alpha=\sqrt{\alpha}(-\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha})$$

$$\overline{PB}=\overline{PC}+\overline{CB}=-\sqrt{\alpha\beta}+\beta=\sqrt{\beta}(-\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})$$

因之

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}=-\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}=-k$$

因 $\dfrac{\alpha}{\beta}=k^2$ 故也．

又，

$$\overline{QA}=\overline{QC}+\overline{CA}=\sqrt{\alpha\beta}+\alpha=\sqrt{\alpha}(\sqrt{\beta}+\sqrt{\alpha})$$

$$\overline{QB}=\overline{QC}+\overline{CB}=\sqrt{\alpha\beta}+\beta=\sqrt{\beta}(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})$$

故

$$\frac{\overline{QA}}{\overline{QB}}=\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}=k$$

是卽吾人在初等幾何學中，所習見之結果也．

40. 問題　於一平面上，已與 A, B，二點，求此平面上之 M 點之軌跡，俾有

(1) $$\alpha\cdot\overline{MA}^2+\beta\cdot\overline{MB}^2=k$$

α, β, k 爲三與數．

在 $\alpha+\beta=0$ 之特殊情形下，所求者乃一點至兩定點之距離之平方差爲常數之軌跡，是卽垂直於 AB 之一直線，而爲吾人所習知者也．

今特將此種情形除外，假定 $\alpha+\beta\neq0$，而證明所求之軌跡爲一圓，其圓心位 AB 直線上．

於 AB 上任取一點 I. 而應用 Stowart 氏關係於 $A\,B\,I$ 及平面上任一點 M, 於是, 得

(2) $$\overline{MA}^2\cdot\overline{BI}+\overline{MB}^2\cdot\overline{IA}+\overline{MI}^2\cdot\overline{AB}+\overline{BI}\cdot\overline{IA}\cdot\overline{AB}=0$$

吾人可擇取 I 點, 而使

$$\frac{\overline{BI}}{\alpha}=\frac{\overline{IA}}{\beta} \quad 或 \quad \frac{\overline{IB}}{\overline{IA}}=-\frac{\alpha}{\beta}$$

因 $\alpha+\beta\neq 0$, 故 $-\dfrac{\alpha}{\beta}\neq 1$, 而上式卽可界定 I 點於 AB 直線上, (10). 於是

$$\frac{\overline{BI}}{\alpha}=\frac{\overline{IA}}{\beta}=\frac{\overline{BI}+\overline{IA}}{\alpha+\beta}=\frac{\overline{BA}}{\alpha+\beta}=-\frac{\overline{AB}}{\alpha+\beta}$$

由是, 得

$$\overline{BI}=-\frac{\alpha\cdot\overline{AB}}{\alpha+\beta}, \qquad \overline{IA}=-\frac{\beta\cdot\overline{AB}}{\alpha+\beta}$$

以 $\overline{BI}$ 及 $\overline{IA}$ 之值代入 (2) 式, 得

$$\alpha\overline{MA}^2+\beta\overline{MB}^2=(\alpha+\beta)\,\overline{MI}^2+\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\,\overline{AB}^2$$

而無論 M 爲何點, 此等式恆成立.

於是 (1) 式可書爲:

$$(\alpha+\beta)\overline{MI}^2+\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\overline{AB}^2=k$$

或

$$\overline{MI}^2=\frac{k(\alpha+\beta)-\alpha\beta\overline{AB}^2}{(\alpha+\beta)^2}$$

由此可見 MI 之長爲常量.

因之, M 點之軌跡爲一圓 Γ, 其圓心卽爲 I 點, 其半徑 R 則

可由下列公式而得

$$R^2=\frac{k(\alpha+\beta)-\alpha\beta\overline{AB}^2}{(\alpha+\beta)^2}$$

欲此軌跡存在,當使R^2為正,即使

$$k(\alpha+\beta)-$$
$$\alpha\beta\overline{AB}^2>0$$

在

$$k(\alpha+\beta)-\alpha\beta\overline{AB}^2=0$$

之特殊情形下,軌跡即縮為I點.

注意: 假定M點在空間移動.

若 $\alpha+\beta=0$, 則M點之軌跡為垂直AB之一平面.

若 $\alpha+\beta\neq 0$, 則M點之軌跡為一球,其球心為I, 其半徑為Γ圓之半徑R.

41. 問題. 已與一平面上三點 A, B, C, 求此平面上之M之軌跡,俾

(1) $$\alpha\overline{MA}^2+\beta\overline{MB}^2+\gamma\overline{MC}^2=k$$

α, β, γ, k 為四與數.

先假定 $\alpha+\beta\neq 0$, 於AB上取I點如上題,而以等式

$$\frac{\overline{IB}}{\overline{IA}}=-\frac{\alpha}{\beta}$$

界定之.

於是,對於平面上之各點M,即有

$$\alpha\overline{MA}^2+\beta\overline{MB}^2=(\alpha+\beta)\overline{MI}^2+\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\overline{AB}^2$$

因之(1)式變為:

$$(\alpha+\beta)\overline{MI}^2+\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\overline{AB}^2+\gamma\overline{MC}^2=k$$

或

$$(\alpha+\beta)\overline{MI}^2+\gamma\,\overline{MC}^2=k-\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\overline{AB}^2$$

於是,本題卽變爲前題(40),但須以 I 點代 A 點,C 點代 B 點 $\alpha+\beta,\gamma k-\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\overline{AB}^2$ 諸數代 α,β,k 諸數.

若 $\alpha+\beta+\gamma=0$. 則 M 點之軌跡卽爲垂直 CI 之一直線.

若 $\alpha+\beta+\gamma\neq0$. 則 M 點之軌跡爲一圓,其圓心爲 CI 直線上一點 ω,而由等式

$$\frac{\overline{\omega C}}{\overline{\omega I}}=-\frac{\alpha+\beta}{\gamma}$$

界定者,而其半徑之平方爲:

$$\frac{\left(k-\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\overline{AB}^2\right)(\alpha+\beta+\gamma)-(\alpha+\beta)\gamma\overline{CI}^2}{(\alpha+\beta+\gamma)^2}$$

次,假定 $\alpha+\beta=0$, 斯時 $\alpha+\gamma,\beta+\gamma$ 二數不能同時爲 0,蓋其和 $\alpha+\beta+2\gamma$ 卽 2γ 不爲零也(因依題意 α,β,γ 三數不爲零故).

若 $\alpha+\gamma\neq0$. 則吾人可先於 AC 上取一點 I,而使

$$\frac{IC}{IA}=-\frac{\alpha}{\gamma}$$

而以 $(\alpha+\gamma)\overline{MI}^2+\frac{\alpha\gamma}{\alpha+\gamma}\overline{AC}^2$ 代 $\alpha\overline{MA}^2+\gamma\overline{MC}^2$ 然後再於 BC 上取一點 ω 而使

$$\frac{\omega B}{\omega I}=-\frac{\alpha+\gamma}{\beta}$$

於是,卽可見所求之軌跡爲以 ω 爲圓心之一圓.

斯時 $\alpha+\beta+\gamma$ 不爲零,是可注意者也.

故無論在何情形下,若 $\alpha+\beta+\gamma=0$, 則軌跡爲一直線,若 $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$, 則軌跡爲一圓 Γ, 吾人已知其確定之法矣.

注意. 假定 M 點能於空間移動.

若 $\alpha+\beta+\gamma=0$, 則軌跡爲一平面,若 $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$, 則軌跡爲一球而以 Γ 圓爲大圓者.

此問題以後更將推廣之(138).

42. 問題 I. 已與三角形 ABC,其各邊爲: $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, 試於此三角形之平面上,求 M 點之軌跡,俾

$$(1)\qquad \pm a\cdot\overline{MA}^2\pm b\cdot\overline{MB}^2\pm c\cdot\overline{MC}^2=abc.$$

式中各號之可能組合應盡取之.

II. 與方程式

$$b\cdot\overline{MB}^2+c\cdot\overline{MC}^2-a\cdot\overline{MA}^2=abc$$

對應之軌跡爲一圓 S_A. 同樣,可得一圓 S_B, 一圓 S_C.

取內接於一與圓,而外切於另一與圓(位於前圓之內者)之諸三角形 ABC,而求

$$\frac{1}{\rho_A^2}+\frac{1}{\rho_B^2}+\frac{1}{\rho_C^2}$$

ρ_A, ρ_B, ρ_C, 爲 S_A, S_B, S_C 諸圓之半徑.

1° 設 $\pm a=\alpha$, $\pm b=\beta$, $\pm c=\gamma$,

則題與之關係卽變爲

$$(1)\qquad \alpha\overline{MA}^2+\beta\overline{MB}^2+\gamma\overline{MC}^2=abc$$

今依照且款之方法,略加變更,以解本題.

因 a, b, c 爲三角形之邊,故 $\alpha+\beta+\gamma$ 絕不爲零,無論 α, β, γ 之號如何,且 $\alpha+\beta, \beta+\gamma, \gamma+\alpha$ 三數亦不能同時爲零,因其和不爲零故也.

假定 $\beta+\gamma \neq 0$,而於 BC 上取一 D 點,俾有

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = -\frac{\gamma}{\beta}$$

於是對於平面上任一點 M,即有

$$\beta \cdot \overline{MB}^2 + \gamma \cdot \overline{MC}^2 = (\beta+\gamma)\overline{MD}^2 + \frac{\beta\gamma}{\beta+\gamma}\overline{BC}^2$$

而 (1) 式變爲:

$$(2) \qquad \alpha\overline{MA}^2 + (\beta+\gamma)\overline{MD}^2 + \frac{\beta\gamma}{\beta+\gamma}\overline{BC}^2 = abc$$

次,於 AD 上取一點 O,俾有

$$\frac{\overline{OD}}{\overline{OA}} = -\frac{\alpha}{\beta+\gamma}$$

於是,對於平面上任一點 M,即有

$$\alpha\overline{MA}^2 + (\beta+\gamma)MD^2 = (\alpha+\beta+\gamma)MO^2 + \frac{\alpha(\beta+\gamma)}{\alpha+\beta+\gamma}\overline{AD}^2$$

而 (2) 式變爲:

$$(3) \qquad (\alpha+\beta+\gamma)MO^2 + \frac{\alpha(\beta+\gamma)}{\alpha+\beta+\gamma}\overline{AD}^2 + \frac{\beta\gamma}{\beta+\gamma}\overline{BC}^2 = abc$$

由此可見 MO 爲常量,因之,M 點之軌跡爲一圓,其圓心即爲 O 點.

試求此圓之半徑,在 37 款中,吾人已求得 $\overline{AD}^2$ 之值爲:

$$\overline{AD}^2 = \frac{ka^2}{(1-k)^2} + \frac{c^2 - kb^2}{1-k}$$

k所代表者爲$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}$,在本題中,$k = -\frac{\gamma}{\beta}$,故

$$\overline{AD}^2 = -\frac{\beta\gamma a^2}{(\beta+\gamma)^2} + \frac{\beta c^2 + \gamma b^2}{\beta+\gamma}$$

代入(3)式,卽得:

$$(\alpha+\beta+\gamma)\overline{MO}^2 + \frac{\alpha(\beta+\gamma)}{\alpha+\beta+\gamma}\left[-\frac{\beta\gamma a^2}{(\beta+\gamma)^2} + \frac{\beta c^2+\gamma b^2}{\beta+\gamma}\right] + \frac{\beta\gamma a^2}{\beta+\gamma} = abc$$

將含a^2, b^2, c^2之諸項合併之,卽得

$$(4) \qquad (\alpha+\beta+\gamma)\overline{MO}^2 = abc - \frac{\beta\gamma a^2 + \gamma\alpha b^2 + \alpha\beta c^2}{\alpha+\beta+\gamma}$$

今隨α, β, γ之號分數種情形論之.

I. $\alpha = a, \beta = b, \gamma = c$,於是

$$(a+b+c)\overline{MO}^2 = abc - \frac{abc(a+b+c)}{a+b+c}$$

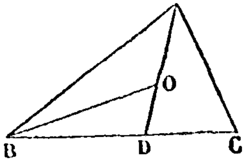
或

$$\overline{MO} = 0$$

故適合(1)式之M點僅有一點,是卽O點.

此點卽爲三角形之內切圓之中心,蓋

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = -\frac{\gamma}{\beta} = -\frac{c}{b} = -\frac{AB}{AC}$$



由是可見AD爲A角之內分角線.

又,AD上之O點由等式

$$\frac{\overline{OD}}{\overline{OA}} = -\frac{a}{b+c}$$

所界定,然$\dfrac{BD}{AB}=\dfrac{a}{b+c}$乃吾人所知者,故直線$BO$乃$B$角之內分角線,因之,

O點為內切圓之圓心明矣.

故適合關係,

$$a\overline{MA}^2+b\overline{MB}^2+c\,\overline{MC}^2=abc$$

之點M僅有一點,是即內切圓之圓心.

II. $\alpha=-a,\beta=b,\gamma=c,$於是,由(4)式得

$$(b+c-a)\overline{MO}^2=abc-\frac{abc(a-b-c)}{-a+b+c}$$

或 $$\overline{MO}^2=\frac{2abc}{b+c-a}$$

M點之軌跡為一圓,其圓心為O點,半徑之平方為$\dfrac{2abc}{b+c-a}$

現時,吾人有

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}=-\frac{c}{b},\quad \frac{\overline{OD}}{\overline{OA}}=\frac{a}{b+c}$$

因此可見O點為傍切於A角內之圓之圓心.

若$\alpha=a,\beta=b,\gamma=c$及$\alpha=a,\beta=b,\gamma=-c,$則得同類之結果.

III. $\alpha=a,\beta=-b,\gamma=-c,$於是

$$\overline{MO}^2=0$$

M為惟一之點,且與傍切於A角內之圓之圓心重合.

$\alpha=-a,\beta=b,\gamma=-c$及$\alpha=-a,\beta=-b,\gamma=c$時之結果同類.

IV. $\alpha=-a,\beta=-b,\gamma=-c$

觀督(1)式,可見無一M點能適合之.

2° S_A圓與$\alpha=-a, \beta=b, \gamma=c$諸値對應,吾人於上已見其半徑之平方$\rho_A^2$爲:

$$\rho_A^2=\frac{2abc}{b+c-a}$$

故
$$\frac{1}{\rho_A^2}=\frac{b+c-a}{2abc}$$

同樣,有
$$\frac{1}{\rho_B^2}=\frac{c+a-b}{2abc}$$

$$\frac{1}{\rho_C^2}=\frac{a+b-c}{2abc}$$

相加,得
$$\frac{1}{\rho_A^2}+\frac{1}{\rho_B^2}+\frac{1}{\rho_C^2}=\frac{a+b+c}{2abc}=\frac{p}{abc}$$

$2p$所代表者爲三角形之周線.

命R爲外接圓之半徑,r爲內切圓之半徑,S爲三角形之面積,則有

$$abc=4RS=4Rpr$$

因之,
$$\frac{1}{\rho_A^2}+\frac{1}{\rho_B^2}+\frac{1}{\rho_C^2}=\frac{1}{4Rr}$$

由此可見,當三角形ABC依題述諸條件變動時,上式之前端不變.

三角形三邊之三垂線共點之條件

43. 定理. 設α, β, γ爲三角形BC, CA, AB三邊上依次所取之三點,自此三點各作一直線垂直於其對應邊.

使此三垂線同過一點之必要而兼充分之條件為:

$$(1) \qquad \overline{Ba}^2-\overline{Ca}^2+\overline{C\beta}^2-\overline{A\beta}^2+\overline{A\gamma}^2-\overline{B\gamma}^2=0$$

1° 此條件為必要的　假定此三垂線同交於一點 P,而聯此點於三角頂.

由直角三角形 BPa, CPa,得

$$\overline{Ba}^2=\overline{BP}^2-\overline{Pa}^2$$

$$\overline{Ca}^2=\overline{CP}^2-\overline{Pa}^2$$

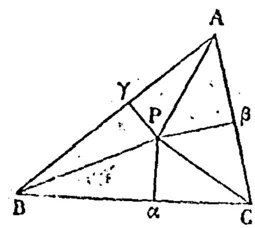
兩端各相減,即得

$$\overline{Ba}^2-\overline{Ca}^2=\overline{BP}^2-\overline{CP}^2$$

同樣,得

$$\overline{C\beta}^2-\overline{A\beta}^2=\overline{CP}^2-\overline{AP}^2$$

$$\overline{A\gamma}^2-\overline{B\gamma}^2=\overline{AP}^2-\overline{BP}^2$$



再將此三式兩端各相加,即得條件(1)

2° 此條件為充分的　假定吾人有條件(1),於是三垂線必同交於一點,今證之如次:

設 P 為過 α, β 二點之二垂線之交點,自 P 點引 $P\gamma'$ 垂直於 AB,於是 γ' 與 γ 重合.蓋自 α, β, γ' 所引三垂線既共 P 點,故根據本定理之前段,應有:

$$\overline{Ba}^2-\overline{Ca}^2+\overline{C\beta}^2-\overline{A\beta}^2+\overline{A\gamma'}^2-\overline{B\gamma'}^2=0$$

但因(1)式既假定成立,故與上式相減,即得

$$\overline{A\gamma'}^2-\overline{B\gamma'}^2=\overline{A\gamma}^2-\overline{B\gamma}^2$$

或 $$(\overline{A\gamma'}-\overline{B\gamma'})(\overline{A\gamma'}+\overline{B\gamma'})=(\overline{A\gamma}-\overline{B\gamma})(\overline{A\gamma}+\overline{B\gamma})$$

但 $$\overline{A\gamma'}-\overline{B\gamma'}=\overline{A\gamma'}+\overline{\gamma' B}=\overline{AB},$$

$$\overline{A\gamma'}+\overline{B\gamma'}=\overline{AB}+\overline{B\gamma'}+\overline{B\gamma'}=\overline{AB}+2\overline{B\gamma'}$$

$$\overline{A\gamma}-\overline{B\gamma}=\overline{A\gamma}+\overline{\gamma B}=\overline{AB},$$

$$\overline{A\gamma}+\overline{B\gamma}=\overline{AB}+\overline{B\gamma}+\overline{B\gamma}=\overline{AB}+2\overline{B\gamma}$$

故有 $$\overline{AB}(\overline{AB}+2\overline{B\gamma'})=\overline{AB}(\overline{AB}+2\overline{B\gamma})$$

或 $$\overline{B\gamma}=\overline{B\gamma'}$$

由此可見γ與γ'重合.

44. 注意. 為便於寫出條件(1)起見,吾人可注意,(1)式之第一端共含六線分之平方,各線分之一端為三角形之一角頂,他一端為 α,β,γ 之一點,此點與角頂同位於三角形之一邊上,且同含一角頂之二線分之平方,前置之號相反,而含同一α,β,γ點之二線分之平方亦然.

是故,吾人有 $\overline{A\beta}^2,\overline{A\gamma}^2,\overline{B\gamma}^2,\overline{B\alpha}^2,\overline{C\alpha}^2,\overline{C\beta}^2$,六線分之平方.

前二者既含同一點A,則其前置之號應相反,中二者及後二者亦然.且$\overline{A\gamma}^2$及$\overline{B\gamma}^2$既含同一點γ,則其前之號亦應相反,$\overline{B\alpha}^2,\overline{C\alpha}^2$,及$\overline{A\beta}^2,\overline{C\beta}^2$亦然.

因之,吾人若首先寫出$\overline{A\beta}^2-\overline{A\gamma}^2$,則當繼寫$+\overline{B\gamma}^2-\overline{B\alpha}^2$,再寫$+\overline{C\alpha}^2-\overline{C\beta}^2$,而有

$$\overline{A\beta}^2-\overline{A\gamma}^2+\overline{B\gamma}^2-\overline{B\alpha}^2+\overline{C\alpha}^2-\overline{C\beta}^2=0$$

是卽公式(1)之另一形式.

以下卽略舉本定理之應用.

45. 問題. 三角形三邊之三中垂線共點.

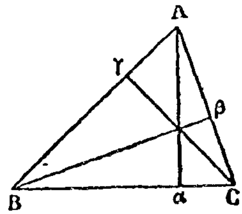
斯時, $B\alpha = C\alpha$, $C\beta = A\beta$, $A\gamma = B\gamma$, 故 (1) 式適合.

46. 問題. 三角形之三高共點.

設 $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ 為三角形之三高,由直角三角形 $AB\alpha$, $AC\alpha$, 得

$$\overline{B\alpha}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{A\alpha}^2$$

$$\overline{C\alpha}^2 = \overline{AC}^2 - \overline{A\alpha}^2$$



由是,得

$$\overline{B\alpha}^2 - \overline{C\alpha}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AC}^2$$

同樣,有

$$\overline{C\beta}^2 - \overline{A\beta}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{BA}^2$$

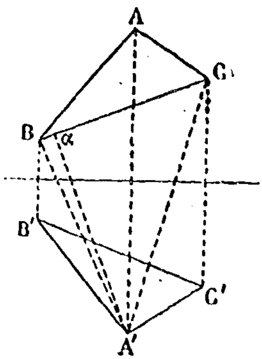
$$\overline{A\gamma}^2 - \overline{B\gamma}^2 = \overline{CA}^2 - \overline{CB}^2$$

加之,得

$$\overline{B\alpha}^2 - \overline{C\alpha}^2 + \overline{C\beta}^2 - \overline{A\beta}^2 + \overline{A\gamma}^2 - \overline{B\gamma}^2 = 0$$

是即 (1) 式,故三高共點.

47. 問題. 設 A', B', C' 為三角形三角頂對於平面上任一直線之對稱點.求證自 A', B', C' 依次引至 BC, CA, AB 三邊之三垂線共點.



設 α, β, γ 為 A', B', C' 三點依次在 BC, CA, AB 三邊上之射影,於是,所當證明者乃 (1) $\overline{B\alpha}^2 - \overline{C\alpha}^2 + \overline{C\beta}^2 - \overline{A\beta}^2 + \overline{A\gamma}^2 - \overline{B\gamma}^2 = 0$

由直角三角形 $B\alpha A'$ 及 $C\alpha A'$ 得

$$\overline{B\alpha}^2 - \overline{C\alpha}^2 = \overline{BA'}^2 - \overline{CA'}^2$$

同樣,用圓周輪換法,得

$$\overline{C\beta}^2-\overline{A\beta}^2=\overline{CB'}^2-\overline{AB'}^2$$

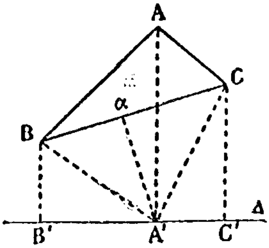
$$\overline{A\gamma}^2-\overline{B\gamma}^2=\overline{AC'}^2-\overline{BC'}^2$$

因對稱之故,有

$$BA'=AB',\ CA'=AC',\ CB'=BC'$$

故將上列三式兩端相加,則第二端爲零,而(1)式證明矣.

48. 問題. 自三角形 ABC 之三角頂,引 AA', BB', CC' 垂直於其平面上之任一直線 Δ. 求證自 A', B', C' 依次引至 BC, CA, AB 三邊之三垂線共點.



命 α,β,γ 爲此三垂線之垂趾.

由直角三角形 $B\alpha A'$,得

$$\overline{B\alpha}^2=\overline{A'B}^2-\overline{A'\alpha}^2$$

或,以 $\overline{A'B'}^2+\overline{BB'}^2$ 代 $\overline{A'B}^2$,得

$$\overline{B\alpha}^2=\overline{A'B'}^2+\overline{BB'}^2-\overline{A'\alpha}^2$$

同樣,由直角三角形 $C\alpha A'$,得

$$\overline{C\alpha}^2=\overline{A'C'}^2+\overline{CC'}^2-\overline{A'\alpha}^2$$

相減,得

$$\overline{B\alpha}^2-\overline{C\alpha}^2=\overline{A'B'}^2-\overline{A'C'}^2+\overline{BB'}^2-\overline{CC'}^2$$

用圓周輪換,推得

$$\overline{C\beta}^2-\overline{A\beta}^2=\overline{B'C'}^2-\overline{B'A'}^2+\overline{CC'}^2-\overline{AA'}^2$$

$$\overline{A\gamma}^2-\overline{B\gamma}^2=\overline{C'A'}^2-\overline{C'B'}^2+\overline{AA'}^2-\overline{BB'}^2$$

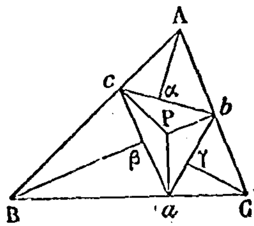
將此後列三式相加,則得

$$\overline{Ba}^2-\overline{Ca}^2+\overline{C\beta}^2-\overline{A\beta}^2+\overline{A\gamma}^2-\overline{B\gamma}^2=0$$

而定理證明矣.

49. 問題. 自三角形ABC之平面上一點P,依次引P_a, P_b, P_c,垂直於BC, CA, AB各邊.再自A, B, C三點,依次引垂線$A\alpha, B\beta, C\gamma$於$a\,b\,c$三角形之三邊bc, ca, ab,求證$A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$三線共點.

由直角三角形$A\alpha b$, $A\alpha c$得



$$\overline{b\alpha}^2=\overline{Ab}^2-\overline{A\alpha}^2$$

$$\overline{c\alpha}^2=\overline{Ac}^2-\overline{A\alpha}^2$$

故相減,得

$$\overline{b\alpha}^2-\overline{c\alpha}^2=\overline{Ab}^2-\overline{Ac}^2$$

同樣,得

$$\overline{c\beta}^2-\overline{a\beta}^2=\overline{Bc}^2-\overline{Ba}^2$$

$$\overline{a\gamma}^2-\overline{b\gamma}^2=\overline{Ca}^2-\overline{Cb}^2$$

將最後三式相加,得

$$\overline{b\alpha}^2-\overline{c\alpha}^2+\overline{c\beta}^2-\overline{a\beta}^2+\overline{a\gamma}^2-\overline{b\gamma}^2=$$

$$-\left[\overline{Ba}^2-\overline{Ca}^2+\overline{Cb}^2-\overline{Ab}^2+\overline{Ac}^2-\overline{Bc}^2\right]$$

因垂線P_a, P_b, P_c共點,故第二端為零.因之第一端亦為零.而$A\alpha, B\beta, C\gamma$共點.

50. 問題. 已與ABC, $A'B'C'$二三角形,求證:若自第一三角形之三角頂A, B, C,依次引至第二三角形之三邊$B'C'$, $C'A'$, $A'B'$之三垂線$A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$共點.則自第二三角形之三角

頂 A', B', C' 依次引至第一三角形之三邊 BC, CA, AB 之三垂線, $A'\alpha', B'\beta', C'\gamma'$ 亦必共點.

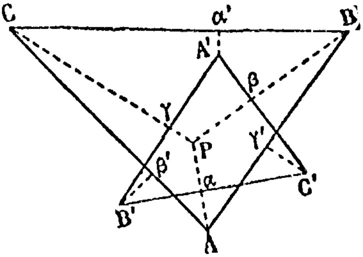
因 $A\alpha, B\beta, C\gamma$ 三垂線共點, 故有

$$(1) \qquad \overline{B'\alpha}^2 - \overline{C'\alpha}^2 + \overline{C'\beta}^2 - \overline{A'\beta}^2 + \overline{A'\gamma}^2 - \overline{B'\gamma}^2 = 0$$

欲證明 $A'\alpha', B'\beta', C'\gamma'$ 三垂線亦必共點, 則當證明

$$(2) \qquad \overline{B\alpha'}^2 - \overline{C\alpha'}^2 + \overline{C\beta'}^2 - \overline{A\beta'}^2 + \overline{A\gamma'}^2 - \overline{B\gamma'}^2 = 0$$

今若用與前數款相同之理論, 則易見(1)式之前端乃等於代數式.

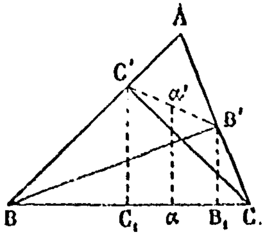


$\overline{B'A}^2 - \overline{C'A}^2 + \overline{C'B}^2 - \overline{A'B}^2 + \overline{A'C}^2 - \overline{B'C}^2$

而(2)式之前端則等於此代數式之變號式(即將各項變號後所得之式).

51. 問題. 設 AA', BB', CC' 爲三角形 ABC 之三高. 自 $B'C'$, $C'A', A'B'$ 之中點 α', β', γ' 依次引垂線 $\alpha'\alpha, \beta'\beta\ \gamma'\gamma$ 至三角形之三邊 BC, CA, AB, 求證此三垂線共點.

設 B_1, C_1 爲 B', C' 在 BC 上之射影. 因 α' 爲 $B'C'$ 之中點, 故 α 亦爲 B_1C_1 之中點.



吾人可書:

$$(1) \qquad \overline{B\alpha}^2 - \overline{C\alpha}^2 = (\overline{B\alpha} - \overline{C\alpha})\ (\overline{B\alpha} + \overline{C\alpha})$$

但 $\qquad \overline{B\alpha} - \overline{C\alpha} = \overline{B\alpha} + \overline{\alpha C} = \overline{BC}.$

又 $$\overline{Ba}=\overline{BC_1}+\overline{C_1a}$$

$$\overline{Ca}=\overline{CB_1}+\overline{B_1a}$$

相加，得 (2) $$\overline{Ba}+\overline{Ca}=\overline{BC_1}+\overline{CB_1}$$

因 a 既為 B_1C_1 之中點，則 C_1a+B_1a 等於零也.

由直角三角形 BC_1C'，得

$$BC_1=BC'\,|\cos B|$$

又由直角三角形 $BC'C$，得

$$BC'=BC\,|\cos B|$$

故 $$BC_1=BC\ \cos^2 B$$

同樣， $$CB_1=BC\ \cos^2 C$$

但 B_1, C_1 二點恆位於 B, C 二點之間，因 B', C' 位於以 BC 為直徑之圓上故也.因之，

$$\overline{BC_1}=\overline{BC}\ \cos^2 B$$

$$\overline{CB_1}=-\overline{BC}\ \cos^2 C$$

故由 (2) 式得 $$\overline{Ba}+\overline{Ca}=\overline{BC}\,(\cos^2 B-\cos^2 C)$$

而 (1) 式變為: $$\overline{Ba}^2-\overline{Ca}^2=\overline{BC}\,(\cos^2 B-\cos^2 C)$$

或，以 a 代 BC，$1-\sin^2 B$ 代 $\cos^2 B$，$1-\sin C$ 代 $\cos^2 C$

$$\overline{Ba}^2-\overline{Ca}^2=a^2(\sin^2 C-\sin^2 B)$$

用圓周輪換法，得 $$\overline{C\beta}^2-\overline{A\beta}^2=b^2(\sin^2 A-\sin^2 C)$$

$$\overline{A\gamma}^2-\overline{B\gamma}^2=C^2(\sin^2 B-\sin^2 A).$$

將最後三式相加，即得 $\overline{aa'}, \overline{\beta\beta'}, \overline{\gamma\gamma'}$ 三線共點之條件.

$$\overline{Ba}^2-\overline{Ca}^2+\overline{C\beta}^2-\overline{A\beta}^2+\overline{A\gamma}^2-\overline{B\gamma}^2=0$$

因

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

卽　$a\sin C=c\sin A,\ a\sin B=b\sin A,\ b\sin C=c\sin B.$

故第二端爲零也.

52. 問題. 求證43款之關係(1)亦可書如:

$$\overline{a\alpha}\cdot\overline{BC}+\overline{b\beta}\cdot\overline{CA}+\overline{c\gamma}\cdot\overline{AB}=0$$

a, b, c 依次代表 BC, CA, AB 三邊之中點.

吾人可書:　$\overline{B\alpha}^2-\overline{C\alpha}^2=(\overline{B\alpha}+\overline{C\alpha})(\overline{B\alpha}-\overline{C\alpha})$

但　$\overline{B\alpha}-\overline{C\alpha}=\overline{B\alpha}+\overline{\alpha C}=\overline{BC}$

$$\overline{B\alpha}+\overline{C\alpha}=-(\overline{\alpha B}+\overline{\alpha C})=-2\overline{\alpha a}\qquad(9\text{ 款})$$

或　$\overline{B\alpha}+\overline{C\alpha}=2\overline{a\alpha}$

故　$\overline{B\alpha}^2-\overline{C\alpha}^2=2\overline{a\alpha}\cdot\overline{BC}.$

同様　$\overline{C\beta}^2-\overline{A\beta}^2=2\overline{b\beta}\cdot\overline{CA}$

$$\overline{A\gamma}^2-\overline{B\gamma}^2=2\overline{c\gamma}\cdot\overline{AB}$$

故以上列諸差之値代入43款之(1)式,卽得

$$(2)\qquad \overline{a\alpha}\cdot\overline{BC}+\overline{b\beta}\cdot\overline{CA}+\overline{c\gamma}\cdot\overline{AB}=0$$

是卽使自 α, β, γ 依次引至 BC, CA, AB 三邊之三垂線共點之必要而兼充分之條件也.

53. 問題. 已與三角形 ABC 及其平面上一點 F, 自此點引垂線 $F_\alpha, F_\beta, F_\gamma$ 至 BC, CA, AB 三邊, 並作經過 α, β, γ 三點之圓,而命 α', β', γ' 爲此圓與 BC, CA, AB 三邊之第二交點.求證自 α', β', γ' 引至三對應邊之三垂線共點.

第一證明. 在 α, β, γ 諸點所引之三角形三邊之三垂線既共點,故有前款證明之關係(2).

(2) $$\overline{a\alpha}\cdot\overline{BC}+\overline{b\beta}\cdot\overline{CA}+\overline{c\gamma}\cdot\overline{AB}=0$$

a, b, c 為 BC, CA, AB 諸邊之中點.

欲證明在 α', β', γ' 諸點所引至此三邊之三垂線亦必共點,只須證明

(2)′ $$\overline{a\alpha'}\cdot\overline{BC}+\overline{b\beta'}\cdot\overline{CA}+\overline{c\gamma'}\cdot\overline{AB}=0$$

因(2)式之前端為零,故吾人若能證明(2)式與(2)′式之前端之和為零,則(2)′式之前端之為零也亦即證明矣.

故今當證明者,乃

$$(\overline{a\alpha}+\overline{a\alpha'})\overline{BC}+(\overline{b\beta}+\overline{b\beta'})\overline{CA}+(\overline{c\gamma}+\overline{c\gamma'})\overline{AB}=0$$

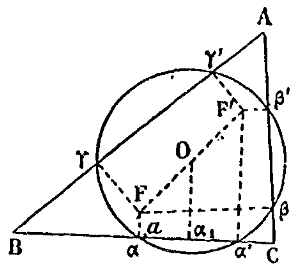
但 $$\overline{a\alpha}+\overline{a\alpha'}=2\overline{a\alpha_1}$$

α_1 乃 $\alpha\alpha'$ 之中點,

同樣 $$\overline{b\beta}+\overline{b\beta'}=2\overline{b\beta_1}$$

$$\overline{c\gamma}+\overline{c\gamma'}=2\overline{c\gamma_1}$$

β_1 及 γ_1 乃 $\beta\beta'$ 及 $\gamma\gamma'$ 之中點.



故所當證明之等式變為:

(3) $$\overline{a\alpha_1}\cdot\overline{BC}+\overline{b\beta_1}\cdot\overline{CA}+\overline{c\gamma_1}\cdot\overline{AB}=0$$

但在 $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ 諸點所引 BC, CA, AB 三邊之三垂線共點,此點即為 $\alpha\beta\gamma$ 圓之圓心 O, 故(3)式成立. 因之(2)′式亦成立矣.

第二證明. 在 α' 點垂直 BC 之直線乃 αF 對於 $\alpha_1 O$ 之對稱線,故此垂線與直線 FO 之交點 F', 乃 F 點對於 O 點之對稱

點.同樣,可見在β'及γ'垂直CA, AB之直線,亦經過此F點故三垂線共點.

第三證明. 根據題設條件,吾人能作一錐線(橢圓,或雙曲線),以F點爲焦點,而切於三角形之三邊.

蓋一焦點在錐線之切線上之射影之軌跡爲以焦軸爲直徑之圓,其名曰錐線之主圓,此圓爲一完全確定之圓,因其過α, β, γ諸點故也.其圓心O卽爲錐線之中心,第二焦點F'乃F點對於O點之對稱點.

故此錐線由其二焦點及其焦軸之長(此長等於O圓之直徑)完全確定.

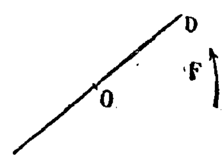
但此圓亦爲F'點在切線上之射影之軌跡,故F'點在三角形ABC三邊上之射影α', β', γ'亦必位於此圓上.

由此本定理卽已證明矣.

角

二直線之角

54. 定義. 設有一觀察者立於一平面之前,而注視此平面,對於此觀察者而言,平面上一直線 D, 能依兩種不同之方向.繞線上一點 O 旋轉,依定義,當吾人已取定此方向之一爲旋轉之正向時,則此平面卽稱爲有向平面.與此正向相反之方向名曰負向.



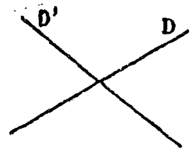
此正向之擇取絕對可以任意爲之,此與擇取有向軸之正向相同.

欲表示此向,通常作一弧形之矢 F 以顯之.

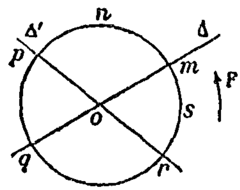
此點旣明.設 D, D' 爲有向平面上任意二直線,此二直線可以相交,平行,或重合.

自平面上任一點 O, 引 Δ, Δ' 二直線各與 D, D' 平行.於 Δ 上,O 點之任何方面,取一點 m, 使其至 O 之距離爲 1, 然後,將 Δ 直線繞 O 點依任何方向旋轉.而於 Δ 重於 Δ' 上之時刻之

—將此運動停止.



當此運動發展之際, m 點已於半徑爲 1 之圓上,描畫一段圓弧,此弧可大於一或數圓周,依定義,所謂直線 D 與直線 D' 之角者,乃一代數數,其絕對值卽爲 m 點所描畫之弧之長,而其號或爲 $+$ 或爲 $-$, 則視直線 Δ 旋轉進行之方向,與平面之正向相同,或相反而定.



此數之記號爲 (D, D').

55. 因在運動中,直線 Δ 與 Δ', 可隨吾人之意,任重若干次,故如是界定之角有無限個值,今求此諸值之公式如下.

先將直線 Δ 依正向,例如 F 矢所示之向,旋轉.當 Δ 第一次重於 Δ' 上時, m 點所描畫之弧爲 mnp, 小於半圓周,今以 θ 代之.當 Δ 第二次重於 Δ' 上時, m 點所描畫之弧爲 $mnpqr$. 其長爲 $\theta+\pi$. 在第三次重合時,此弧爲 $\theta+2\pi, \cdots\cdots$, 在第 $n+1$ 次時,爲 $\theta+n\pi$.

因直線 Δ 旋轉之向爲正向,故此等弧之長應冠 $+$ 號.由此可見 (D, D') 角之諸正值具 $\theta+n\pi$ 之形式. n 爲任一正整數或零.

次使直線 Δ 依負向旋轉.當 Δ 第一次重於 Δ' 上時, m 點所描畫之弧 msr 爲 $\pi-\theta$. 在第二次重合時,此弧爲 $2\pi-\theta$. 在 n 次時,爲 $n\pi-\theta$. 今若於此等數之前冠以 $-$ 號,則見 (D, D') 角之

諸負值具$\theta-n\pi$之形式,n為任一正整數.

比較此二種結果,可知(D,D')角之諸值之公式為:

$$\theta+\lambda\pi$$

λ為任一正整數,或負整數,或零,而θ代表此角之最小正值.

今若任取此角之任一特值$\phi=\theta+h\pi$而察之,h為一確定之整數,則見:

$$\theta+\lambda\pi=\phi+(\lambda-h)\pi$$

或 $$\theta+\lambda\pi=\phi+k\pi$$

式中之$k=\lambda-h$.

但因λ為任一整數,故k亦然.因之,吾人可謂(D,D')角之諸值之公式為:

$$\phi+k\pi$$

k為任一正或負整數,或零,而ϕ則代此角之任一值.

顯然,(D,D')角之值與O點無涉,故當D,D'二直線相交時,吾人卽可取此交點為O,而省去Δ及Δ'二直線之繪畫.

若D與D'平行或重合,則Δ與Δ'重合,而θ弧為零,故(D,D')角在斯時之公式為$k\pi$,k代表任一正或負整數,或零.

56. **定理.** 已知一直線D及(D,D')角之一值,則直線D'之方位卽完全確定.

吾人非可於與數ϕ上,加以π之適當倍數,而使此數位於O與π間,設θ為如是所得之數,是卽(D,D')角之最小正值.

自平面上任一點O,引Δ直線與D平行,而使Δ直線繞O

點依正向旋轉,至m點已描畫等於θ之mn弧而止.

於是,凡有 $$(D, D')=\phi$$

之諸直線D'均與on平行.

67. 由是可見:已與三直線$D, D' D''$,若

$$(D, D')=(D, D'')$$

則直線D', D''必平行,或重合.

68. 注意: 因(D, D')角之確定不完全,而其諸値相差π之一倍數,故含有此種角之關係式,其成立,可差至π之一倍數,本書以後恆將此倍數略而不書,讀者宜注意.

因此之故,吾人恆有

(1) $$(D, D')+(D', D)=0$$

蓋吾人若以θ代表(D, D')角之最小正値,則$-\theta$卽爲(D', D)角之最小負値(以絕對値論),(1)式爲此特殊之二値適合,故此二角之任何二値仍可適合之,惟等式之成立可差至π之一倍數耳.

69. Chasles氏定理 設$D_1, D_2, \cdots\cdots D_n$爲一有向平面上之$n$條任何直線,於是卽有

(2) $$(D_1, D_2)+(D_2, D_3)+\cdots\cdots+(D_{n-1}, D_n)=(D_1, D_n).$$

自平面上任一點O,依次引$\Delta_1, \Delta_2, \cdots\cdots \Delta_n$與$D_1, D_2, \cdots\cdots D_n$諸直線平行,於$\Delta_1$上取一點$m$,使其至$O$點之距離爲1,而將$\Delta_1$繞$O$點依正向旋轉,至此直線第一次與$\Delta_2$重合而止,當此運動進展之際,$m$點已描畫一弧$\theta_1$,是乃$(D_1, D_2)$角之一正値,

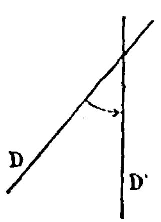
次,依同樣之方向,使Δ_1之運動繼續進行,當Δ_1自Δ_2之位置至Δ_3之位置時,m點描畫一弧θ_2,即(D_2, D_3)之一特值,……餘仿此.當Δ_1自Δ_{n-1}之位置至Δ_n之位置時,m點描畫一弧θ_{n-1},即(D_{n-1}, D_n)之一特值.

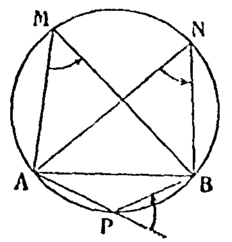
在直線Δ_1之總運動中,m點描畫一弧ϕ等於$\theta_1+\theta_2+\cdots\cdots+\theta_{n-1}$,此弧$\phi$爲$(D_1, D_n)$之一值,蓋因此乃$m$點當$\Delta_1$依正向自$\Delta_1$之位置旋轉至$\Delta_n$之位置時所描畫之弧故也.

因之,(2)式爲其式中所含諸角之特值$\theta_1, \theta_2, \cdots\cdots\theta_{n-1}$所適合,故諸角之任何值亦均能適合之,惟等式之成立,可差至π之一倍數耳.

因
$$(D_1, D_n) = -(D_n, D_1)$$
故吾人亦有:
$$(D_1, D_2)+(D_2, D_3)+\cdots\cdots+(D_{n-1}, D_n)+(D_n, D_1)=0$$

60. 在二直線之角(D, D')之諸值中,有一特值,介於O與π間,吾人常以一弧形之矢顯之,此弧所附麗之圓,以二直線之交點爲中心,而矢尖所示之向,則平面之正向也.如下圖.但有時,此角之值,以不確定爲便.





61. 在幾何習題中,添加直線之角,如吾人適所界定者,其便利甚大.若僅限於角之絕對值之考察,而不究其描畫之方向,則所得之結果,常不完備,而不能適於各種可能之圖形,今舉例於下.

設有一圓及圓上兩點 A, B. 今若於圓上取兩點 M, N, 俾同在直線 AB 之一側,則 AMB 及 ANB 二角相等,此吾人之所習知者也.又若於圓上取 M, P 兩點,而使其各在 AB 直線之一側,則 AMB 及 APB 二角卽不相等,而相補.

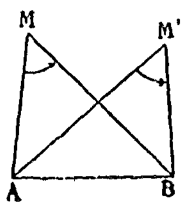
但吾人若取 (MA, MB), (NA, NB), (PA, PB), 諸角,而假定其介於 0 與 π 間,則可不必問諸之同側與否,而諸角均相等矣.

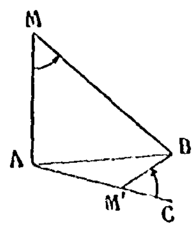
62. 是故,已與圓周上四點 A, B, M, M', 吾人恆有

(1) $$(MA, MB)=(M'A, M'B).$$

63. 反之,已與同在一平面上之四點 A, B, M, M', 若 (1) 式適合,則此四點必同在一圓上.

蓋 M, M' 二點,若同在 AB 邊之一側,則由 (1) 式,可知 AMB, $AM'B$ 二角相等,故經過 A, M, B 三點之圓,亦必經過 M' 點.





若 M, M' 二點各在 AB 邊之一側,則 AMB 與 $CM'A$ 二角相

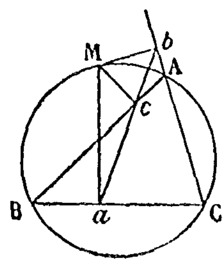
等,而 AMB 角與 $AM'B$ 角相補.故經過 A, M, B 三點之圓,亦必經過 M' 點.

64. Simson直線 1°. 自三角形之外接圓上一點至三邊之三垂線之三垂趾同位於一直線上,其名曰 Simson 直線.

2°. 反之,若自一點 M 至三角形之三邊之三垂線之三垂趾同位於一直線上,則 M 點必位於此三角形之外接圓上.

命 a, b, c 爲 M 點在 BC, CA, AB 三邊上之三射影.

1°. 假定 M 點位於三角形之外接圓上,欲證明 a, b, c 三點同在一直線上,只須證明 (57):



$$(CM, cb) = (CM, ca). \qquad (1).$$

因 Mb, Mc 垂直 CA, CB,故以 AM 爲直徑之圓必經過 b, c 二點,而 A, M, b, c 四點共圓,故有 (62)

$$(CM, cb) = (AM, Ab) = (AM, AC),$$

同樣,B, M, a, c 四點共圓,故有

$$(CM, ca) = (BM, Ba) = (BM, BC)$$

故今當證明者,乃

$$(2) \qquad (AM, AC) = (BM, BC).$$

然此乃固有之等式,因 A, B, C, M 四點共圓故也.

2°. 若 a, b, c 三點同在一直線上,則有 (1) 式,因之,由居間之各等式,即可證明 (2) 式,而由此即可見 M 點位於 A, B, C 三角

形之外接圓上.

65. 推論. 自三角形 ABC 之平面上一點 M, 引 Ma, Mb, Mc 諸直線,依次與 BC, CA, AB 諸邊交於 a, b, c 諸點,而俾有

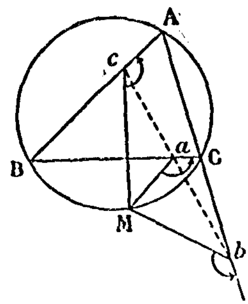
$$(Ma, Bc)=(Mb, CA)=(Mc, AB).$$

使 a, b, c 三點共線之必要而兼充分之條件爲: M 點位於三角形 ABC 之外接圓上.

等式 $$(Mb, CA)=(Mc, AB)$$

亦可書如:

$$(bM, bA)=(cM, cA)$$

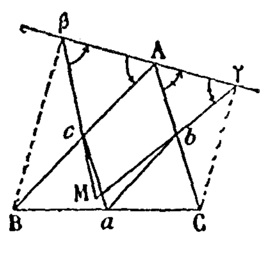


由此可見 (63) A, M, b, c 四點共圓.

同樣可見 B, M, c, a 四點亦共圓.

於是,依照前款方法,本定理之證明,即可完成矣.

66. 問題. 設 a, b, c 爲三角形 ABC 之 BC, CA, AB 三邊之三中點,自 A 點任引一直線,而射影 B, C 二點於其上 β, γ 處,求直線 $b\gamma$ 及 $c\beta$ 之交點 M 之軌跡.



由等腰三角形 $A\beta c$ ($c\beta=cA$), 得

$$(M\beta, \beta\gamma)=(\beta\gamma, AB)$$

又由等腰三角形 $A\gamma b$ ($b\gamma=bA$), 得

$$(B\gamma, M\gamma)=(AC, \beta\gamma)$$

將此二等式兩端各相加,得

$$(M\beta, \beta\gamma)+(\beta\gamma, M\gamma)=(AC, \beta\gamma)+(\beta\gamma, AB)$$

故根據 Chasles 氏定理,得

$$(M\beta, M\gamma)=(AC, AB)$$

卽 $$(Mc, Mb)=(ac, ab).$$

由此可見 M 點位於三角形 abc 之外接圓上,換言之,卽位於 ABC 三角形之九點圓上也.

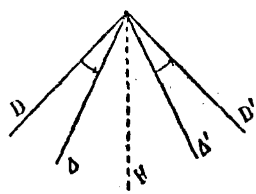
67. **問題.** 已與同過一點之四直線 D, D', Δ, Δ', 則使 D, D' 二直線之分角線與 Δ, Δ' 二直線之分角線重合之必要而兼充分之條件爲:

$$(D, \Delta)=(\Delta', D').$$

1°. 此條件爲必要者. 假定 D, D' 及 Δ, Δ' 二對直線具相同之分角線,而設 H 爲此分角線之一,於是

$$(D, H)=(H, D')$$

$$(\Delta, H)=(H, \Delta')$$



兩端相減,卽得

$$(D, H)-(\Delta, H)=(H, D')-(H, \Delta')$$

或 $$(D, H)+(H, \Delta)=(\Delta', H)+(H, D')$$

卽 (1) $$(D, \Delta)=(\Delta', D')$$

2°. 此條件爲充分者. 假定(1)式成立,而設 H 爲 D, D' 二直線之一分角線,今證明 H 亦爲 Δ, Δ' 之分角線.

(1)式亦可書如:

$$(D, H)+(H, \Delta)=(\Delta', H)+(H, D').$$

但因H爲D, D'之分角線,故$(D, H)=(H, D')$,因之,由上式,得

$$(H, \Delta)=(\Delta', H)$$

或
$$(\Delta, H)=(H, \Delta')$$

由此可見H亦爲Δ, Δ'之分角線.

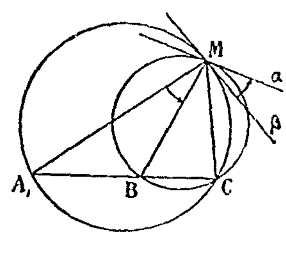
68. 問題. 已與同在一直線上之三點A, B, C及線外一點M. 取MBC, MCA, MAB三圓及此三圓在M點之切線$M\alpha$, $M\beta$, $M\gamma$, 求證$(M\alpha, MA)$, $(M\beta, MB)$, $(M\gamma, MC)$三對直線具相同之分角線.

根據前款之定理,欲證明$M\alpha$, MA及$M\beta$, MB二對直線之分角線相同,只須證明,

$$(MA, MB)=(M\beta, M\alpha)$$

於MBC圓上,取一點M'近於M,因M', M, B, C四點共圓,故有

$$(BC, BM)=(M'C, M'M).$$



假定M'點無限趨進於M點,則直線MM'之極限卽爲切線$M\alpha$,故有

$$(BC, MB)=(MC, M\alpha).$$

同樣,取圓MAC論之,卽得

$$(AC, MA)=(MC, M\beta)$$

兩端相減,得

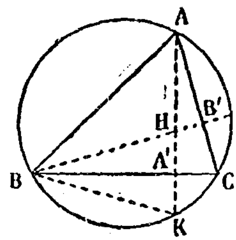
$$(MA, MB)=(M\beta, M\alpha)$$

而問題解决.

69. 問題. 在一三角形中,垂心(卽三垂線之交點)對於任

一邊之對稱點必位於三角形之外接圓上.

設有三角形 ABC 及其二高 AA', BB'. 命 H 爲其交點, K 爲 AA' 與外接圓之第二交點. 今所當證明者, 乃 A' 爲 HK 之中點, 或 BH 及 BK 二直線對於 BC 爲對稱.



因 A, B, A', B' 四點位於以 AB 爲直徑之圓上, 故有

$$(AA', AB') = (BA', BB')$$

或
$$(AK, AC) = (BC, BB')$$

又因 A, B, C, K 四點亦同在一圓上, 故有

$$(AK, AC) = (BK, BC)$$

由此, 得

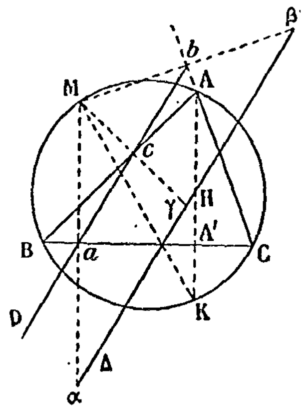
$$(BC, BB') = (BK, BC).$$

於是, 可見 BK 及 BB' 二直線對於 BC 爲對稱, 或 H, K 二點對於 A' 點爲對稱.

70. 問題. 三角形之外接圓上一點對於各邊之對稱點同位於一直線上, 此直線并經過三角形之垂心.

設 M 爲三角形 ABC 之外接圓上一點, 吾人已知 (64) M 點在諸邊上之射影 a, b, c 同位於一直線上, 其名曰 Simson 直線, 故由此可推知 M 點對於各邊之對稱點 α, β, γ 亦同位於一直線 Δ 上, 是卽直線 D 對於 M 點之爲位相似線, 其相似比爲 2.

設 H 為直線 Δ 與高 AA' 之交點,今當證明此 H 點亦即三高之交點,為此,特證明 A' 點為 HK 之中點 (69), K 點為高 AA' 與外接圓之第二交點,



B, M, a, c 四點既共圓 (以 BM 為直徑之圓),故有

$$(BM, Bc)=(aM, aO)$$

或 $$(BM, BA)=(aM, aH)$$

同樣,因 B, M, A, K 四點共圓,故有

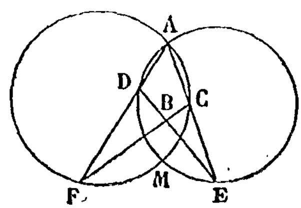
$$(BM, BA)=(KM, KA)=(KM, KH)$$

故 $$(KM, KH)=(aM, aH).$$

由此可見 K, a, M, H 四點共圓,因 aM, 及 HK 為此圓之二平行弦,故 BC 直線既垂直於 aM 於其中點 a, 亦必經過 HK 之中點,故 A' 為 HK 之中點,而本題成立矣.

71. 問題. 四直線中任取三者,可成四個三角形,求證諸三角形之諸外接圓同交於一點.

第一證明. 設 A, B, C, D, E, F 為四直線兩兩之交點,作三角形 ADE, ACF 之外接圓,此二圓除相交於 A 點外,另有一交點 M, 今當證明三角形 BCE, BDF 之外接圓亦必經過此 M 點.



欲證明 BCE 圓經過 M 點,只須證明

$$(CB, CM)=(EB, EM)$$

或

(1) $$(CF, CM)=(ED, EM).$$

因 M 點位於 ACF 圓上,故有

$$(CF, CM)=(AF, AM)$$

又因此點亦位於 ADE 圓上,故亦有

$$(ED, EM)=(AD, AM)=(AF, AM)$$

故(1)式由此證明矣.

同樣,可證 BDF 圓亦經過 M 點.

第二證明. 設 D_1, D_2, D_3, D_4 爲題與之四直線,今用 $(D_1D_2D_3)$ 記號以表示 D_1, D_2, D_3 三直線所成三角形之外接圓.

$(D_1D_2D_3)$ 及 $(D_1D_2D_4)$ 二圓除相交於 D_1, D_2 二直線之交點外,另交於一點 M, 將此 M 點射於題與之四直線上,而命 P_1, P_2, P_3, P_4 爲諸射影.

M 點既位於圓 $(D_1D_2D_3)$ 上,則 P_1, P_2, P_3 三點當同位於一直線上,同理, P_1, P_2, P_4 亦當同位於一直線上,此二直線既具公同之二點 P_1, P_2, 故當重合,於是可見 P_1, P_2, P_3, P_4 四點同位於一直線 D 上.

今 P_1, P_2, P_3, P_4 既共一直線,故 M 點當位於 (D_1, D_3, D_4) 圓上,同理, M 點亦位於 $(D_2D_3D_4)$ 圓上,故本題證明矣.

72. 問題. 四直線中,任取三者,可成四個三角形,求證諸三角形之諸垂心同位於一直線上.

仍用前款第二證明中所用之各記號.

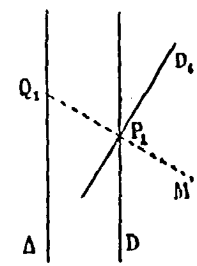
M點對於D_1, D_2, D_3, D_4四直線之對稱點Q_1, Q_2, Q_3, Q_4同位於一直線Δ上,是卽直線D對於M點之應位相似線,其相似比爲2.

又根據70款之定理,直線Δ經過D_1, D_2, D_3, D_4四直線三三所成之四個三角形之諸垂心.

由71及72款之定理,可以推出下述拋物線之諸性質.

73. 定理. 切於三與直線之拋物線有無限個,諸焦點之軌跡卽爲三與直線所成三角形之外接圓,而諸導線同經過一定點,是卽此三角形之垂心.

在一拋物線中,焦點在諸切線上之諸射影之軌跡卽爲頂點處之切線,此乃吾人所習知者也,由此可推知:已與一點M及一直線D,若自D上任一點P_1引直線D_1垂直於MP_1,則直線D_1卽爲以M點爲焦點,D爲頂點切線之拋物線之一切線,且此拋物線之導線Δ,卽爲直線D對於M點之應位相似線,其相似比爲2,此導線亦爲M點對於諸切線D_1之諸對稱點之軌跡.



此點旣明,設有任何三直線D_1, D_2, D_3,並假定有一拋物線P切於此三直線,若M爲此拋物線之焦點,則M點在此三與直線上之射影P_1, P_2, P_3,當位於頂點處之切線D上,因之,(64),M點當位於D_1, D_2, D_3三直線所成三角形T之外接圓C上.

反之,設 M 爲 C 圓上任意一點,則 M 點在 D_1, D_2, D_3 諸直線上之諸射影同位於一直線上,由此可推知:以 M 點爲焦點,直線 D 爲頂點切線之拋物線 P 必切於三與直線.

因 M 點爲圓上任取之一點,故有無限個拋物線同切於此三與直線,而諸焦點之軌跡卽爲 C 圓.

又,以 C 圓上一點 M 爲焦點之拋物線,其導線 Δ 必經過 M 點對於 D_1, D_2, D_3 諸直線之對稱點 Q_1, Q_2, Q_3, 而此直線亦經過三角形 T 之垂心,是乃吾人所已知者也(70).

74. 定理 切於四直線之拋物線僅有一個,其焦點卽爲四直線三三所成之四個三角形之四外接圓之交點 M,其導線卽爲經過此諸三角形之諸垂心之直線 Δ.

蓋 M 點在四直線上之四射影同位於一直線 D 上,且此同一點對於此諸同直線之諸對稱點亦同位於一直線 Δ 上.

故以 M 點爲焦點, D 直線爲頂點切線, Δ 直線爲導線之拋物線乃切於四直線之惟一拋物線,且直線 Δ 經過題設四直線所成諸三角形之諸垂心,則亦吾人所知者也.

逆平行線

75. 定義. 已與同在一平面上之二對直線 D, D' 及 Δ, Δ', 若第一對之任一直線與第二對之任一直線之角等於第二對之他一直線與第一對之他一直線之角,換言之,卽若下列四等式之一成立時,

(1) $$(D, \Delta) = (\Delta', D')$$

(2) $$(D, \Delta') = (\Delta, D')$$

(3) $$(D', \Delta) = (\Delta', D)$$

(4) $$(D', \Delta') = (\Delta, D)$$

則吾人謂直線 (D, D') 對於直線 (Δ, Δ') 爲逆平行線.

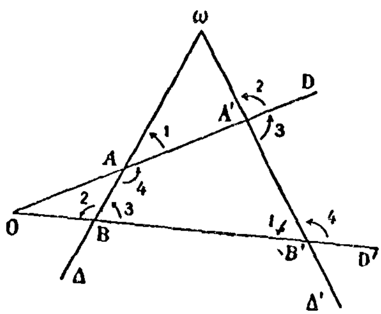
上列四等式之任一式,可以連帶其他之各式,此乃甚易察見之事,蓋吾人若假定 (1) 式爲眞,而於其兩端加入 (Δ, Δ') 角,則得

$$(D, \Delta) + (\Delta, \Delta') = (\Delta, \Delta') + (\Delta', D')$$

即 $$(D, \Delta') = (\Delta, D')$$

是即 (2) 式也.

且,(3) 式爲 (2) 之一推論,蓋 (3) 之前端與 (2) 之後端相反,而 (3) 之後端則又與 (2) 之前端相反也.



同理, (4) 亦爲 (1) 之推論.

公式中所指之角與圖中所示之角,其號數相同.

由定義可見:若直線 D, D' 對於 Δ, Δ' 爲逆平行線,則反之,直線 Δ, Δ' 對於 D, D' 亦爲逆平行線,故吾人常謂 D, D' 及 Δ, Δ' 二對直線爲逆平行.

76. 定理. 二對直線成逆平行之必要而兼充分之條件

爲此對直線與彼對直線之諸交點同位於一圓上.

設有D, D'及Δ, Δ'二對直線,命A, B爲Δ與D, D'之交點,A', B'爲Δ'與D, D'之交點.

若此二對直線爲逆平行,則有

$$(1)\qquad (D, \Delta)=(\Delta', D')$$

此式亦可書如:

$$(2)\qquad (AA', AB)=(B'A', B'B)$$

故由是可見A, B, A', B'四點共圓.

反之,若此四點共圓,則有等式(2),然此式亦可書如(1),由此可見此二對直線爲逆平行.

77. 定理. 二對直線D, D'及Δ, Δ'爲逆平行之必要而兼充分之條件爲D, D'之諸分角線與Δ, Δ'之諸分角線平行.

自任一點O,引直線d, d', δ, δ'依次與D, D', Δ, Δ'諸直線平行,若D, D'及Δ, Δ'爲逆平行線,則

$$(1)\qquad (D, \Delta)=(\Delta', D')$$

因之,

$$(2)\qquad (d, \delta)=(d', \delta')$$

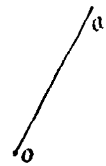
但此乃表示d, d'之諸分角線與δ, δ'之諸分角線重合者(67),因之,D, D'之諸分角線與Δ, Δ'之諸分角線平行.

反之,若D, D'之諸分角線與Δ, Δ'之諸分角線平行,則d, d'之諸分角線與δ, δ'之諸分角線重合,故有等式(2),由是亦得等式(1),因之,D, D'及Δ, Δ'二對直線爲逆平行.

二軸之角或二半直線之角

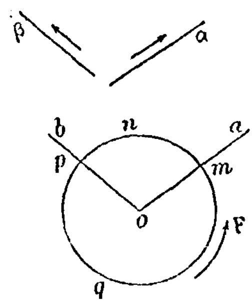
78. **定義.** 前已言之,所謂有向軸或簡稱爲軸者,乃還有方向之無限直線也,此方向名曰軸之正向.

凡無限直線之一部分,一端止於一點,而他端可以無限引長者,均名曰半直線,例如,oa 爲一半直線,其一端止於 o 點,而他端可依 oa 之向無限引長,o 點名曰半直線之原點,oa 向名曰半直線之向.



二直線之角,已界說於上,今取二軸之角,或二半直線之角,而界說之,此二種定義頗具相類之處,然其不同之處亦甚重要也.

設有同在一有向平面上之二軸 α, β. 自平面上任一點 o, 引 oa, ob 二半直線與 α, β 二軸平行,且依二軸之正向而引之於半直線 oa 上,取一點 m, 使其至 o 之距離爲 1, 將半直線 oa 繞 o 點,依任一方向旋轉,并於半直線 oa 與半直線 ob 重合時之一,停止運動,當此運動進展之際,m 點於半徑爲 1 之圓上,描畫一弧,此弧可大於一個或數個圓周.



依定義,所謂 α 軸與 β 軸之角者,乃一代數數,其絕對值卽爲 m 點所描畫之弧之長,而其號則或爲 +,或爲 −,視半直線 oa 旋轉所依之向爲正向或負向而定.

此代數數之記號爲(α,β)或(oa,ob).

79. 因在此運動中,半直線oa可與半直線ob任意重合若干次,故如是界定之角能有無限個値,今求其公式於下.

先使oa半直線依正向,卽F矢所示之向旋轉,當半直線oa第一次重於半直線ob時,m點描畫一弧mnp,小於一圓周,今以θ代表其長.當半直線oa第二次重於半直線ob時,m點描畫之弧爲mnp弧及一圓周之和,卽$\theta+2\pi$.在第三次重合時,此弧爲$\theta+4\pi$,……在第n次重合時,此弧爲$\theta+2n\pi$.

因此半直線旋轉之向爲正向,故此等弧之長之前應冠以+號,由此可見(α,β)角,或(oa,ob)角之諸正値咸具$\theta+2n\pi$之形式,m代表任一正整數或零.

次,使半直線oa依負向旋轉,當oa與ob第一次重合時,m點所描畫之弧爲mqp,其長爲$2\pi-\theta$.在第二次時,弧之長爲$4\pi-\theta$……在第n次,弧之長爲$2n\pi-\theta$.於此諸數之前冠以-號,卽見(α,β)角之諸負値具$\theta-2n\pi$之形式,n代表任一正整數.

綜合上得結果,可知(α,β)角之諸値之公式爲:

$$\theta+2\lambda\pi$$

λ爲任一整數,或正,或負,或零,而θ則爲此角之最小値.

今若任取此角之一特値,$\phi=\theta+2h\pi$,h爲一確定之整數,則有

$$\theta+2\lambda\pi=\theta+2h\pi+2(\lambda-h)\pi$$

或

$$\theta+2\lambda\pi=\phi+2k\pi$$

式中之 $k=\lambda-h$

因 λ 爲任何整數，故 k 亦然，因之，(α,β) 角或 (oa,ob) 角之諸值之公式亦可書如：

$$\phi+2k\pi$$

k 爲任一整數，或正，或負，或零，而 ϕ 則爲此角之任一值.

總而言之，(α,β) 角之值未完全確定，其諸值之差爲 2π 之一倍數.

80. 由此可知：凡含半直線之角之關係，其成立，可差至 2π 之一倍數，吾人常將此倍數，略而不書，讀者宜注意也.

例如吾人恆有

(1) $$(\alpha,\beta)+(\beta,\alpha)=0$$

蓋，θ 若代表 (α,β) 角之最小正值，則 $-\theta$ 卽爲 (β,α) 角之一負值，(1)式爲此二特值所適合，故此二角之任何二值仍可適合之，惟此等式之成立，可差至 2π 之一倍數耳.

81. Chasles 氏定理 設 $a_1, a_2, \cdots\cdots a_n$ 爲一有向平面上之 n 個任意軸，於是，卽有

(2) $$(a_1,a_2)+(a_2,a_3)+\cdots\cdots+(a_{n-1},a_n)=(a_1,a_n).$$

自平面上一點 o，引半直線 $oa_1, oa_2, \cdots\cdots oa_n$ 與 $a_1, a_2\cdots\cdots a_n$ 諸軸平行，且依諸軸之正向引之.次，於 oa_1 上取一點 m，使其至 o 之距離爲 1，並使半直線 oa_1 依正向繞 o 點旋轉，至此半直線與半直線 oa_2 重合而止，當此旋轉進展之際，m 點描畫一弧 θ_1，是卽 (a_1,a_2) 角之一值，再使 oa_1 之運動仍依同一向繼續進行，

當 oa_1 自 oa_2 之位置至 oa_3 之位置時，m 點描畫一弧 θ_2，是即 (a_2, a_3) 角之一特值，……，當 oa_1 自 oa_{n-1} 之位置至 oa_n 之位置時，m 點描畫一弧 θ_{n-1}，是即 $(a_{n-1}a_n)$ 之一特值.

但在 oa_1 之總運動中，m 點所描畫之弧，ϕ 共為

$$\theta_1+\theta_2+\cdots\cdots+\theta_{n-1}$$

而此弧 ϕ 乃 (oa_1, oa_n) 角，或 (a_1, a_n) 角之一特值，蓋因此乃當 oa_1 依正向旋轉至與 oa_n 重合時，m 點所描畫之弧故也.

因之，(2) 式為 (a_1, a_2)，$(a_2, a_3)\cdots\cdots(a_{n-1}, a_n)$，$(a_1, a_n)$ 諸角之諸特值 $\theta_1, \theta_2, \cdots\cdots\theta_{n-1}, \phi$ 所適合，故普通言之，諸角之任何值亦可適合之，惟等式之成立可差至 π 之一倍數耳.

此式亦可書如：

$$(a_1, a_2)+(a_2, a_3)+\cdots\cdots+(a_{n-1}, a_n)+(a_n, a_1)=0$$

82. 但 (α, β) 角雖有無限個值，此角之任一三角函數仍僅有一值，因角增加 2π 之一倍數時，角之任何三角函數均不變，此吾人之所知者也，是故 $\cos(\alpha, \beta)$，$\sin(\alpha, \beta)$，$\tan(\alpha, \beta)$ 為完全確定之數.

因之，吾人若取一關係式，如 Chasles 之關係式，其成立可差至 2π 之一倍數者.

$$(a_1, a_2)+(a_2, a_3)=(a_1, a_3)$$

則常可將其兩端之某某三角函數等之，而不必問其隱含之 2π 之倍數也.

例如

$$\cos[(\alpha_1, \alpha_2)+(\alpha_2, \alpha_3)]=\cos(\alpha_1, \alpha_3)$$

同樣,由

$$(\alpha, \beta)=-(\beta, \alpha)$$

可得

$$\cos(\alpha, \beta)=\cos(\beta, \alpha)$$

是故,吾人雖變更 α, β 二軸之次序,然 $\cos(\alpha, \beta)$ 之值仍保持不變,職是之故,吾人常稱此量爲 α, β 二軸之角之餘弦,或簡稱 α, β 二軸之餘弦,而不言 α 軸與 β 軸之角,或 β 軸與 α 軸之角之餘弦也.

反乎是,則有

$$\sin(\alpha, \beta)=-\sin(\beta, \alpha), \qquad \tan(\alpha, \beta)=-\tan(\beta, \alpha).$$

83. 問題. 設有 α, β 二軸,及與 α 同在一直線上,而向相反之一軸 α'.

求證:

$$\cos(\alpha', \beta)=-\cos(\alpha, \beta), \qquad \sin(\alpha', \beta)=-\sin(\alpha, \beta).$$

由 Chasles 氏之公式,得

$$(\alpha', \beta)=(\alpha', \alpha)+(\alpha, \beta)$$

或

$$(\alpha', \beta)=\pi+(\alpha, \beta)$$

因 π 爲 (α', α) 角之最小正值也.

故取上式兩端之餘弦及正弦,卽得應證之二公式.

84. 問題. 若平面之正向變更,則 $\cos(\alpha, \beta)$ 不變,而 $\sin(\alpha, \beta)$ 變其號而保留其絕對值.

設θ為(α,β)之最小正值,若平面之正向變更,則(α,β)之最小正值為$2\pi-\theta$. 但

$$\cos(2\pi-\theta)=\cos\theta,\qquad \sin(2\pi-\theta)=-\sin\theta.$$

85. 注意. 再論直線D與D'之角(D,D'). 吾人已見(35)此角之值未完全確定,而其所差者乃π之一倍數.

$$(D,D')=\phi+k\pi$$

由此可見:此角之正切為一確定之數.

$$\tan(D,D')=\tan\phi.$$

而其餘弦及正弦,則絕對值確定,而號未定:

$$\cos(D,D')=\pm\cos\phi,\qquad \sin(D,D')=\pm\sin\phi.$$

若k為偶數,則當取 + 號,k為奇數,則當取 − 號.

因之,已與包含直線之角之關係,例如

$$(D,D')=-(D',D)$$

或
$$(D_1,D_2)+(D_2,D_3)=(D_1,D_3)$$

其兩端之相等既可差π之一倍數,故吾人僅能等其兩端之正切,而不必過問此應加之π之倍數,但不能等其餘弦及正弦也,故吾人僅有

$$\tan(D,D')=-\tan(D',D)$$

$$\tan[(D_1,D_2)+(D_2,D_3)]=\tan(D_1,D_3).$$

86. 問題. 設有同在一有向平面上,而組成一三角形ABC之三有向軸,α,β,γ, 且此三軸α,β,γ依次與A,B,C三角頂相對,求證

$$(1)\qquad \frac{\overline{BC}}{\sin(\beta,\gamma)}=\frac{\overline{CA}}{\sin(\gamma,\alpha)}=\frac{\overline{AB}}{\sin(\alpha,\beta)}$$

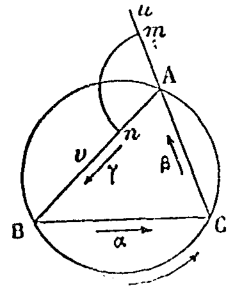
$\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$, 代表位於 α, β, γ 三軸上之三向量 BC, CA, AB 之三代數值.

吾人首當注意者,即(1)式若對於平面及 α, β, γ 軸之一特選正向為眞,則此正向變更,(1)式仍為眞.

蓋吾人若變更平面之正向,則各分子不變,而分母僅變其號(84),故等式不變.

又若變更一軸之向,例如 α 軸,則 $\overline{BC}$, $\sin(\gamma,\alpha)$, $\sin(\alpha,\beta)$ 變其號(83).而(1)式仍不變.

故吾人僅須在一種特殊情形之下,證明此等關係,今取 BC, CA, AB 諸向以為諸軸之正向,於是 $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ 諸代數值為正.且等於三角形之各邊 a, b, c. 再取三角形之外接圓上,依角頂 ABC 之次序巡行之向以為平面之正向.



於是,求 (ρ,γ) 角之最小正值.

為此,自 A 點依 β 及 γ 之正向,引半直線 Au, Av, 而使半直線 Au 依正向旋轉以重於 Av, 斯時, m 點 $(Am=1)$ 描畫之弧為 mn, 而此弧乃 A 角之補角之量,故有

$$(\beta,\gamma)=\pi-A.$$

及
$$\sin(\beta,\gamma)=\sin A.$$

同樣， $\sin(\gamma, \alpha) = \sin B$， $\sin(\alpha, \beta) = \sin C$.

於是，在此特殊情形下，(1)式變為：

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

是即三角學上所已證明之關係也.

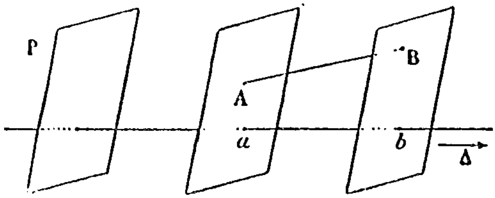
關係(1)之應用當於此後見之.

射影

87. 定義. 已與一有向軸 Δ，名曰射影軸，及不與此軸平行之一平面 P，即可界定一種射影.

在平面 P 垂直於 Δ 軸時，則射影名曰直射影.

空間任意一點 A 之射影云者，乃 Δ 軸與過 A 點而平行於平面 P 之平面之交點 a 是也.



向量 AB 之射影云者，乃以 A 點之射影 a 為原點，B 點之射影 b 為終點之向量 ab 之代數值 $\overline{ab}$ 是也，今以記號 $pr.AB$ 代表之，而讀如 AB 之射影，於是，依定義，有

$$pr.AB = \overline{ab}$$

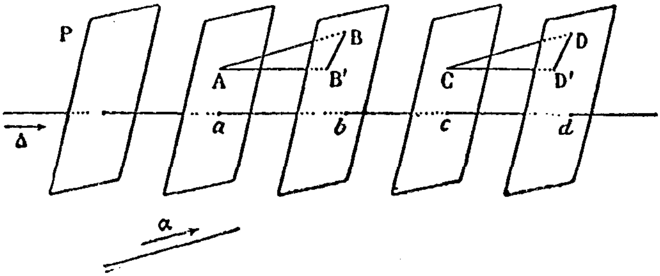
88. 定理. 平行於同一軸，或位於此軸上之二向量之二

代數值之比,等於其二射影之比.

設 AB, CD 爲平行於 α 軸之二向量, $\overline{ab}$, $\overline{cd}$ 爲其在 Δ 軸上之射影,今所當證明者爲

$$(1) \qquad \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}=\frac{\overline{ab}}{\overline{cd}}.$$

自 A, C 兩點引直線與 Δ 平行,而命 B', D' 爲此等直線與射 B, D 二點之平面之交點,因平面 BAB' 與 DCD' 平行,故直線



BB' 與 DD' 亦平行,於是,三角形 ABB' 及 CDD' 之各對邊既兩兩平行,故相似,因之,有

$$\frac{AB}{CD}=\frac{AB'}{CD'}=\frac{ab}{cd}.$$

故(1)式兩端之絕對值已相等.

至於號,亦相同,因若 AB, CD 二向量同向,則 ab, cd 二向量亦然,於是(1)式之兩端均爲正,又若 AB, CD 二向量反向,則 ab, cd 二向量亦然,於是(1)式之兩端均爲負.

故(1)式兩端之量及號均等.

特殊言之,二全等向量之射影亦相等.

89. **定義.** 位於一有向軸上,而代數值爲 +1 之向量,名曰此有向軸之<u>單位向量</u>.

90. **定理.** 一向量之射影等於其代數值與其軸之單位向量之射影之相乘積[*].

設有向量 AB, 及其軸上之單位向量 CD, 今若以 $\overline{ab}$, $\overline{cd}$ 代表此二向量在任一軸上之射影,則有 (88)

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}=\frac{\overline{ab}}{\overline{cd}}.$$

但依假設, $\overline{CD}=1$, 故

$$\overline{ab}=\overline{AB}\cdot\overline{cd}.$$

或
$$pr.AB=\overline{AB}\cdot pr.CD$$

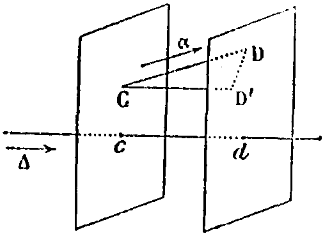
於是本定理證明矣.

91. 特殊情形. 假定射影爲直射影,換言之,即平面 P 垂直於射影軸 Δ.

命 α 爲向量 AB 之軸, CD 爲 α 軸之單位向量.

於是可立見 CD 之射影等於 α 及 Δ 二軸之角之餘弦.

蓋,自 C, D 二點引平面垂直於 Δ, 而與 Δ 交於 c, d. 再自 C 點引直線平行 Δ, 而交射影 D 點之平面於 D'.



於是,即有

(*) 爲省便起見,在一向量之支線上或與支線平行之線上所選擇之有向軸,用以計算向量之代數值者,吾人常稱之爲向量之軸.

$$\overline{CD}=+1,\quad \overline{CD'}=cd.$$

但在平面 CDD' 內,$\overline{CD'}$ 乃 CD 在與 Δ 平行之一軸上之直射影,因之,根據餘弦之定義,$\overline{CD'}$或 $\overline{cd}$ 卽等於 a 及 Δ 二軸之角之餘弦.

於是,可得定理如次.

定理. 一向量之直射影等於此向量之代數值與向量之軸及射影軸之角之餘弦之相乘積.

92. 定義. 數個向量,依一定之次序排列,俾每一向量之終點,卽爲其次之向量之原點者,名曰鄰接向量,例如,已與空間之 A, B, C, D, E 諸點,則 AB, BC, CD, DE 諸向量,卽爲鄰接向量.

以第一向量之原點爲原點,最後向量之終點爲終點之向量 AE,名曰諸向量之合量或幾何和.諸向量稱爲和之分量.

此種性質,用記號表之,卽爲:

$$(AE)=(AB)+(BC)+(CD)+(DE).$$

在 A, B, C, D, E 諸點同位於一有向軸上之特殊情形下,則有

$$\overline{AE}=\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE}$$

故吾人可謂:合量之代數值等於諸分量之諸代數值之代數和.

但在 A, B, C, D, E 諸點不同在一直線上時,此理卽不眞,斯時,有一類似之定理,名曰射影定理,述如次.

93. 射影定理. 已與數個任意之鄰接向量,則合量之射

影必等於諸分量之射影之代數和.

設有 AB, BC, CD, DE 諸向量及其合量 AE, 命 a, b, c, d, e 爲 A, B, C, D, E 諸點在任一軸上之諸射影, 因此等射影同在一軸上, 故有:

$$\overline{ae}=\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{cd}+\overline{de}$$

此式亦可書爲:

$$pr.AE=pr.AB+pr.BC+pr.CD+pr.DE$$

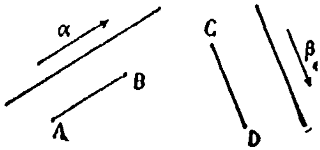
又 $$pr.AE=ae=-ea=-pr.EA$$

故上式亦可書爲:

$$pr.AB+pr.BC+pr.CD+pr.DE+pr.EA=0$$

二向量之幾何積

94. 定義. 空間任意二向量之二代數值及二向量之二軸之角之餘弦之相乘積, 名曰二向量之幾何積.



例如 AB, CD 爲二向量, α, β 爲其軸, 則此二向量之幾何積, 爲:

$$\overline{AB}\cdot\overline{CD}\cdot\cos(\alpha,\beta)$$

通常以 $(AB)(CD)$ 代表此幾何積, 故依定義, 有

$$(AB)(CD)=\overline{AB}\cdot\overline{CD}\cdot\cos(\alpha,\beta)$$

因 $\cos(\alpha,\beta)=\cos(\beta,\alpha)$, 故此定義與因子之次序無關, 於是, 有

$$(AB)(CD)=(CD)(AB)$$

特殊言之,向量 AB 與其自身之幾何積,即向量 AB 之幾何平方爲:

$$\overline{AB}\cdot\overline{AB}\cdot\cos(\alpha,\alpha) \quad \text{或} \quad \overline{AB}^2$$

故一向量之幾何平方即其長之平方.

95. **注意.** 相乘積 $\overline{CD}\cdot\cos(\alpha,\beta)$ 既爲向量 CD 在 α 軸上之射影,故吾人亦可謂:二向量之幾何積乃一向量之代數值與他向量在此向量之軸上直射影之相乘積.

96. **定理.** 已與數個鄰接向量及其合量,則合量與一向量 V 之幾何積必等於諸分量與 V 之諸幾何積之代數和.

設 A 爲 $a_1, a_2, \cdots\cdots a_n$ 諸向量之合量,即

$$(A)=(a_1)+(a_2)+\cdots\cdots+(a_n)$$

將諸向量射於向量 V 之軸上,則根據射影定理,得

$$pr.A=pr.a_1+pr.a_2+\cdots\cdots+pr.a_n$$

而以向量 V 之代數值乘此式之兩端,即得(95)

$$(A)(V)=(a_1)(V)+(a_2)(V)+\cdots\cdots+(a_n)(V).$$

是即證明本定理矣.

97 **定理.** 已與二組鄰接向量及其二合量,則二合量之幾何積必等於第一組各向量與第二組各向量之諸幾何積之代數和.

設 A 爲 $a_1, a_2, \cdots\cdots a_n$ 諸向量之合量,B 爲 $\beta_1, \beta_2\cdots\cdots\beta_n$ 諸向量之合量,即

$$(A)=(a_1)+(a_2)+\cdots\cdots+(a_n)$$

$$(B)=(\beta_1)+(\beta_2)+\cdots\cdots+(\beta_p)$$

根據前款定理，有

(1) $$(A)(B)=(\alpha_1)(B)+(\alpha_2)(B)+\cdots\cdots+(\alpha_n)(B)$$

因 B 爲 $\beta_1,\beta_2,\cdots\cdots\beta_p$ 諸向量之幾何和，故

$$(\alpha_1)(B)=(\alpha_1)(\beta_1)+(\alpha_1)(\beta_2)+\cdots\cdots+(\alpha_1)(\beta_p)$$

同樣，由 $(\alpha_2)(B)$, $(\alpha_3)(B)\cdots\cdots$ 可得同類之各等式.

今若將此諸值代入(1)式，卽得

$$(A)(B)=\Sigma(\alpha_h)(\beta_k)$$

式中之 h 應爲自1至 n 之各值，k 爲自1至 p 之各值.

此等式卽證明本定理.

93. 應用I. 設 a, b, c 爲三角形 ABC 之三邊，$a=BC$, $b=CA$, $c=AB$, A, B, C 爲依次與 a, b, c 三邊相對之三角.

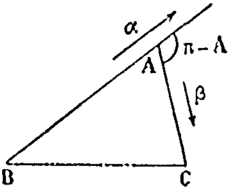
於是，向量 BC 可視爲向量 BA 及 AC 之幾何和，故有幾何等式，

$$(BC)=(BA)+(AC)$$

將此式兩端之幾何平方等之，卽得(97)

(1) $$(BC)^2=(BA)^2+(AC)^2+2(BA)(AC)$$

但，根據以上所述，



$$(BC)^2=\overline{BC}^2=a^2,\quad (BA)^2=C^2,\quad (AC)^2=b^2$$

$$(BA)(AC)=\overline{BA}\cdot\overline{AC}\cdot\cos(\alpha,\beta)$$

α, β 爲 BA, AC 二向量之二軸.

此二軸之選擇，可以任意，今假定其正向依次爲 BA 及 AC

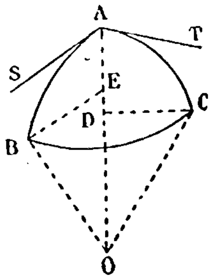
向，於是代數值 $\overline{BA}$, $\overline{AC}$ 均爲正，而等於 c, b. 且 (α, β) 角之一之絕對值爲 $\pi - A$.

故 $$\overline{BA}\cdot\overline{AC}\cos(\alpha,\beta) = bc\cos(\pi - A) = -bc\cos A$$

於是，(1) 式變爲:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\cos A.$$

99. 應用 II. 球面三角之基本公式



設有位於半徑爲1，球心爲 O 之球面上之球面三角形 ABC，命 a, b, c 爲 BC, CA, AB 三邊之長，此諸長均介於 O 與 π 間. 又設 A 爲三角形之 BAC 角，換言之，卽介於 O 與 π 間，而由 AC, AB 二弧在 A 點處之切線 AT, AS 二半直線所成之角也.

今將證明之公式爲:

$$\cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos A.$$

引 BE, CD 垂直 OA，則得幾何等式

$$(OC) = (OD) + (DC)$$

$$(OB) = (OE) + (EB)$$

再以兩式兩端各幾何相乘，卽得 (97)

(1) $$(OC)(OB) = (OD)(OE) + (DC)(OE) + (OD)(EB) + (DC)(EB)$$

取 OA 向爲向量 OD, OE 之正向，卽有

$$\overline{OD} = \cos b, \quad \overline{OE} = \cos c$$

又，取 AT 及 AS 向爲向量 DC，及 EB 之正向，卽有

$$\overline{DC}=\sin b,\quad \overline{EB}=\sin c$$

此二向量且均爲正.

最後, OB, OC 之正向卽爲 OB, 及 OC 向, 因之,

$$\overline{OB}=\overline{OC}=+1.$$

於是, 卽有 $(OC)(OB)=\overline{OC}\cdot\overline{OB}\cdot\cos(OC,OB)=\cos a$

$$(OD)(OE)=\overline{OD}\cdot\overline{OE}\cdot\cos(OA,OA)=\cos b\cos c$$

$$(DC)(EB)=\overline{DC}\cdot\overline{EB}\cdot\cos(AT,AS)=\sin b\sin c\sin A$$

最後,幾何積 (DC,OE), (OD,EB) 均爲零,因其中所含之二向量互相垂直,而其二軸之餘弦爲零故也.

將以上各值代入(1)式,卽得

$$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A$$

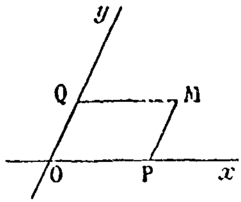
是卽球面三角學之基本公式也.

解析幾何大意

平面解析幾何大意

100. 定義. 於一平面上,取相交於一點 O 之二直線.再於每一直線上任取一正向,例如,Ox 與 Oy.於是,此圖形即構成一位標軸系:Ox 名曰 x 軸,Oy 軸名曰 y 軸,O 點爲原點.

爲免避重複起見,以後在本書中,吾人恆假定凡位於 Ox 上或與 Ox 平行之向量均以 Ox 向爲正向,凡位於 Oy 上,或與 Oy 平行之向量均以 Oy 向爲正向.



此點既設,命 M 爲平面上任一點.自此點引一直線平行 Oy,而與 Ox 交於 P 點,另一直線平行 Ox,而與 Oy 交於 Q 點.

向量 OP 之代數值,名曰 M 點之橫標,向量 OQ 之代數值,名曰 M 點之縱標,縱橫二標統稱爲 M 點之位標.

101. 由是可見,平面上任意一點各有其確定之位標.反之,已與任意二代數數 a, b,則有一點,而僅有一點,以 a 爲橫標,b 爲縱標.

蓋,於 Ox 上,取一點 P,使 $\overline{OP}=a$,於 Oy 上,取一點 Q,使 $\overline{OQ}=b$,則自 P,Q 二點引與 Oy,Ox 平行之二直線,即相交於惟一之點 M,其橫標爲 a,縱標爲 b.

吾人常謂此點之位標爲 a,b,蓋先言其橫標,而次及其縱標也.同樣,記號 $M(a,b)$ 亦即表示以 a 爲橫標 b 爲縱標之 M 點.

因向量 $\overline{OQ}$ 及 $\overline{PM}$ 全等,$\overline{OQ}=\overline{PM}$,故吾人亦可謂 M 點之縱標爲向量 $\overline{PM}$ 之代數值.

特殊言之,凡 Ox 上之點,其縱標均爲零.凡 Oy 上之點,其橫標均爲零.原點 O 之縱橫二位標均爲零,是乃具此特性之惟一點也.

若 Ox,Oy 二軸不成垂直,則軸爲斜軸.反之,若 Ox,Oy 二軸互成垂直,則軸爲直軸.

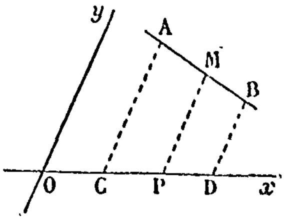
102. 問題. 已與二點 A,B,其位標爲 (x_1,y_1) 及 (x_2,y_2) 試求 AB 直線上一點 M 之位標,而使

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=k$$

k 爲一非 1 之數.

吾人已知(10),此等式界定 AB 直線上惟一點 M.

自 A,B,M 諸點引直線平行 Oy,而依次與 Ox 交於 C,D,P 諸點,於是即有(16)



$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=\frac{\overline{PC}}{\overline{PD}}$$

但　$\overline{PC}=\overline{PO}+\overline{OC}=\overline{OC}-\overline{OP}$

$$\overline{PD}=\overline{PO}+\overline{OD}=\overline{OD}-\overline{OP}$$

依定義, $\overline{OC}=x_1,\qquad \overline{OD}=x_2$

而$\overline{OP}$乃M點之橫標. 今以x代之,故有

$$\overline{PC}=x_1-x,\qquad \overline{PD}=x_2-x$$

因之, $$\frac{x_1-x}{x_2-x}=\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=k$$

或 $$x(1-k)=x_1-kx_2$$

因$1-k\neq0$, 故有

$$x=\frac{x_1-kx_2}{1-k}$$

同理, 自A, B, M諸點, 引直線平行Ox, 而以y代M點之縱標, 即得 $$y=\frac{y_1-ky_2}{1-k}.$$

由是可見, M點之二位標爲:

$$x=\frac{x_1-kx_2}{1-k},\qquad y=\frac{y_1-ky_2}{1-k}.$$

特殊言之,若M爲AB之中點, 則$k=-1$, 因之, AB之中點之二位標爲: $$\frac{x_1+x_2}{2},\qquad \frac{y_1+y_2}{2}.$$

103. 問題. 已與同在一平面上之四點A_1, A_2, A_3, A_4. 命a_{pq}爲線分A_p, A_q之中點, p, q之值爲介於1與4間之各整值, 求證$a_{12}a_{34}, a_{13}a_{24}, a_{14}a_{23}$諸線分之諸中點重合.

命x_p, y_p爲A_p點之二位標, 則a_{12}, a_{34}二點之二橫標爲:

$$\frac{x_1+x_2}{2},\qquad \frac{x_3+x_4}{2}.$$

故 $a_{12}a_{34}$ 之中點之橫標爲:

$$\frac{\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_3+x_4}{2}}{2} \text{ 或 } \frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}.$$

同樣,可見此中點之縱標爲:

$$\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}.$$

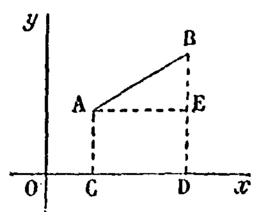
因之,$a_{12}a_{34}$ 之中點之二位標爲:

$$\frac{\Sigma x_p}{4} \text{ 及 } \frac{\Sigma y_p}{4}.$$

同樣,可見 $a_{13}\,a_{24}$ 及 $a_{14}\,a_{23}$ 之中點具此同一位標.故此三中點重合.

104. 二點之距離. 假定位標軸爲直軸.

設有二點 A, B, 其對於直位標系 Ox, Oy 之位標爲 (x_1, y_1) 及 (x_2, y_2), 命 d 爲 AB 之距離,而求之如次.



自 A, B 二點引直線 AC, BD 垂直 Ox, AE 平行 Ox, E 點位於 BD 上.

由直角三角形 AEB, 得

$$\overline{AB}^2=d^2=\overline{AE}^2+\overline{EB}^2$$

但
$$\overline{AE}=\overline{CD}=\overline{OD}-\overline{OC}=x_2-x_1$$
$$\overline{EB}=\overline{ED}+\overline{DB}=\overline{DB}-\overline{DE}$$

然 $\overline{DB}$ 爲 B 點之縱標 y_2, $\overline{DE}$ 或其等量 $\overline{CA}$ 爲 A 點之縱標 y_1, 已如上述,故有

$$\overline{EB}=y_2-y_1$$

因之, $$d^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$$

或 $$d^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$$

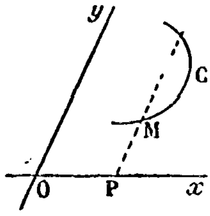
特殊言之,A點至原點O之距離爲

$$\overline{OA}^2=x_1^2+y_1^2$$

若位標軸爲斜軸,則公式較繁,玆不論.

用方程式表示曲線

105. 定理. 經幾何界定之曲線,其各點之位標適合含兩未知數之同一方程式.



設有位於任意二軸Ox, Oy之平面上之一曲線C,於Ox上,任取一點P,而自此點引直線與Oy平行,此直線與曲線相交於若干點.命M爲交點之一,於是,與向量$\overline{OP}$之任一值x對應者,卽有向量$\overline{PM}$之一值y.故由是可見y爲x之函數.因之,曲線上任一點之二位標x, y間有一關係存在,此關係可由曲線之幾何定義推求而得.

106. 逆定理. 位標適合含兩未知數之同一方程式之諸點,一般言之,位於一曲線上.

蓋,含兩未知數x, y之方程式,一般言之,界定y爲x之連續函數.因之,若x變更,則(x, y)點卽描畫一曲線,良以此點之各相連位置可以隨吾人之意,鄰近至任何之程度故也.

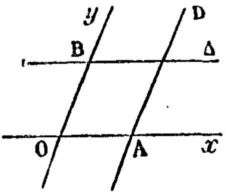
107. 定義. 一曲線之方程式云者,卽使一點位於曲線上,

其二位標應適合之關係也.

欲得一曲線之方程式,其法有二:或自與曲線上一點 M 之橫標 $x=\overline{OP}$, 而以 x 之函數表示此點之縱標 $y=\overline{PM}$, 或直接求一點位於曲線上時,其二位標 (x, y) 所應適合之關係.

今舉數例於次.

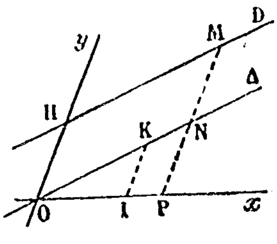
108　直線之方程式. 1°. 先取與 Oy 軸平行,而與 Ox 軸交於 A 點之直線 D 察之,設 A 點之橫標為 a. 欲使一點 $M(x, y)$ 位於直線 D 上,其橫標應等於 a, 而亦只須等於 a. 由此可見直線 D 之方程式為 $x=a$. 特殊言之, Oy 軸之方程式為 $x=0$.



2°. 次,取與 Ox 軸平行之直線 Δ 察之,命其與 Oy 軸之交點 B 之縱標為 b. 欲使一點 $M(x, y)$ 位於直線 Δ 上,則應有,而只須有:其縱標等於 b. 因之,直線 Δ 之方程式為 $y=b$.

特殊言之, Ox 軸之方程式為 $y=0$.

3°. 最後,取一與位標軸不平行之一直線 Δ 察之,命其與 Oy 軸之交點為 H. 自原點 O, 引一直線 Δ 與 D 平行,設 K 為直線 Δ 上,橫標為 H 之點 $(OI=+1)$.



已與 H 及 K 二點之位標,則直線 D 即顯然界定.欲作此直線,只須自 H 點,引直線與 OK 平行.

設　　$\overline{OH}=p$,　　$\overline{IK}=m$

自 Ox 上任取之一點 P，引直線與 Oy 平行而與 D 相交於 M 點。

今將以 M 點之橫標 $x=\overline{OP}$ 之函數表示其縱標 $y=\overline{PM}$.

設 N 爲 PM 與 Δ 之交點，於是，有

$$y=\overline{PM}=\overline{PN}+\overline{NM}.$$

但 $$\overline{NM}=\overline{OH}=p$$

又，(18) $$\frac{\overline{PN}}{\overline{IK}}=\frac{\overline{OP}}{\overline{DI}} \quad \text{或} \quad \frac{\overline{PN}}{m}=\frac{x}{1}$$

或 $$\overline{PN}=mx$$

故 $$y=mx+p$$

是即直線 D 之方程式，此方程式對於 x 及 y 而言爲一次式。

109 反之，凡對於 x 及 y 爲一次式之方程式均表示一直線今證之如次。

對於 x 及 y 爲一次式之方程式，其一般之形式爲

$$Ax+By+C=0$$

A, B, C 爲常數，且 A 與 B 不同時爲零。

若 $B=0, A\neq 0$，則方程式可書如 $x=-\frac{C}{A}$ 此式表示與 Oy 平行之一直線，其與 Ox 之交點之橫標爲 $-\frac{C}{A}$.

若 $A=0, B\neq 0$，則方程式變爲 $y=-\frac{C}{B}$，此式表示與 Ox 平行之一直線，其與 Oy 之交點之縱標爲 $-\frac{C}{B}$.

今假定 A, B 均不爲零，將方程式對 y 解之，即得

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}.$$

設 $$-\frac{A}{B}=m, \qquad -\frac{C}{B}=p.$$

於是,方程式變爲

(1) $$y=mx+p$$

於 Oy 上,取以 p 爲縱標之點 H, 幷作以 $x=1$, $y=m$ 爲位標之點 K, 再自 H 點引直線 D 與 OK 平行.

此直線 D 之方程式適爲 (1) 式,由以上所述可以立見也.

110 特殊言之,若 $p=0$, 則 H 點重於原點,而直線 D 重於直線 Δ (或 OK). 因之,直線 Δ 之方程式爲

$$y=mx$$

若 m 不變而 p 變,則直線 Δ 不動,而直線 D 與 Δ 平行而移動,如是確定直線 D 之方位之數 m, 名曰直線之角係數或斜坡. 此數乃位於直線 Δ 上(過原點而與直線 D 平行者), 而以 $+1$ 爲橫標之點之縱標也.

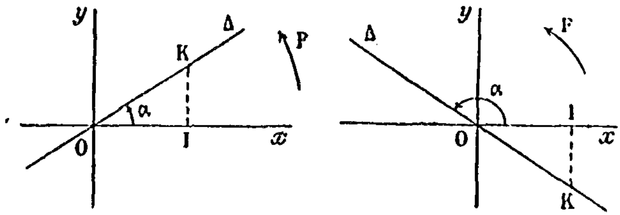
直線 D 與 Oy 之交點之縱標 p, 名曰直線之原點縱標

111. **定理**. 若位標軸 Ox, Oy 互相垂直,而半直線 Ox 與半直線 Oy 之最小正角爲 $+\frac{\pi}{2}$, 則一直線之斜坡乃直線 Ox 與此直線之角之正切.

用 F 矢以表示平面之正向. 依假定, $(Ox, Oy)=+\frac{\pi}{2}$ 式之前端乃半直線或軸之角 (78).

取過原點之一直線 Δ 而察之. 幷於此直線上,取一點 K, 使其橫標爲 $+1(\overline{OI}=+1)$. 於是,此直線之斜坡乃 K 點之縱標 $m=IK$.

將 Ox 繞 O 點依正向旋轉，而重於 Δ，如是轉過之角 α 乃 Ox 與 Δ 之最小正角〔二直線之角 (54)〕．圖形不同之情形有二，如下．

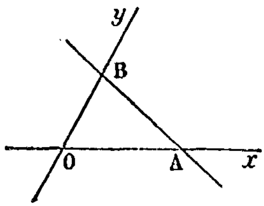


因 $\overline{OI}=+1$，故由正切之定義，立見 α 角之正切即為 $\overline{IK}$．

故有
$$m=\tan\alpha$$

是即證明定理矣．

112．問題．已與任意二軸 Ox, Oy，并 Ox 上一點 A，Oy 上一點 B，求直線 AB 之方程式．



命 A 點之橫標為 a，B 點之縱標為 b，直線與 Oy 軸之交點 B 既以 b 為縱標，故其方程式之形式為：

$$y=mx+b$$

欲確定斜坡 m，可將 A 點之位標 (a, O) 代入上式，即得

$$O=ma+b \quad \text{或} \quad m=-\frac{b}{a}$$

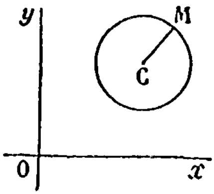
以 m 之此值代入直線之方程式，即得

$$y=-\frac{b}{a}x+b$$

或
$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

是卽所求之方程式.

113. 圓之方程式. 設有以 $C(a, b)$ 點爲圓心, R 爲半徑之圓.今將求此圓對於二直交軸 Ox, Oy 之方程式.



欲使一點 $M(x, y)$ 位於圓上,須有而亦只須有: CM 之距離等於圓之半徑,但吾人已見 (104).

$$\overline{CM}^2=(x-a)^2+(y-b)^2$$

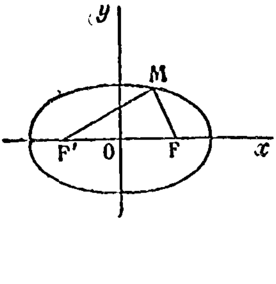
故,圓之方程式爲

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$$

114. 橢圓之方程式. 設有一橢圓,以 F 及 F' 爲焦點, $2a$ 爲其長軸之長.

欲使一點 M 位於橢圓上,應有

$$MF+MF'=2a$$



設 $FF'=2c$.欲使橢圓存在, $2a$ 當大於 $2c$.蓋 M 若爲曲線上一點,則由三角形 MFF' 得

$$MF+MF'>FF'$$

或 $$2a>2c$$

取直線 FF' 爲 x 軸,在 FF' 之中點 O, 而垂直 FF' 之直線爲 y 軸.於是, F 點之二位標爲 (c, O), F' 點之二位標爲 $(-c, O)$.

設 (x, y) 爲橢圓上一點 M 之二位標,則

$$MF=\sqrt{(x-c)^2+y^2},\qquad MF'=\sqrt{(x+c)^2+y^2}.$$

將此二值代入上列關係,即得橢圓之方程式.

(1) $$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a.$$

此方程式對於 x 及 y 爲無理式. 今當化成有理式.

爲此, 設

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=u, \qquad \sqrt{(x+c)^2+y^2}=v.$$

因之, (1) 式變爲:

(2) $$u+v-2a=0$$

以 $-u-v-2a$, $u-v-2a$, $-u+v-2a$ 三因子乘上式之第一端, 則得新方程式.

(3) $$(u+v-2a)(-u-v-2a)(u-v-2a)(-u+v-2a)=0$$

余謂方程式 (3) 與方程式 (2) 同解. 欲證明此點, 只須證明, 吾人所加入之諸因子均不爲零.

第一因子 $-u-v-2a$ 恆爲負, 又, 由三角形 MFF' 得

$$|MF-MF'|<FF' \quad 或 \quad |u-v|<2c$$

故更有 $$|u-v|<2a$$

由此可見 $u-v-2a$ 及 $-u+v-2a$ 二因子, 無論 x, y 爲何值, 恆爲負.

故方程式 (3) 可以代方程式 (2), 然 (3) 式爲有理, 蓋吾人可以相繼書之, 如

$$[4a^2-(u+v)^2][4a^2-(u-v)^2]=0$$

$$(4a^2-u^2-v^2-2uv)(4a^2-u^2-v^2+2uv)=0$$

$$(4a^2-u^2-v^2)^2-4u^2v^2=0$$

$$(u^2-v^2)^2-8a^2(u^2+v^2)+16a^4=0$$

但由 $u^2=(x-c)^2+y^2,\qquad v^2=(x+c)^2+y^2$

得 $u^2-v^2=-4cx,\qquad u^2+v^2=2(x^2+y^2+c^2)$

故上式變爲:

$$16c^2x^2-16a^2(x^2+y^2+c^2)+16a^4=0$$

或 $$x^2(c^2-a^2)-a^2y^2-a^2(c^2-a^2)=0$$

又或,以 $a^2(c^2-a^2)$ 除之

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}-1=0$$

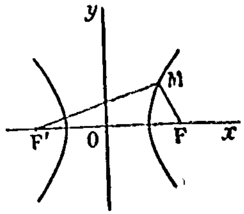
因 a^2-c^2 爲正,故吾人可設 $a^2-c^2=b^2$,於是橢圓之方程式變爲

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

115. 雙曲線之方程式. 若 F 及 F' 爲雙曲線之二焦點,而 $2a$ 爲其焦軸之長,則雙曲線乃適合條件.

$$|MF-MF'|=2a$$

之諸 M 點之軌跡.



此處,$FF'=2c$ 大於 $2a$,因由三角形 MFF',

得 $$|MF-MF'|<FF'$$

即 $$2a<2c$$

取與橢圓之情形同樣之軸,并設

$$u=MF=\sqrt{(x-c)^2+y^2},\qquad v=MF'=\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

則雙曲線之方程式變爲:

$$|u-v|=2a$$

或 $$(u-v-2a)(-u+v-2a)=0$$

此方程式與下式同解.

$$(u+v-2a)(-u-v-2a)(u-v-2a)(-u+v-2a)=0$$

因 $u+v-2a$ 及 $-u-v-2a$ 二因子均不爲零故也.蓋第二因子斷然爲負.至於第一因子,則由三角形 MFF', 有

$$MF+MF'>FF' \quad 或 \quad u+v>2c$$

故,更有 $\quad u+v>2a \quad$ 或 $\quad u+v-2a>0$

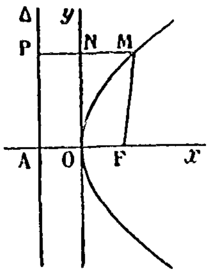
故本題所得之方程式與前款之(3)式同.因之,有

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}-1=0$$

但因 a^2-c^2 爲負,故吾人可設 $a^2-c^2=-b^2$,於是,雙曲線之方程式爲:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

116. 拋物線之方程式. 設 F 爲拋物線之焦點,Δ 爲其導線.



欲使一點 M 位於拋物線上,須有而亦只須有: MF 之長等於 M 點至導線之距離, MP.

引 FA 垂直 Δ, 幷設 $FA=P$. 命 O 爲 FA 之中點.取 OF 爲 x 軸(正向 OF), 在 O 點垂直 OF 之直線爲 y 軸(正向隨意).

於是, F 點之二位標爲 $\left(\frac{P}{2},O\right)$. 故 (x, y) 若爲拋物線上一點 M 之二位標,則有

$$\overline{MF}^2=\left(x-\frac{P}{2}\right)^2+y^2$$

又,命 N 爲 MP 與 y 軸之交點,則

$$PM=PN+NM=\frac{P}{2}+x$$

欲使 M 點位於拋物線上,應有 $MF=MP$ 或 $\overline{MF}^2=\overline{MP}^2$. 由是得

$$\left(x-\frac{P}{2}\right)^2+y^2=\left(x+\frac{P}{2}\right)^2$$

或

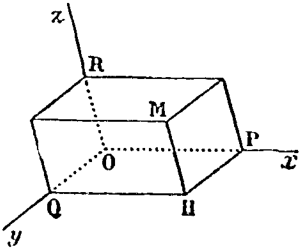
$$y^2-2Px=0$$

立體解析幾何大意

117. 定義. 取同過一點 O, 而不同在一平面上之三直線察之,於每一直線上,選擇一正向,例如 ox, oy 及 oz. 於是,此圖形卽構成一位標系, ox, oy, oz 依次各爲 x 軸, y 軸, z 軸. 平面 yoz, zox, xoy 名曰位標平面. 最後, O 點名原點.

吾人恆假定:凡位於位標軸上,或與位標軸平行之直線上之向量,其正向卽爲軸之正向.

此點旣設,設 M 爲空間任一點. 自此點引平面與平面 yoz, zox, xoy 諸平面平行,而依次與 ox oy oz 軸相交於 P, Q, R 諸點. 此等平面與諸位標平面合成一平行六面體, OP, OQ, OR 卽爲體之三稜, OM 爲其一對角線.



向量 $\overline{OP}$, $\overline{OQ}$, $\overline{OR}$ 之三代數值,依定義,卽爲 M 點之三位標. $\overline{OP}$ 名曰橫標, $\overline{OQ}$ 爲縱標, $\overline{OR}$ 爲高標.

118. 由上所述,可見:凡空間之點均有其確定之諸位標反之,已與任何三代數數 a, b, c, 則有一點,但亦僅有一點,以 a 爲橫標,b 爲縱標,c 爲高標.

蓋吾人若依次於 ox, oy, oz 上,取 P, Q, R 三點,俾

$$\overline{OP}=a,\quad \overline{OQ}=b,\quad \overline{OR}=c$$

而自 P, Q, R 三點,引平面與諸位標平面 yoz, zox, xoy 平行,則此三平面相交於惟一點 M, 其橫標爲 a, 縱標爲 b, 高標爲 c.

吾人謂此點之諸位標爲 a, b, c, 蓋先名其橫標,次名其縱標,再次其高標也.同樣,記號 $M(a, b, c)$ 卽表示 M 點之諸位標爲 a, b, c. 試取與六面體之棱 HM, 與 oz 平行者論之,卽有

$$\overline{HM}=\overline{OR}$$

故吾人亦可謂 $\overline{HM}$ 爲 M 點之高標.

特殊言之,凡平面 yoz 上之點,其橫標均爲零,zox 平面上之點,其縱標均爲零,xoy 平面上之點,其高標均爲零.凡 x 軸上之點,其縱高二位標均爲零,……最後,原點 O 爲三位標均爲零之惟一點.

若 ox, oy, oz 諸軸成一三直角三面角,則吾人謂諸軸爲直軸,否則卽爲斜軸.

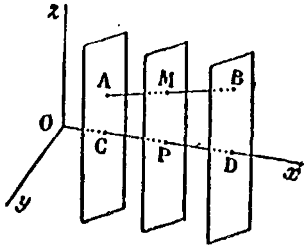
119. 問題. 已與二點 A, B, 其諸位標爲 (x_1, y_1, z_1) 及 (x_2, y_2, z_2). 於直線 AB 上,取一點 M, 而求其諸位標,俾有

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=k$$

k 爲一非 1 之數.

命 x, y, z 為 M 點之諸位標. 自 A, B, M 諸點, 引平面與 yoz 平行, 而與 ox 軸交於 C, D, P 三點. 於是, 有

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=\frac{\overline{PC}}{\overline{PD}}$$



如 102 款之方法, 由是可得

$$x=\frac{x_1-kx_2}{1-k}$$

同樣, 自 A, B, M 引平面與 zox 及 xoy 平行, 即得

$$y=\frac{y_1-ky_2}{1-k}, \qquad y=\frac{z_1-kz_2}{1-k}.$$

故 M 點之諸位標為:

$$x=\frac{x_1-kx_2}{1-k}, \quad y=\frac{y_1-ky_2}{1-k}, \quad z=\frac{z_1-kz_2}{1-k}.$$

特殊言之, AB 之中點之諸位標為:

$$\frac{x_1+x_2}{2}, \quad \frac{y_1+y_2}{2}, \quad \frac{z_1+z_2}{2}.$$

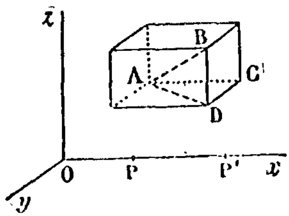
103 款之定理, 在四點不同在一平面上時, 仍為眞, 讀者可自驗之.

120. 兩點之距離. 假定位標軸為直軸.

設有 A, B 二點, 其諸位標為 (x_1, y_1, z_1) 及 (x_2, y_2, z_2). 今以 d 代表 AB 之距離, 而求之, 如次.

過 A, B 兩點, 引平面與諸位標平面平行, 而成一六面體, AB 即為體之對角線, 體之諸稜與諸位標軸平行. 兹取與 ox, oy, oz 諸軸平行之 AC, CD, DB 諸稜察之.

六面體之側面,其與 yoz 平面平行者,交 ox 軸於 P 及 P' 二點,依定義



$$\overline{OP}=x_1, \qquad \overline{OP'}=x_2$$

又,向量 AC 與 PP' 相等,故有

$$\overline{AC}=\overline{PP'}=\overline{OP'}-\overline{OP}=x_2-x_1$$

同樣,可見

$$\overline{CD}=y_2-y_1, \qquad \overline{DB}=z_2-z_1$$

此點既設,引直線 AD. 由直角三角形 ADB, 得

$$\overline{AB}^2=\overline{AD}^2+\overline{DB}^2$$

又由直角三角形 ACD, 得

$$\overline{AD}^2=\overline{AC}^2+\overline{CD}^2$$

故 $$d^2=\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DB}^2$$

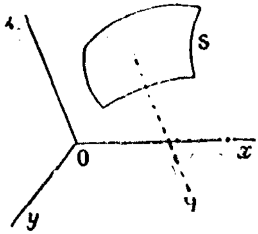
或 $$d^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2$$

或 $$d^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2$$

若諸位標軸爲斜軸,則公式較繁,茲不論.

用方程式表示曲面

121. 定理. 經幾何界定之曲面,其各點之諸位標適合含三未知數之同一方程式.



設有一曲面 S, 及三位標軸 ox, oy, oz. 於 xoy 平面上,任取一點 H. 自 H 點

引一直線與 oz 軸平行.此直線與曲面相交於若干點.

設 M 爲此交點之一,若 x, y, z 爲 M 點之諸位標,則 H 點之諸位標爲 x, y, o.

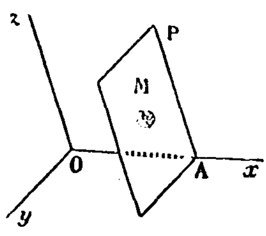
由是可見,任與曲面上一點之橫標 x 及縱標 y,則其高標 z 卽完全確定.因之,z 爲二獨立變數 x 及 y 之函數.故曲面上一點之諸位標 x, y, z 間,必有一種關係存在,而此關係當然可自曲面之幾何定義推求而出也.

122. 逆定理. 諸位標適合含三未知數之同一方程式之諸點,一般言之,必位於一曲面上.

蓋含三未知數 x, y, z 之一方程式,可界定 z 爲 x 及 y 二獨立變數之函數,因之,與 x, y 之任一組值對應者,必有 z 之一值.

今若取 $M(x, y, z)$ 點及 $H(x, y, o)$ 點察之,則見與 xoy 平面上之任一點 H 對應者,必有一點 M,位於過 H 而平行於 oz 之直線上,當 H 點於平面 xoy 上移動時,一般言之,M 點卽描畫一曲面.

使一點位於曲面上,其諸位標所應適合之關係,名曰曲面之方程式.



123. 平面之方程式 1°. 先取一平面 P 與位標平面例如 yoz 平行者論之,設 a 爲此平面 P 與 ox 之交點 A 之橫標.

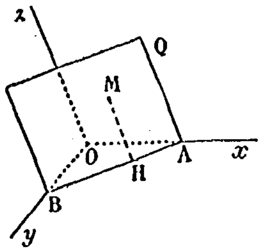
欲使 $M(x, y, z)$ 點位於平面 P 上則須有而亦只須有:其橫標 x 等於 a.由此

可見平面 P 之方程式爲:

$$x=a$$

同樣,可見與平面 zox 或 xoy 平行之平面,其方程式爲 $y=b$ 或 $z=c$. 特殊言之,位標平面 yoz, zox, xoy 之方程式依次爲 $x=0$, $y=0$, $z=0$

2°. 設 Q 爲與一位標軸,例如 oz, 平行之一平面. 命 A, B 爲此平面與 ox 及 oy 之交點, a 爲 A 點之橫標, b 爲 B 點之縱標.



欲使 $M(x, y, z)$ 點位於此平面 Q 上,則須有而亦只須有:過 M 點而平行 oz 之直線與 xoy 平面之交點 H 位於直線 AB 上.

但 xoy 平面上之 H 點,其對於 ox, oy 軸之二位標爲 x, y. 欲使此點位於 AB 直線上,應有 (112)

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1=0$$

是卽平面 Q 之方程式.

同樣,可見:凡與 oy 或 ox 軸平行之平面,其方程式之形式爲:

$$\frac{x}{a}+\frac{z}{c}-1=0 \text{ 或 } \frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1=0.$$

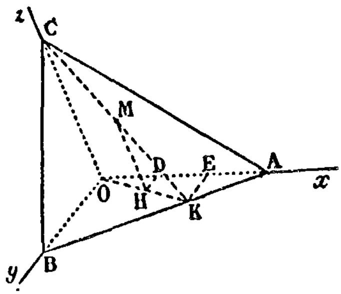
3°. 最後,取一平面 π 不與諸位標軸平行者論之.設 A, B, C 爲此平面依次與 ox, oy, oz 諸軸之交點, a 爲 A 點之橫標, b 爲 B 點之縱標, c 爲 C 點之高標.

$$\overline{OA}=a,\quad \overline{OB}=b,\quad \overline{OC}=c.$$

自平面 xoy 上任一點 H, 引直線與 oz 平行, 而與平面 π 交於一點 M. 今將以此點之橫標 x 及縱標 y 之函數表示其高標 $z=\overline{HM}$. 直線 OH 與直線 AB 交於 K 點, 而 C, M, K 諸點同位於一直線上, 因此諸點同時位於平面 ABC 上及 OC, HM 二平行線所界定之平面上故也.

故有(18)

$$\frac{\overline{HM}}{\overline{OC}}=\frac{\overline{KH}}{\overline{KO}}.$$



或

(1) $$\frac{z}{c}=\frac{\overline{KH}}{\overline{KO}}$$

自 H, K 兩點,引直線與 oy 平行, 而交 ox 於 D, E 二點. 於是

$$OD=x,\qquad DH=y.$$

今若命 α, β 爲 K 點之二位標, 則有

$$\overline{OE}=\alpha,\qquad EK=\beta$$

(1) 式可書如

$$\frac{z}{c}=\frac{\overline{ED}}{\overline{EO}}=\frac{\overline{EO}+\overline{OD}}{\overline{EO}}=1-\frac{\overline{OD}}{\overline{OE}}$$

或

(2) $$\frac{z}{c}=1-\frac{x}{\alpha}$$

今當計算 α.

先有:

$$\frac{\overline{OE}}{\overline{OD}}=\frac{\overline{EK}}{\overline{DH}} \quad 或 \quad \frac{\alpha}{x}=\frac{\beta}{y}$$

又,因 K 點位於直線 AB 上,而此直線之方程式爲

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1=0,$$

故有 (112).

(3) $$\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}-1=0$$

由此最後之二方程式,卽可求得 α, β.

自前式得 $\beta=\frac{\alpha y}{x}$, 代入 (3) 式,得

$$\frac{\alpha}{a}+\frac{\alpha y}{bx}=1$$

或 $$\frac{\alpha}{x}\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=1$$

故 $$\frac{x}{\alpha}=\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$$

將 $\frac{x}{\alpha}$ 之此值,代入 (2) 式,卽得

$$\frac{z}{c}=1-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}$$

或,最後

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}-1=0$$

是卽平面 π 之方程式,此式對於 x, y, z 而言爲一次.

124 反之,凡對於 x, y, z 爲一次之方程式均表示一平面,今當證之如次.

凡一次方程式均可書如:

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

A, B, C, D 為常數.

吾人已知,平面乃曲面之一種,聯結此面上任意二點之直線,完全位於面上者也.故今只須證明,若二點 M_1, M_2 之諸位標適合題設方程式,則直線 $M_1 M_2$ 上任何點之諸位標,亦適合之.

設 x_1, y_1, z_1 及 x_2, y_2, z_2 為 M_1 及 M_2 兩點之諸位標,依假設,有

$$Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$$

$$Ax_2+By_2+Cz_2+D=0$$

以1乘前式,$-k$ 乘後式,而加之,則得

$$A(x_1-kx_2)+B(y_1-ky_2)+C(z_1-kz_2)+D(1-k)=0$$

或
$$A\cdot\frac{x_1-kx_2}{1-k}+B\frac{y_1-ky_2}{1-k}+C\frac{z_1-kz_2}{1-k}+D=0$$

但 $\frac{x_1-kx_2}{1-k}$, $\frac{y_1-ky_2}{1-k}$, $\frac{z_1-kz_2}{1-k}$ 乃直線 M_1M_2 上任意一點 M 之諸位標(119).故上式卽證明本題矣.

125. 球之方程式. 設有以 $C(a, b, c)$ 為球心,R 為半徑之一球.今將求此球對於三直軸 ox, oy, oz 之方程式.

欲使一點 $M(x, y, z)$ 位於球上,則須有而亦只須有:距離 CM 等於半徑.但(120)

$$\overline{CM}^2=(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2$$

故,球之方程式為

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

點組之比例距離中心

126. 定義. 設有在空間依某種次序排列,例如依誌數遞增之次序排列之 n 個任意點 $A_1, A_2, \cdots\cdots A_n$. 假定與此各點 A_i 對應者,有一不爲零之代數數 λ_i, 幷名之曰 A_i 點之係數.

於是,所謂 A_1, A_2 二點之組之比例距離中心 B 者,乃直線 A_1A_2 上之一點,其係數爲 $\lambda_1+\lambda_2$, 且由下列等式界定者也.

$$\lambda_1\overline{BA}_1+\lambda_2\overline{BA}_2=0$$

或

$$\frac{\overline{BA}_1}{\overline{BA}_2}=-\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \tag{1}$$

又,所謂 A_1, A_2, A_3 三點之組之比例距離中心者,乃 A_1, A_2 二點之組之比例距離中心與 A_3 點所成之新組之比例距離中心也.

如是界定之點與 n 點之次序無關,今證明之如次.

命 x_i, y_i, z_i 爲 A_i 點對於任意三軸之三位標 $(i=1,2,3,\cdots\cdots n)$. 由等式(1)界定之點 B, 其橫標爲(119)

$$x=\frac{x_1+\frac{\lambda_2}{\lambda_1}x_2}{1+\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}=\frac{\lambda_1x_1+\lambda_2x_2}{\lambda_1+\lambda_2} \tag{2}$$

由此可知 (A_1, A_2, A_3) 組之比例距離中心之橫標爲

$$x'=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)x+\lambda_3x_3}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}$$

或以 x 之值(2)代入,得

$$x'=\frac{\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\lambda_3x_3}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}$$

同樣,(A_1, A_2, A_3, A_4)組之比例距離中心之橫標爲

$$\frac{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)x'+\lambda_4x_4}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4}$$

或以x'之値代入,

$$\frac{\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\lambda_3x_3+\lambda_4x_4}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4}$$

且縱標及高標之公式與此類似.

於是,逐步推求,卽可見n點之組之比例距離中心之諸位標爲

$$a=\frac{\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\cdots\cdots+\lambda_nx_n}{\lambda_1+\lambda_2+\cdots\cdots+\lambda_n}=\frac{\sum_1^n\lambda_ix_i}{\sum_1^n\lambda_i}$$

$$b=\frac{\lambda_1y_1+\lambda_2y_2+\cdots\cdots+\lambda_ny_n}{\lambda_1+\lambda_2+\cdots\cdots+\lambda_n}=\frac{\sum_1^n\lambda_iy_i}{\sum_1^n\lambda_i}$$

$$c=\frac{\lambda_1z_1+\lambda_2z_2+\cdots\cdots+\lambda_nz_n}{\lambda_1+\lambda_2+\cdots\cdots+\lambda_n}=\frac{\sum_1^n\lambda_iz_i}{\sum_1^n\lambda_i}$$

故此三數與諸點之次序無關.

注意. 此種計算僅在$\lambda_1+\lambda_2$, $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$,……, $\lambda_1+\lambda_2+\cdots\cdots+\lambda_n$諸和均不爲零時,始爲可能,此條件在最後一和不爲零時恆可成立.蓋吾人若假定此和爲正,則只須將此n點排列,而使係數爲正之諸點在前,卽已足矣.

若$\lambda_1+\lambda_2+\cdots\cdots+\lambda_n=0$,則比例距離中心卽不存在.

127. 定理. 在計算一點組之比例距離中心時,吾人恆可以任一分組之比例距離中心代替此分組,但此分組中心之係數當等於組中各點之係數和.

例如分點組S爲三分組S_1, S_2, S_3. 幷命G, G_1, G_2, G_3爲S, S_1, S_2, S_3各組之比例距離中心.

於是,G點亦爲G_1, G_2, G_3三點之組之比例距離中心,但G_1, G_2, G_3之係數當爲S_1, S_2, S_3各組之係數和.今證之如次.

假定S包含n點,其諸位標爲$(x_i\, y_i\, z_i)$. 係數爲λ_i, i可自1變至n,幷假定對於S_1之各點,i自1變至p,對於S_2,自$p+1$至q,對於S_3,自$q+1$至n.

於是,G_1, G_2, G_3之諸橫標爲

$$\frac{\sum\limits_{1}^{p}\lambda_i x_i}{\sum\limits_{1}^{p}\lambda_i}, \quad \frac{\sum\limits_{p+1}^{q}\lambda_i x_i}{\sum\limits_{p+1}^{q}\lambda_i}, \quad \frac{\sum\limits_{q+1}^{n}\lambda_i x_i}{\sum\limits_{q+1}^{n}\lambda_i}$$

因之,此三點之比例距離中心G'之橫標爲(126)

$$\frac{\sum\limits_{1}^{p}\lambda_i \dfrac{\sum\limits_{1}^{p}\lambda_i x_i}{\sum\limits_{1}^{p}\lambda_i}+\sum\limits_{p+1}^{q}\lambda_i \dfrac{\sum\limits_{p+1}^{q}\lambda_i x_i}{\sum\limits_{p+1}^{q}\lambda_i}+\sum\limits_{q+1}^{n}\lambda_i \dfrac{\sum\limits_{q+1}^{n}\lambda_i x_i}{\sum\limits_{q+1}^{n}\lambda_i}}{\sum\limits_{1}^{p}\lambda_i+\sum\limits_{p+1}^{q}\lambda_i+\sum\limits_{q+1}^{n}\lambda_i}$$

但分母卽爲$\sum_{1}^{n}\lambda_i$,分子化簡後變爲

$$\sum_{1}^{p}\lambda_i x_i+\sum_{p+1}^{q}\lambda_i x_i+\sum_{q+1}^{n}\lambda_i x_i$$

或

$$\sum_{1}^{n}\lambda_i x_i$$

故G'點之橫標爲

$$\frac{\sum_{1}^{n}\lambda_i x_i}{\sum_{1}^{n}\lambda_i}$$

是卽G點之橫標也

同樣,可見G, G'二點具同一之縱標及高標,因之,G點與G'點重合,而定理證明矣.

平均距離中心

128. 定義. n點之組之平均距離中心者,乃各點之係數相等時,點組之比例距離中心也.

若於126款之公式中,假定$\lambda_1=\lambda_2=\cdots\cdots\lambda_n$,則得平均距離中心之諸位標.

$$a=\frac{x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n}{n}=\frac{\sum_{1}^{n}x_i}{n}$$

$$b=\frac{y_1+y_2+\cdots\cdots+y_n}{n}=\frac{\sum_{1}^{n}y_i}{n}.$$

$$c=\frac{z_1+z_2+\cdots\cdots+z_n}{n}=\frac{\sum_1^n z_i}{n}$$

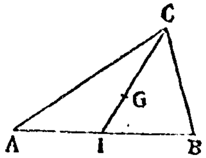
在實際上,吾人可以1爲各點之係數.

A, B 二點之平均距離中心,乃位於 AB 直線上之一點 I,而由下列等式界定者.

$$\frac{\overline{IA}}{\overline{IB}}=-1$$

是卽 AB 之中點也.

129. 三點之平均距離中心. 設有三點 A, B, C,其係數均爲1,於是 (A, B) 組之平均距離中心,乃 AB 之中點 I,其係數爲2. 因之,(A, B, C) 組之平均距離中心,乃在直線 IC 上之 G 點,而由下列關係所界定者.



$$\frac{\overline{GI}}{\overline{GC}}=-\frac{1}{2}$$

或
$$\frac{\overline{IG}}{\overline{IC}}=\frac{1}{3}$$

由此可見,所求之中心,乃三角形 ABC 之任一中線上之一點,此點至底邊之中點之長爲中線之長之三分之一.

由此可知:

三角形之三中線同過一點,此點在每一中線上至底邊之長爲該中線之$\frac{1}{3}$.

此點名曰三角形之重心.

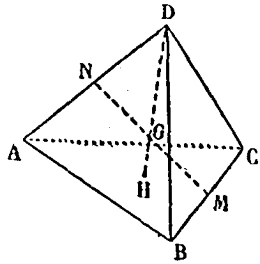
130 四點之平均距離中心. 設有四點 A, B, C, D,其係數

仍均假定爲1,根據以上所述,(A, B, C)組之平均距離中心,乃三角形ABC之重心H.因之,題設四點之平均距離中心,乃直線DH上之一點G,而由下列等式界定者:

$$\frac{\overline{GH}}{\overline{GD}}=-\frac{1}{3} \quad 或 \quad \frac{\overline{HG}}{\overline{HL}}=\frac{1}{4}$$

今若假定此四與點不同在一平面上,而成一四面體,則吾人可謂四面體之諸角頂之平均距離中心,位於聯結任一角頂至其對面之重心之直線上.且此點至對面重心之長,爲此聯線之$\frac{1}{4}$.

此中心之確定,另有一種方法,述如次.(B, C)組之中心乃BC之中點M,其係數爲2.(A, D)組之中心,乃AD之中點N,其係數亦爲2.但吾人已知(A, B, C, D)組之中心與(M, N)組之中心重合(127),因此二點之係數相同,故所求之中心乃MN之中點.由是可見:



四面體之諸角頂之平均距離中心,乃任意二對稜之中點之聯線之中點.

於是,吾人得述定理如下:

在一四面體中,聯結任一角頂及其對面之重心之四線分,及聯結任意二對稜之中點之三線分,有一公共之點.

此點乃後三線分之中點,而其在前四線分上,至對面重心

之長爲各該線分全長之$\frac{1}{4}$.

此點名曰四面體之重心.

131. **問題.** 已與空間任意五點,求證:

1°. 聯結每一點至其餘四點所成之四面體之重心之諸直線經過同一點 O.

2°. 聯結任意二點之中點至其餘三點所成之三角形之重心之諸直線亦經過此同一點 O.

命 A, B, C, D, E 爲題設之五點.

1°. 聯結 A 點至其餘四點所成四面體 $BCDE$ 之重心之直線,經過五與點之平均距離中心 O, 其餘之諸同類直線亦然.

2°. AB 之中點 I, 乃 A, B 二點之平均距離中心,而三角形 CDE 之重心 G 亦爲 C, D, E 三點之平均距離中心,故直線 IG 經過 A, B, C, D, E 五點之平均距離中心.其餘之諸同類直線亦然.

同樣,可證明下述諸定理.

132. **定理.** 已與空間之任意六點.

1°. 聯結任意二點之中點及其餘四點所成四面體之重心之諸直線,經過同一點 O.

2°. 聯結任意三點所成三角形之重心及其餘三點所成三角形之重心之諸直線,亦經過此同一之點 O.

133. **定理.** 已與空間之任意七點,聯結任意三點所成三

角形之重心,及其餘四點所成四面體之重心之諸直線,經過同一點.

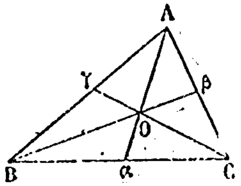
134. 定理. 已與空間之任意八點,聯結任意四點所成四面體之重心,及其餘四點所成四面體之重心之諸直線,經過同一點.

135. 定理. 若 α,β,γ 爲三角形 ABC 之三邊 BC, CA, AB 上之三點,而有條件

$$(1)\qquad \frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}}\cdot\frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}}\cdot\frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}}=-1$$

則直線 $A\alpha, B\beta, C\gamma$ 或共點,或平行.

吾人可與 A,B,C 三點,各以適當之係數 λ,μ,ν, 而使直線 $A\alpha, B\beta, C\gamma$ 經過 A,B,C 三點之比例距離中心.今先證明之,如次.



任取一數 ν, 而以等式

$$(2)\qquad \frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}}=-\frac{\nu}{\mu},\qquad \frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}}=-\frac{\lambda}{\nu}$$

確定 λ 及 μ. 於是 α,β 二點卽爲 (B,C) 及 (C,A) 二點組之比例距離中心.因之, $A\alpha, B\beta$ 二直線經過 (A, B, C) 點組之比例距離中心 O.

但若於題設之關係(1)中,以 $\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}}, \frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}}$ 之值(2)代入,則有

$$\frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}}=-\frac{\mu}{\lambda}$$

由此可見γ點乃(A,B)點組之比例距離中心.

故直線$C\gamma$亦過(A,B,C)點組之中心O,因之,$A\alpha, B\beta, C\gamma$三直線同過一點O.

此證明假定比例距離中心存在,換言之,即假定$\lambda+\mu+\nu$不等於零也.

若$\lambda+\mu+\nu=0$,則$A\alpha, B\beta, C\gamma$三直線平行,今證之於次.

自(2)式,得

$$\mu=-\nu\cdot\frac{\overline{\alpha C}}{\overline{\alpha B}},\qquad \lambda=-\nu\cdot\frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}}$$

因之,
$$\lambda+\mu+\nu=-\nu\cdot\frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}}-\nu\cdot\frac{\overline{\alpha C}}{\overline{\alpha B}}+\nu$$

或
$$\lambda+\mu+\nu=\nu\left[1-\frac{\overline{\alpha C}}{\overline{\alpha B}}-\frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}}\right]$$

但
$$1-\frac{\overline{\alpha C}}{\overline{\alpha B}}=\frac{\overline{\alpha B}-\overline{\alpha C}}{\overline{\alpha B}}=\frac{\overline{C\alpha}+\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha B}}=\frac{\overline{CB}}{\overline{\alpha B}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{B\alpha}}$$

故
$$\lambda+\mu+\nu=\nu\left[\frac{\overline{BC}}{\overline{B\alpha}}-\frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}}\right]$$

欲使$\lambda+\mu+\nu=0$,應有

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{B\alpha}}=\frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}}$$

由此可見(17) $A\alpha$與$B\beta$平行.

同様,可證明$A\alpha$與$C\gamma$平行.

本定理乃Céva氏定理之逆,其他之證明將於卷二中見之,并見其多種之應用焉.

136. 定理. 若 α, β, γ 爲三角形 ABC 之 BC, CA, AB 三邊上之三點,而有條件.

$$(1) \qquad \frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} \cdot \frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} \cdot \frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} = 1$$

則 α, β, γ 三點同在一直線上.

任取一數 ν, 而用等式,

$$(2) \qquad \frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} = -\frac{\nu}{\mu}, \qquad \frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} = +\frac{\lambda}{\nu}.$$

以確定 λ 及 μ 之值.於是, α 即爲點組 $[B(\mu), C(\nu)]$ 之比例距離中心 (括號中所含之數即爲點之係數), β 即爲點組 $[A(\lambda), C(-\nu)]$ 之中心.

因之, (127), 直線 $\alpha\beta$ 經過點組 $[A(\lambda), B(\mu), C(\nu), C(-\nu)]$ 之中心,但此中心與點組 $[A(\lambda), B(\mu)]$* 之中心,即 γ 點重合,因自 (1), (2) 兩式,可得

$$\frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} = -\frac{\mu}{\lambda}$$

故也.

因之, α, β, γ 三點同在一直線上.

本定理爲 Ménélaüs 氏定理之逆,其另一證明將於卷二中見之.并可見其多種之應用焉.

---

*若一點組中有二點重合,而係數等絕對值而異號,則取消此二點,點組之比例距離中心仍不變,蓋吾人若於126款所求得之中心之位標 $(a, b, c,)$ 之公式中,使 $x_1=x_2$, $y_1=y_2$, $z_1=z_2$, $\lambda_1=-\lambda_2$, 則此諸數即完全絕跡於公式中矣.

137. Leibnitz氏定理. 設有空間之n點$A_1, A_2, \cdots\cdots A_n$,其係數爲$\lambda_1, \lambda_2, \cdots\cdots \lambda_n$. 命$G$爲此$n$點之比例距離中心.

若M爲空間之任一點,則有Leibnitz氏公式:

$$\lambda_1 \overline{MA}_1^2 + \lambda_2 \overline{MA}_2^2 + \cdots\cdots + \lambda_n \overline{MA}_n^2$$

$$= \lambda \overline{MG}^2 + \lambda_1 \overline{GA}_1^2 + \lambda_2 \overline{GA}_2^2 + \cdots\cdots + \lambda_n \overline{GA}_n^2,$$

λ所代表者,乃$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots\cdots + \lambda_n$, 假定不爲零者.

用更緊縮之形式,此公式亦可書如:

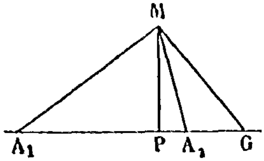
$$\text{(1)} \qquad \sum_1^n \lambda_i \overline{MA}_i^2 = \lambda \overline{MG}^2 + \sum_1^n \lambda_i \overline{GA}_i^2$$

今先假定$n=2$, 而證明本定理.

斯時,A_1, A_2二點之中心G位於直線A_1A_2上,今若自M點引垂線MP於A_1A_2, 則由三角形MA_1G及MA_2G, 得(22)

$$\overline{MA}_1^2 = \overline{MG}^2 + \overline{GA}_1^2 - 2\overline{GA}_1 \cdot \overline{GP}$$

$$\overline{MA}_2^2 = \overline{MG}^2 + \overline{GA}_2^2 - 2\overline{GA}_2 \cdot \overline{GP}$$



依次以λ_1, λ_2乘兩式而加之,即得

$$\lambda_1 \overline{MA}_1^2 + \lambda_2 \overline{MA}_2^2 = (\lambda_1 + \lambda_2) \overline{MG}^2 + \lambda_1 \overline{GA}_1^2 + \lambda_2 \overline{GA}_2^2 - 2\overline{GP}(\lambda_1 \overline{GA}_1 + \lambda_2 \overline{GA}_2)$$

但$\lambda_1 \overline{GA}_1 + \lambda_2 \overline{GA}_2 = 0$, 因$G$爲$A_1, A_2$之比例距離中心故也(126)

因之,上式變爲:

$$\lambda_1 \overline{MA}_1^2 + \lambda_2 \overline{MA}_2^2 = (\lambda_1 + \lambda_2) \overline{MG}^2 + \lambda_1 \overline{GA}_1^2 + \lambda_2 \overline{GA}_2^2$$

是即$n=2$時, Leibnitz之公式也.

今假定本定理在n點時爲眞,而證明在$n+1$點時亦爲眞.

假定公式(1)成立,G 代表 $A_1, A_2, \cdots\cdots A_n$, n 點之比例距離中心.取一第 $n+1$ 點 A_{n+1}, 其係數爲 λ_{n+1} 於(1)式之兩端,加入 $\lambda_{n+1}\overline{MA}_{n+1}$, 卽得

$$(2)\qquad \sum_1^{n+1}\lambda_i\overline{MA}_i^2=\lambda\overline{MG}^2+\lambda_{n+1}\overline{MA}_{n+1}^2+\sum_1^n\lambda_i GA_i^2$$

命 H 爲 $n+1$ 點 $A_1, A_2\cdots\cdots A_n, A_{n+1}$ 之比例距離中心. H 點亦可視爲 G 及 A_{n+1} 兩點之中心, G 之係數爲 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots\cdots+\lambda_n$ 或 λ.

應用 Leibnitz 公式於 G 及 A_{n+1} 兩點,卽得

$$\lambda\overline{MG}^2+\lambda_{n+1}\overline{MA}_{n+1}^2=(\lambda+\lambda_{n+1})\overline{MH}^2+\lambda\overline{HG}^2+\lambda_{n+1}\overline{HA}_{n+1}^2$$

因此式之關係,公式(2)變爲

$$(3)\quad \sum_1^{n+1}\lambda_i\overline{MA}_i^2=(\lambda+\lambda_{n+1})\overline{MH}^2+\lambda_{n+1}\overline{HA}_{n+1}^2+\lambda\overline{HG}^2+\sum_1^n\lambda_i\overline{GA}_i^2$$

但無論 M 爲空間之何點,(1)式既經假定爲真,故吾人可以 H 點代 M, 而有

$$\sum_1^n\lambda_i\overline{HA}_i^2=\lambda HG^2+\sum_1^n\lambda_i GA_i^2$$

於是,公式(3)變爲:

$$\sum_1^{n+1}\lambda_i\overline{MA}_i^2=(\lambda+\lambda_{n+1})\overline{MH}^2+\sum_1^{n+1}\lambda_i HA_i^2$$

是卽有 $n+1$ 點 A_i 時, Leibnitz 之公式也.

故本定理已證明矣.

用本定理,可以推廣 40 及 41 欵所得之結果,如下.

138. 問題. 已與空間之n定點$A_1, A_2, \cdots\cdots A_n$, 求一點$M$之軌跡,俾有:

$$a_1\overline{MA}_1^2+a_2\overline{MA}_2^2+\cdots\cdots+a_2\overline{MA}_n^2=k$$

$a_1, a_2, \cdots\cdots a_n$, k爲與數.

今分兩種情形論之.

1°. $a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n\neq 0$.

命G爲n點$A_1, A_2\cdots\cdots A_n$之比例距離中心,其各點之係數爲$a_1, a_2, \cdots\cdots a_n$.

由 Leibnitz 之公式,得

$$\sum_1^n a_i\overline{MA}_i^2=a\overline{MG}^2+\sum_1^n a_i\overline{GA}_i^2$$

若$\sum_1^n a_i\overline{MA}_i^2$爲常數,而等於$k$,則

$$a\overline{MG}^2=k-\sum_1^n a_i\overline{GA}_i^2$$

或
$$\overline{MG}^2=\frac{1}{a}\left[k-\sum_1^n a_i\overline{GA}_i^2\right]$$

由此可見MG爲常數,因之,M點之軌跡爲一球,其球心爲G,半徑爲R,而

$$R^2=\frac{1}{a}\left[k-\sum_1^n a_i\overline{GA}_i^2\right]$$

此球僅在上式後端爲正時始存在.

2°. $a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n=0$.

斯時,$a_1, a_2, \cdots\cdots a_n$ 諸數之號不一.因吾人可將此諸數依任何次序排列,故可假定 $a_1, a_2, \cdots\cdots a_p$ 為正,$a_{p+1}, a_{p+2}, \cdots\cdots a_n$ 為負.

設　$a' = a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_p,\qquad a'' = a_{p+1} + a_{p+2} + \cdots\cdots + a_n$

於是,
$$a' + a'' = 0$$

又,命 G' 及 G'' 為 $(A_1, A_2, \cdots\cdots A_p)$ 及 $(A_{p+1}, A_{p+2}, \cdots\cdots A_n)$ 二點組之比例距離中心.

應用 Leibnitz 氏定理於此二點組,則對於空間任意一點 M,即有

$$\sum_1^n a_i \overline{MA_i}^2 = a' \overline{MG'}^2 + \sum_1^p a_i \overline{G'A_i}^2,$$

$$\sum_{p+1}^n a_i \overline{MA_i}^2 = a'' \overline{MG''}^2 + \sum_{p+1}^n a_i \overline{G''A_i}^2$$

兩端相加,得

$$\sum_1^n a_i \overline{MA_i}^2 = a'(\overline{MG'}^2 - \overline{MG''}^2) + \sum_1^p a_i \overline{G'A_i}^2 + \sum_{p+1}^n a_i \overline{G''A_i}^2$$

今若以常數 k 代上式之第一端,則見 $\overline{MG'}^2 - \overline{MG''}^2$ 為常數.因之,M 點之軌跡乃垂直於直線 $G'G''$ 之一平面.

注意.若諸 A_i 點位於同一平面上,而所求者乃此平面上之 M 點之軌跡,且適合下列條件者.

$$\sum_1^n a_i \overline{MA_i}^2 = k$$

則吾人可謂:若 $a_1 + a_2 + \cdots\cdots + a_n \neq 0$,軌跡為一圓,若 $a_1 + a_2 + \cdots\cdots a_n = 0$,軌跡為一直線.

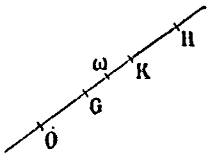
139. 問題 設G爲三角形ABC之重心,H爲垂心,O爲外接圓之圓心,ω爲九點圓之圓心,I, I_a, I_b, I_c爲內切及旁切於A, B, C諸角之諸圓之諸圓心,則

1°. A, B, C, H四點之平均距離中心卽爲ω點.

2°. I, I_a, I_b, I_c四點之平均距離中心卽爲O點.

1°. 吾人已知O, G, H三點同在一直線上,且

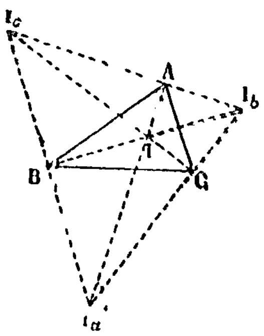
$$\frac{\overline{GO}}{\overline{GH}} = -\frac{1}{2}$$



因之,若k爲GH之中點,則G, K二點分線分OH爲三等分,於是,GK之中點ω卽與OH之中點重合,換言之,卽與九點圓之圓心重合也.故有

$$\frac{\omega G}{\omega H} = -\frac{1}{3}$$

但G爲A, B, C三點之平均距離中心(129).故由上式可見ω爲A, B, C, H四點之平均距離中心.



2°. I爲三角形$I_aI_bI_c$之垂心,此甚易得見者也.因之,根據適所證明,I, I_a, I_b, I_c四點之平均距離中心,乃三角形$I_aI_bI_c$之九點圓圓心.但此圓經過諸高之垂趾A, B, C三點,故與三角形ABC之外接圓重合.

因之,O點乃I, I_a, I_b, I_c四點之平均距離中心明矣.

140 問題. 沿用前題之記號,幷對於平面上任意一點M,設

$$\sum\overline{MI}^2=\overline{MI}^2+\overline{MI}_a^2+\overline{MI}_b^2+\overline{MI}_c^2$$

求證下列各公式

$$\sum\overline{HI}^2-\sum\overline{OI}^2=4\overline{OH}^2$$

$$\sum\overline{GI}^2-\sum\overline{OI}^2=\frac{4}{9}\overline{OH}^2$$

$$\sum\overline{\omega I}^2-\sum\overline{OI}^2=\overline{OH}^2$$

應用Leibnitz公式於I, I_a, I_b, I_c諸點,而以1爲諸點之係數,於是,比例距離中心即爲平均距離中心,是即O點也.其證明已述如上.

由Leibnitz公式,得

$$\sum\overline{MI}^2=4\overline{OM}^2+\sum\overline{OI}^2$$

或
$$\sum\overline{MI}^2-\sum\overline{OI}^2=4\overline{OM}^2$$

M可爲平面上或空間之任何點.

相繼以H, G, ω諸點代M點,即得

$$\sum\overline{HI}^2-\sum\overline{OI}^2=4\overline{OH}^2$$

$$\sum\overline{GI}^2-\sum\overline{OI}^2=4\overline{OG}^2=\frac{4}{9}\overline{OH}^2$$

$$\sum\overline{\omega I}^2-\sum\overline{OI}^2=4\overline{O\omega}^2=\overline{OH}^2$$

141. 問題. 求證有法凸多邊形之諸角頂之平均距離中心與多邊形之外接圓圓心重合.

設$A_1, A_2, \cdots\cdots A_n$爲多邊形之諸角頂,$O$爲外接圓之圓心.

因多邊形對於直線OA_1爲對稱,故求平均距離中心時,吾人可取二對稱點(其係數爲1),而代以其位於OA_1上之中點(其係數爲2).於是,所求者乃變爲位於直線OA_1上之一點組之比例距離中心,故此中心位於OA_1上.同樣可見此中心亦位於$OA_2, OA_3, \cdots\cdots$諸直線上.因之,此點即與O點重合.

142. 問題. 已與二同心圓C, Γ,其圓心爲O,其半徑爲R, P,及內接於C圓之一有法凸多邊形$A_1A_2\cdots\cdots A_n$.求證:自Γ圓上任一點M至多邊形之諸角頂之諸距離之平方和爲一常數.

應用Leibnitz公式於諸角頂,而以1爲其公同之係數.根據前款定理比例距離中心即爲O點,且有

$$\sum\overline{MA_i}^2 = n\overline{OM}^2 + \sum\overline{OA_i}^2$$

但 $$OM = \rho, \quad OA_1 = OA_2 = \cdots\cdots = OA_n = R$$

故 $$\sum\overline{MA_i}^2 = n(\rho^2 + R^2)$$

而定理證明矣.

本定理亦可如下述之:

一點至一有法凸多邊形之諸角頂之諸距離之平方和爲常數時,則此點之軌跡爲與多邊形之外接圓同心之一圓.

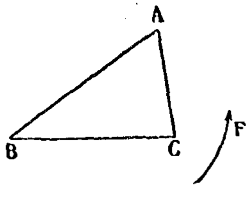
面　積

143. 定義. 設ABC爲一有向平面內之一三角形.今以記號$\overline{ABC}$代表一代數數.其絕對值卽爲該三角形之面積之數,其號或爲+或爲−則視依ABC向,沿三角形之周線移動之點,其轉動之方向與平面之正向或負向相同而定.

此數$\overline{ABC}$名曰三角形之代數面積,其絕對值,卽該三角形之面積之數,通常記如ABC.故隨圖形之情形,有

$$\overline{ABC}=+ABC \quad 或 \quad \overline{ABC}=-ABC.$$

例如平面之正向爲F矢之向,則有



$$\overline{ABC}=+ABC$$

$$\overline{BCA}=+BCA$$

$$\overline{CBA}=-CBA$$

....

144. 無論平面之正向若何,圖形之情形若何,吾人恆有

$$\overline{ABC}=\overline{BCA}=\overline{CAB}$$

及
$$\overline{ABC}=-\overline{ACB}=-\overline{CBA}=-\overline{BAC}$$

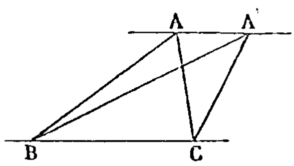
故吾人謂:若於$\overline{ABC}$式中,互換任何二文字,則此式卽變其號,而保存其絕對值.

145. 定理. 若A點於BC之一平行線上移動,則$\overline{ABC}$數之代數值不變.

假定AA'與BC平行,於是卽有

$$\overline{ABC}=\overline{A'BC}$$

因ABC及$A'BC$二三角形等底等高,故其面積相等,因之,$\overline{ABC}$, $\overline{A'BC}$二數之絕對值相等.此二數之號亦相同,因繞此二三角形之周線依ABC及$A'BC$向旋轉之動點,亦依同一之旋轉方向進行故也.

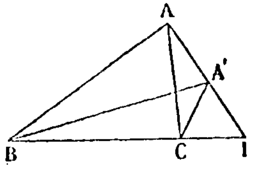


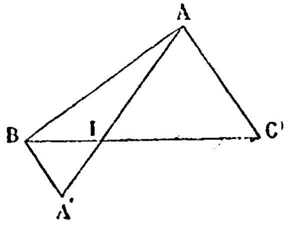
146. 問題. 若直線AA'不與BC邊平行,而與BC相交於一點I.則有

$$\frac{\overline{ABC}}{\overline{A'BC}}=\frac{\overline{IA}}{\overline{IA'}}$$

蓋三角形ABC及$A'BC$具同一之底BC,故其面積之絕對值之比等於其高之比,而後者顯然等於$\frac{\overline{IA}}{\overline{IA'}}$

故所應證明之等式,以絕對值論,爲眞.若A,A'二點同在BC之一側,則等式之兩端均爲正.又若A,A'兩點,各在BC之一側,則等式之兩端均爲負.





故以絕對值及號而論,等式恆成立.

在 I 爲 AA' 之中點之特殊情形下,即有

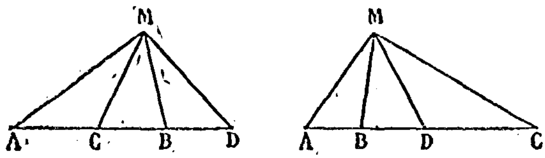
$$\overline{ABC} = -\overline{A'BC}.$$

147. 問題. 已與同在一有向軸上之二向量 AB, CD, 及軸外一點 M, 求證

$$(1) \qquad \frac{\overline{MAB}}{\overline{MCD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}.$$

上式兩端之絕對值相等,因三角形 MAB 及 MCD 具同一之高,故其面積之比等於底之比也.

又,兩端具同一之號,蓋若 AB 及 CD 二向量同向,則 $\overline{AB}, \overline{CD}$ 二數同號,而 $\overline{MAB}, \overline{MCD}$ 二代數面積亦同號,於是,(1) 式之兩端均爲正.



若 AB, CD 不同向,則 (1) 式之兩端均爲負.

故以絕對值及號而論,(1) 式均成立.

此式亦可書如:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{MAB}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{MCD}}$$

148. 問題. 已與有向軸上三點 A, B, C 及軸外一點 M, 則有

$$\overline{MAB}+\overline{MBC}+\overline{MCA}=0.$$

由 Chasles 氏公式,得

$$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=0$$

又,由前款定理,得

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{MAB}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{MBC}}=\frac{\overline{CA}}{\overline{MCA}}$$

故以λ代表此三比之公值,得

$$\overline{AB}=\lambda\cdot\overline{MAB},\quad \overline{BC}=\lambda\cdot\overline{MBC},\quad \overline{CA}=\lambda\cdot\overline{MCA}$$

於 Chasles 氏之公式中,以上列 $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$ 之各值代入,幷以λ除之,即得所應證明之關係矣.

此關係亦可書如:

$$\overline{MAB}+\overline{MBC}=\overline{MAC}$$

149. 更普通言之,已與有向軸任何數之點 $A, B, C, \cdots\cdots H, K, L$, 及軸外一點 M, 即有

$$\overline{MAB}+\overline{MBC}+\cdots\cdots+\overline{MKL}+\overline{MLA}=0$$

證明同上.

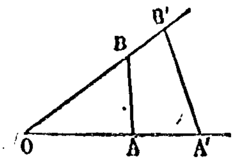
150. 問題. 已與一三角形 OAB, 無限直線 OA 上一點 A' 及無限直線 OB 上一點 B'. 求證

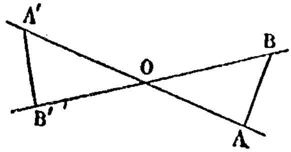
$$\frac{\overline{OAB}}{\overline{OA'B'}}=\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}}\cdot\frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}} \tag{1}$$

在 OAB 及 $OA'B'$ 二三角形中,兩 O 角或相等,或互爲補角.此二三角形之面積比等於 O 角之二邊之相乘積比,此乃吾人所習知者也

故(1)式以絕對值論成立.今所當證明者,乃其兩端亦具同一之號是也.

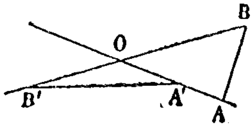
若$\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}}$及$\frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}}$二比具同一之號,卽下列二圖之一之情形,則





兩O角相等,而$\overline{OAB}$, $\overline{OA'B'}$,二數亦具同一之號.因之,(1)式之兩端同為正.

若$\frac{\overline{OA}}{\overline{OA'}}$及$\frac{\overline{OB}}{\overline{OB'}}$二比具相反之號,則兩$O$角相補,而$\overline{OAB}$, $\overline{OA'B'}$二數亦具相反之號.於是(1)式之兩端同為負.



故以絕對值及號而論,(1)式恆成立.

151. 基本定理. 已與一三角形ABC,及其面內任一點O,卽有

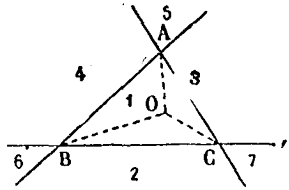
$$(1)\qquad \overline{ABC}=\overline{OAB}+\overline{OBC}+\overline{OCA}$$

三角形ABC之諸邊分平面為七部分,今以自1至7之各數名之.

1° 先假定O點位於1部,卽三角形之內,於是,ABC, OAB,……諸三角形之絕對值間,有關係如下:

$$(2)\qquad ABC=OAB+OBC+OCA$$

但 $\overline{ABC}$, $\overline{OAB}$, $\overline{OBC}$, $\overline{OCA}$ 諸數亦具同樣之號,此亦甚易察見之事.蓋吾人若假定有二動點,一沿三角形 ABC 之周線,依 ABC 向移動,一沿三角形 OAB 之周線,依 OAB 向移動,則此二動點均以同一之旋轉方向移動故也.



今若以 ε 代表 $+1$ 或 -1,視 ABC 向爲平面之正向或負向而定,則有

$$\overline{ABC}=\varepsilon\cdot ABC,\qquad \overline{OAB}=\varepsilon\cdot OAB$$

$$\overline{OBC}=\varepsilon\cdot OBC,\qquad \overline{OCA}=\varepsilon\cdot OCA.$$

於是,由此諸式,求出 $ABC, OAB,$ ……之值,而代入(2)式.并以 $\frac{1}{2}$ 除之,即得(1)式矣.

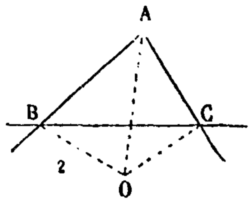
2° 若 O 點位於2部,則有

$$ABC=OAB-OBC+OCA. \tag{3}$$

但斯時,$\overline{OAB}$, $\overline{OCA}$, 與 ABC 同號,而 $\overline{OBC}$ 則與之異號.故有,ε 仍代表同上之值.

$$\overline{ABC}=\varepsilon\cdot ABC,\qquad \overline{OAB}=\varepsilon\cdot OAB$$

$$\overline{OBC}=-\varepsilon\cdot OBC,\qquad \overline{OCA}=\varepsilon\cdot OCA$$

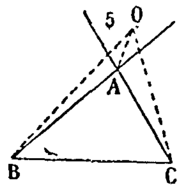


於是,由此諸式,求出 $ABC, OAB,$ ……之值,而代入(3)式,即得(1)式矣.

若 O 點位於3部或4部,則方法相同.

3° 最後,假定 O 點位於5部.於是,諸面積之絕對值間,即有

關係如下：



$$ABC = OBC - OAB - OCA$$

又,

$$\overline{ABC} = \varepsilon \cdot ABC, \quad \overline{OBC} = \varepsilon \cdot OBC$$

$$\overline{OAB} = \varepsilon \cdot OAB, \quad \overline{OCA} = \varepsilon \cdot OCA$$

故結果仍得(1)式.

若O位於6部或7部, 同法.

故基本定理已證明,稍遠將見其多種之應用.

152. 結論. 已與一有向平面內三定點A, B, C及一動點O, 則

$$f(O) = \overline{OAB} + \overline{OBC} + \overline{OCA}$$

量之值不隨O點而變, 且卽等於$\overline{ABC}$.

在A, B, C三點同位於一直線上之情形下, $\overline{ABC}$量爲零, 卽

$$f(O) = 0$$

是卽148款曾經直接證明者也.

153. 推廣. 已與有向平面內,任何個數之定點,例如五點A, B, C, D, E及一動點O, 則

$$f(O) = \overline{OAB} + \overline{OBC} + \overline{OCD} + \overline{ODE} + \overline{OEA}$$

量之值不隨O點而變.

設O及O'爲任意二點, 今當證明$f(O) = f(O')$

蓋, 根據基本定理(151), 有

$$\overline{O'AB} = \overline{OO'A} + \overline{OAB} + \overline{OBO'}$$

$$\overline{O'BC}=\overline{OO'B}+\overline{OBC}+\overline{OCO'}$$

$$\overline{O'CD}=\overline{OO'C}+\overline{OCD}+\overline{ODO'}$$

$$\overline{O'DE}=\overline{OO'D}+\overline{ODE}+\overline{OEO'}$$

$$\overline{O'EA}=\overline{OO'E}+\overline{OEA}+\overline{OAO'}$$

將諸式兩端各相加,則所得之新等式,其第一端卽爲 $f(O')$,至於第二端中,先有 $f(O)$ 甚,次有和,如

$$\overline{OO'A}+\overline{OAO'},\qquad \overline{OO'B}+\overline{OBO'},\cdots\cdots$$

但此諸和均爲零,因吾人恆有(144).

$$\overline{OO'A}=-\overline{OAO'}$$

故也.故

$$f(O')=f(O).$$

卽,無論 O 點在平面內之位置如何,$f(O)$ 恆具同一之值也

今將用幾何解释此數 $f(O)$ 之意義.

154. 多邊形之代數面積. 設有凸或凹多邊形 $ABCDE$,其各邊不互相穿過者.今以記號 $\overline{ABCDE}$ 代表一代數數,其絕對值卽爲多邊形所包圍之面積,而其號或爲 + 或爲 −,則視動點沿多邊形之周線,依 $ABCDE$ 向移動時,其進向之向爲平面之正向或負向而定.

此數名曰多邊形 $ABCDE$ 之代數面積.

155. 定理. 多邊形 $ABCDE$ 之代數面積,卽爲以上界定之函數 $f(O)$:

$$f(O)=\overline{OAB}+\overline{OBC}+\overline{OCD}+\overline{ODE}+\overline{OEA}.$$

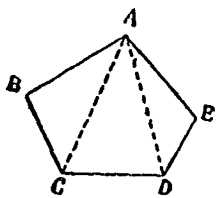
無論O點之位置如何，$f(O)$既恆具一定之值，故吾人得將O點隨意置之於何處.

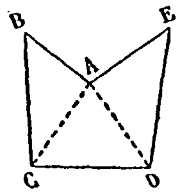
今置O於A點上，於是，即有

$$f(A)=\overline{AAB}+\overline{ABC}+\overline{ACD}+\overline{ADE}+\overline{AEA}.$$

但因$\overline{AAB}$及$\overline{AEA}$均為零，故有

$$f(A)=\overline{ABC}+\overline{ACD}+\overline{ADE}.$$

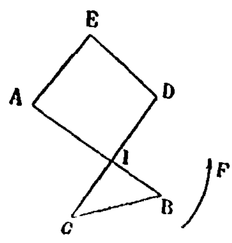




於是，立見此式之第二端即代數面積$\overline{ABCDE}$也.

156. 注意. 若周線$ABCDE$之各邊有互相穿過者如下圖所示，則依定義所謂此周線之代數面積者，即$f(O)$量是也.O為平面上任意一點. 於是，有

$$\overline{ABCDE}=f(O).$$



欲以幾何解釋此代數面積，可將O點置於二邊相穿之處I. 於是

$$f(I)=\overline{IAB}+\overline{IBC}+\overline{ICD}+\overline{IDE}+\overline{IEA}$$

但$\overline{IAB}$及$\overline{ICD}$為零，故

$$f(I)=\overline{IBC}+\overline{IDE}+\overline{IEA}$$

或

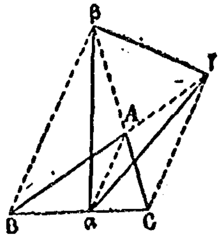
$$f(I)=\overline{IBC}+\overline{IDEA}.$$

假定F矢之向卽爲平面之正向,於是,$\overline{IBC}$爲負,而$\overline{IDEA}$爲正.因之,代數面積$\overline{ABCDE}$卽等於四邊形$IDEA$之面積之絕對值與三角形IBC之面積之絕對值之差.

157. 問題. 自三角形之角頂A,B,C引直線平行於一定方位,設其與對邊之交點爲α,β,γ.求證:

$$\overline{\alpha\beta\gamma}=-2\overline{ABC}.$$

由基本定理(151),得



$$\overline{\alpha\beta\gamma}=\overline{A\alpha\beta}+\overline{A\beta\gamma}+\overline{A\gamma\alpha}$$

因$A\alpha$與$B\beta$及$C\gamma$平行,故有(145)

$$\overline{A\alpha\beta}=\overline{A\alpha B},\quad \overline{A\gamma\alpha}=\overline{AC\alpha}.$$

因之,

$$\overline{\alpha\beta\gamma}=\overline{A\alpha B}+\overline{AC\alpha}+\overline{A\beta\gamma}.$$

又,吾人可書

$$\overline{ABC}=\overline{\alpha AB}+\overline{\alpha BC}+\overline{\alpha CA}$$

或,因$\overline{\alpha BC}$爲零,

$$\overline{ABC}=\overline{\alpha AB}+\overline{\alpha CA}=-\overline{A\alpha B}-\overline{AC\alpha}$$

於是,$\overline{\alpha\beta\gamma}$之值變爲:

$$\overline{\alpha\beta\gamma}=-\overline{ABC}+\overline{A\beta\gamma}.$$

但由150款之定理,得

$$\frac{\overline{A\beta\gamma}}{\overline{ACB}}=\frac{\overline{A\beta}}{\overline{AC}}\cdot\frac{\overline{A\gamma}}{\overline{AB}}$$

而

$$\frac{\overline{A\beta}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{A\gamma}}$$

故

$$\frac{\overline{A\beta\gamma}}{\overline{ACB}}=1,\ \text{或}\ \overline{A\beta\gamma}=-\overline{ABC}$$

因之,最後得

$$\overline{\alpha\beta\gamma}=-2\,\overline{ABC}.$$

168. 問題. 已與三角形 ABC,及由等式

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}}=\lambda,\ \frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}}=\mu,\ \frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}}=\nu.$$

界定,而位於 BC, CA, AB 三邊上之三點 α, β, γ.

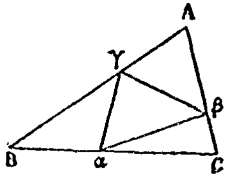
求以 λ, μ, ν 之函數表示 $\dfrac{\overline{\alpha\beta\gamma}}{\overline{ABC}}$

吾人會經證明(153),若 B, C, β, γ 為任意四點,則

$$f(O)=\overline{OBC}+\overline{OC\beta}+\overline{O\beta\gamma}+\overline{O\gamma B}$$

量之值不隨 O 點之位置而變,故

$$f(A)=f(\alpha)$$



或 $\overline{ABC}+\overline{AC\beta}+\overline{A\beta\gamma}+\overline{A\gamma B}$

$=\overline{\alpha BC}+\overline{\alpha C\beta}+\overline{\alpha\beta\gamma}+\overline{\alpha\gamma B}$

但因 A, C, β 三點同在一直線上,故 $\overline{AC\beta}$ 為零. 同樣, $\overline{A\gamma B}$ 及 $\overline{\alpha BC}$ 亦均為零.

故上式變為:

$$\overline{ABC}+\overline{A\beta\gamma}=\overline{\alpha C\beta}+\overline{\alpha\beta\gamma}+\overline{\alpha\gamma B}.$$

或

$$\overline{\alpha\beta\gamma}=\overline{ABC}+\overline{A\beta\gamma}+\overline{B\gamma\alpha}+\overline{C\alpha\beta}$$

或

(1) $$\frac{\overline{\alpha\beta\gamma}}{\overline{ABC}}=1+\frac{\overline{A\beta\gamma}}{\overline{ABC}}+\frac{\overline{B\gamma\alpha}}{\overline{ABC}}+\frac{\overline{C\alpha\beta}}{\overline{ABC}}$$

但 (150)

(2) $$\frac{\overline{A\beta\gamma}}{\overline{ACB}}=\frac{\overline{A\beta}\cdot\overline{A\gamma}}{\overline{AC}\cdot\overline{AB}}=\frac{\overline{\beta A}\cdot\overline{\gamma A}}{\overline{AC}\cdot\overline{AB}}$$

欲計算 $\overline{\beta A}$, 可利用關係.

$$\frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}}=\mu \quad 或 \quad \frac{\overline{\beta A}}{1}=\frac{\overline{\beta C}}{\mu}$$

由此得

$$\frac{\overline{\beta A}}{1}=\frac{\overline{\beta A}-\overline{\beta C}}{1-\mu}=\frac{\overline{CA}}{1-\mu}$$

或

$$\overline{\beta A}=-\frac{\overline{AC}}{1-\mu}$$

同樣, 由

$$\frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}}=\nu \quad 或 \quad \frac{\overline{\gamma A}}{\nu}=\frac{\overline{\gamma B}}{1}$$

得

$$\frac{\overline{\gamma A}}{\nu}=\frac{\overline{\gamma B}-\overline{\gamma A}}{1-\nu}=\frac{\overline{AB}}{1-\nu}$$

或

$$\overline{\gamma A}=\frac{\overline{AB}\cdot\nu}{1-\nu}$$

以 $\overline{\beta A}$ 及 $\overline{\gamma A}$ 之值代入 (2) 式, 卽得

$$\frac{\overline{A\beta\gamma}}{\overline{ACB}}=-\frac{\nu}{(1-\mu)(1-\nu)}$$

或

$$\frac{\overline{A\beta\gamma}}{\overline{ABC}}=\frac{\nu}{(1-\mu)(1-\nu)}$$

同樣,用圓周輪換 (A, B, C), (α, β, γ), (λ, μ, ν) 三組文字,即得

$$\frac{\overline{B\gamma\alpha}}{\overline{ABC}}=\frac{\lambda}{(1-\nu)(1-\lambda)}$$

$$\frac{\overline{C\alpha\beta}}{\overline{ABC}}=\frac{\mu}{(1-\lambda)(1-\mu)}.$$

將此諸值代入 (1) 式,即得

$$\frac{\overline{\alpha\beta\gamma}}{\overline{ABC}}=1+\frac{\nu}{(1-\mu)(1-\nu)}+\frac{\lambda}{(1-\nu)(1-\lambda)}+\frac{\mu}{(1-\lambda)(1-\mu)}$$

或通分及化簡後,

(3). $$\frac{\overline{\alpha\beta\gamma}}{\overline{ABC}}=\frac{1-\lambda\mu\nu}{(1-\lambda)(1-\mu)(1-\nu)}.$$

注意. 1° 157 款之公式乃 (3) 式之一特殊情形.

蓋 $A\alpha$, $A\beta$, $C\gamma$ 諸直線若爲平行,則有

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}}=\frac{\overline{A\beta}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{A\gamma}}$$

或 $$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}}=\frac{\overline{A\beta}}{\overline{A\beta}+\overline{\beta C}}=\frac{\overline{A\gamma}+\overline{\gamma B}}{\overline{A\gamma}}$$

又或

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}}=\frac{1}{1-\frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}}}=1-\frac{\overline{\gamma B}}{\overline{\gamma A}}$$

或,最後,

$$\lambda=\frac{1}{1-\mu}=1-\frac{1}{\nu}$$

故由此得

$$\mu=1-\frac{1}{\lambda}\qquad\qquad \nu=\frac{1}{1-\lambda}$$

今若於(3)式中,將μ及ν之值代入,即得

$$\frac{\overline{\alpha\beta\gamma}}{\overline{ABC}}=-2\quad 或\quad \overline{\alpha\beta\gamma}=-2\overline{ABC}.$$

2° 由公式(3)可見,使α,β,γ三點位於同一直線上之必要而兼充分之條件爲$\lambda\mu\nu=1$.

即
$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}}\cdot\frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}}\cdot\frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}}=1$$

是即 Ménélaus 氏定理及其逆也.吾人已於136款見之.

3° 設α',β',γ',爲α,β,γ,對於BC,CA,AB之中點之對稱點,於是,

$$\overline{\alpha' B}=-\overline{\alpha C},\qquad \overline{\alpha' C}=-\overline{\alpha B}$$

故
$$\frac{\overline{\alpha' B}}{\overline{\alpha' C}}=\frac{\overline{\alpha C}}{\overline{\alpha B}}=\frac{1}{\lambda}$$

同樣,

$$\frac{\overline{\beta' C}}{\overline{\beta' A}}=\frac{1}{\mu},\qquad \frac{\overline{\gamma' A}}{\overline{\gamma' B}}=\frac{1}{\nu}$$

但,吾人若於(3)式中,以λ,μ,ν之反數代λ,μ,ν,則第二端之值不變,由此可見

$$\overline{\alpha\beta\gamma} = \overline{\alpha'\beta'\gamma'}.$$

4°. 若 α, β, γ, 爲三邊之中點, 則 λ, μ, ν 等於 -1, 於是

$$\frac{\overline{\alpha\beta\gamma}}{\overline{ABC}} = \frac{1}{4}.$$

5°. 假定 α, β, γ 爲三角形 ABC 之諸內分角線之諸趾. 命 a, b, c 爲諸邊之長, $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, 於是

$$\lambda = -\frac{c}{b}, \quad \mu = -\frac{a}{c}, \quad \nu = -\frac{b}{a}.$$

因之,
$$\frac{\overline{\alpha\beta\gamma}}{\overline{ABC}} = \frac{2abc}{(b+c)(c+a)(a+b)}.$$

6° 若 α 爲 A 角之內分角線之趾, β, γ 爲 B, C 角之外分角線之趾, 則

$$\lambda = -\frac{c}{b}, \qquad \mu = \frac{a}{c}, \qquad \nu = \frac{b}{a}$$

而

$$\frac{\overline{\alpha\beta\gamma}}{\overline{ABC}} = \frac{2\,abc}{(b+c)\,(c-a)\,(a-b)}$$

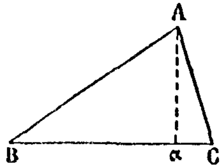
7°. 今設 α, β, γ, 爲諸高之諸趾而察之.

先計算 $\lambda = \frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}}$.

由三角形 ABC 得 (22)

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{BC}\cdot\overline{B\alpha}$$

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{CB}^2 - 2\overline{CB}\cdot\overline{C\alpha}$$



或

$$b^2 = c^2 + a^2 + 2\overline{BC}\cdot\overline{\alpha B}$$

$$c^2 = b^2 + a^2 + 2\overline{CB}\cdot\overline{\alpha C}.$$

由此,得

$$\overline{\alpha B}=\frac{b^2-c^2-a^2}{2\overline{BC}},\qquad \overline{\alpha C}=\frac{c^2-b^2-a^2}{2\overline{CB}}$$

故
$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}}=-\frac{a^2+c^2-b^2}{a^2+b^2-c^2}=\lambda$$

用圓周輪換法,得

$$\mu=-\frac{b^2+a^2-c^2}{b^2+c^2-a^2},\quad \nu=-\frac{c^2+b^2-a^2}{c^2+a^2-b^2}$$

將 λ,μ,ν 之值代入(3)式,得

$$\frac{\overline{\alpha\beta\gamma}}{\overline{ABC}}=\frac{(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)}{4a^2b^2c^2}$$

但命 A,B,C 爲三角形之三角,則

$$b^2+c^2-a^2=2bc\cos A$$

同樣,可得同類之二式.因之,

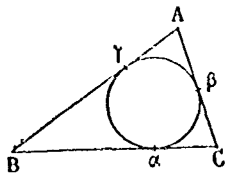
$$\frac{\overline{\alpha\beta\gamma}}{\overline{ABC}}=2\cos A\cos B\cos C.$$

8°. 最後,假定 α,β,γ 爲諸內切圓之諸切點.於是,以絕對值論,有

$$\alpha B=p-b,\qquad \alpha C=p-c.$$

$2p$代表三角形之周線,由是得

$$\lambda=\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}}=-\frac{p-b}{p-c}$$



$$\mu=-\frac{p-c}{p-a},\quad \nu=-\frac{p-a}{p-b}$$

故
$$\frac{\overline{\alpha\beta\gamma}}{\overline{ABC}}=\frac{2(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}.$$

命 r 及 R 爲內切圓及外接圓之半徑, S 爲三角形 ABC 之面積之絕對值, 則

$$(p-a)(p-b)(p-c)=pr^2$$

$$abc=4RS=4Rpr.$$

因之,

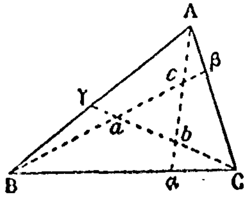
$$\frac{\overline{\alpha\beta\gamma}}{\overline{ABC}}=\frac{\gamma}{2R}.$$

159. 問題. 已與三角形 ABC, 及由等式

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}}=\lambda,\quad \frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}}=\mu,\quad \frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}}=\nu.$$

界定, 而位於 BC, CA, AB 三邊上之三點 α, β, γ

$A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ 三直線作成一三角形 abc, a 代表 $B\beta$, $C\gamma$ 之交點, b 爲 $C\gamma$, $A\alpha$ 之交點, c 爲 $A\alpha$, $B\beta$ 之交點.



求以 λ, μ, ν 之函數表示 $\frac{\overline{abc}}{\overline{ABC}}$. 仿照 158 款之方法, 吾人取關於 b, c, B, C 四點之函數 $f(0)$ 察之, 并書

$$f(a)=f(A)$$

如是即得

$$\overline{abc}+\overline{aCB}+\overline{aBC}+\overline{aCb}$$
$$=\overline{Abc}+\overline{ACB}+\overline{ABC}+\overline{ACb}$$

或, 因 $\overline{aCB}$ 及 $\overline{Abc}$ 均爲零,

$$\overline{abc}=\overline{ABC}-\overline{aBC}-\overline{bCA}-\overline{cAB}$$

又或,

(1) $$\frac{\overline{abc}}{\overline{ABC}} = 1 - \frac{\overline{aBC}}{\overline{ABC}} - \frac{\overline{bCA}}{\overline{ABC}} - \frac{\overline{cAB}}{\overline{ABC}}$$

今當求第二端內所含各比之值.

由等式(151)

$$\overline{ABC} = \overline{aBC} + \overline{aCA} + \overline{aAB}$$

得

$$\frac{\overline{ABC}}{\overline{aBC}} = 1 + \frac{\overline{aCA}}{\overline{aBC}} + \frac{\overline{aAB}}{\overline{aBC}}$$

$$= 1 - \frac{\overline{aCA}}{\overline{aCB}} - \frac{\overline{aBA}}{\overline{aBC}}$$

但aCA, aCB二三角形有一公同之底aC,而連結其他二角頂之直線AB與此公同之底交於γ點,故有(146)

$$\frac{\overline{aCA}}{\overline{aCB}} = \frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} = \nu$$

同樣,

$$\frac{\overline{aBA}}{\overline{aBC}} = \frac{\overline{\beta A}}{\overline{\beta C}} = \frac{1}{\mu}$$

故上式變爲:

$$\frac{\overline{ABc}}{\overline{aBC}} = 1 - \nu - \frac{1}{\mu}$$

或

$$\frac{\overline{aBC}}{\overline{ABC}} = \frac{1}{1 - \nu - \frac{1}{\mu}}$$

同樣,得

$$\frac{\overline{bCA}}{\overline{ABC}} = \frac{1}{1 - \lambda - \frac{1}{\nu}}, \qquad \frac{\overline{cAB}}{\overline{ABC}} = \frac{1}{1 - \mu - \frac{1}{\lambda}}$$

將此諸值代入(1)式,卽得

$$\frac{\overline{abc}}{\overline{ABC}}=1+\frac{1}{\nu+\frac{1}{\mu}-1}+\frac{1}{\lambda+\frac{1}{\nu}-1}+\frac{1}{\mu+\frac{1}{\lambda}-1}$$

爲化簡此式後端起見,設

$$\nu+\frac{1}{\mu}=l,\quad \lambda+\frac{1}{\nu}=m,\quad \mu+\frac{1}{\lambda}=n$$

於是,有

$$\frac{\overline{abc}}{\overline{ABC}}=1+\frac{1}{l-1}+\frac{1}{m-1}+\frac{1}{n-1}$$

$$=\frac{(l-1)(m-1)(n-1)+(m-1)(n-1)+(n-1)(l-1)+(l-1)(m-1)}{(l-1)(m-1)(n-1)}$$

$$=\frac{lmn-(l+m+n)+2}{(l-1)(m-1)(n-1)}$$

再以 l, m, n 之值代入,則第二端之分子變爲:

$$\left(\nu+\frac{1}{\mu}\right)\left(\lambda+\frac{1}{\nu}\right)\left(\mu+\frac{1}{\lambda}\right)-\left(\lambda+\mu+\nu+\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\nu}\right)+2$$

或,化簡後

$$\lambda\mu\nu+\frac{1}{\lambda\mu\nu}+2\quad 或\quad \frac{(1+\lambda\mu\nu)^2}{\lambda\mu\nu}$$

故最後得

$$\frac{\overline{abc}}{\overline{ABC}}=\frac{(1+\lambda\mu\nu)^2}{(\mu\nu-\mu+1)(\nu\lambda-\nu+1)(\lambda\mu-\lambda+1)}$$

注意. 由此公式可見,使 $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$ 三直線同交於一點之必要而兼充分之條件爲: $\lambda\mu\nu=-1$. 卽

$$\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}}\cdot\frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}}\cdot\frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}}=-1$$

是卽Céva氏之定理及其逆也.吾人已見其另一證明矣(135).

160. 問題. 已與有向平面內之四點 A, B, A', B', 求 M 點之軌跡,俾有

$$(1)\qquad \overline{MAB}+\overline{MA'B'}=\overline{MBA'}+\overline{MB'A}$$

因 $$\overline{ABA'B'}=\overline{MAB}+\overline{MBA'}+\overline{MA'B'}+\overline{MB'A}$$

故(1)式亦可書如:

$$\overline{MAB}+\overline{MA'B'}=\frac{1}{2}\overline{ABA'B'}.$$

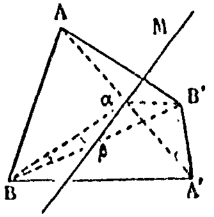
今首當注意者,乃 AA' 之中點 α 及 BB' 之中點 β 均為所求軌跡上之點.蓋

$$\overline{\alpha AB}=\overline{\alpha BA'},\qquad \overline{\alpha A'B'}=\overline{\alpha B'A}$$

故加之,得

$$\overline{\alpha AB}+\overline{\alpha A'B'}=\overline{\alpha BA'}+\overline{\alpha B'A}$$

故 α 為軌跡之一點.同樣,可證明 β 點亦然.



今當證明所求軌跡卽為 $\alpha\beta$ 直線.α 既為軌跡上一點,故有

$$\overline{\alpha AB}+\overline{\alpha A'B'}=\frac{1}{2}\overline{ABA'B'}$$

因之,欲使一點 M 亦為軌跡之一點,當有:

$$\overline{MAB}+\overline{MA'B'}=\overline{\alpha AB}+\overline{\alpha A'B'}$$

或

$$(2)\qquad \overline{MAB}-\overline{\alpha AB}+\overline{MA'B'}-\overline{\alpha A'B'}=0$$

但

$$\overline{MAB} = \overline{aMA} + \overline{aAB} + \overline{aBM}$$

或

$$\overline{MAB} - \overline{aAB} = \overline{aMA} + \overline{aBM}$$

同樣

$$\overline{MA'B'} - \overline{aA'B'} = \overline{aMA'} + \overline{aB'M}.$$

於是,(2)式變爲:

$$\overline{aMA} + \overline{aBM} + \overline{aMA'} + \overline{aB'M} = 0$$

但 a 既爲 AA' 之中點,則 $\overline{aMA} + \overline{aMA'}$ 爲零,故

$$\overline{aBM} + \overline{aB'M} = 0$$

因 aBM 及 $aB'M$ 兩三角形有一公同之底 aM,故欲使其代數面積之和爲零,當有: aM 經過 BB' 之中點 β,換言之,即 M 點位於 $a\beta$ 直線上也.

故所求之軌跡即爲 $a\beta$ 直線

注意. 設 C 爲 AB 及 $A'B'$ 之交點,C' 爲 AB' 及 BA' 之交點. 命 γ 爲 CC' 之中點.今將證明 γ 點亦爲軌跡之一點,蓋

$$\overline{\gamma AB} = \overline{C\gamma A} + \overline{CAB} + \overline{CB\gamma}$$

$$\overline{\gamma A'B'} = \overline{C\gamma A'} + \overline{CA'B'} + \overline{CB'\gamma}$$

故兩端相加,則因 $\overline{CAB}$ 及 $\overline{CA'B'}$ 爲零,即得

$$\overline{\gamma AB} + \overline{\gamma A'B'} = \overline{C\gamma A} + \overline{CB\gamma} + \overline{C\gamma A'} + \overline{CB'\gamma} \tag{3}$$

同樣,有

$$\overline{\gamma BA'} = \overline{C'\gamma B} + \overline{C'BA'} + \overline{C'A'\gamma}$$

$$\overline{\gamma B'A} = \overline{C'\gamma B'} + \overline{C'B'A} + \overline{C'A\gamma}$$

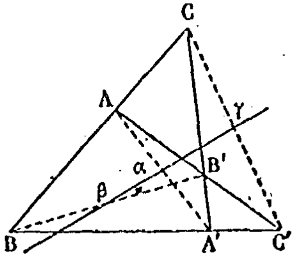
(4) $$\overline{\gamma BA'} + \overline{\gamma B'A} = \overline{C'\gamma B} + \overline{C'A'\gamma} + \overline{C'\gamma B'} + \overline{C'A\gamma}$$

(3), (4) 兩式之第二端相等,此甚易得見者也,蓋因

$\overline{C\gamma A} = \overline{C'A\gamma}$,　$\overline{CB\gamma} = \overline{C'\gamma B}$

$\overline{C\gamma A'} = \overline{C'A'\gamma}$,　$\overline{CB'\gamma} = \overline{C'\gamma B'}$

因之,兩式之第一端亦相等,而 γ 點爲軌跡之一點明矣.



由此可知,γ 點位於 $\alpha\beta$ 直線上,換言之,即 α, β, γ 三點同在一直線上也. 此 $\alpha\beta\gamma$ 直線亦爲適合下列等式之一之 M 點之軌跡:

$$\overline{MBC} + \overline{MB'C'} = \overline{MCB'} + \overline{MC'B}$$

$$\overline{MCA} + \overline{MC'A'} = \overline{MAC'} + \overline{MA'C}$$

特殊情形. 若 $AB, BA', A'B', B'A$ 四直線同切於一圓,則此圓之圓心 O 必位於直線 $\alpha\beta\gamma$ 上.

爲此,只須證明等式

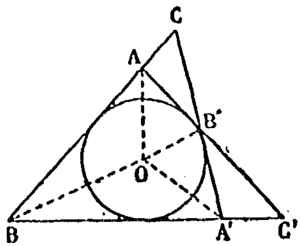
(1) $$\overline{OAB} + \overline{OA'B'} = \overline{OBA'} + \overline{OB'A}$$

假定四邊形 $ABA'B'$ 爲凸形,於是,即有

$$AB + A'B' = BA' + B'A$$

故以半徑之半乘之,即得

$$OAB + OA'B' = OBA' + OB'A$$



因$\overline{OAB}$, $\overline{OA'B'}$, $\overline{OBA'}$, $\overline{OB'A}$諸代數面積具同一之號,故由此式即得(1)式.

若四邊形$ABA'B'$不爲凸形,則$BCB'C'$及$CAC'A'$兩四邊形必有一者爲凸形,而吾人可以應用同樣之証明矣(*).

(*) G. Fontené 有向幾何, 第40頁.

*D二六七

中華民國二十五年二月初版

(53422·1)

近世幾何學練習一冊

Exercices de Géométrie moderne

每冊定價國幣捌角

外埠酌加運費匯費

原著者　G. Popelier

譯述者　郭堅白　上海河南路

發行人　王雲五　上海河南路

印刷所　商務印書館　上海河南路

發行所　商務印書館　上海及各埠

周

(本書校對者　林宗深　王養吾)