器畫法圖解

體幾何之部

薛德炯編譯

海新亞書店印行

用 器 畫 法 圖 解

立 體 幾 何 之 部

薛 德 炯 編 譯

上 海 新 亞 書 店 發 行

中華民國二十三年八月初版

新亞教本

用器畫法圖解

立體幾何之部

（圖另訂）

定價銀八角

外埠酌加寄費

編譯者　薛德烱

發行者　陳邦楨

印刷者　新亞書店
上海四馬路二六〇號

總發行所　新亞書店

分售處　各地各大書局

編譯者言

立體幾何畫法，爲實用上繪畫設計圖案之基礎，將來進修理工學者，對於此科應有充分之修養，毋待贅言。

近代學生學習是項畫法，每欠沉着，未肯赴以全力，甚或玩忽視之，認爲無甚深意；即有一二富有興趣者，又多依樣葫蘆，未能發揮其應用之才能。此項不良傾向，指導者疏於校正，固爲釀成之一因，而缺乏適當用書，亦屬主要病原。

去年九月，編譯本書平面之部既竟，原擬賡續着筆，以應需要，卒以人事栗六，時作時輟，荏苒經年，始得成稿。教材或不免過多，祇求足供參考，於願足矣。

23年8月22日薛德炯識於上海

目　次

緒　論

立體幾何畫法,爲幾何學之一分科,以在一平面上精確表示空間圖形爲主目的。表示之法,普通用眼與空間圖形上各點聯結之直線與平面之交點。是曰空間圖形之**投影圖** Projection, 或**投象圖**。

作投影圖之平面,曰**投影面**(**投象面**) **Planes of projection**。表示眼之位置之點,曰**視點** Point of view. 從視點過空間圖形上各點所作直線,曰**視線** Visual ray. 就視線而言,投影面與空間圖形間之部分,曰**投影線**(**投象線**) Projector or Projecting line。

如 Fig. 1, E 爲視點,平面 P 爲投影面, V-ABCD 爲空間之立體。於是 E 與 V, A, B, C, D 等聯結之直線爲視線。 而 EV, EA,EB,……或其延線與平面P之交點連成之圖 v-abcd, 曰立體 V-ABCD 在平面P上之**投影圖**。 直線 Vc, Aa, Bb, ……各爲點 V, A, B, ……之投影線。

視點與空間圖形之距離有限時,所有投影線皆不平行。 此種投影圖,曰**透視圖** Perspective plane。

視點與空間圖形之距離無限時,投影線皆平行。 如 Fig. 2 之投影線 Vv, Aa, Bb, ……是。 此種投影圖,曰**平行投影圖(平行投象圖)** Parallel projection。

就平行投影圖而言,投影線垂直於投影面者,曰**正射投影圖**,或**正投影圖(正投象圖)** Orthographic projection, 不垂直者曰**斜投影圖(斜投象圖)** Oblique projection。

投影圖
- 透視圖
- 平行投影圖
  - 正射投影圖
  - 斜投影圖

總　論

1. 投影圖與投影面

如 Fig. 3, A 爲空間之一立體, H P 爲一平面。今設立體A在平面H P 上之投影圖爲 a, 則單藉 a 以限定立體 A 之位置形狀,乃不可能。蓋立體A之各點距平面H. P. 幾許,不能藉 a 而卽明示也。

於是設一平面V. P. 垂直於平面H. P., 求得立體 A 在其上之投影圖 a′, 則藉 a 與a′便得限定立體 A 之位置形狀。蓋由 a, a′ 上之對應點各至H.P., V. P. 引垂線,則其各交點卽爲立體A 上各點之位置故也.

故在正射投影圖,皆設互相垂直之二投影面,而以其上之投影圖表示空間圖

形。二投影面,普通均一取水平位置,一取直立位置。其取水平者,曰**水平投影面(水平投象面)**或**平畫面** Horizontal Coör-dinate plane (H.P.),其取直立者,曰**直立投影面(直立投象面)**或**立畫面** Vertical coör dinate plane (V.P.),此二平面之交線曰**基線** Ground line (G. L.)。

在水平投影面上之投影圖,曰**平面圖** Horizontal projection, Plane, or Top view,在直立投影面上之投影圖,曰**立面圖** Vertical projection, Elevation, or Front view.

2. **二面角** 二平面間之角,曰**二面角** Dihedral angle。因平面可以無窮擴大,故水平投影面與直立投影面將空間劃爲四分,在基線之周圍構成四個二面角。

四個二面角中,在水平投影面之上方而在直立投影面之前方者,曰**第一二面角**,在後方者,曰**第二二面角**,在水平投影

面之下方而在直立投影面之後方者,曰**第三二面角**,在前方者,曰**第四二面角**。

3. **投影面之旋轉**　平面圖與立面圖,以在相垂直之二平面上,實用上諸多不便。故普通可將直立投影面繞基線之周圍向後方旋轉,使與水平投影面重合於同一平面上,如 Fig. 4, Fig. 6 所示。

4. **記號 Notation**。利用投影面之旋轉,平面圖與立面圖得合於一平面上,故宜採取適當記號,以資區別。普通表示空間之點均用大寫字母 A, B, C, ……,其平面圖用小寫字母 a, b, c, ……,立面圖則用小寫之右上角加一(′)之 a′, b′, c′ ……。

故有不曰點 A 而曰點 a, a′ 者。點 a, a′ 者,a 爲平面圖之點,a′ 爲立面圖之點之意也。

記號均以上述規約爲標準,字母不敷應用時,可採 A_1, (a_1, a_1'), B_1, (b_1, b_1'), ……,

A_2, (a_2, a'_2), B_2, (b_2, b'_2), ……, I, (1, 1′), II, (2, 2′),……等以補助之.

第 一 章

點 與 直 線

5. **點之投影圖**。 如 Fig. 7, 設 A 爲空間之一點, a, a′ 各爲其平面圖,立面圖。於是 Aa, Aa′ 分別垂直於水平投影面,直立投影面,且互爲垂直。 因此由 a 至基線 GL 引垂線,設爲 am,則四邊形 Aama′ 爲矩形, a′m 垂直於基線.

故 $Aa = a'm$, $Aa' = am$。 由此可得下列定理.

定理 1. 從一點 A 之立面圖 a′ 至基線之垂直距離 a′m, 等於從 A 至水平投影面之垂直距離。

定理 2. 從一點 A 之平面圖 a 至基線之垂直距離 am,等於從 A 至直立投影

面之垂直距離。

次將直立投影面繞基線之周圍向後方旋轉,使與水平投影面一致,則如 Fig 8. 此時 ama' 成一直線垂直於基線 GL。

定理 3. 旋轉後,一點 A 之平面圖 a 與立面圖 a′ 聯結之直線,垂直於基線。

點之平面圖與立面圖聯結之直線,曰**投送線**。投送線用點線表示。

6. 點之投影圖與二面角。

如 Fig. 9, 設

A 為第一二面角內之一點,
　　其平面圖,立面圖為 a, a′.
B 為第二二面角內之一點,
　　其平面圖,立面圖為 b, b′.
C 為第三二面角內之一點,
　　其平面圖,立面圖為 c, c′.
D 為第四二面角內之一點,
　　其平面圖,立面圖為 d, d′.

今將直立投影面繞基線之周圍向後方旋轉,使與水平投影面重合,則如 Fig. 10.依據本圖察知旋轉後,可得下列定理

定理 4. 第一二面角內所有點之平面圖在基線之下,立面圖在上。

定理 5. 第二二面角內所有點之平面圖,立面圖均在基線之上。

定理 6. 第三二面角內所有點之平面圖,在基線之上,立面圖在下.

定理 7. 第四二面角內所有點之平面圖,立面圖均在基線之下。

應用題 1. 在平畫面上方 2.5 糎,立畫面前方 3 糎之點 A,其投影圖若何?(Fig. 11)

應用題 2. 在平畫面上方 3 糎,立畫面後方 1 糎之點 B,其投影圖若何?(Fig. 11)

應用題 3. 在平畫面下方 2.5 糎,立畫面後方 2 糎之點 C,其投影圖若何?(Fig. 11)

應用題 4. 在平畫面下方 1.5 糎,立畫面前方 3.5 糎之點 D,其投影圖若何?(Fig. 11)

應用題 5. 在平畫面上方 3 糎,立畫面後方 3 糎之點 E,其投影圖若何?(Fig. 12)

應用題 6. 在平畫面下方2.5糎,立畫面前方2.5糎之點 F,其投影圖若何?(Fig. 12)

應用題 7. 在平畫面上,距立畫面前方 2 糎之點 G,其投影圖若何?(Fig. 12)

應用題 8. 在立畫面上,距平畫面上方 3 糎之點 H,其投影圖若何?(Eig. 12)

應用題 9. 在平畫面上,距立畫面後方2.5糎之點 I,其投影圖若何?(Fig. 12)

應用題 10. 在立畫面上,距平畫面下方3.5糎之點 J,其投影圖若何?(Fig. 12)

7. 直線之投影圖 直線上所有各點在一平面上之投影圖,聯之則成直線,故直線之投影圖爲直線. 於是求直線之投影圖時,引聯結其兩端點投影圖之直線卽得。

如 Fig. 13, ab 爲直線 AB 之平面圖, a′b′ 爲其立面圖。將立畫面繞基線之周圍向後方旋轉,使與平畫面重合,則如 Fig. 14.

8. **直線之跡**　直線與投影面相交之點,曰此直線之**跡**。而與平畫面相交之點,曰**水平跡**,與立畫面相交之點,曰**直立跡**。如 Fig. 15—22 中,h 爲直線 AB 之水平跡,v′ 爲直立跡。

直線水平跡之立面圖及直立跡之平面圖,以在基線之上,故已知直線之投影圖,卽易求得其跡。就 Fig. 16, 18, 20, 22, 可知其大要。

9. **種種位置之直線投影圖**　直線與一平面所成之角,卽指此直線與平面上投影圖間之角而言。故直線平行於立畫面時,其立面圖與基線間之角,等於此直線與平畫面所成之實角. 又直線平行於平畫面時,其平面圖與基線間之角,等於此直線與立畫面所成之實角.

直線傾斜於投影面時,其投影圖之長常小於此直線之實長。然直線若平行

於一投影面時,則在此投影面上之投影圖之長,等於直線之實長. 因之,平行於立畫面之直線其立面圖等於其實長,平面圖平行於基線。 又平行於平畫面之直線,其平面圖等於其實長,立面圖平行於基線。

直線垂直於一投影面時,則在此投影面上之投影圖,成爲一點. 故直線垂直於平畫面時,其平面圖爲點,立面圖垂直於基線,且其長等於實長。 又直線垂直於立畫面時,其立面圖爲點,平面圖垂直於基線,且其長等於實長。

Fig. 24 中之 ab—a′b′,平行於立畫面之直線也。 故平面圖 ab 平行於基線,立面圖 a′b′ 等於實長,且與平行基線之 b′h′ 所成之角 θ, 等於與平畫面所成之實角。

Fig. 26 中之 ab—a′b′,平行於平畫面之直線也。 故立面圖 a′b′ 平行於基線,平

面圖ab等於實長,且與平行基線之am所成之角 φ,等於與立畫面所成之實角.

Fig. 28 中之ab—a′b′,平行於平畫面,立畫面兩者之直線也。故 ab, a′b′ 均平行於基線,且等於實長。

Fig. 30 中之ab—a′b′,垂直於立畫面之直線也。故立面圖 a′b′ 爲點,平面圖ab等於實長而垂直於基線。

Fig. 30 中之cd—c′d′,垂直於平畫面之直線也。故平面圖cd爲點,立面圖c′d′等於實長而垂直於基線.

Fig. 30 中之直線ef—e′f′,平面圖,立面圖,皆垂直於基線之直線也。如是之直線,稱爲垂直於基線。垂直於基線之平面上所有直線之平面圖,立面圖,皆垂直於基線。

作圖題 1. 已知傾斜於兩畫面之直線AB之平面圖ab,立面圖a′b′,求其實長

及與兩畫面所成之實角。

解 1. 求與平畫面所成之角時,可不變AB與平畫面所成之角而旋轉於A之周圍,使平行於立畫面。於是旋轉後,立面圖之長,等於其實長,且立面圖與基線間之角,等於與平畫面所成之實角。

求與立畫面所成之角時,可不變AB與立畫面所成之角而旋轉於A之周圍,使平行於平畫面。於是旋轉後,平面圖之長,等於其實長,且平面圖與基線間之角,等於與立畫面所成之實角。

求與平畫面所成之角之作圖法. (Fig. 32)

(1) 平行於基線引ab_1,令等於ab 則ab 爲使 AB 平行於立畫面時之平面圖。

(2) 從 b_1 引投送線,與從 b' 平行於基線所引平行線交於b_1'。

(3) 聯結a', b_1'. 於是因 $a'b_1'$ 爲使AB平行於立畫面時之立面圖,故 $a'b'$ 等於實長. 又 $a'b_1'$ 與平行於基線之$a'h'$ 所成之角 θ,等於AB與平畫面所成之實角。

求與立畫面所成之角之作圖法。(Fig. 34)

(1) 平行於基線引 $a'b_2'$, 令等於 $a'b'$. 則 $a'b_2'$ 爲使AB平行於平畫面時之立面圖。

(2) 從 b_2' 引投送線,與從 b 平行於基線所引平行線交於 b_2。

(3) 聯結 a, b_2。於是因 ab_2 爲使AB平行於平畫面時之平面圖,故 ab_2 等於實長。又 ab_2 與平行於基線之am所成之角 ϕ,等於AB與立畫面所成之實角.

解 2. 求與平畫面所成之角時,可將所設直線,繞其平面圖之周圍旋轉,使與平畫面一致。於是所設直線之平面圖與旋轉後之直線間之角,等於與平畫面所成之角。

求與立畫面所成之角時,可將所設直線,繞其立面圖之周圍旋轉,使與立畫面一致. 於是所設直線之立面圖與旋轉後之直線間之角,等於與立畫面所成之角。

求與平畫面所成之角之作圖法。(Fig. 36)

(1) 從 a, b 至 ab 引垂線 aA_1, bB_1, 令各等於從 a', b' 至

基線之距離。

(2) 聯結 A_1, B_1。

(3) 於是 A_1B_1 可達將所設直線繞 ab 之周圍旋轉，與平畫面一致時之位置。因之，平行於 ab 之 B_1H_1 與 A_1B_1 間之角 θ 爲所求之角，A_1B_1 等於直線 AB 之實長。

斯時平行於 B_1A_1 引 be_1，設與 aA_1 交於 e_1，則 $A_1B_1be_1$ 爲平行四邊形。因此，不求 A_1B_1，而求 e_1b 亦可。求之之法，取 ae_1 令等於從 a′,b′ 至基線之距離差 a′e′，而引 e_1b 卽可。如是則 e_1b 等於實長，角 abe_1 等於與平畫面所成之角。

求與立畫面所成之角之作圖法。(Fig. 36)

(1) 從 a′, b′ 至 a′b′ 所引垂線 $a'A_2$, bB_2，各令其長等於從 a, b 至基線之距離。

(2) 聯結 A_2, B_2。

(3) 於是 A_2B_2 可達將所設直線繞 a′b′ 之周圍旋轉，與立畫面一致時之位置。因之，平行於 a′b′ 之 A_2M_1 與 A_2B_2 間之角 φ 爲所求之角，A_2B_2 等於實長。

斯時在 $b'B_2$ 上取 $b'f_1$，令等於由 a, b 至基線之距離差 bf，而引 $a'f_1$ 亦可。$a'f_1$ 等於實長，角 $f_1a'b'$ 等於 φ。

作圖題 2. 直線 AB，長 5 糎，其一端 A 在平畫面上方 0.5 糎，立畫面前方 1 糎之

位置,他端B在立畫面前方3糎。AB之平面圖與基線成30°之角時,其投影圖若何?(Fig. 37)

(1) 先求A點之平面圖a,立面圖a'.

(2) 設隔3糎而平行於基線之直線,與由a所引與基線成30°角之直線交於b.

(3) 則ab即所求平面圖.

(4) 設由b至ab所引垂線,與中心a半徑5糎之弧於B_1.

(5) 則bB_1之長,等於由A,B至平畫面之距離差.

(6) 故設由b所引投送線與基線之交點爲n,在其上取nb',令等於(bB_1+0.5糎),則a'b'即所求立面圖也。

作圖題 3. 直線AB,長5糎,其兩端A,B距平畫面各爲0.5糎,3糎,距立畫面各在其前方1糎,3.5糎。求此直線之投影圖。(Fig. 38)

解. 作所求直線平行於立畫面時之投象圖,然後將其旋轉達所求之位置,則易得所要求之投影圖。

(1) 先求A點之投象圖a, a'.

(2) 設隔3糎而平行於基線之直線 $b'b_2'$, 與中心a半徑5糎之圓交於b_2'.

(3) 由b_2'引投送線,設與由a至基線所引平行線交於b_2.

(4) 設隔3.5糎而平行於基線之直線,與中心a半徑ab_2之弧交於b.

(5) 聯結a, b, 則此卽所求平面圖也.

(6) 由b引投送線,設與b_2b'交於b'.

(7) 聯結a', b'則此卽所求立面圖也.

作圖題 4. 直線AB,一端A在平畫面上,與平畫面成40°之角,今已知其平面圖ab,求其立面圖及與立畫面所成之角. (Fig. 39)

解. 直線AB之他端B,距平畫面之高爲幾何,若求得之,本題便易得解.

作圖法.

(1) 引與ab成40°之aB_1,由b至ab所引垂線交於B_1.則bB_1之長,等於他端B距平畫面之高.

(2) 由b引投送線,在其上取距基線等於bB_1之長之點,設爲b'.

(3) 於是聯結 a′, b′ 之直線 a′b′, 即所求立面圖也。

(4) 由 a 引平行於基線之線,與 bb′ 交於 m.

(5) 由 b′ 至 a′b′ 引垂線 $b'B_2$, 令等於 bm.

(6) 則角 $B_2a'b'$, 等於 AB 與立畫面所成之角。

作圖題 5. 已知直線 AB 之一端 A (a,a′)及其實長,平面圖之長,立面圖之長,各爲5糎,4糎,4.5糎,求其投影圖.(Fig. 40)

解. 因已知實長,及投影圖之長,故他端 B 至各投影面之距離,易求得之。因之,可求 B 點之投影圖。

作圖法.

(1) 由 a, a′ 平行於基線所引 ab_2', $a'b_1'$, 各令等於 4 糎, 4.5 糎。

(2) 由 b_2 所引投送線,與中心 a′ 半徑 5 糎之弧交於 b_2'. 於是 B 點之立面圖,應在由 b_2' 所引平行於基線之線 $b_2'b'$ 上. 故設以 a′ 爲中心過 b_1' 所作之圓弧,與 $b_2'b'$ 交於 b′, 則直線 a′b′ 即所求立面圖也。

(3) 由 b_1' 所引投送線,與中心 a 半徑 5 糎之弧交於 b_1. 於是 B 點之平面圖,應在由 b_1 所引平行於基線之線 b_1b 上。故設以 a 爲中心過 b_2 所作之弧,與 b_1b 交於 b, 則直線 ab 即所求平面圖也。

作圖題 6. 實長 5 糎,與平畫面,立畫面所成之角各為 45°, 30° 之直線,其兩端投影面上時,其投影圖若何?(Fig. 42)

解. 因已知實長及傾斜角,故投影圖之長易求得之。因之,易作其投影圖。

作圖法

(1) 由基線上一任意點 b_1' 引直線 $b_1'a'$,令與基線成 45° 之角,且令其長等於 5 糎。

(2) 設由 a' 至基線所引垂線之足為 a,則 ab_1' 之長,等於平面圖之長.

(3) 由 a' 引直線 $a'm$,令與 $a'b_1'$ 成 30° 之角,再由 b_1' 至 $a'm$ 作垂線 b'_1m。則 $a'm$ 之長,等於立面圖之長。

(4) 故設以 a' 為中心過 m 所作之弧,與基線交於 b',則直線 $a'b'$ 即所求立面圖也。

(5) 設以 a 為中心過 b_1' 所作之弧,與由 b' 所引投送線交於 b,則直線 ab 即所求平面圖也。

作圖題 7. 實長 5 糎,與平畫面,立畫面所成之角各為 40°, 30° 之直線 AB,其一端 A 之投影圖為 a, a',則此直線之投影圖若何?(Fig. 43)

解. 與前作圖題同法,求得投影圖之長,便易求得 AB 之投影圖。

作圖法.

(1) 由 a, a′ 平行於基線引 ab_2, $a'b_1'$, 再引 ab_1, $a'b_2'$, 與 ab_2, $a'b_1'$ 各成 30°, 40° 之角,且各令等於 5 糎。

(2) 由 b_1, b_2' 引投送線,與 $a'b_1'$, ab_2 各交於 b_1', b_2。 則 ab_2, $a'b_1'$ 各等於平面圖,立面圖之長.

(3) 於是以 a, a′ 爲中心,各作過 b_2, b_1' 之弧,設與由 b_1,b_2' 所引平行於基線之線,各交於 b, b′, 則直線 ab, a′b′, 卽所求之平面圖,立面圖也。

應用題11. 已知三角形 ABC 之平面圖 abc,立面圖 a′ b′ c,求其實形。(Fig. 44)

根據作圖題 1,求出三角形各邊之實長 aB_1, cA_1, cB_2。 於是以此實長爲三邊之三角形 A_2B_2c, 卽所設三角形之實形也。

應用題12. 平行於平畫面而在其上方2.5糎之矩形 ABCD (3 糎 × 2 糎)。 其長邊與立畫面成30°之角時,其投影圖若何? (Fig. 45)

(1) 作長邊與基線成30°之角,而與所設矩形同形之矩形 abcd, 則 abcd 卽所求平面圖也。

(2) 隔2.5糎引平行於基線之直線 a′c′, 設與由 a,

b, c, d 所引投送線,各交於 a′, b′, c′, d′。 則 a′b′c′d′, 卽所求立面圖也。

應用題 13. 平行於立畫面而在其前方 1.5 糎之矩形 ABCD (3.5 糎 × 2 糎)。 其對角線 AC 垂直於平畫面時,其投影圖若何? (Fig. 46)

(1) 作對角線 a′c′ 垂直於基線而與所設矩形同形之 a′b′c′d′。 則 a′b′c′d′, 卽所求立面圖也。

(2) 隔 1.5 糎引平行於基線之直線 bd, 設與由 a′, b′, c′, d′ 所引投送線,各交於 a, b, c, d。 則 abcd, 卽所求平面圖也。

應用題 14. 與平畫面成 45° 之角,而長邊平行於立畫面之矩形 ABCD(4.5 糎 × 2 糎),求其投影圖。(Fig. 47)

(1) 引 a′c′ 與基線成 45° 之角,令等於 4.5 糎。 則 a′c′ 卽所求立面圖也。

(2) 在由 a′ 所引投送線上取 ab 令等於 2 糎,設由 a, b 所引平行於基線之線與由 c′ 所引投送線,各交於 d, c。 則矩形 abcd, 卽所求平面圖也。

應用題 15. 與立畫面成 30° 之角,而一對角線垂直於平畫面之正方形,其投影圖若何? (Fig. 48)

(1) 作一對角線令其垂直於基線之任意正方形 $a_1'b'c_1'd_1'$。 但設 c_1' 爲在基線上者。

(2) 由 b', d_1' 至基線所引垂線之足,設爲 b, d_1。

(3) 設以b爲中心過c_1',d_1所作之弧,與由b所引與基線成角30°之直線各交於c,d。則bcd即所求平面圖也。

(4) 設由c所引投送線與基線交於c',又其延長線與由a_1'所引平行於基線之線交於a'。由d所引投送線與由d_1'所引平行於基線之線交於d'。則四邊形a'b'c'd',即所求立面圖也。

10. **平行線之投影圖.** 如Fig.49. AB,CD爲平行二直線,設其平面圖各爲ab,cd. 則平面ABab,CDcd應相平行。因平行的平面,不論如何延長,終不相交,故ab與cd平行。

同理設a'b', c'd'各爲其立面圖,則a'b',c'd'亦應平行。

將立畫面向後方旋轉,使與平畫面一致,則若Fig.50.

由上所述,可得定理如下:

定理8. 平行直線在一平面上之投影亦平行。

應用題16. 三角形abc爲三角形ABC之平面圖,A,B,C,各在平畫面上方3糎,2.5糎,1糎。求此三角形之立面圖。(Fig. 51)

(1) 設由a,b,c所引投送線與基線各交於m,n,o。

(2) 在am,bn,co之延長線上取ma',nb',oc',令各等於3糎,2.5糎,1糎。則三角形a'b'c'卽所求立面圖也。

應用題17. 平行四邊形abcd爲平行四邊形ABCD之平面圖,而A,B,C各高於平畫面2.5糎,1.5糎,0.5糎。求此四邊形之立面圖。(Fig. 52)

(1) 與前題同法,求出A,B,C之立面圖a',b',c'。

(2) 由a',c'各引平行於b'c',a'b'之線,設其交點爲d'。則四邊形a'b'c'd',卽所求立面圖也。

應用題18. 已知正六角形之二邊AB,BC,其平面圖爲ab,bc,立面圖爲a'b',b'c',求其投影圖。(Fig. 53)

(1) 由a,c各引平行於bc,ab之線,設其交點爲o。

(2) 由a,c引平行於ob之線,與co,ao之延長線,各交於f,d。

(3) 由f,d各引平行於bc,ab之線,設其交點爲e。

(4) 則六角形abcdef,卽所求平面圖也。

(5) 立面圖a'b'c'd'e'f',得用同法作之。

應用題19. 已知平行線ab—a'b',cd—c'd',求其間之實距離。(Fig. 54)

(1) 在 $ab—a'b'$ 上，各取一任意點 p, p'；$cd—c'd'$ 上，各取二任意點 q, q', r, r'

(2) 求出三角形 $pqr—p'q'r'$ 之實形 P_2Q_2r。

(3) 則由 P_2 至 Q_2r 之距離，即所求實距離也。

第 二 章

副 投 影 圖

11. **副投影圖** 平畫面及立畫面以外之平面上之投影圖,曰**副投影圖**,其投影面,曰**副投影面**。副投影面與平畫面或立畫面之交切線,曰**副基線**.

實用上副投影面多使垂直於平畫面或立畫面。不平行於平畫面而垂直於立畫面之平面,其上之投影圖,曰**副平面圖**。又不平行於立畫面而垂直於平畫面之平面,其上之投影圖,曰**副立面圖**.

垂直於基線之平面,卽同時垂直於平畫面,立畫面之平面,其上之投影圖,特稱曰**側面圖**或**側面投影圖**(**側面投象圖**) Profile coördinate plane.

12. 副立面圖　如 Fig. 55, 平面 P 爲垂直於平畫面之一平面,設與平畫面之交切線爲 G_1L_1。又 A 爲空間之一點,設其平面圖爲 a, 立面圖爲 a'。設由 a 至基線 GL 所引垂線之足爲 m, 則四邊形 Aama' 爲矩形,而 a'm 垂直於 GL, 已述於前矣。

設由 A 至平面 P 所引垂線之足爲 a'', 則 a'' 卽 A 之副立面圖也。

設由 a 至 G_1L_1 所引垂線之足爲 n, 則四邊形 Aana'' 爲矩形, a''n 應垂直於 G_1L_1。

故 Aa=a'm=a''n. 卽由一點之立面圖至基線之距離,等於由其副立面圖至副基線之距離. 由此關係,副立面圖易求得之。

今將立畫面,平面 P 各繞 GL, G_1L_1 之周而旋轉,使與平畫面一致,則應如 Fig. 56。在此圖中 ama', ana'' 爲一直線,各垂直於

GL, G_1L_1。

13. **副平面圖** 如Fig. 57, 平面P爲垂直於立畫面之平面,設與立畫面之交切線爲 G_2L_2。 又A爲空間之一點,設其平面圖爲a, 立面圖爲a′。

設由a至基線GL所引垂線之足爲m,則四邊形Aama′爲矩形,而a′m垂直於GL。

設由A至平面P所引垂線之足爲 a_1, 則 a_1 即A之副平面圖也。

設由a′至 G_2L_2 所引垂線之足爲n, 則四邊形 $Aa'na_1$ 爲矩形, a_1n 應垂直於 G_2L_2。

故 $Aa'=am=a_1n$。 即由一點之平面圖至基線之距離,等於由其副平面圖至副基線之距離。 由此關係,副平面圖易求得之.

今將立畫面繞GL之周而旋轉,使與平畫面一致,同時將平面P繞 G_2L_2 之周

而旋轉,使與立畫面一致,則應如 Fig. 58。在此圖中, ama', $a'na_1$ 爲一直線,各垂直於 GL, G_2L_2。

14. **側面圖** 如 Fig. 59, 平面P爲垂直於基線 GL 之平面,設與平畫面及立畫面之交線各爲OX, OY。

A爲空間之一點,設其平面圖,立面圖爲 a, a'. 由 a 至基線GL 所引垂線之足爲 m. 又A之側面圖爲 a'', 由 a, a' 至OX, OY 所引垂線之足各爲 n, u。於是因四邊形 $Aama'$, $Aa'ua''$, $Aana''$ 均爲矩形,故 $a'm=a''n=Aa$, $am=a''u=Aa'$。

今將立畫面繞基線 GL 之周而旋轉,同時將平面 P 繞 OY 之周而旋轉,使與立畫面一致,則應如 Fig. 60。在此圖中, ama', aua'' 爲一直線,各垂直於GL, OY。

又將平面P不向立畫面旋轉,而繞OX之周以旋轉,使與平畫面相一致,則可如

Fig. 60。 ana″ 爲直線,而垂直於OX。

側面圖可旋轉至立畫面上,亦可旋轉至平畫面上。

應用題20 已知直線之平面圖,立面圖,求其副投影圖。

求出所設直線兩端二點之副投影圖,引聯結之直線卽可。

應用題21 已知直線AB之平面圖ab,立面圖a′b′,求其實長。

本題雖已見於第一章,但本章則用副投影圖而求之作圖法。

解 求出平行於所設直線而垂直於一投影面之平面上之副投影圖。於是此副投影圖之長,等於實長。

作圖法.(其一)(Fig. 62)

(1) 引平行於平面圖ab之直線 $G_1 L_1$。

(2) 以 $G_1 L_1$ 爲副基線,求出A, B之副立面圖a″, b″。

(3) 於是因a″b″爲平行於AB,垂直於平畫面之平面上之副立面圖,故其長等於實長。

作圖法.(其二)(Fig. 64)

(1) 引平行於立面圖a′b′之直線 $G_2 L_2$。

(2) 以 G_2L_2 爲副基線,求出 A, B 之副平面圖 a_1, b_1。

(3) 於是因 a_1b_1 爲平行於 AB, 垂直於立畫面之平面上之副平面圖,故其長等於實長.

作圖法.（其三）(Fig. 66)

直線垂直於基線者,可如 Fig. 66, 求其側面圖。即求出 A, B 之側面圖 a'', b'', 則直線 a'' b'', 便係 AB 之側面圖,且等於實長。

應用題22. 已知三角形 abc—a'b'c', 求以 G_1L_1 爲副基線之副立面圖. (Fig. 67)

求出三角形各角點之副立面圖 a'', b'', c'', 而作三角形 a''b''c'' 卽可。

題用應23. 已知三角形 abc—a'b'c',求以 G_2L_2 爲副基線之副平面圖. (Fig. 68)

求出三角形各角點之副平面圖 a_1, b_1, c_1, 而作三角形 $a_1b_1c_1$ 卽可。

應用題24. 已知垂直於平畫面之五角形 abcde—a'b'c'd'e',求其實形. (Fig. 70)

求出平行於所設五角形之平面上之副投影圖卽可. 卽以平行於 ab 之 G_1L_1 爲副基線而作之副立面圖 a''b''c''d''e'',便爲所求之實形.

應用題 25. 已知垂直於立畫面之三角形 abc—a'b'c', 求其實形. (Fig. 72)

求出平行於所設三角形之平面上之副投影圖即可。即以平行於 $a'b'$ 之 G_2L_2 爲副基線之副平面圖 $a_1b_1c_1$，便爲所求之實形。

第三章

平面

15. **平面之跡** 平面與投影面相交之線,曰此平面之**跡**Trace。而與平畫面之交線,曰**水平跡**Horizontal trace,與立畫面之交線,曰**直立跡**Vertical trace。

如Fig. 73, T 爲一所設平面,其水平跡爲Tt,直立跡爲Tt′. 然含 Tt, Tt′ 之平面祇有一個,故平面 T 爲此二跡所限定。而平面與直線祇交於一點,故二跡Tt,Tt′在基線上相交。

如上所述,平面T爲Tt,Tt′所限定,故在投影圖中表示平面,用其水平,直立兩跡。

表示平面之跡之記號,與直線之投影圖稍異其趣. 即在水平,直立兩跡之交

點標明,表示此平面之第一字母,再加水平,直立兩跡上適當位置所標小寫字母,及小寫字母之右上角有(′)者. 如Fig. 73。故有不曰平面 T 而曰平面 tTt′ 者.

將立畫面繞基線之周向後方旋轉,使與平畫面重合,則如Fig. 74.

16. 平面與投影面間之角。

如Fig. 73 tTt′ 為所設平面。

由基線上任意一點 O,在立畫面上,引垂直於基線之直線,與 Tt′交於 N,由 O 至 Tt 所引垂線之足設為 M。則角NMO為平面 T 與平畫面所成之角。

三角形 NOM 為直角三角形 ($\angle MON = 90°$),故若在基線上取 OM_1,令等於 OM,則$\angle NM_1O = \angle NMO$。

次在平畫面上引基線之垂線,與Tt交於C,由O至Tt′所引垂線之足設為D。則角CDO為平面T與平畫面所成之角.

因三角形COD爲直角三角形($\angle COD=90^\circ$),故在基線上取OD_1令等於OD,則$\angle CD_1O=\angle CDO$。

次設MN,CD之交點爲P,則直線OP應垂直於平面T。卽OP垂直於MN,CD。因之$\angle NMO=\angle NOP$, $\angle CDO=\angle COP$。

將立畫面繞基線之周以旋轉,使與平畫面一致,則如Fig. 74。

17. 平面之特别者

(1) 平面垂直於立畫面時,其水平跡垂直於基線,直立跡與基線間之角等於此平面與平畫面所成之角。例如Fig 75, 76之平面tTt′是。

(2) 平面垂直於平畫面時,其直立跡垂直於基線,水平跡與基線間之角等於此平面與立畫面所成之角。例如Fig. 77,78之平面tTt′是。如是之平面,通稱曰**直立面**。

(3) 平行於平畫面之平面,其直立跡平行於基線,而水平跡非實在。如是之平面,通稱曰**水平面**。如 Fig. 79, 80 之平面 T 是。

(4) 平行於立畫面之平面,其水平跡平行於基線,而直立跡非實在. 如 Fig. 81,82 之平面 T 是。

(5) 平行於基線之平面,其水平跡,直立跡均平行於基線。如 Fig. 83,84 之平面 tTt′ 是.

(6) 垂直於基線之平面,其水平跡,直立跡在一直線上,且垂直於基線。

作圖題 8. 已知平面之水平跡 Tt,直立跡 Tt′, 求與投影面所成之實角。

<u>平面之跡不平行於基線者</u>。(Fig. 74)

(1) 由基線上任意一點 O,垂直於基線所引之直線,與 Tt′ 交於 N。

(2) 設由 O 至 Tt 所引垂線之足為 M,在基線上取 OM_1,令等於 OM。

(3) 於是角 NM_1O 等於平面 T 與水平面所成之實角。

(4) 設 ON 之延長線,與 Tt 交於 C。

(5) 設由 O 至 Tt' 所引垂線之足爲 D,在基線上取 OD_1,令等於 OD。

(6) 於是角 CD_1O 等於平面 T 與立畫面所成之實角。

<u>平面之跡平行於基線者。</u>(Fig. 84)

(1) 垂直於基線引 XOY,設與 Tt, Tt',各交於 t, t'。

(2) 在基線上取 Ot_1,令等於 Ot。

(3) 於是角 $t't_1O$,角 $t_1t'O$,各等於與平畫面,立畫面所成之實角。

作圖題 9.　a 爲所設平面 tTt' 上一點 A 之平面圖,求 A 之立面圖。(Fig. 86)

解. 在所設平面上過所設點引任意直線。則因所設點之立面圖,應存在於此直線之立面圖上,故立面圖易求得之。

作圖法.

(1) 過 a 引任意直線 mn,設與 Tt 及基線,各交於 n,m。

(2) 由 m, n 引投送線,設與 Tt',及基線各交於 m',n'。

(3) 則因直線 m'n',爲過所設點 A 一直線之立面

圖,故由 a 所引投送線與 m'n' 之交點 a',即所求之立面圖也。

作圖題10. Tt 爲含所設點 a, a' 之平面之水平跡。求此平面之直立跡。(Fig. 87)

解. 過所設點引在所設平面上之任意直線,求其直立跡。則此直立跡與所設平面之水平跡與基線相交之點聯結爲直線,卽爲所求之直立跡。

作圖法。

(1) 過 a 引任意直線,設與 Tt 及基線,各交於 m, n.

(2) 由 m 引投送線,與基線交於 m'.

(3) 聯結 m', a',與由 n 所引投送線交於 n'。

(4) 則因 n' 爲所設平面上一直線之直立跡,故直線 Tn',卽所求直立跡也。

作圖題11. 與平畫面成 60°, 立畫面成 40°之平面,其跡若何?(Fig. 88)

(1) 由基線上之任意一點 O,引基線之垂線 On'.

(2) 由 On' 上之一點 n',引 $n'm_1$,與基線成 60° 之角,并交基線於 m_1.

(3) 由O至m_1n'，引垂線Op_1。

(4) 引Oc_1，Od_1，與Op_1成40°，90°—40°之角，各與m_1n'，交於c_1，d_1。

(5) 在$n'O$之延長上取Oc，令等於Oc_1。

(6) 則由c至中心O半徑Om_1之圓所引切線Tt，即爲所求平面之水平跡，由n'至中心O半徑Od_1之圓所引切線Tt'，即爲所求平面之直立跡。

作圖題12. 已知平面tTt'，求其在垂直於平畫面之副投影面rRr'上之跡。

解. 如Fig.89，求平面tTt'與副投影面rRr'之交線T_1t''，然後將副投影面繞Rr之周旋轉，令與平畫面一致即可。

作圖法.

(1) 求出平面tTt'與rRr'水平跡之交點T_1，直立跡之交點t''。

(2) 在由R至Rr所引垂線上，取Rt_1''，令等於Rt''。

(3) 於是直線T_1t_1''爲平面tTt'與rRr'之交線，繞Rr之周旋轉，使與水平面一致之位置．即T_1t_1''爲副投影面rRr'上平面tTt'之跡也。

作圖題13. 求含相交二直線之平面之跡。

解. 聯結所設二直線水平跡之直線,爲所求水平跡,聯結直立跡之直線,爲所求直立跡。

直線之跡之求法,因已在第一章說明,故其作圖法之說明從略。

第 四 章

簡單的立體之投影圖

18. **多面體** 四個以上之平面形圍成之立體,曰**多面體** Polyhedron. 圍多面體之平面形,曰多面體之**面** Surface, 隣面之交線,曰**稜** Edge.鄰稜之交點,曰多面體之**角點** Corner, 或**頂點**,聯結二角點之直線其不在面上者,曰多面體之**對角線** Diagonal.

19. **角錐** 公有一頂點之三個以上三角形及邊數與其相同之多角形所圍成之立體,曰**角錐** Pyramid. 三角形公有之頂點,曰角錐之**頂點**,其所對之面,曰**底**,其他各面,曰**斜面**. 而由頂點至含底之平面之距離曰角錐之**高**.

底之重心與頂點聯結之直線曰角錐之軸,軸垂直於底者,曰**直角錐** Right Pyramid, 不垂直者,曰**斜角錐** Oblique Pyramid。Fig. 91 爲斜角錐, Fig. 92 爲直角錐。圖中之 V, VO, ABCDEF 各爲頂點,軸及底。

直角錐中底爲正多角形者,曰**正角錐** Regular pyramid.

角錐之底隨其爲三角形,爲四角形,爲五角形,而別名曰**三角錐** Triangular pyramid, **四角錐** Quadrangular pyramid, **五角錐** Pentagonal pyramid.

20. **角柱** 三個以上平行四邊形及邊數與其相同之二平行多角形所圍成之立體,曰**角柱** Prism. 斯時二平行多角形,曰**底**,其他各面,曰**側面** Lateral face. 相鄰側面之交線,曰**側稜** Lateral edge。

角柱二底間之距離,曰角柱之**高** Height, 二底之重心聯結之直線,曰**軸**. 而軸

垂直於底者,曰**直角柱**,不垂直者,曰**斜角柱**。

直角柱中底爲正多角形者,曰**正角柱**。

角柱之底隨其爲三角形,爲四角形,爲五角形,而別名曰**三角柱**,**四角柱**,**五角柱**

Fig. 93 爲斜角柱, Fig. 94 爲直角柱. 圖中之 ABCDEF, $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 爲底, 00_1爲軸。

21. **平行六面體**　六個平行四邊形所圍成之多面體,曰**平行六面體** Parallelopiped。

22. **直六面體**　六個矩形所圍成之多面體,曰**直六面體** Right parallelopiped。

23. **正多面體**　同形之正多角形所圍成之多面體,其各面間之角相等者,曰**正多面體** Regular polyhedron. 正多面體祇有五種如次.

(1) **正四面體** Regular tetrahedron　四

個正三角形所圍成者。

(2) **立方體** Cube 六個正方形所圍成者。

(3) **正八面體** Regular octahedron 八個正三角形所圍成者。

(4) **正十二面體** Regular dodecahedron 十二個正五角形所圍成者。

(5) **正二十面體** Regular icosahedron。二十個正三角形所圍成者。

24。 **圓錐** 角錐之底,其邊數若無窮增加,同時其邊長若無窮縮短,則其極限底必成曲線。此角錐之極限,曰**錐體** Cone,依軸垂直於底與否而別名曰**直錐體**,**斜錐體**。Fig.102為直錐體,Fig.103為斜錐體。

直錐體中底為圓者,曰**直圓錐** Right circular Cone (**略稱圓錐**)。

圓錐若以平行於底之二平面截之,則其中央之部分,曰**截頭圓錐** Frustum of cone, 如 Fig. 104 所示。

25. **圓柱** Circular cylinder　角柱之底,其邊數若無窮增加,同時其邊長若無窮縮短,則其極限,底必成曲線. 此角柱之極限,曰柱體 cylinder,依軸之垂直於底與否,而別名曰**直柱體,斜柱體** Oblique cylinder。Fig. 105 爲直柱體, Fig. 106 爲斜柱體.

直柱體中底爲圓者曰**直圓柱** Right circular cylinder (略稱**圓柱**)。

26. **球**　圓繞其一直徑之周而旋轉所生之立體,曰**球** Sphere. 斯時旋轉圓之中心,曰球之**中心** Centre 其半徑曰球之**半徑** Radius. 試參閱 Fig. 107.

作圖題 14. 底每邊長1.5糎高 2 糎之正六角柱,其底高出於平畫面之上方 1 糎,底之一邊與立畫面成45°之角,求其投影圖. (Fig. 109)

(1) 在適當之位置,作每邊長 1.5 糎之正六角形

abcdef, 令一邊與基線成 45° 之角,更引三對角線,設其交點爲 v. 於是圖形 v-abcdef, 卽所求平面圖也。

(2) 隔離基線 1 糎所引平行於基線之直線,與由 v, a, b, c, d, e, f,所引投送線,各交於 o′, a′, b′, c′, d′, e′, f′。

(3) 在 vo′ 上取 o′v′, 令等於 2 糎,將 v′ 與 a′, b′, c′, d′, e′, f′ 聯結. 則圖形 v′−a′b′c′d′e′f′, 卽所求立面圖也。

應用題 26. 底每邊長 1.5 糎高 3 糎之正六角錐,其軸垂直於立畫面,底之一邊平行於平畫面,求其投影圖. (Fig. 111)

(1) 作每邊長 1.5 糎,一邊平行於基線之正六角形 a′b′c′d′e′f′, 更引三對角線,設其交點爲 v′. 則圖形 v′−a′b′c′d′e′f′, 卽所求立面圖也.

(2) 設平行於基線任意之直線,與由 v′, b′, a′, f′, e′ 所引投送線,各交於 o, b, a, f, e。

(3) 在 v′o 上取 ov, 令等於 3 糎. 則圖形 v−bafe, 卽所求平面圖也。

作圖題 15. 底每邊長 1.5 糎,高 2 糎之正六角柱,其一底面高出於平畫面 1 糎時,其投影圖若何。(Fig. 113)

(1) 在適當之位置,作每邊長 1.5 糎之正六角形 abcdef。 則此六角形,卽所求平面圖也。

(2) 隔離基線1糎所引平行於基線之直線,與由 a, b, c, d, e, f所引投送線,各交於a_1', b_1', c_1', d_1', e_1', f_1'。

(3) 隔離$c_1'f_1'$ 2糎所引平行於 $c_1'f_1'$ 之直線,與由 a_1', b_1', c_1', d_1', e_1', f_1', 所引垂線,各交於 a', b', c', d', e', f'.

(4) 則圖形 $a'b'c'd'e'f'-a_1'b_1'c_1'd_1'e_1'f_1'$. 卽所求立面圖也.

應用題27. 底每邊長1.5糎,高2.5糎之正六角柱,其一底面距離立畫面0.7糎,一側面距離平畫面0.5糎,求其投影圖.

就Fig. 114 可知其大要. 圖中正六角形 a'b'c'd'e'f', 每邊長1.5糎,一邊e'f' 平行於基線,且距基線爲0.5糎. 而a_1d_1距基線0.7糎.

作圖題16. 作每邊3糎之正四面體之投影圖.

Fig. 115之1,爲一面ABC置於平畫面上,一邊AB垂直於基線者之投影圖。

(1) 令一邊ab垂直於基線,作邊長3糎之正三角形abc,更由a, b, c至對邊引垂線,設其交點爲d. 則圖形abcd,卽正四面體之平面圖,適合上述條件者也.

(2) 由a, b, c所引投送線,與基線交於a', b', c', 由d所引投送線,與中心c'半徑3糎之弧交於d'。

(3) 引 a'd', c'd. 則圖形 a'b'c'd' 即所求立面圖也.

Fig. 115 之 II, 爲與立面畫保持平行將邊 CD 繞 C 之周而旋轉,使其垂直於平畫面時之投影圖也。

Fig. 115 之 III, 爲將立體繞 AB 之周而旋轉,使面 ABD 垂直於平畫面時之投影圖也。

Fig. 115 之 IV, 爲置面 ABC 於平畫面上,使邊 BC 與基線成 20° 之角時之投影圖也。

作圖題 17. 每邊 2.5 糎之立方體,其一面在平畫面上,而其一邊與基線成 30° 之角時,求此立方體之投影圖. (Fig. 116)

(1) 作每邊長 2.5 糎之正方形 abcd, 令其一邊與基線成 30° 之角,則 abcd 即所求之平面圖也.

(2) 由 a, b, c, d 所引投送線,與基線各交於 a_1', b_1', c_1', d_1'.

(3) 隔離基線 2.5 糎所引平行於基線之直線,與由 a_1', b_1', c_1', d_1' 至基線所引垂線,各交於 a', b', c', d'.

(4) 則圖形 a'b'c'd' $a_1'b_1'c_1'd_1'$ 即所求立面圖也。

作圖題 18. 求立方體之一對角線平

行於平畫面時之投影圖.(Fig. 117)

(1) 作正方形abcd,令其一對角線平行於基線.(I)

(2) 設 abcd 爲立方體之一面在平畫面上之平面圖,而求出其立面圖 a'b'c'd'h'e'f'g'。(I)

(3) 其次再作a'g' 平行於基線之 a'b'c'd'h'e'f'g'。(II)

(4) 由 II 之 a',b',c',……h' 所引投送線,與由 I 之 a,b,c,……h 至基線所引平行線,設對應相交於 a,b,c,……h. 而作圖形 abcdhefg. (II)

(5) 則 II 之圖形,卽所求投影圖.

作圖題 19. 求立方體之一對角線垂直於平畫面時之投影圖. (Fig. 117)

(1) 作與 I 之 a'b'……g' 同形,而 a'g' 垂直於基線之圖形 a'b'c'd'h'e'f'g'. (III)

(2) 由 III 之 a', b', c',……h'所引投送線,與由 I 之 a,b, c,……h 至基線所引平行線,設對應相交於 a,b,c,……h. (III)

(3) 作圖形 abcdhefg. (III)

(4) 則 III 之圖形,卽所求投影圖也.

作圖題 20. 求每邊長 2.5 糎之正八面體之投影圖. (Fig. 118)

I. 一對角線 EF 垂直於平畫面者.

(1) 作一邊平行於基線,而每邊長2.5糎之正方形abcd,更引對角線ac, bd,而於其交點加記號e, f 則圖abcde,即所求平面圖。

(2) 在由e所引投送線上取e'f',令等於ac, e'f'之垂直二等分線,與由b, c所引投送線之交點,加記號a', b', c', d'。

則圖形a'b'c'd'e'f',即所求立面圖也。

II. 一面在平畫面上者.

(1) 作與a'b'c'd'e'f'同形而相當於a'f'之線,與基線一致時之圖形$a_1'b_1'c_1'd_1'e_1'f_1'$。則此圖形卽所求立面圖也。

(2)由a_1', b_1', c_1', d_1', e_1', f_1'所引投送線,與由a, b, c, d, e, f至基線所引平行線,設對應相交於a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1.

(3) 作圖形$a_1b_1c_1d_1e_1f_1$,卽爲所求之平面圖。

應用題28 底面與平畫面成45°之角,一邊在平畫面上之正六角錐,其投影圖若何?(Fig. 119)

(1) 置底面於平畫面上,作一邊DE垂直於基線之投影圖vabcdef—v'a'b'c'd'e'f'。

(2) 以DE爲軸,將此立體旋轉,令底面與平畫面成45°之角,作出此時之投影圖卽可。卽作與立面圖v'a'c'd'e'f同形,而相當於a'e'之線,與基線成45°之角時之$v_1'a_1b_1'c_1'd_1'e_1'f_1'$,便爲所求立面圖。又由$v_1'$, a_1', b_1',

……所引投送線,與由v, a, b,……至基線所引平行線之交點聯結之,則得圖形 $v_1a_1b_1c_1d_1e_1f_1$, 卽所求平面圖也。

應用題29.　一斜面在平畫面上之正六角錐,其投影圖若何? (Fig. 119)

(1)　照應用題28之(1)作圖形 vabcdef－v'a'b'c'd'e'f'。

(2)　然後以DE為軸,將斜面VDE倒於平畫面上,作投影圖 $v_2a_2b_2c_2d_2e_2f_2-v_2'a_2'b_2'c_2'd_2'e_2'f_2'$ 卽可。

應用題30.　一斜稜(過頂點之稜)垂直於平畫面之正六角錐,其投影圖若何? (Fig. 120)

(1)　置底於平畫面上,作斜稜VD平行於立畫面之平面圖 vabcdef, 立面圖 v'a'b'c'd'e'f'。

(2)　次與立畫面保持平行,將VD繞D之周旋轉,使VD垂直於平畫面,作投影圖 $v_1a_1b_1c_1d_1e_1f_1-v_1'a_1'b_1'c_1'd_1'e_1'f_1'$, 卽可。

應用題31.　一斜面在平畫面上而軸傾斜於立畫面上之正五角錐,其投影圖若何? (Fig. 121)

(1)　置底於平畫面上,作其一邊CD垂直於基線之投影圖 vabcde－v'a'b'c'd'e'。

(2)　以CD為軸,將斜面VCD旋倒於平畫面上,作投影圖 $v_1a_1b_1cde_1-v_1'a_1'b_1'c'd'e_1'$。

(3)　更將角錐繞頂點之周旋轉,止於適宜之位置,

作投影圖 $v_1a_2b_2c_2d_2e_2-v_1'a_2'b_2'c_2'd_2'e_2'$.

(4) 則最後之圖形,卽爲所求之投影圖。

作圖題21. 底之每邊長1.5糎高3糎之正五角柱,其一側面置於平畫面上,使軸與立畫面成30°之傾斜,而求其平面圖及立面圖。

一側面置於平畫面上,且使底平行於立畫面,作投影圖。然後將側面仍保持於平畫面上而旋轉,使軸與立畫面成30之角,則所求投影圖易作成之。但Fig. 122,乃作副投影圖而求得者。

(1) 引直線 G_1L_1,令與基線成 90°−30° 之角。

(2) 在 G_1L_1 上取 $a''b''$,令等於1.5糎,作正五角形 $a''b''c''d''e''$。則 $a''b''c''d''e''$,乃以所設角柱之 G_1L_1 爲副基線之副立面圖也。

(3) 平行於 G_1L_1 之一任意線,與由 a'', b'', c'', d'', e'',至 G_1L_1 所引投送線,交於 a, b, c, d, e。

(4) 隔離 ce 3糎而與其平行之直線,與由 a, b, c, d, e 至 ce 所引垂線,交於 a_1, b_1, c_1, d_1, e_1.

(5) 則圖形 $abcde-a_1b_1c_1d_1e_1$,卽所求平面圖。

(6) 根據副立面圖,可知各角點距平畫面之高,故立面圖 $a'b'c'd'e' - a_1'b_1'c_1'd_1'e_1'$,易作成之。

27. 雜例

Fig. 123, 乃正五角柱置於種種位置,而求得之投影圖也。

I 為一底面置於平畫面上,使對角線 AC 平行於立畫面時之投影圖也。

II 為使對角線 AC 垂直於平畫時之投影圖也。

III 為使對角線 AC 平行於立畫面,傾斜於平畫面時之投影圖也。

IV 為使對角線平行於基線時之投影圖也。

Fig. 124, 為已知底在平畫面上之正六角錐,求以 G_1L_1 為副基線之副立面圖,以 G_2L_2 為副基線之副平面圖者。

Fig. 125, 為已知一底面在平畫面上之正六角柱,求以 G_1L_1 為副基線之副立面圖,以 G_2L_2 為副基線之副平面圖者。

作圖題22. 求一面在平畫面上之正十二面體之投影圖。(Fig. 126)

(1) 取垂直於基線之ab,令等於十二面體一邊之長,作以ab為一邊之正五角形abcde。

(2) 作abcde之外切圓,聯結弧ab,bc,cd,de,ea之中點,作正五角形rstpq

(3) 由s至ab所引之垂線,與由b過圓心之直線bj,設交於j。

(4) 過j之同心圓,與由a,r,s,c……,q向圓心之直線,交於h,i,k,l……,g,作十角形hijk……g。

依據上述方法畫成之圖形,卽所求平面圖也。

(1) 由a,b,c,d,e所引之投送線,與基線交於a′,b′,c′,d′,e′。

(2) 以a′為中心過d′作弧與由i所引之投送線,交於i′。

(3) 引a′i′,而設與由h所引之投送線,交於h′,j′。

(4) 由h′引平行於基線之線,設與由f,l,n所引之投送線,交於f′,l′,n′,引c′l′,d′n′。

(5) 由i′引平行於基線之線,設與由g,k,m,o所引之投送線,交於g′,k′,m′,o′,引h′g′,g′f′,f′o′。

(6) 引 $n'm'$,設與由 p,t 所引之投送線,交於 p',t'。(此時 p' 與 t' 一致)

(7) 由 p' 引平行於基線之線,設與由 q,s,r 所引之投送線,交於 q',s',r',引 $s'k',r'i'$.

依據上述作法所得之圖形,卽所求立面圖也。

作圖題23.　求一面在平畫面上之正二十面體之投影圖。(Fig. 127)

(1) 取垂直於基線之 ab,令等於二十面體一邊之長,以之爲一邊,作正三角形 abc.

(2) 作 abc 之外切圓,聯結弧 ab, bc, ca 之中點,作正三角形 ljk.

(3) 以 ab 爲一邊之正五角形 $abI_1D_1E_1$,由其角點 I_1 至 ab 所引垂線,與由 j 向圓心之直線交於 i。

(4) 過 i 之同心圓,與由 a, l, b, c, k 向圓心之直線,交於 f, g, h, d, e, 作六角形 fghide, 更引 ag, gb, bi, ……, lh, hj, ……。

依據上述作法所得之圖形,卽所求平面圖也

(1) 由 a, b, c, D_1 所引投送線,與基線交於 a',b',c',D_1'。

(2) 以 a' 爲中心過 D_1' 所作圓弧,與由 d,l 所引投送

線,交於d', l', 引c'd'。

(3) 引a'd',與由e,i所引投送線,交於e',i'。又引a'l',與由f, h所引投送線,交於f', h', 引f'e'.

(4) 由l'引平行於基線之線,與由j, k所引投送線,交於j', k', 引c'e'k', k'd'.

(5) 引k'f',與由g所引投送線,交於g',引g'l', g'a'.

依據上述作法所得之圖形,即所求立面圖也。

作圖題24. 正二十面體之最長對角線,垂直於平畫面時,其投影圖若何?(Fig. 127)

(1) 作與作圖題23相同之投影圖abcd…l, a'b'c'd'……l'。於是對角線cl−c'l'爲最長對角線之一,而平行於立畫面。

(2) 將cl−c'l'與立畫面,保持平行,而繞c, c'之周以迴轉,使垂直於平畫面而作其投影圖$a_1'b_1'c_1'd_1'$……l_1'−$a_1b_1c_1d_1$…l_1。則此圖形,即所求之投影圖也。

作圖題25. 平行於平畫面而直徑爲2.6糎之圓,其中心距平畫面上方2.2糎,

距立畫面前方1.6糎時,則其投影圖若何?(Fig. 128)

(1) 求出距平畫面上方2.2糎距立畫面前方1.6糎之點o, o'

(2) 中心o直徑2.6糎之圓,卽所求平面圖也.

(3) 過o'平行於基線之a'b'上,取o'a', o'b', 令等於1.3糎,則a'b'卽所求立面圖也.

應用題32. 平行於立畫面而直徑爲2.6糎之圓,其中心距平畫面上方1.8糎,距立畫面前方2糎時,其投影圖若何?(Fig. 129)

應用題33. 垂直於兩畫面而直徑爲2.6糎之圓,其中心距平畫面上方2糎,距立畫面前方1.8糎時,其平面圖,立面圖,側面圖若何?(Fig. 130)

作圖題26. 與平畫面成45°之角,垂直於立畫面,而直徑爲3糎之圓,其投影圖若何?(Fig. 131)

(1) 與基線成角45°之c'd',令等於3糎,則c'd'卽爲所求立面圖.

(2) 將直徑c'd'之圓,等分爲任意數,由其分點至c'd'引垂線,設其足爲m', n'.

(3) 在由c'd'之中點o'所引投送線上取ab,令等於

3 粍。

(4) 直徑 ab 之圓,等分爲與 (2) 相同之數,由其分點 1,2 至基線所引平行線,與由 m′, n′ 所引投送線,各交於 m, n, 又 ab 之垂直二等分線,與由 c′, d′ 所引投送線,交於 c, d。

(5) 於是聯結 a, n, m, c,…b,…d, m, n 之曲線,卽所求平面圖也。此曲線應爲以 ab 爲長軸,cd 爲短軸之橢圓。

應用題34. 與立畫面成角60°,垂直於平畫面,而直徑爲 3 粍之圓,其平面圖,立面圖,側面圖若何?(Fig 132)

作圖題27. 在傾斜於兩畫面之平面 tTt′ 上,求中心 O 直徑3粍之圓之投影圖。(Fig. 133)

解 在垂直於平面 T 之水平跡之直立面上,求副立面圖,由此得求其平面圖,立面圖。

(1) 以垂直於 tT 之 G_1L_1 爲副基線,求出 o 點之副立面圖 o″。

(2) tT 與 G_1L_1 之交點 t 與 o″ 聯結,在其上取 o″c″, o″d″, 令等於 1.5 粍。

(3) 將直徑 c″d″ 之圓,等分爲任意數,由其分點至

$c''d''$ 引垂線,設其足爲 m'', n''。

(4) 在由 o 平行於 tT 所引之線上取 oa, ob, 令等於 1.5 糎,設 ab 之垂直二等分線,與由 c'', d'' 至 G_1L_1 所引投送線,交於 c, d。又將直徑 ab 之圓,等分爲與(3)相同之數,由其分點 1,2 至 ab 所引垂線,與由 m'', n'' 至 G_1L_1 所引投送線,交於 m, n。

(5) 則聯結 a, m, n, c,…b,…d, n, m 之曲線,卽所求平面圖也。

(6) a, b, c, d, m, n 爲平面圖,卽圓周上之點,其距平畫面之高,等於自副立面 o'', c'', d'', m'', n'' 至 G_1L_1 之距離,故此諸點之立面圖 a', b', c', d', m', n' 易求得之。因此得作立面圖 $a'm'n'c'n'm'b'm'n'd'n'm'$。

作圖題28. 底徑爲2.4糎,高爲 3 糎之直圓錐,其底在平畫面上時,其投影圖若何? (Fig. 134)

(1) 在適當之位置,作中心爲一點 v, 直徑爲 2.4 糎之圓。則此圓卽所求平面圖也。

(2) 由 a, b, v 引投送線,設與基線各交於 a', b', o', 在 vo' 上取 $o'v'$, 令等於 3 糎。

(3) 則三角形 $a'v'b'$, 卽所求立面圖也。

應用題35. 底徑爲 2.4 糎,高爲 2.4 糎之直圓錐,其

軸垂直於立畫面,而高於平畫面 2 糎時,其平面圖,立面圖若何?(Fig. 135)

應用題36. 底徑爲 2.4 糎,高爲 2.4 糎之直圓錐,其軸平行於兩畫面,而在平畫面上方 2 糎,立畫面前方 1.8 糎時,其平面圖,立面圖,側面圖若何?

作圖題29. 底徑 3 糎,高 3 糎之直圓錐,其軸平行於立畫面,橫置於平畫面上時,其平面圖,立面圖,側面圖各若何?(Fig. 137)

(1) 作底置於平畫面上之投影圖. 則圓 ab,爲其平面圖,而三角形 a'v'b',爲其立面圖.(I)

(2) 將 I 之圓錐,繞 b,b' 之周以旋轉,使傾倒於平畫面上,作其圖形 (II). 則 II 卽所求之平面圖,立面圖也.

(3) 由 II 求其側面圖 (III).

作圖題30. 底徑 3 糎,高 3 糎之直圓錐,其軸不平行於立畫面,而橫置於平畫面上時,其投影圖若何?(Fig. 137)

(1) 據前作圖題作圖 II.

(2) 然後將圖 II,繞頂點 V 之周旋轉適宜之角度,而作圖 IV. 則 IV 卽所求之平面圖,立面圖也.

作圖題31. 底徑3糎,高4糎之直圓錐,其軸平行於平畫面,而傾斜於立畫面時,其投影圖若何?(Fig. 138)

(1) 作底邊3糎高4糎之二等邊三角形avb於適宜之位置。則三角形avb,卽所求平面圖也。

(2) 在由ab之中點所引投送線上取c'd',令等於ab,更引c'd'之垂直二等分線,與由ab所引投送線交於a',b'。

(3) 將直徑ab之半圓,等分爲任意數,由其分點至ab引垂線,設其足爲m, n, p, q,將直徑c'd'之半圓,等分爲與前相同之數,由其分點至c'd'引垂線,設與由m,n,p,q所引投送線,對應相交於m',n',p',q'。

(4) 由a'b'之延線,與由v所引投送線之交點　向過a',m',n',c',……b',……d',n',m'之曲線,引切線。則曲線與二切線所成之圖形,卽所求立面圖也。

作圖題32. 底徑2.5糎,高3糎之直圓柱,其軸平行於立畫面,而與平畫面成角45°時,其投影圖若何,(Fig. 139)

(1). 置圓柱之底於平畫面上,而求其平面圖,立面圖。圖I中直徑2.5糎之圓ab,爲其平面圖,而2.5糎×3糎之矩形a'b'f'e',爲其立面圖。

(2) 次將圓柱與立畫面保持平行,繞一點 F 之周而旋轉,得作與平畫面成角4 °時之投影圖。圖 II 中矩形 a'b'f'e',爲所求立面圖,而以 a'b', e'f 爲立面圖之圓之平面圖 acbd, egfh 與公切線 cg, dh 所成之圖形,卽所求平面圖也。

應用題37. 橫置於平畫面上,底徑 2.5 糎,高 3 糎之直圓柱,其軸與立畫面成角30°時,其平面圖,立面圖若何? (Fig. 140)

應用題 38. 底徑 2.5 糎,高 3 糎之直圓柱,其軸垂直於立畫面而高於平畫面 18 糎。求一底置於立畫面上時之投影圖。(Fig. 141)

作圖題33. 橫置於平畫面上,直徑 3 糎之球,其中心在立畫面前方 1.7 糎時,則其投影圖若何? (Fig. 142)

(1) 求出距平畫面上方 1.5 糎,立畫面前方 1.7 糎之點 o, o'。

(2) 則中心 o,o' 直徑 3 糎之圓,卽所求平面圖,立面圖也。

作圖題34. 求內切於所設球 o, o 之正四面體之投影圖。(Fig. 143)

(1) 垂直於圓 o' 之基線,作直徑 d'e'

(2) 在e'd'上取e'm',令等於e'd'之三分之一,由m'立e'd'之垂線,與圓o'交於c'。則c'd'之長,等於內切正四面體一邊之長。

(3) 由c'所引投送線,與由o所引平行於基線之線交於c。

(4) 作正三角形abc內切於中心o過c之圓,引oa, ob。則圖形oabc,即所求平面圖也。

(5) 由c'所引平行於基線之線,與ab之延長線交於a'。則三角形a'c'd',即所求立面圖也。

作圖題35.　求內切於所設球o, o'之立方體之投影圖。(Fig. 144)

(1) 垂直於圓o'之基線,引直徑a'e'。

(2) 在a'e'上取e'm',令等於a'e'之三分之一,由m'立a'e'之垂線,與圓o'交於c'。則c'e'之長,等於內接立方體一邊之長。

(3) 作內切於圓o'之矩形a'c'e'g',聯結其長邊之中點d', f'。則圖形a'd'c'e'f'g',即所求立面圖也。

(4) 由c'所引投送線,與由o所引平行於基線之線交於c。

(5) 內切於中心o過c之圓,作正六角形cdfghb,更引三對角線bf, cg, dh。則上述之正六角形與三對角線構成之圖形,即所求平面圖也。

作圖題36. 求內接於所設球 o, o′ 之正八面體之投影圖。(Fig. 145)

(1) 內切於圓 o 作正方形 abcd, 更引二對角線 ac, bd。則此正方形與二對角線構成之圖形,應爲一對角線垂直於平畫面之內切正八面體之平面圖。

(2) 垂直於圓 o′ 之基線,引直徑 e′f′。

(3) 由 o′ 引平行於基線之線,與由 a, b, c, d 所引投送線,交於 a′, b′, c′, d′。

(4) 聯結 e′, f′ 與 a′, b′, c′, d′。

(5) 則 a′b′c′d′e′f′, 卽所求立面圖也。

作圖題37. 求橫於平畫面上,半徑 r_1, r_2 球互切時之投影圖。(Fig. 146)

(1) 作切於基線且互相切,半徑 r_1,r_2 之圓 o′,p′. 則此二圓爲所求球之立面圖。

(2) 由圓之中心 o′, p′ 所引投送線,與平行於基線之任意直線交於 o, p。

(3) 則中心 o, p 半徑 r_1, r_2 之圓,卽所求

作圖題38. 求橫於平畫面上,半徑 r_1, r_2, r_3 之球互切時之投影圖。(Fig. 147)

(1) 與作圖題37同法求出半徑 r_1, r_2 之二球之平面圖 o, p, 立面圖 o′, p′,

(2) 作半徑 r_3 之圓 q_1', q_2', 分別切於圓 o', p', 且切於基線。

(3) 由 q_1', q_2' 所引投送線,與直線 op 交於 q_1, q_2.

(4) 以 o, p 爲中心過 q_1, q_2 作圓弧,設其交點爲 q.

(5) 則中心 q 半徑 r_3 之圓,應爲所求第三球之平面圖.

(6) 由 q 所引投送線,與 $q_1'q_2'$ 交於 q', 則中心 q' 半徑 r_3 之圓,應爲所求第三球之立面圖。

作圖題39. 作切於直立平畫面上之直圓錐vab—v'a'b',且横於平畫面上半徑r之球。(Fig. 148)

(1) 作切於基線與 $v'b'$ 半徑 r 之圓 o'. 則圓 o' 卽所求球之立面圖也.

(2) 由 o' 所引投送線,與由 v 所引平行於基線之線交於 o.

(3) 則中心 o 半徑 r 之圓,卽所求球之平面圖也.

第五章

立體之斷面與展開

28. **立體之斷面** 用一平面截斷立體而成之切口,普通謂之**斷面** Section.
多面體之斷面,大都爲多角形,而如圓錐,圓柱,球等以曲面圍成之立體,其斷面(下列特別情形除外)都爲曲線.

求多面體之斷面時,可將切斷平面與各稜之交點,順次連續而作多角形.

求曲面體之斷面時,先求曲線上之點,爲構成斷面所必要者,然後將其順次聯結而作曲線. 但以平行於軸之平面截切圓柱時,其切口爲矩形. 又以含頂點之平面截切圓錐時,其切口爲三角形.
又球之切口及垂直於圓柱.圓錐之軸之

切口皆爲圓.

29. **立體面之展開** Development. 將立體之表面剖張於一平面,謂之**展開** To develop 其面。如多面體,圓錐,圓柱等可以展開,而球則不能展開。

作圖題40. 已知底在平畫面上之正六角錐,與垂直於立畫面之切斷平面tTt′,求其切口之投影圖,實形,及展開。(Fig. 149)

求切斷面之投影圖時。

(1) 設各稜之立面圖,與切斷平面之直立跡,交於m′, n′, p′, q′, r′, s′.

(2) 由m′, n′, p′, q′, r′, s′所引投送線,與其相當各稜之平面圖,各交於m, n, p, q, r, s.

(3) 於是將m, n, p, q, r, s順次聯結所成之六角形,即所求切口之平面圖也.

求切斷面之實形時,將切斷面繞tT之周以轉動,使倒於平畫面上即可。即由中心爲T而過m′, n′,……之圓弧,與基線之交點立基線之垂線,再由m, n,……引基線之平行線,與前項垂線對應相交於M_1, N_1,……聯結之成六角形,即爲所求之實形.

求展開時。

(1) 取平行於基線之 va_1，令等於 va，由 a_1 所引投送線，與基線交於 a_1。

(2) 引 $v'a_1'$ 則等於角錐稜 VA 之實長。

(3) $v'a_1'$ 與 $m', n', p', \cdots\cdots$ 所作平行於基線之直線，各交於 $m_1', n_1', p_1', \cdots\cdots$。則 $v'm_1'$, $v'n_1'$, $v'p_1'$, …… 等於 VM, VN, VP, …… 之實長。

(4) 作 $A_2B_2=ab$, $V_2A_2=V_2B_2=v'a_1'$ 之二等邊三角形 $A_2V_2B_2$，更作與其同形之三角形五個連續構成之圖形 $V_2-B_2C_2D_2E_2F_2A_2$。 則圖形 $V_2A_2B_2C_2D_2E_2F_2A_2$，爲所設角錐全斜面之展開。

(5) 在 V_2A_2, V_2B_2, V_2C_2,……上，取 V_2M_2, V_2N_2, V_2P_2, ……，令各等於 $v'm_1'$, $v'n_1'$, $v'p_1'$,……連續 M_2, N_2, P_2, ……。

(6) 於是圖形 $A_2B_2C_2$ …… $A_2M_2S_2$ …… $N_2M_2A_2$ 乃平面 T 所截切而成之下部展開也。

應用題 39. 已知底在平畫面上之正六角錐，與垂直於平畫面之切斷平面 tTt'，求斷面之投影圖，實形及展開。(Fig. 150)

(1) 直線 mnpqr 爲斷面之平面圖，五角形 m'n'p'q'r' 爲其立面圖。

(2) 五角形 $M_1N_1P_1Q_1R_1$ 爲斷面之實形。

(3) $V_2B_2A_2M_2N_2P_2Q_2R_2C_2B_2$ 爲截成斷片中具頂點

者之展開.

應用題40. 已知底垂直於平畫面之角錐,與垂直於立畫面之平面 tTt′, 求其斷面之投影圖。(Fig. 151)

(1) 直線 m′n′p′q′r′s′ 爲斷面之立面圖.

(2) 六角形 mnpqrs 爲斷面之平面圖.

作圖題41. 已知底在平畫面上之正六角柱,與垂直於立畫面之平面 tTt′, 求其斷面之實形及展開。(Fig. 152)

求切口之實形時:

(1) 設平面 T 之直立跡,與各側稜之立面圖,交於 m′, n′, p′, q′, r′, s′.

(2) 由 T 爲中心而過 m′, n′, p′, ⋯⋯ 之圓弧,與基線之交點立基線之垂線,與由 a,b,c, ⋯⋯ 所引平行於基線之線,對應相交於 M_1, N_1, P_1,⋯⋯。

(3) 則六角形 $M_1N_1P_1Q_1R_1S_1$ 爲實形.

求展開時:

(1) 在基線上取 D_2C_2, C_2B_2,⋯⋯E_2D_2, 令等於 ab.

(2) 由 D_2,C_2,B_2,⋯⋯ 立基線之垂線,與由 q′, p′, n′,⋯⋯ 所引平行於基線之線,交於 Q_2,P_2,N_2,⋯⋯.

(3) 則圖形 $D_2Q_2P_2N_2M_2S_2R_2Q_2D_2$, 爲截成斷片中下部之展開.

作圖題42. 將立方體用一平面二分之,使其切口成正六角形。又將此切口置於平畫面上,求其平面圖,立面圖。(Fig. 153)

(1) 一面置於平畫面上,使其對角線平行於立畫面時,作立方體之平面圖abcd,立面圖a'b'c'd'e'f'g'h'.

(2) 以由f'g'之中點m'所立基線之垂線m's為水平跡,聯結a'b'之中點p'與m'之直線為直立跡之平面,即為立方體之切口成正六角形之平面。求出為此平面所切成之左方部分之平面圖apbmsdq,立面圖a'p'n'm'f'e'.

(3) 次將切成之左部分,繞 ms−m's' 之周轉動,使切口與平畫面一致,求出其立面圖 $m'f_1'e_1'a_1'p_1'n_1'$, 更由此以求平面圖 $mf_1n_1p_1a_1q_1r_1h_1s$。

應用題41. 已知軸平行於平畫面之六角柱,與垂直於平畫面之切斷平面T,求其切口之投影圖,及切口之實形。(Fig. 154)

(1) 直線mnpqrs為切口之平面圖。

(2) 六角形m'n'p'q'r's'為切口之立面圖。

(3) 六角形 $M_1N_1P_1Q_1R_1S_1$ 為切口之實形。

30. 雜例

Fig. 155,乃所設立體爲垂直於立畫面之平面 tTt′ 所截,而求其切口之平面圖,側面圖,實形者.

Fig. 156,乃所設立體爲垂直於立畫面之平面 tTt′ 所截,而求其切口之平面圖,側面圖,實形者.

Fig. 157,乃所設立體爲垂直於平畫面之平面 tTt′ 所截,而求其切口之立面圖,實形者。

Tig. 158,乃構成十字形之中空方形管爲垂直於立畫面之平面 tTt′ 所截,而求其切口之平面圖,側面圖,實形者。

應用題42. 求所設多面體與直線之交點.

解 試取含定直線並垂直於平畫面或垂直於立畫面之平面,截所設多面體. 則其切口與定直線之交點,即所求點也.

Fig. 159 乃求正八面體 ABCDEF 與直線 MN 之交點 P, Q 者.

Fig. 160 乃求正八面體 ABCDEF 與垂直於平畫面

之直線MN之交點 P, Q, 及與垂直於立畫面之直線GH之交點K, L者。

作圖題43. 底在平畫面上之直圓柱為垂直於立畫面之平面T所截,試求切口之實形及展開。(Fig. 161)

(1) 將圓柱平面圖之圓等分為任意數,設其分點為a, b, c, d, ……, k。

(2) 由a, b, c, d,……, k所引投送線與平面T之直立跡Tt'交於a', b', c', d', ……, k'。

(3) 則以點a, b, c, d,……, k為平面圖,點a', b', c', d',……k', 為立面圖之點,乃所求切口上之點也。

(4) 將平面T繞Tt之周而轉動,使與平畫面一致時,求出A, B, C, D, ……, K之位置A_1, B_1, C_1, D_1, …… K_1, 將此各點順次聯成曲線。則此曲線卽為切口之實形。或求出以平行於Tt之G_2L_2為副基線之副平面圖A_1, B_1, C_1, D_1,……, K_1, 而將此諸點聯成曲線亦可。

(5) 在基線上取$N_2M_2N_2$令等於圓afk之周,將其等分為與(1)相同之數,由各分點至基線所引垂線,與由a', b', c', d', …… k', a'平行於基線所引直線交於A_2, B_2, C_2, D_2, ……, K_2, A_2.

(6) 聯結A_2, B_2, C_2, D_2, …… K_2, A_2作曲線。

(7) 則圖形 $N_2A_2B_2C_2 \cdots\cdots K_2A_2N_2$ 爲所截直圓柱下部之展開也。

應用題43. 軸平行於平畫面之直圓柱,爲垂直於平畫面或垂直於立畫面之平面所截,其切口之投影圖若何?(Fig. 162)

(1) 在圓柱上引平行於軸之直線。

(2) 求出上述之直線與切斷平面之交點. 則此諸點順次聯成之曲線,卽爲所求之切口。

Fig. 162 乃軸平行於兩畫面之圓柱,爲垂直於平畫面之平面所截,而求其切口者。

Fig. 163 乃軸傾斜於立畫面時,爲垂直於立畫面之平面所截,而求其切口者.

作圖題44. 底在平畫面上之直圓錐,爲垂直於立畫面之平面T所截,求其切口之投影圖,實形及展開.(Fig. 164)

求切口之投影圖時:

(1) 將立體平面圖之圓,等分爲任意數,設其分點爲 a, b, c, ……… .

(2) 由 a, b, c, …… 所引投送線,與基線之交點 a', b', c', ……,將其與 v' 聯結.

(3) 由 v'a', v'b', v'c', …… 與 Tt' 之交點 a_1', b_1', c_1', …

…所引投送線,設與 va, vb, vc,……交於 a_1', b_1', c_1',……。

(4) 則 a_1, b_1, c_1,……順次聯成之曲線,即所求切口之平面圖也。

(5) 欲求如 $vd-v'd'$, $vj-v'j'$ 之直線,與平面 T 之交點之平面圖 d_1, j_1,可由側面圖求之。

求切口之實形時,將切斷平面 T 繞其水平跡之周而轉動,令與平畫面疊合卽可。圖中曲線 $A_2B_2C_2$……L_2 卽切口之實形也。

求展開時:

(1) 取中心 V 半徑 $v'a'$ 之圓弧 GAG,令等於圓 abc 之周長。則扇形 VGAG 卽所設圓錐曲面之展開。

(2) 將圓弧 GAG 照等分圓 abc 之數而等分,設其分點爲 F, E, D, C,……。

(3) 在 VG, VF, VE,……上取 VG_1, VF_1, VE_1……,令等於 $vg_1-v'g'_1$, $vf_1-v'f'_1$, $ve_1-v'e_1'$,…之實長 $v'g'_1$, $v'r'$, $v'q'$,…。

(4) 聯結 G_1, F_1, E_1,…,以作曲線 $G_1F_1E_1 \cdots I_1H_1G_1$。

(5) 則圖形 $GG_1F_1E_1 \cdots I_1H_1G_1GA$ 爲所截直圓錐下部之展開也。

如本圖平面 T 與圓錐底面所成之角小於角 $v'g'a'$ 時,其切口成橢圓。

應用題44. 底在平畫面上之直圓錐,爲平行於曲面上之一直線VG,而爲垂直於立畫面之平面所截,求其切口之投影圖,實形及展開。(Fig. 165)

得與作圖題44同樣求之,惟其切口成拋物線。

應用題45. 底在平畫面上之直圓錐,爲垂直於基線之平面所截,求其切口之實形,側面圖,及展開。(Fig. 166)

此時之切口成雙曲線。

應用題46. 底在平畫面上之直圓錐,爲平行於立畫面之平面所截,求其切口之立面圖。(Fig. 167)

本題雖亦可如作圖題44求出圓錐曲面上之直線與切斷平面之交點而作切口之投象,但Fig. 167則以數多之水平面截切,而求之者。

因圓錐爲垂直於軸之平面所截,其切口爲圓,故以水平面截切所設圓錐,其切口應爲水平圓。水平面截圓錐所成之切口,與切斷平面之交點,易於求得,則切口之投影圖亦易作成之。

作圖題45. 軸平行於基線之直圓錐,爲垂直於平畫面之平面T所截,求切口之投影圖及其實形。(Fig. 168)

(1) 在圓錐面上引過頂點之直線。圖中計引12

條。

(2) 求此諸直線與平面tTt′之交點a,a′,b,b′,c,c′,……

(3) 則聯結a′, b′, c′, ……之曲線,即所求切口之立面圖也。

(4) 其次求出平行於tT之G_1L_1為新基線之副立面圖a_1, b_1, c_1, ……

(5) 則聯結a_1, b_1, c_1, ……之曲線,即成切口之實形.

應用題47. 求垂直於平畫面之直圓柱與所設直線之交點.(Fig. 169)

將含所設直線之直立面截圓柱,求其切口與所設直線之交點卽可。圖中mn—m′n′為所設直線p, p′, q, q′為交點.

應用題48. 求軸平行於基線之直圓柱與所設直線MN之交點.(Fig. 170)

將含所設直線並平行於圓柱之軸之平面截圓柱,以求其切口與所設直線之交點.

(1) 求出圓柱及MN之側面圖,各設為圓o″,直線m″n″。

(2) 由m″n″與圓o″之交點p″, q″,引平行於基線之線,使與m′n′交於p′, q′. 則p′, q′卽所求交點之立面圖也。

(3) 由p′, q′引投豎線,設與mn交於p, q,則p, q卽所

求交點之平面圖也.

應用題49. 求底在平畫面上之直圓錐與所設直線MN之交點.(Fig. 171)

將含定直線之直立面截圓錐而求其切口,再求此切口與定直線之交點p, p′, q, q′ 即可.

應用題50. 求定球O與直線MN之交點.(Fig. 172)

將含直線 MN 並垂直於立畫面(或平畫面)之平面截球O,而求其切口與 MN 之交點即可.

(1) 由o′至m′n′引垂線,設其足爲s′.

(2) 在o′s′上取s′s″,令等於自o至基線之距離.

(3) 設m′n′與圓o′交於a′, b′,作中心s″直徑a′b′之圓. 則此圓應爲垂直於含MN之立畫面之平面,既截球o,其切口以m′n′爲軸,而傾倒於立畫面上所佔之位置.

(4) 含MN並垂直於立畫面之平面,以m′n′爲軸,而傾倒於立畫面上時,求出MN之位置m″n″. (由m′, n′立m′n′之垂線,由其上之m″, n″至m′n′之距離,令等於由m, n至基線之距離即可.)

(5) 於是圓s″與m″n″之交點p″, q″,即爲所求點傾倒於立畫面之位置. 因之令其起立以達原位置,即得求其立面圖p′, q′,平面圖p, q.

應用題51. 求底在平畫面上之直圓錐與垂直於

立畫面之直線PP之交點(Fig. 173)

將含圓錐頂點V與PP之平面截圓錐,則與曲面之交線應為直線,故求得此交線與pp之交點p即可.

圖中v'm',vm為含V與PP之平面與圓錐曲面之交線之立面圖,平面圖. 故vm與pp之交線p即所求交點之平面圖也.

應用題52. 求底在平畫面上之直圓錐與平行於基線之直線MN之交點.(Fig. 174)

照前題求出含MN與圓錐頂點之平面所截圓錐之切口,則所求交點易得求之. 此時因MN平行於基線,故作側面圖,則作圖自易.

圖中p,q為所求點之平面圖,p',q'為立面圖.

31. 雜例

Fig. 175乃求底在平畫面上之直圓錐與傾斜於兩畫面之直線之交點者. 此圖乃用含定直線並垂直於立畫面之平面截切而求之者.

Fig. 176乃求底在平畫面上之直圓錐與平行於平畫面之直線之交點者. 此圖用含定直線之水平面截圓錐而求之.

Fig. 177乃球O為垂直於平畫面之平

面 T 所截,以求其切口之平面圖,立面圖,及實形者。求切口上之點時,用任意之水平面截球而作圖。

Fig. 178 乃圓柱之兩端有圓板之立體,爲垂直於立畫面之平面所截,而求其切口之側面圖者。

Fig. 179 乃所設立體爲垂直於立畫面之平面所截,而求其切口之平面圖,側面圖,實形者。

Fig. 180 乃所設立體爲垂直於立畫面之平面 T 所截,而求其切口之平面圖,實形者。

作圖題 46. 求直立於平畫面上之正四角柱爲傾斜於兩畫面之平面所截切口之投影圖。(Fig. 181.)

(1) 由 c 作平行於 tT 之線,設與基線之交點爲 1。

(2) 由 1 引投送線,設與 Tt' 之交點爲 1'。

(3) 由 1' 作平行於基線之線,設與 $c'c_1'$ 之交點爲 e'。

(4) 則 e' 應爲以 c 爲平面圖之稜與平面 T 之交點之立面圖。

(5) 用同法求出以 b, d 爲平面圖之稜與平面 T 之

交點之立面圖 i', f'。

(6) 因以 a 爲平面圖之稜與平面 T 不相交,故知平面 T 截角柱之上底面。

(7) Tt' 與 $a_1'c_1'$ 之交點爲 r' 由 r' 引垂於基線之線,由其足 r 引平行於 Tt 之線,設與 abcd 交於 g, h 則 gh 應爲平面 T 與角柱上底面之交線之平面圖. 因此 ghbcd 應爲斷面之平面圖。

(8) 由 g, h 引投送線,設與 a_1' c_1' 各交於 g', h'。

(9) 則五角形 g'h'i'e'f' 應爲斷面之立面圖.

作圖題 47. 直立於平畫面上之正四角錐,爲傾斜於兩畫面之平面 T 所截,求其切口之投影圖。(Fig. 182)

(1) 由頂點之平面圖 v, 引平行於 Tt 之線,設與基線交於 u。

(2) 由 u 所引投送線與 Tt' 交於 u', 由 u' 平行於基線所引之線與 vv' 交於 o'。

(3) 則 o' 應爲過頂點 V 之直立線與平面 T 之交點之立面圖.

(4) 延長斜稜之平面圖 avc, 與 Tt 交於 m。

(5) 由 m 所引投送線與基線交於 m'.

(6) 則直線 m'o' 與 v'a'. v'c' 之交點 f', h', 應爲稜 VA,

VC與平面T之交點之立面圖。因此,由 f', h' 所引投送線與 va, vc 之交　f, h, 乃其平面圖也。

(7) 應用同法,求出稜VB與平面T之交點g,g。

(8) 因Tt與底之平面圖 abcd 相交,故平面 T 應截切底面。於是設Tt與 abcd 之交點爲e, i, 由此引投送線與基線交於e', i'. 則五角形 efghi, e'f'g'h'i',應各爲切口之平面圖及立面圖.

作圖題48. 定正八面體,爲平行於基線之平面T所截,求其切口之投影圖.(Fig. 183)

(1) 設垂直於基線之新投影面,求在此平面上之八面體之投影圖(側面圖) a'' b''c''d''e''f'', 及平面 T 之跡 $t't_1''$.

(2) 於是立體各稜之側面圖與 $t't_1''$ 之交點m'',n'', p'',q'',r'',s'',應爲立體各稜與平面T之交點之側面圖.

(3) 由側面圖,求出各交點之平面圖 m, n, p, q, r, s, 及立面圖 m', n', p', q', r', s'

(4) 則六角形 mnpqrs, m'n'p'q'r's',應爲所求切口之平面圖及立面圖.

作圖題49. 定正八面體,爲傾斜於兩畫面之平面T所截,求其切口之投影圖。

(Fig. 184)

(1) 以垂直於平面圖T之水平跡Tt之G_1L_1爲新基線之直立面,求在其上立體之副立面圖a″b″c″d″e″f″及平面T之跡T_1t''。

(2) 於是立體各稜之副立面圖與T_1t''之交點m″,n″,p″,q″,r″,s″,應爲各稜與平面T之交點之副立面圖.

(3) 由副立面圖求出交點之平面圖m, n, p, q, r, s,及立面圖m′, n′, p′, q′, r′, s′.

(4) 則六角形mnpqrs, m′n′p′q′r′s′,應爲所求切口之平面圖及立面圖.

作圖題50. 直立於平畫面上之直圓錐,爲傾斜於兩畫面之平面T所截,求其切口之投影圖。(Fig. 185)

通過所設圓錐頂點之曲面,求出其上數直線與平面T之交點,聯結此諸點而作曲線卽可。至交點之求法,則與Fig. 184完全相同。

注意 Fig 184, 185中求T_1t''時,設G_1L_1與tT交於T_1.又由G_1L_1與基線之交線z至基線引垂線,設與Tt′交於z′。更在由z至G_1L_1所引垂線上,取zz″,令等於zz′則聯結T_1與z″之直線,卽T_1t''也.

第六章

相貫體與展開

32. 相貫體 二或二以上之立體相交所成之立體,曰**相貫體** Penetration。本章就關於相貫體之作圖題而說明之.

作圖題51. 已知直立於平畫面上之正方柱與軸平行於兩畫面之正方柱,求其交切線。

I 直立角柱之稜貫通他一角柱之點.(Fig. 186)

(1) 作二立體之側面圖 $a''b''c''d''a_1''b_1''c_1''d_1''$, $e''f''g''h''$.

(2) 設 $a''a_1''$, $c''c_1''$, 與 $e''f''g''h''$ 之交點爲 $2''$, $6''$, $9''$, $11''$.

(3) 於是 $2''$, $6''$, $9''$, $11''$ 爲直立角柱之側稜 AA_1, CC_1 貫通他一角柱之點之側面圖. 因而由此以求其平面圖 2, 6, 9, 11 及立面圖 $2'$, $6'$, $9'$, $11'$.

II 軸平行於兩畫面之角柱貫通他一角柱之點。

(1) 軸平行於兩畫面之角柱,其側稜之平面圖,與他一角柱之平面圖abcd交於1, 7, 5, 12, 4, 10, 3, 8.

(2) 於是因1, 7, 5, 12, 4, 10, 3, 8爲所求交點之平面圖,故由此以求其立面圖1′, 7′, 5′, 12′, 4′, 10′, 3′, 8′。

I, II 求得之點順次聯結所成之多角形,卽爲所求交切線之投影圖。

作圖題52. 已知直立於平畫面上之四角柱,與軸傾斜於平畫面而平行於立畫面之四角柱,求其交切線。(Fig. 187)

I 傾斜於平畫面之角柱,其稜與他一角柱相交之點。

(1) 傾斜於平畫面之角柱,其稜之平面圖與直立角柱之平面圖abcd交於1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11。

(2) 由1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11引投送線,設與此對應之傾斜角柱之稜之立面圖交於1′, 2′, 4′, 5′, 7′, 8′, 10′, 11′.

(3) 則以1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11爲平面圖,1′, 2′, 4′, 5′, 7′, 8′, 10′, 11′爲立面圖之點,卽所求點也。

II 直立角柱之稜與他一角柱相交之

點.

(1) 因以a,c與平面圖之稜相交,故用含此各稜而平行於立畫面之平面截切他一角柱,而設其交線爲$mn-m'n'$, $pq-p'q'$。

(2) $m'n'$, $p'q'$ 與以a,c爲平面圖之稜之立面圖交於$3'$, $6'$, $9'$, $12'$.

(3) 於是以a爲平面圖,$3'$, $6'$爲立面圖之點,及以c爲平面圖,$9'$, $12'$爲立面圖之點,應爲所求之點。

故以上所得交點之立面圖聯結所成之多角形$1'2'3'4'5'6'$, $7'8'9'10'11'12'$,卽所求立面圖也.

應用題53. 求直立於平畫面上之正方柱與一對角線垂直於平畫面之正八面體之交切線。(Fig. 188)

應用題54. 求一對角線垂直於平畫面之正八面體與軸平行於兩畫面之正方柱之交切線。(Fig. 189)

作圖題53. 求直立於平畫面上之正六角錐與軸垂直於立畫面之三角柱之交切線。(Fig. 190)

I 求角柱之稜與角錐相交之點時,以含角柱之稜與角錐之頂點之平面截角錐. 則此切口與其稜之交點,卽爲所求

之點。

(1) 聯結 v', h', 設與基線交於 n'。

(2) 由 n' 所引投送線,與六角形 abcf 交於 n, p.

(3) 引 vn, vp, 與 hh_1 交於 4, 7。

(4) 於是 4, 7 爲以 h_1 爲立面圖, hh_1 爲平面圖之角柱之稜與角錐相交點之平面圖. 應用同法,以求其他各稜與角錐相交點之平面圖.

II 求角錐之稜與角柱相交之點時,以含角錐之稜而垂直於立畫面之平面截角柱。則此切口與其稜之交點,卽爲所求之點。

(1) 設 v'a' 與三角形 g'h'i' 交於 5', 12'.

(2) 由 5', 12' 引投送線,與 va 交於 5, 12.

(3) 於是以 5', 12' 爲立面圖, 5, 12 爲平面圖之點,應爲稜 VA 與角柱相交之點. 應用同法,以求其他角稜與角柱相交之點.

I, II 求得之點 1, 2, 3,……13, 14 順次聯結所成之多角形,應爲所求交切線之平面圖。

應用題55. 求直立於平畫面上之正六角錐與軸

平行於兩畫面之正方柱之交切線(Fig. 191)

作圖題54. 已知直立於平畫面上之圓柱與軸平行於兩畫面之圓柱,求其交切線及二者之展開。

I　二立體之交切線。(Fig. 192)

(1)　在水平圓柱上隔等距離以引直線(本圖引12條),設其平面圖與直立圓柱之平面圖交於m, n, p, q, r, s, t。

(2)　由m, n, p, q, r, s, t所引投送線,與其所對應之水平圓柱上之直線之立面圖,各交於m', n', p', q', r', s', t'。

(3)　則聯結m', n', p', q', r', s', t'之曲線,應爲所求交切線之立面圖。

II　直立圓柱之展開。(Fig. 193)

(1)　在基線上取$B_1D_1B_1$,令等於Fig. 192中圓amc之長,並取垂直於其上之A_1B_1,令等於a'b',作矩形$A_1B_1B_1A_1$。

(2)　在$B_1D_1B_1$上順次取B_13, 32, 21, $1J_1$,……,令等於圓弧aq, qp, pn, nm……。

(3)　由3, 2, 1, J_1,……立B_1B_1之垂線,與由q', p'(r')n'(s'), m'(t'),……所引基線之平行線,各交於Q_1, P_1(R_1), N_1(S_1), M_1(T_1),……。

(4)　聯結M_1, N_1, P_1, Q_1,……,作曲線。

(5) 則據上述之作法所得之圖形,應爲直立圓柱之展開.

III 水平圓柱之展開.(Fig. 194)

(1) 取E_1E_1,令等於Fig. 192中水平圓柱底周之長,將其等分,數與前同(12),設其分點爲II, I, 0, I,……。

(2) 由E_1, II, 0, I,……立E_1E_1之垂線E_1Q_1, IIP_1, IN_1, $0M_1$, IN_1,……,其長順次令其等於eq, 2p, 1n, 0m, 1n,……。

(3) 聯結Q_1, P_1, N_1, M_1, N_1,……,作曲線.

(4) 則圖形$E_1Q_1P_1N_1M_1N_1$……Q_1E_1,應爲水平圓柱左半分之展開. 右半分之展開,得同樣求之。

作圖題55. 已知直立於平畫面上之圓錐,與軸平行於兩畫面之圓柱,求其交切線及二者之展開.

I 二立體之交切線(Fig. 195)

(1) 求所設圓柱,圓錐之側面圖,得圓0″,三角形c″v″d″.

(2) 由v″引圓o″之切線v″1″,設其切點爲m″。

(3) 以v″1″爲側面圖之圓錐,求其上直線之平面圖v1,立面圖v′1′。

(4) 由m″引平行於基線之線與v′1′交於m′,更由m′引基線之垂線,與v1交於m。

(5) 則點m, m′應爲所求交切線上之點.

(6) 其次,引任意之直線v′2″,與圓o″交於l″, n″.

(7) l′, n″兩點爲直線上之點之側面圖,而此直線乃在以v″2″爲側面圖之圓錐上,應用與上述同樣方法,求出l″, n″之立面圖l′, n′,平面圖l, n.

(8) 則點l, l′, n, n′又應爲所求交切線上之點. 應用同法,求出交切線上之點,順次聯結此諸點而引曲線,可得所求交切線之平面圖及立面圖.

II 圓錐之展開(Fig. 196)

(1) 以Fig. 195中v′a′爲半徑,V_1爲中心,作圓弧C_1C_1,令其長等於圓acb之周.

(2) 在弧C_1C_1上,取弧C_1I, I II, II III, III VI, IV A_1,令各等於弧c1, 12, 23, 34, 4a.

(3) 在V_1I, V_1II, V_1III,…上分別取V_1M_1, V_1L_1 (V_1N_1), V_1K_1(V_1P_1)…,令各等於vm－v′m′, vl－v′l′(vn－v′n′), vk－v′k′ (vp－v′p′),……之實長.

(4) 聯結M_1, L_1, K_1……作曲線. 則此曲線應爲圓錐展開時二立體之交切線形.

III 圓柱之展開(Fig. 197).

圓柱之展開,得仿作圖題54中水平圓柱之展開以求之.

(1) $G_1H_1G_1$ 等於 Fig 195 中圓 o'' 之周.

(2) G VII, VII VI, VI V,…等於弧 $r''p''$, $p''n''$, $n''m''$,….

(3) G_1R_1, VIIP_1, VI N_1,……等於 $g'r'$, $7'P'$, $6'n'$,…….

應用題56. 已知二直圓柱間接續截頭圓錐之立體,求其展開.(Fig. 198)

Fig. 199, 200 爲將圓柱展開者.

Fig. 201 爲將截頭圓錐展開者.

應用題57. 有軸互相直交之二圓柱用圓錐接續之立體,試分別求其展開.(Fig. 202)

Fig. 203, 205 爲將圓柱展開者.

Fig. 204 爲將圓錐面展開者. 此時因曲線 $D_1C_1D_1$, $F_1E_1F_1$ 非圓弧,故求 D_1, M_1, P_1,……F_1, N_1, Q_1,……之點時,可視錐面 $vdm-v'd'm'$, $vmp-v'm'p'$, $vpr-v'p'r'$, …… 爲由三角形構成者以求之. 是乃因二點間之距離較小時,弧長與弦長幾近相等,本此理由,故可如上法求之.

作圖題56. 已知軸垂直於平畫面之正四角錐與一對角線在其軸上之正八面體,求其交切線.(Fig. 206)

I 求角錐之稜與正八面體相交之點時,可用含此稜之直立面截切正八面體,而求與此切口之交點.

(1)　由 va 與 eh 之交點 m 所引投送線,與 e'h' 交於 m'.

(2)　引 i'm', j'm', 設與 v'a' 交於 1', 9'.

(3)　由 1', 9' 所引投送線,設與 va 交於 1, 9.

(4)　於是以 1, 9 爲平面圖, 1', 9' 爲立面圖之點,應爲稜 VA 與正八面體相交之點. 應用同法,以求角錐之他稜與正八面體相交之點.

II　求正八面體之稜與角錐相交之點時,可用與 I 相同之法以含稜之直立面截切角錐.

(1)　由 ve 與 ab 之交點 n 所引投送線,與基線交於 n'.

(2)　引 v'n', 與 e'i', e'j' 交於 2', 10'.

(3)　由 2', 10' 所引投送線,與 ve 交於 2, 10.

(4)　於是以 2, 10 爲平面圖, 2', 10' 爲立面圖之點,應爲稜 IE, JE 與角錐相交之點. 應用同法,以求他稜與角錐之交點.

根據 I, II 求得之點,順次聯結以作多角形,則可得所求交切線之投影圖.

應用題58. 已知底在平畫面上之正方柱與正方錐,求其交切線.(Fig 207)

應用題59. 已知一面在平畫面上之四面體與軸垂直於立畫面之圓柱,求其交切線.(Fig. 208)

應用題60. 底在平畫面上之圓錐與軸平行於兩畫面之圓柱,求其交切線。(Fig. 209)

33. 圓錐及圓柱交切線之特別者。

同一之球內切於二圓柱,或二圓錐,或一圓柱與一圓錐時,其交切線爲二橢圓。而二立體之軸平行於一投影面時,在其投影面上之交切線之投影爲二直線。

Fig. 210 乃同一之球內切於軸垂直於平畫面之圓錐與軸平行於兩畫面之圓柱時,以求其交切線者。故交切線之立面圖,應爲二直線 m′n′, p′q′。

Fig. 211 乃求軸垂直於平畫面之圓錐與軸平行於兩畫面之圓錐之交切線者。

作圖題57. 已知底在平畫面上之正三角錐與中心在其軸上之球,求其交切線之投影圖。(Fig. 212)

因球之中心在角錐之軸上,角錐之三斜面與球之交線,三者均同形。

求交切線上之點時,用任意之水平面

截切二立體。於是因角錐之切口爲正三角形,球之切口爲圓,故切口之交點,卽所求交切線上之點,易得求之。

求角錐之稜 VC 與球之交線之平面圖 s, p, 立面圖 s′, p′ 時,可由側面圖之交點 s″, p″ 求之。

求與斜面VAB之交切線上之最高點 h, h′, 最低點 l, l′ 時,可由側面圖之交點 h″, l″ 求之。

應用題61. 求直立於平畫面上之正六角柱與球之交切線。(Fig. 213)

應用題62. 求軸垂直於平畫面之直圓錐與球之交切線。(Fig. 214)

應用題63. 求直立於平畫面之直圓柱與直圓錐之交切線。(Fig. 215)

第七章

陰影

34.**光線**. 發光點發光時,其光之通路曰光線 Ray of light. 光線普通均認爲直進。由太陽等遠距離而來之光線皆平行,故名之曰**平行光線** Parallel rays. 反之,由近距離之發光體而來之光線皆不平行,故名之曰**輻射光線** Radiant rays. 例如電燈之光線是也。

本章祇就平行光線而說明之。

35.**陰影**。

一發光體照於某物體時,則其面上可分受光部分及不受光部分。受光之面曰**光面** Illumined Side,不受光之面曰**陰面** Dark Side。而光面與陰面之境界線曰陰

線 Line of Shade。

發光體照於某物體,若其間以他物體遮斷其光,則某物體之面上生不受光之暗部分,是曰**影** Shadow.

36.投影面上之影。

普通表示立體之投影圖時·以立體置於第一二面角內爲原則。故解關於陰影之問題時,普通亦以立體置於第一二面角內。是以立體投影於投影面時,祇求第一二面角內之影,而投影面則假定爲不透明者。

作圖題58.　已知光線之方向R,求直立於平畫面之直線AB在投影面上之影。(Fig. 216)

(1)　由 a, a′ 各引平行於 r, r′ 之線 aa_1, $a'a_1'$。則 aa_1, $a'a_1'$ 爲過A之光線之平面圖,立面圖。

(2)　求出直線 $aa_1-a'a_1'$ 之水平跡 a_1。

(3)　則直線 ba_1 應爲AB投於平畫面之影. 然因 a_1 在立畫面之後方,故AB之一部分,亦應投影於立畫面.

(4) 由 ba_1 與基線之交點 a_2 立基線之垂線,與 $a'a_1$ 交於 a_2'。則 a_2a_2' 應爲立畫面上之影。故 ba_2a_2' 爲所求之影。

作圖題59. 已知光線之方向R,求直立於平畫面上之正六角錐之陰影。(Fig. 217)

(1) 求過頂點V之光線之水平跡 v_1。圖中因 v_1 在立畫面之後方,故知角錐之一部分投影於立畫面。

(2) 求過頂點V之光線之直立跡 v_2'。

(3) 引 v_1b, v_1d, 與基線交於 m, n。

(4) 於是 bmnd 爲在平畫面上之影,而三角形 $mv_2'n$ 爲在立畫面上之影。

(5) 由投影面上之影細辨之,可知面 VBC, VCD 爲陰面。

作圖題60. 已知光線之方向R,求直立於平畫面之正六角柱之陰影。(Fig. 218)

(1) 由 a, a' 引平行於光線 r, r' 之線 $aa_2-a'a_2'$。由 aa_2 與基線之交點 a_2 至基線所引垂線,設與 $a'a_2'$ 交於 a_2'。則 aa_2a_2' 應爲以a爲平面圖之側稜之影。

(2) 引過 b, b', c, c', d, d' 之光線,將其直立跡 b_2', c_2', d_2' 順次聯結。

(3) 因d_2'在平畫面下,故知 d, d' 點之影在平畫面上. 因此設$d'd_2'$與基線之交點爲d_1', 由d_1'所引投送線,與由 d 平行於光線之平面圖 r 所引之平行線,交於d_1. 則dd_1乃以d爲平面圖之稜之影也。

(4) 設$c_2'd_2'$與基線之交點爲m, 引md_1. 於是圖形$aa_2a_2'b_2'c_2'md_1d$應爲投影面上之影。

(5) 由上述之影細辨之,可知以 ab, bc, cd, 爲平面圖之側面應爲陰面.

作圖題61. 已知光線之方向R, 求直立於平畫面上之圓錐之陰影。(Fig. 219)

(1) 引過頂點V之光線,求其水平跡v_1。

(2) 由v_1至圓錐底之平面圖之圓acb引切線,設其切點爲c, d 則vcbd, 應爲陰面之平面圖. 由此求立面圖v'c'b'd'。

(3) 因v_1在立畫面之後方,故求過頂點光線之直立跡v_2', 將v_1c, v_1d 與基線之交點m, n與之聯結. 則圖形cmndb, 應爲平畫面上之影,而三角形$mv_2'n$應爲立畫面上之影.

作圖題62. 已知光線之方向R, 求直立於平畫面上之圓柱之陰影。(Fig. 220)

(1) 平行於光線之平面圖,引切線cc_2, d_1d, 切於圓

柱之平面圖之圓o,設其切點各爲c,d. 則以半圓cbd爲平面圖之圓柱,其曲面應爲陰面. 由此求其立面圖g'e'b'd'h'f'。

(2) 於是以c, d爲平面圖之圓柱,其上之二直線與半圓cbd－c'b'd'之影所圍者,即爲所求之影,

(3) 以c, d爲平面圖之圓柱,求其上之直線之影cc_2c_2', dd_1。

(4) 過c, c', d, d'之光線之水平跡c_1, d_1,聯結之得c_1d_1, 以之爲直徑所作之半圓$c_1m_1d_1$, 應爲半圓cbd－c'b'd'投於平畫面之影. 然此半圓之一部分,因在立畫面之後方,故在後方者不成平畫面上之影. 卽設此半圓與基線之交點爲m_1, 則圓弧d_1m_1乃平畫面上之影.

(5) 由m_1引平行於dd_1之線,與半圓cbd交於m,更設由m所引投送線與a'b'交與m'。於是可知圓弧cbm－c'b'm'投影於立畫面上. 因之求過此圓弧上數點之光線之直立跡,而聯結之作曲線$c_2'p_2'b_2'm$, 則可得立畫面上之影.

(6) 由上所述,求得之$cc_2m_1d_1db$爲平畫面上之影, $c_2c_2'p_2'b_2'm_1$爲立畫面上之影.

作圖題63. 已知光線之方向R,求Fig. 221所示立體上之影。

觀圖可明六角板下面之緣 afe—a'f'e', 應投影於方柱。於是求過 afe—a'f'e' 上之點之光線與方柱之交點,將其順次聯結而引直線,則可得所求之影。圖中之 $m'p_1'f_1'q_1'r_1'n'$ 爲所求影之立面圖。

作圖題 64. 已知光線之方向 R, 求 Fig. 222 所示立體上之影。

觀圖可明方板下面之緣 adc—a'd'c' 投影於直立圓柱. 於是引過 adc—a'd'c' 上數點之光線,求其與圓柱之交點。聯結之以作曲線,則可得所求之影。圖中在曲線 $m_1'n_1'p_1'd_1'q_1'r_1'$ 上方之部分,乃所求影之立面圖也。

作圖題 65. 已知光線之方向 R. 求 Fig. 223 所示立體之陰影。

圓錐,角柱之陰面,及投影面上之影,得據既述之作圖題以求之。玆將圓錐投於角柱之影之作圖法說明如次:

(1) 由過頂點 V 之光線之水平跡 v_1 至圓 ab 所引

切線與六角形vpqr交於i, j, 更設由此所引投送線與基線交於i', j'。

(2) 用含六角柱上底面之水平面,截切圓錐,求其切口,設其立面圖爲直線m'n', 平面圖爲圓mn。

(3) 求過頂點V之光線與含六角柱上底面之水平面之交點v_3, v_3'.

(4) 由v_3至圓mn引切線,與pq交於e_1, f_1, 更設由e_1, f_1所引投送線與p'q'交於e_1', f_1'.

(5) 因q, p在cv_1d之中,故由此平行於光線之平面圖r引平行線,與圓錐之陰線之平面圖vc,vd交於h, g.

(6) 由h, g所引投送線,與v'c', v'd'交於h', g', 由h',g'平行於光線之立面圖r'引平行線,設與以q,p爲平面圖之角柱之稜之立面圖,各交於h_1', g_1'.

(7) 於是可知圖形$ipe_1v_3f_1qj$爲所求影之平面圖,而$i'g_1'e_1'v_3'f_1'h_1'j'$爲立面圖。

斜 投 影 圖

1. **斜投影圖** 投影線平行而傾斜於投影面時之投影圖曰斜投影圖 Oblique Projection 已見於緒論。 Fig. 224 之圖形 abcf, 所以示平面 P 上立體 ABCF 之斜投影圖者。

投影線與投影面成 45°之角時,平行或垂直於投影面之直線,其投影圖等於原線之實長。 故在斜投影圖,投影線假定與投影面成 45°之角者。

斜投影圖不若正投影圖須求二種投影圖,乃祇以一投影圖表示空間圖形者。故欲如正投影圖求出自投影圖至投影面之各點之位置,雖不可能,而得定空間圖形,卽立體之形狀。 何則,垂直或平行

於投影面之直線,因其投影圖等於實長。故得由此以求其實形也。

此種投影圖之求法,比較的尙簡單,普通觀察成圖易得想像其形,故實用上對物取影,常廣用之。

作圖題1. 試作 Fig. 225 所示角柱之斜投影圖。

Fig. 226 之1所示圖形,乃將ABCD平行置於投影面時,而求其斜投影圖者。

(1) 作與矩形abcd同形之矩形 A'B'C'D'。

(2) 由D'引與A'D'成任意角 θ 之直線 D'E',令其長等於d'e.'

(3) 由E'所引平行於C'D'之線,與由C'所引平行於D'E'之線,交於H'。

(4) 由H'所引平行於B'C'之線,與由B'所引平行於C'H'之線,交於G'。

(5) 作矩形E'H'G'F',更引A'F', B'G'。

(6) 於是由上述方法所得之圖形,即所求斜投影圖之一也。

上述之 θ 雖屬任意,而吾人因常用三

角板製圖,故宜取便利角。即 θ 以取45°,60°,30°等角爲較便。

Fig. 226之II,乃將面ABCD平行置於投影面,而取θ爲30°以作圖者。

Fig. 226之III,乃將面ABGF平行置於投影面,而取θ爲60°以作圖者。

Fig. 226之IV,乃將面ADEF平行置於投影面,而取θ爲45°以作圖者。

作圖題2. 求圓柱之斜投影圖。

作圓柱之斜投影圖時,先作包圓柱之方柱,再作其投影圖。而由此斜投影圖以作圓柱之斜投影圖。

Fig. 227乃將圓柱之軸,垂直置於投影面以作圖者. X'Y'爲軸之斜投影圖,以X',Y'爲中心而作與圓柱同半徑之二圓,再切之以引公切線。

Fig. 228乃將圓柱之軸,平行置於投影面以作圖者。A'B'C'D'E'F'G'H'爲包圓柱之方柱之斜投影圖。作內切於平行四

邊形 A'B'C'D', E'F'G'H' 之橢圓,再切之以引公切線。

應用題1. 試作 Fig. 229 之正投影圖所示立體之斜投影圖。

本問題不過爲方柱組合而成者,故得與 Fig. 266 完全同樣而作圖。

圖中之 H'X', H'Y' 各等於 hx, hy.

應用題2. 試作 Fig. 230 之正投影圖所示立體之斜投影圖.

應用題3. 試作 Fig. 231 之正投影圖所示立體之斜投影圖.

透　視　圖

1. **透視圖**　視點至物體之距離有限時之投影圖,曰透視圖 Perspective drawing, 已於緒論中述及之矣。

透視圖中之投影面,特稱**畫面**。然以單憑畫面而作圖,至感不便,故更設一垂直於此之平面,是曰**基面** Ground plane. 而畫面與基面之交線曰基線 Ground line。

畫面,基面與正投影圖之立畫面,平畫面相當。

視點在畫面上之正投影圖稱曰**心點** Visual centre, 在基面上之正投影圖曰**停點** Stand-point, 過心點平行於基線之直線曰地平線 Horizon。

心點,停點乃正投影圖中視點之立面圖,平面圖也。

Fig. 232 中平面 P.P., G.P. 各爲畫面,基面,而直線GL爲基線。又E, V_c, S各爲視點,心點及停點。

將畫面繞GL之周向後方迴轉,使與基面一致,則爲Fig. 233。

透視圖中視點常以置於畫面之前方空間圖形,卽立體,常以置於後方爲原則卽正投影圖篇所述視點,置於第一二面角內,立體置於第二二面角內。

2. **點之透視圖** Fig. 234 中A爲空間中之一點, a 爲在 A 之基面上之正投影圖(平面圖), a′爲在 A 之畫面上之正投影圖(立面圖)。

視點E與A聯結,設與畫面交於A′,則A′爲A之透視圖。

心點 V_c 與 a′ 聯結,則此應爲視線EA之立面圖. 又停點S與a聯結,則此應爲視線EA之平面圖。故A應在 V_ca′ 上,亦在由Sa與基線之交點 a_1 所立基線之垂

線上。A′適與正投影圖中直線EA之直立跡相當。故求點之透視圖,與求此點與視點聯結直線之直立跡同。

將畫面繞基線之周向後方迴轉,使與基線重合,則應如Fig. 235。

直線之透視圖。直線之透視圖,仍應爲一直線。故求直線之透視圖時,祇須求其兩端二點之透視圖,而引聯結之直線卽可。

Fig. 236乃求直線AB之透視圖A′B′者卽A,B,與視點E分別聯結,與畫面交於A′, B′,再將A′, B′聯結之卽可。圖中ab, a′b′各爲AB之平面圖,立面圖。將畫面繞基線之周向後方迴轉,使與基面一致,則應如Fig. 237。

作圖題1. 已知在基面上矩形ABCD之平面圖abcd,求其透視圖.(Fig. 239)

(1) 圖中ad, bc因垂直於基線,故延長之設與基線之交點各爲a′, b′,則a′爲A, D之立面圖,b′爲B, C之立

面圖。

(2) 將a與停點S聯結,設與基線GL交於a_1。

(3) 將a'與心點Vo聯結,設與由a_1至基線所引垂線交於A'。

(4) 於是A'爲A點之透視圖。應用同法,以求B,D,C之透視圖B',C',D',則可得矩形ABCD之透視圖A'B'C'D'。

AB,CD因平行於基線,故知其透視圖A'B',C'D'亦平行於基線。

作圖題 2. 已知平行於基面之矩形ABCD之平面圖abcd,立面圖a'b',求其透視圖。(Fig. 241)

求出A,B,C,D,四點之透視圖A',B',C',D',而順次聯結之,以作四邊形A'B'C'D'卽可。

AB,CD因平行於基線,故知其透視圖A'B'C'D'亦平行於基線。

作圖題 3. 已知直立於基面上之四角柱之平面圖efgh,立面圖a'b'g'f',求其透視圖。(Fig. 243)

求出角柱各角點之透視圖 $A', B', C', D', E', F', G', H'$,而順次聯結之,以作圖形卽可。

作圖題 4. 已知底在基面上之三角錐之平面圖 v-abc 立面圖 $v'c'b'$,求其透視圖 (Fig. 245)

求出角錐各角點之透視圖,聯結之,卽可得所求,故作圖之說明從略.

作圖題 5. 已知基面上垂直於基線之一直線上所直立之等長直線之平面圖 a, c, e, g, i, 求其透視圖.(Fig. 246)

(1) 將停點S與 a, c, e, g, i, 聯結,設與基線各交於 a_1, c_1, e_1, g_1, i_1.

(2) 直線ai之延長線與基線交於M,在其上取MN,令與所設直線之實長相等.

(3) 由 a_1, c_1, e_1, g_1, i_1 至基線引垂線,各與 MVc 交於 B', D', F', H', J', 與 NVc 交於 A', C', E', G', I'.

(4) 於是直線 $A'B'$, $C'D'$, $E'F'$, $G'H'$, $I'J'$, 卽所求透視圖也.

作圖題 6. 已知在基面上之圓之平

面圖圓o,求其透視圖(Fig. 247)

求圓之透視圖時,可先求出圓周上數點之透視圖而聯結之以作曲線,卽得。在Fig. 247乃將外切於定圓之正方形之切點,及正方形之對角線,與圓之交點之透視圖求出,而聯結之以作曲線者。

作圖題 7. 已知平行於基面之圓之平面圖圓o立面圖a′b′,求其透視圖。(Fig. 248)

作圖之法,得與作圖題6全同。故作圖之說明從略。曲線I′J′K′L′,卽所求之透視圖也.

作圖題 8. 已知直立於基面上之圓柱之平面圖圓o,立面圖a′b′b′a′,求其透視圖。(Fig. 249)

求出圓柱二底面之透視圖,平行之以引二公切線卽可。就Fig. 249卽可知其大要.