Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2019**

Singularitätentheorie

Vorlesung 15

Die Multiplizität

Es sei
$$f \in K[X_1, \ldots, X_n]$$
mit der homogenen Zerlegung (in der Standardgraduierung)
$$f = \sum_d f_d.$$
Es sei $f(0) = 0$, d.h. der konstante Term f_0 sei 0.

Wir interessieren uns dafür, wie das Schnittverhalten von $V(f)$ mit einer Geraden $G \subseteq K^n$ aussieht. Ein Extremfall ist, dass die Gerade ganz auf $V(f)$ liegt, das kann bei $f \neq 0$ (was wir annehmen) nicht für alle Geraden gelten (bei einem unendlichen Körper). Eine jede Gerade lässt sich durch einen Aufpunkt und einen Richtungsvektor parametrisieren, d.h. sie ist das Bild einer affin-linearen Abbildung
$$\alpha\colon K \longrightarrow K^n,\, t \longmapsto t \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$
mit
$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \neq 0.$$
Wir betrachten die Hintereinanderschaltung
$$K \xrightarrow{\alpha} K^n \xrightarrow{f} K\,.$$
Daraus sieht man, dass für einen Punkt $t \in K$ genau dann
$$\alpha(t) = V(f) = f^{-1}(0)$$
gilt, wenn t eine Nullstelle des Polynoms $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ in der einen Variablen t ist. Den Durchschnitt von G mit $V(f)$ erhält man also dadurch, dass man die Nullstellen von $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ beschreibt. Der Extremfall $G \subseteq V(f)$ liegt genau dann vor, wenn die Einsetzung $f_\alpha := f \circ \alpha$ das Nullpolynom ist. Andernfalls hat nach Korollar 19.9 (Lineare Algebra (Osnabrück 2017-2018)) die Einsetzung maximal so viele Nullstellen, wie der Grad des eingesetzten Polynoms angibt. Über einem algebraisch abgeschlossenen Körper stimmt die Anzahl der mit Vielfachheiten gezählten Nullstellen mit dem Grad überein.

Beispiel 15.1. Wir betrachten die Neilsche Parabel $V\left(X^2 - Y^3\right) \subseteq K^2$ und bestimmen die Durchschnitte mit den Geraden G_α, die durch

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 t + b_1 \\ a_2 t + b_2 \end{pmatrix}$$

parametrisiert sind. Die Einsetzung ergibt die Bedingung

$$-a_2^3 t^3 + \left(a_1^2 - 3a_2^2 b_2\right) t^2 + \left(2a_1 b_1 - 3a_2 b_2^2\right) t + b_1^2 - b_2^3 = 0$$

für t. Bei $a_2 = 0$ hat dies den Grad 2, andernfalls den Grad 3. Die Nullstellen dieses Polynoms und ihre Vielfachheiten variieren mit den Parametern der Gerade. Die Gerade

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} 2t + 1 \\ 1t + 1 \end{pmatrix}$$

führt beispielsweise zu

$$-t^3 + t^2 + t = -t\left(t - \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)\left(t - \frac{-\sqrt{5}+1}{2}\right)$$

mit drei einfachen Nullstellen, die Gerade

$$\beta(t) = \begin{pmatrix} t + 1 \\ t + 1 \end{pmatrix}$$

führt hingegen zu

$$-t^3 - 2t^2 - t = -t\,(t+1)^2$$

mit der doppelten Nullstelle bei $t = -1$. Eine Gerade durch den Nullpunkt kann man als

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} t$$

ansetzen, was zur Bedingung

$$-a_2^3 t^3 + a_1^2 t^2 = 0$$

führt. Hierbei ist

$$t = 0$$

stets eine zumindest doppelte Nullstelle und bei $a_1 = 0$ sogar eine dreifache Nullstelle.

Das folgende Lemma beschreibt den Grad der eingesetzten Polynome f_α?

Lemma 15.2. *Es sei K ein Körper und $f \in K[X_1, \ldots, X_n]$ ein von 0 verschiedenes Polynom vom Grad m. Es sei $\alpha(t) = at + b$ die Parametrisierung einer Geraden im K^n. Dann ist*

$$f_\alpha = f \circ \alpha = \sum_{j=0}^{m} g_j(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n) t^j$$

mit Polynomen g_j in den $2n$ Variablen a_i, b_i. Insbesondere hat $f \circ \alpha$ höchstens den Grad m. Wenn K ein unendlicher Körper ist, so haben außerhalb einer algebraisch definierten Teilmenge des K^{2n} die Einsetzungen den Grad m.

Beweis. Es ist

$$f = \sum_{d=0}^{m} f_d$$

mit

$$f_d = \sum_{\nu:\,|\,\nu\,|=d} c_\nu X^\nu .$$

Die Einsetzung für ein Monom X^ν ergibt nach dem Distributivgesetz

$$\begin{aligned} \alpha_1^{\nu_1} \cdots \alpha_n^{\nu_n} &= (a_1 t + b_1)^{\nu_1} \cdots (a_n t + b_n)^{\nu_n} \\ &= a_1^{\nu_1} \cdots a_n^{\nu_n} t^{\nu_1 + \cdots + \nu_n} + \sum_{j=0}^{|\,\nu\,|-1} h_j(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n) t^j \end{aligned}$$

mit Polynomen h_j in den a_i, b_i. Die Monome von einem bestimmten Grad tragen nach der Einsetzung zu diesem Grad und zu den kleineren Graden bei, aber nicht zu einem höheren Grad. Daher hat f_α maximal den Grad m und sein Leitkoeffizient (vorausgesetzt, dass dieser Term nicht 0 ist), ist

$$\sum_{|\,\nu\,|=m} c_\nu a^\nu = f_m(a_1, \ldots, a_n).$$

Wegen $f_m \neq 0$ gibt es (bei K unendlich) Punkte $(a_1, \ldots, a_n) \in K^n$ mit

$$f_m(a_1, \ldots, a_n) \neq 0,$$

und dies gilt auf der Zariski-offenen Menge $V(f_m)$ im Parameterraum. □

Das vorstehende Argument zeigt insbesondere, dass bei Geraden durch dem Nullpunkt, die man ja mit Aufpunkt 0 ansetzen kann, die homogenen Komponenten der Einsetzungen sich direkt aus den homogenen Komponenten von f ergeben.

Definition 15.3. Zu einem Polynom $f \in R[X_1, \ldots, X_n]$ (über einem kommutativen Ring R) mit homogener Zerlegung $f = \sum_d f_d$ nennt man den minimalen Grad d mit $f_d \neq 0$ der *Untergrad* von f.

Wie wirkt sich der Untergrad auf das Schnittverhalten mit Geraden aus?

Satz 15.4. *Es sei K ein Körper und $f \in K[X_1, \ldots, X_n]$ ein von 0 verschiedenes Polynom vom Untergrad k. Es sei $\alpha(t) = at$ die Parametrisierung einer Geraden im K^n durch den Nullpunkt. Dann ist $0 \in K$ eine Nullstelle von $f \circ \alpha$, dessen Vielfachheit zumindest k ist (was den Fall, dass $f \circ \alpha$ das Nullpolynom ist, mit einschließen mag). Wenn K ein unendlicher Körper ist, so ist die Vielfachheit dieser Nullstelle außerhalb einer algebraisch definierten Teilmenge des K^n genau k.*

Beweis. Sei

$$f = f_k + f_{k+1} + \cdots + f_m$$

mit $f_k = \sum_{|\nu|=k} c_\nu X^\nu \neq 0$. Wie aus dem Beweis zu Lemma 15.2 im homogenen Fall ($b = 0$) ersichtlich ist, hängen die homogenen Komponenten der Einsetzung nur von den homogenen Komponenten von f ab. Insbesondere ist

$$(f \circ \alpha)_k = f_k \circ \alpha = \sum_{|\nu|=k} c_\nu a^\nu t^k$$

und $(f \circ \alpha)_\ell = 0$ für $\ell < k$. Somit ist 0 eine zumindest k-fache Nullstelle von $f \circ \alpha$, und genau dann eine k-fache Nullstelle, wenn der Koeffizient $\sum_{|\nu|=k} c_\nu a^\nu t^k$ nicht 0 ist. Diese Bedingung ist auf einer nichtleeren offenen Teilmenge des K^n erfüllt. □

Die Aussage im vorstehenden Satz, dass eine Eigenschaft (nämlich das Schnittverhalten) für alle Geraden gilt, die durch eine nichtleere Zariski-offene Menge parametrisiert werden, drückt man häufig durch die Formulierung aus, dass sie für die generische Gerade gilt. Man sagt dann kurz, dass f auf der generischen Gerade durch den Nullpunkt die Vielfachheit k besitzt. Entsprechende Formulierungen gibt es nicht nur für Geraden, sondern generell für Objekte, die durch einen affinen Parameterraum oder eine affine Varietät parametrisiert werden.

Korollar 15.5. *Es sei K ein unendlicher Körper und $f \in K[X_1, \ldots, X_n]$ ein von 0 verschiedenes Polynom mit $f(0) = 0$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(1) *0 ist ein glatter Punkt von f.*
(2) *Der Untergrad von f ist 1.*
(3) *Für eine nichtleere Zariski-offene Teilmenge $U \subseteq K^n$ ist für jede Gerade at mit Richtungsvektor $a \in U$ die 0 eine einfache Nullstelle des Polynoms $f(a_1t, \ldots, a_nt)$.*

Beweis. Die Äquivalenz von (i) und (ii) folgt unmittelbar, da die Jacobi-Matrix im Nullpunkt direkt aus dem linearen Term von f ablesbar ist. Die Äquivalenz von (ii) und (iii) ergibt sich aus Satz 15.4, da der Durchschnitt von zwei nichtleeren offenen Teilmengen im K^n nichtleer ist. □

Wir besprechen nun Besonderheiten des Schnittverhaltens mit Geraden über den komplexen Zahlen. Eine wichtige Rolle spielt dabei die sogenannte Stetigkeit der Nullstellen.

Satz 15.6. *Es sei $f \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ ein von 0 verschiedenes Polynom vom Untergrad k. Dann gibt es offene Ballumgebungen*

$$0 \in U(0, c) \subseteq U(0, d) \subseteq \mathbb{C}^n$$

und eine nichtleere Zariski-offene Menge $U \subseteq \mathbb{C}^n$ derart, dass alle affin-linearen Geraden $at + b$, die durch $a \in U$ parametrisert sind und die den Ball $U(0, c)$ treffen, innerhalb von $U(0, d)$ die Hyperfläche $V(f)$ mit Gesamtvielfachheit k schneiden.

Beweis. Es sei m der Grad von f und k der Untergrad von f. Es sei $U \subseteq \mathbb{C}^n$ eine Zariski-offene Menge mit der Eigenschaft, dass die Einsetzungen $f \circ \alpha$ zu den Geraden durch den Nullpunkt $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} t$ zum Parametertupel

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in U$$

den Grad m und den Untergrad k besitzen. Eine solche Menge gibt es aufgrund von Lemma 15.2 und Satz 15.4. Das normierte eingesetzte Polynom hat die Gestalt

$$\sum_{j=0}^{m} \frac{g_j(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n)}{g_m(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n)} t^j$$

wobei g_m auf U nullstellenfrei und unabhängig von den b_i ist. Für einen fixierten Parameter $(a_1, \ldots, a_n, 0, \ldots, 0)$ mit $(a_1, \ldots, a_n) \in U$ besitzt dieses Polynom in 0 eine Nullstelle der Vielfachheit k. Nach dem Satz über die Stetigkeit der Nullstellen gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit der Eigenschaft, dass jedes normierte Polynom vom gleichen Grad, das (durch U parametrisiert ist und) die Koeffizientenbedingungen

$$\left| \frac{g_j(a_1, \ldots, a_n, 0, \ldots, 0)}{g_m(a_1, \ldots, a_n, 0, \ldots, 0)} - \frac{g_j(a'_1, \ldots, a'_n, b_1, \ldots, b_n)}{g_m(a'_1, \ldots, a'_n, b_1, \ldots, b_n)} \right| \leq \delta$$

für alle $j = 0, \ldots, m-1$ erfüllt, in $U(0, \epsilon)$ mindestens k Nullstellen mit Gesamtvielfachheit k besitzt. Da diese rationalen Koeffizientenfunktionen g_j/g_m stetig sind, gibt es zu jedem $(a_1, \ldots, a_n) \in U$ ein $s > 0$ derart, dass für

$$d\left((a_1, \ldots, a_n, 0, \ldots, 0), (a'_1, \ldots, a'_n, b_1, \ldots, b_n)\right) \leq s$$

die zugehörigen Koeffizientenfunktionen diese Abstandsbedingung und die zugehörigen Geraden $a't + b$ daher die Schnittbedingung erfüllen, dass sie in der ϵ-Umgebung des Nullpunktes insgesamt zumindest k Schnittpunkte haben. □

Bemerkung 15.7. Zu einem Punkt $P \in V(f) \subseteq K^n$ ist nach Satz 15.4 die Vielfachheit von f an P auf einer generischen Geraden durch den Punkt P gleich dem Untergrad von f in dem Punkt. Der Untergrad wird dabei bestimmt, indem man f um den Punkt P entwickelt, also den Punkt in den Nullpunkt verschiebt. Wenn K unendlich ist, so hat diese Zahl eine unmittelbare geometrische Bedeutung, nämlich eben die Vielfachheit des Schnittes. Diese Bedeutung ist der historische Ausgangspunkt für das Konzept *Multiplizität*, das ein wichtiges Singularitätsmaß ist, wie Korollar 15.5 zeigt. Eine algebraisch solidere Beschreibung dieser Invariante, die nicht nur für Hyperflächen funktioniert und die nur vom lokalen Ring der Varietät im Punkt P abhängt, beruht auf der Hilbertfunktion von graduierten Moduln.

Abbildungsverzeichnis