Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2016**

Lineare Algebra und analytische Geometrie II

Vorlesung 57

Lineare Abbildungen bei Körperwechsel

Definition 57.1. Zu einer linearen Abbildung

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

zwischen K-Vektorräumen V und W und einer Körpererweiterung $K \subseteq L$ heißt die L-lineare Abbildung

$$\varphi_L\colon V_L = L \otimes_K V \longrightarrow W_L = L \otimes_K W,\ b \otimes v \longmapsto b \otimes \varphi(v),$$

die durch *Körperwechsel gewonnene lineare Abbildung.*

Diese Abbildung ist nicht nur K-linear, sondern, wie in Proposition 56.13 (3) gezeigt wurde, auch L-linear.

Lemma 57.2. *Es sei K ein Körper und sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum mit einer Basis $\mathfrak{v} = v_1, \ldots, v_n$ und sei W ein m-dimensionaler K-Vektorraum mit einer Basis $\mathfrak{w} = w_1, \ldots, w_m$. Es sei*

$$\varphi\colon V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung mit der beschreibenden Matrix $M = M^{\mathfrak{v}}_{\mathfrak{w}}(\varphi) = (a_{ij})$. Es sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung. Dann wird die durch den Körperwechsel gewonnene lineare Abbildung

$$\varphi_L\colon V_L \longrightarrow W_L$$

bezüglich den Basen $1 \otimes v_1, \ldots, 1 \otimes v_n$ von V_L und $1 \otimes w_1, \ldots, 1 \otimes w_m$ von W_L ebenfalls durch die Matrix M, aufgefasst über L, beschrieben.

Beweis. Wegen Lemma 56.14 liegen in der Tat Basen vor. Das Basiselement v_j von V wird unter φ auf

$$\varphi(v_j) \,=\, \sum_{i=1}^n a_{ij} w_i$$

abgebildet. Somit wird das Basiselement $1 \otimes v_j$ von V_L unter φ_L auf

$$\varphi(1 \otimes v_j) \,=\, 1 \otimes \varphi(v_j) \,=\, 1 \otimes \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} w_i \right) \,=\, \sum_{i=1}^n a_{ij} \left(1 \otimes w_i\right).$$

Die Koeffizienten a_{ij} konstituieren also die beschreibende Matrix von φ_L. $\square$

Das Dachprodukt

Unter den multilinearen Abbildungen spielen die alternierenden Abbildungen eine besondere Rolle, das wichtigste Beispiel ist die Determinante. Wir führen hier eine Konstruktion für das sogenannte *Dachprodukt* durch, dass für die alternierenden Abbildungen eine ähnliche Rolle spielt wie das Tensorprodukt für die multilinearen Abbildungen.

Wir erinnern an alternierende Abbildungen.

Es sei K ein Körper, V und W seien K-Vektorräume und sei $n \in \mathbb{N}$. Eine multilineare Abbildung

$$\Phi \colon V^n = \underbrace{V \times \cdots \times V}_{n-\text{mal}} \longrightarrow W$$

heißt *alternierend*, wenn folgendes gilt: Falls in $v = (v_1, \ldots, v_n)$ zwei Einträge übereinstimmen, also $v_i = v_j$ für ein Paar $i \neq j$, so ist

$$\Phi(v) \,=\, 0.$$

Konstruktion 57.3. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $n \in \mathbb{N}$. Wir konstruieren das sogenannte n-te *Dachprodukt* von V mit sich selbst, geschrieben $\bigwedge^n V$. Dazu betrachten wir die Menge S aller Symbole der Form

$$(v_1, \ldots, v_n) \text{ mit } v_i \in V$$

und die zugehörige Menge der $e_{(v_1,\ldots,v_n)}$. Wir betrachten den Vektorraum

$$H \,=\, K^{(S)},$$

das ist die Menge aller (endlichen) Summen

$$a_1 e_{s_1} + \cdots + a_k e_{s_k} \text{ mit } a_i \in K \text{ und } s_i \in S\,,$$

die e_s bilden eine Basis. Dies ist mit der natürlichen Addition und der natürlichen Skalarmultiplikation ein Vektorraum, und zwar ein Untervektorraum des Abbildungsraumes $\operatorname{Abb}(S, K)$ (es handelt sich bei H um die Menge derjenigen Vektoren, die für fast alle Elemente $s \in S$ den Wert 0 haben). In H betrachten wir den Untervektorraum U, der von den folgenden Elementen erzeugt wird (die man die *Standardrelationen* des Dachprodukts nennt).

$$e_{(v_1,\ldots,v_{i-1},v+w,v_{i+1},\ldots,v_n)} - e_{(v_1,\ldots,v_{i-1},v,v_{i+1},\ldots,v_n)} - e_{(v_1,\ldots,v_{i-1},w,v_{i+1},\ldots,v_n)}$$

für beliebige $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n, v, w \in V$.

$$e_{(v_1,\ldots,v_{i-1},av,v_{i+1},\ldots,v_n)} - a e_{(v_1,\ldots,v_{i-1},v,v_{i+1},\ldots,v_n)}$$

für beliebige $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n, v \in V$ und $a \in K$.

$$e_{(v_1,\ldots,v_{i-1},v,v_{i+1},\ldots,v_{j-1},v,v_{j+1},\ldots,v_n)}$$

für $i < j$ und beliebige $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, , v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_n, v \in V$.

Dabei ist der Leitgedanke, die Regeln, die für eine alternierende multilineare Abbildung gelten müssen, dadurch zu erzwingen, dass man die obigen Relationen zu 0 macht. Der erste Typ repräsentiert die Additivität in jedem

Argument, die zweite die Verträglichkeit mit der skalaren Multiplikation, die dritte die alternierende Eigenschaft.

Man setzt nun

$$\bigwedge^n V := H/U,$$

d.h. man bildet den Restklassenraum von H modulo dem Unterraum U.

Die Elemente $e_{(v_1,\ldots,v_n)}$ bilden dabei ein Erzeugendensystem von H. Die Restklasse von $e_{(v_1,\ldots,v_n)}$ modulo U bezeichnen wir mit[1]

$$v_1 \wedge \ldots \wedge v_n .$$

Die Standardrelationen werden dann zu den Rechenregeln[2]

$$\begin{aligned} & v_1 \wedge \ldots \wedge v_{i-1} \wedge (v+w) \wedge v_{i+1} \wedge \ldots \wedge v_n \\ = & v_1 \wedge \ldots \wedge v_{i-1} \wedge v \wedge v_{i+1} \wedge \ldots \wedge v_n + v_1 \wedge \ldots \wedge v_{i-1} \wedge w \wedge v_{i+1} \wedge \ldots \wedge v_n, \end{aligned}$$

$$v_1 \wedge \ldots \wedge v_{i-1} \wedge av \wedge v_{i+1} \wedge \ldots \wedge v_n = a \cdot v_1 \wedge \ldots \wedge v_{i-1} \wedge v \wedge v_{i+1} \wedge \ldots \wedge v_n$$

und

$$v_1 \wedge \ldots \wedge v_{i-1} \wedge v \wedge v_{i+1} \wedge \ldots \wedge v_{j-1} \wedge v \wedge v_{j+1} \wedge \ldots \wedge v_n = 0.$$

Definition 57.4. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Man nennt den (in Konstruktion 57.3 konstruierten) K-Vektorraum $\bigwedge^n V$ die n-te *äußere Potenz* (oder das n-te *Dachprodukt*) von V. Die Abbildung

$$V^n \longrightarrow \bigwedge^n V,\ (v_1, \ldots, v_n) \longmapsto v_1 \wedge \ldots \wedge v_n,$$

nennt man die *universelle alternierende Abbildung.*

Rechenregeln für das Dachprodukt

Lemma 57.5. *Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Dann gelten für die äußeren Potenzen folgende Aussagen.*

1

Es ist nicht einfach, sich unter den Ausdrücken $v_1 \wedge \ldots \wedge v_n$ bzw. $\wedge$ etwas vorzustellen. Wichtiger als die „Bedeutung“ dieser Symbole ist ihr Transformationsverhalten und die Rechenregeln, die dafür gelten. Erst der operative Umgang mit diesen Symbolen lässt die Bedeutung entstehen. Wenn man aber eine ungefähre Vorstellung haben möchte, so kann man sagen, dass $v_1 \wedge \ldots \wedge v_n$ das von den Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ erzeugte „orientierte“ Parallelotop in V repräsentiert. Das Dachprodukt $\bigwedge^n V$ besteht dann aus Linearkombinationen von solchen Parallelotopen.

[2] Es gilt die Klammerungskonvention „Dachprodukt vor Punktrechnung“, d.h. der Ausdruck $av_1 \wedge \ldots \wedge v_n$ ist als $a(v_1 \wedge \ldots \wedge v_n)$ zu lesen. Es gelten aber ohnehin die Gleichheiten

$$a(v_1 \wedge \ldots \wedge v_n) = (av_1) \wedge \ldots \wedge v_n = v_1 \wedge \ldots \wedge (av_n).$$

(1) *Die Elemente der Form* $v_1 \wedge \ldots \wedge v_n$ *mit* $v_i \in V$ *bilden ein Erzeugendensystem von* $\bigwedge^n V$.
(2) *Die Abbildung*

$$V^n \longrightarrow \bigwedge^n V,\ (v_1, \ldots , v_n) \longmapsto v_1 \wedge \ldots \wedge v_n,$$

ist multilinear und alternierend.
(3) *Es ist*

$$v_1 \wedge \ldots \wedge v_{i-1} \wedge v \wedge w \wedge v_{i+2} \wedge \ldots \wedge v_n = -v_1 \wedge \ldots \wedge v_{i-1} \wedge w \wedge v \wedge v_{i+2} \wedge \ldots \wedge v_n .$$

(4) *Seien* $u_1, \ldots , u_m \in V$ *gegeben und seien*

$$v_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i$$

für $j = 1, \ldots , n$. *Dann ist*

$$\begin{aligned} v_1 \wedge \ldots \wedge v_n &= \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in\{1,\ldots,m\}^n} \left(\prod_{j=1}^{n} a_{i_j j} \right) u_{i_1} \wedge \ldots \wedge u_{i_n} \\ &= \sum_{1\le i_1<\ldots<i_n\le m} \left(\sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{j=1}^{n} a_{i_{\pi(j)} j} \right) u_{i_1} \wedge \ldots \wedge u_{i_n} . \end{aligned}$$

Beweis. (1) folgt direkt aus der Konstruktion. (2). Es liegt die zusammengesetzte Abbildung

$$V^n \longrightarrow H \cong K^{(V^n)} \longrightarrow H/U$$

vor, wobei $(v_1, \ldots , v_n)$ auf $e_{(v_1,\ldots,v_n)}$ und dies auf die Restklasse $v_1 \wedge \ldots \wedge v_n$abgebildet wird. Dabei sichert die Definition des Unterraums U, dass jeweils die Eigenschaften einer multilinearen alternierenden Abbildung erfüllt sind. (3) gilt nach Lemma 16.8 für jede alternierende Abbildung. (4). Die erste Gleichung gilt nach Lemma 16.6 für jede multilineare Abbildung. Wenn sich in dem Indextupel $(i_1, \ldots , i_n)$ ein Eintrag wiederholt, so ist $u_{i_1} \wedge \ldots \wedge u_{i_n} = 0$ wegen alternierend. Wir müssen also nur noch Tupel betrachten, wo alle Einträge verschieden sind. Diese können nach Umordnen auf die Form $1 \le i_1 < \ldots < i_n \le m$ gebracht werden. Bei einem fixierten aufsteigenden Indextupel ist die Summe über alle dazu permutierten Indextupel gleich

$$\sum_{\pi\in S_n} \prod_{j=1}^{n} a_{i_{\pi(j)} j} u_{i_{\pi(1)}} \wedge \ldots \wedge u_{i_{\pi(n)}} = \sum_{\pi\in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{j=1}^{n} a_{i_{\pi(j)} j} u_{i_1} \wedge \ldots \wedge u_{i_n}$$

□

Korollar 57.6. *Es sei* K *ein Körper und* V *ein* K*-Vektorraum der Dimension* n. *Es seien* $v_1, \ldots , v_n$ *und* $w_1, \ldots , w_n$ *Vektoren in* V, *die miteinander* *in der Beziehung*

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

stehen, wobei M eine $n \times n$-Matrix bezeichnet. Dann gilt in $\bigwedge^n V$ die Beziehung

$$v_1 \wedge \ldots \wedge v_n = (\det M) w_1 \wedge \ldots \wedge w_n .$$

Beweis. Mit $M = (b_{jk})$ ist $v_j = \sum_{k=1}^n b_{jk} w_k$ und mit der transponierten Matrix $M^{\text{tr}} = (a_{ij})$ ist $v_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} w_i$. Damit sind wir in der Notation von Lemma 57.5 (4) und es gilt

$$\begin{aligned} v_1 \wedge \ldots \wedge v_n &= \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_n \leq n} \left(\sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{j=1}^n a_{i_{\pi(j)} j} \right) w_{i_1} \wedge \ldots \wedge w_{i_n} \\ &= \sum_{\pi \in S_n} \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{j=1}^n a_{\pi(j) j} w_1 \wedge \ldots \wedge w_n , \end{aligned}$$

da dann $i_j = j$ sein muss. Daher folgt die Aussage aus der Leibniz-Formel für die Determinante. □

Die universelle Eigenschaft des Dachproduktes

Die folgende Aussage beschreibt die universelle Eigenschaft des Dachproduktes.

Satz 57.7. *Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $n \in \mathbb{N}$. Es sei*

$$\psi \colon V^n \longrightarrow W$$

eine alternierende multilineare Abbildung in einen weiteren K-Vektorraum W. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung

$$\tilde{\psi} \colon \bigwedge^n V \longrightarrow W$$

derart, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V^n & \longrightarrow & \bigwedge^n V \\ & \searrow & \downarrow \\ & & W \end{array}$$

kommutiert.

Beweis. Wir verwenden die Notation aus Konstruktion 57.3. Durch die Zuordnung

$$e_{(v_1,\ldots,v_n)} \longmapsto \psi(v_1, \ldots , v_n)$$

wird nach Satz 10.9 eine K-lineare Abbildung

$$\bar{\psi} \colon H \longrightarrow W$$

definiert. Da ψ multilinear und alternierend ist, wird unter $\bar{\psi}$ der Untervektorraum $U \subseteq H$ auf 0 abgebildet. Nach Satz 48.4 gibt es daher eine K-lineare Abbildung

$$\tilde{\psi}\colon\ H/U \longrightarrow W,$$

die mit $\bar{\psi}$ verträglich ist. Die Eindeutigkeit ergibt sich daraus, dass die $v_1 \wedge \ldots \wedge v_n$ ein Erzeugendensystem von $\bigwedge^n V$ bilden und diese auf $\psi(v_1, \ldots, v_n)$ abgebildet werden müssen. □

Es bezeichne $\operatorname{Alt}^n(V, K)$ die Menge aller alternierenden Abbildungen von V^n nach K. Diese Menge kann man mit einer natürlichen K-Vektorraumstruktur versehen, siehe Aufgabe 16.26.

Korollar 57.8. *Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es eine natürliche Isomorphie*

$$\left(\bigwedge^n V\right)^* \longrightarrow \operatorname{Alt}^n(V, K),\ \psi \longmapsto ((v_1, \ldots, v_n) \mapsto \psi(v_1 \wedge \ldots \wedge v_n)).$$

Beweis. Die Abbildung ist einfach die Verknüpfung $\psi \mapsto \delta \circ \psi$, wobei $\delta\colon\ V \times \cdots \times V \to \bigwedge^n V$ die kanonische Abbildung bezeichnet. Die Linearität der Zuordnung ergibt sich aus den linearen Strukturen des Dualraumes und des Raumes der alternierenden Formen. Die Bijektivität der Abbildung folgt aus Satz 57.7, angewendet auf $W = K$. □

Satz 57.9. *Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum und $k \in \mathbb{N}_+$. Dann gibt es eine kanonische surjektive lineare Abbildung*

$$V \otimes \cdots \otimes V \longrightarrow V \wedge \ldots \wedge V,\ v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \longmapsto v_1 \wedge \ldots \wedge v_k.$$

Beweis. Dies ergibt sich aus der alternierenden Abbildung

$$V^k \longrightarrow \bigwedge^k V,\ (v_1, \ldots, v_k) \longmapsto v_1 \wedge \ldots \wedge v_k,$$

gemäß Lemma 55.4 (2). Die Surjektivität beruht darauf, dass das Erzeugendensystem $v_1 \wedge \ldots \wedge v_k$ im Bild liegt. □

Wenn V endlichdimensional ist, so ergibt sich aus der vorstehenden Aussage und Korollar 55.13, dass das Dachprodukt endliche Dimension besitzt. Diese werden wir in der letzten Vorlesung bestimmen.