

Maß- und Integrationstheorie

Vorlesung 16

p-Integrierbarkeit

DEFINITION 16.1. Es sei $p \geq 1$ eine reelle Zahl und (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum. Eine messbare Funktion

$$f: X \longrightarrow \mathbb{K}$$

heißt *p-integrierbar*, wenn $\int_X |f|^p d\mu$ endlich ist.

Der Menge aller *p-integrierbaren* Funktionen wird mit

$$\mathcal{L}^p(X) = \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$$

bezeichnet, es handelt sich um einen \mathbb{K} -Vektorraum.

BEISPIEL 16.2. Wir betrachten die natürlichen Zahlen \mathbb{N} als Maßraum mit dem Zählmaß. Die Funktionen

$$f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}$$

sind einfach die \mathbb{K} -wertigen Folgen, diese sind automatisch messbar. Die *p-Integrierbarkeit* ist in diesem Fall einfach die *p-Summierbarkeit*, es geht also um diejenigen Folgen f , für die

$$\|f\|_p = \sum_{n \in \mathbb{N}} |f_n|^p < \infty$$

gilt. Die f_n sind von daher eher als Reihenglieder denn als Folgenglieder anzusehen. Für $p = 1$ handelt es sich um die absolute Konvergenz der Reihe bzw. schlicht um die Summierbarkeit, für $p = 2$ spricht man von quadratsummierbaren Folgen. Die harmonische Reihe ist nicht summierbar, aber 2-summierbar und sogar *p-summierbar* für jedes $p > 1$.

LEMMA 16.3. *Es sei $p \geq 1$ eine reelle Zahl und (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum. Dann ist die Menge $\mathcal{L}^p(X)$ der *p-integrierbaren* Funktionen ein \mathbb{C} -Vektorraum.*

Beweis. Siehe Aufgabe 16.1. □

DEFINITION 16.4. Es sei $p \geq 1$ eine reelle Zahl und (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum. Zu einer *p-integrierbaren* Funktion nennt man

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}$$

die *p-Norm* von f .

BEMERKUNG 16.5. Häufig möchte man auch für $p = \infty$ zu Lemma 16.3 entsprechende Funktionenräume mit einer entsprechenden Halbnorm zur Verfügung haben. Zu einer messbaren Funktion $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem Maßraum (X, \mathcal{A}, μ) setzt man

$$\|f\|_\infty := \inf (b, \mu(f^{-1}(\mathbb{R}_{>b})) = 0).$$

Diese Zahl (die eventuell ∞ sein kann) nennt man auch das *wesentliche Supremum* von f . Die entscheidende Eigenschaft ist, dass f zwar auch Werte oberhalb dieses wesentlichen Supremums annehmen kann, aber nur auf einer Nullmenge. Man nennt f *wesentlich beschränkt*, wenn ihr wesentliches Supremum eine reelle Zahl ist. Mit \mathcal{L}^∞ bezeichnet man den Vektorraum der wesentlich beschränkten Funktionen auf X , auf diesem ist $\|-\|$ eine Halbnorm.

LEMMA 16.6. *Es sei (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum. Dann sind für eine messbare Funktion $f: X \rightarrow \mathbb{K}$ folgende Aussagen äquivalent.*

- (1) *Es ist $f = 0$ fast überall.*
- (2) *Es gibt ein $p \geq 1$ mit*

$$\int_X |f|^p d\mu = 0.$$

- (3) *Für alle $p \geq 1$ ist*

$$\int_X |f|^p d\mu = 0.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 16.2. □

Wir werden zeigen, dass die p -Norm eine Halbnorm auf \mathcal{L}^p ist und daher nach Lemma 15.11 auf einem geeigneten Restklassenraum eine Norm ist. Die folgende Aussage heißt *Höldersche Abschätzung* oder *Höldersche Ungleichung*.

LEMMA 16.7. *Es seien $p, q \geq 1$ reelle Zahlen mit*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

und es sei (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum. Es seien

$$f, g: X \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

messbare Funktionen, die p - bzw. q -integrierbar seien. Dann gilt

$$\int_X fg d\mu = \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

Beweis. Bei $\|f\|_p = 0$ ist die Aussage nach Lemma 16.6 klar, wir können also von $\|f\|_p, \|g\|_q > 0$ ausgehen. Zu $x \in X$ wenden wir auf $A = \frac{|f(x)|}{\|f\|_p}$ und

$B = \frac{|g(x)|}{\|g\|_q}$ die Abschätzung

$$AB \leq \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}$$

(siehe Aufgabe 20.25 (Analysis (Osnabrück 2021-2023))) an und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|f\|_p \cdot \|g\|_q} \int_X |fg| d\mu &= \int_X \frac{|f|}{\|f\|_p} \cdot \frac{|g|}{\|g\|_q} d\mu \\ &\leq \int_X \frac{|f|^p}{p\|f\|_p^p} + \frac{|g|^q}{q\|g\|_q^q} d\mu \\ &= \frac{1}{p\|f\|_p^p} \int_X |f|^p d\mu + \frac{1}{q\|g\|_q^q} \int_X |g|^q d\mu \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \\ &= \frac{1}{1}. \end{aligned}$$

Multiplikation mit dem Vorfaktor ergibt die Behauptung. \square

LEMMA 16.8. *Es sei $p \geq 1$ eine reelle Zahl und es sei (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum. Es seien*

$$f, g: X \longrightarrow \mathbb{R}$$

p -integrierbare Funktionen. Dann gilt

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Beweis. Es sei $1 < p < \infty$, für die anderen Fälle siehe die Aufgaben. Wegen

$$\|f + g\|_p \leq \| |f| + |g| \|_p$$

können wir f und g als reellwertig und nichtnegativ annehmen. Es sei q die durch die Bedingung

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

bestimmte Zahl, also

$$q = \frac{p}{p-1}.$$

Mit Lemma 16.7 folgt

$$\begin{aligned} \|f + g\|_p^p &= \int_X (f + g)^p d\mu \\ &= \int_X f(f + g)^{p-1} + g(f + g)^{p-1} d\mu \\ &= \|f(f + g)^{p-1}\|_1 + \|g(f + g)^{p-1}\|_1 \\ &\leq \|f\|_p \cdot \|(f + g)^{p-1}\|_q + \|g\|_p \cdot \|(f + g)^{p-1}\|_q \\ &\leq (\|f\|_p + \|g\|_p) \|(f + g)^{p-1}\|_q \\ &= (\|f\|_p + \|g\|_p) \left(\int_X (f + g)^{(p-1)q} d\mu \right)^{1/q} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\|f\|_p + \|g\|_p) \left(\int_X (f+g)^p d\mu \right)^{(p-1)/p} \\
&= (\|f\|_p + \|g\|_p) \|f+g\|_p^{p-1}.
\end{aligned}$$

Wir können nun mit $\|f+g\|_p^{p-1}$ kürzen (wenn diese Zahl gleich 0 ist, stimmt die Aussage sowieso). \square

LEMMA 16.9. *Es sei (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum und $p \geq 1$. Dann ist $\|\cdot\|_p$ auf dem \mathbb{K} -Vektorraum $\mathcal{L}^p(X)$ der p -integrierbaren Funktionen eine Halbnorm.*

Beweis. Die Dreiecksabschätzung ist Lemma 16.8, die anderen Eigenschaften sind klar. \square

Zu einem Maßraum X betrachten wir

$$\mathcal{N} = \{f : X \rightarrow \mathbb{K} \text{ messbar} \mid f = 0 \text{ fast überall}\}.$$

Dies ist ein \mathbb{K} -Vektorraum, der aus allen messbaren Funktionen besteht, für die die Menge $\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$ eine Nullmenge ist. Nach Lemma 16.6 stimmt dieser Raum mit dem Raum aller Funktionen überein, für die die p -Norm gleich 0 ist. Daher liegt für jede reelle Zahl $p \geq 1$ die Unterraumbeziehung

$$\mathcal{N} \subseteq \mathcal{L}^p$$

vor, und \mathcal{N} entspricht für jeden \mathcal{L}^p dem Untervektorraum \mathcal{Z} aus Lemma 15.11.

DEFINITION 16.10. Zu einem Maßraum (X, \mathcal{A}, μ) und einer reellen Zahl $p \geq 1$ definiert man die L^p -Räume durch

$$L^p(X) := \mathcal{L}^p(X) / \mathcal{N}.$$

BEISPIEL 16.11. Wir betrachten die natürlichen Zahlen \mathbb{N} als Maßraum mit dem Zählmaß, siehe Beispiel 16.2. Dabei ist die Nullfolge die einzige Folge, deren Träger das Maß 0 besitzt, d.h. es ist $\mathcal{N} = 0$ und es erübrigt sich der Übergang von $\mathcal{L}^p(X)$ nach $L^p(X)$.

LEMMA 16.12. *Zu einem Maßraum (X, \mathcal{A}, μ) und $p \geq 1$ ist der Lebesgue-Raum $L^p(X, \mu)$ durch*

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}$$

ein normierter \mathbb{K} -Vektorraum.

Beweis. Nach Lemma 16.3 ist $\mathcal{L}^p(X)$ ein \mathbb{K} -Vektorraum, auf dem $\|\cdot\|_p$ nach Lemma 16.8 eine Halbnorm ist. Nach Lemma 16.6 besteht \mathcal{N} genau aus den Funktionen, deren Norm gleich 0 ist. Deshalb folgt die Aussage aus Lemma 15.11. \square

Wegen der Identifizierung von Funktionen, die sich nur in einer Nullmenge unterscheiden, kann man bei Funktionsklassen nicht unmittelbar von punktweiser Konvergenz sprechen. Man kann allerdings davon sprechen, dass fast überall punktweise Konvergenz vorliegt. Die folgende Aussage sichert, dass dies auch auf $L^p(X)$ eine wohldefinierte Eigenschaft ist.

LEMMA 16.13. *Es sei (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum und $p \geq 1$. Es seien f, g messbare Funktionen und seien f_n und g_n Folgen von messbaren Funktionen auf X . Es sei $f = g$ fast überall und es sei $f_n = g_n$ fast überall. Dann konvergiert f_n fast überall gegen f genau dann, wenn g_n fast überall gegen g konvergiert.*

Beweis. Siehe Aufgabe 16.9. □

Entsprechend kann man ähnliche Sprechweisen über messbare Funktionen auf X auf Funktionsklassen in $L^p(X)$ übertragen.

LEMMA 16.14. *Es sei (X, \mathcal{A}, μ) ein σ -endlicher Maßraum und $p \geq 1$. Es sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von messbaren Funktionen auf X , die fast überall gegen die messbare Funktion f konvergiere. Es gebe ein reellwertiges $g \in L^p(X)$, das fast überall für alle $|f_n|$ eine obere Schranke sei. Dann konvergiert f_n auch in $L^p(X)$ gegen f .*

Beweis. Die Bedingung $|f_n| \leq g$ sichert einerseits, dass die f_n zu $L^p(X)$ gehören, und andererseits, dass auch $|f| \leq g$ fast überall gilt, weshalb wiederum f zu $L^p(X)$ gehört. Es konvergiert $|f - f_n|$ und damit auch $|f - f_n|^p$ fast überall gegen 0. Wegen

$$|f - f_n|^p \leq (2g)^p = 2^p g^p$$

und wegen $g \in L^p(X)$ können wir auf die Folge $|f - f_n|^p$ den Satz von der majorisierten Konvergenz anwenden und erhalten $\|f - f_n\|_p \rightarrow 0$, also konvergiert f_n in der p -Norm gegen f . □

LEMMA 16.15. *Es sei (X, \mathcal{A}, μ) ein σ -endlicher Maßraum und $p \geq 1$. Es sei g_n eine Folge von Funktionen in $\mathcal{L}^p(X)$ derart, dass die reelle Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \|g_n\|_p$ konvergiert. Dann konvergiert die Funktionenreihe $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$ fast überall und auch bezüglich der p -Norm gegen eine Funktion $g \in \mathcal{L}^p(X)$.*

Beweis. Es sei $b = \sum_{n=0}^{\infty} \|g_n\|_p$. Wir betrachten die Partialsummen

$$h_m = \sum_{n=0}^m |g_n|$$

und die Grenzfunktion

$$h = \lim_{m \rightarrow \infty} h_m = \sum_{n=0}^{\infty} |g_n|,$$

die auch den Wert ∞ annehmen kann. Daher ist auch

$$h^p = \lim_{m \rightarrow \infty} h_m^p$$

und nach dem Satz von der monotonen Konvergenz ist

$$\int_X h^p d\mu = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_X h_m^p d\mu.$$

Für Potenzieren mit dem Exponenten $1/p$ und erhalten

$$\|h\|_p = \lim_{m \rightarrow \infty} \|h_m\|_p = \lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \sum_{n=0}^m |g_n| \right\|_p.$$

Wegen

$$\left\| \sum_{n=0}^m |g_n| \right\|_p \leq \sum_{n=0}^m \|g_n\|_p \leq b$$

für alle m ist dies beschränkt. Es folgt $h \in \mathcal{L}^p$ und insbesondere ist h^p integrierbar. Dies bedeutet, dass h allenfalls auf einer Nullmenge den Wert ∞ annimmt. Die Funktionenreihe $\sum_{n=0}^{\infty} |g_n|$ ist also außerhalb einer Nullmenge punktweise konvergent und daher ist nach Lemma 16.14 auch die Funktionenreihe $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$ außerhalb einer Nullmenge punktweise konvergent gegen eine Funktion g . Mit Lemma 16.14 folgt, dass auch Konvergenz bezüglich der p -Norm vorliegt. \square

Die folgende Aussage heißt Vollständigkeitssatz von Fischer-Riesz.

SATZ 16.16. *Es sei (X, \mathcal{A}, μ) ein σ -endlicher Maßraum. Dann ist der Lebesgueraum $L^p(X)$ der p -integrierbaren Funktionen vollständig.*

Beweis. Es sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von (Äquivalenzklassen von) p -integrierbaren Funktionen auf X , die bezüglich der p -Norm $\|-\|_p$ eine Cauchy-Folge bilden. Da wir zu einer Teilfolge übergehen können, können wir (nach neuer Indizierung) annehmen, dass

$$\|f_{n+1} - f_n\|_p \leq \frac{1}{2^n}$$

ist. Wir setzen $g_n = f_{n+1} - f_n$, und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|g_n\|_p \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \leq 2.$$

Nach Lemma 16.15 konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$ fast überall und bezüglich der p -Norm gegen eine Funktion $g \in \mathcal{L}^p(X)$. Daher konvergiert die Folge

$$f_n = f_0 + \sum_{i=0}^{n-1} (f_{i+1} - f_i) = f_0 + \sum_{i=0}^{n-1} g_i$$

gegen $f_0 + g$ in den beiden beschriebenen Sinnen. \square

Diese Aussage besagt also, dass ein Lebesgueraum ein Banachraum ist.

Abbildungsverzeichnis

- Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von <http://commons.wikimedia.org>) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. 7
- Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. 7