Prof. Dr. H. Brenner — Osnabrück WS 2019/2020

Mathematik für Anwender I

Arbeitsblatt 2

Übungsaufgaben

Aufgabe 2.1. Negiere die Aussage „Alle Kinder essen in der Pause ein Butterbrot oder einen Apfel“ durch eine Existenzaussage.

Lucy Sonnenschein

Aufgabe 2.2.*

Wir betrachten den Satz „Lucy Sonnenschein tanzt auf allen Hochzeiten“. Negiere diesen Satz durch eine Existenzaussage.

Aufgabe 2.3. Man formalisiere die folgenden Aussagen, indem man geeignete Prädikate erklärt. Man gebe die Negation der Aussagen (umgangssprachlich und formal) an.

(1) Alle Vögel sind schon da.
(2) Alle Wege führen nach Rom.
(3) Faulheit ist aller Laster Anfang.

(4) Alle Menschen werden Brüder, wo dein sanfter Flügel weilt.

Aufgabe 2.4. Formuliere die folgenden einstelligen Prädikate innerhalb der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ allein mittels Gleichheit, Addition, Multiplikation und unter Verwendung von aussagenlogischen Junktoren und Quantoren.

(1) x ist ein Vielfaches von 10.
(2) x ist größer als 10.
(3) x ist kleiner als 10.
(4) x ist eine Quadratzahl.
(5) x ist keine Quadratzahl.
(6) x ist eine Primzahl.
(7) x ist keine Primzahl.
(8) x ist das Produkt von genau zwei verschiedenen Primzahlen.

Aufgabe 2.5.*

Wir betrachten die beiden Sätze „Für jeden Topf gibt es einen Deckel“ und „Es gibt einen Deckel für jeden Topf“, die man im alltäglichen Verständnis wohl als gleichbedeutend ansehen würde. Wenn man aber die beiden Aussagen streng prädikatenlogisch (quantorenlogisch) von vorne nach hinten abarbeitet, so ergeben sich zwei unterschiedliche Bedeutungen.

(1) Formuliere die beiden Aussagen durch zusätzliche Wörter so um, dass die unterschiedlichen Bedeutungen deutlich hervortreten.
(2) Es sei T die Menge der Töpfe und D die Menge der Deckel. Es sei P ein zweistelliges Prädikat derart, dass (für $x \in T$ und $y \in D$) $P(x, y)$ besagt, dass y auf x passt. Formuliere die beiden Aussagen allein mit geeigneten mathematischen Symbolen.
(3) Kann man aus der Aussage, dass es für jeden Topf einen Deckel gibt, logisch erschließen, dass es für jeden Deckel einen Topf gibt?
(4) Wie kann man erklären, dass die beiden Aussagen im alltäglichen Verständnis als gleichbedeutend interpretiert werden?

Aufgabe 2.6.*

Skizziere möglichst viele wesentlich verschiedene Konfigurationen von fünf Geraden in der Ebene, die sich insgesamt in vier Schnittpunkten treffen.

Aufgabe 2.7. Für $k = 1, \ldots, 8$ sei

$$a_k = 2^k - 5k.$$

Berechne

$$\sum_{k=1}^{8} a_k \,.$$

Aufgabe 2.8. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ sei

$$a_k = \frac{k}{2k+1}.$$

Berechne

$$\sum_{k=0}^{5} a_k .$$

Aufgabe 2.9.*

Wir betrachten die Wertetabelle

i	1	2	3	4	5	6	7	8
a_i	2	5	4	-1	3	5	-2	2

(1) Berechne $a_2 + a_5$.
(2) Berechne $\sum_{k=3}^{6} a_k$.
(3) Berechne $\prod_{i=0}^{3} a_{2i+1}$.
(4) Berechne $\sum_{i=4}^{5} a_i^2$.

Aufgabe 2.10. Beweise durch Induktion die folgende Formel.

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} .$$

Aufgabe 2.11. Beweise durch Induktion die folgende Formel.

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 .$$

Aufgabe 2.12. Beweise die Formel

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

ohne Induktion durch Betrachten der folgenden Tabelle

k	1	2	3	$\ldots$	$n-2$	$n-1$	n
$n+1-k$	n	$n-1$	$n-2$	$\ldots$	3	2	1

Aufgabe 2.13.*

Die offizielle Berechtigung für eine Klausurteilnahme werde durch mindestens 200 Punkte im Übungsbetrieb erworben. Professor Knopfloch sagt, dass es aber auf einen Punkt mehr oder weniger nicht ankomme. Zeige durch eine geeignete Induktion, dass man mit jeder Punkteanzahl zur Klausur zugelassen wird.

Aufgabe 2.14. In der folgenden Argumentation wird durch Induktion bewiesen, dass alle Pferde die gleiche Farbe haben. „Es sei $A(n)$ die Aussage, dass je n Pferde stets untereinander die gleiche Farbe haben. Induktionsanfang: Wenn nur ein Pferd da ist, so hat dieses eine bestimmte Farbe und die Aussage ist richtig. Für den Induktionsschritt sei vorausgesetzt, dass je n Pferde stets untereinander die gleiche Farbe haben. Es seien jetzt $n+1$ Pferde gegeben. Wenn man eines herausnimmt, so weiß man nach der Induktionsvoraussetzung, dass die verbleibenden n Pferde untereinander die gleiche Farbe haben. Nimmt man ein anderes Pferd heraus, so haben die jetzt verbleibenden Pferde wiederum untereinander die gleiche Farbe. Also haben all diese $n+1$ Pferde überhaupt die gleiche Farbe“. Analysiere diese Argumentation.

Aufgabe 2.15. Eine natürliche Zahl heißt *besonders*, wenn sie eine für sie spezifische, benennbare Eigenschaft erfüllt. Die 0 ist als neutrales Element der Addition und die 1 ist als neutrales Element der Multiplikation besonders. Die 2 ist die erste Primzahl, die 3 ist die kleinste ungerade Primzahl, die 4 ist die erste echte Quadratzahl, die 5 ist die Anzahl der Finger einer Hand, die 6 ist die kleinste aus verschiedenen Faktoren zusammengesetzte Zahl, die 7 ist die Anzahl der Zwerge im Märchen, u.s.w., diese Zahlen sind also alle besonders. Gibt es eine Zahl, die nicht besonders ist?

Aufgabe 2.16. Zeige, dass mit der einzigen Ausnahme $n = 3$ die Beziehung

$$2^n \geq n^2$$

gilt.

Aufgabe 2.17.*

Zeige durch vollständige Induktion, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Zahl

$$6^{n+2} + 7^{2n+1}$$

ein Vielfaches von 43 ist.

Aufgabe 2.18. Beweise durch Induktion die Abschätzung

$$1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdots n^n \leq n^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Aufgabe 2.19.*

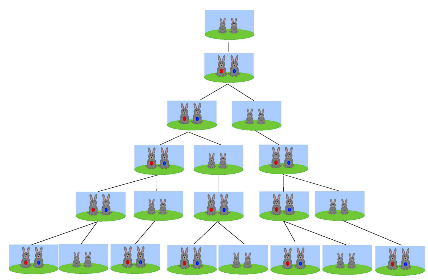
Beweise durch Induktion für alle $n \in \mathbb{N}_+$ die Formel

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k^2 = (-1)^{n+1} \frac{n(n+1)}{2}.$$

Aufgabe 2.20.*

Beweise durch Induktion, dass die Summe von aufeinanderfolgenden ungeraden Zahlen (beginnend bei 1) stets eine Quadratzahl ist.

Aufgabe 2.21. Die Städte $S_1, \ldots, S_n$ seien untereinander durch Straßen verbunden und zwischen zwei Städten gibt es immer genau eine Straße. Wegen Bauarbeiten sind zur Zeit alle Straßen nur in eine Richtung befahrbar. Zeige, dass es trotzdem mindestens eine Stadt gibt, von der aus alle anderen Städte erreichbar sind.



Aufgabe 2.22. Kaninchen werden bekanntlich immer zur Monatsmitte geboren, die Tragzeit beträgt einen Monat und die Geschlechtsreife erreichen sie im Alter von zwei Monaten. Jeder Wurf besteht aus genau einem Paar, und alle leben ewig.

Wir starten im Monat 1 mit einem Paar, das einen Monat alt ist. Sei f_n die Anzahl der Kaninchenpaare im n-ten Monat, also $f_1 = 1$, $f_2 = 1$. Beweise durch Induktion die Rekursionsformel

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n.$$

Diese Zahlfolge nennt man die Folge der *Fibonacci-Zahlen*. Wie viele der f_n Paare sind im n-ten Monat reproduktionsfähig?

Die Folge der *Fibonacci-Zahlen* f_n ist rekursiv definiert durch

$$f_1 := 1 \, , f_2 := 1 \text{ und } f_{n+2} := f_{n+1} + f_n \, .$$

Aufgabe 2.23. Bestimme die ersten zehn Fibonacci-Zahlen.

Aufgabe 2.24.*

Beweise durch Induktion die *Simpson-Formel* oder Simpson-Identität für die Fibonacci-Zahlen f_n. Sie besagt (für $n \geq 2$)

$$f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n.$$

Unter der *Collatz-Rekursion* (oder *Collatz-Vorschrift*) versteht man die folgende Vorschrift, aus einer natürlichen Zahl k eine neue Zahl zu konstruieren.

Wenn k gerade ist, so nehme von k die Hälfte.

Wenn k ungerade ist, so multipliziere k mit 3 und addiere dann 1 dazu.

Unter der *Collatz-Folge* zum Startwert m versteht man die Folge der Zahlen, die entsteht, wenn man auf m die Collatz-Rekursion anwendet.

AUFGABE 2.25. Berechne die Collatz-Folge zum Startwert 100 im Kopf, bis der Wert 1 erreicht ist.

Das Collatz-Problem ist die Frage, ob bei jedem Startglied die zugehörige Collatz-Folge irgendwann die 1 erreicht. Dies ist ein offenes Problem der Mathematik.

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 2.26. (2 Punkte)

Wir verstehen die Aussage „Igel haben Stacheln“ als „Jeder Igel besitzt mindestens einen Stachel“. Welche der folgenden Aussagen sind äquivalent zur Negation dieser Aussage.

(1) Es gibt keinen Igel, der keine Stacheln besitzt.
(2) Alle Igel haben keine Stacheln.
(3) Es gibt einen Igel, der keinen Stachel besitzt.
(4) Es gibt einen Stachel, der zu keinem Igel gehört.
(5) Es gibt einen Igel ohne Stacheln.
(6) Es gibt viele Igel ohne Stacheln.
(7) Es existiert mindestens ein Igel, der mindestens einen Stachel besitzt.
(8) Es existiert mindestens ein Igel, der höchstens einen Stachel besitzt.
(9) Nicht jeder Igel hat mindestens einen Stachel.
(10) Stacheltiere haben auch Stacheln.

AUFGABE 2.27. (6 Punkte)

Es bedeute $F(x, y)$, dass x ein Freund von y ist. Wir betrachten den Satz „Alle Freunde von Paula (P) sind auch Freunde von Susanna (S).“ Beantworte für jede der folgenden Formalisierungen, was sie umgangssprachlich bedeuten, ob sie wahr sind (hier gibt es einen gewissen Interpretationspielraum) und ob sie den angegebenen Sachverhalt ausdrücken (die Quantoren beziehen sich dabei auf die Menge der Menschen).

(1)
$$\forall x \exists y F(x, y),$$

(2)
$$\forall x F(P,x) \to \forall x F(S,x)\,,$$

(3)
$$\forall x \forall y (F(x,y) \to F(y,x))\,,$$

(4)
$$\forall x \forall y (F(x,y) \to F(x,y))\,,$$

(5)
$$\exists x \forall y F(x,y)\,,$$

(6)
$$\forall x (F(P,x) \to F(x,S))\,,$$

(7)
$$\forall x (\forall y (F(x,y) \to \forall z F(x,z)))\,,$$

(8)
$$\forall x F(x,P) \to \forall x F(x,S)\,,$$

(9)
$$\forall x (F(x,P) \to F(x,S))\,,$$

(10)
$$\forall x (\forall y F(x,y) \to F(x,x))\,,$$

(11)
$$\forall x F(x,x)\,,$$

(12)
$$\exists x \forall y (\neg F(x,y))\,.$$

Aufgabe 2.28. (3 Punkte)

Sei $m \in \mathbb{N}$. Zeige durch Induktion die Gleichheit
$$(2m+1)\prod_{i=1}^{m}(2i-1)^2 = \prod_{k=1}^{m}(4k^2-1)\,.$$

Aufgabe 2.29. (4 Punkte)

Eine n-Schokolade ist ein rechteckiges Raster, das durch $a-1$ Längsrillen und $b-1$ Querrillen in $n = a \cdot b$ ($a, b \in \mathbb{N}_+$) mundgerechte kleinere Rechtecke eingeteilt ist. Ein Teilungsschritt an einer Schokolade ist das vollständige Durchtrennen einer Schokolade längs einer Längs- oder Querrille. Eine vollständige Aufteilung einer Schokolade ist eine Folge von Teilungsschritten (an der Ausgangsschokolade oder an einer zuvor erhaltenen Zwischenschokolade), deren Endprodukt aus den einzelnen Mundgerechtecken besteht. Zeige durch Induktion, dass jede vollständige Aufteilung einer n-Schokolade aus genau $n-1$ Teilungsschritten besteht.

Aufgabe 2.30. (2 Punkte)

Beweise durch Induktion, dass die Folge der Fibonacci-Zahlen die Regelmäßigkeit

ungerade-ungerade-gerade

aufweist.

Aufgabe 2.31. (2 (1+1) Punkte)

(1) Bestimme die Glieder $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ der Collatz-Folge zum Startwert $a_0 = 152$.
(2) Berechne $\sum_{i=1}^{8} a_i$.

Abbildungsverzeichnis