MATHEMATISCHE ANNALEN.

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN.

Unter Mitwirkung der Herren

PAUL GORDAN, ADOLPH MAYER, CARL NEUMANN, MAX NOETHER,
KARL VONDERMÜHLL, HEINRICH WEBER

gegenwärtig herausgegeben

von

Felix Klein
in Göttingen

Walther v. Dyck
in München

David Hilbert
in Göttingen.

56. Band.

Mit 15 Figuren im Text.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1903.

Haven fund

Inhalt des sechsundfünfzigsten Bandes.

(In alphabetischer Ordnung.)

---

*) Druckfehler.

Durch ein Versehen in der Paginierung folgt auf Seite 280 gleich Seite 381 u. ff. Es fehlen daher im gegenwärtigen Bande die zwischenliegenden Seitenzahlen 281—380.

MATHEMATISCHE ANNALEN.

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN.

Unter Mitwirkung der Herren

PAUL GORDAN, ADOLPH MAYER, CARL NEUMANN, MAX NOETHER,
KARL VONDERMÜHLL, HEINRICH WEBER

gegenwärtig herausgegeben

von

Felix Klein
in Göttingen

Walther v. Dyck
in München

David Hilbert
in Göttingen.

56. Band. 1. Heft.

Mit 9 Figuren im Text.

Ausgegeben am 10. März.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1902.

[Fortsetzung siehe 3. Umschlagseite.]

Das simultane System von zwei quadratischen quaternären Formen.

Von

P. GORDAN in Erlangen.

Einleitung.

In der Raumgeometrie kommen drei Arten von Coordinaten vor, Punktcoordinaten x, Liniencoordinaten p und Ebenencoordinaten u. Aus ihnen und den Coefficienten der Originalformen f setzen sich die Formen (Invarianten) der f zusammen.

Das System der quadratischen quaternären Form

$$f = a_x^2 = a_{1,x}^2 \cdots$$

besteht aus den Formen

$$a_x^2,\ (a a, p)^2,\ (a a_1 a_2 u)^2,\ (a a_1 a_2 a_3)^2.$$

Dieser Satz, obgleich er bekannt ist, wird im 1ten Capitel der Vollständigkeit halber noch einmal bewiesen.

Wie bei den binären Formen, so wird auch hier das simultane System zweier Formen

$$f = a_x^2, \qquad f_1 = b_x^2$$

durch Ueberschiebung der beiden Einzelsysteme gebildet.

Sind V und W Producte der Invarianten der letzteren, so liefern die irreducibeln Ueberschiebungen

$$U = (V, W)$$

die Invarianten des simultanen Systems.

Da die Glieder von U ihm selbst äquivalent sind, so lassen sich die U durch beliebige ihrer Glieder P ersetzen. Dieselben entstehen aus

$$V \cdot W,$$

dadurch, dass man die symbolischen Factoren

(2) $$a_x,\ (a a_1 p),\ (a a_1 a_2 u)$$

von V mit den symbolischen Factoren

(3) $$b_x,\ (bb_1p),\ (bb_1b_2u)$$

von W faltet. Das Product

$$(aa_1p)\ (bb_1p)$$

kann auf doppelte Weise gefaltet werden; die andern acht Producte lassen sich nur auf eine Weise falten.

Die Faltung von Factorenpaaren ist die einzige, welche in der Theorie der binären und der ternären Formen vorkommt. Hier bei den quaternären Formen kommen noch solche Faltungen vor, bei welchen drei Factoren betheiligt sind.

Die Producte

$$a_x(a_1a_2a_3u)\,(bb_\nu p), \qquad b_x(b_1b_2b_3u)\,(aa_1p)$$

lassen sich zu Factoren F_1 und F_2 (s. Tafel I) falten, welche zu den übrigen zehn Faltungen hinzutreten.

Um die Formen übersichtlicher zu gestalten, führen wir statt der Symbole a, b der Originalformen neue Symbole ein und definiren die aus ihnen zusammengesetzten Factoren mittelst der Formen der Tafel 1.

Hierdurch sind wir im Stande, die Invarianten J des simultanen Systems in sechs Classen

$$J^{(1)} \dots J^{(6)}$$

einzutheilen. Die $J^{(1)}$ sind die Quadrate der Factoren der Tafel (1); die übrigen

$$J^{(2)} \dots J^{(6)}$$

enthalten diese Factoren höchstens in der 1ten Potenz.

Die $J^{(2)}$ bestehen nur aus Factoren $(\varphi\psi)$ und die $J^{(3)}$ nur aus (φ), (ψ), $(\varphi\psi)$. $J^{(4)}$, $J^{(5)}$ und $J^{(6)}$ haben ausserdem Factoren F.

Alle Invarianten

$$J^{(2)} \dots J^{(6)}$$

haben Factoren $(\varphi\psi)$ und werden durch ihre Producte M bestimmt.

Die einfachsten derselben sind die

$$T = (\varphi_{i_1}\psi_{x_1})\,(\varphi_{i_2}\varphi_{x_1})\,(\varphi_{i_2}\psi_{x_2})\,(\varphi_{i_3}\psi_{x_2})\,(\varphi_{i_3}\psi_{x_3})\cdots$$

bei denen je zwei benachbarte Factoren ein gemeinsames Symbol haben.

Die übrigen M sind Producte von zwei oder drei solcher T.

Die $J^{(2)}$ und $J^{(3)}$ haben nur ein T zum Factor, die drei anderen können mehr haben.

Die M sind Ableitungen von Producten M, welche in Tafel (8) zusammengestellt sind. Unter ihnen sind die Factoren M von $J^{(6)}$ Ableitungen von speciellen M, welche mit $\mathsf{M}^{(1)}$ bezeichnet und in Tafel (9) zusammengestellt sind.

Die Anzahl der

$$J^{(1)} \ldots J^{(6)}$$

ist

$$21,\ 23,\ 186,\ 134,\ 134,\ 82.$$

Das simultane System von

$$f = a_x^2, \quad f_1 = b_x^2$$

enthält 580 Formen.

Tafel 1.

Die φ, ψ.

$$a_x = (\varphi_1);\ (a_1 a_2 p) = (\varphi_2);\ (a_1 a_2 a_3 u) = (\varphi_3);\ (a_1 a_2 a_3 a_4) = (\varphi_4);$$
$$b_x = (\psi_1);\quad (b b p) = (\psi_2);\ (b_1 b_2 b_3 u) = (\psi_3);\ (b_1 b_2 b_3 b_4) = (\psi_4);$$
$$(a b p) = (\varphi_1 \psi_1);\ (a b_1 b_2 u) = (\varphi_1 \psi_2);\ (a b_1 b_2 b_3) = (\varphi_1 \psi_3);$$
$$(a_1 a_2 b u) = (\varphi_2 \psi_1);\ (a_1 a_2 a_3 b) = (\varphi_3 \psi_1);$$
$$a_{1x}(b_1 b_2 a_2 u) + a_{2,x}(b_1 b_2 a_1 u) = (\varphi_2 \psi_2)_1;\quad (a_1 a_2 b_1 b_2) = (\varphi_2 \psi_2)_2;$$
$$a_{2x}(a_1 b_1 b_2 b_3) - a_{1,x}(a_2 b_1 b_2 b_3) = (\varphi_2 \psi_3);$$
$$b_{2x}(a_1 a_2 a_3 b_1) - b_{1,x}(a_1 a_2 a_3 b_2) = (\varphi_3 \psi_2);$$
$$(a_1 b_1 b_2 b_3)(a_2 a_3 p) - (a_2 b_1 b_2 b_3)(a_1 a_3 p) + (a_3 b_1 b_2 b_3)(a_1 a_2 p) = (\varphi_3 \psi_3);$$
$$F_1 = (a_1 b_1 b_2 b_3)(a_2 b p) - (a_2 b_1 b_2 b_3)(a_1 b p) = (\varphi_1 \varphi_3 \psi_2) = (g_1 g_2 g_3);$$
$$F_2 = (a_1 a_2 a_3 b_1)(a b_2 p) - (a_1 a_2 a_3 b_2)(a b_1 p) = (\varphi_2 \psi_1 \psi_3) = (h_1 h_2 h_3).$$

$$(\varphi_i \psi_1)(\varphi_i \psi_2)(\varphi_i \psi_3) = \Theta(\varphi_i);\quad (\varphi_1 \psi_\varkappa)(\varphi_2 \psi_\varkappa)(\varphi_3 \psi_\varkappa) = \Theta(\psi_\varkappa);$$
$$\frac{\Theta(\varphi_i)\,\Theta(\psi_\varkappa)}{(\varphi_i \psi_\varkappa)} = \Theta(\varphi_i, \psi_\varkappa);$$
$$(\varphi_{i_1} \psi_{\varkappa_2})(\varphi_{i_1} \psi_{\varkappa_3})(\varphi_{i_2} \psi_{\varkappa_1})(\psi_{i_3} \psi_{\varkappa_1}) = \mathrm{H}(\varphi_{i_1}, \psi_{\varkappa_1}).$$

Hier sind i_1, i_2, i_3; $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$ Permutationen von $1, 2, 3$.

Tafel 2.

Der 21 $J^{(1)}$.

$$(\varphi_1)^2,\ (\varphi_2)^2,\ (\varphi_3)^2,\ (\varphi_4)^2,\ (\psi_1)^2,\ (\psi_2)^2,\ (\psi_3)^2,\ (\psi_4)^2,$$
$$(\varphi_1 \psi_1)^2,\ (\varphi_1 \psi_2)^2,\ (\varphi_1 \psi_3)^2,\qquad ,\ (\varphi_2 \psi_1)^2,\ (\varphi_2 \psi_2)_\lambda^{\,2},$$
$$(\varphi_2 \psi_3)^2,\ (\varphi_3 \psi_1)^2,\ (\varphi_3 \psi_2)^2,\ (\varphi_3 \psi_3)^2,\ F_1^{\,2},\ F_2^{\,2}.$$

Tafel 3.

Der 23 $J^{(2)}$.

$$(\varphi_{\lambda_1} \psi_{\mu_1})(\varphi_{\lambda_2} \psi_{\mu_1})(\varphi_{\lambda_2} \psi_{\mu_2})(\varphi_{\lambda_1} \psi_{\mu_2});$$
$$(\varphi_1 \psi_{\varkappa_1})(\varphi_2 \psi_{\varkappa_1})(\varphi_2 \psi_{\varkappa_2})(\varphi_3 \psi_{\varkappa_2})(\varphi_3 \psi_{\varkappa_3})(\varphi_1 \psi_{\varkappa_3}).$$

Tafel 4.

Die 186 $J^{(3)}$.

$(\varphi_i\psi_\kappa)(\varphi_i)(\psi_\kappa)$; $(\varphi_{i_1}\psi_\kappa)(\varphi_{i_2}\psi_\kappa)(\varphi_{i_1})(\varphi_{i_2})$; $(\varphi_i\psi_{\kappa_1})(\varphi_i\psi_{\kappa_2})(\psi_{\kappa_1})(\psi_{\kappa_2})$;
$(\varphi_{i_1}\psi_{\kappa_1})(\varphi_{i_2}\psi_{\kappa_1})(\varphi_{i_2}\psi_{\kappa_2})(\varphi_{i_1})(\psi_{\kappa_2})$; $(\varphi_{i_1}\psi_{\kappa_1})(\varphi_{i_2}\psi_{\kappa_1})(\varphi_{i_2}\psi_{\kappa_2})(\varphi_{i_3}\psi_{\kappa_2})(\varphi_{i_1})(\varphi_{i_3})$;
$(\varphi_{i_1}\psi_{\kappa_1})(\varphi_{i_1}\psi_{\kappa_2})(\varphi_{i_2}\psi_{\kappa_2})(\varphi_{i_2}\psi_{\kappa_3})(\psi_{\kappa_1})(\psi_{\kappa_3})$;
$(\varphi_{i_1}\psi_{\kappa_1})(\varphi_{i_2}\psi_{\kappa_1})(\varphi_{i_2}\psi_{\kappa_2})(\varphi_{i_3}\psi_{\kappa_2})(\varphi_{i_3}\psi_{\kappa_3})(\varphi_{i_1})(\psi_{\kappa_3})$.

i_1, i_2, i_3 und $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ sind Permutationen der Zahlen 1, 2, 3.

Tafel 5.

Die 134 $J^{(4)}$.

$F_1\cdot(\varphi_1)(\varphi_3)(\psi_2)$; $F_1\cdot(\varphi_{i_2})(\psi_2)(\psi_{\kappa_2})(\varphi_{i_1}\psi_{\kappa_1})$; $F_1\cdot(\varphi_1)(\varphi_2)(\varphi_3)(\varphi_2\psi_2)$;
$F_1\cdot(\psi_1)(\psi_2)(\psi_3)(\varphi_1\psi_{\kappa_1})(\varphi_3\varphi_{\kappa_2})$; $F_1\cdot(\varphi_1)(\varphi_3)(\psi_{\kappa_1})(\varphi_2\psi_2)(\varphi_2\psi_{\kappa_1})$;
$F_1\cdot(\varphi_{i_2})(\varphi_2)(\psi_2)(\varphi_{i_1}\psi_{\kappa_1})(\varphi_2\psi_{\kappa_1})$; $F_1\cdot(\varphi_{i_2})(\varphi_2)(\psi_{\kappa_1})(\varphi_{i_1}\psi_{\kappa_1})(\varphi_2\psi_2)$;
$F_1\cdot(\varphi_{i_2})(\psi_2)(\psi_{\kappa_1})(\varphi_{i_1}\psi_{\kappa_1})(\varphi_2\psi_1)(\varphi_2\psi_3)$; $F_1\cdot(\varphi_2)(\psi_2)(\psi_{\kappa_2})(\varphi_{i_1}\psi_1)(\varphi_2\psi_{\kappa_1})(\varphi_{i_2}\psi_3)$;
$F_1\cdot(\varphi_{i_2})(\psi_1)(\psi_3)(\varphi_2\psi_2)(\varphi_2\psi_{\kappa_1})(\varphi_{i_1}\psi_{\kappa_2})$; $F_1\cdot(\varphi_2)(\psi_1)(\psi_3)(\varphi_{i_1}\psi_1)(\varphi_{i_2}\psi_3)(\varphi_2\psi_2)$;
$F_1\cdot(\varphi_{i_2})(\varphi_{i_1}\psi_2)$; $F_1\cdot(\psi_2)(\varphi_1\psi_{\kappa_1})(\varphi_3\psi_{\kappa_1})$; $F_1\cdot(\psi_2)(\varphi_1\psi_2)(\varphi_3\psi_2)$;
$F_1\cdot(\psi_{\kappa_1})(\varphi_{i_1}\psi_2)(\varphi_{i_2}\psi_{\kappa_1})$; $F_1\cdot(\varphi_{i_2})(\varphi_{i_1}\psi_{\kappa_1})(\varphi_2\psi_{\kappa_1})(\varphi_2\psi_2)$;
$F_1\cdot(\varphi_{i_1})(\varphi_1\psi_{\kappa_1})(\varphi_3\psi_{\kappa_1})(\varphi_{i_1}\psi_2)$; $F_1\cdot(\varphi_2)(\varphi_1\psi_{\kappa_1})(\varphi_3\psi_{\kappa_2})(\varphi_2\psi_2)$;
$F_1\cdot(\varphi_2)(\varphi_{i_1}\psi_2)(\varphi_{i_2}\psi_{\kappa_1})(\varphi_2\psi_{\kappa_1})$; $F_1\cdot(\varphi_2)\Theta(\psi_2)$;
$F_1\cdot(\psi_2)(\varphi_{i_1}\psi_1)(\varphi_2\psi_1)(\varphi_2\psi_3)(\varphi_{i_2}\psi_3)$; $F_1\cdot(\psi_2)(\varphi_{i_1}\psi_{\kappa_1})(\varphi_2\psi_{\kappa_1})(\varphi_2\psi_2)(\varphi_{i_2}\psi_2)$;
$F_1\cdot(\psi_{\kappa_2})(\varphi_{i_1}\psi_2)(\varphi_{i_2}\psi_{\kappa_1})(\varphi_2\psi_1)(\varphi_2\psi_3)$; $F_1\cdot(\psi_{\kappa_2})(\varphi_{i_1}\psi_{\kappa_1})(\varphi_2\psi_{\kappa_1})(\varphi_2\psi_2)(\varphi_{i_2}\psi_{\kappa_2})$;
$F_1\cdot(\psi_{\kappa_1})(\varphi_1\psi_{\kappa_2})(\varphi_3\psi_{\kappa_1})(\varphi_2\psi_{\kappa_2})(\varphi_2\psi_2)$; $F_1\cdot(\psi_{\kappa_2})\Theta(\varphi_{i_1})(\varphi_{i_2}\psi_{\kappa_1})$;
$F_1\cdot(\psi_{\kappa_2})\Theta(\psi_2)(\varphi_2\psi_{\kappa_1})$; $F_1\cdot(\psi_{\kappa_2})\mathrm{H}(\varphi_2\psi_{\kappa_1})$;
$F_1\cdot(\varphi_{i_2})(\varphi_{i_1}\psi_{\kappa_1})(\varphi_2\psi_1)(\varphi_2\psi_3)(\varphi_{i_2}\psi_{\kappa_2})(\varphi_{i_2}\psi_2)$;
$F_1\cdot(\varphi_{i_2})(\varphi_1\psi_{\kappa_1})(\varphi_3\psi_{\kappa_1})(\varphi_{i_2}\psi_{\kappa_2})(\varphi_2\psi_{\kappa_2})(\varphi_2\psi_2)$;
$F_1(\varphi_2)\Theta(\varphi_{i_1})(\varphi_{i_2}\psi_{\kappa_1})(\varphi_2\psi_{\kappa_2})$; $F_1\cdot(\varphi_2)\Theta(\varphi_2)(\varphi_1\psi_{\kappa_1})(\varphi_3\psi_{\kappa_2})$.

i_1, i_2 und κ_1, κ_2 bedeuten Permutationen von 1, 3.

Tafel 6.

Der 134 $J^{(5)}$.

$F_2\cdot(\varphi_2)(\psi_1)(\psi_3)$; $F_2\cdot(\varphi_{i_1})(\varphi_2)(\psi_{\kappa_1})(\varphi_{i_1}\psi_{\kappa_1})$; $F_2\cdot(\psi_1)(\psi_2)(\psi_3)(\varphi_2\psi_2)$;
$F_2\cdot(\varphi_1)(\varphi_2)(\varphi_3)(\varphi_{i_1}\psi_1)(\varphi_{i_2}\psi_3)$; $F_2\cdot(\varphi_{i_1})(\psi_1)(\psi_3)(\varphi_2\psi_2)(\varphi_{i_1}\psi_2)$;
$F_2\cdot(\varphi_2)(\psi_2)(\psi_{\kappa_2})(\varphi_{i_1}\psi_{\kappa_1})(\varphi_{i_1}\psi_2)$; $F_2\cdot(\varphi_{i_1})(\psi_2)(\psi_{\kappa_2})(\varphi_2\psi_2)(\varphi_{i_1}\psi_{\kappa_1})$;
$F_2\cdot(\varphi_{i_2})(\varphi_2)(\psi_{\kappa_2})(\varphi_{i_1}\psi_{\kappa_1})(\varphi_1\psi_2)(\varphi_3\psi_2)$; $F_2\cdot(\varphi_{i_2})(\varphi_2)(\psi_2)(\varphi_{i_1}\psi_{\kappa_1})(\varphi_{i_1}\psi_2)(\varphi_{i_2}\psi_{\kappa_2})$;
$F_2\cdot(\varphi_1)(\varphi_3)(\psi_\kappa)(\varphi_2\psi_2)(\varphi_{i_1}\psi_2)(\varphi_{i_2}\psi_{\kappa_1})$; $F_2\cdot(\varphi_1)(\varphi_3)(\psi_2)(\varphi_1\psi_{\kappa_1})(\varphi_3\psi_{\kappa_2})(\varphi_2\psi_2)$;

$F_2\cdot(\psi_{x_1})(\varphi_2\psi_{x_2})$; $F_2\cdot(\varphi_2)(\varphi_{i_1}\psi_1)(\varphi_{i_1}\psi_3)$; $F_2\cdot(\varphi_2)(\varphi_2\psi_1)(\varphi_2\psi_3)$;
$F_2\cdot(\varphi_{i_1})(\varphi_2\psi_{x_1})(\varphi_{i_1}\psi_{x_2})$; $F_2\cdot(\psi_{x_2})(\varphi_{i_1}\psi_{x_1})(\varphi_{i_1}\psi_2)(\varphi_2\psi_2)$;
$F_2\cdot(\psi_{x_1})(\varphi_{i_1}\psi_1)(\varphi_{i_1}\psi_3)(\varphi_2\psi_{x_1})$; $F_2(\psi_2)(\varphi_{i_1}\psi_1)(\varphi_{i_1}\psi_3)(\varphi_2\psi_2)$;
$F_2\cdot(\psi_2)(\varphi_2\psi_{x_1})(\varphi_{i_1}\psi_{x_2})(\varphi_{i_1}\psi_2)$; $F_2\cdot(\psi_2)\,\Theta(\varphi_2)$;
$F_2\cdot(\varphi_2)(\varphi_1\psi_{x_1})(\varphi_1\psi_2)(\varphi_3\psi_2)(\varphi_3\psi_{x_2})$; $F_2\cdot(\varphi_2)(\varphi_{i_1}\psi_{x_1})(\varphi_{i_1}\psi_2)(\varphi_2\psi_2)(\varphi_2\psi_{x_1})$;
$F_2\cdot(\varphi_{i_1})(\varphi_2\psi_{x_1})(\varphi_{i_1}\psi_{x_2})(\varphi_1\psi_2)(\varphi_3\psi_2)$; $F_2\cdot(\varphi_{i_1})(\varphi_{i_1}\psi_{x_1})(\varphi_{i_1}\psi_2)(\varphi_2\psi_2)(\varphi_{i_2}\psi_{x_2})$;
$F_2\cdot(\varphi_{i_1})(\varphi_{i_1}\psi_1)(\varphi_{i_2}\psi_2)(\varphi_{i_1}\psi_3)(\varphi_2\psi_2)$; $F_2\cdot(\varphi_{i_2})\,\Theta(\psi_{x_1})(\varphi_{i_1}\psi_{x_2})$;
$F_2\cdot(\varphi_{i_1})\,\Theta(\varphi_2)(\varphi_{i_1}\psi_2)$; $F_2\cdot(\varphi_{i_2})\,\mathsf{H}(\varphi_{i_1}\psi_2)$;
$F_2\cdot(\psi_{x_2})(\varphi_{i_1}\psi_1)(\varphi_1\psi_2)(\varphi_3\psi_2)(\varphi_{i_2}\psi_{x_2})(\varphi_2\psi_{x_2})$;
$F_2\cdot(\psi_{x_1})(\varphi_{i_1}\psi_1)(\varphi_{i_1}\psi_3)(\varphi_{i_2}\psi_{x_2})(\varphi_{i_2}\psi_2)(\varphi_2\psi_2)$;
$F_2\cdot(\psi_2)\,\Theta(\psi_{x_1})(\varphi_{i_1}\psi_{x_2})(\varphi_{i_2}\psi_2)$; $F_2(\psi_2)\,\Theta(\varphi_2)(\varphi_{i_1}\psi_1)(\varphi_{i_2}\psi_3)$.

Tafel 7.

Der 82 $J^{(6)}$.

$F_1F_2\cdot(\varphi_2)(\varphi_{i_2})(\psi_2)(\psi_{x_2})(\varphi_{i_1}\psi_{x_1})$; $F_1F_2\cdot(\varphi_1)(\varphi_3)(\psi_1)(\psi_3)(\varphi_2\psi_2)$;
$F_1F_2\cdot(\varphi_2)(\psi_2)(\varphi_{i_1}\psi_{x_1})(\varphi_{i_2}\psi_{x_2})$; $F_1F_2\cdot(\varphi_2)(\psi_{x_2})(\varphi_{i_1}\psi_{x_1})(\varphi_{i_2}\psi_2)$;
$F_1F_2\cdot(\varphi_{i_2})(\psi_{x_2})(\varphi_{i_1}\psi_{x_1})(\varphi_2\psi_2)$; $F_1F_2\cdot(\varphi_{i_2})(\psi_2)(\varphi_{i_1}\psi_{x_1})(\varphi_2\psi_{x_2})$;
$F_1F_2\cdot(\psi_1)(\psi_3)(\varphi_1\psi_{x_1})(\varphi_3\psi_{x_1})(\varphi_2\psi_2)$; $F_1F_2\cdot(\varphi_{x_1})(\psi_2)(\varphi_2\psi_{x_1})(\varphi_{i_1}\psi_{x_2})(\varphi_{i_2}\psi_{x_2})$;
$F_1F_2\cdot(\psi_2)(\psi_{x_2})(\varphi_2\psi_2)(\varphi_{i_1}\psi_2)(\varphi_{i_2}\psi_{x_1})$; $F_1F_2\cdot(\psi_1)(\psi_3)\,\Theta(\psi_2)$;
$F_1F_2\cdot(\varphi_1)(\varphi_3)(\varphi_{i_1}\psi_1)(\varphi_{i_2}\psi_3)(\varphi_2\psi_2)$; $F_1F_2\cdot(\varphi_2)(\varphi_{i_1})(\varphi_{i_1}\psi_2)(\varphi_{i_1}\psi_{x_1})(\varphi_{i_2}\psi_{x_2})$;
$F_1F_2\cdot(\varphi_{i_2})(\varphi_2)(\varphi_2\psi_2)(\varphi_2\psi_{x_1})(\varphi_{i_1}\psi_{x_2})$; $F_1F_2\cdot(\varphi_1)(\varphi_3)\,\Theta(\varphi_2)$.
$F_1F_2\cdot(\varphi_1\psi_{x_1})(\varphi_2\psi_{x_2})(\varphi_3\psi_{x_2})$; $F_1F_2\cdot\Theta(\varphi_i, \psi_x)$.

Tafel 8.

Der 15 M.

$\mathsf{M}_{01} = 1$;
$\mathsf{M}_{11} = (\varphi_1\psi_1)$;
$\mathsf{M}_{21} = (\varphi_1\psi_1)\,(\varphi_2\psi_1)$;
$\mathsf{M}_{22} = (\varphi_1\psi_1)\,(\varphi_2\psi_2)$;
$\mathsf{M}_{31} = (\varphi_1\psi_1)\,(\varphi_2\psi_1)\,(\varphi_2\psi_2)$;
$\mathsf{M}_{32} = (\varphi_1\psi_1)\,(\varphi_2\psi_1)\,(\varphi_3\psi_2)$;
$\mathsf{M}_{33} = \Theta(\varphi_1)$;
$\mathsf{M}_{34} = (\varphi_1\psi_1)\,(\varphi_2\psi_2)\,(\varphi_3\psi_3)$;
$\mathsf{M}_{41} = (\varphi_1\psi_1)\,(\varphi_2\psi_1)\,(\varphi_2\psi_2)\,(\varphi_3\psi_2)$;
$\mathsf{M}_{42} = (\varphi_1\psi_1)\,(\varphi_2\psi_1)\,(\varphi_2\psi_2)\,(\varphi_3\psi_3)$;
$\mathsf{M}_{43} = \Theta(\varphi_1)\,(\varphi_2\psi_1)$;

$$M_{44} = H(\varphi_1, \psi_1);$$
$$M_{51} = (\varphi_1\psi_1)(\varphi_2\psi_1)(\varphi_2\psi_2)(\varphi_3\psi_2)(\varphi_3\psi_3);$$
$$M_{52} = \Theta(\varphi_1)(\varphi_2\psi_1)(\varphi_3\psi_2);$$
$$M_{53} = \Theta(\varphi_1, \psi_1).$$

Tafel 9.

Der 10 $M^{(1)}$.

$$M^{(1)}_{60} = 1;$$
$$M^{(1)}_{41} = (\varphi_1\psi_1);$$
$$M^{(1)}_{42} = (\varphi_1\psi_1)(\varphi_2\psi_1);$$
$$M^{(1)}_{22} = (\varphi_1\psi_1)(\varphi_2\psi_2);$$
$$M^{(1)}_{231} = (\varphi_1\psi_1)(\varphi_2\psi_1)(\varphi_3\psi_2),$$
$$M^{(1)}_{232} = \Theta(\varphi_1);$$
$$M^{(1)}_{03} = (\varphi_1\psi_1)(\varphi_2\psi_2)(\varphi_3\psi_3);$$
$$M^{(1)}_{241} = \Theta(\varphi_1)(\varphi_2\psi_1);$$
$$M^{(1)}_{242} = H(\varphi_1, \psi_1);$$
$$M_{05} = \Theta(\varphi_1, \psi_1).$$

Tafel 10.

Der D.

$$B_{60} = 1;$$
$$D_{41} = (\varphi_{i_1}\psi_2);\quad (\varphi_2\psi_{x_1});$$
$$D_{42} = \begin{array}{l} (\varphi_{i_1}\psi_1)(\varphi_{i_1}\psi_3);\quad (\varphi_1\psi_{x_1})(\varphi_3\psi_{x_1});\quad (\varphi_{i_1}\psi_2)(\varphi_2\psi_2);\quad (\varphi_2\psi_{x_1})(\varphi_2\psi_2);\\ (\varphi_{i_1}\psi_2)(\varphi_{i_1}\psi_{x_1});\quad (\varphi_2\psi_{x_1})(\varphi_{i_1}\psi_{x_1});\quad (\varphi_1\psi_2)(\varphi_3\psi_2);\quad (\varphi_2\psi_1)(\varphi_2\psi_3); \end{array}$$
$$D_{22} = (\varphi_{i_1}\psi_2)(\varphi_2\psi_{x_1});$$
$$D_{231} = \begin{array}{l} (\varphi_1\psi_{x_2})(\varphi_3\psi_{x_2})(\varphi_{i_1}\psi_{x_1});\quad (\varphi_1\psi_2)(\varphi_3\psi_2)(\varphi_2\psi_{x_1});\quad (\varphi_{i_2}\psi_{x_1})(\varphi_2\psi_{x_1})(\varphi_{i_1}\psi_2);\\ (\varphi_{i_2}\psi_1)(\varphi_{i_2}\psi_3)(\varphi_{i_1}\psi_{x_1});\quad (\varphi_2\psi_1)(\varphi_2\psi_3)(\varphi_{i_1}\psi_2);\quad (\varphi_{i_1}\psi_{x_2})(\varphi_{i_1}\psi_2)(\varphi_2\psi_{x_1}); \end{array}$$
$$D_{232} = \Theta(\varphi_{i_1});\quad \Theta(\psi_{x_1});$$
$$D_{241} = \begin{array}{l} \Theta(\varphi_{i_1})\cdot(\varphi_{i_2}\psi_2),\ (\varphi_{i_2}\psi_x);\quad (\varphi_2\psi_{x_1}),\ (\varphi_2\psi_2);\\ \Theta(\psi_{x_1})\cdot(\varphi_2\psi_{x_2}),\ (\varphi_{i_1}\psi_{x_2});\quad (\varphi_{i_1}\psi_2),\ (\varphi_2\psi_2);\\ \Theta(\varphi_2)\cdot(\varphi_{i_1}\psi_{x_1});\quad (\varphi_{i_1}\psi_2);\\ \Theta(\psi_2)\cdot(\varphi_{i_1}\psi_{x_1});\quad (\varphi_2\psi_{x_1}); \end{array}$$
$$D_{242} = H(\varphi_{i_1}, \psi_{x_1}),\ H(\varphi_{i_1}, \psi_2),\ H(\varphi_2, \psi_{x_1}),\ H(\varphi_2, \psi_2).$$

I. Capitel.

Das System von $f = a_x^2$.

§ 1.

$$r_x^{n-1} r_{x_\varkappa} (s x_1 x_2 \cdots x_\nu)^n = 0.$$

Genügt eine Form

$$F = r_x^n (s x_1 x_2 \cdots x_\nu)^n \qquad \text{für jede Zahl } \varkappa$$

den Relationen

(1) $$r_x^{n-1} r_{x_\varkappa} (s x_1 x_2 \cdots x_\nu)^n = 0,$$

so genügt sie der Formel

(2) $$\binom{m+\nu}{\nu} F = \{ r_x (s x_1 x_2 \cdots x_\nu) - r_{x_1} (s x x_2 \cdots x_\nu) \cdots r_{x_\nu} (s x x_1 \cdots x_{\nu-1}) \}^n.$$

Beweis.

Aus Formel (1) ergeben sich diese Formeln:

$$r_x^{n-1} (s x_1 \cdots x_\nu)^{n-1} \{ r_x (s x_1 \cdots x_\nu) + n r_{x_\varkappa} (s x_1 \cdots x_{\varkappa-1} x_{\varkappa+1} \cdots x_\nu) \} = 0,$$

$$(n+\nu) F = n r_x^{n-1} (s x_1 \cdots x_\nu)^{n-1} \{ r_x (s x_1 \cdots x_\nu) - r_{x_1} (s x x_2 \cdots x_\nu) \cdots - r_{x_\nu} (s x x_1 \cdots x_{\nu-1}) \}.$$

Ersetzt man hierin n der Reihe nach durch die Zahlen

$$1, 2, 3, \cdots n$$

so erhält man die Formeln

$$(\nu+1) r_x (s \cdots x_\nu) = \quad r_x (s x_1 \cdots x_\nu) \cdots r_{x_\nu} (s x \cdots x_{\nu-1}),$$

$$(\nu+2) r_x^2 (s \cdots x_\nu) = 2 r_x (s \cdots x_\nu) (r_x (s x_1 \cdots x_\nu) \;\cdots r_{x_\nu} (s x \cdots x_{\nu-1})),$$

. . . .

$$(n+\nu) F = n r_x^n (s x_1 \cdots x_\nu)^{n-1} (r_x (s x_1 \cdots x_\nu) \cdots r_{x_\nu} (s x \cdots x_{\nu-1})),$$

deren Product Formel (2) liefert.

§ 2.

$$F \frac{r_{\varkappa, x_\lambda}}{r_{\varkappa, x_\varkappa}} = 0.$$

Genügt eine Form

$$F = r_{1, x_1}^n r_{2, x_2}^n \cdots r_{\varkappa, x_\nu}^n \qquad \text{für alle Zahlenpaare } \varkappa, \lambda$$

den Relationen

$$F \frac{r_{\varkappa, x_\lambda}}{r_{\varkappa, x_\varkappa}} = 0,$$

so genügt sie auch der Formel:

$$\binom{n+1}{1}\binom{n+2}{2}\cdots\binom{n+\nu-1}{\nu-1}F=\left(\sum\pm r_{1,x_1}r_{2,x_2}\cdots r_{\nu,x_\nu}\right)^n.$$

Ist im Besonderen ν die Anzahl der Variabeln $x_\varkappa$

$$x_{\varkappa_1},\ x_{\varkappa_2},\cdots x_{\varkappa_\nu},$$

so wird

$$\sum\pm r_{1,x_1}r_{2,x_2}\cdots r_\nu x_\nu=(r_1r_2\cdots r_\nu)(x_1x_2\cdots x_\nu),$$

$$\binom{n+1}{1}\binom{n+2}{2}\cdots\binom{n+\nu-1}{\nu-1}F=(r_1r_2\cdots r_\nu)^n(x_1x_2\cdots x_\nu)^n.$$

§ 3.

$$\frac{\partial F}{\partial x_{\varkappa 1}}x_{\lambda 1}+\frac{\partial F}{\partial x_{\varkappa 2}}x_{\lambda 2}\cdots\frac{\partial F}{\partial x_{\varkappa\nu}}x_{\lambda\nu}=0.$$

Genügt eine homogene Function F der Variabeln x, welche sie in den Verbindungen

$$r_{\varrho 1}x_{\sigma 1}+r_{\varrho 2}x_{\sigma 2}\cdots r_{\varrho\nu}x_{\sigma\nu}=r_{\varrho,x_\sigma}$$

enthält, den Relationen,

$$\frac{\partial F}{\partial x_{\varkappa 1}}x_{\lambda 1}+\frac{\partial F}{\partial x_{\varkappa 2}}x_{\lambda 2}\cdots\frac{\partial F}{\partial x_{\varkappa\nu}}x_{\lambda\nu}=0,$$

so lässt sie sich als ganze Function der Producte

$$(x_1x_2\cdots x_\nu)(r_{\mu_1}r_{\mu_2}\cdots r_{\mu_\nu})$$

darstellen und hat die Form

$$F=(x_1x_2\cdots x_\nu)^pF_1, \tag{3}$$

wo F_1 eine ganze Function der Determinanten

$$(r_{\mu_1}r_{\mu_2}\cdots r_{\mu_\nu})$$

ist.

§ 4.
Die J.

Die Invarianten J einer quaternären Form

$$f=a_x^m$$

in den Variabeln

$$x,\ u,\ v,$$

welche durch die Relationen

$$u_x=0,\quad v_x=0$$

verbunden sind, lassen sich als Aggregate von Producten (Formen) P darstellen, welche aus Factoren

(4) $$a_x,\ (a a_1 u v),\ (a a_1 a_2 u),\ (a a_1 a_2 v),\ (a a_1 a_2 a_3)$$

zusammengesetzt sind.

Beweis.

J ist eine ganze homogene Function F von den

$$a_\lambda,\ u_\lambda,\ v_\lambda,\ x_\lambda.$$

Eine lineare Substitution

$$(\xi_1\,\xi_2\,\xi_3\,\xi_4)$$

mit der Determinante Δ, führt die Grössen —

$$i,\ a_\lambda,\ u_\lambda,\ v_\lambda,\ x_\lambda$$

in

$$\Delta i,\ a_{\xi_\lambda},\ u_{\xi_\lambda},\ v_{\xi_\lambda},\ (x\xi_{\lambda_1}\xi_{\lambda_2}\xi_{\lambda_3})$$

über, so dass

$$\Delta^m J = F\left(a_{\xi_\lambda},\ u_{\xi_\lambda},\ v_{\xi_\lambda},\ (x\xi_{\lambda_1}\xi_{\lambda_2}\xi_{\lambda_3})\right)$$

wird.

Aus den Formeln:

$$\frac{\partial\Delta}{\partial\xi_{\lambda 1}}\xi_{\mu 1} + \frac{\partial\Delta}{\partial\xi_{\lambda 2}}\xi_{\mu 2} + \frac{\partial\Delta}{\partial\xi_{\lambda 3}}\xi_{\mu 3} + \frac{\partial\Delta}{\partial\xi_{\lambda 4}}\xi_{\mu 4} = 0$$

folgen diese

$$\frac{\partial F}{\partial\xi_{\lambda 1}}\xi_{\mu 1} + \frac{\partial F}{\partial\xi_{\lambda 2}}\xi_{\mu 2} + \frac{\partial F}{\partial\xi_{\lambda 3}}\xi_{\mu 3} + \frac{\partial F}{\partial\xi_{\lambda 1}}\xi_{\mu 4} = 0;$$

sie zeigen, dass F sich in die Form:

$$F = \Delta^m F_1$$

bringen lässt, wo F_1 von den Ausdrücken (4) abhängt.

§ 5.

Die Variabeln x, p, u.

Wir nehmen von nun an an, dass die v nur in den Verbindungen

$$u_i v_x - u_x v_i = p_{ix}$$

auftreten.

J ist nun von den Variabeln

$$x,\ p,\ u$$

abhängig und genügt der Relation

$$\frac{\partial J}{\partial v_1}u_1 + \frac{\partial J}{\partial v_2}u_2 + \frac{\partial J}{\partial v_3}u_3 + \frac{\partial J}{\partial v_4}u_4 = 0$$

ist also von den Ausdrücken

$$(5) \qquad \begin{gathered} a_x,\ (aa_1p),\ (aa_1a_2u),\ (aa_1a_2a_3), \\ (aa_1a_2u)\,(a_3a_4a_5v) - (aa_1a_2v)\,(a_3a_4a_5\varkappa) \\ = (aa_1a_2a_3)\,(a_4a_5p) - (aa_1a_2a_4)\,(a_3a_5p) + (aa_1a_2a_5)\,(a_3a_4p) \end{gathered}$$

abhängig und ein Aggregat von Producten P die aus den Factoren (5) zusammengesetzt sind.

§ 6.

Die Processe R.

1. Der Process $R_{1\nu}$.

g_1 und g_2 seien zwei der Factoren (5) von P. g_1 enthalte das Symbol a, aber keines der Symbole $a_1, a_2, \cdots a_\nu$ und g_2 enthalte die Symbole $a_1, a_2, \cdots a_\nu$, aber nicht das Symbol a; setzt man

$$P = g_1 g_2 Q; \quad g_1 = a_\xi; \quad g_2 = (a_1 \cdots a_\nu\, u_1 \cdots u_{4-\nu}),$$

so besteht der $R_{1\nu}$ Process in den Formeln

$$R_{1\nu}(g_1g_2) = a_\xi(a_1 \cdots a_\nu u_1 \cdots u_{\varkappa_1-\nu}) - a_{1,\xi}(aa_2 \cdots a_\nu u_1 \cdots u_{4-\nu}) - \cdots - (aa_1 \cdots a_{\nu-1} u_1 \cdots u_{4-\nu})$$

$$R_{1\nu}(P) = R_{1,\nu}(g_1g_2) \cdot Q.$$

2. Der Process R_{22}.

g_1 und g_2 seien zwei der Factoren (5) von P. g_1 enthalte die Symbole a, a_1, aber keines der Symbole a_2, a_3 und g_2 enthalte die Symbole a_2, a_3 aber keines der Symbole a, a_1; setzt man

$$P = g_1 g_2 Q; \quad g_1 = (aa_1u_1u_2); \quad g_2 = (a_2a_3u_2u_3),$$

so besteht der R_{22} Process in den Formeln

$$R_{22}(g_1g_2) = (aa_1u_1u_2)\,(a_2a_3u_3u_4) - (aa_1u_3u_4)\,(a_2a_3u_1u_2),$$

$$R_{22}(P) = R_{22}(g_1g_2) \cdot Q.$$

§ 7.

Factoren mit μ Symbolen a.

Wir befassen uns von nun an mit der Form

$$f = a_x^2 = a_{1,x}^2 = a_{2,x}^2 \cdots.$$

Die Invarianten J sind Aggregate symbolischer Producte P, welche aus Factoren (5) zusammengesetzt sind. Jedes Symbol a steht in zwei dieser Factoren.

g sei ein Factor von P und enthalte die Symbole

$$a_1, a_2, \cdots a_\nu.$$

Dieselben stehen das zweite Mal in anderen Factoren. Wir behaupten

„P ist ein Aggregat von Producten $P_1, P_2, \cdots$, deren jedes ausser g noch einen Factor g_1 hat, in dem gleichfalls $a_1, a_2, \cdots a_\nu$ stehen."

Beweis.

Wir nehmen an, dass μ von den ν Symbolen von g

$$a_1, a_2, \cdots a_\mu$$

in einem zweiten Factor g_2 von P stehen. $a_{\mu+1}$ möge in einem dritten Factor g_3 stehen.

Wir setzen

$$P = g g_2 g_3 Q$$

und wenden den Process $R_{1,\mu}$ an.

$R_{1\mu}(g_2 g_3)$ ist ein Aggregat von Factoren g_1, welche die Symbole

$$a_1, a_2, \cdots a_{\mu+1}$$

enthalten und $R_{1\mu}(P)$ ein Aggregat von Producten:

$$P_1 = g g_4 Q.$$

Aus der Formel

$$(\mu+1)P = R_{1,\mu}(P)$$

folgt, dass auch P ein Aggregat solcher Producte ist.

Durch dieses Verfahren sind wir von der Zahl μ zur Zahl $\mu+1$ fortgeschritten, wiederholen wir es, so gelangen wir zu den Zahlen

$$\mu+2, \mu+3, \cdots \nu.$$

§ 8.

Das System von f.

Das System von f beteht aus den Formen

$$f = a_x^2; \quad (a a_1 p)^2; \quad (a a_1 a_2 u)^2; \quad (a a_1 a_2 a_3)^2. \tag{6}$$

Beweis.

Nach dem vorigen Satze lässt sich ein P, welches den Factor $(a_1 a_2 a_3 a_4)$ hat, als Aggregat von Producten P_1 darstellen, die ausser ihm noch einen zweiten Factor $(a_1 a_2 a_3 a_4)$ haben.

Hieraus folgt, dass P den Factor $(a_1 a_2 a_3 a_4)^2$ besitzt.

Hat P keinen Factor $(a_1 a_2 a_3 a_4)$ dagegen aber einen Factor $g = (a_1 a_2 a_3 u)$, so lässt es sich als Aggregat von Producten P_1 darstellen, die ausser g noch Factoren haben, in denen a_1, a_2, a_3 stehen, also Factoren

$$(a_1 a_2 a_3 u), \quad (a_1 a_2 a_3 a_4)$$

besitzen; P ist dann ein Aggregat von Formen, welche entweder den Factor $(a_1 a_2 a_3 a_4)^2$, oder den Factor $(a_1 a_2 a_3 u)^2$ haben.

Hat P keinen der Factoren $(a_1 a_2 a_3 a_4)$, $(a_1 a_2 a_3 u)$, dagegen aber den

Factor $g = (a_1 a_2 p)$, so lässt es sich als Aggregat von Producten darstellen, die ausser g Factoren haben, in denen a_1 und a_2 stehen. Es sind diess die Factoren

$$(a_1 a_2 p), \quad (a_1 a_2 a_3 u), \quad (a_1 a_2 a_3 a_4).$$

P ist ein Aggregat von Producten P_1, welche die Factoren

$$(a_1 a_2 p)^2, \quad (a_1 a_2 a_3 u)^2, \quad (a_1 a_2 a_3 a_4)^2$$

haben.

Hat P keinen der Factoren

$$(a_1 a_2 p), \quad (a_1 a_2 a_3 u), \quad (a_1 a_2 a_3 a_4),$$

so hat es nur Factoren a_x also den Factor a_x^2.

In allen Fällen ist P ein Aggregat der Formen (6). Die Coefficienten sind Invarianten, also gleichfalls solche Aggregate. P ist somit eine ganze Function der Formen (6).

II. Capitel.

Die Symbole φ und ψ.

§ 1.

Simultane Invarianten.

Ebenso wie das System von

$$f = a_x^2$$

aus den vier Formen (6) I. Cap. besteht, besteht das System einer zweiten Form

$$f_1 = b_x^2$$

aus den vier Formen

$$b_x^2; \quad (b b_1 p)^2; \quad (b b_1 b_2 u)^2; \quad (b b_1 b_2 b_3)^2.$$

Die simultanen Invarianten J von f und f_1 sind Aggregate symbolischer Producte P, welche aus den Factoren

$$a_x, \; b_x, \; (a a_1 p), \; (a b p), \; (b b_1 p), \; (a a_1 a_2 u), \; (a a_1 b u), \; (a b b_1 u), \; (b b_1 b_2 u),$$
$$(a a_1 a_2 a_3), \; (a a_1 a_2 b), \; (a a_1 b b_1), \; (a b b_1 b_2), \; (b b_1 b_2 b_3)$$

zusammengesetzt sind. Jedes der Symbole a, b steht in zwei Factoren.

§ 2.

Charaktere.

Gewisse in den P vorkommende Zahlen nennen wir ihre Charaktere und bezeichnen sie mit

$$c_1, \; c_2, \; c_{12}, \; c_{13}, \; c_{14}, \; c_{23}, \; c_{23}, \; c_{24}.$$

1. o_1.

o_1 ist der Grad von P in den Coefficienten von f. Es ist die Anzahl der verschiedenen Symbole a, welche in P stehen.

2. o_2.

o_2 ist der Grad von P in den Coefficienten von f_1. Es ist die Anzahl der verschiedenen Symbole b, welche in P stehen.

3. $c_{1\nu}$.

$c_{1\nu}$ ist die Anzahl der Factorenpaare gg_1 von P, in denen g und g_1 die Symbole

$$a_1, a_2, \cdots a_\nu$$

gemein haben.

4. $c_{2\nu}$.

$c_{2\nu}$ ist die Anzahl der Factorenpaare gg_1 von P, in denen g und g_1 die Symbole

$$b_1, b_2, \cdots b_\nu$$

gemein haben. Haben g und g_1 die Symbole

$$a_1 \cdots a_\nu \quad \text{oder} \quad b_1 \cdots b_\nu$$

gemein, so bildet gg_1 ein zu demselben gehöriges Factorenpaar.

§ 3.

Anordnung der P.

Wir ordnen die P nach ihren Charakteren in dieser Weise.

1. c_1, c_2.

P_1 steht vor P_2, wenn einer der beiden Charaktere c_1, c_2 in P_1 kleiner als in P_2 ist und der andere in P_1 nicht grösser als in P_2 ist.

2. c_{14}, c_{24}.

Haben P_1 und P_2 dieselben Charaktere c_1, c_2, so steht P_1 vor P_2, wenn einer der beiden Charaktere c_{14}, c_{24} in P_1 grösser als in P_2 ist und der andere in P_2 nicht kleiner als in P_2 ist.

3. c_{13}, c_{23}.

Haben P_1 und P_2 dieselben Charaktere c_1, c_2, c_{14}, c_{24}, so steht P_1 vor P_2, wenn einer der beiden Charaktere c_{13}, c_{23} in P_1 grösser als P_2 ist und der andere in P_1 nicht kleiner als in P_2 ist.

4. c_{14}, c_{24}.

Haben P_1 und P_2 dieselben Charaktere $c_1, c_2, c_{14}, c_{24}, c_{13}, c_{23}$, so steht P_1 vor P_2, wenn einer der beiden Charaktere c_{14}, c_{24} in P_1 grösser als in P_2 ist und der andere P_1 nicht kleiner als in P_2 ist.

§ 4.

Reducibilität.

Steht in dieser Anordnung P_1 vor P_2, so nennen wir P_1 einfacher als P_2.

Lässt sich ein P als ganze Function von einfacheren Formen ausdrücken, so nennen wir es reducibel und bezeichnen dies durch die Formel

$$P \equiv 0.$$

In dem simultanen System von f und f_1 stehen nur irreducible Formen.

Sind alle Formen P, welche einen Factor g haben reducibel, so nennen wir diesen Factor Reducent und bezeichnen dies durch die Formel

$$g \equiv 0.$$

§ 5.

Aequivalenz.

Die irreducibeln Producte P_1 und P_2 heissen äquivalent, wenn keines einfacher als das andre und

$$P_1 - P_2$$

einfacher als P_1 und P_2 ist. Wir bezeichnen dies durch die Formel:

$$P_1 \equiv P_2.$$

Sind

$$P_1, P_2, \cdots$$

alle Producte, welche P äquivalent sind, so nennen wir sie eine Gruppe äquivalenter Formen. Jede in dieser Gruppe stehende Form bestimmt sie und heisst ihr Repräsentant.

Das simultane System von f und f_1 enthält aus jeder Gruppe nur eine Form, ihren Repräsentanten.

§ 6.

Die Factoren $(a_1 a_2 a_3 a_4)$, $(b_1 b_2 b_3 b_4)$.

Ist in P

$$c_{14} > 0 \quad \text{oder} \quad c_{24} > 0$$

so hat es die Factoren

$$(a_1 a_2 a_3 a_4)^2, \quad (b_1 b_2 b_3 b_4)^2.$$

Diese beiden Formen sind die einzigen irreducibeln Formeln, für welche

$$c_{14} > 0 \quad \text{oder} \quad c_{24} > 0,$$

für alle übrigen ist

$$c_{14} = 0; \quad c_{24} = 0.$$

Hat P einen der Factoren

$$(a_1 a_2 a_3 a_4), \quad (b_1 b_2 b_3 b_4),$$

so ist es nach § 7, I. Capitel ein Aggregat von Producten, welche dieselben noch ein zweites Mal haben; es ist dann durch die Formen

$$(a_1 a_2 a_3 a_4)^2, \quad (b_1 b_2 b_3 b_4)^2$$

theilbar, also reducibel.

Die Factoren

$$(a_1 a_2 a_3 a_4), \quad (b_1 b_2 b_3 b_4)$$

sind Reducenten und stehen nicht in irreducibeln P ausser in

$$(a a_1 a_2 a_3)^2, \quad (b b_1 b_2 b_3)^2.$$

Diese sind nur aus den übrigen der Factoren (1) zusammengesetzt:

$$a_x, \; b_x, \; (a a_1 p), \; (a b p), \; (b b_1 p), \; (a a_1 a_2 u), \; (a a_1 b u), \; (a b b_1 u), \; (b b_1 b_2 u),$$
$$(a a_1 a_2 b), \; (a a_1 b b_1), \; (a b b_1 b_2).$$

§ 7.

Die Symbole α und β.

Die c_{13} und c_{23} Factorenpaare $g_1 g_2$, in denen $g_1 g_2$ dieselben drei Symbole a oder dieselben drei Symbole b enthalten, haben die Factoren

$$(a_1 a_2 a_3 u), \quad (a_1 a_2 a_3 b), \quad (a b_1 b_2 b_3), \quad (b_1 b_2 b_3 u).$$

Setzt man

$$(a_1 a_2 a_3 u)^2 = u_\alpha^2; \quad (b_1 b_2 b_3 u)^2 = u_\beta^2,$$

so werden sie

$$u_\alpha, \quad b_\alpha, \quad -a_\beta, \quad u_\beta.$$

Die Reducenten

$$(a a_1 a_2 a_3), \quad (b b_1 b_2 b_3)$$

werden in den neuen Symbolen

$$a_\alpha \quad \text{und} \quad b_\beta \;;$$

sie genügen den Formeln:

$$a_\alpha a_x u_\alpha = \frac{1}{4} a_\alpha u_x; \quad b_\beta b_x u_\beta = -\frac{1}{4} b_\beta^2 u_x.$$

§ 8.

Die Reducenten $u_\alpha v_{\alpha_1} - u_{\alpha_1} v_\alpha$ und $u_\beta v_{\beta_1} - u_{\beta_1} v_\beta$.

Aus der Formel

$$\begin{aligned} u_\alpha v_{\alpha_1} - u_{\alpha_1} v_\alpha &= u_\alpha (a a_1 a_2 v) - v_\alpha (a a_1 a_2 u) \\ &= a_\alpha (a_1 a_2 u v) - a_{1,\alpha} (a a_2 u v) + a_{2,\alpha} (a a_1 u v) \end{aligned}$$

folgt, dass alle P, die den Factor $u_\alpha v_{\alpha_1} - u_{\alpha_1} v_\alpha$ haben, auch die Factoren a_α^2 besitzen, also reducibel sind.

Die Ausdrücke:

$$u_\alpha v_{\alpha_1} - v_\alpha u_{\alpha_1}, \quad u_\beta v_\beta - v_\beta u_\beta$$

sind Reducenten; es bestehen die Relationen

$$u_\alpha v_{\alpha_1} \equiv u_{\alpha_1} v_\alpha,$$
$$u_\beta v_{\beta_1} \equiv u_\beta\, v_\beta.$$

§ 9.

Die Indices der α und β.

Vertauscht man in P die Indices der α oder die Indices der β, so gelangt man zu einer Gruppe äquivalenter Formen

$$P_1, P_2, \cdots.$$

Um einen Repräsentanten derselben zu finden, verfahren wir folgendermassen:

1. Wir lassen in P die Indices der α und β weg und gelangen so zu einem Product P^1.
2. Wir fügen in P^1 den α und β Indices der Art an, dass jedes Symbol in zwei Factoren auftritt.

Die Gruppe

$$P_1, P_2, \cdots$$

ist durch das Product P^1 bestimmt; nur mit ihm wollen wir uns von nun an beschäftigen.

Da ein Missverständniss ausgeschlossen ist, bezeichnen wir die P^1 wieder mit P.

Den c_{13} Factorenpaaren, welche drei Symbole a enthalten und den c_{23} Factorenpaaren, welche drei Symbole b enthalten, entsprechen nunmehr $2c_{13}$ Factoren, in denen Symbole α und $2c_{23}$ Factoren, in denen Symbole β stehen.

§ 10.

Die Factoren $g = (a_1 a_2 a_3 u)$ und $(b_1 b_2 b_3 u)$ sind Reducenten.

Beweis.

Der Beweis wird in ähnlicher Weise wie in § 7 Cap. I geführt.

P habe den Factor

$$g = (a_1 a_2 a_3 u);$$

die Symbole

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3$$

seien ausserdem in anderen Factoren $g_1, g_2, \cdots$

$$P = g g_1 g_2 Q.$$

Die Symbole

$$a_1, a_2, \cdots a_\mu$$

mögen in g und das Symbol $a_{\mu+1}$ in g_2 stehen.

Wir unterscheiden die beiden Fälle $\mu = 1$ und $\mu = 2$ und behandeln jeden besonders.

Erster Fall $\mu = 1$.

g_1 und g_2 mögen je eines der Symbole a enthalten. Da P höchstens einen der Factoren

$$a_{1,\beta}, \; a_{2,\beta} \; a_{3,\beta}$$

enthält, so dürfen wir g_1, g_2 so wählen, dass das Symbol β nicht in ihnen steht.

Es wird dann (vgl. I. Capitel § 6)

$$R_{11}(g_1 g_2)$$

ein Aggregat von Factoren g_3, welche zwei der Symbole (1) etwa a_1, a_2 enthalten.

$$R_{11}(P) = 2P$$

wird ein Aggregat von Producten P_1, welche die Factoren gg_3 enthalten.

Zweiter Fall $\mu = 2$.

$$g_1 = (a_1 a_2 u_1 u_2),$$

g_2 enthält das Symbol a_3.

$$R_{12}(g_1 g_2)$$

ist ein Aggregat von Factoren g_3, welche die Symbole

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3$$

enthalten.

$$R_{12}(P) = 3P$$

ist ein Aggregat von Producten P_1, welche das zu den Symbolen

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3$$

gehörige Factorenpaar gg_3 enthalten.

Die P_1 haben einen Charakter c_{13}, der um 1 grösser als in P ist und sind demnach einfacher als P; dieses ist reducibel.

§ 11.

Die Factoren (2).

Da nach § 10 die Factoren

$$(aa_1a_2u), \quad (aa_1a_2b), \quad (abb_1b_2), \quad (bb_1b_2u)$$

Reducenten sind, so darf man sie aus der Liste der Factoren 1_a und 1_b weglassen.

Die irreducibeln P sind aus den Factoren
$u_\alpha,\ u_\beta,\ a_x,\ b_x,\ a_\beta,\ b_\alpha,\ (abp),\ (aa_1p),\ (aa_1bu),\ (bb_1p),\ (abb_1u),\ (aa_1bb_1)$
zusammengesetzt.

§ 12.

Factoren g, in denen zwei Symbole a oder b stehen.

Die Symbole a, a_1 mögen in einem Factor g von P stehen. Sie kommen noch in je einem andern Factor von P vor. Wir unterscheiden diese fünf Fälle.

Erster Fall.

a, a_1 stehen in einem zweiten Factor g_1 zusammen.

Zweiter Fall.

a, a_1 stehen in den Factorenpaaren

$$g_1 g_2 : a_\beta a_{1,x},\quad a_\beta(a_1bp),\quad a_x(a_1bb_1u).$$

Dritter Fall.

Mindestens eines der Symbole a, a_1 etwa a steht in Factoren:

$$g_1 : (aa_2p),\quad (aa_2bu),\quad (aa_2bb_1).$$

Vierter Fall.

a steht im Factor

$$g_1 = (abp)$$

und a_1 in einem der Factoren:

$$g_2 : a_{1,x}(a_1b_1p),\quad (a_1b_1b_2u).$$

Fünfter Fall.

a steht im Factor

$$g_1 = (abb_1u)$$

und a_1 in einem der Factoren

$$g_2 : a_{1,\beta},\quad (a_1b_2b_3u).$$

Die analoge Unterscheidung treffen wir, wenn b, b_1 in einem Factor g von P stehen.

Die fünf Fälle lauten dann:

Erster Fall.

b, b_1 stehen in einem zweiten Factor g_1 zusammen.

Zweiter Fall.

b, b_1 stehen in den Factorenpaaren:

$$g_1 g_2 : b_\alpha b_{1,x},\quad b_\alpha(ab_1p),\quad b_x(aa_1b_2u).$$

Dritter Fall.

b steht in einem der Factoren:

$$g_1 : (bb_2p), \quad (abb_2u), \quad (aa_1bb_2).$$

Vierter Fall.

b steht im Factor

$$g_1 = (abp)$$

und b_1 in einem der Factoren:

$$g_2 : b_{1,x}, \quad (a_1b_1p), \quad (aa_1b_1u).$$

Fünfter Fall.

b steht im Factor

$$g_1 = (aa_1bu)$$

und b_1 in einem der Factoren:

$$g_2 : b_{1,\alpha}, \quad (a_2a_3b_1u).$$

§ 13.

P ist reducibel, wenn es einen Factor g hat, in dem a und a_1 resp. b, b_1 stehen und wenn der dritte, vierte oder fünfte Fall des vorigen Paragraphen eintritt.

Beweis.

Wir setzen

$$P = gg_1g_2Q$$

und leiten hieraus die Formeln ab

$$2P = R_{11}(P) = gPR_{11}(g_1g_2).$$

Wendet man auf $R_{11}(g_1g_2)$ den Identitätssatz an, so erhält man neben Reducenten nur Factoren g_3, welche die Symbole a, a_1 enthalten, ohne die in g_1, g_2 etwa stehenden Symbolenpaare b zu trennen. P ist ein Aggregat von Producten P_1, welche die Factorenpaare gg_3 enthalten.

Der Charakter c_{12} von P_1 ist um 1 grösser als in P und der Charakter c_{22} gerade so gross wie in P. P_1 ist einfacher als P und dieses reducibel.

§ 14.

P ist reducibel, wenn es den Factor

$$(aa_1u_1u_2)a_x(a_1bb_1u)$$

aber keinen andern Factor enthält, in dem b, b_1, zusammenstehen.

Beweis.

Setzt man:

$$P = (aa_1u_1u_2)\,a_x(a_1bb_1u)\,Q,$$

so erhält man die Formel

$$2P = (aa_1u_1u_2)\,Q\,(a_x(a_1bb_1u) - a_{1,x}(abb_1u))$$
$$= (aa_1u_1u_2)\,Q(b_{1,x}(aa_1bu) - b_x(aa_1b_1u)) = P_1 - P_2.$$

In P_1 und P_2 ist der Charakter c_{12} um 1 grösser als in P und der Charakter c_{23} ebensogross wie in P. P_1 und P_2 sind einfacher als P.

---

in derselben Art beweist man, dass P reducibel ist, wenn es den Factor

$$(bb_1u_1u_2)\,b_x(aa_1b_1u)$$

aber ~~keinen~~ andern Factor hat, in dem a, a_1 zusammenstehen.

§ 15.

$(aa_1u_1u_2)\,(bb_1u_2u_3)\,(abp)$ ist Reducent.

Beweis.

Hat P den Factor

$$(aa_1u_1u_2)\,(bb_1u_3u_4)\,(abp)$$

so kommen die Symbole a_1 und b_1 noch in je einem andern Factor von P vor.

Steht a_1 in einem der Factoren

$$a_{1,x},\ (a_1a_2p),\ (a_1a_2b_2u),\ (a_1b_2b_3u),\ (a_1a_2b_2b_3),\ (a_1b_2p)$$

oder b_1 in einem der Factoren

$$b_{1,x},\ (b_1b_2p),\ (a_2b_1b_2u),\ (a_2a_3b_1u),\ (a_2a_3b_1b_2),\ (a_2b_1p),$$

so ist P nach § 13 reducibel.

Es bleibt nur der Fall zu erörtern, wo a_1 und b_1 in den Factoren

$$a_{1,\beta},\quad b_{1,\alpha}$$

stehen, also P die Form hat

$$P = (a_1a_2u_1u_2)\,(b_1b_2u_3u_4)\,(abp)\,a_{1,\beta}\,b_{1,\alpha}\,Q.$$

Setzt man für p seinen Werth $\bar{u}\bar{v}$ ein, so gelangt man zu den Formeln

$$2P = (aa_1u_1u_2)\,(bb_1u_3u_4)\,a_{1,\beta}\,Q(b_{1,\alpha}(abuv) - b_\alpha(ab_1uv))$$
$$\equiv (aa_1u_1u_2)\,(bb_1u_3u_4)\,a_{1,\beta}\,Q(u_\alpha(abb_1v) - v_\alpha(abb_1u)),$$

$$4P = (aa_1u_1u_2)\,(bb_1u_3u_4)\,Q\begin{cases} u_\alpha(a_{1,\beta}(abb_1v) - a_\beta(a_1bb_1v)) \\ -v_\alpha(a_{1,\beta}(abb_1u) - a_\beta(a_1bb_1v)) \end{cases}$$
$$\equiv (aa_1u_1u_2)\,(bb_1u_3u_4)\,Q((abb_1a_1)u_\alpha v_\beta - (abb_1a_1)\,v_\alpha u_\beta),$$

$$4P \equiv (aa_1u_1u_2)(bb_1u_3u_4)(aa_1bb_1)(u_\alpha v_\beta - v_\alpha u_\beta)$$
$$= (aa_1u_1u_2)(bb_1u_3u_4)(aa_1bb_1)(\alpha\beta p).$$

In dem Ausdruck rechter Hand sind die Charaktere c_{12}, c_{32} um 1 grösser, als in P, er ist einfacher als P.

§ 16.

Irreducible Producte mit Factoren $(aa_1u_1u_2)$, $(bb_1u_1u_2)$.

1) Hat ein irreducibles P den Factor

$$(aa_1u_1u_2),$$

so stehen a, a_1 noch in je einem andern Factor.

Es können vier Fälle eintreten:

Erster Fall.

P hat einen zweiten Factor $(aa_1u_3u_4)$.

Zweiter Fall.

P hat den Factor

$$(bb_1u_3u_4)\,a_x(a_1bb_1u) = \frac{1}{2}(bb_1u_3u_4)\,(a_x(a_1bb_1u) - a_{1,x}(abb_1u)).$$

Dritter Fall.

P hat den Factor

$$a_\beta a_{1,x} = \frac{1}{2}(a_\beta a_{1,x} - a_x a_{1,\beta}).$$

Vierter Fall.

P hat den Factor

$$a_\beta(a_1bp) = \frac{1}{2}(a_\beta(a_1bp) - a_{1,\beta}(abb_1)),$$

aber keinen Factor $(bb_1u_3u_4)$.

2) Hat ein irreducibles P den Factor

$$(bb_1u_1u_2)$$

so stehen b, b_1 noch in je einem zweiten Factor.

Es können vier Fälle eintreten.

Erster Fall.

P hat einen zweiten Factor $(bb_1u_3u_4)$.

Zweiter Fall.

P hat den Factor

$$(aa_1u_3u_4)\,b_x(au_1b_1u) = \frac{1}{2}(aa_1u_3u_4)(b_x(aa_1b_1u) - b_{1,x}(aa_1bu)).$$

Dritter Fall.

P hat den Factor

$$b_\alpha b_{1,x} = \frac{1}{2}(b_\alpha b_{1,x} - b_x b_{1,\alpha}).$$

Vierter Fall.

P hat den Factor

$$b_\alpha(ab_1p) = \frac{1}{2}(b_\alpha(ab_1p) - b_{1,\alpha}(abp)),$$

aber keinen Factor $(aa_1u_3u_4)$.

§ 17.

Die Factoren (3).

Wir fügen den Factoren (2) § 11 noch diese hinzu:

$$\begin{gathered} a_x(a_1bb_1u) - a_{1,x}(abb_1u) = b_{1,x}(aa_1bu) - b_x(aa_1b_1u), \\ a_\beta a_{1,x} - a_{1,\beta}a_x, \quad b_\alpha b_{1,x} - b_{1,\alpha}b_x, \quad (\alpha\beta p), \\ F_1 = a_\beta(a_1bp) - a_{1,\beta}(abp), \quad F_2 = b_\alpha(ab_1p) - b_{1,\alpha}(abp). \end{gathered} \tag{3}$$

Die irreducibeln P, die aus den Factoren (2) und (3) bestehen, haben diese beiden Eigenschaften.

1. Jedem Factor, in dem a, a_1 zusammenstehen, entspricht ein zweiter, der sie gleichfalls enthält.
2. Jedem Factor, in dem b, b_1 stehen, entspricht ein zweiter, der sie gleichfalls enthält.

Wir bezeichnen das Product der Factorenpaare von P, welche zu zwei Symbolen a gehören, mit S_1 und das Product der Factorenpaare von P, welche zu zwei Symbolen b gehören, mit S_2 und setzen

$$P = S_1 Q_1 = S_2 Q_2.$$

Q_1 enthält keine Factoren, in denen zwei Symbole a stehen und Q_2 keine Factoren, in denen zwei Symbole b stehen.

§ 18.

Die Processe R_{11} und R_{22}.

1. Der Process R_{11}.

Es seien g_1 und g_2 zwei Factoren von Q_1, von denen der erste das Symbol a und der zweite das Symbol a_1 enthält. $R_{11}(g_1g_2)$ ist dann ein Aggregat von Factoren g_3, in denen die Symbole a, a_1 zusammenstehen.

$R_{11}(P)$ ist ein Aggregat von Producten P_1, welche Factoren g_3 besitzen. Diese P_1 lassen sich wieder als Aggregate von Formen P_2 darstellen, die noch einen zweiten Factor g_4 haben, in dem a, a_1 zusammenstehen. In den P_2 ist der Charakter c_{12} um 1 grösser als in P und der Character c_{22} ebenso gross wie in P; P_2 und $R_{11}(P)$ sind einfacher als P.

2. Der Process R_{22}.

Es seien g_1 und g_2 zwei Factoren von S_1; der erste möge die Symbole a_1, a_2, der zweite die Symbole a_3, a_4 enthalten. $R_{22}(g_1 g_2)$ ist dann ein Aggregat von Factoren g_3, in denen drei der Symbole a_1, a_2, a_3, a_4 stehen.

$R_{22}(P)$ ist ein Aggregat von Producten P_1, welche die Reducenten g_3 zu Factoren haben. Diese P_1 sind wieder Aggregate von Formen P_2, deren Charaktere c_{13} um 1 grösser als die P sind, während die Charaktere c_{23} in P_2 so gross wie in P sind. Die P_2 und die $R_{22}(P)$ sind einfacher als P.

Wir erhalten so die Sätze:

1. „Vertauscht man in zwei Factoren g_1, g_2 von Q_1, in denen die Symbole a, a_1 stehen, dieselben mit einander, so geht P in eine äquivalente Form über."
2. „Vertauscht man in zwei Factoren g_1, g_2 von Q_2, in denen die Symbole b, b_1 stehen, dieselben mit einander, so geht P in eine äquivalente Form über."
3. „Vertauscht man in zwei Factoren g_1, g_2 von S_1, in denen die Symbolenpaare a_1, a_2 und a_3, a_4 stehen, diese mit einander, so geht P in eine äquivalente Form über."
4. „Vertauscht man in zwei Factoren g_1, g_2 von S_2, in denen die Symbolenpaare b_1, b_2 und b_3, b_4 stehen, diese mit einander, so geht P in eine äquivalente Form über."

§ 19.

Gruppen äquivalenter Formen.

Durch die in diesen Sätzen gegebenen Vertauschungen erhält man aus einer Form P eine Gruppe äquivalenter Formen

$$P_1, P_2 \cdots .$$

Um einen Repräsentanten dieser Gruppe zu finden, wenden wir dasselbe Verfahren wie in § 9 an.

1. Wir erzeugen aus P eine Form P^1, indem wir

   1[te] In Q_1 und Q_2 die Indices der Symbole a und b weglassen.

   2[te] In S_1 und S_2 die Indices der Symbolenpaare a und der Symbolenpaare b in die Zahlen 1, 2 überführen.

2. Wir erzeugen aus P_1 einen Repräsentanten unserer Gruppe, indem wir den a in Q_1 und den b in Q_2 Indices zufügen und die Indices 1, 2 der a in S_1 und der b in S_2 durch andere Indicespaare der Art ersetzen, dass im Resultat jedes Symbol a, jedes Symbol b, jedes Symbolenpaar der a und jedes Symbolenpaar der b in zwei Factoren auftritt.

Aus dem System der P_1 lässt sich das der P ableiten. Wir wollen uns von nun an nur noch mit den P^1 beschäftigen und, da jedes Missverständniss ausgeschlossen ist, die P^1 wieder mit P bezeichnen.

§ 20.

Die Symbole φ, ψ.

Die P sind bisher in den Symbolen

$$a, \quad b, \quad \alpha, \quad \beta$$

ausgedrückt; statt ihrer führen wir neue Symbole

$$\varphi, \quad \psi$$

ein und definiren sie durch die Tafel 1.

Jedes der Symbole φ, ψ steht in den Invarianten P in einer geraden Anzahl von Factoren.

Producte N, bei denen ein φ oder ψ in einer ungeraden Anzahl von Factoren steht, sind keine Invarianten, können aber Factoren von Invarianten sein.

Die Factoren

$$(\varphi_2 \psi_2)$$

haben zwei Indices 1, 2. Jede Invariante, welche μ solcher Factoren enthält, hat $\mu + 1$ Werthe.

§ 21.

Die Symbole g und h.

Unter den Factoren von P befinden sich

$$F_1 = (p_1 \varphi_3 \psi_2) \quad \text{und} \quad F_2 = (\varphi_2 \psi_1 \psi_3),$$

wir können sie auch, wenn wir die Indices i und $\varkappa$ einführen, so bezeichnen

$$F_1 = (\varphi_{i_1} \varphi_{i_2} \psi_2), \qquad F_2 = (\varphi_2 \psi_{\varkappa_1} \psi_{\varkappa_2}),$$

wo $i_1 i_2$, $\varkappa_1 \varkappa_2$ Permutationen der Zahlen 1, 3 bedeuten.

Die in F_1 stehenden Symbole φ_{i_1}, φ_{i_2}, ψ_2 bezeichnen wir in irgend einer Reihenfolge mit g_1, g_2, g_3 und die in F_2 stehenden Symbole φ_2, $\psi_{\varkappa_1}$, $\psi_{\varkappa_2}$ in irgend einer Reihenfolge mit h_1, h_2, h_3, so dass F_1 und F_2 die Werthe haben

$$F_1 = (g_1 g_2 g_3), \qquad F_2 = (h_1 h_2 h_3).$$

III. Capitel.

Die Invarianten $J^{(1)}$, $J^{(2)}$, $J^{(3)}$. (Tafel 2, 3, 4.)

§ 1.

Eintheilung der Invarianten J.

Wir theilen die Producte P also die Invarianten J unseres Systems in diese sechs Classen ein, die wir mit

$$J^{(1)}, J^{(2)}, \dots J^{(6)}$$

bezeichnen und so definiren:

1. Die $J^{(1)}$. (Tafel 2.)

Die $J^{(1)}$ sind die Quadrate der Factoren der Tafel 1.

2. Die $J^{(2)}$. (Tafel 3.)

Die $J^{(2)}$ sind Producte der $(\varphi\psi)$, welche keinen Exponenten haben, der > 1 ist.

3. Die $J^{(3)}$. (Tafel 4.)

Die $J^{(3)}$ sind Producte der

$$(\varphi), \ (\psi) \ \text{ und } \ (\varphi\psi).$$

4. Die $J^{(4)}$. (Tafel 5.)

Die $J^{(4)}$ haben den Factor F_1 aber nicht den Factor F_2.

5. Die $J^{(5)}$. (Tafel 6.)

Die $J^{(5)}$ haben den Factor F_2 aber nicht den Factor F_1.

6. Die $J^{(6)}$. (Tafel 7).

Die $J^{(6)}$ haben den Factor $F_1 \cdot F_2$.

Die $J^{(5)}$ entstehen aus den $J^{(4)}$, wenn man die Symbole φ mit den ψ vertauscht.

§ 2.

Die $J^{(1)}$. (Tafel 2.)

Die $J^{(1)}$ sind durch die Quadrate der Factoren der Tafel 1 dargestellt, sie haben die Form

$$(\varphi_i)^2, \quad (\psi_x)^2, \quad (\varphi_i\psi_x)^2, \quad F_1^2, \quad F_2^2.$$

Da die $(\varphi_2\psi_2)^2$ 3 Werthe haben, so giebt es 21 $J^{(1)}$.

Darunter sind die

$$(\varphi_i)^2, \quad (\psi_x)^2$$

die vier Invarianten des Systems von f und die vier Invarianten des Systems von f_1.

Die $J^{(1)}$ sind die einzigen Invarianten des simultanen Systems von f und f_1, welche quadratische Factoren haben; in allen übrigen treten nur lineare Factoren auf.

§ 3.

Die Producte M.

Die M sind Producte von ϱ Factoren $(\varphi\psi)$, welche keine Invariante $J^{(2)}$, die weniger als ϱ Factoren hat, zum Factor haben.

Die $J^{(2)}$ sind Producte M, in denen jedes der Symbole φ, ψ in einer geraden Anzahl von Factoren steht.

Aus jedem M lassen sich andere M durch diese zwei Processe ableiten.

1. Permutation der Indices der φ, ψ.
2. Vertauschung der Symbole φ und ψ.

Die aus einem M durch diese Processe entstehenden Formen heissen ihre Ableitungen.

In den ϱ Factoren $(\varphi\psi)$ von M stehen ϱ Symbole φ und ϱ Symbole ψ.

§ 4.

Die Producte M_ϱ.

Die Ableitungen von M_ϱ

$$M_{\varrho 1}, \; M_{\varrho 2}, \cdots$$

bilden eine Gruppe; die Repräsentanten derselben bezeichnen wir mit M_ϱ.

Die M_ϱ:

$$M_{\varrho 1}, \; M_{\varrho 2}, \cdots$$

sind Ableitungen von M_ϱ.

§ 4.

Die Producte T.

Die M_ϱ, welche die Form haben

$$(\varphi_{i_1}\psi_{x_1})\,(\varphi_{i_2}\psi_{x_1})\,(\varphi_{i_2}\psi_{x_2})\,(\varphi_{i_3}\psi_{x_2})\,(\varphi_{i_3}\psi_{x_3})\cdots$$

bezeichnen wir mit T_ϱ. Die 2ϱ Symbole φ, ψ treten in ihnen in zweierlei Art auf.

1. Symbole m, die in zwei benachbarten Factoren stehen, ihre Anzahl ist $2(\varrho-1)$.

2. Zwei Symbole, welche als 1tes im 1ten und als 2tes im letzten Factor stehen. Wir nennen sie die Führungssymbole von T_ϱ, bezeichnen sie mit l_1, l_2 und setzen

$$T_\varrho = [l_1 l_2]_\varrho .$$

Je zwei der 2ϱ in T_ϱ stehenden Symbole heissen verbunden. Sind l_3, l_4 in T_ϱ mit einander verbunden, so hat T_ϱ einen Factor

$$[l_3, l_4].$$

Steht in T_ϱ ein Symbol l_3 so lässt sich T_ϱ mittelst der Formeln:

$$[l_1 l_2]_\varrho = [l_1 l_3]_{\varrho_1} [l_2 l_3]_{\varrho_2}$$

in einfachere T zerlegen.

§ 6.

Die Invarianten H_ϱ.

Ist in

$$T_\varrho = [l_1 l_2]_\varrho$$

$l_1 = l_2$, so bezeichnen wir es mit H_ϱ.

Die H_ϱ enthalten jedes ihrer Symbole in einer geraden Anzahl von Factoren; sie sind Invarianten $J^{(2)}$.

Da die ϱ Symbole φ in je einer graden Factorenanzahl stehen, so ist der Index ϱ bei den H_ϱ eine gerade Zahl.

§ 7.

Jedes in einem T auftretende Symbol l_3 steht höchstens in zwei Factoren.

Indirecter Beweis.

Steht λ_3 im λ^{ten} und μ^{ten} Factor T, so ist das Product der Factoren $(\varphi\psi)$ angefangen vom λ^{ten} bis zum μ^{ten} eine Invariante H. T wäre durch sie theilbar; dies widerspricht der Definition, dass T irreducibel ist.

Ist T ein H, so tritt jedes in ihm stehende Symbol in zwei Factoren auf; andernfalls kommen die Führungssymbole b_1, b_2 in je einem Factor und die übrigen in je zwei benachbarten Factoren vor.

§ 8.

Die obere Grenze des Index ϱ in T_ϱ.

Die Anzahl der verschiedenen in T_ϱ auftretenden Symbole, ist je nachdem es ein H ist oder nicht

$$\varrho \quad \text{oder} \quad \varrho + 1.$$

Da es im Ganzen sechs verschiedene Symbole φ, ψ giebt, so bestehen die Formeln

$$\varrho \leqq 6 \qquad \text{für die } H.$$
$$\varrho \leqq 5 \qquad \text{für die übrigen } T.$$

Die H sind Ableitungen von

(1) $$(\varphi_1\psi_1)(\varphi_2\psi_1)(\varphi_2\psi_2)(\varphi_1\psi_2)$$

und

$$(\varphi_1\psi_1)(\varphi_2\psi_1)(\varphi_2\psi_2)(\varphi_3\psi_2)(\varphi_3\psi_3)(\varphi_1\psi_3)$$

und die übrigen T von:

(3) $$(\varphi_1\psi_1);\ (\varphi_1\psi_1)(\varphi_2\psi_1);\ (\varphi_1\psi_1)(\varphi_2\psi_1)(\varphi_2\psi_2);\ (\varphi_1\psi_1)(\varphi_2\psi_1)(\varphi_2\psi_2)(\varphi_3\psi_2);$$
$$(\varphi_1\psi_1)(\psi_2\psi_1)(\varphi_2\psi_2)(\varphi_3\psi_2)(\varphi_3\psi_3).$$

§ 9.

Die Invarianten K.

Ist

$$T_\varrho = [l_1 l_2]_\varrho$$

kein H, also

$$l_1 \gtrless l_2;$$

so kann man daraus die Invariante

$$K = [l_1 l_2]_\varrho (l_1)(l_2)$$

herstellen. Es ist eine Invariante $J^{(3)}$.

§ 10.

Hat ein M einen Factor T_ϱ

$$M = T_\varrho M_{(1)} = [l_1 l_2]_\varrho M_{(1)},$$

und steht eines der Berührungssymbole l etwa l_2 in M_1, so hat es auch ein T mit grösserem Index.

Beweis.

Da $M_{(1)}$ das Symbol l_2 enthält, hat es einen Factor

$$(l_2 l_3):$$

und M demnach den Factor

$$T_\varrho (l_2 l_3) = [l_1 l_3]_{\varrho+1}.$$

§ 11.

Hauptfactoren T.

Hat ein irreducibles M einen Factor T_ϱ:

$$M = T_\varrho M_{(1)} = [l_1 l_2]_\varrho M_{(1)}$$

und stehen die Führungssymbole l_1, l_2 nicht in $M_{(1)}$, so heisst T_ϱ ein Hauptfaetor von M.

U. A. sind diejenigen T_ϱ Hauptfactoren von M, bei denen die Indices ϱ die grössten Werthe haben.

§ 12.

Die H sind die einzigen Invarianten $J^{(2)}$.

Beweis.

Ist T_ϱ ein Hauptfactor von $J^{(2)}$.

$$J^{(2)} = [l_1 l_2]_\varrho M_{(1)},$$

so kommen l_1, l_2 in $M_{(1)}$ nicht vor.

Sie stehen in einer geraden Anzahl von Factoren in $J^{(2)}$ also auch in einer geraden Anzahl von Factoren in T_ϱ. Hieraus folgt:

$$l_1 = l_2,$$

$$T_\varrho = H,$$

$J^{(2)}$ hat einen Factor H und ist, da es irreducibel ist,

$$J^{(2)} = H.$$

Die $J^{(2)}$ sind nach § 8 1^te Ableitungen von

$$(\varphi_1\psi_1)(\varphi_2\psi_1)(\varphi_2\psi_2)(\varphi_1\psi_2),$$

$$(\varphi_1\psi_1)(\varphi_2\psi_1)(\varphi_2\psi_2)(\varphi_3\psi_2)(\varphi_3\psi_3)(\varphi_1\psi_3). \quad \text{(Tafel 3.)}$$

Hat ein Product N von Factoren $(\varphi\psi)$ zwei Factoren

$$T^{(1)} = [l_1 l_2]_{\varrho_1}, \qquad T^{(2)} = [l_1 l_2]_{\varrho_2},$$

welche keinen Factor $(\varphi\psi)$ gemein haben, so hat es auch den Factor

$$T^{(1)} T^{(2)} = H$$

ist also durch H theilbar.

Die $J^{(2)}$ sind die einzigen irreducibeln M, in denen drei Symbole mehr als einmal verbunden sind.

§ 13.

Die K sind die einzigen Invarianten $J^{(3)}$.

Beweis.

$J^{(3)}$ ist aus Factoren $(\varphi\psi)$, (φ), (ψ) zusammengesetzt, hat also die Form

$$J^{(3)} = MS,$$

wo M das Product seiner Factoren $(\varphi\psi)$ und S das seiner Factoren (φ), (ψ) bedeutet. Ist T_ϱ ein Hauptfactor von M, so ist, da $J^{(3)}$ irreducibel ist, $T_\varrho = [l_1 l_2]_\varrho$ keine Invariante H; es ist

$$l_1 \gtrless l_2,$$

$$J^{(3)} = [l_1 l_2]_\varrho M_{(1)} S.$$

Da $J^{(3)}$ eine Invariante ist, so enthält es die Symbole l_1, l_2 in einer geraden Anzahl von Factoren. $M_{(1)}$ enthält sie nicht und

$$[l_1 l_2]_\varrho$$

in je einem Factor. Sie müssen in S stehen. S hat den Factor

$$(l_1)(l_2)$$

und $J^{(3)}$ den Factor

$$K = [l_1 l_2]_\varrho (l_1)(l_2).$$

Da es irreducibel ist, so ist

$$J^{(3)} = K.$$

Die $J^{(3)}$ sind nach § 8 und 9 1[te] Ableitungen von

$$(\varphi_1\psi_1)(\varphi_1)(\psi_1); \quad (\varphi_1\psi_1)(\varphi_2\psi_1)(\varphi_1)(\varphi_2); \quad (\varphi_1\psi_1)(\varphi_1\psi_2)(\psi_1)(\psi_2);$$
$$(\varphi_1\psi_1)(\varphi_2\psi_1)(\varphi_2\psi_2)(\varphi_1)(\psi_2); \quad (\varphi_1\psi_1)(\varphi_2\psi_1)(\varphi_2\psi_2)(\varphi_3\psi_2)(\varphi_1)(\varphi_3);$$
$$(\varphi_1\psi_1)(\varphi_1\psi_2)(\varphi_2\psi_2)(\varphi_2\psi_3)(\psi_1)(\psi_3);$$
$$(\varphi_1\psi_1)(\varphi_2\psi_1)(\varphi_2\psi_2)(\varphi_3\psi_2)(\varphi_3\psi_3)(\varphi_1)(\psi_3). \qquad \text{(Tafel 4.)}$$

Enthält ein irreducibles Product N, das keine Invariante $J^{(3)}$ ist, die Factoren (l_1), (l_2), so sind die Symbole l_1, l_2 in ihm nicht verbunden.

IV. Capitel.

Die Producte M. (Tafel 9.)

§ 1.

Die Symbole q, m, n.

Die Symbole φ_i und $\psi_\varkappa$ stehen in M höchstens in den drei Factoren

$$(\varphi_i \psi_1), \quad (\varphi_i \psi_2), \quad (\varphi_i \psi_3),$$
$$(\varphi_1 \psi_\varkappa), \quad (\varphi_2 \psi_\varkappa), \quad (\varphi_3 \psi_\varkappa).$$

Wir unterscheiden drei Arten von Symbolen

$$q, \quad m, \quad n.$$

Die q treten in einem Factor auf, die m in zwei Factoren, die n in drei Factoren. Die Anzahl der q, m, n bezeichnen wir mit

$$\sigma, \quad \nu, \quad \lambda$$

und die Anzahl der Factoren $(\varphi\psi)$ in M mit ϱ, zwischen diesen Zahlen besteht die Relation

(1) $$2\varrho = \sigma + 2\nu + 3\lambda.$$

§ 2.

Die Producte Θ und H.

Wir bezeichnen die Producte

$$(\varphi_i \psi_1)(\varphi_i \psi_2)(\varphi_i \psi_3) = \Theta(\varphi_i),$$
$$(\varphi_1 \psi_\varkappa)(\varphi_2 \psi_\varkappa)(\varphi_3 \psi_\varkappa) = \Theta(\psi_\varkappa),$$
$$(\varphi_{i_1} \psi_{\varkappa_1})(\varphi_{i_1} \psi_{\varkappa_2})(\varphi_{i_1} \psi_{\varkappa_3})(\varphi_{i_2} \psi_{\varkappa_1})(\varphi_{i_3} \psi_{\varkappa_1}) = \Theta(\varphi_{i_1}, \psi_{\varkappa_1}),$$
$$(\varphi_{i_1} \psi_{\varkappa_1})(\varphi_{i_3} \psi_{\varkappa_1})(\varphi_{i_3} \psi_{\varkappa_2})(\varphi_{i_2} \psi_{\varkappa_3}) = \mathrm{H}(\varphi_{i_3}, \psi_{\varkappa_1}),$$

$i_1, i_2, i_3, \varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$ sind Permutationen der Zahlen $1, 2, 3$.

Hat M die Factoren $\Theta(\varphi_i)$ und $\Theta(\psi_\varkappa)$, so hat es auch den Factor $\Theta(\varphi_i, \psi_\varkappa)$.

§ 3.

$\lambda \leqq 2$.

Hat M die Factoren $\Theta(\varphi_{i_1})$ und $\Theta(\varphi_{i_2})$, so hat es die Invariante

$$(\varphi_{i_1} \psi_1)(\varphi_{i_1} \psi_2)(\varphi_{i_2} \psi_1)(\varphi_{i_2} \psi_2)$$

zum Factor und ist daher reducibel.

Irreducible M haben höchstens einen Factor $\Theta(\varphi)$ und höchstens einen Factor $\Theta(\psi)$, für sie ist

(2) $$\lambda \leqq 2.$$

Für $\lambda = 1$ hat M einen der Factoren

$$\Theta(\varphi), \quad \Theta(\psi),$$

also die Form $\Theta(\varphi) \cdot U$ oder $\Theta(\psi) \cdot U$ und für $\lambda = 2$ einen Factor

$$\Theta(\varphi, \psi).$$

§ 4.

Zerlegung in Theilproducte.

Nach Erledigung derjenigen M, welche Invarianten $J^{(2)}$ sind, wollen wir uns von nun an nur noch mit den übrigen beschäftigen.

1. Es sei

$$T_{\varrho_1}^{(1)} = [l_1 l_2]_{\varrho_1}$$

ein Hauptfactor von M und

$$M = [l_1 l_2]_{\varrho_1} M_{(1)}.$$

Da $M_{(1)}$ die Führungssymbole l_1, l_2 nicht enthält, so hat es entweder den Werth 1 oder ist ein Product, in dem höchstens die vier übrigen Symbole stehen.

2. Es sei

$$F_{\varrho_2}^{(2)} = [l_3 l_4]_{\varrho_2}$$

ein Hauptfactor von $M_{(1)}$ und

$$M_{(1)} = [l_3 l_4]_{\varrho_2} M_{(2)},$$

also

$$M = [l_1 l_2]_{\varrho_1} [l_3 l_4]_{\varrho_2} M_{(2)}.$$

Da $M_{(2)}$ die l_1, l_2, l_3, l_4 nicht enthält, so hat es entweder den Werth 1 oder ist ein Product, in dem die beiden übrigen Symbole stehen.

Es ist dann

$$M_{(2)} = [l_5 l_6]_{\varrho_3} = T_{\varrho_3}^{(3)}.$$

Die M lassen sich mittelst der Formeln

$$M_\varrho = T_{\varrho_1}^{(1)} \cdots T_{\varrho_p}^{(p)},$$

(3) $$\varrho = \varrho_1 + \varrho_2 \cdots \varrho_p,$$

(4) $$p \leqq 3$$

in Theilproducte zerlegen.

Keines der Führungssymbole eines Theilproductes T kommt in einem späteren T vor.

Von den Führungssymbolen l_3, l_4 steht höchstens eines in $T_{\varrho_1}^{(1)}$.

Von den Führungssymbolen l_5, l_6 steht höchstens eines in $T_{\varrho_1}^{(1)}$ und eines in $T_{\varrho_1}^{(2)}$.

Diejenigen l, welche in mehreren T vorkommen, stehen in drei Factoren und sind daher Symbole n.

§ 5.

$\lambda < p$.

Beweis.

Wir unterscheiden die drei Fälle

$$p = 1,\ 2,\ 3,$$

1.
$$p = 1,$$
$$M = [l_1 l_2]_\varrho.$$

Die Führungssymbole $l_1 l_2$ stehen in je einem Factor, die andern m in je zweien.

Kein Symbol steht in drei Factoren, es ist

$$\lambda = 0 \quad \text{also} \quad \lambda < p,$$

2.
$$p = 2,$$
$$M = [l_1 l_2]_{\varrho_1} [l_3 l_4]_{\varrho_2}.$$

Die Führungssymbole $l_1 l_2$ stehen in je einem Factor, von den Führungssymbolen l_3, l_4 steht höchstens eines in drei Factoren; die übrigen Symbole stehen in zwei Factoren, es ist

$$\lambda \leqq 1 \quad \text{also} \quad \lambda < p.$$

3. Da $\lambda \leqq 2$ ist, so ist auch hier

$$\lambda < p.$$

§ 6.

$\varrho \leqq 5$.

In der Zerlegung

$$M = [l_1 l_2]_{\varrho_1} \cdots [l_{2p-1} l_{2p}]_{\varrho_p}$$

kommen die $2p$ Symbole l in einer ungeraden Anzahl von Factoren, die andern Symbole in einer geraden Anzahl von Factoren vor. Die l sind entweder Symbole q oder n.

(6)
$$2p = \sigma + \lambda.$$

Die verschiedenen in M stehenden Symbole sind die l und die m; da es im ganzen sechs verschiedene Symbole giebt, so ist

(7)
$$2p + \nu \leqq 6.$$

Aus den Formeln (1), (5), (6), (7) folgt

$$(8) \qquad \varrho < 6,$$

$$(9) \qquad \varrho + p \leqq 6 + \lambda.$$

§ 7.

Eintheilung der M.

Wir theilen die M nach den Werthen von λ ein in solche, bei denen

$$\lambda = 0, 1, 2$$

ist und die, bei denen

$$\lambda = 0 \quad \text{also nach Formel (9)}$$

$$\varrho + p \leqq 6$$

ist, in solche, bei denen

$$p = 0, 1, 2, 3$$

ist.

1.
$$\lambda = 0, \quad p = 0, \quad \varrho = 0,$$
$$\mathsf{M}_{0,1} = 1,$$

2.
$$\lambda = 0, \quad p = 1, \quad \varrho \leqq 5,$$
$$\mathsf{M}_\varrho = T_\varrho,$$
$$(\varphi_1\psi_1); \ (\varphi_1\psi_1)(\varphi_2\psi_1); \ (\varphi_1\psi_1)(\varphi_2\psi_1)(\varphi_2\psi_2); \ (\varphi_1\psi_1)(\varphi_2\psi_1)(\varphi_2\psi_2)(\varphi_3\psi_2);$$
$$(\varphi_1\psi_1)(\varphi_2\psi_1)(\varphi_2\psi_2)(\varphi_3\psi_2)(\varphi_3\psi_3).$$

3.
$$\lambda = 0, \quad p = 2, \quad \varrho \leqq 4,$$
$$\mathsf{M}_\varrho = T^{(1)}_{\varrho_1} T^{(2)}_{\varrho_2}; \quad \varrho_1 + \varrho_2 \leqq 4.$$

Den Lösungen ϱ_1, ϱ_2:

$$1, 1; \quad 2, 1; \quad 2, 2; \quad 3, 1$$

entsprechen die Producte

$$(\varphi_1\psi_1)(\varphi_2\psi_2); \quad (\varphi_1\psi_1)(\varphi_2\psi_1)(\varphi_3\psi_2); \ \mathsf{H}(\varphi_1, \psi_1);$$
$$(\varphi_1\psi_1)(\varphi_2\psi_1)(\varphi_2\psi_2)(\varphi_3\psi_3).$$

4.
$$\lambda = 0, \quad p = 3, \quad \varrho = 3,$$
$$(\varphi_1\psi_1)(\varphi_2\psi_2)(\varphi_3\psi_3).$$

5.
$$\lambda = 1,$$
$$\mathsf{M} = \Theta(\varphi_1) \cdot U.$$

Die ψ und φ_2, φ_3 stehen in U in höchstens einem Factor.

U hat die Werthe

$$1, \quad (\varphi_2\psi_1); \ (\varphi_2\psi_1)(\varphi_3\psi_2)$$

und M die Werthe

$$\Theta(\varphi_1), \quad \Theta(\varphi_1)(\varphi_2\psi_1), \quad \Theta(\varphi_1)(\varphi_2\psi_1)(\varphi_3\psi_2).$$

6. $\lambda = 2, \quad \varrho \leqq 5.$

M hat den Factor $\Theta(\varphi_1, \psi_1)$ und ist, da es irreducibel ist

$$\mathsf{M} = \Theta(\varphi_1, \psi_1).$$

Die Werthe der M sind in Tafel 9 zusammengesetzt.

V. Capitel.

Die Invarianten $J^{(4)}$, $J^{(5)}$. (Tafel 5 und 6.)

§ 1.

Die Invarianten $J^{(4)}$.

Die Invarianten $J^{(4)}$ haben nach § 1 Cap. 3 den Factor

$$F_1 = (g_1 g_2 g_3)$$

aber nicht den Factor

$$F_2 = (h_1 h_2 h_3).$$

Ausser dem Factor F_1 können sie noch Factoren

(1) $$(g_1), \quad (g_2), \quad (g_3), \quad (h_1), \quad (h_2), \quad (h_3)$$

(2) $$(gg), \quad (gh), \quad (hh)$$

haben. Sie lassen sich in die Form

(3) $$J^{(4)} = F_1 S \cdot B$$

bringen. In ihr bedeutet S das Product der Factoren (1) die wir mit

(1a) $$m_1^{(1)}, \; m_2^{(1)}, \cdots m_\nu^{(1)},$$

(1b) $$S = \left(m_1^{(1)}\right) \left(m_2^{(1)}\right) \cdots \left(m_\nu^{(1)}\right)$$

bezeichnen wollen und B das Product der Factoren (2).

Da $J^{(4)}$ eine Invariante ist, so kommen darin die Symbole g, h in einer geraden Anzahl von Factoren vor.

Die Symbole g stehen in

$$SB$$

in einer ungeraden Anzahl von Factoren und die h in einer graden Anzahl.

Diejenigen $m^{(1)}$, welche Symbole g sind, stehen in einer geraden Anzahl von Factoren in B und die $m^{(1)}$ welche Symbole h sind, in einer ungeraden Anzahl von Factoren.

Da $J^{(4)}$ irreducibel ist, also keine Factoren $J^{(2)}, J^{(3)}$ besitzt, so sind die B Ableitungen M der M, in denen die Symbole $m^{(1)}$ nicht mit einander verbunden sind.

Die B, welche ν Symbole $m^{(1)}$ und ϱ Factoren $(\varphi\psi)$ enthalten, bezeichnen wir mit $B_{\nu\varrho}$.

§ 2.

Eintheilung der B.

In der Zerlegung in Theilproducte T:

$$B = [l_1 l_2]_{\varrho_1} \cdots [l_{2p-1} l_{2p}]_{\varrho_p}$$

sind diejenigen der Führungssymbole l, welche h sind, Symbole $m^{(1)}$; die übrigen $m^{(1)}$ sind die g, welche keine l sind.

Da die Führungssymbole h nicht mit einander verbunden sind, so hat B keinen Theilfactor

$$[hh]$$

sondern nur Theilfactoren

$$[gg], \quad [gh].$$

Da ferner nur drei Symbole g

$$g_1, \quad g_2, \quad g_3$$

vorhanden sind, so ist die Anzahl der Theilproducte

$$[gg]$$

in B höchstens $= 1$.

Hiernach unterscheiden wir vier Arten von B, die wir mit

$$B^{(1)}, \quad B^{(2)}, \quad B^{(3)}, \quad B^{(4)}$$

bezeichnen und so definiren:

1. Die $B^{(1)}$.

Die $B^{(1)}$ haben keinen Factor $[gg]$.

2. Die $B^{(2)}$.

Die $B^{(2)}$ sind Producte $[gg]$.

3. Die $B^{(3)}$.

Die $B^{(3)}$ sind Producte

$$[gg]\,[gh]$$

bei denen $\lambda = 0$ ist (vgl. § 2 Cap. 4).

4. Die $B^{(4)}$.

Die $B^{(4)}$ sind Producte

$$[gg]\,[gh]$$

bei denen $\lambda = 1$ ist.

Zu jedem B gehört eine Invariante $J^{(4)}$.

§ 3.

Der Index ν in den $B^{(1)}$.

$B^{(1)}$ besteht nur aus Factoren.

$$[gh],$$

hat also die Form

(4) $$B^{(1)} = [g_1 h_1]_{\varrho_1} \cdots [g_p h_p]_{\varrho_p}.$$

Die zu $B^{(1)}$ gehörigen ν Symbole $m^{(1)}$ zerfallen in zwei Arten

1^te^ Art $\qquad h_1, h_2, \cdots h_p,$

2^te^ Art $\qquad g_{p+1} \cdots g_3,$

mithin hat man die Formel

(5) $$\nu = 3.$$

Die $C^{(1)}$ sind Formen

$$B_{3,\varrho}.$$

§ 4.

Die Symbole m der $B^{(1)} = B_{3,\varrho}$.

Die Factoren

$$[g_\lambda h_\varkappa]$$

von B enthalten jeder nur ein Symbol $m^{(1)} = h$, nämlich das Führungssymbol $h_\varkappa$. Da die $m^{(1)}$ nicht verbunden sind, haben sie weder ein Symbol gemein noch eines der Symbole

$$g_{p+1} \cdots g_{p+3}.$$

Die in ihnen in benachbarten Factoren stehenden Symbole

$$m_1, m_2, \cdots m_\mu$$

sind den $3 - p$ Symbolen

$$h_{p+1} \cdots h_3$$

entnommen. Es ist:

(5) $$\lambda = 0 \quad \text{und} \quad \mu \leqq 3 - p.$$

§ 5.

Für die $B^{(1)} = B_{3,\varrho}$ ist $\varrho \leqq 3$.

Beweis.

Die 2ϱ in den ϱ Factoren $(\varphi\psi)$ von $B^{(1)}$ stehenden Symbole sind so vertheilt

1. Die p Führungssymbole g.
2. Die p Führungssymbole h.
3. Die μ Symbole m.

Die Führungssymbole stehen in je einem Factor, die m in je zwei Factoren. Es bestehen die Formeln

$$(5a)\qquad \begin{aligned} 2p + 2\mu &= 2\varrho, \\ \varrho = p + \mu &\leqq 3. \end{aligned}$$

§ 6.

Die $[gh]$ in $B^{(1)}$ ausgedrückt in Symbolen φ, ψ.

Die m in den Factoren $[gh]$ von $B^{(1)}$ sind nach § 4

$$h_{p+1} \cdots h_3$$

und die Symbole g, h bedeuten nach § 22 II. Cap. die Symbole

$$\begin{aligned} g_1, g_2, g_3 &: \varphi_{i_1}, \varphi_{i_2}, \psi_2, \\ h_1, h_2, h_3 &: \varphi_2, \psi_{x_1}, \psi_{x_2}. \end{aligned}$$

Trägt man diese Werthe in die $[gh]$ ein, so erhält man für

$[gh]_1$ die Werthe: $(\varphi_{i_1} \psi_{x_1}), (\varphi_2 \psi_2)$,

$[gh]_2$ die Werthe:

$$[\varphi_{i_1} \varphi_2]_2 = (\varphi_{i_1} \psi_{x_1})(\varphi_2 \psi_{x_1}),$$
$$[\psi_2 \psi_{x_1}]_2 = (\varphi_2 \psi_2)(\varphi_2 \psi_{x_1}),$$

$[gh]_3$ die Werthe:

$$[\varphi_{i_1} \psi_{x_2}]_3 = (\varphi_{i_1} \psi_{x_1})(\varphi_2 \psi_{x_1})(\varphi_2 \psi_{x_2}).$$

Diejenigen dieser $[gh]$, welche kein Symbol gemein haben, setzen die $B^{(1)}$ zusammen, aus ihnen entstehen noch F_3 die entsprechenden $J^{(4)}$, wenn man sie mit F_1 und den zugehörigen $(m^{(1)})$ multiplicirt.

Tafel der $B^{(1)}$.

1.; $(\varphi_{i_1} \psi_{x_1})$; $(\varphi_2 \psi_2)$; $(\varphi_{i_1} \psi_{x_1})(\varphi_2 \psi_2)$; $(\varphi_{i_1} \psi_{x_1})(\varphi_2 \psi_{x_1})$; $(\varphi_2 \psi_2)(\varphi_2 \psi_{x_1})$; $(\varphi_{i_1} \psi_{x_1})(\varphi_{i_2} \psi_{x_2})$; $(\varphi_{i_1} \psi_{x_1})(\varphi_{i_2} \psi_{x_2})(\varphi_2 \psi_{x_2})$; $(\varphi_{i_1} \psi_{x_1})(\varphi_2 \psi_2)(\varphi_2 \psi_{x_2})$; $(\varphi_{i_1} \psi_{x_1})(\varphi_2 \psi_{x_1})(\varphi_2 \psi_{x_2})$; $(\varphi_{i_1} \psi_{x_1})(\varphi_{i_2} \psi_{x_2})(\varphi_2 \psi_2)$.

Tafel der zugehörigen Tripel der $m^{(1)}$.

$\varphi_1, \varphi_3, \psi_2$; $\varphi_{i_1}, \psi_2, \psi_{x_1}$; $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$; $\varphi_{i_2}, \varphi_2, \psi_{x_1}$; $\varphi_{i_2}, \varphi_2, \psi_2$; $\varphi_1, \varphi_3, \varphi_{x_1}$;
ψ_1, ψ_2, ψ_3; $\varphi_2, \psi_{x_1}, \psi_2$; $\varphi_{i_2}, \psi_1, \psi_3$;
$\varphi_{i_2}, \psi_{x_2}, \psi_2$: $\varphi_2, \psi_1, \psi_3$.

Tafel der $B^{(1)}$, die den Factor $(\varphi_2 \psi_2)$ haben.

$(\varphi_2 \psi_2)$; $(\varphi_{i_1} \psi_{x_1})(\varphi_2 \psi_2)$; $(\varphi_2 \psi_2)(\varphi_2 \psi_{x_1})$; $(\varphi_{i_1} \psi_{x_1})(\varphi_2 \psi_2)(\varphi_2 \psi_{x_1})$;
$(\varphi_{i_1} \psi_{x_1})(\varphi_{i_2} \psi_{x_2})(\varphi_2 \psi_2)$.

Anzahl der $B^{(1)}$.

$$1+4+1+4+4+2+2+4+4+4+2+1+4+2+4+2=45.$$

Tafel der zu den $B^{(1)}$ gehörigen $J^{(4)}$.

$$F_1\cdot(\varphi_1)(\varphi_3)(\psi_2);\quad F_1\cdot(\varphi_{i_1}\psi_{x_1})(\varphi_{i_2})(\varphi_2)(\psi_{x_1});\quad F_1\cdot(\varphi_2\psi_2)(\varphi_1)(\varphi_2)(\varphi_3);$$
$$F_1\cdot(\varphi_{i_1}\psi_{x_1})(\varphi_2\psi_2)(\varphi_{i_2})(\varphi_2)(\psi_{x_1});\quad F_1\cdot(\varphi_{i_1}\psi_{x_1})(\varphi_2\psi_{x_1})(\varphi_{i_2})(\varphi_2)(\psi_2);$$
$$F_1\cdot(\varphi_2\psi_2)(\varphi_2\psi_{x_1})(\varphi_1)(\varphi_3)(\psi_{x_1});\quad F_1\cdot(\varphi_{i_1}\psi_{x_1})(\varphi_{i_2}\psi_{x_2})(\psi_1)(\psi_2)(\psi_3);$$
$$F_1\cdot(\varphi_{i_1}\psi_{x_1})(\varphi_{i_2}\psi_{x_2})(\varphi_2\psi_{x_2})(\varphi_2)(\psi_{x_1})(\psi_2);\quad F_1\cdot(\varphi_{i_1}\psi_{x_1})(\varphi_2\psi_2)(\varphi_2\psi_{x_2})(\varphi_{i_2})(\psi_1)(\psi_3);$$
$$F_1\cdot(\varphi_{i_1}\psi_{x_1})(\varphi_2\psi_1)(\varphi_2\psi_3)(\varphi_{i_2})(\psi_2)(\psi_{x_2});\quad F_1\cdot(\varphi_{i_1}\psi_1)(\varphi_{i_2}\psi_3)(\varphi_2\psi_2)(\varphi_2)(\psi_1)(\psi_3).$$

§ 7.

Die $B^{(2)}$.

Die $B^{(2)}$:

$$B^{(2)}=[g_1g_2]_\varrho$$

haben nur ein Symbol $m^{(1)}$ nämlich g_3; es sind Formen

$$B^{(2)}=B_{1\varrho}.$$

Je nachdem ϱ eine gerade oder ungerade Zahl ist, haben die $B^{(2)}$ die Form

$$[\varphi_1\varphi_3]_\varrho \quad \text{oder} \quad [\varphi_{i_1}\psi_2]_\varrho.$$

Die in ihnen stehenden Symbole m sind den Symbolen

$$g_3,\quad h_1,\quad h_2,\quad h_3$$

entnommen.

Tafel der $B^{(2)}$.

$$(\varphi_{i_1}\psi_2);\ (\varphi_1\psi_x)(\varphi_3\psi_x);\ (\varphi_1\psi_{x_1})(\varphi_3\psi_{x_1})(\varphi_{i_1}\psi_2);\ (\varphi_{i_1}\psi_{x_1})(\varphi_2\psi_{x_1})(\varphi_2\psi_2);$$
$$(\varphi_1\psi_{x_1})(\varphi_2\psi_{x_1})(\varphi_2\psi_{x_2})(\varphi_3\psi_{x_2});\ (\varphi_{i_1}\psi_{x_1})(\varphi_2\psi_1)(\varphi_2\psi_3)(\varphi_{i_2}\psi_{x_2})(\varphi_{i_2}\psi_2);$$
$$(\varphi_1\psi_{x_1})(\varphi_3\psi_{x_1})(\varphi_{i_1}\psi_{x_2})(\varphi_2\psi_{x_2})(\varphi_2\psi_2).$$

Tafel der zugehörigen $m^{(1)}$.

$$\varphi_{i_2},\quad \psi_2,\quad \varphi_{i_2},\quad \varphi_{i_2},\quad \psi_2,\quad \varphi_{i_2},\quad \varphi_{i_2}.$$

Tafel der $B^{(2)}$, welche den Factor $(\varphi_2\psi_2)$ haben.

$$(\varphi_{i_1}\psi_{x_1})(\varphi_2\psi_{x_1})(\varphi_2\psi_2);\ (\varphi_{i_1}\psi_2)(\varphi_2\psi_2)(\varphi_2\psi_{x_1})(\varphi_{i_2}\psi_{x_2});$$
$$(\varphi_1\psi_{x_1})(\varphi_3\psi_{x_2})(\varphi_{i_1}\psi_{x_2})(\varphi_2\psi_{x_2})(\varphi_2\psi_2).$$

Anzahl der $B^{(2)}$.

$$2+3+4+4+3+4+4+4+4+4=39.$$

Tafel der zu den $B^{(2)}$ gehörigen $J^{(4)}$.

$$F_1\cdot(\varphi_{i_1}\psi_2)(\varphi_{i_2});\ F_1\cdot(\varphi_1\psi_x)(\varphi_3\psi_x)(\psi_2);\ F_1\cdot(\varphi_{i_1}\psi_{x_1})(\varphi_2\psi_{x_1})(\varphi_2\psi_2)(\varphi_{i_2});$$
$$F_1\cdot(\varphi_1\psi_{\lambda_1})(\varphi_2\psi_{\lambda_1})(\varphi_2\psi_{\lambda_1})(\varphi_3\psi_{\lambda_2})(\psi_2);\ F_1\cdot(\varphi_{i_1}\psi_{x_1})(\varphi_2\psi_1)(\varphi_2\psi_3)(\varphi_{i_2}\psi_{x_2})(\varphi_{i_2}\psi_2)(\varphi_{i_2});$$
$$F_1\cdot(\varphi_1\psi_{x_1})(\varphi_3\psi_{x_1})(\varphi_{i_1}\psi_{x_2})(\varphi_2\psi_{x_2})(\varphi_2\psi_2)(\varphi_{i_1}).$$

§ 8.

Die $B^{(3)}$.

Die Producte

$$B^{(3)} = [g_1 g_2]_{\varrho_1} [g_3 h_1]_{\varrho_2}$$

sind Producte von T, deren Factoren kein Symbol gemein haben, also Ableitungen von:

$$\mathsf{M}_{22} = (\varphi_1 \psi_1)(\varphi_2 \psi_2); \qquad \mathsf{M}_{32} = (\varphi_1 \psi_1)(\varphi_2 \psi_1)(\varphi_3 \psi_2);$$
$$\mathsf{M}_{42} = (\varphi_1 \psi_1)(\varphi_2 \psi_1)(\varphi_2 \psi_2)(\varphi_3 \psi_3); \quad \mathsf{M}_{44} = \mathsf{H}(\varphi_1, \psi_1).$$

Sie haben nur ein Symbol $m^{(1)}$ nämlich h_1, sind mithin Formen

$$B^{(3)} = B_{1,\varrho}.$$

Die Symbole m sind den:

$$h_2, h_3$$

entnommen und können in jedem der beiden Factoren $[g_1 g_2]_{\varrho_1}$, $[g_3 h_1]_{\varrho_2}$ stehen.

Tafel der $B^{(3)}$.

$$(\varphi_{i_1} \psi_2)(\varphi_{i_2} \psi_{x_1}); \quad (\varphi_1 \psi_{x_1})(\varphi_3 \psi_{x_1})(\varphi_2 \psi_2); \quad (\varphi_{i_1} \psi_{x_1})(\varphi_2 \psi_{x_1})(\varphi_{i_2} \psi_2);$$
$$(\varphi_{i_1} \psi_{x_1})(\varphi_2 \psi_{x_1})(\varphi_2 \psi_2)(\varphi_{i_2} \psi_{x_2}); \quad (\varphi_{i_1} \psi_{x_1})(\varphi_{i_2} \psi_{x_1})(\varphi_2 \psi_2)(\varphi_2 \psi_{x_2}) = \mathsf{H}(\varphi_2, \psi_{x_1}).$$

Tafel der zugehörigen $m^{(1)}$.

$$\psi_{x_1}, \quad \varphi_2, \quad \varphi_2, \quad \psi_{x_2}, \quad \psi_{x_1}, \quad \psi_{x_2}.$$

Tafel der $B^{(3)}$, welche den Factor $(\varphi_2 \psi_2)$ haben.

$$(\varphi_1 \psi_{x_1})(\varphi_3 \psi_{x_1})(\varphi_2 \psi_2); \quad (\varphi_{i_1} \psi_{x_1})(\varphi_2 \psi_{x_1})(\varphi_2 \psi_2)(\varphi_{i_2} \psi_{x_2}); \quad \mathsf{H}(\varphi_2, \psi_{x_1}).$$

Anzahl der $B^{(3)}$.

$$4 + 2 + 4 + 4 + 4 + 2 + 2 + 4 + 2 = 28.$$

Tafel der zu den $B^{(3)}$ gehörigen $J^{(4)}$.

$$F_1 \cdot (\varphi_{i_1} \psi_2)(\varphi_{i_2} \psi_{x_1})(\psi_{x_1}); \quad F_1 \cdot (\varphi_1 \psi_{x_1})(\varphi_3 \psi_{x_1})(\varphi_2 \psi_2)(\varphi_2);$$
$$F_1 \cdot (\varphi_{i_1} \psi_{x_1})(\varphi_2 \psi_{x_1})(\varphi_{i_2} \psi_2)(\varphi_2); \quad F_1 \cdot (\varphi_{i_1} \psi_{x_1})(\varphi_2 \psi_{x_1})(\varphi_2 \psi_2)(\varphi_{i_2} \psi_{x_2})(\psi_{x_2});$$
$$F_1 \cdot (\varphi_{i_1} \psi_2)(\varphi_{i_2} \psi_{x_1})(\varphi_2 \psi_1)(\varphi_2 \psi_{x_2})(\psi_{x_1}); \quad F_1 \cdot (\psi_{x_2}) \mathsf{H}(\varphi_2, \psi_{x_1}).$$

§ 9.

Die $B^{(4)}$.

In der Zerlegung

$$B^{(4)} = [g_1 g_2]_{\varrho_1} [g_3 h_1]_{\varrho_2}$$

haben die beiden Factoren

$$[g_1 g_2]_{\varrho_1} \quad \text{und} \quad [g_3 h_1]_{\varrho_2}$$

ein Symbol gemein, es ist ein Symbol n.

Die $B^{(4)}$ haben nur ein Symbol $m^{(1)}$ nämlich das Symbol h_1, sie sind Producte $B_{1\varrho}$.

Die $B^{(4)}$ haben den Factor $\Theta(n)$ also die Form

$$B_4 = \Theta(n)\, U,$$

In ihr kann n die Werthe

$$\varphi_{i_1}, \quad \psi_2, \quad \varphi_2, \quad \psi_{x_1}$$

annehmen; ihnen entsprechen vier Arten von $B^{(4)}$, die wir mit

$$\Theta(\varphi_{i_1})\, U_1; \quad \Theta(\psi_2)\, U_2; \quad \Theta(\varphi_2)\, U_3; \quad \Theta(\psi_{x_1})\, U_4$$

bezeichnen.

§ 10.

Die $\Theta(\varphi_{i_1})\, U_1$.

U_1 enthält das Symbol φ_{i_2} in einem Factor, aber keines der Symbole φ_{i_1} und ψ_2 und hat demnach die Werthe

$$(\varphi_{i_2}\psi_{x_1}); \quad (\varphi_{i_2}\psi_{x_1})\,(\varphi_2\psi_{x_1}),$$

denen diese von $J^{(1)}$ entsprechen

$$F_1 \cdot \Theta(\varphi_{i_1})\,(\varphi_{i_2}\psi_{x_1})\,(\psi_{x_1});$$
$$F_1 \cdot \Theta(\varphi_{i_1})\,(\varphi_{i_2}\psi_{x_1})\,(\varphi_2\psi_{x_1})\,(\varphi_2).$$

§ 11.

Die $\Theta(\psi_2)\, U_2)$.

U_2 enthält keines der Symbole $\varphi_1, \varphi_3, \psi_2$ und hat demnach die Werthe

$$1, \quad (\varphi_2\psi_{x_1})$$

denen diese von $J^{(4)}$ entsprechen

$$F_1 \cdot \Theta(\psi_2)\,(\varphi_2); \quad F_1 \cdot \Theta(\psi_2)\,(\varphi_2\psi_{x_1})\,(\psi_{x_1}).$$

§ 12.

Die $\Theta(\varphi_2)\, U_3$.

U_3 enthält die Symbole φ_1, φ_3 aber nicht das Symbol ψ_2 und hat demnach den Werth

$$(\varphi_1\psi_{x_1})\,(\varphi_3\psi_{x_2})$$

denen dieser von $J^{(4)}$ entspricht

$$F_1 \cdot \Theta(\varphi_2)\,(\varphi_1\psi_{x_1})\,(\varphi_3\psi_{x_2})\,(\varphi_2).$$

§ 13.

Die $\Theta(\psi_{x_1}) U_4$.

U_4 enthält das Symbol ψ_2 aber keines der Symbole φ_1, φ_2, hat also den Werth $(\varphi_2 \psi_2)$; ihm entspricht dieser von $J^{(4)}$

$$F_1 \cdot \Theta(\psi_{x_1})(\varphi_2 \psi_2)(\psi_{x_1}).$$

§ 14.

Die Tafeln 5 und 6.

Die in den vorigen Paragraphen berechneten Werthe der $J^{(4)}$, entsprechen den

$$B^{(1)}, B^{(2)}, B^{(3)}, \Theta(\varphi_{i_1}) U_1, \Theta(\psi_2) U_2, \Theta(\varphi_2) U_3, \Theta(\psi_{x_1}) U_4.$$

Die

$$J^{(5)} = F_2 \cdot (m_1^{(2)}) \cdots (m_\nu^{(2)}) C_{\nu\varrho}$$

und ihre Factoren

$$F_2, \quad m^{(2)}, \quad b_{\nu\varrho}$$

entstehen aus den

$$J^{(4)}, \quad F_1, \quad m^{(1)}, \quad B_{\nu\varrho},$$

wenn man die φ mit den ψ vertauscht.

Die Anzahl der $J^{(4)}$ und die der $J^{(5)}$ beträgt 134.

VI. Capitel.

Die $J^{(6)}$. (Tafel 7.)

§ 1.

Die $J^{(6)}$.

Die $J^{(6)}$ haben die Factoren

$$F_1, F_2, (\varphi), (\psi), (\varphi\psi)$$

und lassen sich in der Form schreiben

$$\begin{aligned} J^{(6)} &= F_1 \cdot F_2 \cdot S A \\ &= F_1 \cdot F_2 \cdot (m_1^{(3)})(m_2^{(3)}) \cdots (m_\nu^{(4)}) A. \end{aligned}$$

In ihr bedeutet S das Product der Factoren (φ), (ψ), welche wir mit $m^{(3)}$ bezeichnen, und A das Product der Factoren $(\varphi\psi)$.

Die Symbole φ, ψ stehen in $J^{(6)}$ in einer geraden und in SA in einer ungeraden Anzahl von Factoren.

§ 2.

Die A.

Die A sind irreducibel also Ableitungen $\mathfrak{M}$ der M. Die Symbole $m^{(3)}$ stehen in ihnen in einer geraden Anzahl von Factoren, sind also ihre Symbole m. Da AS keine Invariante $J^{(3)}$ zum Factor hat, so sind die m in A nicht verbunden. Diejenigen A, welche ν Symbole m und ϱ Factoren $(\varphi\psi)$ enthalten, bezeichnen wir mit $A_{\nu\varrho}$.

Aus den A lassen sich die $J^{(6)}$ herstellen, wir brauchen sie also nur zu bestimmen.

§ 3.

Die $\mathsf{M}^{(1)}$ und die $\mathfrak{M}^{(1)}$.

Die M, deren Symbole nicht mit einander verbunden sind, bezeichnen wir mit $\mathsf{M}^{(1)}$; sie sind in der Tafel 9 zusammengestellt. Die Ableitungen der $\mathsf{M}^{(1)}$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{M}^{(1)}$. Diejenigen $\mathsf{M}^{(1)}$ und $\mathfrak{M}^{(1)}$, welche ν Symbole m und ϱ Factoren $(\varphi\psi)$ haben, bezeichnen wir mit $\mathsf{M}^{(1)}_{\nu\varrho}$ und $\mathfrak{M}^{(1)}_{\nu\varrho}$; zu den letzteren gehören die $A_{\nu\varrho}$.

§ 4.

Definition der D.

Aus den Formeln

(1) $$J^{(4)} = F_1 \cdot S_1 B_{\nu_1\varrho_1}, \quad J^{(5)} = F_2 \cdot S_2 C_{\nu_2\varrho_2};$$

(2) $$S_1 = (m_1^{(1)}) \cdots (m_{\nu_1}^{(1)}), \quad S_2 = (m_1^{(2)}) \cdots (m_{\nu_2}^{(2)})$$

folgt

$$J^{(4)} J^{(5)} = F_1 \cdot F_2 \cdot S_1 S_2 B_{\nu_1\varrho_1} C_{\nu_2\varrho_2}.$$

Diejenigen Producte,

$$B_{\nu_1\varrho_1} C_{\nu_2\varrho_2}$$

welche $\mathfrak{M}^{(1)}_{\nu\varrho}$ sind, bezeichnen wir mit $D_{\nu\varrho}$, für sie gelten die Formeln

(3) $$\nu_1 + \nu_2 = \nu; \quad \varrho_1 + \varrho_2 = \varrho,$$

(4) $$D_{\nu\varrho} = B_{\nu_1\varrho_1} C_{\nu_2\varrho_2}.$$

Die $\mathfrak{M}^{(1)}_{\nu\varrho}$ sind entweder Producte $D_{\nu\varrho}$ oder Producte A.

§ 5.

$$\nu = \nu_1 + \nu_2.$$

Der erste Index ν der $B_{\nu\varrho}$ und $C_{\nu\varrho}$ hat die Werthe 3 und 1. Die Gleichung

$$\nu = \nu_1 + \nu_2$$

wird daher in diesen Fällen erfüllt

$$6 = 3 + 3,$$
$$4 = 1 + 3,$$
$$4 = 3 + 1,$$
$$2 = 1 + 1.$$

§ 6.

Eintheilung der D.

Wir theilen die D in sechs Classen, welche wir mit $D^{(1)} \cdots D^{(6)}$ bezeichnen und so definiren:

1. Die $D^{(1)}$.

Die $D^{(1)}$ sind Producte, bei denen $\nu = 6$ ist.

$$D^{(1)}_{6\varrho} = B_{3\varrho_1} C_{3\varrho_2}.$$

2. Die $D^{(2)}$.

Die $D^{(2)}$ sind Producte, bei denen $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = 3$ ist.

$$D^{(2)}_{4\varrho} = B_{1\varrho_1} C_{3\varrho_2}.$$

3. Die $D^{(3)}$.

Die $D^{(3)}$ sind Producte, bei denen $\nu_1 = 3$, $\nu_2 = 1$ ist.

$$D^{(3)}_{4\varrho} = B_{3\varrho_1} C_{1\varrho_2}.$$

4. Die $D^{(6)}$.

Die $D^{(4)}$ sind Producte, bei denen $\nu_1 = \nu_2 = 1$, $\varrho_1 = \varrho_2$ ist.

$$D_{2,2\varrho} = B_{1\varrho_1} C_{1\varrho_1}.$$

5. Die $D^{(5)}$.

Die $D^{(5)}$ sind Producte, bei denen $\nu_1 = \nu_2 = 1$, $\varrho_1 > \varrho_2$ ist.

$$D^{(5)}_{2,\varrho} = B_{1\varrho_1} C_{1\varrho_2}.$$

6. Die $D^{(6)}$.

Die $D^{(6)}$ sind Producte, bei denen $\nu_1 = \nu_2 = 1$, $\varrho_1 < \varrho_2$ ist.

$$D^{(6)}_{2,\varrho} = B_{1\varrho_1} C_{1\varrho_2}.$$

Vertauscht man die φ mit den ψ, so gehen die $D^{(2)}$ und die $D^{(5)}$ in die $D^{(3)}$ und die $D^{(6)}$ über.

§ 7.

$$D^{(1)} = D^{(1)}_{6\varrho} = B_{3\varrho_1} C_{3\varrho_1}.$$

Die einzigen $M^{(1)}_{6,\varrho}$, $B_{3\varrho_1}$, C_{3,ϱ_1} sind

$$M_{60} = 1;\quad B_{30} = 1;\quad C_{30} = 1,$$

mithin ist das einzige $D^{(1)}$:

$$D^{(1)}_{60} = 1.$$

§ 8.

$$D^{(2)} = D^{(2)}_{4,\varrho} = B_{1,\varrho_1} C_{3\varrho_2}.$$

Die $M^{(1)}_{4,\varrho}$ sind nach Tafel 9:

$$M^{(1)}_{41} = (\varphi_1\psi_1);\quad M^{(1)}_{42} = (\varphi_1\psi_1)(\varphi_2\psi_1),$$

Die Formel

$$\varrho = \varrho_1 + \varrho_2 = 1 \text{ oder } 2$$

hat die Lösungen ϱ_1, ϱ_2

$$0,1;\quad 0,2;\quad 1,0;\quad 1,1;\quad 2,0.$$

Da es kein B_{10} giebt, so entsprechen den beiden ersten Lösungen keine D. Für die übrigen Lösungen wird

1. 1, 0.

$$D_{4,1} = B_{11} C_{30} = (\varphi_{i_1}\psi_2).$$

2. 1, 1.

$$D_{42} = B_{11} C_{31} = (\varphi_{i_1}\psi_2)(\varphi_{i_1}\psi_{x_1});\ (\varphi_{i_1}\psi_2)(\varphi_2\psi_2).$$

3. 2, 0.

$$D_{42} = B_{12} C_{30} = (\varphi_1\psi_{x_1})(\varphi_3\psi_{x_1});\ (\varphi_1\psi_2)(\varphi_3\psi_2).$$

Vertauscht man die φ mit den ψ, so erhält man für die $D^{(3)}$ die Werthe:

$$(\varphi_2\psi_{x_1});\ (\varphi_2\psi_{x_1})(\varphi_{i_1}\psi_{x_1});\ (\varphi_2\psi_{x_1})(\varphi_2\psi_2);\ (\varphi_{i_1}\psi_1)(\varphi_{i_1}\psi_3);\ (\varphi_2\psi_1)(\varphi_2\psi_3).$$

§ 9.

$$D^{(4)} = D^{(4)}_{2,2\varrho} = B_{1\varrho} C_{1\varrho}.$$

Die $M^{(1)}$, deren Ableitungen die $D^{(4)}$ sind, sind nach Tafel 9:

$$M^{(1)}_{22} = (\varphi_1\psi_1)(\varphi_2\psi_2);\quad M^{(1)}_{241} = \Theta(\varphi_1)(\varphi_2\psi_1);\quad M^{(1)}_{242} = \mathrm{H}(\varphi_1, \psi_1),$$

zu ihnen gehören

$$D^{(4)}_{22} = B_{11} C_{11};\quad D^{(1)}_{241} = B_{12} C_{12};\quad D^{(1)}_{242} = B_{12} C_{12}.$$

Die hier auftretenden B, C haben die Werthe

$$B_{11}:(\varphi_{i_1}\psi_2); \qquad C_{11}=(\varphi_2\psi_{x_1});$$
$$B_{12}:(\varphi_1\psi_{x_1})(\varphi_3\psi_{x_1}); \quad (\varphi_1\psi_2)(\varphi_3\psi_2); \quad (\varphi_{i_1}\psi_2)(\varphi_{i_2}\psi_{x_1});$$
$$C_{12}:(\varphi_{i_1}\psi_1)(\varphi_{i_1}\psi_3); \quad (\varphi_2\psi_1)(\varphi_2\psi_3); \quad (\varphi_2\psi_{x_1})(\varphi_{i_1}\psi_{x_2}).$$

$$1.\ D_{12}^{(4)}=B_{11}C_{11}.$$
$$(\varphi_{i_1}\psi_2)(\varphi_2\psi_{x_1}).$$

$$2.\ D_{241}^{(4)}=B_{12}C_{12}.$$

Die $D_{241}^{(1)}$ haben einen Factor $\Theta(n)$. Da in den B_{12} und in den C_{12} der Factor $(\varphi_2\psi_2)$ nicht vorkommt, so ist

$$n \gtrless \varphi_2 \quad \text{und} \quad \psi_2.$$

Den Werthen

$$n=\varphi_{i_1} \quad \text{und} \quad \psi_{x_1}$$

entsprechen zwei Classen

$$D_{241}^{(41)}, \quad D_{241}^{(42)},$$

die durch Vertauschung der φ mit den ψ in einander übergehen.

In der Formel

$$D_{241}^{(41)}=B_{12}C_{12}=\Theta(\varphi_{i_1})U$$

enthält eines der B, C φ_{i_1} in zwei Factoren.

Es ist dies

$$C_{12}=\varphi_{i_1}\psi_1)(\varphi_{i_1}\psi_3).$$

Das zugehörige B_{12} hat den Factor

$$(\varphi_{i_1}\psi_2)$$

also die Werthe

$$(\varphi_1\psi_2)(\varphi_3\psi_2)=(\varphi_{i_1}\psi_2)(\varphi_{i_2}\psi_2) \quad \text{und} \quad (\varphi_{i_1}\psi_2)(\varphi_{i_2}\psi_{x_1})$$

denen die Werthe

$$\Theta(\varphi_{i_1})(\varphi_{i_2}\psi_2); \quad \Theta(\varphi_{i_1})(\varphi_{i_2}\psi_{x_1}),$$
$$\Theta(\psi_{x_1})(\varphi_2\psi_{x_1}); \quad \Theta(\psi_{x_1})(\varphi_{i_1}\psi_{x_2})$$

von $D_{241}^{(41)}$ und $D_{241}^{(42)}$ entsprechen.

$$3.\ D_{242}^{(4)}=B_{12}C_{12}=\mathrm{H}(\varphi,\psi).$$

3a. Der Factor, welcher

$$B_{12}=(\varphi_1\psi_{x_1})(\varphi_3\psi_{x_1})$$

zu einem H ergänzt, ist

$$(\varphi_2\psi_2)(\varphi_2\psi_{x_2}),$$

also kein C_{12}; mithin ist $(\varphi_1\psi_{x_1})(\varphi_3\psi_{x_1})$ nicht Factor B_{12} von $D_{242}^{(4)}$. Desgleichen ist

$$(\varphi_{i_1}\psi_1)(\varphi_{i_1}\psi_3)$$

nicht Factor C_{12} von $D_{242}^{(4)}$.

3b. Das Product

$$B_{12} = (\varphi_1 \psi_{x_2})(\varphi_3 \psi_2)$$

wird von

$$C_{12} = (\varphi_2 \psi_1)(\varphi_2 \psi_3)$$

zu einem H ergänzt.

$$\mathsf{H}(\varphi_2, \psi_2)$$

ist das einzige $D^{(4)}_{242}$, das einen der Factoren

$$B_{12} = (\varphi_1 \psi_2)(\varphi_3 \psi_2); \quad C_{12} = (\varphi_2 \psi_1)(\varphi_2 \psi_3)$$

enthält.

3c. Das Product

$$B_{12} = (\varphi_{i_1} \psi_2)(\varphi_{i_2} \psi_{x_1})$$

wird von

$$C_{12} = (\varphi_2 \psi_{x_1})(\varphi_{i_1} \psi_{x_2})$$

zu einem H ergänzt..

$$\mathsf{H}(\varphi_{i_1} \psi_{x_1})$$

ist das einzige $D^{(4)}_{242}$, das die Factoren

$$B_{12} = (\varphi_{i_1} \psi_2)(\varphi_{i_2} \psi_{x_1}),$$
$$C_{12} = (\varphi_2 \psi_{x_1})(\varphi_{i_1} \psi_{x_2})$$

enthält.

§ 10.

$$D^{(5)} = D^{(5)}_{2\varrho} = B_{1\varrho_1} \cdot C_{1\varrho_2}; \quad \varrho_1 > \varrho_2.$$

Die $D^{(5)}$ sind Ableitungen von

$$\mathsf{M}^{(1)}_{231} = (\varphi_1 \psi_1)(\varphi_2 \psi_1)(\varphi_3 \psi_2); \quad \mathsf{M}^{(1)}_{232} = \Theta(\varphi_1); \quad \mathsf{M}^{(1)}_{241} = \Theta(\varphi_1)(\varphi_2 \psi_1);$$
$$\mathsf{M}^{(1)}_{241} = \mathsf{H}(\varphi_1, \psi_1),$$

ϱ_1 hat die Werthe 3 und 4; ϱ_2 den Werth 1 und $D^{(5)}$ die Form

$$D^{(5)} = B_{1\varrho} C_{11} = B_{1\varrho} \cdot (\varphi_2 \psi_{x_1}).$$

$$1. \quad D^{(5)}_{231} = B_{12} \cdot (\varphi_2 \psi_{x_1}).$$

Den Werthen

$$B_{12} : (\varphi_1 \psi_{x_2})(\varphi_3 \psi_{x_1}), \quad (\varphi_1 \psi_2)(\varphi_3 \psi_2), \quad (\varphi_{i_1} \psi_2)(\varphi_{i_2} \psi_{x_1})$$

entsprechen

$$D^{(5)} : (\varphi_1 \psi_{x_2})(\varphi_3 \psi_{x_2})(\varphi_2 \psi_{x_1}); \quad (\varphi_1 \psi_2)(\varphi_3 \psi_2)(\varphi_2 \psi_{x_1}); \quad (\varphi_{i_1} \psi_2)(\varphi_{i_2} \psi_{x_1})(\varphi_2 \psi_{x_1}).$$

$$2. \quad D^{(5)}_{232} = B_{12}(\varphi_2 \psi_{x_1}).$$

$D^{(5)}_{232}$ hat den Werth

$$\Theta(\psi_{x_2})$$

$$3.\quad D^{(5)}_{241} = B_{13}\cdot(\varphi_2\psi_{\varkappa_1}).$$

$$(\varphi_{i_1}\psi_{\varkappa_1})(\varphi_2\psi_{\varkappa_1})(\varphi_2\psi_2);\quad (\varphi_1\psi_{\varkappa_1})(\varphi_3\psi_{\varkappa_1})(\varphi_{i_1}\psi_2);$$

$$B_{13}: (\varphi_1\psi_{\varkappa_1})(\varphi_3\psi_{\varkappa_1})(\varphi_2\psi_2);\quad (\varphi_{i_1}\psi_2)(\varphi_{i_2}\psi_{\varkappa_1})(\varphi_2\psi_{\varkappa_1});\quad \Theta(\psi_2).$$

$D^{(5)}_{241}$ hat die Werthe

$$\Theta(\varphi_2)(\varphi_{i_1}\psi_{\varkappa_1});\quad \Theta(\psi_{\varkappa_1})(\varphi_{i_1}\psi_2);\quad \Theta(\psi_{\varkappa_1})(\varphi_2\psi_2);\quad \Theta(\psi_2)(\varphi_2\psi_{\varkappa_1}).$$

$$4.\quad D^{(5)}_{242} = B_{12}(\varphi_2\psi_{\varkappa_1}).$$

$D^{(5)}_{242}$ hat den Werth $\mathsf{H}(\varphi_2, \psi_{\varkappa_1})$.

Die $D^{(6)}$ entstehen durch Vertauschung der φ mit den ψ aus den $D^{(5)}$; sie sind

$D^{(6)}_{231}: (\varphi_{i_2}\psi_1)(\varphi_{i_2}\psi_3)(\varphi_{i_1}\psi_2);\quad (\varphi_2\psi_1)(\varphi_2\psi_3)(\varphi_{i_1}\psi_2);\quad (\varphi_{i_1}\psi_{\varkappa_2})(\varphi_{i_1}\psi_2)(\varphi_2\psi_{\varkappa_1})$;
$D^{(6)}_{232}: \Theta(\varphi_{i_1})$;
$D^{(6)}_{241}: \Theta(\psi_{i_1})(\varphi_{i_1}\psi_{\varkappa_1});\quad \Theta(\varphi_{i_1})(\varphi_2\psi_{\varkappa_1});\quad \Theta(\varphi_{i_1})(\varphi_2\psi_2);\quad \Theta(\varphi_2)(\varphi_{i_1}\psi_2)$;
$D^{(6)}_{242}$; $\mathsf{H}(\varphi_{i_1}, \psi_2)$.

Die D sind in Tafel 10 zusammengestellt.

§ 11.

Die Tafel der $J^{(6)}$.

Nach Tafel 10 sind alle Ableitungen von

$$\mathsf{M}^{(1)}_{60},\quad \mathsf{M}^{(1)}_{42},\quad \mathsf{M}^{(1)}_{241},\quad \mathsf{M}^{(1)}_{242}$$

Producte D. Producte A, sind diejenigen der

$$M^{(1)}_{41},\quad M^{(1)}_{12},\quad M^{(1)}_{231},\quad M^{(1)}_{232},$$

welche nicht D sind, und ausserdem die

$$M^{(1)}_{03},\quad M^{(1)}_{05}.$$

Aus den A erhält man die $J^{(6)}$ nach der Formel

$$J^{(6)} = F_1\cdot F_2\cdot(m_1)\cdots(m_\nu)\boldsymbol{A};$$

sie sind in Tafel 7 zusammengestellt; ihre Anzahl ist 82.

Zur Integration der Potentialgleichung vermittelst *C. Neumann's* Methode des arithmetischen Mittels.

Von

Ernst Richard Neumann in Breslau.

Zweiter Aufsatz.

Die Methode in ihrer Anwendung auf mehrfach zusammenhängende Bereiche.

Im ersten Aufsatze*) lernten wir in der „Methode des arithmetischen Mittels" ein Verfahren kennen, unter gewissen einschränkenden Voraussetzungen, die *Randwerthaufgabe der Potentialtheorie* zu lösen, d. h. eine Fundamentalfunction eines ebenen oder räumlichen Gebietes aus ihren auf der Begrenzung willkürlich vorgeschriebenen Randwerthen herzustellen. Dabei machten wir stillschweigend immer die Voraussetzung, dass das betrachtete Gebiet *einfach zusammenhängend* wäre, d. h. von einer einzigen geschlossenen Curve bezw. Fläche begrenzt würde.

Diese Voraussetzung wollen wir jetzt fallen lassen, wir wollen hinfort *mehrfach zusammenhängende Gebiete* betrachten, deren Begrenzung also gebildet wird von mehreren getrennten Curven oder Flächen, und wollen dann einmal zusehn, ob und unter welchen Bedingungen die Methode des arithmetischen Mittels uns auch noch für solche Gebiete eine Fundamentalfunction aus willkürlich vorgeschriebenen Randwerthen herzustellen gestattet.

Es scheint mir ein näheres Eingehn hierauf umsomehr am Platze, als *Poincaré* bei seinen neueren Untersuchungen den Fall mehrfach zusammenhängender Bereiche ausdrücklich ausschliesst, und weil meines Wissens irgendwie ausführlichere Darstellungen über diesen Gegenstand bisher überhaupt nicht vorhanden sind. Gleichwohl dürften aber die hier gegen früher in mehrfacher Hinsicht veränderten Verhältnisse eine solche besondere Darstellung vollauf rechtfertigen.

*) Bd. 55, pag. 1—52, weiterhin stets kurz mit „I" citirt.

Auf einen wesentlichen Unterschied gegen früher sei sogleich hingewiesen: Wir stellten früher fest, dass die Methode des arithmetischen Mittels angewandt auf ein einfach zusammenhängendes Gebiet sicherlich convergirt, wenn eine gewisse diesem Gebiete eigenthümliche Constante, seine sogenannte *Configurationsconstante* kleiner als 1 ist (*Hilbert*'scher Satz, vgl. I, pag. 23), und wir stellten ferner fest, dass uns dieses Criterium auch thatsächlich die Convergenz der Methode in einer grossen Anzahl von Fällen verbirgt, d. h. dass es *wirklich auch solche Gebiete giebt,* deren Configurationsconstanten kleiner als 1 sind — es entsprachen ja z. B. alle von *convexen* Curven bezw. Flächen begrenzten Gebiete dieser Bedingung [vgl. I, pag. 27, den dritten Satz].

Anders hier bei *mehrfach zusammenhängenden Gebieten,* — hier wird es sich herausstellen, dass die Configurationsconstante, wenigstens, wenn wir sie genau so, wie früher definiren, *niemals kleiner als* 1 sein kann, der *Hilbert*'sche Satz lässt uns also hier völlig im Stiche. — Wir müssen uns somit jetzt nach anderen Convergenzcriterien umsehn.

In dieser Richtung wird es uns nun im weiteren Verlaufe der Untersuchung gelingen, ein dem *Hilbert*'schen Satze völlig analoges Criterium abzuleiten, wenn wir, wie das in § 3 geschehen soll, *den Begriff der Configurationsconstanten passend modificiren,* wenn wir sogleich bei der Definition dieser Constanten dem Umstande Rechnung tragen, dass die Begrenzung des Gebietes eben aus mehreren getrennten Theilen besteht. — Die Bedingungen dieses *neuen Criteriums* können dann, im Gegensatze zu denen des *Hilbert*'schen Satzes, bei mehrfach zusammenhängenden Bereichen thatsächlich erfüllt sein, wie ich das in § 11 am speciellen Beispiele eines von zwei Kreisen begrenzten Gebietes zeigen werde. Damit ist dann erst die *Brauchbarkeit* des neuen Criteriums dargethan, bewiesen, dass dasselbe in einer Reihe von Fällen die Convergenz der Methode des arithmetischen Mittels wirklich *a priori* zu verbürgen gestattet.

Ein Umstand ist bei der Convergenzfrage freilich immer noch zu berücksichtigen, auf den bereits *C. Neumann* beiläufig hinwies [vgl. Abhandl. I, pag. 4], dass nämlich die Methode des arithmetischen Mittels in ihrer ursprünglichen Form auf mehrfach zusammenhängende Gebiete überhaupt nur dann anwendbar sein kann, wenn die willkürlich vorgeschriebenen Randwerthe zuvor auf den einzelnen begrenzenden Curven oder Flächen um gewisse, passend gewählte Constanten vermehrt sind.

Es liefert uns freilich die Methode des arithmetischen Mittels, wie ich dann weiter in § 8 ausführen will, auch bei mehrfach zusammenhängenden Gebieten die Mittel, Fundamentalfunctionen mit *wirklich willkürlich gegebenen* — nicht zuvor um Constante vermehrten — *Randwerthen* zu construiren, — allerdings erscheint dann diese *Lösung der eigent-*

lichen Randwerthaufgabe nicht mehr unmittelbar in der Form einer der *Neumann*'schen Reihen [vgl. I, pag. 15], sondern es tritt in ihr zu einer solchen Reihe noch das Potential gewisser materieller Punkte hinzu.

§ 1.

Vorläufige Prüfung der Verhältnisse im Falle von Gebieten, die von *zwei* getrennten Curven oder Flächen begrenzt werden.

Es sei ein *mehrfach zusammenhängendes, ebenes oder räumliches Gebiet* gegeben, und auf den begrenzenden Curven bezw. Flächen seien *willkürliche aber stetige Functionswerthe* vorgeschrieben. Sucht man alsdann diejenige Fundamentalfunction jenes Gebietes, welche diese Werthe zu Randwerthen besitzt, so liegt es sehr nahe zur Lösung der Aufgabe die allgemeinen Vorschriften der Methode des arithmetischen Mittels zur Anwendung bringen zu wollen [vgl. I, § 3]. — Dabei müssen dann natürlich alle erforderlichen Integrationen hinerstreckt werden *über die ganze Begrenzung*, d. h. über die *sämmtlichen* begrenzenden Curven oder Flächen.

Bei allen diesen Integrationen spielt nun immer die positiv oder negativ gerechnete scheinbare Grösse eines Curven- oder Flächenelementes $d\sigma$ von einem Punkte p aus, d. h. der Ausdruck

$$(1) \qquad (d\sigma)_p = \frac{\partial T_p}{\partial \nu}\, d\sigma = \frac{\cos(\nu, E)}{E^h}\, d\sigma \qquad \left(T_p = \log\frac{1}{E}, \text{bezw.} = \frac{1}{E}\right)$$

eine wesentliche Rolle [vgl. I, (2) pag. 7], wo E die Entfernung des Elementes $d\sigma$ von p, und ν die auf $d\sigma$ errichtete *innere Curven- oder Flächennormale* bedeutet*). — Wollen wir also die Integrationen ausführen, so müssen wir uns zunächst darüber klar werden, was wir denn jetzt unter den *inneren Normalen* zu verstehn haben.

Um uns hierüber, sowie überhaupt über die jetzt etwas veränderte Sachlage zu orientiren, wollen wir zunächst den einfachsten Fall betrachten, dass das vorgelegte Gebiet *von nur zwei Curven oder Flächen begrenzt* wird. — Dabei werden wir gut daran thun, wie auch später öfters, zwischen zwei verschiedenen Fällen zu unterscheiden:

Erster Fall. — *Die beiden Curven oder Flächen σ_1 und σ_2 liegen neben einander* [Figur 1a]. — Dann erstreckt sich das in Rede stehende, von σ_1 und σ_2 gleichzeitig begrenzte, Gebiet ringsum *bis ins Unendliche*, und ist somit von demselben Typus, wie unser früheres Aussengebiet $\mathfrak{A}$. Ein Zweifel darüber, welche Curven- bezw. Flächennormalen wir als die

*) Unter h verstehn wir wieder stets die Zahl 1 *bezw.* 2, je nachdem es sich um Betrachtungen *in der Ebene* oder *im Raume* handelt [vgl. I, pag. 7].

inneren Normalen ν_1 und ν_2 zu bezeichnen haben, kann in diesem Falle nicht obwalten. —

Zweiter Fall. — *Von den beiden geschlossenen Curven oder Flächen σ_1 und σ_2 liegt die eine, σ_2, innerhalb der anderen* [Figur 1b]. — In diesem Falle liegt das von σ_1 und σ_2 begrenzte Gebiet *ganz im Endlichen,*

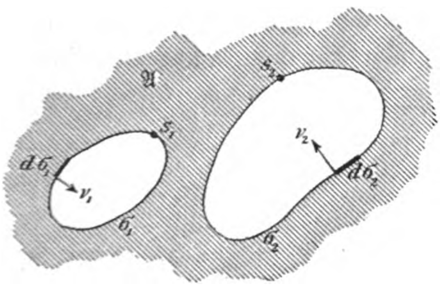


Fig. 1a.

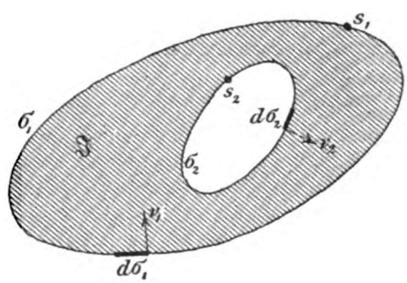


Fig. 1b.

ist also von dem Typus unseres früheren Innengebietes 𝔍. *Wir werden daher als die inneren Normalen ν_1 und ν_2 von σ_1 und σ_2 die in dieses zwischen σ_1 und σ_2 gelegene Gebiet hineingerichteten Normalen ansehn,* — bei der innern Curve oder Fläche σ_2 also gerade die scheinbar äussere Normale; daher wird jetzt auch die scheinbare Grösse $(d\sigma_2)_p = \frac{\cos(\nu_2, E)}{E^h} d\sigma_2$ eines Elementes $d\sigma_2$ von σ_2 überall das entgegengesetzte Vorzeichen besitzen, wie ihr zukäme, wenn diese Curve oder Fläche σ_2 für sich allein vorhanden wäre. Demgemäss wird jetzt z. B., wenn s_2 einen beliebigen auf σ_2 gelegen Punkt bedeutet,

$$\text{(Q)} \qquad \frac{1}{h\pi}\int\limits_{\sigma_2} (d\sigma_2)_{s_2} = -1,$$

und nicht etwa gleich $+1$ sein, wie sonst [vgl. I, (10') pag. 9].

Durch diese Festsetzungen erreichen wir es, dass hier *stets,* genau wie im Falle einer einzelnen Curve oder Fläche, *das über die ganze Begrenzung des betrachteten Gebietes, d. h. also über σ_1 und σ_2 gleichzeitig hinerstreckte Integral*

$$(2) \qquad \frac{1}{h\pi}\int (d\sigma)_p = 2, \quad \textit{bezw.} = 1, \quad \textit{oder aber} \quad = 0$$

wird, je nachdem der Punkt p *innerhalb,* oder gerade *auf der Begrenzung* oder aber *ausserhalb* derselben liegt [vgl. I, (10') pag. 9]. —

Nachdem nun also genau festgesetzt ist, was wir in jedem Falle bei einem Curven- oder Flächenelemente $d\sigma$ unter seiner *inneren Normalen* ν und somit auch unter der Grösse $(d\sigma)_p$ zu verstehn haben [vgl. (1)], können wir jetzt ohne Weiteres genau wie früher, auf Grund der auf σ_1 und σ_2 willkürlich vorgeschriebenen Functionswerthe, die wir mit f_1 bezw. f_2 bezeichnen wollen, die Function W_p bilden [vgl. I, § 1]; es wird, da wir eben die Integration über beide Curven bezw. Flächen hinerstrecken müssen:

$$W_p = \frac{1}{h\pi}\int\limits_{\sigma_1} f_1 (d\sigma_1)_p + \frac{1}{h\pi}\int\limits_{\sigma_2} f_2 (d\sigma_2)_p. \tag{3}$$

Die Werthe, welche diese Function W auf den Curven oder Flächen σ_1 und σ_2 selber besitzt [vgl. I, pag. 8], wollen wir nun mit f_1' bezw. f_2' bezeichnen. — Dann können wir weiter, wie wir soeben die Function W_p aus f_1 und f_2 ableiteten, in genau derselben Weise jetzt aus f_1' und f_2' eine Function W_p' herleiten; deren Werthe unmittelbar auf σ_1 und σ_2 bezeichnen wir dann mit f_1'' und f_2'', und bilden auf Grund derselben eine weitere Function W_p'', u. s. w. f. In dieser Weise erhalten wir eine unbegrenzte Reihe von Functionen W, W', W'', W''' etc. [vgl. I, (1) pag. 14].

Es liegt nun die Vermuthung sehr nahe, dass die Lösung der gestellten Aufgabe, d. h. *die Fundamentalfunction, welche auf σ_1 und σ_2 die Werthe f_1 und f_2 besitzt*, sich wieder darstellen lässt als Aggregat der solchermassen gebildeten Functionen W, W', W'', etc. in Form einer der *Neumann*'schen Reihen [vgl. I, (3) pag. 15], und dass daher hinsichtlich der Anwendbarkeit der Methode des arithmetischen Mittels gar kein Unterschied zwischen einfach zusammenhängenden und mehrfach zusammenhängenden Bereichen bestände. — Unsere im ersten Aufsatze angestellten Untersuchungen über die *Convergenz des Verfahrens* würden dann also auch hier bei mehrfach zusammenhängenden Bereichen noch ihre volle Gültigkeit behalten. Bildeten wir demnach in genau derselben Weise, wie früher, d. h. gerade so als wenn alle begrenzenden Curven- oder Flächenelemente $d\sigma$ einer einzigen zusammenhängenden Curve oder Fläche angehörten, die Configurationsconstante des vorgelegten Bereiches [vgl. I, pag. 12], so wüssten wir: das Verfahren convergirt sicher, sobald diese Constante kleiner als 1 ist [*Hilbert*'scher Satz, vgl. I, pag. 23].

Ja, kann denn aber dieser Fall überhaupt eintreten? Kann jetzt bei unseren mehrfach zusammenhängenden Bereichen die Configurationsconstante, wenn wir sie genau wie früher definiren, überhaupt noch jemals kleiner als 1 werden? — Dieser Frage wollen wir uns zunächst zuwenden.

Die Configurationsconstante eines Gebietes war definirt als das Maximum einer von uns als *Oeffnungsfunction* bezeichneten eigenthümlichen Function $D(s, s')$ der Lage zweier Punkte s und s' auf der Begrenzung, und unter dieser Function wieder verstanden wir das folgende über einen gewissen Theil α der Begrenzung hinerstreckte Integral:

$$(4)\qquad D(s, s') = \frac{1}{h\pi}\int\limits_{\alpha}[(d\alpha)_s - (d\alpha)_{s'}]. \qquad \text{[vgl. I, (7) pag. 11]}$$

Dabei stellt jener Theil α die Summe aller Elemente $d\alpha$ der Begrenzung dar, die von s aus grösser erscheinen als von s', während der übrigbleibende Theil β sonach von jenen Elementen gebildet wird, die umgekehrt von s' grösser als von s, bezw. von beiden Punkten gleich gross erscheinen [vgl. I, (3) pag. 10].

Ich behaupte nun zunächst, dass wenn wir das Integral rechterhand in (4) anstatt über das Gebiet α, hinerstrecken über *irgend einen anderen Theil* $\mathfrak{a}$ *der Begrenzung*, dass wir dann *stets einen Werth, kleiner als* $D(s, s')$ *erhalten*, dass also ganz allgemein:

$$(5)\qquad \frac{1}{h\pi}\int\limits_{\mathfrak{a}}[(d\mathfrak{a})_s - (d\mathfrak{a})_{s'}] \leq D(s, s')$$

ist. — Wenn man nämlich das Integrationsgebiet α in ein anderes Gebiet $\mathfrak{a}$ abändert, so wird das im allgemeinsten Falle in der Weise geschehen, dass man zunächst gewisse Elemente $d\alpha$ von α fortfallen lässt, und sodann andere Elemente, also gewisse Elemente $d\beta$ des Theiles β hinzunimmt. — Bei dem ersten Schritte lässt man aber positive Integralbestandtheile, nämlich gewisse der Grössen $(d\alpha)_s - (d\alpha)_{s'}$ fort, und bei dem zweiten Schritte fügt man negative Grössen, nämlich Grössen von der Form $(d\beta)_s - (d\beta)_{s'}$ zum Integrale hinzu; in jedem Falle also *verkleinert* man den Werth des Integrales (4), womit die Richtigkeit unserer obigen Behauptnng, d. h. der Ungleichung (5), bewiesen ist. —

Von dieser allgemeinen Formel (5) wollen wir nun in dem vorliegenden Falle, wo die Begrenzung aus zwei getrennten Curven bezw. Flächen σ_1 und σ_2 gebildet wird, in der Weise Gebrauch machen, dass wir unter dem Theile $\mathfrak{a}$ der Begrenzung jetzt speciell die Curve oder Fläche σ_1 verstehen. Dann lautet jene Ungleichung (5):

$$(5')\qquad D(s, s') \geq \frac{1}{h\pi}\int\limits_{\sigma_1}[(d\sigma_1)_s - (d\sigma_1)_{s'}],$$

wobei die Lage der Punkte s und s' auf den begrenzenden Curven oder Flächen vorläufig noch völlig willkürlich ist.

Nunmehr jedoch wollen wir festsetzen, dass

im ersten Falle (Figur 1a): der Punkt s auf σ_1 und der Punkt s' auf σ_2 liege (z. B. $s = s_1$, $s' = s_2$) —	*im zweiten Falle* (Figur 1b): der Punkt s auf σ_2 und der Punkt s' auf σ_1 liege (z. B. $s = s_2$, $s' = s_1$) —

dann ist also s ein Oberflächen-Punkt, und s' ein äusserer Punkt in Bezug auf σ_1 und demgemäss nach (10'), I, pag. 9:

$$\frac{1}{h\pi}\int_{\sigma_1}(d\sigma_1)_s = 1, \quad \frac{1}{h\pi}\int_{\sigma_1}(d\sigma_1)_{s'} = 0$$

und somit nach (5'):

$$D(s, s') \geqq 1$$

dann ist also s ein innerer, und s' ein Oberflächen-Punkt in Bezug auf σ_1 und demgemäss nach (10'), I, pag. 9:

$$\frac{1}{h\pi}\int_{\sigma_1}(d\sigma_1)_s = 2, \quad \frac{1}{h\pi}\int_{\sigma_1}(d\sigma_1)_{s'} = 1$$

und somit nach (5'):

$$D(s, s') \geqq 1.$$

Wir erhalten also das Resultat, dass es *in beiden Fällen* solche Lagen der Punkte s und s' auf der Begrenzung giebt, dass die mit Bezug auf diese Punkte gebildete Oeffnungsfunction grösser, oder mindestens gleich 1 wird. — Es wird somit sicherlich auch das Maximum der Oeffnungsfunction, d. h. die *Configurationsconstante* des vorgelegten Gebietes, *mindestens gleich* 1 sein. Die oben aufgeworfene Frage, ob die Configurationsconstante von Bereichen der hier betrachteten Art überhaupt jemals kleiner als 1 sein kann, müssen wir also *verneinend* beantworten:

Bilden wir die Configurationsconstante eines von zwei getrennten Curven oder Flächen begrenzten Gebietes in genau derselben Weise, wie früher, d. h. als wenn alle begrenzenden Curven- bezw. Flächenelemente einer einzigen zusammenhängenden Curve oder Fläche angehörten, so kann diese Constante niemals kleiner als 1 *sein.*

Der *Hilbert*'sche Satz, welcher besagt, dass die Methode des arithmetischen Mittels convergirt, sobald die Configurationsconstante des zu Grunde gelegten Bereiches kleiner als 1 ist, ist hier also nicht anwendbar, weil bei den in Rede stehenden Bereichen eben jene Veraussetzung niemals erfüllt sein kann.

Um also die Convergenzfrage bei Bereichen der hier betrachteten Art zu entscheiden, müssen wir uns nach anderen Criterien umsehn. — Doch zuvor wollen wir noch die vorliegenden eigenthümlichen Verhältnisse nach einer anderen Richtung hin einer näheren Prüfung unterziehen.

§ 2.

Fortsetzung.

Die wesentlichste Eigenschaft der Oeffnungsfunction war die, dass sie mit der Schwankung einer auf der Begrenzung beliebig vorgeschriebenen Function f multiplicirt, eine obere Grenze lieferte für die Differenz der in ihren beiden Polen vorhandenen Werthe der aus f abgeleiteten Function f' [vgl. I, den Satz auf pag. 12].

Nun lehren uns die Betrachtungen des vorigen Paragraphen, dass die Oeffnungsfunction unserer von zwei Curven bezw. Flächen begrenzten Gebiete niemals kleiner als 1 sein kann, sobald von ihren beiden Polen (den Punkten s und s') der eine auf der einen, der andere auf der anderen der beiden Curven oder Flächen liegt. — Danach liegt die Vermuthung sehr nahe, dass es uns im Allgemeinen nicht gelingen dürfte, bei den aufeinanderfolgenden Functionen $f^{(n)}$ durch Vergrösserung von n die Differenz auch solcher Werthe unter jeden Kleinheitsgrad herabzudrücken, die *auf verschiedenen Curven oder Flächen* anzutreffen sind, oder anders ausgedrückt, dass die Functionen $f^{(n)}$, sofern sie überhaupt schliesslich in Constante übergehn, sich im Allgemeinen auf beiden Curven oder Flächen *verschiedenen Constanten* nähern.

Diese unsere Vermuthung lässt sich nun durch folgende Betrachtungen zur Gewissheit erheben:

Wir machen einmal die folgende **Annahme**: Es seien die auf σ_1 und σ_2 vorgeschriebenen Functionen $\bar{f}_1$ und $\bar{f}_2$ so gewählt, dass die aus ihnen nach unseren obigen Vorschriften gebildeten Functionen $\bar{f}_1'$, $\bar{f}_1''$, $\bar{f}_1'''$, etc. und $\bar{f}_2'$, $\bar{f}_2''$, $\bar{f}_2'''$, etc. auf σ_1 und σ_2 *gegen ein und dieselbe Constante* C *convergiren*, was wir durch folgende Formel andeuten:

$$\bar{f}_1^{(\infty)} = \bar{f}_2^{(\infty)} = C. \tag{6}$$

Dann wollen wir einmal entsprechend aufeinanderfolgende Functionen bilden, ausgehend jetzt nicht mehr von jenen speciellen Werthen $\bar{f}_1$ und $\bar{f}_2$, sondern von den neuen, allgemeineren Functionen

$$f_1 = \bar{f}_1 \qquad \text{und} \qquad f_2 = \bar{f}_2 + k, \tag{7}$$

wo k eine willkürlich gewählte Constante bedeutet.

Dann ist nach (3), wenn wir unter s_1 und s_2 zwei beliebige auf σ_1, bezw. σ_2 gelegene Punkte verstehn:

$$f_1' = W_{s_1} = \frac{1}{h\pi}\int\limits_{\sigma_1} \bar{f}_1 (d\sigma_1)_{s_1} + \frac{1}{h\pi}\int\limits_{\sigma_2} (\bar{f}_2 + k)(d\sigma_2)_{s_1},$$

$$f_2' = W_{s_2} = \frac{1}{h\pi}\int\limits_{\sigma_1} \bar{f}_1 (d\sigma_1)_{s_2} + \frac{1}{h\pi}\int\limits_{\sigma_2} (\bar{f}_2 + k)(d\sigma_2)_{s_2},$$

oder kürzer, wenn wir noch die Functionen $\bar{f}_1'$ und $\bar{f}_2'$ einführen:

$$f_1' = \bar{f}_1' + k\,\frac{1}{h\pi}\int\limits_{\sigma_2}(d\sigma_2)_{s_1}, \qquad f_2' = \bar{f}_2' + k\,\frac{1}{h\pi}\int\limits_{\sigma_2}(d\sigma_2)_{s_2}.$$

Nun ist aber, da s_1 *stets* ausserhalb σ_2 liegt, nach (10'), I, pag. 9:

$$\frac{1}{h\pi}\int\limits_{\sigma_2}(d\sigma_2)_{s_1} = 0,$$

hingegen, da s_2 ein Punkt auf σ_2 selber ist,

im ersten Falle (Figur 1a): nach (10'), I, pag. 9:

$$\frac{1}{h\pi}\int\limits_{\sigma_2}(d\sigma_2)_{s_2} = 1, \quad \text{also}$$

$$f_1' = \bar{f}_1', \qquad f_2' = \bar{f}_2' + k,$$

im zweiten Falle (Figur 1b): nach (Q) pag. 52:

$$\frac{1}{h\pi}\int\limits_{\sigma_2}(d\sigma_2)_{s_2} = -1, \quad \text{also}$$

$$f_1' = \bar{f}_1', \qquad f_2' = \bar{f}_2' - k,$$

und, wie wir dieses Resultat aus unserer Voraussetzung (7) abgeleitet haben, genau so ergeben sich weiter hieraus successive die folgenden Formeln:

$$\begin{aligned}
f_1'' &= \bar{f}_1'', & f_2'' &= \bar{f}_2'' + k,\\
f_1''' &= \bar{f}_1''', & f_2''' &= \bar{f}_2''' + k,\\
&\dots & &\dots\\
f_1^{(n)} &= \bar{f}_1^{(n)}, & f_2^{(n)} &= \bar{f}_2^{(n)} + k,
\end{aligned}
\qquad\Bigg|\qquad
\begin{aligned}
f_1'' &= \bar{f}_1'', & f_2'' &= \bar{f}_2'' + k\text{*)},\\
f_1''' &= \bar{f}_1''', & f_2''' &= \bar{f}_2''' - k,\\
&\dots & &\dots\\
f_1^{(n)} &= \bar{f}_1^{(n)}, & &\begin{cases} f_2^{(2\nu)} = \bar{f}_2^{(2\nu)} + k,\\ f_2^{(2\nu+1)} = \bar{f}_2^{(2\nu+1)} - k,\end{cases}
\end{aligned}$$

also schliesslich, wenn wir zur Grenze $n = \infty$ übergehn, mit Rücksicht auf (6):

$$f_1^{(\infty)} = C, \qquad f_2^{(\infty)} = C + k. \qquad\Bigg|\qquad f_1^{(\infty)} = C, \quad \begin{cases} \lim\limits_{\nu=\infty} f_2^{(2\nu)} = C + k,\\ \lim\limits_{\nu=\infty} f_2^{(2\nu+1)} = C - k.\end{cases}$$

Wir sehen somit, dass die auf Grund der Werthe (7) gebildeten aufeinanderfolgenden Functionen f', f'', f''', etc. thatsächlich *auf den beiden Curven oder Flächen σ_1 und σ_2 gegen verschiedene Constanten convergiren*, — ja im zweiten Falle, wo σ_2 innerhalb σ_1 liegt, besitzen jene Functionen sogar *auf σ_2 allein bereits zwei verschiedene Convergenzconstanten*, es nähern sich dort nämlich die Functionen mit *geradem* Index, d. h. die Functionen $f_2^{(2\nu)}$ der Constante $C + k$, die mit *ungeradem*, d. h. die Functionen $f_2^{(2\nu+1)}$ der Constanten $C - k$, — nur also, wenn eben gerade $k = 0$ ist, fallen alle Convergenzconstanten zusammen [vgl. die Annahme (6)].

Sehn wir also jetzt die Grösse k als variabel, gleichsam als einen Parameter an, so können wir das erhaltene Resultat so aussprechen:

Sind f_1 und f_2 irgend zwei beliebige auf σ_1 und σ_2 vorgeschriebene Functionen, so wird von allen Functionspaaren f_1, $f_2 + k$ höchstens eines die Eigenschaft haben, dass die aus ihm abgeleiteten aufeinanderfolgenden Functionen auf beiden Curven oder Flächen ein und dieselbe bestimmte Con-

*) Wie sich nämlich aus $f_2 = \bar{f}_2 + k$ oben $f_2' = \bar{f}_2' - k$ ergab, so folgt aus $f_2' = \bar{f}_2' + (-k)$ jetzt: $f_2'' = \bar{f}_2'' - (-k) = \bar{f}_2'' + k$, u. s. w. f.

vergenzconstante besitzen — denn dass wirklich ein Paar diese Eigenschaft besitzt, das war ja oben auch eine blosse Annahme, und dass dieses Paar gerade dem Parameterwerthe $k = 0$ entsprach, lag natürlich nur an der speciellen Auswahl von $\overline{f}_2$ aus der Schaar von Functionen $\overline{f}_2 + k$.

Beachten wir nun, dass die *Methode des arithmetischen Mittels* die Existenz einer eindeutig bestimmten Convergenzconstanten voraussetzt [vgl. I, pag. 15], so können wir aus dem soeben ausgesprochenen Resultate sofort diese Folgerung ziehn:

Sind auf zwei getrennten Curven bezw. Flächen σ_1 und σ_2 ganz beliebige aber stetige Werthe f_1 und f_2 vorgeschrieben, so wird diejenige Fundamentalfunction des von σ_1 und σ_2 begrenzten Gebietes, welche jene Werthe zu Randwerthen besitzt, im Allgemeinen nicht darstellbar sein durch eine der Neumann'schen Reihen in ihrer ursprünglichen Gestalt; man wird vielmehr in der Regel, um die allgemeinen Vorschriften der Methode des arithmetischen Mittels überhaupt anwenden zu können, die Randwerthfunctionen f_1 und f_2 zuvor um passend gewählte Constante vermehren müssen.

Wenn wir also Untersuchungen anstellen wollen über die Anwendbarkeit der Methode des arithmetischen Mittels auf Gebiete, die von *zwei oder mehr Curven bezw. Flächen* begrenzt sind*), so werden wir am besten vorerst überhaupt darauf verzichten, für solche Gebiete Fundamentalfunctionen mit *völlig willkürlichen Randwerthen* herstellen zu wollen, wir werden vielmehr die Frage zunächst folgendermassen stellen:

Unter welchen Bedingungen gestattet die Methode des arithmetischen Mittels für solche mehrfach zusammenhängende Bereiche eine Fundamentalfunction herzustellen, welche sich auf den einzelnen begrenzenden Curven oder Flächen von daselbst willkürlich vorgeschriebenen Werthen nur um gewisse Constanten unterscheidet?

Erst nach Erledigung dieser Frage werden wir dann auch ein Verfahren kennen lernen, unter *denselben* Bedingungen auch solche Fundamentalfunctionen der in Rede stehenden Gebiete herzustellen, die auf den begrenzenden Curven oder Flächen *geradezu übergehn in die daselbst willkürlich vorgeschriebenen Werthe* [vgl. weiter unten, § 8].

---

*) Es versteht sich wohl von selbst, dass alle bisherigen Resultate, die wir unter der Voraussetzung ableiteten, dass das betrachtete Gebiet von nur *zwei* Curven oder Flächen begrenzt würde, ganz analog auch noch gelten, wenn das Gebiet *mehr als zwei* solche Randcurven bezw. -flächen besitzt. — Nur der Kürze halber machten wir vorläufig immer die einfachste Annahme nur *zweier* solcher begrenzender Curven oder Flächen.

§ 3.

Die Configurationsconstante mehrfach zusammenhängender Bereiche.

Wie wir im ersten Aufsatze (§ 5) sahen, convergirt die Methode des arithmetischen Mittels, angewandt auf einfach zusammenhängende Bereiche, sicher, sobald die Configurationsconstante kleiner als 1 ist, d. h. sobald der grösste Werth, dessen die Oeffnungsfunction bei beliebiger Verschiebung ihrer Pole auf der ganzen Begrenzung fähig ist, unterhalb der 1 liegt. — Dieses Criterium versagt, wie wir oben in § 1 sahen, im Falle mehrfach zusammenhängender Bereiche; denn hier ist dieser grösste Werth eben niemals kleiner als 1 — wird doch die Oeffnungsfunction sofort grösser als 1, sobald nur ihre beiden Pole auf verschiedenen der begrenzenden Curven oder Flächen liegen. — *Darum könnte die Oeffnungsfunction freilich noch immer dauernd unterhalb der* 1 *bleiben, sobald wir ihre beiden Pole an ein und dieselbe Curve oder Fläche bannen*, und es liegt nun die Vermuthung sehr nahe, dass, wenn dies der Fall ist, das vielleicht schon genügt, die Convergenz der Methode des arithmetischen Mittels, wenigstens in dem am Schlusse des vorigen Paragraphen erörterten Sinne zu verbürgen.

Diese Vermuthung wollen wir nun im Folgenden näher prüfen. — Sollte sie sich als richtig herausstellen, so würde also der grösste Werth, den die Oeffnungsfunction anzunehmen im Stande ist, wenn wir die beiden Pole, zwar nicht beliebig auf der ganzen Begrenzung, so doch *beliebig auf irgend einer, aber ein und derselben begrenzenden Curve oder Fläche verschieben*, — dieser so definirte Maximalwerth würde dann also bei mehrfach zusammenhängenden Bereichen dieselbe Rolle spielen, wie die Configurationsconstante bei einfach zusammenhängenden. Wir wollen daher diesen Maximalwerth kurz wieder die *„Configurationsconstante“* des mehrfach zusammenhängenden Bereiches nennen.

Damit wären wir also zu einer gewissen *Modification des Begriffs der Configurationsconstanten* gelangt. Im ersten Paragraphen dachten wir uns diese Constante gebildet gerade so, als wenn alle begrenzenden Curven- oder Flächenelemente einer einzigen zusammenhängenden Curve oder Fläche angehörten, und sahen dann, dass die so definirte Constante keine Bedeutung für die Convergenzfrage besitzt — jetzt haben wir die Definition der Configurationsconstanten modificirt und dabei dem Umstande sehr wohl Rechnung getragen, dass die Begrenzung aus mehreren getrennten Theilen besteht. — Es wird nun unsere Aufgabe sein, zu zeigen, dass die Einführung der so definirten Constanten bei Erörterung der Convergenzfrage thatsächlich von Nutzen ist.

Doch bevor wir uns dieser Aufgabe zuwenden, wollen wir zuvor noch die zur Definition unserer neuen Configurationsconstanten erforderlichen Betrachtungen kurz zusammenfassen. Dabei müssen wir natürlich auf die Definition der Oeffnungsfunction zurückgehn, bei welcher freilich noch gar kein Unterschied gegen früher zu constatiren ist, wo die ganze Begrenzung von einer einzigen zusammenhängenden Curve oder Fläche gebildet wurde.

Definition der Oeffnungsfunction bei mehrfach zusammenhängenden Bereichen. — *Ist ein mehrfach zusammenhängendes ebnes oder räumliches Gebiet gegeben, begrenzt von m geschlossenen Curven bezw. Flächen $\sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_m$, so markiren wir auf diesen irgend zwei ganz beliebige Punkte s und s', und theilen dann die ganze Begrenzung in zwei Theile α und β, derart, dass zum Theile α alle Elemente gehören, die von s aus grösser als von s', zu β aber alle, die umgekehrt von s' aus grösser oder aber gleich gross wie von s aus erscheinen.**) *Alsdann verstehn wir unter der Oeffnungsfunction D(s, s') jenes Gebietes mit Bezug auf die Pole s und s' das folgende über alle Elemente dα des Theiles α hinerstreckte Integral:*

(1) $$D(s, s') = \frac{1}{h\pi}\int[(d\alpha)_s - (d\alpha)_{s'}].$$ [vgl. I, (7) pag. 11]

Da bei dieser Definition also thatsächlich garnicht weiter davon Gebrauch gemacht ist, dass die Begrenzung in mehrere getrennte Curven oder Flächen zerfällt, so übertragen sich die früher in § 2 des ersten Aufsatzes bewiesenen Eigenschaften der Oeffnungsfunction sofort auch auf den vorliegenden Fall, und es gilt daher u. a. der folgende wichtige Satz [vgl. I, pag. 12]:

Ist G der grösste, und K der kleinste aller Werthe, die irgend welche auf $\sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_m$ vorgeschriebene Functionen $f_1, f_2, \cdots f_m$ daselbst annehmen, und mithin G — K die Gesammtschwankung aller dieser Functionswerthe, so stellt G — K multiplicirt mit D(s, s') eine obere Grenze dar für die Differenz der in den Punkten s und s' vorhandenen Werthe der aus jenen Functionen $f_1, f_2, \cdots f_m$ hergeleiteten Function f', d. h. es ist:

(2) $$f'_s - f'_{s'} \leqq (G - K) \cdot D(s, s')$$ [vgl. I, (6) pag. 11]. —

Anknüpfend an den Begriff der Oeffnungsfunction gelangen wir nun auch leicht zur

---

*) Dabei ist natürlich wieder zu achten auf das Vorzeichen der scheinbaren Grössen [vgl. I, die Anmerkung pag. 10, auch die Ausführungen oben, pag. 52, namentlich im „zweiten Falle"]. — Ausdrücklich bemerkt sei auch noch, dass die Theile α und β naturgemäss *aus mehreren getrennten Stücken bestehen* werden, denn es werden bereits auf jeder einzelnen der Curven bezw. Flächen σ sowohl Elemente, die zu α, wie solche, die zu β gehören, anzutreffen sein.

Definition der Configurationsconstanten mehrfach zusammenhängender Bereiche. — *Den grössten Werth, welchen die Oeffnungsfunction $D(s, s')$ anzunehmen im Stande ist, wenn ihre Pole s und s' beide gleichzeitig auf ein und derselben Curve oder Fläche σ_λ liegen, bezeichnen wir als die Configurationsconstante $\mathfrak{c}_\lambda$ des vorgelegten Gebietes mit Bezug auf diese Curve oder Fläche σ_λ, sodass also:*

$$\mathfrak{c}_\lambda \geqq D(s_\lambda, s_\lambda'). \quad \text{—} \tag{3}$$

Die grösste der m solchermassen definirten Constanten $\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \cdots \mathfrak{c}_m$ bezeichnen wir sodann schlechthin als die Configurationsconstante c des vorgelegten mehrfach zusammenhängenden Bereiches, sodass wiederum:

$$c \geqq \mathfrak{c}_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots m). \tag{4}$$

Mithin ist c der grösste Werth, den die Oeffnungsfunction annehmen kann, wenn ihre beiden Pole auf ein und derselben, aber beliebigen begrenzenden Curve oder Fläche liegen. —

Von der Configurationsconstanten einfach zusammenhängender Bereiche galt nun, wie wir wissen, der Satz, dass sie eine obere Grenze darstellt für den Quotienten der Schwankungen zweier aufeinanderfolgender Functionen f und f' [vgl. I, pag. 12]. — Von unserer Configurationsconstanten mehrfach zusammenhängender Bereiche gilt nun ein ähnlicher Satz, zu dessen Ableitung wir jetzt übergehn wollen; er bezieht sich freilich nicht auf die *Gesammtschwankungen* der sämmtlichen auf der ganzen Begrenzung vorhandenen Werthe, sondern auf die *Sonderschwankungen* der *auf den einzelnen Curven oder Flächen* anzutreffenden Werthe.

Um näher hierauf einzugehn, bezeichnen wir diese *Einzelschwankungen* speciell der auf $\sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_m$ von Hause aus vorgeschrieben gedachten Functionen $f_1, f_2, \cdots f_m$ mit $G_1 - K_1, G_2 - K_2, \cdots G_m - K_m$. — Ist dann Δ *die grösste dieser Einzelschwankungen*, so ist von vornherein klar, dass man es durch Vermehrung der Functionen $f_1, f_2, \cdots f_m$ um gewisse auxiliäre Constante $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_m$ stets wird erreichen können, dass die sämmtlichen Werthe der so entstehenden neuen Functionen

$$f_1 + \varepsilon_1, \quad f_2 + \varepsilon_2, \quad \cdots \quad f_m + \varepsilon_m$$

in ein und dasselbe Intervall von der Grösse Δ, z. B. in das Intervall $\frac{\Delta}{2} = G$ und $-\frac{\Delta}{2} = K$ fallen*). —

*) Wie schon bemerkt, sind diese Constanten $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_m$ nur *auxiliäre* Grössen, d. h. Grössen, die nur vorübergehend zur Vereinfachung der Rechnung eingeführt werden; sie haben jedenfalls nicht das Mindeste zu thun mit den additiven Constanten, die man den Functionen $f_1, f_2, \cdots f_m$ hinzufügen muss, damit die entsprechende Fundamentalfunction durch eine der *Neumann*'schen Reihen darstellbar sei [vgl. pag. 58].

Wir markiren nun auf einer beliebig herausgegriffenen Curve oder Fläche σ_λ irgend zwei Punkte s_λ und s_λ', und bilden dann die Differenz der in ihnen vorhandenen Werthe der Function f', d. h., da die Integrationen stets über sämmtliche Curven und Flächen hinzuerstrecken sind, so bilden wir den Ausdruck:

$$f'_{s_\lambda} - f'_{s'_\lambda} = \frac{1}{h\pi}\int\limits_{\sigma_1} f_1 (d\sigma_1)_{s_\lambda} + \frac{1}{h\pi}\int\limits_{\sigma_2} f_2 (d\sigma_2)_{s_\lambda} + \cdots + \frac{1}{h\pi}\int\limits_{\sigma_m} f_m (d\sigma_m)_{s_\lambda}$$
$$- \frac{1}{h\pi}\int\limits_{\sigma_1} f_1 (d\sigma_1)_{s'_\lambda} - \frac{1}{h\pi}\int\limits_{\sigma_2} f_2 (d\sigma_2)_{s'_\lambda} - \cdots - \frac{1}{h\pi}\int\limits_{\sigma_m} f_m (d\sigma_m)_{s'_\lambda}.$$

Hierfür können wir dann augenscheinlich auch schreiben:

$$(5)\quad f'_{s_\lambda} - f'_{s'_\lambda} = \frac{1}{h\pi}\int\limits_{\sigma_1} (f_1+\varepsilon_1)(d\sigma_1)_{s_\lambda} + \frac{1}{h\pi}\int\limits_{\sigma_2} (f_2+\varepsilon_2)(d\sigma_2)_{s_\lambda} + \cdots + \frac{1}{h\pi}\int\limits_{\sigma_m} (f_m+\varepsilon_m)(d\sigma_m)_{s_\lambda}$$
$$- \frac{1}{h\pi}\int\limits_{\sigma_1} (f_1+\varepsilon_1)(d\sigma_1)_{s'_\lambda} - \frac{1}{h\pi}\int\limits_{\sigma_2} (f_2+\varepsilon_2)(d\sigma_2)_{s'_\lambda} - \cdots - \frac{1}{h\pi}\int\limits_{\sigma_m} (f_m+\varepsilon_m)(d\sigma_m)_{s'_\lambda};$$

die scheinbar neu hinzugefügten Integrale zerstören sich nämlich zu je zweien, denn, da s_λ und s_λ' als Punkte ein und derselben Curve oder Fläche σ_λ *beide gleichzeitig* entweder *innerhalb*, oder *auf*, oder endlich *ausserhalb* einer jeden der Begrenzungscurven oder -flächen σ_μ liegen, so ist stets

$$\frac{1}{h\pi}\int\limits_{\sigma_\mu} (d\sigma_\mu)_{s_\lambda} = \frac{1}{h\pi}\int\limits_{\sigma_\mu} (d\sigma_\mu)_{s'_\lambda}, \qquad (\mu = 1, 2, \cdots m)$$

nämlich, je nach Umständen, gleich 2, 1 bezw. — 1, oder auch 0 [vgl. I, (10') pag. 9, bezw. oben (Q) pag. 52]. —

Jene Gleichung (5) besagt nun, dass man $f'_{s_\lambda} - f'_{s'_\lambda}$ auch ansehn kann als Werthdifferenz einer aus den auf $\sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_m$ vorgeschriebenen Werthen $f_1 + \varepsilon_1$, $f_2 + \varepsilon_2$, $\cdots f_m + \varepsilon_m$ (*sic!*) hergeleiteten Function. Daraus folgt aber nach der Fundamentaleigenschaft (2) der Oeffnungsfunction:

$$(6)\qquad f'_{s_\lambda} - f'_{s'_\lambda} \leqq \Delta \cdot D(s_\lambda, s_\lambda'),$$

denn $\Delta = G - K$ ist ja die Differenz zwischen dem grössten und kleinsten der *sämmtlichen* Werthe $f_1 + \varepsilon_1$, $f_2 + \varepsilon_2$, $\cdots f_m + \varepsilon_m$ [vgl. oben die Einführung der Grössen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_m$]. —

Da nun aber s_λ und s_λ' nach Voraussetzung auf derselben Curve oder Fläche σ_λ liegen, so folgt aus unserer letzten Ungleichung mit Rücksicht auf (3), auf die Definition der Configurationsconstanten $\mathfrak{c}_\lambda$, *a fortiori:*

$$. \quad f'_{s_\lambda} - f'_{s'_\lambda} \leqq \Delta \cdot \mathfrak{c}_\lambda,$$

und diese Ungleichung findet statt, welche Lage die Punkte s_λ und s_λ' auf σ_λ besitzen, also auch noch, wenn wir sie in die Stellen verlegen, an denen f' *auf* σ_λ, oder, wie wir kürzer sagen wollen, f_λ' seinen grössten Werth G_λ', bezw. seinen kleinsten Werth K_λ' erreicht, d. h. es ist auch noch

(7) $$G_\lambda' - K_\lambda' \leqq \Delta \cdot \mathfrak{c}_\lambda,$$

oder aber, da laut unserer obigen Definition $\mathfrak{c}_\lambda \leqq c$ ist [vgl. (4)], noch umsomehr:

(8) $$G_\lambda' - K_\lambda' \leqq \Delta \cdot c.$$

Nun war aber σ_λ eine ganz beliebige der m Curven bezw. Flächen $\sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_m$; wir sind somit in dieser unserer letzten Formel (8) zu dem folgenden Resultate gelangt:

Die oben definirte Configurationsconstante c eines mehrfach zusammenhängenden von m Curven oder Flächen $\sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_m$ begrenzten Gebietes besitzt die Eigenschaft, mit Δ, der grössten der Einzelschwankungen von m auf $\sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_m$ willkürlich vorgeschriebenen Functionen $f_1, f_2, \cdots f_m$, multiplicirt, eine obere Grenze zu liefern für die sämmtlichen Einzelschwankungen der aus $f_1, f_2, \cdots f_m$ hergeleiteten Functionen $f_1', f_2', \cdots f_m'$.

Bezeichnen wir die grösste dieser letzteren Schwankungen $G_1' - K_1'$, $G_2' - K_2', \cdots G_m' - K_m'$ kurz mit Δ', so können wir diesen Satz in die folgende Formel zusammenfassen:

(9) $$\Delta' \leqq \Delta \cdot c. \text{ —}$$

Bezeichnen wir dann aber weiter die grösste der Schwankungen der auf $f_1', f_2', \cdots f_m'$ folgenden Functionen $f_1'', f_2'', \cdots f_m''$ mit Δ'', und bei den dann folgenden Functionen $f_1''', f_2''', \cdots f_m'''$ mit Δ''', u. s. w. f., so folgt augenscheinlich analog:

$$\begin{array}{lcl} \Delta'' \leqq \Delta' \cdot c & \text{oder} & \Delta'' \leqq \Delta \cdot c^2, \\ \Delta''' \leqq \Delta'' \cdot c & & \Delta''' \leqq \Delta \cdot c^3, \\ \Delta^{IV} \leqq \Delta''' \cdot c & & \Delta^{IV} \leqq \Delta \cdot c^4 \\ \text{etc.} & & \text{etc.,} \end{array}$$

und daher ganz allgemein:

(10) $$\Delta^{(n)} \leqq \Delta \cdot c^n.$$

Ist also c *ein echter Bruch*, so folgt aus dieser Formel (10), dass sich mit wachsendem n die grösste der Schwankungen, und mithin überhaupt *die sämmtlichen Einzelschwankungen der Functionen* $f_1^{(n)}, f_2^{(n)}, \cdots f_m^{(n)}$

immer mehr und mehr der 0 *nähern*, d. h. dass sich diese Functionen auf den einzelnen Curven bezw. Flächen immer weniger von Constanten unterscheiden. Damit ist freilich noch nicht bewiesen, dass diese Functionen eine „Convergenzconstante" besitzen, d. h. sich mit wachsendem n auf der ganzen Begrenzung einer *bestimmten* Constanten nähern, oder auch nur, dass sie dies auf den einzelnen Curven oder Flächen thäten. Die Constanten, von denen sich jene Functionen immer weniger und weniger unterscheiden, könnten ja noch je nach den Werthen von n, z. B. je nachdem n gerade oder ungerade ist, andere und andere Werthe haben — ja nach den Ausführungen des zweiten Paragraphen wissen wir sogar, dass solche Fälle thatsächlich vorkommen.

Des Näheren wollen wir diese Verhältnisse in den folgenden Paragraphen untersuchen. — Zunächst müssen wir aber noch einige Vorbereitungen hierzu treffen.

§ 4.

Beweis eines Hilfssatzes.

Auf der Begrenzung σ eines beliebigen ebnen oder räumlichen Gebietes, sei es nun *einfach* oder *mehrfach* zusammenhängend, denken wir uns in stetiger, sonst aber beliebiger Weise gewisse Werthe f vorgeschrieben. Dann ist also der Werth der aus f hergeleiteten Function f' in einem beliebigen Punkte s von σ definirt durch das folgende über die ganze Begrenzung σ hinerstreckte Integral:

$$(1) \qquad f_s' = \frac{1}{h\pi}\int\limits_\sigma f_\sigma (d\sigma)_s .$$

Theilen wir nun die begrenzenden Curven- bezw. Flächenelemente $d\sigma$ in zwei Kategorien, nämlich der da und db, und somit die Begrenzung σ selber in zwei — eventuell aus getrennten Stücken bestehende — Theile a und b, so folgt:

$$(2) \qquad f_s' = \frac{1}{h\pi}\int\limits_a f_a (da)_s + \frac{1}{h\pi}\int\limits_b f_b (db)_s .$$

Nunmehr setzen wir über diese bisher willkürliche Eintheilung von σ fest, dass wir *zur Kategorie der da alle Elemente dσ rechnen, die von s*
(3) *aus positiv erscheinen**), *zur Kategorie der db alle übrigen*, also die, deren scheinbare Grösse von s aus negativ oder gleich 0 ist, sodass demnach die Grössen

$$(da)_s > 0 \qquad \text{dagegen} \qquad (db)_s \leqq 0$$

*) Vgl. I, die Anmerkung, pag. 10.

sind. Dann werden wir augenscheinlich die rechte Seite der Gleichung (2) *vergrössern*, wenn wir daselbst im ersten Integral für f überall seinen grössten Werth G, im zweiten hingegen seinen kleinsten Werth K eintreten lassen, und umgekehrt werden wir jenen Ausdruck *verkleinern*, wenn wir im ersten Integral f durch seinen kleinsten, dagegen im zweiten durch seinen grössten Werth ersetzen. Es ist somit:

$$f_s' \leqq G \cdot \frac{1}{h\pi} \int\limits_a (da)_s + K \cdot \frac{1}{h\pi} \int\limits_b (db)_s, \qquad f_s' \geqq K \cdot \frac{1}{h\pi} \int\limits_a (da)_s + G \cdot \frac{1}{h\pi} \int\limits_b (db)_s,$$

und daraus folgt dann weiter sofort:

$$(4) \qquad \begin{aligned} f_s' - G &\leqq G \cdot \left[\frac{1}{h\pi} \int\limits_a (da)_s - 1\right] + K \cdot \frac{1}{h\pi} \int\limits_b (db)_s, \\ f_s' - K &\geqq K \cdot \left[\frac{1}{h\pi} \int\limits_a (da)_s - 1\right] + G \cdot \frac{1}{h\pi} \int\limits_b (db)_s. \end{aligned}$$

Nun ist aber *stets*, auch selbst bei mehrfach zusammenhängenden Bereichen [vgl. (2) pag. 52] das über die *ganze* Begrenzung hinerstreckte Integral

$$\frac{1}{h\pi} \int (d\sigma)_s = 1, \qquad \text{d. i.} \qquad \frac{1}{h\pi} \int\limits_a (da)_s + \frac{1}{h\pi} \int\limits_b (db)_s = 1.$$

Daraus folgt aber:

$$\left[\frac{1}{h\pi} \int\limits_a (da)_s - 1\right] = -\frac{1}{h\pi} \int\limits_b (db)_s,$$

und unter Rücksichtnahme auf diese Relation vereinfachen sich die Ungleichungen (4) in der folgenden Weise:

$$(5) \qquad \begin{aligned} f_s' - G &\leqq (G - K) \cdot \left[\frac{1}{h\pi} \int\limits_a (da)_s - 1\right], \\ f_s' - K &\geqq -(G - K) \cdot \left[\frac{1}{h\pi} \int\limits_a (da)_s - 1\right] \cdot - \end{aligned}$$

Hier ist nun die in eckige Klammern gesetzte Grösse ausser natürlich von den vorgelegten Curven bezw. Flächen *lediglich abhängig von der Lage des Punktes s* auf ihnen, denn ja auch das Integrationsgebiet a haben wir durch unsere obige Festsetzung (3) abhängig gemacht von der Lage dieses Punktes s. — Wir bezeichnen nun den grössten Werth, den diese Klammergrösse annimmt, *wenn wir den Punkt s beliebig auf der* *ganzen Begrenzung verschieben* mit A; dann ist dies also eine jetzt lediglich von der Beschaffenheit des vorgelegten Gebietes abhängige, also *rein geometrische Constante.*

Führen wir nun diese Constante A als Maximalwerth jener Klammergrösse anstatt dieser in die Formeln (5) ein, so verstärken wir dadurch augenscheinlich diese Ungleichungen nur noch mehr, und erhalten somit *a fortiori:*

$$f_s' - G \leqq (G-K)\cdot A, \qquad f_s' - K \geqq -(G-K)\cdot A,$$

Relationen, welche jetzt statthaben, welche Lage der Punkt s auch auf der Begrenzung besitzen möge.

Das damit erhaltene Resultat können wir kurz so zusammenfassen:

Hilfssatz. — *Sind auf der Begrenzung irgend eines beliebigen einfach oder auch mehrfach zusammenhängenden Gebietes stetige, aber sonst beliebige Werthe f vorgeschrieben, und bezeichnen G und K den grössten bezw. kleinsten aller dieser Werthe, so sind die sämmtlichen Werthe f_s' der aus dieser hergeleiteten Function f' an die folgenden Ungleichungen gebunden:*

$$(6) \qquad f_s' - G \leqq (G-K)\cdot A \qquad \textit{und} \qquad f_s' - K \geqq -(G-K)\cdot A,$$

wo A eine rein geometrische, d. h. lediglich von der Beschaffenheit des vorgelegten Gebietes abhängige Constante bedeutet.

Dieser Satz hätte uns auch bereits im ersten Aufsatze, bei einfach zusammenhängenden Bereichen, ähnliche Dienste leisten können, wie sie uns dort der Hilfssatz von pag. 17 geleistet hat; doch gestattete uns dieser einen tieferen Einblick in das Wesen der aufeinanderfolgenden Functionen, und gaben wir ihm daher dort den Vorzug. — Hier bei mehrfach zusammenhängenden Bereichen existirt ein Analogon zu jenem Satze [I, pag. 17], oder wenigstens ein ähnlich einfacher analoger Satz, leider nicht.

§ 5.

Der Convergenzbeweis.
Erster Theil: Die Convergenzconstanten.

Wir haben bei unseren früheren Untersuchungen unter $s_1, s_2, \cdots s_m$ stets irgend welche *beliebige* Punkte der Curven bezw. Flächen $\sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_m$ verstanden, denen wir nach Willkür bald diese, bald jene Lage auf den betreffenden Curven bezw. Flächen geben konnten. Daneben wollen wir nun noch weiter auf $\sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_m$ gewisse *feste* Punkte $\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_m$ markiren, die zwar von Hause aus auch beliebig gewählt, doch im weiteren Verlauf der Untersuchung *ein für alle Male unverändert beibehalten werden sollen.*

Dachten wir uns nun auf den Curven bezw. Flächen $\sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_m$ gewisse Werthe $f_1, f_2, \cdots f_m$ vorgeschrieben, und aus ihnen für sämmtliche Punkte der ganzen Begrenzung die aufeinanderfolgenden Functionen f', f'', f''', etc. gebildet, so wird, falls Δ die grösste der Schwankungen jener einzelnen Functionen $f_1, f_2, \cdots f_m$ bedeutet, nach (10), pag. 63 die Schwankung der z. B. speciell auf σ_μ anzutreffenden Werthe $f_\mu^{(n)}$ kleiner als $\Delta \cdot c^n$ sein, d. h. es wird die Differenz $G_\mu^{(n)} - K_\mu^{(n)}$ des grössten und kleinsten dieser Werthe $f_\mu^{(n)}$ unterhalb $\Delta \cdot c^n$ liegen. — Umsomehr wird daher auch die *absolute Differenz irgend zweier solcher Werthe* von $f_\mu^{(n)}$ kleiner als $\Delta \cdot c^n$ sein, also auch z. B. die Differenz der beiden Werthe von $f_\mu^{(n)}$, wie sie in jenem fest auf σ_μ markirten Punkte x_μ, und irgend einem beliebigen anderen Punkte s_μ von σ_μ anzutreffen sind, d. h. es folgt:

$$\text{abs}\left(f_{s_\mu}^{(n)} - f_{x_\mu}^{(n)}\right) \leqq \Delta c^n \tag{1}$$

oder aber:

$$f_{s_\mu}^{(n)} - f_{x_\mu}^{(n)} = \Theta_{s_\mu}^{(n)} \Delta c^n,$$

wo $\Theta_{s_\mu}^{(n)}$ eine Grösse bedeutet, die bei beliebigen Lagen des Punktes s_μ auf σ_μ stets nur Werthe *zwischen* -1 *und* $+1$ annehmen kann.

Diese Werthe $\Theta_{s_\mu}^{(n)}$ stellen nun eine neue auf σ_μ ausgebreitete Function $\Theta_\mu^{(n)}$ dar, vermittelst welcher sich also die Function $f_\mu^{(n)}$ folgendermassen ausdrücken lässt:

$$f_\mu^{(n)} = f_{x_\mu}^{(n)} + \Theta_\mu^{(n)} \cdot \Delta \cdot c^n, \tag{2}$$

und analoge Darstellungen gelten natürlich auch für die aufeinanderfolgenden Functionen auf den anderen Curven bezw. Flächen, d. h. die Formel (2) gilt für $\mu = 1, 2, \cdots m$, aber — was das Wesentliche an diesen Darstellungen (2) ist — *alle die Functionen* $\Theta_1^{(n)}, \Theta_2^{(n)}, \cdots \Theta_m^{(n)}$ (*gleichgültig auch wie gross* n *ist*) *haben die Eigenschaft gemeinsam nur positiv oder negativ echtgebrochene Werthe anzunehmen:*

$$-1 \leqq \Theta_\mu^{(n)} \leqq +1 \qquad \begin{pmatrix} \mu = 1, 2, \cdots m, \\ n = 1, 2, 3, \cdots \end{pmatrix}. \text{—} \tag{3}$$

Wir wollen nunmehr annehmen, *die Configurationsconstante c des betrachteten Gebietes [vgl. pag. 61] sei kleiner als* 1, und wollen dann zusehn, ob wir unter dieser **Grundvoraussetzung** Näheres über das Verhalten der aufeinanderfolgenden Functionen f, f', f'', etc. auf den einzelnen Curven bezw. Flächen aussagen können. — Wir wissen bereits, dass unter dieser Voraussetzung die Schwankungen der aufeinanderfolgenden Functionen auf den einzelnen Curven bezw. Flächen immer kleiner und kleiner werden, bis zur 0 herab abnehmen, d. h. dass *sich die einzelnen Functionen immer weniger von Constanten unterscheiden* [vgl. pag. 64], — wir wissen aber bisher noch nichts über die Natur dieser Constanten, ob sie, auch nur auf jeder einzelnen Curve oder Fläche, sämmtlich denselben Werth haben, ob sich die aufeinanderfolgenden Functionen daselbst also einem *bestimmten* Werthe nähern, oder aber, ob sie vielleicht bei wachsendem Index Werthe aus der Nachbarschaft bald dieses, bald jenes constanten Werthes annehmen.

Um zwischen diesen verschiedenen Möglichkeiten zu entscheiden genügt es augenscheinlich das Verhalten der aufeinanderfolgenden Functionen in einem einzigen Punkte jeder Curve oder Fläche zu untersuchen, zuzusehn, ob sich hier ihre Werthe alle *derselben* Grenze nähern oder nicht. — Wir wollen nun diese Untersuchung speciell für die auf den Curven bezw. Flächen fest markirten Punkte durchführen, also z. B. bei der Curve oder Fläche σ_λ für den Punkt x_λ.

Bilden wir nun aber für diesen Punkt eine der aufeinanderfolgenden Functionen, z. B. die mit dem Index $n+1$, so ist dies nach den allgemeinen Definitionsgleichungen für diese Functionen [vgl. I, (1) pag. 14] der Werth des folgenden über die ganze Begrenzung hinerstreckten Integrales:

$$f_{x_\lambda}^{(n+1)} = \frac{1}{h\pi}\int f_\sigma^{(n)}\,(d\sigma)_{x_\lambda},$$

oder aber es folgt, wenn wir dieses Integral entsprechend den m begrenzenden Curven oder Flächen $\sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_m$ in m Theile zerlegen:

$$f_{x_\lambda}^{(n+1)} = \frac{1}{h\pi}\int\limits_{\sigma_1} f_1^{(n)}(d\sigma_1)_{x_\lambda} + \frac{1}{h\pi}\int\limits_{\sigma_2} f_2^{(n)}\,(d\sigma_2)_{x_\lambda} + \cdots + \frac{1}{h\pi}\int\limits_{\sigma_m} f_m^{(n)}\,(d\sigma_m)_{x_\lambda}.$$

Bedienen wir uns nunmehr der Darstellungsform (2) für die Functionen $f_\mu^{(n)}$, so folgt, wenn wir sogleich die Glieder, welche den Factor Δc^n enthalten, von den davon freien Gliedern sondern:

$$f_{x_\lambda}^{(n+1)} = S_\lambda + \Delta c^n \cdot \Sigma_\lambda, \tag{4}$$

wo S_λ und Σ_λ als Abkürzungen in den folgenden Bedeutungen stehn:

$$S_\lambda = f_{x_1}^{(n)} \cdot \frac{1}{h\pi}\int\limits_{\sigma_1}(d\sigma_1)_{x_\lambda} + f_{x_2}^{(n)} \cdot \frac{1}{h\pi}\int\limits_{\sigma_2}(d\sigma_2)_{x_\lambda} + \cdots + f_{x_m}^{(n)} \cdot \frac{1}{h\pi}\int\limits_{\sigma_m}(d\sigma_m)_{x_\lambda}, \tag{4a}$$

$$\Sigma_\lambda = \frac{1}{h\pi}\int\limits_{\sigma_1}\Theta_1^{(n)}\,(d\sigma_1)_{x_\lambda} + \frac{1}{h\pi}\int\limits_{\sigma_2}\Theta_2^{(n)}\,(d\sigma_2)_{x_\lambda} + \cdots + \frac{1}{h\pi}\int\limits_{\sigma_m}\Theta_m^{(n)}\,(d\sigma_m)_{x_\lambda}. \tag{4b}$$

Was nun zunächst diesen letzteren Ausdruck Σ_λ anlangt, so können wir ihn augenscheinlich ansehn als den in x_λ vorhandenen Werth einer auf Grund der Werthe $\Theta_1^{(n)}, \Theta_2^{(n)}, \cdots \Theta_m^{(n)}$ in genau derselben Weise gebildeten Function, wie f' auf Grund der Werthe $f_1, f_2, \cdots f_m$ gebildet war. — Dem Hilfssatze unseres vorigen Paragraphen zufolge sind nun die sämmtlichen Werthe dieser Function, und damit auch der in $\varkappa_\lambda$ vorhandene Werth Σ_λ an folgende Ungleichungen gebunden:

$$(5) \qquad \Sigma_\lambda \leqq G + (G - K)A, \qquad \Sigma_\lambda \geqq K - (G - K)A,$$

wenn G und K den grössten und kleinsten sämmtlicher Werthe von $\Theta_1^{(n)}, \Theta_2^{(n)}, \cdots \Theta_m^{(n)}$ bedeuten. — Nun sind aber, wie wir oben feststellten [vgl. (3)], die sämmtlichen Werthe dieser Functionen $\Theta_1^{(n)}, \Theta_2^{(n)}, \cdots \Theta_m^{(n)}$ enthalten zwischen den Grenzen -1 und $+1$; es folgt somit:

$$G \leqq +1, \quad K \geqq -1 \quad \text{und daher} \quad G - K \leqq 2,$$

und demgemäss ergiebt sich aus (5), dass umsomehr:

$$\Sigma_\lambda \leqq 1 + 2A, \qquad \Sigma_\lambda \geqq -(1 + 2A).$$

oder kürzer:

$$\text{abs}\, \Sigma_\lambda \leqq 1 + 2A.$$

Nun ist aber $\Sigma_\lambda \cdot \Delta c^n$ nach (4) nichts anderes als $f_{\varkappa_\lambda}^{(n+1)} - S_\lambda$; es folgt also zunächst aus diesen unseren Betrachtungen über Σ_λ:

$$(6) \qquad \text{abs}\left(f_{\varkappa_\lambda}^{(n+1)} - S_\lambda\right) \leqq (1 + 2A) \cdot \Delta c^n.$$

Um nun weiter auch den Ausdruck (4a) für S_λ noch näher zu untersuchen, müssen wir ähnlich, wie schon einmal in den ersten Paragraphen zwischen zwei Fällen unterscheiden, je nachdem die sämmtlichen begrenzenden Curven bezw. Flächen **neben einander** liegen, oder aber die **eine von ihnen die übrigen umschliesst**.

Erster Fall. — *Die begrenzenden Curven bezw. Flächen liegen sämmtlich* ***neben einander.*** [Figur 2] — In diesem Falle liegt der auf σ_λ markirte Punkt $\varkappa_\lambda$ ausserhalb aller **übrigen** Curven bezw. Flächen, es verschwinden demgemäss in dem Ausdruck (4a) für S_λ die sämmtlichen Integrale mit Ausnahme des über σ_λ selber hinerstreckten [vgl. I, (10′) pag. 9]; dieses aber hat den Werth 1, und es folgt somit:

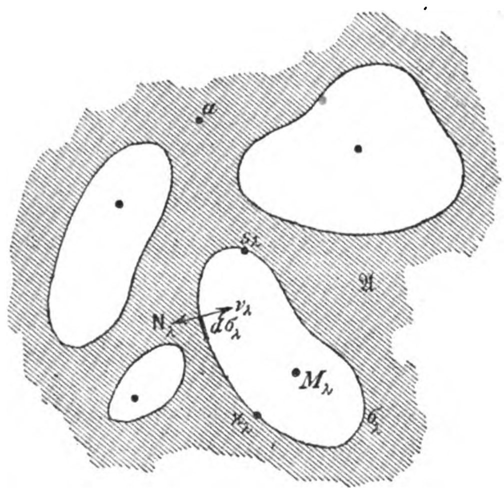


Fig. 2.

$$S_\lambda = f_{x_\lambda}^{(n)},$$

weshalb in diesem Falle die Ungleichung (6) die folgende Form annimmt:

$$\text{abs}\left(f_{x_\lambda}^{(n+1)} - f_{x_\lambda}^{(n)}\right) \leqq \Delta(1+2A)c^n. \tag{7}$$

Da nun diese Formel für beliebiges n gilt, wir in ihr also auch n durch $n+1$, $n+2$, u. s. w. f. ersetzen können, so ergeben sich aus ihr weiter sofort folgende Relationen:

$$\begin{cases} \text{abs}\left(f_{x_\lambda}^{(n+2)} - f_{x_\lambda}^{(n+1)}\right) \leqq \Delta(1+2A)c^{n+1}, \\ \text{abs}\left(f_{x_\lambda}^{(n+3)} - f_{x_\lambda}^{(n+2)}\right) \leqq \Delta(1+2A)c^{n+2}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \text{abs}\left(f_{x_\lambda}^{(n+q)} - f_{x_\lambda}^{(n+q-1)}\right) \leqq \Delta(1+2A)c^{n+q-1}. \end{cases} \tag{7'}$$

Addiren wir jetzt aber alle diese Ungleichungen (7) und (7'), und berücksichtigen noch die bekannte Regel, dass der absolute Betrag einer Summe noch kleiner ist als die Summe der absoluten Beträge der einzelnen Summanden, so folgt:

$$\text{abs}\left(f_{x_\lambda}^{(n+q)} - f_{x_\lambda}^{(n)}\right) \leqq \Delta(1+2A)\cdot c^n\,\frac{1-c^q}{1-c}$$

und daher *a fortiori:*

$$\text{abs}\left(f_{x_\lambda}^{(n+q)} - f_{x_\lambda}^{(n)}\right) \leqq \Delta\left[\frac{1+2A}{1-c}\right]\cdot c^n, \tag{8}$$

woraus jetzt deutlich ersichtlich ist, dass wir durch Vergrösserung von n es stets erreichen können, dass sich in x_λ *alle auf $f^{(n)}$ folgenden Functionen* $f^{(n+q)}$ beliebig wenig von $f_{x_\lambda}^{(n)}$ unterscheiden, d. h. also, dass *sich in x_λ die aufeinanderfolgenden Functionen einem bestimmten Werthe nähern.*

Wir wollen ihn mit C_λ bezeichnen, und können dann das gefundene Resultat durch folgende Formel andeuten:

$$\lim_{n=\infty} f_{x_\lambda}^{(n)} = C_\lambda \qquad \text{oder kürzer} \qquad f_{x_\lambda}^{(\infty)} = C_\lambda.$$

Dann folgt aus (8) im Falle eines unendlich grossen q:

$$\text{abs}\left(C_\lambda - f_{x_\lambda}^{(n)}\right) \leqq \Delta\left[\frac{1+2A}{1-c}\right]c^n, \tag{9}$$

eine Formel, welche jetzt auch noch näheren Aufschluss giebt über den Grad der Annäherung der Werthe $f_{x_\lambda}^{(n)}$ an C_λ.

Was nun die Werthe der aufeinanderfolgenden Functionen in anderen Punkten s_λ von σ_λ anlangt, so folgt für diese aus der identischen Gleichung:

$$C_\lambda - f_{s_\lambda}^{(n)} = \left(C_\lambda - f_{x_\lambda}^{(n)}\right) + \left(f_{x_\lambda}^{(n)} - f_{s_\lambda}^{(n)}\right)$$

in bekannter Weise:

$$\text{abs}\left(C_\lambda - f_{s_\lambda}^{(n)}\right) \leqq \text{abs}\left(C_\lambda - f_{x_\lambda}^{(n)}\right) + \text{abs}\left(f_{x_\lambda}^{(n)} - f_{s_\lambda}^{(n)}\right)$$

d. i. nach (9) und (1):

$$\text{abs}\left(C_\lambda - f_{s_\lambda}^{(n)}\right) \leqq \Delta\left[\frac{1+2A}{1-c} + 1\right]c^n,$$

oder aber, wenn wir den, ebenso wie A und c selber, *nur von den geometrischen Verhältnissen abhängigen Ausdruck* $\left[\frac{1+2A}{1-c}+1\right]$ noch kurz mit B bezeichnen:

(10) $$\text{abs}\left(C_\lambda - f_{s_\lambda}^{(n)}\right) \leqq \Delta B \cdot c^n,$$

woraus jetzt ersichtlich ist, dass wir durch Vergrösserung von n die Werthe der aufeinanderfolgenden Functionen $f^{(n)}$ in sämmtlichen Punkten s_λ von σ_λ beliebig nahe an C_λ herandrücken können, d. h. *es convergiren auf σ_λ die Functionen $f_\lambda, f_\lambda', f_\lambda''$, etc. gleichmässig in allen Punkten gegen die Constante C_λ.*

Nun war σ_λ ganz beliebig aus der Schaar von Curven bezw. Flächen $\sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_m$ herausgegriffen, auf allen übrigen Curven oder Flächen werden also die Verhältnisse ganz analog liegen, d. h. *die aufeinanderfolgenden Functionen besitzen auf sämmtlichen Curven bezw. Flächen je eine bestimmte Convergenzconstante, es ist:*

$$f_1^{(\infty)} = C_1, \quad f_2^{(\infty)} = C_2, \quad \cdots \quad f_m^{(\infty)} = C_m,$$

und zwar brauchen diese m Convergenzconstanten, wie wir von den Betrachtungen unseres zweiten Paragraphen her wissen, durchaus nicht etwa gleich gross zu sein. —

Weniger einfach liegen die Verhätnisse in dem zweiten Falle, welcher hinsichtlich der gegenseitigen Lage der begrenzenden Curven bezw. Flächen noch möglich ist, und zu dessen Besprechung wir nunmehr übergehn:

Zweiter Fall. — *Von den begrenzenden Curven bezw. Flächen $\sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_m$ umschliesst eine, σ_1, die $m-1$ übrigen* [Figur 3]. — Fassen wir dann zunächst einmal den *speciell auf* σ_1 fest markirten Punkt x_1 ins Auge, so ist dies wieder in Bezug auf alle übrigen Curven bezw. Flächen ein äusserer Punkt, in dem aus (4a) sich ergebenden Ausdruck für S_1:

$$S_1 = f_{x_1}^{(n)} \cdot \frac{1}{h\pi}\int\limits_{\sigma_1}(d\sigma_1)_{x_1} + f_{x_2}^{(n)} \cdot \frac{1}{h\pi}\int\limits_{\sigma_2}(d\sigma_2)_{x_1} + \cdots + f_{x_m}^{(n)} \cdot \frac{1}{h\pi}\int\limits_{\sigma_m}(d\sigma_m)_{x_1}$$

werden daher wieder alle anderen Integrale ausser dem über σ_1 hinerstreckten verschwinden; dieses eine nicht verschwindende Integral aber hat wieder den Werth 1, sodass also

$$S_1 = f_{x_1}^{(n)}$$

folgt, weshalb sich speciell für $\lambda = 1$ aus der allgemeinen Formel (6) die folgende Ungleichung ergiebt:

$$\text{abs}\left(f_{x_1}^{(n+1)} - f_{x_1}^{(n)}\right) \leqq \Delta(1+2A)c^n,$$

welche vollständig unserer obigen Ungleichung (7) entspricht; es lassen sich daher aus ihr auch genau dieselben Schlüsse, wie aus jener ziehn. Es liegen danach also jetzt *speciell auf* σ_1 die Verhältnisse genau so, wie oben im ersten Falle auf *jeder* der Curven oder Flächen σ_λ, es folgt somit für beliebige Punkte s_1 von σ_1:

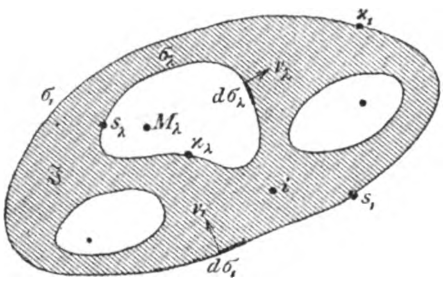


Fig. 3.

$$\text{(11)} \qquad \text{abs}\left(C_1 - f_{s_1}^{(n)}\right) \leqq \Delta B \cdot c^n, \qquad \text{[vgl. (10)]}$$

wo B wieder eine *rein geometrische Constante* bedeutet. *Es convergiren also die aufeinanderfolgenden Functionen speciell auf* σ_1 *gleichmässig in allen Punkten gegen eine bestimmte Constante* C_1. —

Der Unterschied gegen früher tritt erst hervor, wenn wir jetzt *eine der inneren Curven bezw. Flächen* σ_λ $(\lambda = 2, 3, \cdots m)$ näher ins Auge fassen. Dann wird nämlich in dem Ausdruck (4a):

$$S_\lambda = f_{x_1}^{(n)} \cdot \frac{1}{h\pi}\int\limits_{\sigma_1}(d\sigma_1)_{x_\lambda} + f_{x_2}^{(n)} \cdot \frac{1}{h\pi}\int\limits_{\sigma_2}(d\sigma_2)_{x_\lambda} + \cdots + f_{x_m}^{(n)} \cdot \frac{1}{h\pi}\int\limits_{\sigma_m}(d\sigma_m)_{x_\lambda}$$

ausser dem über σ_λ hinerstreckten Integral, das jetzt gleich -1 ist [vgl. (Q) pag. 52], auch noch das erste, über σ_1 hinerstreckte, einen nicht verschwindenden Werth, nämlich den Werth 2 haben, da der auf σ_λ markirte Punkt x_λ ja innerhalb σ_1 liegt [vgl. I, (10') pag. 9]. Es folgt somit jetzt:

$$S_\lambda = 2f_{x_1}^{(n)} - f_{x_\lambda}^{(n)}, \qquad (\lambda = 2, 3, \cdots m)^*)$$

und es nimmt daher unsere allgemeine Relation (6) in diesem Falle die folgende Gestalt an:

$$\text{abs}\left(f_{x_\lambda}^{(n+1)} + f_{x_\lambda}^{(n)} - 2f_{x_1}^{(n)}\right) \leqq \Delta(1+2A)c^n.$$

Addiren wir aber zu dieser Ungleichung die aus (11) sich ergebende:

$$\text{abs}\left(2f_{x_1}^{(n)} - 2C_1\right) \leqq \Delta \cdot 2B \cdot c^n,$$

*) Es enthält diese Formel auch die obige Gleichung $S_1 = f_{x_1}$ in sich, wenn wir $\lambda = 1$ setzen, und es ist daher die einschränkende Bemerkung: $\lambda = 2, 3, \cdots m$, eigentlich überflüssig, weshalb wir sie auch bei den folgenden Betrachtungen meist fortlassen wollen.

so folgt unter Berücksichtigung der bekannten Regel über den absoluten Betrag einer Summe:

$$\text{(12)} \qquad \operatorname{abs}\left(f_{x_\lambda}^{(n+1)} + f_{x_\lambda}^{(n)} - 2C_1\right) \leqq \Delta(1+2A+2B)c^n,$$

und hieraus dann durch Vertauschung von n und $n+1$ weiter:

$$\operatorname{abs}\left(f_{x_\lambda}^{(n+2)} + f_{x_\lambda}^{(n+1)} - 2C_1\right) \leqq \Delta(1+2A+2B)c^{n+1},$$

oder aber, da unserer Grundvoraussetzung nach c ein positiver echter Bruch, also $c^{n+1} < c^n$ ist, *a fortiori:*

$$\operatorname{abs}\left(2C_1 - f_{x_\lambda}^{(n+2)} - f_{x_\lambda}^{(n+1)}\right) \leqq \Delta(1+2A+2B)c^n.$$

Addiren wir aber zu der obigen Ungleichung (12) jetzt diese letzte Relation, so folgt ähnlich, wie schon früher mehrfach:

$$\text{(13)} \qquad \operatorname{abs}\left(f_{x_\lambda}^{(n)} - f_{x_\lambda}^{(n+2)}\right) \leqq 2\Delta(1+2A+2B)c^n,$$

und damit sind wir dann endlich zu einer Relation gelangt, welche uns ähnliche Dienste leistet, wie es oben die Relation (7) that. —

Wir ersetzen in ihr jetzt n durch $n+2$, $n+4$, u. s. w. f., und erhalten so das folgende System von Ungleichungen:

$$\text{(13')} \qquad \begin{cases} \operatorname{abs}\left(f_{x_\lambda}^{(n+2)} - f_{x_\lambda}^{(n+4)}\right) \leqq 2\Delta(1+2A+2B)c^{n+2}, \\ \operatorname{abs}\left(f_{x_\lambda}^{(n+4)} - f_{x_\lambda}^{(n+6)}\right) \leqq 2\Delta(1+2A+2B)c^{n+4}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \operatorname{abs}\left(f_{x_\lambda}^{(n+2\varrho-2)} - f_{x_\lambda}^{(n+2\varrho)}\right) \leqq 2\Delta(1+2A+2B)c^{n+2\varrho-2}, \end{cases}$$

und weiter durch Addition aller dieser Ungleichungen (13) und (13') ähnlich wie oben:

$$\operatorname{abs}\left(f_{x_\lambda}^{(n)} - f_{x_\lambda}^{(n+2\varrho)}\right) \leqq 2\Delta(1+2A+2B)c^n \frac{1-c^{2\varrho}}{1-c^2},$$

und daher *a fortiori:*

$$\operatorname{abs}\left(f_{x_\lambda}^{(n+2\varrho)} - f_{x_\lambda}^{(n)}\right) \leqq 2\Delta\left[\frac{1+2A+2B}{1-c^2}\right]\cdot c^n,$$

eine Relation, welche wir mit Vortheil für gerades und ungerades n, $n = 2\nu$, bezw. $n = 2\nu+1$, gesondert hinschreiben werden:

$$\text{(14)} \qquad \begin{cases} \operatorname{abs}\left(f_{x_\lambda}^{(2\nu+2\varrho)} - f_{x_\lambda}^{(2\nu)}\right) \leqq 2\Delta\left[\frac{1+2A+2B}{1-c^2}\right]c^{2\nu}, \\ \operatorname{abs}\left(f_{x_\lambda}^{(2\nu+2\varrho+1)} - f_{x_\lambda}^{(2\nu+1)}\right) \leqq 2\Delta\left[\frac{1+2A+2B}{1-c^2}\right]c^{2\nu+1}. \end{cases}$$

Die erste dieser Formeln besagt dann, dass wir es durch Vergrösserung des Index 2ν stets erreichen können, dass sich schliesslich in x_λ die

Werthe *sämmtlicher auf $f^{(2\nu)}$ folgender Functionen mit geradem Index* von $f_{x_\lambda}^{(2\nu)}$ beliebig wenig unterscheiden, d. h. dass die Functionen mit *geradem* Index *sich daselbst einem bestimmten Werthe nähern,* und genau dasselbe sagt die zweite Formel (14) von den Functionen mit *ungeradem* Index aus. — Wir bezeichnen diese beiden Werthe, denen sich die einen und die anderen Functionswerthe nähern, mit C_λ bezw. C_λ', so dass also:

$$\lim_{\nu=\infty} f_{x_\lambda}^{(2\nu)} = C_\lambda \qquad \text{und} \qquad \lim_{\nu=\infty} f_{x_\lambda}^{(2\nu+1)} = C_\lambda' \qquad (\lambda=2,3,\cdots m).$$

Demgemäss liefern uns die Formeln (14), angewandt auf den Fall eines unendlich grossen q die weiteren Relationen:

$$(15) \quad \begin{cases} \operatorname{abs}\left(C_\lambda - f_{x_\lambda}^{(2\nu)}\right) \leqq 2\Delta\left[\dfrac{1+2A+2B}{1-c^2}\right]c^{2\nu}, \\ \operatorname{abs}\left(C_\lambda' - f_{x_\lambda}^{(2\nu+1)}\right) \leqq 2\Delta\left[\dfrac{1+2A+2B}{1-c^2}\right]c^{2\nu+1}. \text{—} \end{cases} \qquad (\lambda=2,3,\cdots m)$$

Mit den Functionswerthen speciell in x_λ sind nun die Werthe der aufeinanderfolgenden Functionen in beliebigen andern Punkten s_λ von σ_λ zufolge (1) pag. 67 durch folgende Relationen verbunden:

$$\operatorname{abs}\left(f_{x_\lambda}^{(2\nu)} - f_{s_\lambda}^{(2\nu)}\right) \leqq \Delta c^{2\nu}, \qquad \operatorname{abs}\left(f_{x_\lambda}^{(2\nu+1)} - f_{s_\lambda}^{(2\nu+1)}\right) \leqq \Delta c^{2\nu+1}.$$

Demnach folgt, (indem man nämlich diese Relationen zu den Ungleichungen (15) addirt), auch für die Functionswerthe in beliebigen Punkten s_λ von σ_λ:

$$(16) \quad \begin{cases} \operatorname{abs}\left(C_\lambda - f_{s_\lambda}^{(2\nu)}\right) \leqq \Delta B' c^{2\nu}, \\ \operatorname{abs}\left(C_\lambda' - f_{s_\lambda}^{(2\nu+1)}\right) \leqq \Delta B' c^{2\nu+1}, \end{cases} \qquad (\lambda=2,3,\cdots m)$$

wo

$$B' = 2\left[\frac{1+2A+2B}{1-c^2}\right] + 1$$

wieder eine *rein geometrische Constante*, d. h. eine, ebenso wie c, A und B selber, lediglich von den geometrischen Verhältnissen des Curven- bezw. Flächensystems abhängige Grösse ist.

In diesen Relationen (16) ist nun das Resultat enthalten, dass *auf jeder der inneren Curven bezw. Flächen von den aufeinanderfolgenden Functionen die mit geradem und ebenso die mit ungeradem Index gleichmässig in allen Punkten gegen je eine bestimmte Constante convergiren.*

Nähere Untersuchung der Constanten C_λ **und** C_λ'. — Diese beiden auf jeder der inneren Curven bezw. Flächen vorhandenen Convergenzconstanten brauchen nun, wie wir von dem zweiten Paragraphen her wissen, durchaus nicht einander gleich zu sein, gleichwohl sind sie, wie ich jetzt noch zeigen will, nicht unabhängig von einander: Aus (12) folgt im Falle $n = 2\nu$ für die speciell auf σ_λ vorliegenden Verhältnisse:

$$\operatorname{abs}\left(f_{x_\lambda}^{(2\nu)} + f_{x_\lambda}^{(2\nu+1)} - 2C_1\right) \leqq \Delta(1 + 2A + 2B)c^{2\nu},$$

woraus ersichtlich, dass

$$\lim_{\nu=\infty}\left(f_{x_\lambda}^{(2\nu)} + f_{x_\lambda}^{(2\nu+1)} - 2C_1\right) = 0$$

ist; nun convergiren aber $f_{x_\lambda}^{(2\nu)}$ und $f_{x_\lambda}^{(2\nu+1)}$ mit wachsendem ν, wie wir wissen, gegen die Constanten C_λ bezw. C_λ', es ist also andrerseits jener Grenzwerth:

$$\lim_{\nu=\infty}\left(f_{x_\lambda}^{(2\nu)} + f_{x_\lambda}^{(2\nu+1)} - 2C_1\right) = C_\lambda + C_\lambda' - 2C_1,$$

und es folgt somit:

(17) $$C_\lambda + C_\lambda' - 2C_1 = 0, \qquad \frac{C_\lambda + C_\lambda'}{2} = C_1.$$

Es besitzen also die beiden auf σ_λ vorhandenen Convergenzconstanten C_λ und C_λ' den Werth C_1 der auf der äusseren Curve bezw. Fläche σ_1 vorhandenen Convergenzconstanten zum arithmetischen Mittel, um ebensoviel, wie die eine grösser als C_1 ist, ist die andere kleiner als C_1; setzen wir also

$$C_\lambda = C_1 + \delta_\lambda, \qquad \text{so ist} \qquad C_\lambda' = C_1 - \delta_\lambda,$$

und zwar gilt dies wieder mit Bezug auf jede der inneren Curven bezw. Flächen $\sigma_2, \sigma_3, \cdots \sigma_m$.*)

Zusammenfassung. — *Es sei gegeben ein von m geschlossenen Curven oder Flächen $\sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_m$ begrenztes Gebiet, dessen Configurationsconstante [vgl. pag. 61] kleiner als 1 ist.*

Sodann denken wir uns auf diesen begrenzenden Curven bezw. Flächen stetige, sonst aber ganz beliebige Werthe $f_1, f_2, \cdots f_m$ vorgeschrieben, und aus diesen dann nach den allgemeinen Vorschriften der Methode des arithmetischen Mittels [vgl. I, pag. 14 u. oben, pag. 53] die aufeinanderfolgenden Functionen $f_1', f_2', \cdots f_m'; f_1'', f_2'', \cdots f_m''$, etc. gebildet, wobei natürlich alle erforderlichen Integrationen über sämmtliche Curven bezw. Flächen hinzuerstrecken sind. Alsdann werden

***im ersten Falle,** wenn sämmtliche Curven bezw. Flächen nebeneinander liegen [vgl. Figur 2, pag. 69], die aufeinanderfolgenden Functionen auf den einzelnen Curven bezw. Flächen je eine Convergenzconstante besitzen, d. h. es werden sich auf σ_1 die Functionen f_1, f_1', f_1'', etc. gleich-*

*) Im besten Einklang mit diesen allgemeinen Resultaten stehn die specielleren Betrachtungen auf pag. 57 [vgl. daselbst den „zweiten Fall"].

mässig einer Constanten C_1, *auf* σ_2 *die Functionen* f_2, f_2', f_2'', *etc. einer Constanten* C_2 *nähern, u. s. w. f.,*

$$(18)\qquad f_1^{(\infty)} = C_1, \quad f_2^{(\infty)} = C_2, \quad \cdots \quad f_m^{(\infty)} = C_m;$$

im zweiten Falle hingegen, wenn von den m Curven bezw. Flächen eine, σ_1, ***die m—1 übrigen*** $\sigma_2, \sigma_3, \cdots \sigma_m$ ***umschliesst*** *[vgl. Figur 3, pag. 72], werden zwar die aufeinanderfolgenden Functionen **speciell auf*** σ_1, *also die Functionen* f_1, f_1', f_1'', *etc. gleichfalls **eine bestimmte Convergenzconstante** besitzen, d. h. sämmtlich gleichmässig gegen eine Constante* C_1 *convergiren — auf jeder der **inneren** Curven bezw. Flächen* σ_λ $(\lambda = 2, 3, \cdots m)$ *werden sich aber die **Functionen mit geradem Index*** $f_\lambda, f_\lambda'', f_\lambda^{IV}$, *etc., und die **mit ungeradem Index*** $f_\lambda', f_\lambda''', f_\lambda^{V}$, *etc. **für sich** gleichmässig **je einer Constanten*** C_λ *bezw.* C_λ' *nähern; es folgt also in diesem Falle:*

$$(19)\quad f_1^{(\infty)} = C_1, \quad \begin{array}{llll} \lim\limits_{\nu=\infty} f_2^{(2\nu)} = C_2, & \lim\limits_{\nu=\infty} f_3^{(2\nu)} = C_3, & \cdots & \lim\limits_{\nu=\infty} f_m^{(2\nu)} = C_m, \\ \lim\limits_{\nu=\infty} f_2^{(2\nu+1)} = C_2', & \lim\limits_{\nu=\infty} f_3^{(2\nu+1)} = C_3', & \cdots & \lim\limits_{\nu=\infty} f_m^{(2\nu+1)} = C_m', \end{array}$$

*und zwar werden von den beiden auf jeder der inneren Curven oder Flächen vorhandenen Convergenzconstanten, die eine immer um ebensoviel **grösser**, wie die andere **kleiner** als* C_1 *sein:*

$$(19')\quad \begin{array}{llll} C_2 = C_1 + \delta_2, & C_3 = C_1 + \delta_3, & \cdots & C_m = C_1 + \delta_m, \\ C_2' = C_1 - \delta_2, & C_3' = C_1 - \delta_3, & \cdots & C_m' = C_1 - \delta_m. \end{array}$$

§ 6.

Der Convergenzbeweis.
Zweiter Theil: Die gesuchten Fundamentalfunctionen.

Wir wollen jetzt zu unserer eigentlichen Aufgabe übergehn, für das von unseren Curven bezw. Flächen $\sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_m$ begrenzte Gebiet eine Fundamentalfunction herzustellen, welche jene willkürlich vorgeschriebenen Werthe $f_1, f_2, \cdots f_m$ zu Randwerthen besitzt, oder aber sich von ihnen nur um gewisse Constanten unterscheidet.

Erster Fall. — *Die begrenzenden Curven bezw. Flächen liegen sämmtlich **neben einander*** [vgl. Figur 2, pag. 69]. — Dann erstreckt sich das in Rede stehende, **gleichzeitig** von ihnen **allen** begrenzte Gebiet ringsum *bis ins Unendliche*, entspricht also in dieser Hinsicht dem *Aussengebiete* $\mathfrak{A}$ einer **einzigen** geschlossenen Curve oder Fläche. Wir werden uns daher bei dem vorliegenden Problem auf die Lösung der entsprechenden Aufgabe für ein **solches** Gebiet stützen, wie sie in den Formeln (2a) und (3a), I, pag. 15 enthalten ist, und werden demgemäss zunächst für alle Punkte s der ganzen Begrenzung die Function $\mathfrak{f}$ bilden [vgl. daselbst (2a)], die also speciell auf σ_λ zu definiren sein wird durch folgende unendliche Reihe:

(1) $\quad \xi_\lambda = (C_\lambda - f_\lambda) + (C_\lambda - f_\lambda') + (C_\lambda - f_\lambda'') + (C_\lambda - f_\lambda''') + \cdots,$

und auf Grund dieser solchermassen eingeführten Functionen $\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_m$, für welche wir eben die Collectivbezeichnung ξ gebrauchen, bilden wir weiter mit Bezug auf einen beliebigen Punkt a jenes Aussengebietes $\mathfrak{A}$ *das über die ganze Begrenzung hinerstreckte Integral:*

(2) $$\Xi_a = \frac{1}{h\pi}\int \xi_\sigma (d\sigma)_a.$$

Diese Grösse Ξ_a wollen wir dann einer näheren Betrachtung unterwerfen; zunächst wollen wir einmal zusehn, ob denn auch die Reihen, die wir zur Definition von Ξ_a benutzten, die Reihen (1) für die Functionen ξ_λ, convergiren.

Nun ist nach Formel (10), pag. 71:

$$\text{abs}\,(C_\lambda - f_{s_\lambda}^{(n)}) \leqq \Delta B \cdot c^n;$$

da aber nach unserer Grundvoraussetzung [vgl. pag. 67] c ein positiver echter Bruch ist, so folgt daraus sofort, dass die Reihe (1) für ξ_λ für alle Punkte s_λ von σ_λ schneller als eine geometrische Reihe mit dem Quotienten c convergirt, ja sogar *gleichmässig in allen diesen Punkten convergirt*, und Analoges gilt natürlich auch von dem Verhalten der Functionen ξ auf den übrigen Curven oder Flächen. — Daraus folgt dann weiter, dass die Functionen ξ auf den einzelnen Curven bezw. Flächen auch *stetig* sind, und dass mithin

$$\Xi_a = \frac{1}{h\pi}\int \xi_\sigma (d\sigma)_a,$$

aufgefasst als Function der Lage des Punktes a, *eine Fundamentalfunction des Gebietes* $\mathfrak{A}$ ist*).

Welches sind nun die *Randwerthe* dieser Fundamentalfunction? Welchem Werthe nähert sich z. B. die Function Ξ_a, wenn wir den Punkt a sich einem Punkte s_λ von σ_λ nähern lassen? — Da Ξ das Potential einer Doppelbelegung ist, so giebt die Formel (7a), I, pag. 8 auf diese Frage Auskunft; sie besagt, dass dieser Werth, dem sich Ξ nähert:

(3) $$\Xi_{a s_\lambda} = \xi_{s_\lambda}' - \xi_{s_\lambda}$$

ist, wo ξ' die aus ξ hergeleitete Function

$$\xi_{s_\lambda}' = \frac{1}{h\pi}\int \xi_\sigma (d\sigma)_{s_\lambda} = \frac{1}{h\pi}\int\limits_{\sigma_1} \xi_1 (d\sigma_1)_{s_\lambda} + \frac{1}{h\pi}\int\limits_{\sigma_2} \xi_2 (d\sigma_2)_{s_\lambda} + \cdots + \frac{1}{h\pi}\int\limits_{\sigma_m} \xi_m (d\sigma_m)_{s_\lambda}$$

*) Vgl. C. *Neumann*, Abhandlung I, pag. 47 u. 84.

bedeutet. — Führen wir aber die in dieser Formel verlangten Integrationen aus, unter Zugrundelegung der Werthe (1) der Functionen ξ_μ, so fallen alle übrigen Constanten C_μ ausser speciell C_λ fort*), und es folgt daher:

$$\xi'_{s_\lambda} = (C_\lambda - f'_{s_\lambda}) + (C_\lambda - f''_{s_\lambda}) + (C_\lambda - f'''_{s_\lambda}) + \cdots, \quad \text{d. i.} \quad = \xi_{s_\lambda} - (C_\lambda - f_{s_\lambda}),$$

sodass uns die Formel (3) das Resultat liefert:

$$\Xi_{a s_\lambda} = f_{s_\lambda} - C_\lambda, \tag{4}$$

d. h. die Function Ξ_a unterscheidet sich in s_λ und damit in allen Punkten von σ_λ von den daselbst vorgeschriebenen Werthen von f_λ um den constanten Werth C_λ. —

Was wir hier aber von σ_λ bewiesen haben, gilt natürlich ganz analog auch von jeder anderen Curve oder Fläche, und wir gelangen somit zu dem Resultate, dass Ξ_a *eine Fundamentalfunction des Gebietes* $\mathfrak{A}$ *ist, die sich von den ursprünglich vorgeschriebenen Werthen* f *auf* σ_1 *überall um den constanten Werth* C_1, *auf* σ_2 *überall um den Werth* C_2, *u. s. w. f., endlich auf* σ_m *um den Werth* C_m *unterscheidet.*

Zweiter Fall. — *Von den Curven oder Flächen* $\sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_m$ *umschliesst eine,* σ_1, *die* $m-1$ *übrigen* [vgl. Figur 3, pag. 72]. — Wollen wir alsdann für das solchermassen begrenzte Gebiet, das jetzt also *ganz im Endlichen* liegt, eine Fundamentalfunction herstellen, die auf $\sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_m$ vorgeschriebene Werthe annimmt, oder sich doch von ihnen nur um constante Differenzen unterscheidet, so werden wir an die in den Formeln (2i) und (3i), I, pag. 15 gegebene Lösung des entsprechenden Problems für das *Innengebiet* $\mathfrak{J}$ einer einzigen Curve oder Fläche anknüpfen, und demgemäss für alle Punkte s der Begrenzung eine der Function η [vgl. daselbst (2i)] entsprechende Function bilden. —

Speciell für Punkte von σ_1 definiren wir sie völlig analog wie dort, durch die folgende Reihe:

$$\eta_1 = (f_1 - f_1') + (f_1'' - f_1''') + (f_1^{IV} - f_1^{V}) + \cdots, \tag{5}$$

deren Convergenz sich leicht beweisen lässt. — Aus der Formel (11) pag. 72 folgt nämlich, wenn wir sie nacheinander auf die beiden Fälle $n = 2\nu$, bezw. $n = 2\nu + 1$ zur Anwendung bringen:

$$\operatorname{abs}\left(f_{s_1}^{(2\nu)} - C_1\right) \leqq \Delta B \cdot c^{2\nu} \quad \text{und} \quad \operatorname{abs}\left(C_1 - f_{s_1}^{(2\nu+1)}\right) = \Delta B \cdot c^{2\nu+1},$$

welche Lage der Punkt s_1 auf σ_1 auch haben möge, und durch Addition dieser beiden Ungleichungen folgt in bekannter Weise:

$$\operatorname{abs}\left(f_{s_1}^{(2\nu)} - f_{s_1}^{(2\nu+1)}\right) \leqq \Delta B (1 + c) c^{2\nu},$$

*) Es ist nämlich s_λ in Bezug auf alle anderen Curven bezw. Flächen σ_μ ausser speciell σ_λ ein *äusserer* Punkt, und es verschwinden daher die Terme $C_\mu \cdot \frac{1}{h\pi} \int (d\sigma_\mu)_{s_\lambda}$ sämmtlich, ausser die für $\mu = \lambda$, welche den Werth C_λ annehmen [vgl. I, (10') pag. 9].

woraus eben sofort ersichtlich ist, dass die Reihe (5) in allen Punkten von σ_1 schneller, wie eine geometrische Reihe mit dem Quotienten c^2 convergirt, und zwar *absolut und gleichmässig in allen diesen Punkten convergirt.*

Wollten wir nun *auf den inneren Curven bezw. Flächen* die Function η völlig analog wie oben definiren, also in (5) nur den Index 1 mit einem der anderen Indices $\lambda = 2, 3, \cdots m$ vertauschen, so würden wir im Allgemeinen sicherlich keine convergente Reihe erhalten, denn das allgemeine Glied $f_\lambda^{(2\nu)} - f_\lambda^{(2\nu+1)}$ dieser Reihe würde ja mit wachsender Stellenzahl ν gar nicht gegen 0, sondern gegen den im Allgemeinen wenigstens von 0 verschiedenen Werth $C_\lambda - C_\lambda' = 2\delta_\lambda$ convergiren [vgl. (19) pag. 76]. — Deshalb wollen wir bei den inneren Curven oder Flächen σ_λ $(\lambda = 2, 3, \cdots m)$ die Functionen η_λ durch folgende Reihen definiren:

$$(5') \quad \eta_\lambda = (f_\lambda - f_\lambda' - 2\delta_\lambda) + (f_\lambda'' - f_\lambda''' - 2\delta_\lambda) + (f_\lambda^{IV} - f_\lambda^{V} - 2\delta_\lambda) + \cdots.$$

Dann folgt für das allgemeine Glied dieser Reihe in einem Punkte s_λ von σ_λ:

$$f_{s_\lambda}^{(2\nu)} - f_{s_\lambda}^{(2\nu+1)} - 2\delta_\lambda = f_{s_\lambda}^{(2\nu)} - f_{s_\lambda}^{(2\nu+1)} - (C_\lambda - C_\lambda') = (f_{s_\lambda}^{(2\nu)} - C_\lambda) - (f_{s_\lambda}^{(2\nu+1)} - C_\lambda'),$$

und daher mit Rücksicht auf die Formeln (16), pag. 74:

$$\operatorname{abs}(f_{s_\lambda}^{(2\nu)} - f_{s_\lambda}^{(2\nu+1)} - 2\delta_\lambda) \leqq \operatorname{abs}(f_{s_\lambda}^{(2\nu)} - C_\lambda) + \operatorname{abs}(f_{s_\lambda}^{(2\nu+1)} - C_\lambda') \leqq \Delta B' c^{2\nu} + \Delta B' c^{2\nu+1}$$

d. i.

$$\operatorname{abs}(f_{s_\lambda}^{(2\nu)} - f_{s_\lambda}^{(2\nu+1)} - 2\delta_\lambda) \leqq \Delta B'(1 + c)c^{2\nu},$$

woraus ersichtlich, dass jetzt auch die Reihe (5') für η_λ $(\lambda = 2, 3, \cdots m)$ convergirt, und zwar ebenfalls *absolut und gleichmässig in allen Punkten von σ_λ convergirt.*

Aus der Gleichmässigkeit der Convergenz der Reihen (5) und (5') folgt nun, dass die durch sie dargestellten Functionen $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_m$, für welche wir wieder die Collectivbezeichnung η gebrauchen, auch *stetig* sind, und dass demgemäss das mit Bezug auf einen Punkt i des von uns betrachteten Gebietes $\mathfrak{J}$ gebildete, *über die ganze Begrenzung hinerstreckte Integral*

$$(6) \qquad \mathsf{H}_i = \frac{1}{h\pi} \int \eta_\sigma (d\sigma)_i$$

eine Fundamentalfunction jenes Gebietes $\mathfrak{J}$ darstellt*).

Wir wollen nun wieder die *Randwerthe* dieser Fundamentalfunction näher untersuchen, z. B. den Werth, dem sich H_i nähert, wenn wir den Punkt i näher und näher an einen Punkt s_1 von σ_1, bezw. s_λ von

*) Vgl. *C. Neumann*, Abhandl. I, pag. 47 u. 85.

σ_λ $(\lambda = 2, 3, \cdots m)$ heranrücken lassen. — Hierbei brauchen wir freilich diese beiden Fälle nicht gesondert zu behandeln, denn führen wir noch eine Grösse δ_1 ein, mit der Festsetzung, dass wir darunter stets die 0 verstehn, so enthält (5′) die Formel (5) als den Specialfall $\lambda = 1$ in sich, und es gelten daher die folgenden Ausführungen in gleicher Weise für $\lambda = 1, 2, 3, \cdots m$.

Da nun H_i seiner Definition (6) zufolge das Potential einer Doppelbelegung ist, so folgt nach Formel (7 i), I, pag. 8 für den Grenzwerth, dem H_i bei Annäherung des Punktes i an s_λ zustrebt:

$$\mathsf{H}_{is_\lambda} = \eta'_{s_\lambda} + \eta_{s_\lambda}, \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots m) \tag{7}$$

wenn η' die folgende aus η hergeleitete Function bedeutet:

$$\eta'_{s_\lambda} = \frac{1}{h\pi}\int \eta_\sigma (d\sigma)_{s_\lambda} = \frac{1}{h\pi}\int\limits_{\sigma_1} \eta_1 (d\sigma_1)_{s_\lambda} + \frac{1}{h\pi}\int\limits_{\sigma_2} \eta_2 (d\sigma_2)_{s_\lambda} + \cdots + \frac{1}{h\pi}\int\limits_{\sigma_m} \eta_m (d\sigma_m)_{s_\lambda}.$$

Führen wir aber diese Integrationen aus unter Berücksichtigung der Werthe (5) und (5′) der η's, so fallen die Terme von der Form: $-\,2\,\delta_\mu \cdot \frac{1}{h\pi}\int\limits_{\sigma_\mu} (d\sigma_\mu)_{s_\lambda}$ $(\mu = 2, 3, \cdots m)$ sämmtlich fort mit alleiniger Ausnahme derjenigen, für welche $\mu = \lambda$ ist, welche wegen der Relation (Q) pag. 52 den Werth $+\,2\,\delta_\mu$ annehmen, sodass sich folgendes Resultat ergiebt:

$$\eta'_{s_\lambda} = (f'_{s_\lambda} - f''_{s_\lambda} + 2\delta_\lambda) + (f'''_{s_\lambda} - f^{IV}_{s_\lambda} + 2\delta_\lambda) + (f^{V}_{s_\lambda} - f^{VI}_{s_\lambda} + 2\delta_\lambda) + \cdots.$$

Daraus folgt aber weiter, wenn wir die in (7) verlangte Addition der Werthe η'_{s_λ} und η_{s_λ} [vgl. (5′)] Glied für Glied ausführen:

$$\mathsf{H}_{is_\lambda} = (f_{s_\lambda} - f''_{s_\lambda}) + (f''_{s_\lambda} - f^{IV}_{s_\lambda}) + (f^{IV}_{s_\lambda} - f^{VI}_{s_\lambda}) + \cdots.$$

Die ersten ν Glieder dieser Reihe besitzen nun aber die Summe $f_{s_\lambda} - f^{(2\nu)}_{s_\lambda}$, und es ist daher der Werth der ganzen Reihe $(\nu = \infty)$ unter Rücksicht auf (19), pag. 76:

$$\mathsf{H}_{is_\lambda} = f_{s_\lambda} - C_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, 3, \cdots m) \tag{8}$$

d. h. *es unterscheidet sich* H_i *auf* σ_1 *von den daselbst vorgeschriebenen Werthen* f *überall um den constanten Werth* C_1, *auf* σ_2 *überall um denselben Werth* C_2, *u. s. w. f.* —

Wir sind sonach hier im zweiten Falle zu einem ganz analogen Resultate gelangt, wie oben im ersten Falle.

Zusammenfassung. — *Es sei ein mehrfach zusammenhängendes Gebiet* $\mathfrak{A}$ *bezw.* $\mathfrak{J}$ *gegeben, begrenzt von m geschlossenen Curven oder Flächen* $\sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_m$, *und auf diesen seien irgend welche stetige sonst aber völlig willkürliche Werthe* $f_1, f_2, \cdots f_m$ *vorgeschrieben.*

Man bilde alsdann, ausgehend von diesen Werthen, die aufeinanderfolgenden Functionen $f_1', f_2', \cdots f_m'$; $f_1'', f_2'', \cdots f_m''$, *etc., und weiter aus diesen Functionen und ihren Convergenzconstanten* $C_1, C_2, \cdots C_m$, *bezw. den mit diesen Constanten enge zusammenhängenden Grössen* $\delta_2, \delta_3, \cdots \delta_m$ *[vgl. oben pag. 76] die folgenden unendlichen Reihen:*

im ersten Falle, wenn sämmtliche m Curven oder Flächen neben einander liegen [vgl. Figur 2, pag. 69] die Reihen:

$$\xi_\lambda = (C_\lambda - f_\lambda) + (C_\lambda - f_\lambda') + (C_\lambda - f_\lambda'') + \cdots \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots m), \tag{9a}$$

im zweiten Falle, wenn von den m Curven oder Flächen, eine, σ_1, *die übrigen* $m-1$ *umschliesst [vgl. Figur 3, pag. 72], die folgenden Reihen:*

$$\begin{aligned} \eta_1 &= (f_1 - f_1') + (f_1'' - f_1''') + (f_1^{IV} - f_1^{V}) + \cdots \qquad (\lambda = 1), \\ \eta_\lambda &= (f_\lambda - f_\lambda' - 2\delta_\lambda) + (f_\lambda'' - f_\lambda''' - 2\delta_\lambda) + \cdots \qquad (\lambda = 2, 3, \cdots m). \end{aligned} \tag{9i}$$

Sodann bilde man weiter auf Grund der solchermassen definirten Functionen ξ *bezw.* η *das folgende über die ganze Begrenzung hinerstreckte Integral:*

$$\Xi_a = \frac{1}{h\pi} \int \xi_\sigma (d\sigma)_a = -[W_a + W_a' + W_a'' + W_a''' + \cdots], \tag{10a}$$

bezw.

$$\mathsf{H}_i = \frac{1}{h\pi} \int \eta_\sigma (d\sigma)_i = (W_i - W_i') + (W_i'' - W_i''') + \cdots. \tag{10i}$$

Alsdann stellt, sofern die Configurationsconstante c des vorgelegten Gebietes kleiner als 1 *ist, diese Function* Ξ *bezw.* H *eine solche Fundamentalfunction des betrachteten Aussengebietes* $\mathfrak{A}$ *bezw. Innengebietes* $\mathfrak{J}$ *dar, welche sich von den ursprünglich vorgeschriebenen Werthen* $f_1, f_2, \cdots f_m$ *auf* σ_1 *überall um den constanten Werth* C_1, *auf* σ_2 *überall um den Werth* C_2, *u. s. w. f., schliesslich auf* σ_m *um den Werth* C_m *unterscheidet. — Dabei bedeuten* $C_1, C_2, \cdots C_m$ *im ersten Falle die Convergenzconstanten der sämmtlichen aufeinanderfolgenden Functionen auf den betreffenden Curven bezw. Flächen, im zweiten Falle hingegen speciell die Convergenzconstanten der Functionen mit geradem Index [vgl. den Satz pag. 75].*

Das Convergenzcriterium, d. h. die Bedingung, unter welcher wir die Convergenz des soeben angegebenen Verfahrens verbürgen können, ist also dieses: dass *die in § 3 definirte Configurationsconstante des mehrfach zusammenhängenden Gebietes [vgl. pag. 61] einen Werth kleiner als* 1 *hat.*

Es entspricht dieses Convergenzcriterium also vollständig dem *Hilbert'*-schen Criterium im Falle einfach zusammenhängender Bereiche [vgl. I, pag. 23].

§ 7.
Fortsetzung.

Wir gehn zunächst einmal an die Behandlung eines wichtigen Specialfalles:

Specialfall. — Wir wollen die Annahme machen, es seien die auf den m Curven oder Flächen vorgeschriebenen Werthe $f_1, f_2, \cdots f_m$ so gewählt, dass die ihnen zugehörigen Convergenzconstanten $C_1, C_2, \cdots C_m$ [vgl. pag. 75] einander gleich, etwa gleich C sind,

$$(1) \qquad C_1 = C_2 = C_3 = \cdots = C_m, \quad = C.$$

In dieser Annahme liegt dann schon, dass im zweiten Falle, d. h. im Falle einer äusseren und $m-1$ innerer Curven oder Flächen, auf den letzteren die Convergenzconstanten $C_2', C_3', \cdots C_m'$ der Functionen mit ungeradem Index ebenfalls sämmtlich den Werth C haben. Denn aus der Annahme (1) und den ersten Gleichungen (19') pag. 76 folgt mit Nothwendigkeit, dass jetzt die sämmtlichen Grössen δ verschwinden:

$$(2) \qquad \delta_2 = 0, \quad \delta_3 = 0, \quad \cdots \quad \delta_m = 0,$$

und dann weiter aus den letzten Formeln (19') pag. 76, dass auch:

$$C_2' = C_3' = \cdots = C_m', \quad = C_1 = C,$$

wie wir beweisen wollten. — Wir werden uns daher über den vorliegenden Specialfall kürzer auch so auslassen können: *es seien die Functionen $f_1, f_2, \cdots f_m$ so gewählt, dass die sämmtlichen ihnen zugehörigen Convergenzconstanten einander gleich sind.*

In diesem durch die Gleichungen (1) also bereits völlig charakterisirten Specialfalle werden sich nun dem Schlussresultate des vorigen Paragraphen zufolge die Fundamentalfunctionen Ξ_a von $\mathfrak{A}$, bezw. H_i von $\mathfrak{J}$ auf sämmtlichen begrenzenden Curven oder Flächen von den daselbst vorgeschriebenen Werthen f um denselben Betrag C unterscheiden, oder aber es werden

$$\Phi_a = C + \Xi_a \qquad \text{und} \qquad \Psi_i = C + \mathsf{H}_i$$

Fundamentalfunctionen jener Gebiete sein, welche *auf der ganzen Begrenzung direct die daselbst vorgeschriebenen Werthe f annehmen.* — Diese Lösungen Φ_a und Ψ_i der Randwerthaufgabe stimmen aber in der Form vollständig überein mit denen bei einfach zusammenhängenden Bereichen; denn die zu ihrer Definition verwandten Functionen ξ und η [vgl. (9a) bezw. (9i), pag. 81] lassen sich jetzt mit Rücksicht auf (1) und (2) *in* *ganz beliebigen Punkten s der Begrenzung* genau wie früher durch folgende Reihen darstellen:

$$\xi_s = (C - f_s) + (C - f_s') + (C - f_s'') + \cdots,$$
$$\eta_s = (f_s - f_s') + (f_s'' - f_s''') + (f_s^{IV} - f_s^{V}) + \cdots$$

[vgl. I, (2a) und (2i) pag. 15], und ferner sind

$$\Phi_a = C + \frac{1}{h\pi}\int \xi_\sigma (d\sigma)_a = C - [W_a + W_a' + W_a'' + W_a''' + \cdots],$$
$$\Psi_i = C + \frac{1}{h\pi}\int \eta_\sigma (d\sigma)_i = C + [(W_i - W_i') + (W_i'' - W_i''') + \cdots],$$

genau die *Neumann'schen Reihen* (3a) und (3i), I, pag. 15.

Besitzen also die Functionen f, f', f'', etc. zufällig überall (d. h. auf $\sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_m$) ein und dieselbe Convergenzconstante, so liefert uns, sofern nur die Configurationsconstante des vorgelegten mehrfach zusammenhängenden Bereiches [vgl. § 3] kleiner als 1 ist, die Methode des arithmetischen Mittels genau wie bei einfach zusammenhängenden Bereichen die gesuchte Fundamentalfunction mit den Randwerthen f [vgl. I, pag. 14—15].

Im Allgemeinen, d. h. wenn die Functionen $f_1, f_2, \cdots f_m$ völlig willkürlich auf $\sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_m$ vorgeschrieben sind, besitzen die zugehörigen Convergenzconstanten, wie wir wissen, auf den einzelnen Curven oder Flächen verschiedene Werthe, und es liefert uns daher die Methode des arithmetischen Mittels *direct angewandt auf solche willkürliche Werthe* nur Fundamentalfunctionen, welche sich auf der Begrenzung um gewisse Constante von den daselbst vorgeschriebenen Werthen unterscheiden, nicht aber solche Functionen, welche daselbst wirklich in diese Werthe übergehn [vgl. pag. 81].

Es liegt nun aber die Frage sehr nahe, *ob wir nicht — bevor wir daran gehn, aufeinanderfolgende Functionen zu bilden — aus den willkürlich vorgeschriebenen Werthen $f_1, f_2, \cdots f_m$ durch Vermehrung um passend gewählte Constanten $k_1, k_2, \cdots k_m$ neue Werthe*

(3) $$\bar{f}_1 = f_1 + k_1, \quad \bar{f}_2 = f_2 + k_2, \quad \cdots \quad \bar{f}_m = f_m + k_m$$

herleiten können, derart, dass uns die Methode des arithmetischen Mittels angewandt auf diese Werthe direct die ihnen entsprechenden Fundamentalfunctionen liefert. — Es wird dies nach dem, was wir oben im Specialfalle feststellten, sicher der Fall sein, wenn wir es durch passende Wahl der Constanten $k_1, k_2, \cdots k_m$ in (3) erreichen können, dass die aus den neuen Werthen $\bar{f}$ hergeleiteten aufeinanderfolgenden Functionen — wir wollen sie mit $\bar{f}', \bar{f}'', \bar{f}'''$, etc. bezeichnen — auf sämmtlichen Curven bezw. Flächen gleiche Convergenzconstanten besitzen.

Dies wollen wir daher näher untersuchen. Deshalb bilden wir zunächst bei willkürlichen Werthen von $k_1, k_2, \cdots k_m$ die erste dieser aufeinanderfolgenden Functionen, $\bar{f}'$, mit Bezug auf einen beliebigen Punkt der Begrenzung, z. B. den Punkt s_λ von σ_λ, d. h. wir bilden den Ausdruck:

$$\bar{f}'_{s_\lambda} = \frac{1}{h\pi}\int\limits_{\sigma_1}\bar{f}_1 (d\sigma_1)_{s_\lambda} + \frac{1}{h\pi}\int\limits_{\sigma_2}\bar{f}_2 (d\sigma_2)_{s_\lambda} + \cdots + \frac{1}{h\pi}\int\limits_{\sigma_m}\bar{f}_m (d\sigma_m)_{s_\lambda}.$$

Unter Rücksicht auf die Werthe (3) der $\bar{f}_m$ nimmt dieser dann, wenn wir noch beachten, dass

$$\frac{1}{h\pi}\int\limits_{\sigma_1} f_1 (d\sigma_1)_{s_\lambda} + \frac{1}{h\pi}\int\limits_{\sigma_2} f_2 (d\sigma_2)_{s_\lambda} + \cdots + \frac{1}{h\pi}\int\limits_{\sigma_m} f_m (d\sigma_m)_{s_\lambda}$$

nichts anderes als der Werth der Function f' im Punkte s_λ ist, die folgende Form an:

$$(4)\quad \bar{f}'_{s_\lambda} = f'_{s_\lambda} + \left[k_1\cdot\frac{1}{h\pi}\int\limits_{\sigma_1}(d\sigma_1)_{s_\lambda} + k_2\cdot\frac{1}{h\pi}\int\limits_{\sigma_2}(d\sigma_2)_{s_\lambda} + \cdots + k_m\cdot\frac{1}{h\pi}\int\limits_{\sigma_m}(d\sigma_m)_{s_\lambda}\right].$$

Die hier in eckige Klammer gesetzte Summe entspricht nun aber vollständig unserem früheren Ausdruck S_λ [vgl. (4a) pag. 68], nur dass an Stelle der dortigen constanten Werthe $f_{\varkappa_1}, f_{\varkappa_2}, \cdots f_{\varkappa_m}$ hier die Grössen $k_1, k_2, \cdots k_m$ getreten sind. — Wie wir also im ersten der beiden dort unterschiedenen Fälle: $S_\lambda = f_{\varkappa_\lambda}$ fanden, im zweiten Falle hingegen: $S_1 = f_{\varkappa_1}$, bezw., wenn $\lambda = 2, 3, \cdots m$ war: $S_\lambda = 2f_{\varkappa_1} - f_{\varkappa_\lambda}$, genau so wird hier (wie man wohl auch direct leicht einsieht) für den obigen Klammerausdruck im ersten Falle der Werth k_λ folgen, im zweiten Falle hingegen der Werth k_1 bezw. $2k_1 - k_\lambda$ $(\lambda = 2, 3, \cdots m)$, sodass also unsere obige Formel (4) jetzt die folgende einfachere Gestalt annimmt:

	im ersten Falle:	*im zweiten Falle:*	
(5)	$\bar{f}'_{s_\lambda} = f'_{s_\lambda} + k_\lambda$	$\bar{f}'_{s_1} = f'_{s_1} + k_1$	$(\lambda = 1),$
	$(\lambda = 1, 2, \cdots m)$	$\bar{f}'_{s_\lambda} = f'_{s_\lambda} + (2k_1 - k_\lambda)$	$(\lambda = 2, 3, \cdots m)$

Im ersten Falle, *wenn sämmtliche begrenzenden Curven oder Flächen neben einander liegen,* ergiebt sich also, welche der Curven oder Flächen wir auch unter σ_λ verstehn, zwischen den Functionen $\bar{f}_\lambda'$ und f_λ' stets der Zusammenhang, dass $\bar{f}_\lambda' = f_\lambda' + k_\lambda$ ist, oder ausführlicher: Aus der Voraussetzung (3) folgt:

$$(6)\qquad \bar{f}_1' = f_1' + k_1, \quad \bar{f}_2' = f_2' + k_2, \quad \cdots \quad \bar{f}_m' = f_m' + k_m,$$

und daraus dann natürlich analog weiter für die nächstfolgenden Functionen:

$$\overline{f}_1'' = f_1'' + k_1, \quad \overline{f}_2'' = f_2'' + k_2, \quad \cdots \quad \overline{f}_m'' = f_m'' + k_m,$$
$$\overline{f}_1''' = f_1''' + k_1, \quad \overline{f}_2''' = f_2''' + k_2, \quad \cdots \quad \overline{f}_m''' = f_m''' + k_m,$$

u. s. w. f, allgemein:

$$(7) \quad \overline{f}_1^{(n)} = f_1^{(n)} + k_1, \quad \overline{f}_2^{(n)} = f_2^{(n)} + k_2, \quad \cdots \quad \overline{f}_m^{(n)} = f_m^{(n)} + k_m,$$

und daher im Falle eines unendlich grossen n mit Rücksicht auf (18) pag. 76:

$$\overline{f}_1^{(\infty)} = C_1 + k_1, \quad \overline{f}_2^{(\infty)} = C_2 + k_2, \quad \cdots \quad \overline{f}_m^{(\infty)} = C_m + k_m.$$

Aus diesen Relationen ist aber sofort ersichtlich, dass sich thatsächlich in diesem ersten Falle die Constanten $k_1, k_2, \cdots k_m$ in (3) stets so bestimmen lassen, dass die aus jenen Werthen $\overline{f}$ hergeleiteten Functionen $\overline{f}', \overline{f}'', \overline{f}'''$, etc. sich auf sämmtlichen Curven oder Flächen demselben Werthe nähern, *überall dieselbe Convergenzconstante besitzen.*

Im zweiten Falle, *wenn von den m begrenzenden Curven oder Flächen eine, σ_1, die $m-1$ übrigen umschliesst,* müssen wir nach den Formeln (5) auch bei Untersuchung des Zusammenhanges zwischen den Functionen $\overline{f}'$ und f' einen Unterschied machen zwischen den Verhältnissen, wie sie auf σ_1, der äusseren, und auf $\sigma_2, \sigma_3, \cdots \sigma_m$, den inneren Curven oder Flächen vorliegen; es folgt nämlich:

$$(8) \quad \overline{f}_1' = f_1' + k_1; \quad \overline{f}_2' = f_2' + (2k_1 - k_2), \quad \cdots \quad \overline{f}_m' = f_m' + (2k_1 - k_m),$$

ein Resultat, das wir auch so darstellen können:

$$(8') \quad \overline{f}_1' = f_1' + k_1', \quad \overline{f}_2' = f_2' + k_2', \quad \cdots\cdots\cdots \quad \overline{f}_m' = f_m' + k_m',$$

wo:

$$k_1' = k_1; \qquad k_2' = 2k_1 - k_2, \quad \cdots\cdots\cdots \quad k_m' = 2k_1 - k_m.$$

Hieraus wird sich aber analog wie aus (3) das Resultat (8) folgte, für die nächstfolgenden Functionen $\overline{f}''$ folgendes Resultat ergeben:

$$\overline{f}_1'' = f_1'' + k_1'; \quad \overline{f}_2'' = f_2'' + (2k_1' - k_2'), \quad \cdots \quad \overline{f}_m'' = f_m'' + (2k_1' - k_m'),$$

d. i. unter Rücksicht auf die Werthe der Grössen k':

$$\overline{f}_1'' = f_1'' + k_1, \quad \overline{f}_2'' = f_2'' + k_2, \quad \cdots\cdots\cdots \quad \overline{f}_m'' = f_m'' + k_m.$$

In genau demselben Abhängigkeitsverhältniss, in welchem $\overline{f}''$ zu $\overline{f}$ steht, steht nun weiter zu $\overline{f}''$ wieder die Function $\overline{f}^{IV}$; wie wir also von der Voraussetzung (3) ausgehend zu unserem letzten Resultate gelangten, so folgt aus diesem weiter ganz analog:

$$\overline{f}_1^{IV} = f_1^{IV} + k_1, \quad \overline{f}_2^{IV} = f_2^{IV} + k_2, \cdots \quad \overline{f}_m^{IV} = f_m^{IV} + k_m,$$

und hieraus dann wieder weiter:

$$\overline{f}_1^{VI} = f_1^{VI} + k_1, \quad \overline{f}_2^{VI} = f_2^{VI} + k_2, \cdots \quad \overline{f}_m^{VI} = f_m^{VI} + k_m,$$

u. s. w. f., allgemein:

$$(9a) \quad \overline{f}_1^{(2\nu)} = f_1^{(2\nu)} + k_1, \quad \overline{f}_2^{(2\nu)} = f_2^{(2\nu)} + k_2, \cdots \quad \overline{f}_m^{(2\nu)} = f_m^{(2\nu)} + k_m.$$

Aus diesem für die Functionen mit *geradem* Index gefundenen Resultate sind nun die entsprechenden Relationen für die mit *ungeradem* Index auch leicht abgeleitet: — Wie nämlich aus der Voraussetzung (3) über die Werthe $\overline{f}_\lambda$ für die nächstfolgenden Functionen $\overline{f}_\lambda'$ das Resultat (8) folgte, genau so ergiebt sich aus den Werthen (9a) der $\overline{f}_\lambda^{(2\nu)}$ für die darauf folgenden Functionen d. i. für die Werthe $\overline{f}_\lambda^{(2\nu+1)}$ dieses Resultat:

$$(9b) \quad \overline{f}_1^{(2\nu+1)} = f_1^{(2\nu+1)} + k_1; \quad \overline{f}_2^{(2\nu+1)} = f_2^{(2\nu+1)} + (2k_1 - k_2), \cdots \overline{f}_m^{(2\nu+1)} = f_m^{(2\nu+1)} + (2k_1 - k_m),$$

womit die gesuchten Relationen gefunden sind.

Diese Formeln (9a) und (9b) geben nun auch in diesem zweiten Falle vollständig Aufschluss darüber, welchen Einfluss es auf das Verhalten der aufeinanderfolgenden Functionen hat, wenn man die ursprünglich vorgeschriebenen Werthe auf den einzelnen Curven oder Flächen zuvor um Constante vermehrt, wie wir oben in (3) thaten. — Wieder tritt hierbei also ein wesentlicher Unterschied im Verhalten der Functionen mit geradem und derer mit ungeradem Index zu Tage. —

Hier wenden wir nun speciell die Formeln (9a) auf den Fall eines unendlich grossen ν an; dann folgt unter Rücksicht auf (19) pag. 76:

$$\lim_{\nu=\infty} \overline{f}_1^{(2\nu)} = C_1 + k_1, \quad \lim_{\nu=\infty} \overline{f}_2^{(2\nu)} = C_2 + k_2, \cdots \quad \lim_{\nu=\infty} \overline{f}_m^{(2\nu)} = C_m + k_m,$$

woraus ersichtlich ist, dass wir es wieder durch passende Wahl der Grössen $k_1, k_2, \cdots k_m$ in (3) stets werden erreichen können, dass die Constanten, gegen welche die Functionen mit *geradem* Index $\overline{f}, \overline{f}'', \overline{f}^{IV}$, etc. convergiren, *auf sämmtlichen Curven bezw. Flächen denselben Werth haben*. — Dass dann aber ganz von selber auch die Functionen mit *ungeradem* Index $\overline{f}', \overline{f}''', \overline{f}^{V}$, etc. sich überall diesem gleichen Werthe nähern, das geht aus früheren Betrachtungen (zu Eingang des Paragraphen) hervor.

Im ersten, wie im zweiten Falle, *stets*, können wir somit die ursprünglich willkürlich vorgeschriebenen Werthe um passend gewählte Constante derart vermehren, dass die auf Grund der so modificirten Werthe gebildeten aufeinanderfolgenden Functionen überall auf der ganzen Begrenzung sich gleichmässig ein und demselben Werthe nähern. — Dann sind ja aber die Bedingungen unseres obigen „Specialfalles“ erfüllt, und es liefert uns also dem dort abgeleiteten Satze zufolge die Methode des arithmetischen

Mittels aus jenen modificirten Werthen ohne Weiteres die Fundamentalfunction, welche diese Werthe zu Randwerthen besitzt. — Vorausgesetzt ist dabei immer nur, dass die Configurationsconstante des betrachteten Gebietes kleiner als 1 sei.

Resultat. — *Ist ein mehrfach zusammenhängendes Gebiet gegeben, begrenzt von m geschlossenen Curven oder Flächen, und sind auf diesen stetige, sonst aber willkürliche Werthe* $f_1, f_2, \cdots f_m$ *vorgeschrieben, so können wir, sofern nur die Configurationsconstante c des Gebietes [vgl. § 3] kleiner als* 1 *ist, diese Werthe stets durch Hinzufügen passend gewählter additiver Constanten* $k_1, k_2, \cdots k_m$ *so modificiren, dass die Methode des arithmetischen Mittels, angewandt auf diese neuen Werthe* $f_1 + k_1, f_2 + k_2, \cdots f_m + k_m$, *uns ohne Weiteres eine Fundamentalfunction des betrachteten Gebietes liefert, welche diese letzteren Werthe zu Randwerthen besitzt [vgl. I, pag. 14—15].*

§ 8.

Die Lösung der eigentlichen Randwerthaufgabe.

Aus den Betrachtungen der letzten Paragraphen geht hervor, dass uns also bei mehrfach zusammenhängenden Bereichen die Methode des arithmetischen Mittels in ihrer ursprünglichen Gestalt nicht ohne Weiteres Fundamentalfunctionen aus ihren willkürlich gegebenen Randwerthen herzustellen gestattet; im Allgemeinen wird man vielmehr, um die Methode überhaupt in ihrem vollen Umfange anwenden zu können, die willkürlich vorgeschriebenen Werthe zuvor auf den einzelnen begrenzenden Cürven bezw. Flächen um passend gewählte Constante vermehren müssen.

Wir wollen nun zusehn, ob wir die Methode des arithmetischen Mittels nicht von diesem Uebelstande befreien können, ob wir nicht bei geeigneter Modification der Methode auch Fundamentalfunctionen mehrfach zusammenhängender Bereiche herzustellen vermögen, welche auf der Begrenzung *geradezu die daselbst vorgeschriebenen — nicht zuvor um Constante vermehrten — Werthe annehmen.*

In dem gegenwärtigen Paragraphen will ich nun ein Verfahren angeben, welches dies thatsächlich leistet. Dabei halten wir fest an unserer **Grundvoraussetzung**, *dass die Configurationsconstante des Gebietes kleiner als* 1 *sei* [vgl. pag. 67], und unterscheiden dann wiederum, wie früher zwischen zwei Fällen:

Erster Fall. — *Die Curven bezw. Flächen* $\sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_m$ *liegen sämmtlich neben einander* [vgl. Figur 2, pag. 69]. — Gesucht wird dann also eine Fundamentalfunction des Aussengebietes $\mathfrak{A}$, welche auf diesen es begrenzenden Curven oder Flächen $\sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_m$ willkürlich daselbst vorgeschriebene Werthe $f_1, f_2, \cdots f_m$ annimmt.

Wir markiren dann beliebig innerhalb $\sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_m$ je einen festen Punkt, und denken uns in diesen m Punkten gewisse vorläufig willkürliche Massen $M_1, M_2, \cdots M_m$ concentrirt. — Das Potential dieser Massenpunkte in einem beliebigen Punkte p ist dann:

$$V_p = M_1 T_{1p} + M_2 T_{2p} + \cdots + M_m T_{mp}, \tag{1}$$

wenn bei Betrachtungen *in der Ebene*: $T_{\lambda p} = \log \frac{1}{E_{\lambda p}}$,

dagegen bei Betrachtungen *im Raume*: $T_{\lambda p} = \frac{1}{E_{\lambda p}}$,

wo also $E_{\lambda p}$ die Entfernung des Punktes p von M_λ bedeutet [vgl. I, pag. 7].

Dann wollen wir einmal die willkürlich vorgeschriebenen Werthe $f_1, f_2, \cdots f_m$ immer vermehren um die betreffenden Werthe des Potentials V, und wollen dann weiter von den so auf $\sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_m$ neu entstehenden Functionen

$$\varphi_1 = f_1 + V_1, \quad \varphi_2 = f_2 + V_2, \quad \cdots \quad \varphi_m = f_m + V_m \tag{2}$$

ausgehend, jetzt nach den allgemeinen Vorschriften der Methode des arithmetischen Mittels auf sämmtlichen Curven oder Flächen der Begrenzung aufeinanderfolgende Functionen $\varphi', \varphi'', \varphi'''$, etc. bilden. — Wie werden diese Functionen alsdann von den Grössen M abhängen? — Nun, die Function φ zunächst ist den Gleichungen (1) und (2) zufolge in jedem beliebigen Punkte s der Begrenzung so darstellbar:

$$\varphi_s = f_s + [M_1 T_{1s} + M_2 T_{2s} + \cdots + M_m T_{ms}],$$

ist also *linear in den Grössen M*. — Sodann hat φ' in dem wieder beliebig auf der Begrenzung angenommenen Punkte s den Werth:

$$\varphi_s' = \frac{1}{h\pi}\int \varphi_\sigma (d\sigma)_s = f_s' + \left[M_1 \cdot \frac{1}{h\pi}\int T_{1\sigma}(d\sigma)_s + \cdots + M_m \cdot \frac{1}{h\pi}\int T_{m\sigma}(d\sigma)_s\right]$$

— sämmtliche Integrationen über die ganze Begrenzung hinerstreckt gedacht — ist, also ebenfalls *linear* in den M's, und Analoges gilt, wie man wohl bereits übersieht, auch von den weiteren Functionen φ'', φ''', etc., *in jedem Punkte s der Begrenzung unterscheiden sich die Werthe entsprechender Functionen $\varphi^{(n)}$ und $f^{(n)}$ nur um eine lineare homogene Function der Grössen M.*

Da nun unserer Voraussetzung gemäss die Configurationsconstante des vorgelegten Gebietes kleiner als 1 ist, so nähern sich nach dem Satze pag. 75 aufeinanderfolgende Functionen auf den einzelnen Curven bezw. Flächen immer mehr Constanten, gleichgültig, von was für Anfangswerthen wir bei ihrer Bildung ausgehn. Es werden somit z. B. auf σ_λ sowohl die aus den Werthen φ hergeleiteten Functionen $\varphi_\lambda', \varphi_\lambda'', \varphi_\lambda'''$, etc., als die aus den Werthen f sich ergebenden Functionen $f_\lambda', f_\lambda'', f_\lambda'''$, etc.

gewissen Constanten zustreben, die wir mit Γ_λ, bezw. mit C_λ bezeichnen wollen. — Was nun aber über den Zusammenhang zwischen entsprechenden Werthen zweier solcher Functionen $\varphi^{(n)}$ und $f^{(n)}$ galt, wird auch noch von diesen ihren Convergenzconstanten Γ_λ und C_λ gelten: auch sie werden sich nur um eine lineare homogene Function der Grössen M von einander unterscheiden. Es folgt somit:

(3) $\Gamma_\lambda = C_\lambda + [A_{\lambda 1} M_1 + A_{\lambda 2} M_2 + \cdots + A_{\lambda m} M_m], \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots m)$

wo die Grössen $A_{\lambda 1}, A_{\lambda 2}, \cdots A_{\lambda m}$ jetzt gänzlich unabhängig von den Grössen M und auch unabhängig von der Wahl der Werthe f, also lediglich von den geometrischen Verhältnissen abhängige Constante sind*).

Diese Convergenzconstanten $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots \Gamma_m$ der Functionen $\varphi, \varphi', \varphi''$, etc. auf den einzelnen Curven bezw. Flächen werden nun im Allgemeinen, wenn wir die Massen $M_1, M_2, \cdots M_m$ ganz *ad libitum* wählen, von einander verschieden sein. Es fragt sich aber, ob wir nicht jetzt nachträglich diese Grössen $M_1, M_2, \cdots M_m$ so bestimmen können, dass jene Constanten $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots \Gamma_m$ sämmtlich einander gleich werden? — Bezeichnen wir den noch unbekannten gemeinsamen Werth dieser Constanten mit $\mathfrak{C}$, so liefert die Forderung, dass

(4) $\Gamma_1 = \mathfrak{C}, \qquad \Gamma_2 = \mathfrak{C}, \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \Gamma_m = \mathfrak{C}$

sein soll, m Gleichungen zur Bestimmung der $m + 1$ Unbekannten $M_1, M_2, \cdots M_m$ und $\mathfrak{C}$, und zwar sind diese Gleichungen, wie ein Blick auf die Ausdrücke (3) der Γ_λ lehrt, *linear* in den Unbekannten. — Natürlich bestimmen diese m Gleichungen die $m + 1$ Unbekannten noch nicht eindeutig, wir dürfen diesen vielmehr noch eine weitere Bedingung auferlegen — und werden wir thatsächlich im weiteren Verlaufe der Untersuchung auf eine solche weitere Bedingungsgleichung geführt werden [vgl. unten (10)].

Einstweilen wollen wir unter $M_1, M_2, \cdots M_m$ und $\mathfrak{C}$ irgend eines der unendlich vielen Werthsysteme verstehn, welche die Gleichungen (4) befriedigen. — Dann also besitzen die aus den Werthen (2) hergeleiteten aufeinanderfolgenden Functionen $\varphi', \varphi'', \varphi'''$, etc. auf sämmtlichen m Curven bezw. Flächen ein und dieselbe Convergenzconstante $\mathfrak{C}$, und es liefert uns demgemäss die Methode des arithmetischen Mittels unserem Satze pag. 83 zufolge eine

---

*) Vorläufig ist noch nicht ersichtlich, weshalb die Coefficienten $A_{\lambda 1}, A_{\lambda 2}, \cdots A_{\lambda m}$ nicht noch von der *Lage* der Massenpunkte $M_1, M_2, \cdots M_m$ abhängen sollten. — Thatsächlich sind sie auch hiervon unabhängig, wie das aus den nachfolgenden Betrachtungen bereits einigermassen deutlich hervorgeht. — Vielleicht komme ich bei anderer Gelegenheit auf diesen Punkt noch ausführlicher zurück.

(5) *Fundamentalfunction* X_a *des Gebietes* $\mathfrak{A}$,

welche jene Werthe $\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_m$ zu Randwerthen besitzt, sodass also:

(6) $$X_{as_1} = \varphi_{s_1}, \quad X_{as_2} = \varphi_{s_2}, \quad \cdots \quad X_{as_m} = \varphi_{s_m}.$$

Dann wollen wir einmal die aus dieser Function X und dem Potential V zusammengesetzte Function

(7) $$\Phi_a = X_a - V_a$$

näher untersuchen. — Lassen wir dieserhalb den Punkt a sich einem Punkte s der Begrenzung nähern, so erhalten wir für Φ den folgenden Grenzwerth:

$$\Phi_{as} = X_{as} - V_s, \qquad \text{d. i. nach (6)} \qquad = \varphi_s - V_s$$

oder aber endlich nach (2):

(8) $$\Phi_{as} = f_s,$$

erstens *also besitzt die Function* Φ_a *die ursprünglich vorgeschriebenen Werthe* f *zu Randwerthen.* — Es liegt danach die Vermuthung sehr nahe, dass Φ_a vielleicht die gesuchte Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{A}$ sei, denn da sich Φ_a aus einer Fundamentalfunction von $\mathfrak{A}$ und dem Potential gewisser ausserhalb $\mathfrak{A}$ gelegener Massen zusammensetzt, so ist

zweitens Φ_a *überall innerhalb des Gebietes* $\mathfrak{A}$ *selber nebst seinen Ableitungen stetig, genügt daselbst der Laplace'schen Differentialgleichung* $\Delta\Phi = 0$ *und besitzt auch im Unendlichen überall ein und denselben Werth.* — Doch an eine Fundamentalfunction U eines Aussengebietes $\mathfrak{A}$ wird noch eine weitere Forderung gestellt: verstehn wir nämlich unter ω eine beliebige die ganze Begrenzung umschliessende Curve oder Fläche, und unter N ihre innere Normale, so muss das Integral $\int\limits_\omega \frac{\partial U}{\partial N} d\omega$ verschwinden [vgl. I, pag. 13]. — Hier im vorliegenden Falle bei der Function Φ [vgl. (7)] ist nun dieses Integral:

$$\int\limits_\omega \frac{\partial \Phi}{\partial N} d\omega = \int\limits_\omega \frac{\partial X}{\partial N} d\omega - \int\limits_\omega \frac{\partial V}{\partial N} d\omega,$$

und hier verschwindet zwar das erste Glied rechterhand, da ja eben X_a seiner Definition (5) nach eine Fundamentalfunction von $\mathfrak{A}$ ist — das zweite Integral hingegen hat nach bekannten *Green*'schen Formeln, da V das Potential gewisser innerhalb ω gelegener Massen $M_1, M_2, \cdots M_m$ ist, den Werth $2h\pi\mathsf{M}$, wenn M die Summe aller dieser Massen bedeutet. Es folgt somit:

(9) $$\int\limits_\omega \frac{\partial \Phi}{\partial N} d\omega = -2h\pi\mathsf{M} = -2h\pi(M_1 + M_2 + \cdots + M_m)$$

Wir sehen hieraus also, dass

drittens *Φ_a auch der letzten der an eine Fundamentalfunction eines Aussengebietes gestellten Anforderungen genügt, wenn diese Summe rechterhand gleich* 0 *ist.*

Diese Bedingung können wir aber erfüllen. — Wir stellten ja bereits früher fest, dass wir den Grössen M_1, M_2, $\cdots$ M_m und $\mathfrak{C}$ ausser den ihnen bereits durch die Gleichungen (4) auferlegten Beschränkungen noch eine weitere Bedingung auferlegen dürfen. Von dieser Befugniss wollen wir nun in der Weise Gebrauch machen, dass wir diese Grössen eben noch der Bedingung

$$(10) \qquad M_1 + M_2 + M_3 + \cdots + M_m = 0$$

unterwerfen, sodass wir also unter M_1, M_2, $\cdots$ M_m und $\mathfrak{C}$ jetzt speciell die Auflösungen der $m+1$ linearen Gleichungen (4) und (10) verstehn.

Dann also erfüllt Φ_a zufolge (9) auch die letzte an eine Fundamentalfunction eines Aussengebietes gestellte Bedingung; überdies besitzt Φ_a die ursprünglich vorgeschriebenen Werthe f_1, f_2, $\cdots$ f_m zu Randwerthen [vgl. (8)], — *es ist somit Φ_a die gesuchte Fundamentalfunction des Gebietes $\mathfrak{A}$.*

Resultat. — *Es sei ein mehrfach zusammenhängendes Gebiet $\mathfrak{A}$ gegeben, das sich ringsum bis ins Unendliche erstreckt, und demgemäss begrenzt wird von mehreren geschlossenen Curven oder Flächen σ_1, σ_2, $\cdots$ σ_m, welche sämmtlich neben einander liegen [vgl. Figur 2, pag. 69]. — Will man alsdann eine Fundamentalfunction dieses Gebietes $\mathfrak{A}$ herstellen, welche auf $\sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_m$ willkürlich daselbst vorgeschriebene Werthe $f_1, f_2, \cdots f_m$ annimmt, so kann man, falls nur die Configurationstante des Gebietes $\mathfrak{A}$ kleiner als* 1 *ist, folgendermassen verfahren:*

Man denke sich in je einem Punkte innerhalb $\sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_m$ die einstweilen willkürlich angenommenen Massen M_1, M_2, $\cdots$ M_m concentrirt, bezeichne ihr Potential mit V, und bestimme diese Massen alsdann nachträglich aus den beiden Bedingungen, dass erstlich die auf Grund der Werthe

$$\varphi_1 = f_1 + V_1, \quad \varphi_2 = f_2 + V_2, \quad \cdots \quad \varphi_m = f_m + V_m$$

gebildeten aufeinanderfolgenden Functionen φ', φ'', φ''', etc. auf allen begrenzenden Curven bezw. Flächen gegen ein und dieselbe Constante convergiren [vgl. (4)]; und dass zweitens die Summe $M_1 + M_2 + \cdots + M_m$ aller dieser Massen gleich 0 *sei [vgl. (10)]. — Sodann stelle man nach der Methode des arithmetischen Mittels die Fundamentalfunction X_a des Gebietes $\mathfrak{A}$ her, welche die in dieser Weise näher bestimmten Werthe $\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_m$ zu Randwerthen besitzt [vgl. den Satz pag. 83].*

Alsdann ist $\Phi_a = X_a - V_a$ die gesuchte Fundamentalfunction von $\mathfrak{A}$ mit den Randwerthen $f_1, f_2, \cdots f_m$.

Zweiter Fall. — *Von den m begrenzenden Curven oder Flächen schliesst eine, σ_1, die $m-1$ übrigen, $\sigma_2, \sigma_3, \cdots \sigma_m$ ein.* — Handelt es sich dann wieder darum, eine Fundamentalfunction des von $\sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_m$ begrenzten Gebietes $\mathfrak{J}$ herzustellen, welche auf $\sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_m$ die willkürlich daselbst vorgeschriebenen Werthe $f_1, f_2, \cdots f_m$ annimmt, so markiren wir jetzt beliebig innerhalb der von den inneren Curven bezw. Flächen $\sigma_2, \sigma_3, \cdots \sigma_m$ umschlossenen Gebiete [also ausserhalb $\mathfrak{J}$, vgl. Figur 3, pag. 72] je einen Punkt, und denken uns in diesen $m-1$ Punkten alsdann die vorläufig wieder willkürlich gewählten Massen $M_2, M_3, \cdots M_m$ concentrirt. — Ihr Potential bezeichnen wir wiederum mit V, sodass also jetzt

$$(11) \qquad V_p = M_2 T_{2p} + M_3 T_{3p} + \cdots + M_m T_{mp}$$

ist. — Dann wollen wir zunächst genau wie früher ausgehend von den Werthen

$$(12) \qquad \varphi_1 = f_1 + V_1, \quad \varphi_2 = f_2 + V_2, \quad \cdots \quad \varphi_m = f_m + V_m$$

aufeinanderfolgende Functionen φ', φ'', φ''', etc. bilden. — Nun unterscheidet sich in jedem beliebigen Punkte s der Begrenzung der Werth von φ von dem entsprechenden Werthe von f nur um einen in den Grössen M linearen homogenen Ausdruck (nämlich eben den Werth von V). Das überträgt sich dann aber wieder, ganz analog wie oben, auch auf alle weiteren Functionen $\varphi^{(n)}$ und $f^{(n)}$ und daher schliesslich auch auf die Constanten, denen sich, da ja nach Voraussetzung die Configurationsconstante kleiner als 1 ist, sowohl die Functionen $\varphi, \varphi', \varphi''$, etc. als auch f, f', f'', etc. nähern. Es folgt somit z. B. für die beiden Constanten Γ_1 und C_1, denen sich nach dem Satze auf pag. 75 speciell auf σ_1 die einen bezw. anderen dieser Functionen nähern, die Relation:

$$(13) \qquad \Gamma_1 = C_1 + [A_{12} M_2 + A_{13} M_3 + \cdots + A_{1m} M_m],$$

und analog folgt für die Constanten Γ_λ, Γ_λ' und C_λ, C_λ', denen sich auf einer inneren Curve oder Fläche σ_λ von den einen und den anderen Functionen die mit geradem bezw. ungeradem Index nähern, der folgende Zusammenhang:

$$(13') \qquad \begin{aligned} \Gamma_\lambda &= C_\lambda + [A_{\lambda 2} M_2 + A_{\lambda 3} M_3 + \cdots + A_{\lambda m} M_m], \\ \Gamma_\lambda' &= C_\lambda' + [A_{\lambda 2}' M_2 + A_{\lambda 3}' M_3 + \cdots + A_{\lambda m}' M_m], \end{aligned} \qquad (\lambda = 2, 3, \cdots m)$$

wo die sämmtlichen Grössen A und A' lediglich von den geometrischen Verhältnissen abhängige Constanten sind. —

Wenn wir nun diese im Ganzen $2m-1$ Convergenzconstanten (13) und (13') durch passende Wahl der Grössen M gleich gross machen wollen, so haben wir zu beachten, dass zwischen den beiden auf einer innern Curve oder Fläche σ_λ anzutreffenden Constanten Γ_λ und Γ_λ' und der Constanten Γ_1 stets die Relation besteht

$$\Gamma_\lambda + \Gamma_\lambda' = 2\Gamma_1, \qquad \text{[vgl. (17) pag. 75]}$$

sodass, wenn $\Gamma_\lambda = \Gamma_1$ ist, von selber auch $\Gamma_\lambda' = \Gamma_1$ wird. — Demgemäss brauchen wir die Grössen $M_2, M_3, \cdots M_m$ nur so zu bestimmen, dass die Constanten $\Gamma_1, \Gamma_2, \cdots \Gamma_m$ alle ein und denselben Werth annehmen; dann nehmen $\Gamma_2', \Gamma_3', \cdots \Gamma_m'$ bereits ganz von selbst ebendenselben Werth an [vgl. auch pag. 82]. Bezeichnen wir also den gemeinsamen, noch unbekannten Werth aller dieser Constanten mit $\mathfrak{C}$, so bleiben als von einander unabhängige Bedingungsgleichungen nur diese m übrig:

$$(14) \qquad \Gamma_1 = \mathfrak{C}, \qquad \Gamma_2 = \mathfrak{C}, \quad \cdots \quad \Gamma_m = \mathfrak{C}.$$

Sie genügen aber auch bereits, die Unbekannten, — gleichfalls m an der Zahl, — nämlich $M_2, M_3, \cdots M_m$ und $\mathfrak{C}$, zu bestimmen.

Denken wir uns nun hinfort den Grössen M speciell diese so bestimmten Werthe beigelegt, so besitzen also die aus den Werthen $\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_m$ hergeleiteten aufeinanderfolgenden Functionen $\varphi', \varphi'', \varphi'''$, etc. überall auf der ganzen Begrenzung des Gebietes $\mathfrak{J}$ ein und dieselbe Convergenzconstante $\mathfrak{C}$, und es gestattet uns daher dem Satze pag. 83 zufolge die Methode des arithmetischen Mittels diejenige *Fundamentalfunction* Y_i *dieses Gebietes* $\mathfrak{J}$ herzustellen, *welche jene Werthe* $\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_m$ *zu Randwerthen besitzt, sodass also:*

$$(15) \qquad Y_{i s_1} = \varphi_{s_1}, \qquad Y_{i s_2} = \varphi_{s_2}, \quad \cdots \quad Y_{i s_m} = \varphi_{s_m}.$$

Alsdann erfüllt die Function

$$(16) \qquad \Psi_i = Y_i - V_i$$

als Aggregat einer Fundamentalfunction und des Potentials von gewissen ausserhalb $\mathfrak{J}$ gelegenen Massen alle Bedingungen einer Fundamentalfunction dieses Innengebietes $\mathfrak{J}$ [vgl. I, pag. 13], und besitzt überdies die ursprünglich vorgeschriebenen Werthe f zu Randwerthen, denn es ist mit Rücksicht auf (15) allgemein:

$$\Psi_{is} = Y_{is} - V_s = \varphi_s - V_s, \text{ also nach (12) thatsächlich } = f_s.$$

Es ist somit die Function Ψ_i *die gesuchte Fundamentalfunction des Gebietes* $\mathfrak{J}$.

Resultat. — *Es sei ein mehrfach zusammenhängendes Gebiet* $\mathfrak{J}$ *gegeben, begrenzt von* m *Curven bezw. Flächen, deren eine,* σ_1, *die anderen,* $\sigma_2, \sigma_3, \cdots \sigma_m$, *umschliesst [vgl. Figur 3, pag. 72]. — Will man alsdann diejenige Fundamentalfunction dieses Gebietes* $\mathfrak{J}$ *herstellen, welche auf* $\sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_m$ *willkürlich daselbst vorgeschriebene Werthe* $f_1, f_2, \cdots f_m$ *annimmt, so kann man, falls nur die Configurationsconstante des Gebietes* $\mathfrak{J}$ *kleiner als* 1 *ist, folgendermassen verfahren:*

Man denke sich in gewissen innerhalb σ_2, bezw. $\sigma_3, \cdots$ bezw. σ_m beliebig gelegenen Punkten zunächst willkürlich angenommene Massen $M_2, M_3, \cdots M_m$ concentrirt, bezeichne ihr Potential mit V, und bestimme alsdann nachträglich diese Massen so, dass die auf Grund der Werthe

$$\varphi_1 = f_1 + V_1, \quad \varphi_2 = f_2 + V_2, \quad \cdots \quad \varphi_m = f_m + V_m$$

gebildeten aufeinanderfolgenden Functionen φ', φ'', φ''', etc. auf allen begrenzenden Curven bezw. Flächen gegen ein und dieselbe Constante convergiren [vgl. (14)]. — Sodann bestimme man vermittelst der Methode des arithmetischen Mittels die Fundamentalfunction Y_i des Gebietes $\mathfrak{J}$, welche die solchermassen näher bestimmten Werthe $\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_m$ zu Randwerthen besitzt [vgl. den Satz pag. 83].

Alsdann ist $\Psi_i = Y_i - V_i$ die gesuchte Fundamentalfunction von $\mathfrak{J}$ mit den Randwerthen $f_1, f_2, \cdots f_m$.

§ 9.

Eine Ergänzung zum letzten Beweise.

Bei den obigen Betrachtungen dachten wir uns im ersten und ebenso im zweiten Falle die Grössen M aus gewissen *Systemen linearer Gleichungen* bestimmt. — Wenn wir strenge verfahren wollen, so müssen wir uns noch Rechenschaft darüber ablegen, dass diese Gleichungen eine solche Bestimmung überhaupt zulassen. — Nur

im ersten Falle, *wenn die Curven, bezw. Flächen $\sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_m$ sämmtlich neben einander liegen* [vgl. Figur 2, pag. 69], wollen wir den Nachweis hierfür wirklich durchführen. — Dort sollten die $m+1$ Unbekannten $M_1, M_2, \cdots M_m$ und $\mathfrak{C}$ aus den $m+1$ Gleichungen (4) und (10) bestimmt werden. Soll das aber möglich sein, so muss die Determinante $\mathfrak{D}$ dieser Gleichungen, d. i. mit Rücksicht auf die Werthe (3) der Γ_λ, die Determinante

$$\mathfrak{D} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1m} & 1 \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2m} & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mm} & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix} \tag{1}$$

von 0 *verschieden* sein. Auf diesen Nachweis kommt es jetzt also an.

Um ihn zu führen, fassen wir den speciellen Fall ins Auge, dass die auf der Begrenzung vorgeschriebenen Werthe f *überall gleich* 0 seien, sodass also die Werthe φ_s [vgl. (2) pag. 88] jetzt identisch mit den Oberflächenwerthen des Potentials V werden, also allgemein

$$\varphi_s = V_s = M_1 T_{1s} + M_2 T_{2s} + \cdots + M_m T_{ms} \tag{2}$$

ist, und zwar wollen wir uns hier die Grössen M vorläufig wieder vollständig beliebig denken.

Da nun jetzt mit den Werthen f_s auch die sämmtlichen weiteren Functionen f', f'', f''', etc., und daher auch ihre Convergenzconstanten C_1, C_2, $\cdots C_m$ sämmtlich gleich 0 sind, so werden sich der Formel (3), pag. 89 zufolge die aus den Werthen (2) gebildeten aufeinanderfolgenden Functionen φ', φ'', φ''', etc. z. B. auf σ_λ dem constanten Werthe

$$(3) \qquad K_\lambda = A_{\lambda 1} M_1 + A_{\lambda 2} M_2 + \cdots + A_{\lambda m} M_m \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots m)$$

nähern — und es gestatten uns daher die allgemeinen Vorschriften von § 6 [vgl. speciell pag. 81] aus den Werthen $\varphi_1 = V_1$, $\varphi_2 = V_2$, $\cdots \varphi_m = V_m$ eine Fundamentalfunction Ξ_a des Gebietes $\mathfrak{A}$ herzustellen, welche auf σ_1, σ_2, $\cdots \sigma_m$ hinter diesen Werthen um K_1, bezw. K_2, $\cdots$ bezw. K_m zurückbleibt. — Dann stellt aber

$$(4) \qquad P_a = V_a - \Xi_a$$

eine Potentialfunction des Gebietes $\mathfrak{A}$ dar, welche auf den einzelnen Curven oder Flächen σ_1, σ_2, $\cdots \sigma_m$ diese constanten Werthe K_1, K_2, $\cdots K_m$ annimmt, d. h. *es ist P_a das Potential gewisser electrischer Ladungen $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\cdots \mathfrak{M}_m$, welche sich auf den von σ_1, σ_2, $\cdots \sigma_m$ begrenzt gedachten Conductoren $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$, $\cdots \mathfrak{K}_m$ im Gleichgewicht befinden*).*

Wie gross sind nun diese Ladungen $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\cdots \mathfrak{M}_m$, als deren Potential wir P ansehn dürfen? — Nun, zur Bestimmung z. B. von $\mathfrak{M}_\lambda$ folgt in bekannter Weise:

$$(5) \qquad \mathfrak{M}_\lambda = -\frac{1}{2h\pi} \int\limits_{\sigma_\lambda} \frac{\partial P}{\partial \mathsf{N}_\lambda} \, d\sigma_\lambda ,$$

wenn N_λ die auf σ_λ errichtete äussere Normale bedeutet. — Nun ist aber P ursprünglich definirt als das Potential gewisser Massenpunkte M_1, M_2, $\cdots M_m$ und gewisser auf σ_1, σ_2, $\cdots \sigma_m$ ausgebreiteter Doppelbelegungen [vgl. (4)]. Das Potential der ausserhalb σ_λ gelegenen Massenpunkte und Doppelbelegungen liefert aber nach bekannten *Green*'schen Formeln zu dem Integrale (5) keinen Beitrag, desgl. verschwindet, wie aus (6), I, pag. 8 folgt, der von der Doppelbelegung von σ_λ herrührende Antheil, sodass man sich in diesem Integrale P ersetzt denken kann lediglich durch das Potential des innerhalb σ_λ gelegenen Massenpunktes M_λ, woraus sich dann in bekannter Weise das Resultat:

---

*) Wir übertragen diese Ausdrucksweise der Kürze halber auch auf Betrachtungen *in der Ebene*, wobei wir dann unter „Electricität" ein *fingirtes Fluidum* verstehn, dessen Theilchen sich nicht nach dem *Newton*'schen, sondern nach dem *logarithmischen Potentialgesetz* beeinflussen, und unter einem „Conductor" ein ebenes, dieses Fluidum gut leitendes Flächenstück.

(6) $$\mathfrak{M}_\lambda = -\frac{1}{2h\pi}\int\limits_{\sigma_\lambda}\frac{\partial P}{\partial N_\lambda}\,d\sigma_\lambda = M_\lambda$$

ergiebt [vgl. die Schlussweise bei (9), pag. 90]. — *Es ist somit P speciell das Potential der auf den Conductoren $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \cdots \mathfrak{K}_m$ im Gleichgewicht befindlichen electrischen Ladungen $M_1, M_2, \cdots M_m$, und $K_1, K_2, \cdots K_m$ [vgl. (3)] sind die zugehörigen inneren Potentialwerthe.*

Demnach sind die Relationen (3) nichts anderes als die bekannten Gleichungen, welche die in einem System electrisch geladener Conductoren vorhandenen Potentialwerthe linear ausdrücken durch die Einzelladungen der Conductoren. — Die Coefficienten dieser Gleichungen bilden aber bekanntlich ein System *symmetrischer Grössen**), d. h. es folgt zunächst hinsichtlich der Constanten A das Resultat:

(7) $$A_{\lambda\mu} = A_{\mu\lambda}.$$

Um dann weiterzugehn, bilden wir nunmehr das Integral:

$$\int\limits_{\mathfrak{A}'}\Box P\cdot d\tau = \int\limits_{\mathfrak{A}'}\left[\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2\right]d\tau, \text{ bezw. } = \int\limits_{\mathfrak{A}'}\left[\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)^2\right]d\tau,$$

und zwar hinerstreckt über alle Flächen- bezw. Volum-Elemente $d\tau$ eines *Theilgebietes* $\mathfrak{A}'$ *von* $\mathfrak{A}$, welches nach aussen begrenzt wird von einer beliebigen $\sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_m$ umschliessenden Kreislinie oder Kugelfläche ω vom Radius R. — Da nun P innerhalb dieses Gebietes $\mathfrak{A}'$ den Potentialbedingungen genügt, so lässt sich jenes Integral nach bekanntem *Green*'schen Satz leicht verwandeln in ein über die Begrenzung von $\mathfrak{A}'$ d. h. also über $\sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_m$ und ω hinzuerstreckendes Integral. Es folgt so:

$$\int\limits_{\mathfrak{A}'}\Box P\cdot d\tau = -\int\limits_{\sigma_1}P\frac{\partial P}{\partial N_1}d\sigma_1 - \int\limits_{\sigma_2}P\frac{\partial P}{\partial N_2}d\sigma_2 - \cdots - \int\limits_{\sigma_m}P\frac{\partial P}{\partial N_m}d\sigma_m + \int\limits_{\omega}P\frac{\partial P}{\partial R}d\omega.$$

Lassen wir nun den Radius R von ω immer grösser, schliesslich unendlich gross werden, wobei gleichzeitig $\mathfrak{A}'$ in das ganze Aussengebiet $\mathfrak{A}$ übergeht, so *verschwindet*, wie einfache Ueberlegungen, die ich hier übergehen möchte, lehren, *das letzte Integral* rechts bei Betrachtungen im Raume *stets*, bei Betrachtungen in der Ebene aber nur, wenn, wie wir hinfort annehmen wollen, die Massen $M_1, M_2, \cdots M_m$ der Bedingung

(8) $$M_1 + M_2 + M_3 + \cdots + M_m = 0$$

genügen. — Die übrigen Integrale rechterhand vereinfachen sich sodann erheblich, wenn man beachtet, dass P auf $\sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_m$ die constanten

*) Vgl. z. B. *C. Neumann*, Beiträge zu einzelnen Theilen der mathematischen Physik, Leipzig bei Teubner 1893, daselbst pag. 242.

Werthe $K_1, K_2, \cdots K_m$ besitzt, sodass jetzt unsere obige Formel die folgende einfachere Gestalt annimmt:

$$\int\limits_{\mathfrak{A}} \Box P \cdot d\tau = -K_1 \int\limits_{\sigma_1} \frac{\partial P}{\partial \mathsf{N}_1} d\sigma_1 - K_2 \int\limits_{\sigma_2} \frac{\partial P}{\partial \mathsf{N}_2} d\sigma_2 - \cdots - K_m \int\limits_{\sigma_m} \frac{\partial P}{\partial \mathsf{N}_m} d\sigma_m.$$

Die Gleichung (6) gestattet dann weiter diesem Ausdruck rechts die Form

$$2h\pi(K_1 M_1 + K_2 M_2 + \cdots + K_m M_m)$$

zu geben, oder aber es folgt, wenn wir schliesslich noch die Werthe (3) der K_λ einsetzen und die Relationen (7) berücksichtigen:

$$(9) \quad \mathfrak{F} \equiv A_{11} M_1^2 + 2A_{12} M_1 M_2 + 2A_{13} M_1 M_3 + \cdots + A_{mm} M_m^2 = \frac{1}{2h\pi} \int\limits_{\mathfrak{A}} \Box P \cdot d\tau,$$

ein Resultat, welches also gilt, sobald nur die Grössen M der Relation (8) genügen. — Aus der Darstellungsweise rechterhand geht nun hervor, dass sobald diese Bedingung erfüllt ist, *die quadratische Form* $\mathfrak{F}$ stets nur positive von 0 verschiedene Werthe annehmen kann, — es sei denn, dass im ganzen Aussenraum P constant (wegen des Werthes 0 im Unendlichen also gleich 0) ist, und damit dann nach (6) auch die sämmtlichen Werthe M einzeln gleich 0 sind.

Die Relation (8) kann man nun dazu benutzen, aus $\mathfrak{F}$ eine der m Veränderlichen $M_1, M_2, \cdots M_m$, z. B. M_m zu eliminiren. Die so entstehende *neue quadratische Form* $\mathfrak{F}'$ der $m-1$ Variablen $M_1, M_2, \cdots M_{m-1}$ besitzt dann also für ganz beliebige — nur nicht sämmtlich gleichzeitig verschwindende — Werthe dieser Veränderlichen *nur positive Werthe* d. h. *es ist eine definite positive Form, ihre Discriminante ist daher sicherlich von 0 verschieden.* Eine einfache Rechnung lehrt aber, dass diese Discriminante nichts anderes als unsere obige Determinante $\mathfrak{D}$ ist [vgl. (1)]. — Wir haben somit den gewünschten Beweis erbracht, dass

$$\mathfrak{D} \neq 0$$

ist, womit die erwähnte Lücke in unseren obigen Ausführungen im ersten Falle ausgefüllt ist.

Im zweiten Falle, *wenn also von den m begrenzenden Curven oder Flächen eine, σ_1, die $m-1$ übrigen $\sigma_2, \sigma_3, \cdots \sigma_m$ umschliesst,* führen ähnliche Betrachtungen zum Ziele*). — Wir bedienen uns dabei mit

---

*) Wir müssen dabei freilich noch davon Gebrauch machen, dass die speciell in (13), pag. 92 auftretenden *Constanten* $A_{12}, A_{13}, \cdots A_{1m}$ *sämmtlich gleich gross* sind, eine Thatsache, die sich leicht — allerdings erst aus den Betrachtungen des nächsten Paragraphen — ergiebt, wenn man beachtet, dass diese Grössen die auf σ_1 vorhandenen Convergenzconstanten der aus den Werthen T_{2s}, bezw. $T_{3s}, \cdots$ bezw. T_{ms} hergeleiteten aufeinanderfolgenden Functionen sind. [Vgl. pag. 88 und sodann unten die Darstellung (13), pag. 104 für diese Constanten.]

Vortheil des Bildes, dass σ_1 die innere Begrenzung eines ring- bezw. schalenförmigen Conductors sei, in dessen Innerm sich gewisse kleinere, von $\sigma_2, \sigma_3, \cdots \sigma_m$ begrenzte Conductoren befinden [vgl. Fig. 3, pag. 72].

Bemerkung. — Die Betrachtungen dieses letzten Paragraphen besitzen nicht denselben Grad der Strenge, wie unsere bisherigen Ausführungen, da wir hier mehrfach von den Ableitungen der Function P nach den Normalen von $\sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_m$ gemacht haben, ohne die Existenz dieser Ableitungen zuvor bewiesen zu haben. — Trotz dieses den letzten Betrachtungen noch anhaftenden Mangels scheinen sie mir aber doch im höchsten Grade geeignet, ein vielleicht vorhandenes Misstrauen gegen die Ausführungen des vorigen Paragraphen zu zerstreuen, ganz abgesehen davon, dass sie auch an und für sich wegen mancher sich dabei ergebender Resultate ein gewisses Interesse beanspruchen dürften.

§ 10.

Untersuchungen über die Natur der Convergenzconstanten.

Wir wollen in diesem Paragraphen noch einige Betrachtungen über die Constanten anstellen, denen sich dem allgemeinen Satze pag. 75 zufolge die aufeinanderfolgenden Functionen f, f', f'', etc. auf den einzelnen Curven bezw. Flächen $\sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_m$ nähern. — Allerdings können auch diese Ausführungen *nicht denselben Anspruch auf Strenge* machen, wie unsere früheren Betrachtungen, da wir jetzt wieder die normalen Ableitungen der Fundamentalfunctionen ohne Weiteres als existirend voraussetzen, auch Gebrauch machen von der Dichtigkeit der Gleichgewichtsvertheilung gewisser electrischer Ladungen der von $\sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_m$ begrenzt gedachten Conductoren $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \cdots \mathfrak{K}_m$. — Wir haben zwar im vorigen Paragraphen beiläufig den Existenzbeweis für das Potential P einer solchen Gleichgewichtsvertheilung erbracht [vgl. pag. 95], — wenn wir darum aber auch sogleich von der Dichtigkeit der Vertheilung Gebrauch machen, so heisst das im Grunde genommen eben nichts anderes, als dass wir wieder die normalen Ableitungen dieses Potentials voraussetzen. — —

C. Neumann hat für den Fall *einfach* zusammenhängender Bereiche den folgenden Satz bewiesen [vgl. Unters. pag. 207]:

Denkt man sich auf einer geschlossenen Curve oder Fläche σ, deren Configurationsconstante kleiner als 1 *ist*), irgend welche Werthe f vorgeschrieben und aus ihnen die aufeinanderfolgenden Functionen f', f'', f''', etc. gebildet, so ist die Convergenzconstante C dieser Functionen [vgl. I, pag. 15] folgendermassen darstellbar:*

*) Wir setzen eben diese Bedingung — wie wir das nach den Ausführungen unseres ersten Aufsatzes ohne Weiteres dürfen — an die Stelle der ursprünglichen *C. Neumann*'schen (engeren) Bedingung, dass σ convex sei.

(1) $$C = \int_\sigma f_\sigma \cdot \gamma_\sigma \, d\sigma,$$

wenn γ_σ die im Element $d\sigma$ vorhandene Dichtigkeit der natürlichen Belegung von σ bedeutet, d. h. der Gleichgewichtsvertheilung der Electricitätsmenge 1 auf dem von σ begrenzt gedachten Conductor.

Zu diesem Satze will ich nun das Analogon im Falle *mehrfach* zusammenhängender Bereiche beweisen, und zwar werde ich hierbei im Wesentlichen einem von *C. Neumann* in einer Vorlesung gegebenen Beweise des obigen Satzes folgen, und deshalb mit dem Beweise eines Hilfssatzes beginnen, bei dessen Ableitung wir uns der Einfachheit halber allerdings zunächst wieder eine einzelne Curve oder Fläche σ mit dem Aussengebiet $\mathfrak{A}$ und dem Innengebiet $\mathfrak{J}$ vorgelegt denken wollen [vgl. I, Figur 1, pag. 7]. — Markiren wir sodann im Gebiete $\mathfrak{A}$ irgend einen festen Punkt a, so genügt die Function

$$T_{ap} = \log \frac{1}{E_{ap}}, \quad \text{bezw.} \quad = \frac{1}{E_{ap}}$$

aufgefasst als Function der Lage des Punktes p, innerhalb $\mathfrak{J}$ überall den bekannten Potentialbedingungen, und das Gleiche thut auch das Doppelbelegungspotential

(2) $$W_p^{(n)} = \frac{1}{h\pi} \int_\sigma f_\sigma^{(n)} (d\sigma)_p \qquad \text{[vgl. I, (1) pag. 14].}$$

Es ist daher auf diese beiden Functionen T_{ap} und $W_p^{(n)}$ mit Bezug auf das Innengebiet $\mathfrak{J}$ ein bekannter *Green*'scher Satz anwendbar, welcher uns die Gleichung liefert:

$$\int_\sigma T_{a\sigma} \frac{\partial W^{(n)}}{\partial \nu} d\sigma = \int_\sigma W^{(n)} \frac{\partial T_a}{\partial \nu} d\sigma \;\; \text{d. i.} \; = \int_\sigma W^{(n)} (d\sigma)_a \quad \text{[vgl. I, (2) pag. 7],}$$

wo ν die auf $d\sigma$ errichtete innere Normale bedeutet. — Dabei ist unter $W^{(n)}$ rechterhand natürlich nicht der Werth $f_\sigma^{(n+1)}$ von $W^{(n)}$ geradezu auf $d\sigma$, sondern der innere Grenzwerth $W_{i\sigma}^{(n)} = f_\sigma^{(n+1)} + f_\sigma^{(n)}$ zu verstehn [vgl. I, (7i) pag. 8]; es folgt also:

$$\int_\sigma T_{a\sigma} \frac{\partial W^{(n)}}{\partial \nu} d\sigma = \int_\sigma \left(f_\sigma^{(n+1)} + f_\sigma^{(n)}\right) (d\sigma)_a, \text{d. i. nach (2)} = h\pi \left(W_a^{(n+1)} + W_a^{(n)}\right),$$

oder aber es ergiebt sich die Gleichung:

(3) $$W_a^{(n+1)} + W_a^{(n)} = \frac{1}{h\pi} \int_\sigma T_{a\sigma} \frac{\partial W^{(n)}}{\partial \nu} d\sigma,$$

und zwar gilt diese Formel für beliebige Lagen des Punktes a ausserhalb σ, also auch noch, wenn wir a immer näher und näher an einen

7*

Punkt s von σ heranrücken lassen. — Dann gehn aber $W_a^{(n+1)}$ und $W_a^{(n)}$ der Formel (7a), I, pag. 8 zufolge schliesslich über in $f_s^{(n+2)} - f_s^{(n+1)}$, bezw. in $f_s^{(n+1)} - f_s^{(n)}$, und es folgt daher:

$$(4) \qquad f_s^{(n+2)} - f_s^{(n)} = \frac{1}{h\pi}\int_\sigma T_{s\sigma} \frac{\partial W^{(n)}}{\partial \nu}\, d\sigma.$$

Der soeben für diese Formel mitgetheilte Beweis lässt sich nun ohne Weiteres auch auf den Fall mehrfach zusammenhängender Bereiche übertragen, denn dadurch, dass, wie im ersten der beiden stets unterschiedenen Fälle, das Innengebiet $\mathfrak{J}$, oder, wie im zweiten Falle, das Aussengebiet $\mathfrak{A}$ in mehrere getrennte Theile zerfällt, dadurch wird natürlich an dem Beweisgange nichts geändert. — Wir können uns daher über das gewonnene Resultat so auslassen:

Hilfssatz. — *Ist irgend ein einfach oder mehrfach zusammenhängendes Gebiet gegeben, und sind auf seiner Begrenzung willkürliche Werthe f vorgeschrieben und aus ihnen nach den Vorschriften der Methode des arithmetischen Mittels [vgl. I, pag. 14 u. oben, pag. 53] die aufeinanderfolgenden Functionen f', f'', f''', etc., sowie die zugehörigen Potentiale W, W', W'', etc. gebildet [vgl. (2)], so gilt für jeden Punkt s der Begrenzung die Formel:*

$$f_s^{(n+2)} - f_s^{(n)} = \frac{1}{h\pi}\int T_{s\sigma} \frac{\partial W^{(n)}}{\partial \nu}\, d\sigma, \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

die Integration hinerstreckt gedacht über die ganze Begrenzung, und unter ν die auf $d\sigma$ errichtete innere Normale verstanden.

Diese Formel besagt, dass man die Werthe $f_s^{(n+2)} - f_s^{(n)}$ auffassen kann als die auf der Begrenzung anzutreffenden Werthe eines Potentials, welches herrührt von einer über die ganze Begrenzung ausgebreiteten einfachen Belegung von der Dichtigkeit $\frac{1}{h\pi} \cdot \frac{\partial W^{(n)}}{\partial \nu}$.

Wir wollen nun diese Formel (4) im vorliegenden Paragraphen nur im Falle mehrfach zusammenhängender Bereiche anwenden, welche also von m getrennten Curven oder Flächen $\sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_m$ begrenzt werden. Tragen wir aber diesem Umstande Rechnung, so werden wir gut daran thun, sie jetzt folgendermassen zu schreiben:

$$(4') \quad f_s^{(n+2)} - f_s^{(n)} = \frac{1}{h\pi}\left[\int_{\sigma_1} T_{s\sigma_1} \frac{\partial W^{(n)}}{\partial \nu_1}\, d\sigma_1 + \int_{\sigma_2} T_{s\sigma_2} \frac{\partial W^{(n)}}{\partial \nu_2}\, d\sigma_2 + \cdots + \int_{\sigma_m} T_{s\sigma_m} \frac{\partial W^{(n)}}{\partial \nu_m}\, d\sigma_m\right]. -$$

Um nun weiter zu gehn, müssen wir abermals zwischen jenen beiden verschiedenen Fällen unterscheiden:

Erster Fall. — *Die Curven oder Flächen $\sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_m$ liegen sämmtlich neben einander* [vgl. Figur 2, pag. 69]. — Alsdann wollen wir, wie im vorigen Paragraphen, $\sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_m$ als die äusseren Begrenzungen gewisser isolirter Conductoren $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \cdots \mathfrak{K}_m$ ansehn, und diese dann geladen denken mit irgend welchen *Electricitätsmengen* $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \cdots \mathfrak{M}_m$. Die Dichtigkeit der dann auf den einzelnen Conductoren entstehenden Gleichgewichtsvertheilungen wollen wir mit $\gamma_1, \gamma_2, \cdots \gamma_m$ (oder zusammenfassend auch kurz mit γ) bezeichnen, sodass allgemein

$$\int\limits_{\sigma_\lambda} \gamma_\lambda d\sigma_\lambda = \mathfrak{M}_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots m) \tag{5}$$

ist, — und ferner bezeichnen wir die im Innern der Conductoren $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \cdots \mathfrak{K}_m$ sich herstellenden constanten Werthe des *Potentials jener Vertheilung:*

$$\mathfrak{P}_p = \int T_{\sigma p} \gamma_\sigma d\sigma \tag{6}$$

mit $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \cdots \mathfrak{C}_m$, dann wird dieses Potential $\mathfrak{P}$ also auch z. B. noch, wenn wir p in einen Punkt s_λ der Begrenzung σ_λ von $\mathfrak{K}_\lambda$ rücken lassen, den Werth $\mathfrak{C}_\lambda$ besitzen:

$$\mathfrak{P}_{s_\lambda} = \mathfrak{C}_\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots m) \cdot — \tag{6'}$$

Nunmehr wollen wir den Werth (4') der Differenz $f^{(n+2)} - f^{(n)}$ in jedem beliebigen Punkte s der Begrenzung multiplicirt denken mit dem daselbst vorhandenen Werthe von γ, und alsdann über sämmtliche Elemente der *ganzen* Begrenzung — wir wollen sie jetzt mit ds bezeichnen — hinintegriren, also das Integral bilden:

$$\int\limits^{s} (f_s^{(n+2)} - f_s^{(n)}) \gamma_s ds = \frac{1}{h\pi} \int\limits_{s} \left[\int\limits_{\sigma_1} T_{s\sigma_1} \frac{\partial W^{(n)}}{\partial \nu_1} d\sigma_1 + \cdots + \int\limits_{\sigma_m} T_{s\sigma_m} \frac{\partial W^{(n)}}{\partial \nu_m} d\sigma_m \right] \cdot \gamma_s ds. \tag{7}$$

Rechterhand kehren wir nun die Integrationsfolge um, führen zunächst innerhalb der über die einzelnen Curven oder Flächen hinzuerstreckenden Integrale die zuletzt verlangte Integration über die ganze Begrenzung aus, d. h. also z. B. innerhalb des über σ_λ hinzuerstreckenden Integrales zunächst das Integral

$$\int T_{s\sigma_\lambda} \gamma_s ds \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots m).$$

Dieses stellt aber augenscheinlich nichts anderes als den Werth des Potentials $\mathfrak{P}$ [vgl. (6)] in dem Elemente $d\sigma_\lambda$ von σ_λ dar, und hat daher zufolge (6') den von der speciellen Lage dieses Elementes unabhängigen Werth $\mathfrak{C}_\lambda$. — Berücksichtigen wir aber dies, so vereinfacht sich unsere Formel (7) sofort erheblich und wir erhalten:

$$\int (f_s^{(n+2)} - f_s^{(n)}) \gamma_s ds = \frac{1}{h\pi} \left[\mathfrak{C}_1 \int\limits_{\sigma_1} \frac{\partial W^{(n)}}{\partial \nu_1} d\sigma_1 + \mathfrak{C}_2 \int\limits_{\sigma_2} \frac{\partial W^{(n)}}{\partial \nu_2} d\sigma_2 + \cdots + \mathfrak{C}_m \int\limits_{\sigma_m} \frac{\partial W^{(n)}}{\partial \nu_m} d\sigma_m \right].$$

Die rechts jetzt noch stehen gebliebenen Integrale sind aber sämmtlich gleich 0, wie das nach bekanntem *Green*'schen Satze daraus folgt, dass $W^{(n)}$ innerhalb der von $\sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_m$ begrenzten Gebiete der *Laplace*'schen Gleichung $\Delta W^{(n)} = 0$ genügt. — Somit folgt:

$$\int (f_s^{(n+2)} - f_s^{(n)}) \gamma_s \, ds = 0,$$

oder aber, wenn wir wieder noch die Elemente der Begrenzung mit $d\sigma$ anstatt mit ds bezeichnen:

$$\int f_\sigma^{(n)} \gamma_\sigma \, d\sigma = \int f_\sigma^{(n+2)} \gamma_\sigma \, d\sigma, \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots) \tag{8}$$

und diese Formel wiederholt angewandt führt zu dem Resultate, dass

$$\int f_\sigma \gamma_\sigma \, d\sigma = \int f_\sigma'' \gamma_\sigma \, d\sigma = \int f_\sigma^{IV} \gamma_\sigma \, d\sigma = \cdots, \text{ allgemein } = \int f_\sigma^{(2\nu)} \gamma_\sigma \, d\sigma$$

ist, was für eine ganze Zahl wir auch unter ν verstehn mögen. — Zerlegen wir nun wieder noch dieses Integral, entsprechend den m Curven oder Flächen $\sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_m$, in m Einzelintegrale, so folgt:

$$\int f_\sigma \gamma_\sigma \, d\sigma = \int_{\sigma_1} f_1^{(2\nu)} \gamma_1 \, d\sigma_1 + \int_{\sigma_2} f_2^{(2\nu)} \gamma_2 \, d\sigma_2 + \cdots + \int_{\sigma_m} f_m^{(2\nu)} \gamma_m \, d\sigma_m,$$

wieder für beliebiges ν. — Lassen wir aber ν immer weiter wachsen, so nähern sich diese Werthe $f_1^{(2\nu)}, f_2^{(2\nu)}, \cdots f_m^{(2\nu)}$, wie wir wissen, *wenn nur die Configurationsconstante c des betrachteten Gebietes kleiner als* 1 *ist*, immer mehr und mehr den Constanten $C_1, C_2, \cdots C_m$ [vgl. pag. 75], und wir erhalten daher weiter:

$$\int f_\sigma \gamma_\sigma \, d\sigma = C_1 \int_{\sigma_1} \gamma_1 \, d\sigma_1 + C_2 \int_{\sigma_2} \gamma_2 \, d\sigma_2 + \cdots + C_m \int_{\sigma_m} \gamma_m \, d\sigma_m,$$

oder aber schliesslich mit Rücksicht auf (5):

$$\int f_\sigma \gamma_\sigma \, d\sigma = C_1 \mathfrak{M}_1 + C_2 \mathfrak{M}_2 + \cdots + C_m \mathfrak{M}_m. \tag{9}$$

Es nimmt somit das Integral linkerhand den Werth der Convergenzconstanten C_λ an, wenn wir jetzt nachträglich noch *über die Ladungen* $\mathfrak{M}$ *so verfügen, dass* $\mathfrak{M}_\lambda = 1$, *alle anderen* $\mathfrak{M}$*'s aber gleich* 0 *werden*. — Da wir hierbei aber eine bestimmte Curve oder Fläche σ_λ vor den übrigen bevorzugen, so wollen wir die den jetzigen Verhältnissen entsprechenden Functionen γ specieller mit $\gamma_1^{(\lambda)}, \gamma_2^{(\lambda)}, \cdots \gamma_m^{(\lambda)}$ (oder zusammenfassend auch kurz mit $\gamma^{(\lambda)}$) bezeichnen, und können dann das erhaltene Resultat folgendermassen aussprechen:

Resultat. — *Es sei ein mehrfach zusammenhängendes Gebiet $\mathfrak{A}$ gegeben, dessen m begrenzende Curven oder Flächen $\sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_m$ also sämmtlich neben einander liegen [vgl. Figur 2, pag. 69], und dessen Configurationsconstante c kleiner als* 1 *ist.*

Sind alsdann auf $\sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_m$ beliebige, aber stetige Werthe $f_1, f_2, \cdots f_m$ vorgeschrieben und aus ihnen in bekannter Weise die aufeinanderfolgenden Functionen f', f'', f''', etc. gebildet, so lässt sich z. B. die Constante C_λ, welcher sich dann diese Functionen speciell auf σ_λ nähern [vgl. pag. 75] durch das folgende über die ganze Begrenzung von $\mathfrak{A}$ hinerstreckte Integral darstellen:

$$C_\lambda = \int f_\sigma \gamma_\sigma^{(\lambda)} d\sigma, \tag{10}$$

wo über die Bedeutung der Function $\gamma^{(\lambda)}$ Folgendes zu bemerken ist: Denkt man sich $\sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_m$ als die Begrenzungen gewisser isolirter Conductoren $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \cdots \mathfrak{K}_m$, und dann speciell $\mathfrak{K}_\lambda$ mit der Electricitätsmenge 1 *geladen, die übrigen Conductoren aber ungeladen, so bedeutet $\gamma^{(\lambda)}$ die Dichtigkeit der unter so bewandten Umständen auf $\sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_m$ entstehenden electrischen Gleichgewichtsvertheilung.*

Es stellt dieser Satz thatsächlich eine blosse Verallgemeinerung des oben, pag. 98, genannten *C. Neumann*'schen Satzes dar; im speciellen Falle nur einer begrenzenden Curve oder Fläche σ geht er augenscheinlich in diesen über.

Zweiter Fall. — *Von den Curven oder Flächen $\sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_m$ umschliesst eine, σ_1, die m—1 übrigen* [vgl. Figur 3, pag. 72]. — Dann wollen wir uns zunächst einmal σ_1 als die äussere Begrenzung eines Conductors $\mathfrak{K}$ denken, also bei dieser Vorstellung zunächst die inneren Curven oder Flächen $\sigma_2, \sigma_3, \cdots \sigma_m$ in keiner Weise berücksichtigen. — Diesen Conductor $\mathfrak{K}$ wollen wir uns nun isolirt und mit der *Electricitätsmenge* $\mathfrak{M} = 1$ geladen denken. Die Dichtigkeit der dann entstehenden Gleichgewichtsvertheilung, der „natürlichen Belegung" von σ_1 wollen wir dann mit $\gamma^{(1)}$, und den im Innern von $\mathfrak{K}$ eintretenden constanten Werth ihres *Potentials* $\mathfrak{P}$ mit $\mathfrak{C}$ bezeichnen. Dann ist also:

$$\int_{\sigma_1} \gamma_1^{(1)} d\sigma_1 = 1 \tag{11}$$

und ferner:

$$\mathfrak{P}_{s_\lambda} = \int_{\sigma_1} T_{s_\lambda \sigma_1} \cdot \gamma_{\sigma_1}^{(1)} d\sigma_1 = \mathfrak{C}, \qquad (\lambda = 1, 2, \cdots m) \tag{12}$$

denn die Punkte s_λ sämmtlicher Curven oder Flächen σ_λ liegen ja innerhalb bezw. auf $\mathfrak{K}$, in ihnen allen ist daher das Potential $\mathfrak{P}$ der natürlichen Belegung gleich $\mathfrak{C}$. —

Wir multipliciren jetzt den Werth (4') der Function $f^{(n+2)} - f^{(n)}$ in sämmtlichen Punkten s_1 von σ_1 mit dem daselbst vorhandenen Werthe von $\gamma^{(1)}$, und integriren alsdann über sämmtliche Elemente ds_1 *von* σ_1, bilden also folgendes Integral:

$$\int_{\sigma_1} (f_{s_1}^{(n+2)} - f_{s_1}^{(n)}) \gamma_{s_1}^{(1)} ds_1 = \frac{1}{h\pi} \int_{\sigma_1} \left[\int_{\sigma_1} T_{s_1 \sigma_1} \frac{\partial W^{(n)}}{\partial \nu_1} d\sigma_1 + \cdots + \int_{\sigma_m} T_{s_1 \sigma_m} \frac{\partial W^{(n)}}{\partial \nu_m} d\sigma_m \right] \gamma_{s_1}^{(1)} ds_1 .$$

Hier führen wir nun rechterhand, ähnlich wie früher, zunächst überall die Integration über die Elemente ds_1 von σ_1, also die Integrale $\int_{\sigma_1} T_{s_1 \sigma_\lambda} \gamma_{s_1} ds_1$ aus. — Diese stellen aber augenscheinlich nichts anderes als die Werthe des Potentials $\mathfrak{P}$ in den Elementen $d\sigma_\lambda$ der Curven bezw. Flächen σ_λ dar, sind also zufolge (12) sämmtlich gleich $\mathfrak{C}$. Somit folgt weiter:

$$\int_{\sigma_1} (f_{s_1}^{(n+1)} - f_{s_1}^{(n)}) \gamma_{s_1}^{(1)} ds_1 = \frac{1}{h\pi} \cdot \mathfrak{C} \left[\int_{\sigma_1} \frac{\partial W^{(n)}}{\partial \nu_1} d\sigma_1 + \int_{\sigma_2} \frac{\partial W^{(n)}}{\partial \nu_2} d\sigma_2 + \cdots + \int_{\sigma_m} \frac{\partial W^{(n)}}{\partial \nu_m} d\sigma_m \right].$$

Diese Integrale rechts verschwinden nun aber sämmtlich, wie sich leicht vermittelst der allgemeinen Eigenschaft (6), I, pag. 8 von Doppelbelegungspotentialen nachweisen lässt, und es folgt daher

$$\int_{\sigma_1} (f_{s_1}^{(n+2)} - f_{s_1}^{(n)}) \gamma_{s_1}^{(1)} ds_1 = 0$$

oder, wenn wir jetzt wieder die Elemente von σ_1 mit $d\sigma_1$ anstatt mit ds_1 bezeichnen:

$$\int_{\sigma_1} f_1^{(n)} \gamma_1^{(1)} d\sigma_1 = \int_{\sigma_1} f_1^{(n+2)} \gamma_1^{(1)} d\sigma_1 ,$$

woraus sich weiter ergiebt, dass

$$\int_{\sigma_1} f_1 \gamma_1^{(1)} d\sigma_1 = \int_{\sigma_1} f_1'' \gamma_1^{(1)} d\sigma_1 = \int_{\sigma_1} f_1^{IV} \cdot \gamma_1^{(1)} d\sigma_1 = \cdots, \text{ allgemein } = \int_{\sigma_1} f_1^{(2\nu)} \gamma_1^{(1)} d\sigma_1$$

ist, welchen Werth ν auch haben mag. — Lassen wir aber ν immer mehr und mehr wachsen, so nähert sich $f_1^{(2\nu)}$ dem Satze pag. 76 zufolge immer mehr und mehr der Constanten C_1, und es folgt daher:

$$\int_{\sigma_1} f_1 \gamma_1^{(1)} d\sigma_1 = C_1 \int_{\sigma_1} \gamma_1^{(1)} d\sigma_1 ,$$

d. i. mit Rücksicht auf die Formel (11):

$$C_1 = \int_{\sigma_1} f_1 \gamma_1^{(1)} d\sigma_1 , \tag{13}$$

ein Resultat, welches insofern wohl einigermassen überraschend ist, als es lehrt, dass *die Convergenzconstante* C_1 *der Functionen* f, f', f'', *etc.* ***speciell auf*** σ_1, *gänzlich unabhängig ist von den auf den* ***inneren*** *Curven bezw. Flächen vorgeschriebenen Werthen* $f_2, f_3, \cdots f_m$. —

Wollen wir jetzt endlich auch noch die Convergenzconstanten der aufeinanderfolgenden Functionen auf den *inneren* Curven oder Flächen ähnlich untersuchen, so bedienen wir uns der folgenden Vorstellung: Es sei σ_1 die innere Begrenzung eines ring- bezw. schalenförmigen Conductors $\mathfrak{K}_1$ und innerhalb desselben isolirt befänden sich, von $\sigma_2, \sigma_3, \cdots \sigma_m$ begrenzt, die weiteren Conductoren $\mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_3, \cdots \mathfrak{K}_m$. Dann wollen wir uns jeden dieser letzteren Conductoren mit einer gewissen *Electricitätsmenge* $\mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_3, \cdots \mathfrak{M}_m$ geladen denken: Diese Ladungen werden dann bekanntlich auf der innern Begrenzung von $\mathfrak{K}_1$, also auf σ_1, die Electricitätsmenge

$$\mathfrak{M}_1 = -(\mathfrak{M}_2 + \mathfrak{M}_3 + \cdots + \mathfrak{M}_m) \tag{14}$$

induciren. — Die Dichtigkeit der Gleichgewichtsvertheilung dieser Electricitäten $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \cdots \mathfrak{M}_m$ auf $\sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_m$ bezeichnen wir nun ganz analog wie im ersten Falle mit $\gamma_1, \gamma_2, \cdots \gamma_m$ (oder zusammenfassend kurz mit γ) und die constanten Potentialwerthe innerhalb $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \cdots \mathfrak{K}_m$ mit $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \cdots \mathfrak{C}_m$; alsdann folgt genau ebenso, wie dort, dass das über die *ganze* Begrenzung, also über $\sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_m$ gleichzeitig hinerstreckte Integral

$$\int f_\sigma \gamma_\sigma d\sigma = C_1 \mathfrak{M}_1 + C_2 \mathfrak{M}_2 + \cdots + C_m \mathfrak{M}_m \tag{15}$$

ist [vgl. oben (9)], wo jetzt in Uebereinstimmung mit unserer früheren Bezeichnungsweise, $C_2, C_3, \cdots C_m$ die Convergenzconstanten speciell der Functionen mit geradem Index sind [vgl. pag. 76]. —

Nunmehr machen wir wieder speciellere Annahmen. — Wir wollen uns nämlich von den Ladungen der inneren Conductoren $\mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_3, \cdots \mathfrak{K}_m$ die eine, z. B. $\mathfrak{M}_\lambda$ *gleich* 1 gegeben denken, und *die übrigen gleich* 0; dann folgt aus (14) sofort, dass die auf σ_1 inducirte Electricitätsmenge: $\mathfrak{M}_1 = -1$ ist. — Die Dichtigkeit γ der diesem speciellen Falle entsprechenden Gleichgewichtsvertheilung wollen wir nun mit $\gamma^{(\lambda)}$ bezeichnen. Dann folgt aus unserer letzten Formel das Resultat:

$$C_\lambda - C_1 = \int f_\sigma \gamma_\sigma^{(\lambda)} d\sigma.$$

Diese Differenz $C_\lambda - C_1$ ist aber nichts anderes als die früher von uns mit δ_λ bezeichnete Grösse, welche — die Kenntniss von C_1 vorausgesetzt — die beiden der Curve bezw. Fläche entsprechenden Convergenzconstanten C_λ und C_λ' in so überaus einfacher Weise zu berechnen gestattet [vgl. (19') pag. 76].

Resultat. — *Es sei ein mehrfach zusammenhängendes Gebiet* $\mathfrak{J}$ *gegeben, begrenzt von m Curven bezw. Flächen, deren eine,* σ_1, *die* $m-1$ *übrigen,* $\sigma_2, \sigma_3, \cdots \sigma_m$ *umschliesst [vgl. Figur 3, pag. 72], und dessen Configurationsconstante kleiner als* 1 *ist.*

Sind alsdann auf $\sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_m$ *beliebige aber stetige Werthe* $f_1, f_2, \cdots f_m$ *vorgeschrieben, und aus ihnen in bekannter Weise die aufeinanderfolgenden Functionen* f', f'', f''', *etc. gebildet, so lässt die Constante* C_1, *welcher sich dem Satze pag. 76 zufolge diese Functionen speciell auf* σ_1 *nähern, die folgende Darstellung durch ein über* σ_1 *hinerstrecktes Integral zu:*

$$C_1 = \int\limits_{\sigma_1} f_1 \gamma_1^{(1)} d\sigma_1 \qquad \text{[vgl. (13)]},$$

während sich zur Berechnung der beiden Constanten C_λ *und* C_λ', *denen sich auf einer der inneren Curven oder Flächen* σ_λ $(\lambda = 2, 3, \cdots m)$ *die Functionen mit geradem, bezw. die mit ungeradem Index nähern, die beiden Formeln ergeben:*

$$C_\lambda = C_1 + \delta_\lambda \qquad \textit{und} \qquad C_\lambda' = C_1 - \delta_\lambda, \qquad \text{[vgl. pag. 76]}$$

in welchen die Grösse δ_λ *die folgende Darstellung zulässt:*

$$\delta_\lambda = \int f_\sigma \gamma_\sigma^{(\lambda)} d\sigma \qquad (\lambda = 2, 3, \cdots m) \tag{16}$$

— *dieses Integral jetzt hinerstreckt gedacht über die ganze Begrenzung von* $\mathfrak{J}$.

Hier ist dann noch über die Bedeutung der Functionen $\gamma^{(1)}$ *und* $\gamma^{(\lambda)}$ $(\lambda = 2, 3, \cdots m)$ *folgendes zu sagen: Zunächst denke man sich* σ_1 *als die äussere Begrenzung eines Conductors* $\mathfrak{K}$, *und diesen dann isolirt und geladen mit der Electricitätsmenge* 1. *Dann bedeutet* $\gamma^{(1)}$ *die Dichtigkeit der auf* $\mathfrak{K}$ *entstehenden electrischen Gleichgewichtsvertheilung (der „natürlichen Belegung" von* σ_1*) — sodann denke man sich jetzt zweitens aber* σ_1 *als die innere Begrenzung eines ring- bezw. schalenförmigen Conductors* $\mathfrak{K}_1$, *und innerhalb desselben isolirt gewisse von* $\sigma_2, \sigma_3, \cdots \sigma_m$ *begrenzte kleinere Conductoren* $\mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_3, \cdots \mathfrak{K}_m$, *deren einer,* $\mathfrak{K}_\lambda$, *mit der electrischen Ladung* 1 *versehen, die anderen aber ungeladen seien; dann wird auf* σ_1 *die Electricitätsmenge* — 1 *inducirt. — Die Dichtigkeit der unter diesen Verhältnissen auf* $\sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_m$ *entstehenden electrischen Gleichgewichtsvertheilungen, das sind dann die Functionen* $\gamma_1^{(\lambda)}, \gamma_2^{(\lambda)}, \cdots \gamma_m^{(\lambda)}$, *für welche* $\gamma^{(\lambda)}$ *eine blosse Collectivbezeichnung ist.* —

Die wichtigste Folgerung aus diesem Resultate dürfte wohl, wie hier nochmals hervorgehoben sei, diese sein, dass, wie uns die Darstellung (13) lehrt, *die Convergenzconstante* C_1 *der aufeinanderfolgenden Functionen* f, f', f'', *etc. auf der äusseren Curve oder Fläche* σ_1 *gänzlich* *unabhängig ist von den auf den inneren Curven oder Flächen* $\sigma_2, \sigma_3, \cdots \sigma_m$ *von Hause aus vorgeschriebenen Werthen* $f_2, f_3, \cdots f_m$. — *Es hängt somit* C_1 *lediglich ab von den auf* σ_1 *selber vorgeschriebenen Werthen* f_1, *und von den geometrischen Verhältnissen von* σ_1, sodass wir also zu demselben Werthe C_1 der Convergenzconstanten gelangen würden, wenn wir auf Grund der auf σ_1 vorgeschriebenen Werthe f_1 aufeinanderfolgende Functionen bildeten, und dabei so verführen, als wenn die *inneren* Curven oder Flächen $\sigma_2, \sigma_3, \cdots \sigma_m$ überhaupt nicht vorhanden wären [vgl. auch oben (1) pag. 99]. —

Besitzen nun auch die Ausführungen dieses Paragraphen aus den schon zu Eingang bemerkten Gründen nicht denselben Grad der Strenge, wie unsere früheren Betrachtungen, mögen vielleicht auch die stillschweigend gemachten Voraussetzungen in Ausnahmefällen nicht zutreffen, im Allgemeinen, — wenn nicht die Curven bezw. Flächen $\sigma_1, \sigma_2, \cdots \sigma_m$ oder die Werthe $f_1, f_2, \cdots f_m$ irgend welches singuläre Verhalten zeigen — sind sie zweifelsohne zutreffend, und ist daher an der *Allgemeingültigkeit des letzten Resultates* wohl nicht zu zweifeln. — Einen directeren, und, wenn möglich, auch strengeren Weg, es zu beweisen, habe ich bisher nicht gefunden.

§ 11.

Die Configurationsconstante eines von *zwei Kreisen* begrenzten Gebietes.

Es seien zunächst einmal *zwei concentrische Kreise* σ_1 und σ_2 gegeben, mit den Radien R_1 und R_2 $(R_1 > R_2)$. — Dann wollen wir uns die Aufgabe stellen, die *Oeffnungsfunction* und die *Configurationsconstante* des von σ_1 und σ_2 begrenzten Kreisringes zu berechnen.

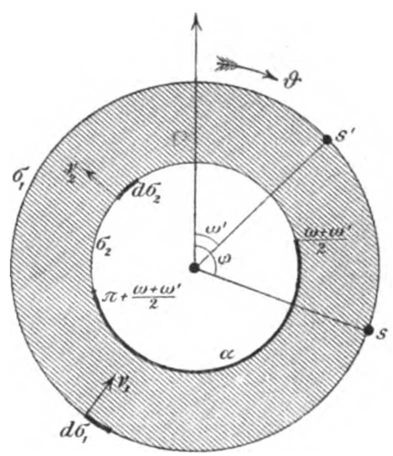


Fig. 4.

Wir führen Polarcoordinaten ϱ, ϑ ein, und markiren dann zunächst auf σ_1, der grösseren Peripherie einen beliebigen Punkt s — sein Azimut sei ω. — Bezeichnet dann E die Entfernung eines beliebigen Punktes ϱ, ϑ von s, sodass also:

$$E^2 = \varrho^2 + R_1^2 - 2\varrho R_1 \cos(\vartheta - \omega),$$

so ist die scheinbare Grösse eines Elementes $d\sigma_2(R_2, \vartheta)$ der Peripherie σ_2 von s aus:

$$(d\sigma_2)_s = \frac{\partial\left(\log\frac{1}{E}\right)}{\partial\nu_2}\,d\sigma_2 = \left[\frac{\partial\left(\log\frac{1}{E}\right)}{\partial\varrho}\right]_{\varrho=R_2}\cdot R_2\,d\vartheta$$

[vgl. (1) pag. 51], und hieraus ergiebt sich schliesslich:

$$(d\sigma_2)_s = -\frac{R_2-R_1\cos(\vartheta-\omega)}{R_1{}^2+R_2{}^2-2R_1R_2\cos(\vartheta-\omega)}\,R_2\,d\vartheta = \frac{1}{2}\left(\frac{R_1{}^2-R_2{}^2}{R_1{}^2+R_2{}^2-2R_1R_2\cos(\vartheta-\omega)}-1\right)d\vartheta.$$

Markiren wir also jetzt auf σ_1 noch einen *zweiten* beliebigen Punkt s' — mit dem Azimut ω' —, so folgt für die Differenz der scheinbaren Grössen des Elementes $d\sigma_2(R_2, \vartheta)$ von s und s' aus:

$$(1)\quad (d\sigma_2)_s-(d\sigma_2)_{s'} = \frac{1}{2}\left(\frac{R_1{}^2-R_2{}^2}{R_1{}^2+R_2{}^2-2R_1R_2\cos(\vartheta-\omega)}-\frac{R_1{}^2-R_2{}^2}{R_1{}^2+R_2{}^2-2R_1R_2\cos(\vartheta-\omega')}\right)d\vartheta,$$

während für ganz beliebige Elemente $d\sigma_1$ von σ_1:

$$(1')\quad (d\sigma_1)_s-(d\sigma_1)_{s'} = 0$$

ist, da ja nach unseren Ausführungen im ersten Aufsatze [vgl. I, pag. 29] die sämmtlichen Elemente einer Kreisperipherie von irgend zwei auf ihr gelegenen Punkten aus stets gleich gross erscheinen.

Wollen wir also jetzt, um die *Oeffnungsfunction* $D(s, s')$ unseres Kreisringes zu bilden [vgl. pag. 60], zunächst seine Begrenzung in jene beiden Theile α und β zerlegen, derart, dass zum Theile α alle Elemente gehören, die von s aus grösser als von s' aus, zum Theile β aber alle übrigen, die also umgekehrt von s' aus grösser als von s, oder aber gleich gross erscheinen, so ist von vornherein klar, dass alle Elemente $d\sigma_1$ von σ_1 dem Theile β zuzuordnen sind. — Der Theil α reducirt sich sonach auf diejenigen Elemente von σ_2, für welche die Differenz (1) positiv ist, d. h. wie eine einfache Ueberlegung lehrt, wenn $\omega > \omega'$ ist, auf diejenigen Elemente $d\sigma_2$, deren ϑ-Coordinate zwischen $\frac{\omega+\omega'}{2}$ und $\pi+\frac{\omega+\omega'}{2}$ liegt [in der Figur stärker ausgezogen].

Die Oeffnungsfunction, d. h. das über diesen Theil α hinerstreckte Integral

$$D(s, s') = \frac{1}{\pi}\int[(d\alpha)_s-(d\alpha)_{s'}]$$

[vgl. (1) pag. 60 ($h=1$)], ist also nichts anderes als das Integral der Differenz (1) zwischen den Grenzen $\frac{\omega+\omega'}{2}$ und $\pi+\frac{\omega+\omega'}{2}$:

$$D(s, s') = \frac{R_1{}^2-R_2{}^2}{2\pi}\left[\int_{\frac{\omega+\omega'}{2}}^{\pi+\frac{\omega+\omega'}{2}}\frac{d\vartheta}{R_1{}^2+R_2{}^2-2R_1R_2\cos(\vartheta-\omega)}\right]_{\omega'}^{\omega},$$

und hieraus folgt schliesslich das Resultat:

$$(2)\qquad D(s, s') = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{2 R_1 R_2 \sin\frac{\omega - \omega'}{2}}{R_1^2 - R_2^2}\right).^{*)} -$$

Doch diesen Werth haben wir unter der speciellen Annahme abgeleitet, dass die Pole s und s' der Oeffnungsfunction *beide* auf der *äusseren* Peripherie σ_1 lägen. — Nehmen wir im Gegensatz hierzu einmal an, es lägen jetzt s und s' *beide auf* σ_2! — ihre Azimute seien wieder ω und ω', und es sei auch wiederum $\omega > \omega'$. — Alsdann kann man die Oeffnungsfunction $D(s, s')$ in genau derselben Weise, wie oben, berechnen; man übersieht dann bald, dass das Resultat formal mit dem oben in (2) gewonnenen vollständig übereinstimmt. — Damit sind wir dann zu folgendem Satze gelangt:

Satz I. — *Ist ein Kreisring gegeben, begrenzt von zwei concentrischen Kreisen σ_1 und σ_2 mit den Radien R_1 und R_2 ($R_1 > R_2$), und verstehn wir unter ω und ω' ($\omega > \omega'$) die Azimute zweier beliebiger Punkte s und s', welche entweder beide auf σ_1 oder aber beide auf σ_2 liegen, so ist die Oeffnungsfunction dieses Kreisringes mit Bezug auf diese beiden Punkte s und s' als Pole:*

$$D(s, s') = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{2 R_1 R_2 \sin\frac{\omega - \omega'}{2}}{R_1^2 - R_2^2}\right)$$

wo arctg *im ersten Quadranten anzunehmen ist* — wie das aus der Ueberlegung folgt, dass, wenn $\omega = \omega'$ wird, die beiden Pole also zusammenfallen, die Oeffnungsfunction den Werth 0 haben muss [vgl. I, (8) pag. 11].

Den grössten Werth nimmt nun dieser Ausdruck (2), wie leicht ersichtlich, an, wenn $\omega - \omega' = \pi$ ist, d. h. wenn sich die Punkte s und s' diametral gegenüber liegen. — Der diesem Fall entsprechende Werth von $D(s, s')$, d. h.

$$(3)\qquad \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{2 R_1 R_2}{R_1^2 - R_2^2}\right) = \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg}\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

ist dann also der grösste Werth, dessen die Oeffnungsfunction fähig ist, sowohl wenn wir ihre Pole beide auf σ_1, als auch wenn wir sie beide auf σ_2 beliebig verschieben. — Diese so bestimmten Maximalwerthe haben wir aber nach unseren früheren Definitionen [vgl. pag. 61] zu bezeichnen als die *Configurationsconstanten* $\mathfrak{c}_1$ *und* $\mathfrak{c}_2$ *des Kreisringes in Bezug auf*

*) Es tritt hier eine starke Analogie mit den Ausführungen bei Berechnung der Oeffnungsfunction der *Ellipse* zu Tage [vgl. I, pag. 32—34, speciell die Formeln (11) und (12)].

σ_1 *bezw.* σ_2. — *Es ist somit der Ausdruck* (3) *der gemeinsame Werth dieser beiden Constanten* $\mathfrak{c}_1$ *und* $\mathfrak{c}_2$, und daher auch der schlechtweg als *Configurationsconstante des Kreisringes* zu bezeichnenden Constanten c — denn allgemein ist c definirt als die eine dieser Constanten $\mathfrak{c}$ (nämlich, wenn sie verschieden sind, als die grössere von ihnen). Es folgt daher

Satz IIA. — *Die Configurationsconstante eines von zwei concentrischen Kreisen begrenzten Gebietes ist*

$$c = \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{R_2}{R_1}\right) \tag{4}$$

— arctg *im ersten Quadranten gerechnet — wo* R_1 *und* R_2 $(R_1 > R_2)$ *die Radien jener Kreise bedeuten.*

Herr *Noble* giebt für die Configurationsconstante eines solchen Gebietes den Werth 2 an*). — Diese Abweichung hat ihren Grund darin, dass *Noble* unsere *Modification des Begriffs der Configurationsconstanten* im Falle mehrfach zusammenhängender Bereiche [vgl. § 3] entgangen ist, dass er diese Constante eben noch als den grössten Werth definirt, den die Oeffnungsfunction bei ganz beliebiger Lage der Pole s und s' auf der Begrenzung, eventuell auch auf verschiedenen der begrenzenden Curven bezw. Flächen annimmt — dass er dann aber einen Werth, grösser als 1, erhalten musste, das geht bereits aus unserem Satze pag. 55 hervor. — Wir wissen nun aber, dass es auf diesen grössten unter allen Werthen der Oeffnungsfunction gar nicht ankommt, dass eine weit wesentlichere Rolle der grösste Werth spielt, den die Oeffnungsfunction annimmt, wenn ihre beiden Pole auf ein und derselben Curve oder Fläche liegen — diesen Werth haben wir daher als die Configurationsconstante des vorgelegten Gebietes bezeichnet [vgl. pag. 59]. — Da der *arctg* eines echten Bruches, wie es hier $\frac{R_2}{R_1}$ ist, nun stets kleiner als $\frac{\pi}{4}$ ist, so folgt aus unserer Formel (4), dass die so definirte *Configurationsconstante c eines von zwei concentrischen Kreisen begrenzten Gebietes stets kleiner als* 1 *ist.* —

Wie steht es nun mit der Configurationsconstanten eines von *zwei excentrischen Kreisen* begrenzten Gebietes? — Diese Frage erledigt sich überaus einfach, wenn wir beachten, dass ein solches Gebiet sich stets — mögen nun die Kreise neben einander liegen, oder der eine innerhalb des andern — durch Abbildung nach reciproken Radien überführen lässt in ein von concentrischen Kreisen begrenztes Gebiet. Bei einer solchen Transformation nach reciproken Radien bleibt aber einem im ersten Aufsatze bewiesenen allgemeinen Theorem zufolge die Configurationsconstante

*) Vgl. Göttinger Nachrichten 1896, pag. 194.

eines Gebietes ungeändert [vgl. I, pag. 51]*), woraus folgt, *dass diese* Constante *auch für ein solches von zwei excentrischen Kreisen begrenztes Gebiet stets kleiner als* 1 *sein muss.*

Wollen wir diese Verhältnisse etwas näher untersuchen, so thun wir gut daran *ein dipolares Coordinatensystem* einzuführen**). — Diesem Systeme mögen die beiden, das vorgelegte Gebiet begrenzenden, Kreise σ_1 und σ_2 als λ-Kreise mit den Parametern λ_1 und λ_2 $(\lambda_1 > \lambda_2)$ angehören. Führen wir dann durch Abbildung nach reciproken Radien (Abbildungsradius H) diese Kreise σ_1 und σ_2 über in zwei concentrische Kreise σ_1' und σ_2', so sind die Radien der letzteren nach gewissen früher***) von mir abgeleiteten Formeln:

$$R_1 = \varrho_0 e^{\lambda_1} \qquad \text{und} \qquad R_2 = \varrho_0 e^{\lambda_2} \qquad \left(\varrho_0 = \frac{\mathsf{H}^2}{2a}\right)$$

und es folgt daher, wenn wir noch $\lambda_1 - \lambda_2 = \delta$ setzen:

$$\frac{R_2}{R_1} = e^{\lambda_2 - \lambda_1} = e^{-\delta}.$$

Dies in (4) eingesetzt liefert uns die Configurationsconstante des von jenen concentrischen Kreisen σ_1' und σ_2', und jenem allgemeinen Theorem zufolge, also auch des von σ_1 und σ_2 begrenzten, ursprünglich vorgelegten Gebietes — und damit sind wir zu folgendem Resultate gelangt:

Satz II B. — *Ist ein ebenes Gebiet gegeben, welches begrenzt wird von irgend zwei (einander nicht schneidenden) excentrischen Kreisen, und gehören diese einem dipolaren System als λ-Kreise mit den Parametern λ_1 und λ_2 $(\lambda_1 > \lambda_2)$ an, so ist die Configurationsconstante dieses Gebietes:*

$$c = \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg}(e^{-\delta}) \qquad (\delta = \lambda_1 - \lambda_2 > 0) \tag{5}$$

— arctg *im ersten Quadranten gerechnet.* —

Diese Formel bestätigt nur das schon oben über den Werth der Configurationsconstante gefundene Resultat, das wir jetzt aussprechen wollen in dem folgenden

Satz III. — *Die Configurationsconstante eines von zwei getrennten Kreisen begrenzten Gebietes ist stets kleiner als* 1, *mögen diese nun con-*

*) Wir haben dieses Theorem dort freilich nur bewiesen für die Configurationsconstanten ebner einfach zusammenhängender Bereiche — doch lässt es sich, wie eine überaus einfache Ueberlegung lehrt, auch leicht auf unsere oben in § 3 definirte Configurationsconstante c mehrfach zusammenhängender Bereiche ausdehnen.

**) Die wesentlichsten Eigenschaften dieser *dipolaren Coordinaten* findet man zusammengestellt im ersten Abschnitt eines vor einigen Jahren von mir im „Journal für Mathematik" (früher *Crelle*'sches Journal) veröffentlichten Aufsatzes [vgl. Bd. 120, pag. 60]. — Wie dort bezeichnet auch hier $2a$ den Abstand der beiden Pole des dipolaren Systems.

***) l. c. pag. 82

centrisch, oder excentrisch, der eine innerhalb des andern, oder aber beide nebeneinander liegen. —

Auf ein solches Gebiet angewandt ist also nach unserem Satze pag. 87 die Methode des arithmetischen Mittels stets convergent, wenigstens wenn man die auf den Kreisen willkürlich vorgeschriebenen Werthe zuvor um passend gewählte Constante vermehrt hat.

Ist nun dieses letztere Resultat an sich auch nicht neu — *C. Neumann* giebt dasselbe nämlich bereits (wenn auch ohne Beweis) an [vgl. Abhandl. I pag. 4], so dürfte doch dieser Autor zu ihm erst in der Weise gelangt sein, dass er die allgemeinen Vorschriften seiner Methode im vorliegenden Falle — vermuthlich unter Anwendung *Fourier*'scher Reihen — wirklich ausführte, und sich so von der Convergenz des Verfahrens überzeugte. — Demgegenüber aber dürfte doch der Weg, der uns zu diesem Resultate führte, einen gewissen Fortschritt bedeuten. Bei uns ergiebt sich die Convergenz der Methode in diesem Falle *als specielle Folgerung aus einem allgemeinen Convergenzcriterium,* das uns auch bei mehrfach zusammenhängenden Bereichen die Convergenz der Methode des arithmetischen Mittels unter gewissen Bedingungen [vgl. pag. 81] *a priori* zu verbürgen gestattet, ohne dass wir nöthig hätten, die Vorschriften der Methode wirklich im einzelnen Falle erst auszuführen — dafür bildet eben ein solches von zwei Kreisen begrenztes Gebiet ein einfaches Beispiel.

Doch in einem wesentlichen Punkte *ergänzen* die letzten speciellen Untersuchungen geradezu unsere allgemeinen Resultate. — Nämlich erst aus ihnen geht hervor, dass es thatsächlich Fälle giebt, in denen *unser allgemeines Convergenzcriterium anwendbar* ist, in denen die Bedingungen dieses Criteriums realisirt sind, d. h. dass es eben *wirklich mehrfach zusammenhängende Bereiche giebt, deren Configurationsconstante c kleiner als 1 ist.* Darin unterscheidet sich eben diese unsere Constante c [vgl. § 3], von der in § 1 von uns betrachteten — von *Noble* eben noch als „Configurationsconstante" bezeichneten — Grösse, welche bei mehrfach zusammenhängenden Bereichen stets grösser als 1 ist [vgl. pag. 55]. Wäre dies auch bei der Constanten c der Fall, so würde unser allgemeines Convergenzcriterium eben keinen practischen Werth besitzen, es würde uns diese *Modification des Hilbert'schen Satzes* [vgl. pag. 81] ebenso im Stiche lassen, wie es bei mehrfach zusammenhängenden Bereichen dieser Satz in seiner ursprünglichen Form that [vgl. pag. 55], und wir hätten also in der Convergenzfrage überhaupt keinen Fortschritt erreicht.

Inhaltsübersicht zum ersten und zweiten Aufsatz.

Erster Aufsatz. Bd. LV. pag. 1—52

Hilbert's Modification von *C. Neumann*'s Convergenzbeweis.

Zweiter Aufsatz. Bd. LVI. 49—114

Die Methode in ihrer Anwendung auf mehrfach zusammenhängende Bereiche.

Racines cubiques de nombres entiers et multiplication complexe dans les fonctions elliptiques.

Par

D. Mirimanoff à Genève.

Introduction.

Parmi les équations résolubles algébriquement, les plus simples sont les équations abéliennes, à coefficients entiers, dites équations abéliennes absolues. Leurs racines sont des fonctions rationnelles des racines de l'unité. Ce théorème, qui exprime la propriété la plus importante des équations abéliennes absolues, est dû à Kronecker. Il permet de ramener l'étude des équations absolues à celle des équations de la division du cercle.

Bien plus difficile est l'étude des équations abéliennes relatives. Les plus simples parmi ces équations sont celles qui deviennent abéliennes par l'adjonction d'une racine carrée d'un nombre entier négatif. Kronecker a affirmé que les racines de ces équations s'expriment en fonction rationnelle des racines des équations de transformation que nous donne la multiplication complexe dans les fonctions elliptiques*).

D'après M. D. Hilbert, il serait possible de démontrer ce beau théorème de Kronecker, en se basant sur les recherches récentes de. M. H. Weber et sur les propriétés très générales des équations abéliennes relatives établies par M. D. Hilbert**).

Les plus simples parmi ces équations abéliennes sont les équations de la forme $x^3 - n = 0$, n étant un entier quelconque. Elles deviennent abéliennes par l'adjonction de $\sqrt{-3}$.

Par conséquent les racines cubiques de nombres entiers s'exprimeraient aussi en fonction rationnelle des racines des équations de transformation.

Il ne serait peut être pas inutile d'indiquer un moyen de former ces expressions.

C'est ce que je me propose de faire dans le présent travail.

*) Sitzungsberichte, 1895, p. 115.

**) D. Hilbert, Jahresbericht der deutschen Mathem.-Vereinigung, 6, p. 94.

§ 1.

Invariants de classe.

Je poserai, avec M. H. Weber

$$j(\omega)=\frac{27\cdot 64 g_2^3}{g_2^3-27 g_3^2}=27\cdot 64 J(\omega)$$

ω étant un nombre complexe dans la partie supérieure du plan, g_2 et g_3 les invariants de Weierstrass et $J(\omega)$ l'invariant absolu de M. F. Klein.

$j(\omega)$ appartient au groupe formé par toutes les substitutions linéaires

$$j\left(\frac{\gamma+\delta\omega}{\alpha+\beta\omega}\right)=j(\omega),\qquad \alpha\delta-\beta\gamma=1.$$

Supposons maintenant que ω soit racine d'une équation quadratique

(1) $$A\omega^2+B\omega+C=0$$

à discriminant négatif, A, B, C étant trois entiers premiers entre eux.

Les invariants correspondants $j(\omega)$ sont dits invariants singuliers ou invariants de classe*).

A chaque équation (1) correspond une forme quadratique primitive positive. Si B est pair, la forme correspondante $\left(A, \frac{B}{2}, C\right)$ est de première espèce (proprement primitive); si B est impair, la forme correspondante $(2A, B, 2C)$ est de 2^me^ espèce (improgrement primitive). Soit $-m$ le discriminant de la forme. Dans le premier cas

$$-m=\frac{B^2-4AC}{4}$$

dans le second

$$-m=B^2-4AC.$$

L'invariant singulier $j(\omega)$ est racine d'une équation irréducible à coefficients entiers, dite équation des classes; son degré est égal au nombre des classes primitives de 1^re^ ou de 2^me^ espèce, suivant la parité de B. Cette équation n'est pas abélienne dans le domaine des nombres entiers; elle devient abélienne par l'adjonction de la racine carré $\sqrt{-m}$.

Supposons que le nombre entier m soit de la forme $3k^2$. Dans ce cas les équations des classes deviennent abéliennes par l'adjonction de $\sqrt{-3}$. Leurs racines forment une catégorie spéciale d'invariants de classe.

D'autre part les équations de la forme

(2) $$x^3-n=0$$

n étant un entier quelconque, deviennent abéliennes par l'adjonction de $\sqrt{-3}$.

---

*) H. Weber, l. c. 87, Encyklopädie, ICb. J. de Séguier, Formes quadratiques et multiplication complexe, Berlin 1894, § 31.

Nous allons essayer d'exprimer les racines de (2) en fonction rationnelle des invariants de discriminant $-3k^2$.

On peut remplacer $j(\omega)$ par d'autres fonctions modulaires, pourvu que ces fonctions appartiennent au corps $K(j(\omega), \sqrt{-m})$. Tout nombre algébrique primitif du corps K sera dit invariant de classe.

Je montrerai d'abord que les racines cubiques $\sqrt[3]{2}$ et $\sqrt[3]{3}$ sont fonctions rationnelles (dans le domaine $(\sqrt{-3})$) des invariants de classe. Je passerai ensuite au cas général.

§ 2.

Racines cubiques $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$.

Posons

$$q = e^{\pi i \omega}.$$

Considérons la fonction modulaire

$$f(\omega) = q^{-\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{2n-1})$$

$f(\omega)$ est liée à $j(\omega)$ par la relation

$$j(\omega) = \frac{(f(\omega)^{24} - 16)^3}{f(\omega)^{24}}$$

$j(\omega)$ est une fonction rationnelle de $f(\omega)$*).

Faisons $\omega = \sqrt{-3}$. On sait que $f(\sqrt{-3}) = \sqrt[3]{2}$, par suite $j(\sqrt{-3})$ est un nombre entier et $f(\sqrt{-3})^3$ est une fonction rationnelle de $j(\sqrt{-3})$; $f(\sqrt{-3}]^3$ est un invariant de classe.

De même $f(3\sqrt{-3})^3$ est un invariant de classe. En effet, $f(3\omega)^3$ est liée à $f(\omega)^3$ par une équation du 4^e degré donnée par Schlaefli**).

Cette équation est

$$\left(\frac{u}{v}\right)^6 + \left(\frac{v}{u}\right)^6 - (uv)^3 + \frac{8}{(uv)^3} = 0 \tag{3}$$

en posant $u = f(\omega)$, $v = f(3\omega)$.

Faisons $\omega = \sqrt{-3}$, $v^3 = 2x$; x est racine de

$$x^3 - 3x^2 - 3x - 1 = 0 \tag{3'}$$

x est un invariant de classe, puisque l'invariant $j(3\sqrt{-3})$ est racine d'une équation irréductible du 3^e degré, à coefficients entiers.

Or

$$\frac{1}{x} = \sqrt[3]{2} - 1.$$

*) H. Weber, l. c. § 21.

**) H. Weber, l. c. § 76 et § 97.

Par conséquent

$$(4) \qquad \sqrt[3]{2} = 1 + \frac{2}{f(\sqrt{-27})^3}$$

$\sqrt[3]{2}$ est une fonction rationnelle des invariants de classe. Posons maintenant, dans (3), $u^3 = f(\sqrt{-27})^3 = 2x$, $v^3 = 2y$

$$y_1 = \frac{f(3\sqrt{-27})^3}{2}$$

est racine de l'équation

$$(5) \qquad y^3 + (1-4x^3)y^2 + (1-4x^3)y + (1+2x-4x^3) = 0$$

y_1 est une fonction rationnelle de $j(3\sqrt{-27})$; c'est un invariant de classe, de même que les deux autres racines de (5).

Posons $2x+1 = t$ il vient, eu égard à (3'),

$$1 - 4x^3 = -3t^2; \quad 1 + 2x - 4x^3 = -x^4 = -\frac{t^3}{3}.$$

Le discriminant D de l'équation (5) est égal à $-3 \cdot 4t^6(9x+4)^2$.

Soit y_2 cette des racines imaginaires de (5) qui est située dans la partie supérieure du plan, y_3 sa conjuguée. Considérons les fonctions cycliques

$$\psi_1{}^3 = (y_1 + ry_2 + r^2 y_3)^3,$$
$$\psi_2{}^3 = (y_1 + r^2 y_2 + r y_3)^3,$$

en posant

$$r = e^{\frac{2\pi i}{3}}.$$

Or u_1, u_2, u_3 étant 3 indéterminées, on a

$$(u_1 + ru_2 + r^2 u_3)^3 = f_1{}^3 - \frac{9}{2} f_1 f_2 + \frac{27}{2} f_3 + \frac{3}{2}\sqrt{-3}\sqrt{D}$$

f_1, f_2, f_3 étant les trois fonctions symétriques élémentaires des u_i et D le discriminant.

On tire de là

$$\psi_1{}^3 = 2 \cdot 9t^3(x^2 - x - 1)^3,$$
$$\psi_2{}^3 = 4 \cdot 3 \cdot 27(xt)^3$$

et enfin

$$(6) \qquad \sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt[3]{3} = \frac{y_1 + r^2 y_2 + r y_3}{3x(2x+1)}.$$

Comme $\sqrt[3]{2}$ est une fonction rationnelle de x, la racine cubique $\sqrt[3]{3}$ est une fonction rationnelle de x et des y, dans le domaine $K(\sqrt{-3})$.

$\sqrt[3]{3}$ est une fonction rationnelle des invariants de Classe.

§ 3.

Cas général.

Il suffit de montrer que les racines cubiques de nombres premiers p supérieurs à 3 s'expriment en fonction rationnelle des invariants de classe.

Considérons les formes quadratiques proprement primitives de discriminant $-3p^2$. Soit (A, B, C) l'une de ces formes, ω celle des racines de

$$A\omega^2 + 2B\omega + C = 0$$

qui est située dans la partie supérieure du plan.

L'invariant singulier $j(\omega)$ est racine d'une équation irréductible à coefficients entiers, de degré h, h étant le nombre des classes proprement primitives de discriminant $-3p^2$.

Le nombre h est égal à $p+1$, si $\left(\frac{-3}{p}\right) = -1$ et à $p-1$, si $\left(\frac{-3}{p}\right) = +1$.

Dans le premier cas p est de la forme $6k-1$, dans le second de la forme $6k+1$.

L'équation des classes $H_m(u) = 0$ peut être formée directement de la manière suivante.

On sait que les fonctions modulaires $u = j(\omega)$ et $v = j(p\omega)$ sont liées, quelque soit ω, par une équation de transformation

$$F_p(u, v) = 0. \tag{7}$$

Son degré est égal à $p+1$, ses racines v sont les invariants $j(p\omega)$ et $j\left(\frac{c+\omega}{p}\right)$ $(c = 0, 1, \cdots p-1)$. Faisons maintenant $\omega = \sqrt{-3}$; $j(\sqrt{-3})$ est un nombre entier, $j(p\sqrt{-3})$ est un invariant proprement primitif de discriminant $-3p^2$.

Si donc p est de la forme $6k-1$, $F_p(u, v) = 0$ est l'équation des classes qu'il s'agissait de trouver. Si p est de la forme $6k+1$, l'équation (7) admet un facteur du second degré à coefficients entiers; on la divisera par ce facteur.

Mais les équations (7) ne sont pas faciles à former. Leurs coefficients sont très grands et croissent rapidement avec p.

Considérons la fonction modulaire $f(\omega)$.

Les fonctions $u = f(\omega)$ et $v = f(p\omega)$ sont liées par une équation de degré $p+1$ donnée par Schlaefli. Les autres racines v de cette équation sont $f\left(\frac{48c+\omega}{p}\right)$ $(c = 0, 1, \cdots p-1)$. Soit $\omega = \sqrt{-3}$, $u = f(\sqrt{-3}) = \sqrt[3]{2}$, les coefficients de l'équation en v sont des fonctions rationnelles de $\sqrt[3]{2}$.

Mais posons $x = v\sqrt[3]{2}$, si p est de la forme $6k-1$, et $x = \frac{v}{\sqrt[3]{2}}$, si p est de la forme $6k+1$.

En vertu de la forme particulière des équations de Schlaefli, les coefficients de l'équation en x sont des nombres entiers.

Si p est de la forme $6k-1$, le degré de l'équation en x est égal à h; si p est de la forme $6k+1$, ce degré est égal à $h+2$, mais l'équation en x admet un facteur du second degré à coefficients entiers, on la divisera par ce facteur.

D'autre part $j\left(\frac{48c+\omega}{p}\right)$ est une fonction rationnelle de la racine correspondante x. Il en résulte que les racines de l'équation en x s'expriment en fonction rationnelle des racines correspondantes de l'équation des classes. Les racines x sont des invariants de classe. A chaque racine de l'équation $H_m(u)=0$ correspond une racine déterminée de l'équation en x.

Prenons maintenant une forme quadratique $(2A, B, 2C)$ de 2^{me} espèce (improprement primitive) de discriminant $-3p^2$; B est impair,

$$B^2 - 4AC = -m = -3p^2.$$

L'argument correspondant ω' est racine de l'équation

$$A\omega'^2 + B\omega' + C = 0.$$

Si l'on pose, dans l'équation de transformation $F_2(u, v) = 0$, $u = j(\omega')$, les trois racines v sont représentées par $v = j(2\omega')$, $j\left(\frac{\omega'}{2}\right)$, $j\left(\frac{\omega'+1}{2}\right)$. Or AC étant impair, les trois formes correspondantes sont des formes proprement primitives de discriminant $-m$. On voit que les racines j de l'équation des classes et par conséquent les x peuvent être groupées trois à trois; j'appelerai racines conjuguées les trois racines d'un même groupe.

Considérons en particulier la forme $(2, p, 2p^2)$; l'argument ω' est égal à pr, en posant $r = e^{\frac{2\pi i}{3}}$. Les trois arguments conjugués sont

$$\omega_1 = 2pr; \quad \omega_2 = \frac{pr}{2}; \quad \omega_3 = \frac{1+pr}{2}.$$

Quelles sont les racines correspondantes v de l'équation de Schlaefli?

L'argument d'une racine v est l'un des nombres

$$p\sqrt{-3}, \quad \frac{48c+\sqrt{-3}}{p}.$$

Or ω_1 est équivalent à $p\sqrt{-3}$.

La substitution linéaire $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \delta_2 \end{vmatrix}$, δ_2 étant un entier, transforme ω_2 en $\frac{\delta_2 p + 1 + \sqrt{-3}}{p}$.

La substitution $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \delta_3 \end{vmatrix}$ transforme $\frac{p(r+1)}{2}$, qui est équivalent à ω_3, en $\frac{\delta_3 p - 1 + \sqrt{-3}}{p}$.

Les racines v correspondant à ω_1, ω_2, ω_3 sont donc $f(\Omega_1)$, $f(\Omega_2)$, $f(\Omega_3)$, en posant

$$\Omega_1 = p\sqrt{-3}; \quad \Omega_2 = \frac{\delta_2 p + 1 + \sqrt{-3}}{p}; \quad \Omega_3 = \frac{\delta_3 p - 1 + \sqrt{-3}}{p}$$

δ_2 et δ_3 étant deux nombres tels que $\delta_2 p + 1 \equiv \delta_3 p - 1 \equiv 0$ (mod. 48).

§ 4.

Propriétés des racines conjuguées $f(\Omega_1)$, $f(\Omega_2)$, $f(\Omega_3)$.

En même temps que la fonction $f(\omega)$, M. H. Weber a introduit les fonctions

$$f_1(\omega) = q^{-\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n-1}) \quad \text{et} \quad f_2(\omega) = \sqrt{2}\, q^{\frac{1}{12}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + q^{2n}).$$

La considération de ces fonctions*) va nous permettre de donner aux racines $f(\Omega_i)$ une forme particulièrement simple. Les trois fonctions de M. Weber sont liées par les relations

$$f(\omega + 1) = e^{-\frac{\pi i}{24}} f_1(\omega), \qquad f_1(\omega) = f_2\left(-\frac{1}{\omega}\right),$$

$$f_1(\omega + 1) = e^{-\frac{\pi i}{24}} f(\omega), \qquad f_1(\omega) f_2\left(\frac{\omega}{2}\right) = \sqrt{2}.$$

$$f_2(\omega + 1) = e^{+\frac{\pi i}{12}} f_2(\omega),$$

On en tire immédiatement

$$f(\Omega_1) = \sqrt{2}\, \frac{e^{-\frac{p\pi i}{24}}}{f_2(pr)}; \quad f(\Omega_2) = \sqrt{2}\, \frac{e^{-\frac{\delta_2 \pi i}{24}}}{f_1(pr)}; \quad f(\Omega_3) = \sqrt{2}\, \frac{e^{\frac{(p - \delta_3)\pi i}{24}}}{f(pr)}.$$

Posons

$$f(\Omega_1) = v_1; \quad f(\Omega_2) = v_2; \quad f(\Omega_3) = v_3.$$

Il vient

$$v_1^8 = 16\, \frac{e^{-\frac{p\pi i}{3}}}{f_2^8(pr)}; \quad v_2^8 = 16\, \frac{e^{\frac{p\pi i}{3}}}{f_1^8(pr)}; \quad v_3^8 = 16\, \frac{1}{f^8(pr)}$$

puisque

$$\delta_2 \equiv -p \text{ (mod. 6)} \quad \text{et} \quad \delta_3 \equiv p \text{ (mod. 6)}.$$

*) Les fonctions $f_1(\omega)$, $f_2(\omega)$ et $f_3(\omega)$ s'expriment très-simplement au moyen des fonctions $\varphi(\omega)$, $\psi(\omega)$ et $\chi(\omega)$ introduites par Hermite.

Considérons le trinome

$$\psi(\alpha) = \frac{1}{v_1{}^8} + \alpha \frac{1}{v_2{}^8} + \alpha^2 \frac{1}{v_3{}^8}$$

α étant une racine cubique imaginaire de l'unité.

En vertu de la relation $f^8 = f_1{}^8 + f_2{}^8$, ce trinôme s'annulle pour $\alpha = e^{\frac{2p\pi i}{3}}$.

Posons

$$\psi\left(e^{\frac{2p\pi i}{3}}\right) = \psi_1; \quad \psi\left(e^{-\frac{2p\pi i}{3}}\right) = \psi_2,$$

$\psi_1 = 0$, ψ_2 n'est pas nul.

D'autre part on a

$$\psi_1{}^3 = A - \frac{3}{2}\sqrt{-3D},$$

$$\psi_2{}^3 = A + \frac{3}{2}\sqrt{-3D}.$$

A étant une fonction symétrique entière des trois racines $\frac{1}{v_i{}^8}$, D leur discriminant.

Il en résulte que $\psi_2{}^3$ est une fonction symétrique des trois racines conjuguées, — c'est une fonction rationnelle de l'invariant correspondant $j(\omega') = j(pr)$ de 2^me^ espèce.

$$\psi_2{}^3 = R(j(\omega')) = 2A = 3\sqrt{-3D}$$

$-3D$ est le carré d'une fonction symétrique.

Posons

$$f^8(\omega') = \xi; \quad -f_1{}^8(\omega') = \eta; \quad -f_2{}^8(\omega') = \zeta.$$

Soient

D_1 le discriminant de ξ, η, ζ,

D_2 celui de $\xi,\ e^{\frac{2p\pi i}{3}}\eta,\ e^{-\frac{2p\pi i}{3}}\zeta$,

D_3 celui de $\xi,\ e^{-\frac{2p\pi i}{3}}\eta,\ e^{\frac{2p\pi i}{3}}\zeta$.

On a

$$D = \frac{1}{16^6} D_2,$$

$$D_1 = 4(j(\omega') - 3^3 \cdot 4^3),$$

puisque ξ, η, ζ sont racines de

$$u^3 - \gamma_2(\omega')u - 16 = 0,$$

la fonction modulaire $\gamma_2(\omega)$ étant définie par la relation

$$\gamma_2(\omega) = \frac{f(\omega)^{24} - 16}{f(\omega)^8} = \sqrt[3]{j(\omega)}.$$

Le discriminant des cubes ξ^3, η^3, ζ^3 est égal à $4j(\omega')^2(j(\omega')-3^3\cdot 4^3)$. Il en résulte que

$$D_2 \cdot D_3 = j^2(\omega').$$

Or D_2 appartient au corps $K(j(\omega'))$, par conséquent D_3 appartient au même corps.

D_2 et D_3 sont des nombres algébriques entiers appartenant au corps $K(j(\omega'))$. Par conséquent $(16\psi_2)^3$ est un nombre algébriques entier faisant partie du même corps $K(j(\omega'))$.

La norme de $(16\psi_2)^3$ étendue aux différentes racines $j(\omega')$ de 2e espèce est un diviseur de celle de $j(\omega')$, si l'on fait abstraction du facteur 3.

§ 5.

Racines de l'équation en x.

Soient x_1, x_2, x_3 les racines de l'équation en x qui correspondent aux racines v_1, v_2, v_3. Posons $e^{-\frac{2p\pi i}{3}} = \alpha$.

Le trinôme

$$\frac{1}{x_1^{\ 3}} + \alpha \frac{1}{x_2^{\ 3}} + \alpha^2 \frac{1}{x_3^{\ 3}}$$

appartient au corps $K\left(j(\omega), \sqrt{-3}\right)$. A chaque racine de 2e espèce correspond un trinôme analogue.

Soit Π le produit de tous ces trinômes.

Π est un nombre algébrique entier divisé par une puissance entière de 2.

Π^3 est un nombre entier ordinaire divisé par une puissance de 2. C'est un diviseur de la norme de $j(\omega')$, si l'on fait abstraction des facteurs 2 et 3.

Soit maintenant π un diviseur premier de Π^3, supérieur à 3.

Dans le corps $K\left(j(\omega), \sqrt{-3}\right)$ le nombre entier π se décompose en un produit d'idéaux

$$\pi = \mathfrak{p}_1^{e_1}\, \mathfrak{p}_2^{e_2} \cdots$$

$\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, $\cdots$ étant des idéaux premiers et e_1, e_2, $\cdots$ des nombres entiers.

Si π^k est la puissance maximum de π divisant Π^3, on aura

$$k e_i \equiv 0 \pmod{3}$$

quel que soit i.

Si donc les exposants e_i sont égaux à 1, k est divisible par 3; π^k est un cube.

Je partirai du *postulatum* suivant:

Aucun des exposants e_i ne peut être supérieur à 1, si π ne divise pas $2m$*).

*) Comp. H. Weber, Ellipt. Funct., p. 453. D. Hilbert, Jahresbericht der d. Math. Ver., 6, p. 94. H. Weber, Mathem. Annalen, t. 48, 49, 50.

Dans le cas qui nous occupe $m = 3p^2$.

Par conséquent, seul le nombre p, parmi les nombres premiers supérieurs à 3, pourrait être divisible par le carré d'un idéal $\mathfrak{p}_i$.

Voyons combien la norme de $j(\omega')$ contient de facteurs égaux à p.

§ 6.

Divisibilité de la norme de $j(\omega')$ par p.

La norme de $j(\omega')$ est divisible par p. En effet, $u = j(\omega)$ et $v = j(p\omega)$ sont liés par une équation de la forme

$$(u^p - v)(u - v^p) - pP = 0.$$

P étant un polynome en u, v de degré p, à coefficients entiers*)

La fonction $u = j(\omega)$ s'annulle pour $\omega = r$ et si l'on pose $v = p^{\frac{1}{p+1}} t$, t est un nombre algébrique entier. Du reste les racines $\gamma_2(\omega')$ étant aussi divisibles par $p^{\frac{1}{p+1}}$, les $j(\omega')$ sont divisibles par $p^{\frac{3}{p+1}}$. La norme de $j(\omega')$ est divisible par p. Voyons si elle est divisible par p^2.

Posons

$$\eta(\omega) = q^{\frac{1}{12}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^{2n}).$$

M. Kiepert à montré**), que les fonctions modulaires

$$y = p\left(\frac{\eta(p\omega)}{\eta(\omega)}\right)^2; \quad y_h = (-1)^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{\eta\left(\frac{12h+\omega}{p}\right)}{\eta(\omega)}\right)^2 \quad (h = 0, 1, \cdots p-1)$$

sont racines d'une équation de la forme

$$y^{p+1} + a_1 y^p + \cdots + a_p y + p = 0 \tag{8}$$

les coefficients $a_1, a_2, \cdots a_p$ étant des fonctions entières de $\gamma_2(\omega)$ et $\gamma_3(\omega)$, à coefficients entiers***), de la forme

$$P(j) \cdot \gamma_2^k \cdot \gamma_3^l$$

$P(j)$ étant un polynome en $j(\omega)$ à coefficients entiers, k et l deux nombres entiers.

Si $p \equiv -1 \pmod{6}$, le coefficient a_p est de la forme

$$P(j) \cdot \gamma_2 \; (p \equiv 5 \pmod{12}) \quad \text{ou} \quad P(j) \cdot \gamma_2 \cdot \gamma_3 \; (p \equiv 11 \pmod{12}).$$

---

*) H. Weber, Ellipt. Functionen, § 72.

**) Journal für die Mathem. t. 87, 88, 95. Mathem. Annalen, t. 26.

***) $\gamma_3(\omega)$ est la fonction $\frac{(f(\omega)^{24}+8)(f_1(\omega)^8 - f_2(\omega)^8)}{f(\omega)^8} = \sqrt{j(\omega) - 27 \cdot 64}$.

Si $p \equiv 1$ (mod. 6), a_p est de la forme

$$P(j) \ (p \equiv 1 \ (\text{mod. } 12)) \quad \text{ou} \quad P(j)\gamma_3 \ (p \equiv 7 \ (\text{mod. } 12)).$$

Premier cas; $p \equiv -1$ (mod. 6).

Posons $\omega = pr$. Je dis que toutes les racines de l'équation (8) sont divisibles par $p^{\frac{1}{p(p+1)}}$. Si l'on remplace, en effet, ω par $\frac{12h+\omega}{p}$, y se change en $\frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}} p}{y_h}$, et par conséquent y_h est racine d'une équation dont tous les coefficients sont divisibles par p, sauf celui de y_h^{p+1} qui est 1 et celui de y_h^p qui est égal à $(-1)^{\frac{p+1}{2}} \bar{a}_p$, $\bar{a}_p$ étant le transformé de a_p. Or $\bar{a}_p$ contient le facteur $\gamma_2\left(\frac{12h+\omega}{p}\right)$ qui pour $\omega = pr$ est divisible par $p^{\frac{1}{p(p+1)}}$. Si donc on pose $y_h = p^{\frac{1}{p(p+1)}} t$, t est un nombre algébrique entier. En remplaçant ω par $p\omega$, on démontre de même que y est divisible par $p^{\frac{1}{p(p+1)}}$. Il en résulte que pour $\omega = pr$ tous les coefficients a_i de l'équ. (8) sont divisibles par $p^{\frac{1}{p(p+1)}}$, et comme pour $\omega = r$ les fonctions $j(\omega)$ et $\gamma_2(\omega)$ sont nulles, tandis que $\gamma_3(\omega)$ est premier à p, les coefficients a_i sont tous divisibles par p, pour $\omega = r$.

Remplaçons maintenant ω par $\frac{\omega}{p}$, dans (8); la racine y se change en $\frac{(-1)^{\frac{p-1}{1}} p}{y_0}$. Faisons $\omega = pr$. Tous les coefficients $\bar{a}_i$ de l'équation transformée sont divisibles par p et si l'on pose $y_0 = p^{\frac{p}{p+1}} t$, on voit que t est un nombre algébrique entier. Par conséquent la racine y_0 est divisible par $p^{\frac{p}{p+1}}$.

D'autre part, en vertu de l'équ. (8) $a_p y_0 + p$ est divisible par y_0^2. Par conséquent $a_p y_0$ est divisible par p, mais le quotient $\frac{a_p y_0}{p}$ est premier à p. Il en résulte que $\gamma_2(pr) \cdot p^{-\frac{1}{p+1}}$ et $j(pr) \cdot p^{-\frac{3}{p+1}}$ sont premiers à p.

Par conséquent la norme de $j(\omega')$ étendue aux racines de l'équation des classes de 2^e^ espèce n'est pas divisible par p^2.

2^e^ *cas*. $p \equiv 1$ (mod. 6).

Le coefficient a_p de l'équation (8) n'étant pas divisible par $\gamma_2(\omega)$, le procédé dont nous nous sommes servi ne s'applique plus, mais il est probable que le résultat que nous avons établi subsiste.

§ 7.

Racines cubiques de nombres premiers de la forme $6k-1$.

Il résulte de l'analyse précédente que le produit Π^3 n'est pas divisible par p^2, mais est il divisible par p?

Je vais montrer que v_i et v_j étant 2 racines quelconques de l'équation de Schlaefli, la différence $v_i - v_j$ et divisible par $p^{\frac{1}{p+1}}$. En effet, léquation de Schlaefli peut être mise sous la forme

$$(u^p - v)(u - v^p) - pP = 0,$$

P étant un polynome en u et v*)

Dans le cas qui nous occupe $u = \sqrt[3]{2}$.

Si maintenant on pose $v = u^p + p^{\frac{1}{p+1}} t$, il vient

$$p^{\frac{1}{p+1}} t \left(u^{p^2} - u + p^{\frac{p}{p+1}} t^p\right) - pP' = 0.$$

P' étant un polynome en t.

Or, si p est de la forme $6k-1$, $u^{p^2} - u \equiv 0 \pmod{p}$; par conséquent t est un nombre algébrique entier et

$$v_i - v_j \equiv 0 \left(\text{mod.}\, p^{\frac{1}{p+1}}\right).$$

Le trinome $\frac{1}{x_1^{\,8}} + \alpha \frac{1}{x_2^{\,8}} + \alpha^2 \frac{1}{x_3^{\,8}}$ étant divisible par $p^{\frac{1}{p+1}}$, le produit Π^3 est divisible par p.

Par conséquent

$$\Pi^3 = 2^k 3^l n^3 p,$$

n étant un entier, k et l deux entiers positifs ou négatifs.

En extrayant la racine cubique, on aura $\sqrt[3]{p}$ en fonction rationnelle d'invariants de classe.

§ 8.

Exemples. Racines cubiques $\sqrt[3]{5}$ et $\sqrt[3]{7}$.

L'équation de Schlaefli, pour $p = 5$, est

$$v^6 - u^5 v^5 + 4uv + u^6 = 0.$$

Faisons $x = \sqrt[3]{2} . v$, l'équation deviendra

$$x^6 - 4x^5 + 16x + 16 = 0.$$

---

*) H. Weber, Ellipt. Funct., § 77.

Elle se décompose, par l'adjonction de $\sqrt{5}$, en 2 équations du 3-degré; il vient

$$x^3 - 2x^2 - 2x(1 \pm \sqrt{5}) - 4 = 0.$$

A l'invariant de 2e espèce $j(5r)$ correspondent les racines de l'équation*)

$$x^3 - 2x^2 - 2x(1 + \sqrt{5}) - 4 = 0. \tag{9}$$

Or $j(5r)$ peut être calculé très simplement à l'aide d'un procédé qui à été indiqué par M. Weber**). On a

$$j(5r) = -2^{15} 3^3 \sqrt{5}(2 + \sqrt{5})^5 (4 + \sqrt{5})^3.$$

La norme de $j(5r)$ est

$$-2^{30} \cdot 3^6 \cdot 5 \cdot 11^3.$$

D'autre part le discriminant D_2 est égal à

$$2^8 \cdot 3^3 \cdot 5(2 + \sqrt{5})^4 (4 + \sqrt{5})^6.$$

C'est un diviseur de $j(5r)^2$; la racine carrée de D_2 est un nombre du domaine $K(5r)$.

Il est aisé d'en déduire la valeur du produit Π^3 et par conséquent $\sqrt[3]{5}$ en fonction des invariants de classe.

Mais on obtient une expression beaucoup plus simple en partant des fonctions cycliques

$$\psi^3 = (x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3)^3$$

x_1, x_2, x_3 étant les racines de l'équation (9) et α une racine cubique imaginaire de l'unitè.

Si x_1 est la racine réelle, x_2 la racine imaginaire située dans la partie supérieure du plan et x_3 sa conjuguée, on a

$$(x_1 + r x_2 + r^2 x_3)^3 = 16 \cdot 5,$$
$$(x_1 + r^2 x_2 + r x_3)^3 = 4(20 + 9\sqrt{5}).$$

On en tire

$$2\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{5} = x_1 + r x_2 + r^2 x_3,$$

en posant $r = e^{\frac{2\pi i}{3}}$.

$\sqrt[3]{7}$. Le même procédé donne $\sqrt[3]{7}$ en fonction des invariants de classe. Les fonctions modulaires $u = f(\omega)$ et $v = f(7\omega)$ sont liées par l'équation de Schlaefli

$$v^8 - u^7 v^7 + 7u^4 v^4 - 8uv + u^8 = 0.$$

Posons

$$u = \sqrt[3]{2}, \quad v = x\sqrt[3]{2}.$$

---

*) Comp. H. Weber, l. c. p. 502. Dans l'équation donnée par M. Weber, le second membre doit être remplacé par $2\sqrt{5}\,x$.

**) l. c. § 107.

Le premier membre de l'équation en x est divisible par $x^2 + x + 1$; en divisant par ce facteur on a une équation du 6e degré dont les racines sont les invariants de 1e espèce et qui se décompose, par l'adjonction de $\sqrt{21}$, en deux équations du 3e degré.

L'invariant

$$x_1 = \frac{f(7\sqrt{-3})}{\sqrt[3]{2}}$$

est racine de

$$x^3 - \frac{1}{2}(5 + \sqrt{21})x^2 + \frac{1}{2}(3 + \sqrt{21})x - 1 = 0.$$

Soit x_2 celle des racines imaginaires qui est située dans la partie supérieure du plan, x_3 sa conjuguée.

Il vient

$$(x_1 + rx_2 + r^2x_3)^3 = 28,$$

$$(x_1 + r^2x_2 + rx_3)^3 = 28 + 6\sqrt{21}.$$

On en tire

$$\sqrt[3]{4}\,\sqrt[3]{7} = x_1 + rx_2 + r^2x_3$$

x_1, x_2, x_3 sont les invariants du genre principal.

Genève, 1901.

Asymptotische Darstellung von Lösungen linearer Differentialgleichungen.

Von

Walther Jacobsthal in Strassburg i./Els.

Sucht man eine homogene lineare Differentialgleichung durch eine Potenzreihe zu befriedigen, die der Differentialgleichung formal genügt, so ist für die Frage nach der Convergenz dieser Reihe bekanntlich der Grad μ der determinirenden Fundamentalgleichung entscheidend*). Ist μ gleich der Ordnung n der Differentialgleichung, so gehört zu jeder Wurzel der determinirenden Fundamentalgleichung eine *convergente* Reihe, und das Entwickelungscentrum der Potenzreihe heisst eine *Stelle der Bestimmtheit.* Ist dagegen $\mu < n$, so sind die Reihen bald divergent, bald convergent, und wir sprechen dann von einer *Stelle der Unbestimmtheit.*

Aber selbst im Falle der Divergenz sind die formalen Reihen nicht ohne Bedeutung, sondern sie stellen i. A., wie Weber, Poincaré, Horn und Kneser gezeigt haben, angenäherte oder *asymptotische Integrale***) der Differentialgleichung dar. Bei der Untersuchung solcher divergenter Reihen haben die meisten Autoren sich auf den Fall beschränkt, dass man sich in *ganz bestimmter Weise* der Unbestimmtheitsstelle nähert. Erst Horn hat die *ganze Umgebung* der Unbestimmtheitsstellen in Betracht gezogen.

Dasselbe Ziel, nämlich das Verhalten in der gesammten Umgebung der Unbestimmtheitsstelle, sucht die vorliegende Arbeit auf einem anderen Wege als Horn zu erreichen, und zwar für eine gewisse Classe von linearen

*) Vgl. Schlesinger, Handbuch der linearen Differentialgleichungen, Bd. I, S. 154 ff.

**) Weber, Math. Ann. Bd. 37. — Poincaré, Acta math., Bd. 8. — Horn, Math. Ann. Bd. 49, 50, 51 und Crelle's Journal Bd. 116—119. — Kneser, Math. Ann. Bd. 49 und Crelle's Journal Bd. 116, 117.

Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Es ergiebt sich dabei das Resultat, dass die divergente Reihe in der ganzen Umgebung der Unbestimmtheitsstelle ein Integral der betreffenden Differentialgleichung asymptotisch darstellt).*

1.

Die zu behandelnde Classe von Differentialgleichungen 2. Ordnung ist dadurch charakterisirt, dass sie eine *zweigliedrige Recursionsformel* und *eine Stelle der Unbestimmtheit* mit $\mu = 1$ hat. Auf diese Classe lassen sich eine Reihe von Differentialgleichungen der Physik, wie die der Bessel'schen und der *Kugelfunctionen* durch einfache Substitutionen und Specialisirungen der Constanten zurückführen. Ihr allgemeiner Typus ist, wenn man die Unbestimmtheitsstelle ins Unendliche verlegt:

$$z^2 \frac{d^2u}{dz^2} + z(A_1 + B_1 z^h) \frac{du}{dz} + (A_2 + B_2 z^h) u = 0 \qquad B_1 \neq 0. \tag{1}$$

Der Punkt $z = 0$ ist zwar singulär, aber doch Stelle der Bestimmtheit. Wir bringen nun (1) auf eine Normalform, und setzen zu dem Ende $z^h = \xi$; dann wird (1):

$$\xi^2 \frac{d^2u}{d\xi^2} + \xi(a_1 + b_1 \xi) \frac{du}{d\xi} + (a_2 + b_2 \xi) u = 0, \tag{2}$$

wobei

$$(h-1) + A_1 = a_1 h, \qquad B_1 = b_1 h,$$
$$A_2 = a_2 h^2, \qquad B_2 = b_2 h^2$$

gesetzt ist. Bestimmen wir ferner r als Wurzel der Gleichung

$$r(r-1) + r a_1 + a_2 = 0,$$

substituiren $u = \xi^r y$ und führen die Bezeichnungen ein:

$$r + \frac{b_2}{b_1} = \alpha, \qquad r + a_1 - \frac{b_2}{b_1} = \beta,$$

so geht (2) über in:

$$\xi \frac{d^2\eta}{d\xi^2} + [(\alpha + \beta) + b_1 \xi] \frac{d\eta}{d\xi} + \alpha b_1 y = 0. \tag{3}$$

Wegen $b_1 \neq 0$ kann man hierin $b_1 \xi = x$ setzen, und erhält so die gesuchte *Normalform:*

$$P(y) \equiv x \frac{d^2y}{dx^2} + [(\alpha + \beta) + x] \frac{dy}{dx} + \alpha y = 0. \tag{N}$$

---

*) Die hier angestellte Untersuchung bildet in theilweise anderer Behandlung den Inhalt der Dissertation des Verfassers „Ueber die asymptotische Darstellung der Integrale einer gewissen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung" (Strassburg 1899).

Die Gleichung (N) hat, wie die Ausgangsgleichung (1), im Nullpunkte eine singuläre Stelle der Bestimmtheit, und im Unendlichkeitspunkt eine Stelle der Unbestimmtheit. Uns interessirt hier die (divergente) Entwicklung in der Umgebung des Unendlichen. Dennoch wollen wir auch die (convergenten) Entwickelungen in der Umgebung des Nullpunktes herstellen, und zwar aus zwei Gründen: erstens brauchen wir sie als Hülfsmittel bei unserer eigentlichen Aufgabe; zweitens aber lassen sie den *practischen* Nutzen der asymptotischen Darstellungen scharf hervortreten. Denn die Entwickelungen im Nullpunkt sind für grosse Werthe des Argumentes sehr schlecht convergent: dagegen erhalten wir practisch brauchbare Entwickelungen, wenn wir diese convergenten Reihen, wie am Schlusse dieser Arbeit geschieht, ausdrücken durch die asymptotischen Darstellungen.

Wir gehen nun zu den Entwickelungen über. Die *Recursionsformel* von (N) ist:

bei $x = 0$:

(a) $g_\nu[(\alpha+\beta)(\varrho+\nu)+(\varrho+\nu)(\varrho+\nu-1)]+g_{\nu-1}[\alpha+\varrho+\nu-1]=0;$

bei $x=\infty$:

(b) $g'_\nu[\alpha+\varrho'-\nu]+g'_{\nu-1}[(\alpha+\beta)(\varrho'-\nu+1)+(\varrho'-\nu)(\varrho'-\nu+1)]=0.$

Die Formel (b) wird erhalten, indem man in (N) für y die Reihe

$$g'(x,\varrho')=x^{\varrho'}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{g'_\nu}{x^\nu} \tag{4}$$

einsetzt und dann nach Potenzen von x ordnet:

$$P(g'(x,\varrho'))\equiv\sum_{\nu=1}^{\infty}x^{\varrho'-\nu}[g'_\nu(\alpha+\varrho'-\nu)+g'_{\nu-1}((\alpha+\beta)(\varrho'-\nu+1) + (\varrho'-\nu+1)(\varrho'-\nu))]. \tag{5}$$

Das Nullsetzen des Coefficienten von $x^{\varrho'-\nu}$ liefert dann Gleichung (b). Wir bemerken, dass (b) sofort die *Divergenz* der Entwicklung (4) erkennen lässt, denn $\frac{g'_\nu}{g'_{\nu-1}}$ wird mit unendlich wachsendem ν unendlich.

Zur expliciten Darstellung der Reihen benutzt man zweckmässig die Gauss'sche Function*):

$$\Pi(x)=\int_0^\infty e^{-s}s^x\,ds=\Gamma(x+1); \tag{6}$$

diese Function genügt der für uns fundamentalen Gleichung

$$x(x-1)(x-2)\cdots(x-k+1)=\frac{\Pi(x)}{\Pi(x-k)}. \tag{7}$$

*) Gauss, Werke Bd. III, Disqu. gen. circa seriem etc.

Für *ganzzahliges* $x = m$ ist insbesondere:

(8) $$\Pi(m) = m(m-1)(m-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 = m!$$

Unter Benutzung von (7) und (8) erhalten wir aus (a) in der Umgebung des *Nullpunkts* die *convergenten* Entwickelungen:

(9) $$Y_1 = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Pi(\nu+\alpha-1)}{\Pi(\nu)\,\Pi(\nu+\alpha+\beta-1)} \cdot (-x)^\nu,$$
$$Y_2 = x^{1-\alpha-\beta} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Pi(\nu-\beta)}{\Pi(\nu)\,\Pi(\nu-\alpha-\beta+1)} \cdot (-x)^\nu,$$

wobei

$$g_0^{(1)} = \frac{\Pi(\alpha-1)}{\Pi(\alpha+\beta-1)} \quad \text{und} \quad g_0^{(2)} = \frac{\Pi(-\beta)}{\Pi(1-\alpha-\beta)}$$

gesetzt ist.

Aehnlich erhalten wir aus (b) in der *Umgebung des Unendlichen* *formell* die *divergente* Entwickelung:

(10) $$y = \frac{1}{x^\alpha} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Pi(\alpha+\nu-1)}{\Pi(\beta-\nu-1)\,\Pi(\nu)} \cdot \frac{1}{(-x)^\nu},$$

wobei

$$g_0' = \frac{\Pi(\alpha-1)}{\Pi(\beta-1)}$$

gesetzt ist.

Wir bemerken noch, dass y im Fall eines *ganzzahligen* β eine *rationale* Function von x wird, weil bekanntlich die Π-Function für ganzzahliges Argument unendlich ist. Sollte α eine negative ganze Zahl sein, so würde y unbestimmt: für diesen Fall wird später (S. 136ff.) eine Recursionsformel abgeleitet werden, die diesen Fall auf den eines positiven α zurückzuführen gestattet.

2.

Die Summe auf der rechten Seite von (10) ist unendlich. Soll also überhaupt von einer Darstellung des Integrals y durch diese Summe die Rede sein, so müssen wir eine *endliche* Gliederzahl nehmen. Wir setzen daher

(11) $$S_n = \frac{1}{x^\alpha} \cdot \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{\Pi(\alpha+\nu-1)}{\Pi(\beta-\nu-1)\Pi(\nu)} \cdot \frac{1}{(-x)^\nu}$$

und schreiben:

(12) $$y = S_n + R_n.$$

Wie gross n gewählt werden muss, damit R_n möglichst klein werde, ergiebt die weitere Untersuchung. —

Die nächsten Schritte bezwecken, *das Restglied R_n in der Form eines bestimmten Integrales* zu erhalten. Zu dem Ende setzen wir in die Normalform (N) statt y die Summe S_n ein, d. h. wir bilden $P(S_n)$. Ist nach der früheren Bezeichnung

$$S_n = x^{\varrho'} \cdot \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{g'_\nu}{x^\nu},$$

so hat man zunächst nach (5):

$$P(S_\infty) = \sum_{\nu=1}^{n-1} x^{\varrho'-\nu}[g'_\nu(\alpha+\varrho'-\nu) + g'_{\nu-1}((\alpha+\beta)(\varrho'-\nu+1) + (\varrho'-\nu)(\varrho'-\nu+1))]$$
$$+ \sum_{\nu=n}^{\infty} x^{\varrho'-\nu}[g'_\nu(\alpha+\varrho'-\nu) + g'_{\nu-1}((\alpha+\beta)(\varrho'-\nu+1) + (\varrho'-\nu)(\varrho'-\nu+1))].$$

Ersetzen wir nun S_∞ durch S_n, so können wir dies so auffassen, als ob wir

$$g'_n = 0;\ g'_{n+1} = 0;\ g'_{n+2} = 0; \cdots$$

gemacht hätten; wir erhalten daher:

$$P(S_n) = \sum_{\nu=1}^{n-1} \{x^{\varrho'-\nu}[g'_\nu(\alpha+\varrho'-\nu) + g'_{\nu-1}((\alpha+\beta)(\varrho'-\nu+1) + (\varrho'-\nu)(\varrho'-\nu+1))]\}$$
$$+ x^{\varrho'-n} g'_{n-1}[(\alpha+\beta)(\varrho'-n+1) + (\varrho'-n)(\varrho'-n+1)].$$

Der Ausdruck unter dem Summenzeichen verschwindet wegen (b). Führen wir also $\varrho' = -\alpha$ und den Werth von g'_{n-1} gemäss (11) ein, so erhalten wir unter gleichzeitiger Anwendung von (7) und (8)

$$(13)\qquad P(S_n) = (-1)^n \cdot \frac{n}{x^{\alpha+n}} \cdot \frac{\Pi(\alpha+n-1)}{\Pi(\beta-n-1)\Pi(n)} = \Phi(x).$$

Wir wollen nun die inhomogene Differentialgleichung

$$(14)\qquad P(S_n) = \Phi(x)$$

integriren*) unter der Voraussetzung, dass wir von der homogenen Differentialgleichung

$$(15)\qquad P(y) = 0$$

ein Fundamentalsystem y_1, y_2 kennen**). Nach der Methode der Variation der Constanten ergiebt sich dann bekanntlich als vollständiges Integral von (14):

$$(16)\qquad S = ay_1 + by_2,$$

*) Dieser Gedanke stammt von H. Weber l. c.

**) Die Herstellung eines für unsere Zwecke geeigneten Fundamentalsystems y_1, y_2 ist Aufgabe des nächsten Paragraphen.

wo a und b als Functionen von x aus den Gleichungen definirt sind:

$$(17)\qquad \begin{aligned} D\frac{da}{dx} &= -y_2\cdot\Phi(x), \\ D\frac{db}{dx} &= +y_1\cdot\Phi(x). \end{aligned}$$

Hierbei ist

$$(18)\qquad D = y_1\frac{dy_2}{dx} - y_2\frac{dy_1}{dx} = C\cdot x^{-(\alpha+\beta)}\cdot e^{-x}.$$

Der Werth der Constanten C hängt von der Wahl des Fundamentalsystems y_1, y_2 ab. Bei dem Fundamentalsystem, das wir im nächsten Paragraphen einführen werden, ist $C = -1$; diesen Werth wollen wir schon jetzt einsetzen, um das C nicht fortwährend mitführen zu müssen. Also:

$$(18')\qquad D = -x^{-(\alpha+\beta)}\cdot e^{-x}.$$

Hieraus und aus (17) folgt, wenn man noch die Integrationsgrenzen vertauscht und die Integrationsvariabele ξ einführt:

$$\begin{aligned} a &= -\int_x^\infty \Phi(\xi)e^{\xi}\xi^{\alpha+\beta}y_2(\xi)\,d\xi + A, \\ b &= \int_x^\infty \Phi(\xi)e^{\xi}\xi^{\alpha+\beta}y_1(\xi)\,d\xi + B. \end{aligned}$$

Das vollständige Integral von (14) ist daher nach (16):

$$(19)\qquad S = Ay_1 + By_2 - \int_x^\infty \Phi(\xi)e^{\xi}\xi^{\alpha+\beta}[y_1(x)y_2(\xi) - y_2(x)y_1(\xi)]\,d\xi.$$

Da nun S_n selbst ein Integral von (14) ist, so geht *bei geeigneter Bestimmung der Constanten A und B* das S in S_n über; man erhält daher aus (19), wenn man noch bedenkt, dass $Ay_1 + By_2 = y$ ein particulares Integral von (N) ist:

$$(20)\qquad \begin{aligned} y &= S_n + R_n, \\ R_n &= \int_x^\infty \Phi(\xi)e^{\xi}\xi^{\alpha+\beta}[y_1(x)y_2(\xi) - y_2(x)y_1(\xi)]\,d\xi. \end{aligned}$$

Damit ist das Restglied in Form eines bestimmten Integrals ausgedrückt. Für die Abschätzung dieses Restgliedes ist es natürlich wesentlich, wie wir uns das Fundamentalsystem y_1, y_2 gewählt denken. Wir werden nun im nächsten Paragraphen die Gleichung (N) durch bestimmte Integrale integriren, die als Parameter x enthalten, und dann diese Integrale zum Fundamentalsystem y_1, y_2 wählen.

3.

Um die Gleichung (N) durch ein bestimmtes Integral zu integriren, könnten wir die *Transformation von Laplace**) anwenden. Wir ziehen hier einen anderen Weg vor. Die Gleichung (N) lässt sich nämlich als Specialfall der Gauss'schen Differentialgleichung**):

$$\xi(1-\xi)\frac{d^2y}{d\xi^2}+[c-(a+b+1)\xi]\frac{dy}{d\xi}-aby=0 \tag{21}$$

auffassen. Substituirt man hierin:

$$\begin{aligned} a &= -m, & b &= \alpha, \\ c &= \alpha+\beta, & \xi &= \frac{x}{m}, \end{aligned} \tag{22}$$

so erhält man nach Multiplication mit $\frac{1}{m}$:

$$x\left(1-\frac{x}{m}\right)\frac{d^2y}{dx^2}+\left[(\alpha+\beta)+\left(1-\frac{\alpha+1}{m}\right)x\right]\frac{dy}{dx}+\alpha y=0.$$

Dies geht für $m=\infty$ über in

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+[(\alpha+\beta)+x]\frac{dy}{dx}+\alpha y=0,$$

d. i. in unsere Normalform (N).

Nun wird (21) bekanntlich befriedigt durch das Integral

$$f(\xi)=C\cdot\int_0^1 u^{b-1}(1-u)^{c-b-1}(1-\xi u)^{-a}du. \tag{23}$$

Macht man hierin ausser den Substitutionen (22) noch die Substitution

$$u=\frac{s}{m\xi}, \tag{24}$$

so erhält man für $m=\infty$ als Integral von (N):

$$C\cdot\frac{1}{x^\alpha}\int_0^x e^{-s}s^{\alpha-1}\left(1-\frac{s}{x}\right)^{\beta-1}ds.$$

Wir setzen aus Zweckmässigkeitsgründen $C=\frac{1}{\Pi(\beta-1)}$, und erhalten so folgendes Integral von (N):

$$H(\alpha,\beta,x)=\frac{1}{\Pi(\beta-1)}\cdot\frac{1}{x^\alpha}\int_0^x e^{-s}s^{\alpha-1}\left(1-\frac{s}{x}\right)^{\beta-1}ds. \tag{25}$$

---

*) Vgl. z. B. Picard, Traité d'analyse, t. III, p. 372 ff.

**) Gauss, Werke, Bd. III, Determinatio seriei nostrae etc.

Für unsere weitere Untersuchung würde es sich als störend herausstellen, dass in (25) die obere Integrationsgrenze variabel ist. Um diesem Uebelstande abzuhelfen, denken wir uns das Integral (25) *ohne Grenzen* in die Differentialgleichung (N) eingesetzt. Bezeichnen wir das *unbestimmte* Integral für den Augenblick mit $H'(\alpha, \beta, x)$, so erhalten wir nach einer etwas umständlichen Rechnung:

$$P(H'(\alpha,\beta,x)) = \frac{1-\beta}{\Pi(\beta-1)}\cdot\frac{1}{x^{\alpha+1}}\int e^{-s}s^{\alpha-1}\left(1-\frac{s}{x}\right)^{\beta-3}\left[\frac{s}{x}(s-\alpha-\beta+2)\right.$$
$$\left.+(\alpha-s)\right]ds.$$

Dieser Ausdruck lässt sich auf die Form bringen:

$$(26)\quad \begin{aligned} P(H'(\alpha,\beta,x)) &= \frac{-1}{\Pi(\beta-2)}\cdot\frac{1}{x^{\alpha+1}}\int\frac{d}{ds}\left[e^{-s}s^{\alpha}\left(1-\frac{s}{x}\right)^{\beta-2}\right]ds \\ &= -\frac{1}{\Pi(\beta-2)}\cdot\frac{1}{x^{\alpha+1}}\int\frac{d}{ds}\varphi(s,x)\,ds. \end{aligned}$$

Hieraus sehen wir, dass wir nur die Integrationsgrenzen so zu wählen brauchen, dass $\varphi(s,x)$ an ihnen verschwindet. Dies ist u. A. der Fall für die Grenzen 0 und ∞. Wir haben damit ein Integral von (N) in der definitiven Gestalt:

$$(27)\quad J(\alpha,\beta,x) = \frac{1}{\Pi(\beta-1)}\cdot\frac{1}{x^{\alpha}}\int_0^{\infty} e^{-s}s^{\alpha-1}\left(1-\frac{s}{x}\right)^{\beta-1}ds.$$

Dies Integral hat offenbar *Sinn und Bedeutung nur, so lange* $\Re(\alpha)$, *d. h. der reelle Theil von* α *positiv ist.* Um unserer Untersuchung Allgemeingültigkeit zu geben, könnten wir statt der auf reellem Wege erstreckten Integrale Schleifenintegrale einführen. Da dies aber Unzuträglichkeiten mit sich führt, ziehen wir es vor, eine *Recursionsformel* aufzustellen, die den Fall $\Re(\alpha) < 0$ auf $\Re(\alpha) > 0$ zurückführt. *Wir dürfen also von jetzt ab stets* $\Re(\alpha) > 0$ *voraussetzen.* —

Ableitung der Recursionsformel. Wir wollen eine Relation aufstellen zwischen:

$$J(\alpha,\beta,x),\quad J(\alpha-1,\beta-1,x),\quad J(\alpha+1,\beta+1,x).$$

Hierzu benutzen wir die *Gauss'schen Relationen zwischen benachbarten F-Functionen**). Da bekanntlich $F(a,b,c,\xi)$ ein Integral von (21) ist, so ist

$$\lim_{m=\infty} F\left(-m,\alpha,\alpha+\beta,\frac{x}{m}\right)$$

wegen (22) ein Integral von (N). Setzen wir der Kürze wegen:

$$\begin{aligned} F(a,b,c,\xi) &= F, \\ F(a,b-1,c-2,\xi) &= F_1, \\ F(a,b+1,c+2,\xi) &= F_2, \end{aligned}$$

*) Gauss, Werke, Bd. III, S. 130, Relationes inter functiones contiguas.

so besteht eine Relation von der Form:

$$gF + g_1F_1 + g_2F_2 = 0,$$

wo die g rationale Functionen von ξ sind, die sich durch Elimination aus den bei Gauss a. a. O. stehenden Gleichungen [12], [15], [10], [13], [15] berechnen lassen. Führt man nun für a, b, c, ξ die Werthe aus (22) ein und lässt m unendlich werden, so fallen in g, g_1, g_2 offenbar alle Glieder fort, die nur mit $\xi = \frac{x}{m}$ multiplicirt sind, während die mit $a\xi = -x$ multiplicirten stehen bleiben. Man erhält so:

$$\begin{aligned}(28)\qquad &\Big[(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta-2)(\alpha+\beta-1)\\ &\quad + x(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)[\alpha(-1)-\beta(\beta-1)]\Big]\cdot F\\ &\quad -(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta-2)(\alpha+\beta-1)\cdot F_1\\ &\qquad\qquad + x^2\alpha\beta(\alpha+\beta-2)\cdot F_2 = 0.\end{aligned}$$

Diese Relation wollen wir nun zunächst auf die Function $H(\alpha, \beta, x)$ übertragen.

Entwickeln wir in (23) den Ausdruck $(1-\xi u)^{-a}$ nach dem binomischen Lehrsatz, was statthaft ist, so lange $\xi < 1$, und integriren gliedweise, so erhalten wir*):

$$f(\xi) = C\cdot B(b, c-b)\cdot F(a, b, c, \xi) = C\cdot\frac{\Pi(b-1)\Pi(c-b-1)}{\Pi(c-1)}F(a, b, c, \xi).$$

Daher ergiebt sich aus (25), wenn man unter m eine unendlich grosse Zahl versteht:

$$\begin{aligned}F &= F\left(-m, \alpha, \alpha+\beta, \frac{x}{m}\right) &&= \frac{\Pi(\alpha+\beta-1)}{\Pi(\alpha-1)}\cdot H(\alpha, \beta, x),\\ F_1 &= F\left(-m, \alpha-1, \alpha+\beta-2, \frac{x}{m}\right) &&= \frac{\Pi(\alpha+\beta-3)}{\Pi(\alpha-2)}\cdot H(\alpha-1, \beta-1, x),\\ F_2 &= F\left(-m, \alpha+1, \alpha+\beta+2, \frac{x}{m}\right) &&= \frac{\Pi(\alpha+\beta+1)}{\Pi(\alpha)}\cdot H(\alpha+1, \beta+1, x).\end{aligned}$$

Setzt man für den Augenblick

$$\frac{\Pi(\alpha+\beta+1)}{\Pi(\alpha)} = c,$$

so wird wegen (7):

$$\begin{aligned}F &= c\cdot\frac{\alpha}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}\cdot H(\alpha, \beta, x),\\ F_1 &= c\cdot\frac{\alpha(\alpha-1)}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)(\alpha+\beta-2)}\cdot H(\alpha-1, \beta-1, x),\\ F_2 &= c\cdot H(\alpha+1, \beta+1, x).\end{aligned}$$

*) Vgl. z. B. F. Klein, Hypergeom. Function (autogr. Vorl.) S. 10f. — Unter $B(p, q)$ wird das bekannte Euler'sche Integral erster Gattung verstanden.

Führt man diese Werthe in (28) ein, so erhält man

$$(28)\quad H(\alpha-1,\beta-1),x) = \left[\frac{(\alpha+\beta-1)(\alpha+\beta-2)}{\alpha-1} + \frac{\alpha(\alpha-1)-\beta(\beta-1)}{(\alpha-1)(\alpha+\beta)}\cdot x\right]\cdot H(\alpha,\beta,x)$$
$$+\frac{\beta(\alpha+\beta-2)}{(\alpha-1)(\alpha+\beta)}\cdot x^2\cdot H(\alpha+1,\beta+1,x).$$

Obwohl nun diese Formel für die Function $H(\alpha, \beta, x)$ abgeleitet ist, so gilt sie doch ohne Weiteres auch für $J(\alpha, \beta, x)$. Dies lässt sich auf demselben Wege einsehen, auf dem wir von $H(\alpha, \beta, x)$ zu $J(\alpha, \beta, x)$ gelangt sind, und wir können daher hier auf die genauere Durchführung verzichten. Wir erhalten daher aus (28), wenn wir noch die Function

$$(29)\quad T(\alpha, \beta, x) = x^\alpha\cdot J(\alpha, \beta, x) = \frac{1}{\Pi(\beta-1)}\cdot\int_0^\infty e^{-s}s^{\alpha-1}\left(1-\frac{s}{x}\right)^{\beta-1}ds$$

einführen:

$$(30)\quad \begin{aligned} &T(\alpha-1, \beta-1, x)\\ &= \left[\frac{(\alpha+\beta-1)(\alpha+\beta-2)}{(\alpha-1)x} + \frac{\alpha(\alpha-1)-\beta(\beta-1)}{(\alpha-1)(\alpha+\beta)}\right] T(\alpha, \beta, x)\\ &+\frac{\beta(\alpha+\beta-2)}{(\alpha-1)(\alpha+\beta)}\cdot T(\alpha+1, \beta+1, x).\end{aligned}$$

4.

Wir haben in der Function $J(\alpha, \beta, x)$ ein particuläres Integral von (N) gewonnen. Zu einem zweiten gelangen wir durch die Substitution $y = e^{-x}\eta$, durch die (N) übergeht in

$$(\mathrm{N}')\quad x\frac{d^2\eta}{dx^2} + [(\beta+\alpha)-x]\frac{d\eta}{dx} - \beta\eta = 0.$$

Diese Gleichung geht aus (N) hervor durch Vertauschung von α mit β und von x mit $-x$. Mithin hat man ein zweites particuläres Integral von (N) in der Function $e^{-x}J(\beta, \alpha, -x)$. *Die Functionen:*

$$(31)\quad \begin{cases} J_1(x) = \quad J(\alpha, \beta, x) \quad = \dfrac{1}{\Pi(\beta-1)}\cdot\dfrac{1}{x^\alpha}\displaystyle\int_0^\infty e^{-s}s^{\alpha-1}\left(1-\frac{s}{x}\right)^{\beta-1}ds,\\ J_2(x) = e^{-x}J(\beta, \alpha, -x) = \dfrac{e^{-x}}{\Pi(\alpha-1)}\cdot\dfrac{1}{x^\beta}\displaystyle\int_0^\infty e^{-s}s^{\beta-1}\left(1+\frac{s}{x}\right)^{\alpha-1}ds \end{cases}$$

bilden demnach ein Fundamentalsystem von (N)*). Die *reellen Theile von α und β* können dabei als *positiv* vorausgesetzt werden, indem negative reelle Theile durch Formel (30) auf positive zurückgeführt werden.

*) Die lineare Unabhängigkeit dieser Integrale wird S. 147 bewiesen.

Unsere nächste Aufgabe ist die genauere Erforschung der Natur der Functionen $J_1(x)$ und $J_2(x)$, namentlich in Bezug auf ihre Endlichkeit und Stetigkeit. *Wir zeigen zunächst, dass die auf* **reellem** *Wege von* 0 *bis* ∞ *erstreckten Integrale* $J(\alpha, \beta, x)$ *resp.* $T(\alpha, \beta, x)$ *stets* **endlich** *sind*, indem wir eine obere Grenze angeben. Um dabei zu einer unzweideutigen Definition der Integrale zu gelangen, setzen wir fest, dass längs des Integrationsweges in den Ausdrücken

$$s^{\alpha-1} = e^{(\alpha-1)\log s} \quad \text{und} \quad \left(1+\frac{s}{x}\right)^{\beta-1} = e^{(\beta-1)\log\left(1+\frac{s}{x}\right)}$$

die *Hauptwerthe* der Logarithmen genommen werden sollen. Es sei

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha' + \alpha'' i, \qquad \alpha' > 0, \\ \beta &= \beta' + \beta'' i, \qquad \beta' > 0, \\ x &= r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \end{aligned}$$

Wir betrachten dann das *auf reellem Wege* erstreckte Integral

$$T(\alpha, \beta, x) = T_1 = \frac{1}{\Pi(\beta-1)} \int_0^\infty e^{-s} s^{\alpha-1} \left(1-\frac{s}{x}\right)^{\beta-1} ds.$$

Sollte x zufällig reell und positiv sein, so dass der Integrationsweg durch x hindurchginge, so lassen wir den Integrationsweg an der betreffenden Stelle unendlich wenig nach unten ausweichen, wodurch an dem Integral nur eine unendlich kleine Aenderung hervorgebracht werden kann.

Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. **Fall:** $b' - 1 > 0, \quad \alpha' - 1 > 0.$

Es ist nach dem bekannten Satz über den Modul einer Summe:

$$\left| \int_0^\infty e^{-s} s^{\alpha-1} \left(1-\frac{s}{x}\right)^{\beta-1} ds \right| < \int_0^\infty e^{-s} s^{\alpha'-1} \left| \left(1-\frac{s}{x}\right)^{\beta-1} \right| ds.$$

Bezeichnet w_1 einen noch zu bestimmenden, von s abhängigen Winkel, so ist:

$$\left| \left(1-\frac{s}{x}\right)^{\beta-1} \right| = e^{-\beta'' w_1} \cdot \left| 1-\frac{s}{x} \right|^{\beta'-1}.$$

Nun ist:

$$\left| 1-\frac{s}{x} \right| < 1 + \frac{s}{r},$$

mithin, da *nach Voraussetzung* $\beta' - 1 > 0$:

$$\left| 1-\frac{s}{x} \right|^{\beta'-1} < \left(1+\frac{s}{r}\right)^{\beta'-1};$$

daher:

$$(32)\qquad \left|\int_0^\infty e^{-s}s^{\alpha-1}\left(1-\frac{s}{x}\right)^{\beta-1}ds\right| < \int_0^\infty e^{-s}s^{\alpha'-1}e^{-\beta''w_1}\left(1+\frac{s}{r}\right)^{\beta'-1}ds.$$

Dabei ist $w_1 = \arg\left(1-\frac{s}{x}\right)$; weil wir uns nun, wie gezeigt werden wird, auf Werthe von x, für die $0<\varphi<\pi$ ist, beschränken können, so folgt:

$$0<\arg\left(1-\frac{s}{x}\right)<\pi,$$

oder

$$0<w_1<\pi.$$

Setzen wir daher:

$$\begin{cases} w_1 = 0 & \text{wenn } \beta''>0, \\ w_1 = \pi & \text{wenn } \beta''<0, \end{cases}$$

so werden wir die Ungleichung (32) noch verstärken.

Dann haben wir:

$$\left|\int_0^\infty e^{-s}s^{\alpha-1}\left(1-\frac{s}{x}\right)^{\beta-1}ds\right| < e^{-\beta''w_1}\int_0^\infty e^{-s}s^{\alpha'-1}\left(1+\frac{s}{r}\right)^{\beta'-1}ds.$$

Nun ist:

$$1+\frac{s}{r}<e^{\frac{s}{r}}.$$

Für das rechts stehende Integral gilt daher:

$$\int_0^\infty e^{-s}s^{\alpha'-1}\left(1+\frac{s}{r}\right)^{\beta'-1}<\int_0^\infty s^{\alpha'-1}e^{-s\left(1-\frac{\beta'-1}{r}\right)}ds.$$

Wenn $r>\beta'-1$, so ist das letzte Integral nach einem bekannten Satze über Euler'sche Functionen*) gleich:

$$\frac{\Pi(\alpha'-1)}{\left(1-\frac{\beta'-1}{r}\right)^{\alpha'}}.$$

Wir haben daher das Resultat:

$$(33)\quad |T_1(x)| = |T(\alpha,\beta,x)| < e^{-\beta''w_1}\cdot\frac{\Pi(\alpha'-1)}{|\Pi(\beta-1)|}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{\beta'-1}{r}\right)^{\alpha'}} = M_1;\ \beta'-1>0$$

analog:

---

*) Vgl. z. B. Serret, l. c. S. 166, Gl. (1). Die Bedingung $r>\beta'-1$ ist keine wesentliche Einschränkung, weil wir ohnehin nur *grosse* Werthe von r betrachten.

$$(34)\quad |T_2(x)| = |T(\beta, \alpha, -x)| < e^{-\alpha'' w_2} \cdot \frac{\Pi(\beta'-1)}{|\Pi(\alpha-1)|} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{\alpha'-1}{r}\right)^{\beta'}} = M_2;\ \alpha'-1>0.$$

Dabei ist w_1 in der angegebenen Weise und ähnlich w_2 zu bestimmen. Sind α und β *reell*, so wird $\alpha'' = \beta'' = 0$, $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$. Da T_1 und T_2 im Wesentlichen die im Restglied R_n vorkommenden Integrale werden sollen [vgl. (20)], so kommt es uns hauptsächlich auf das Product $T_1 T_2$ an. Nennen wir dessen obere Grenze M^2 und fassen der Einfachheit wegen reelle α, β ins Auge (complexe ändern nichts Wesentliches), so ist:

$$(35)\quad \begin{cases} |T_1 T_2| < M^2, \\ M^2 = \dfrac{1}{\left(1-\frac{\beta-1}{r_1}\right)^{\alpha}\left(1-\frac{\alpha-1}{r_2}\right)^{\beta}}, \end{cases} \quad \alpha-1,\ \beta-1>0.$$

Hierbei ist ganz allgemein angenommen, dass x in T_1 und T_2 auch verschiedene Werthe haben kann, was durch die Indices bei r_1 und r_2 angedeutet wird (vgl. S. 149). Man sieht: M^2 bleibt stets endlich und wird für $r = \infty$ gleich 1.

2. Fall: $\alpha', \beta' > 0$; *eine der Grössen* α', β' *kleiner als* 1.

Auch in diesem Fall bleiben T_1 und T_2 endlich. Wäre nämlich beispielsweise $\beta' < 1$, so müsste doch $\beta' + 1 > 0$ sein. Nun liefert uns aber Gl. (30) eine Relation von der Form

$$T(\alpha, \beta, x) = f_1 T(\alpha+1, \beta+1, x) + f_2 T(a+2, \beta+2, x),$$

und auf die rechts stehenden Functionen kann man die Betrachtungen des 1. Falls anwenden. Nöthigenfalls kann man dieselbe Operation nochmals wiederholen. Wir haben also das Resultat:

Die geradlinig erstreckten Integrale $T_1(x)$ und $T_2(x)$ haben eine stets numerisch angebbare obere Grenze.

Wir gehen nun zur Betrachtung der Function $J(\alpha, \beta, x)$ bei beliebigen Umläufen von x über. Dabei können wir uns nicht mehr auf den geradlinig erstreckten Integrationsweg beschränken. Denkt man sich nämlich etwa im ersten Quadranten einen Werth von x angenommen, so ist $s = x$ ein Verzweigungspunkt für den Integranden, wenn dieser als Function von s betrachtet wird. Beschreibt nun x einen Umkreis in positivem Sinne um den Nullpunkt, und fordert man, dass sich dabei $J(\alpha, \beta, x)$ *stetig* fortsetzt, so muss nach bekannten Sätzen der Functionentheorie der Integrationsweg von dem Augenblick an ausweichen, in dem ihn der Verzweigungspunkt x erreicht. *Der ursprünglich geradlinig von 0 nach ∞ erstreckte Integrationsweg nimmt daher nach einem vollen Umlauf* *des x die in Fig. 1 gezeichnete Gestalt an,* die man auch durch die in Fig. 2 gezeichnete Gestalt ersetzen kann. *Gleichzeitig multiplicirt sich bei dem Umlauf des x der vor dem Integral stehende Factor $\frac{1}{x^\alpha}$ mit der Einheitswurzel $e^{-2\pi i\alpha}$.*

Bei $J_2(x) = J(\beta, \alpha, -x)$ muss der Integrationsweg auswe hen, sobald

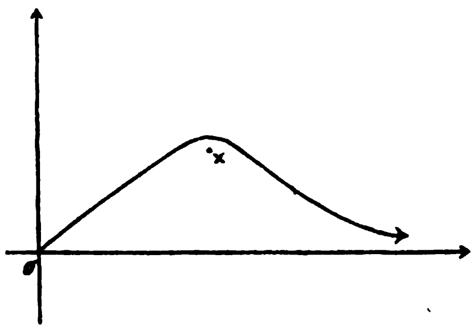


Fig. 1.

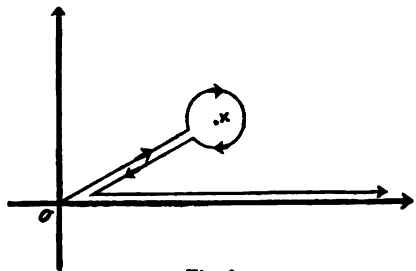


Fig. 2.

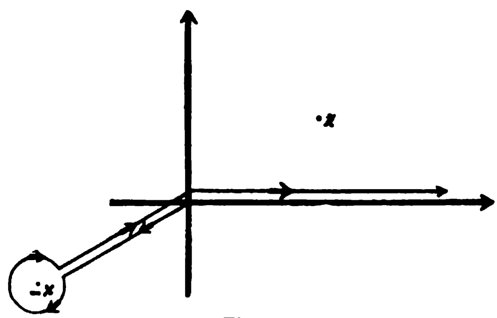


Fig. 3.

$-x$ die reelle positive Axe erreicht, d. h. sobald x die reelle *negative* Axe erreicht.

Für $J_2(x)$ nimmt daher der Integrationsweg schon nach einem halben Umlauf des x die Gestalt Fig. 2 an, während Fig. 3 seine Gestalt nach einem ganzen Umlauf giebt.

In der oberen Halbebene braucht also der Integrationsweg weder für $J_1(x)$ noch für $J_2(x)$ auszuweichen.

Bezeichnet man mit $\bar{J}(\alpha, \beta, x)$ den Werth von $J(\alpha, \beta, x)$ nach einem vollen Umlauf des x, so hat man, weil x Verzweigungspunkt des Integranden ist und $x^{-\alpha}$ den Factor $e^{-2i\pi\alpha}$ annimmt, aus Fig. 2:

$$(36)\quad \bar{J}(x) = e^{-2\pi i(\alpha+\beta)} J_1(x) + \frac{e^{-2\pi i\alpha} - e^{-2\pi i(\alpha+\beta)}}{\Pi(\beta-1)\, x^\alpha} \int_0^x s^{\alpha-1}\left(1-\frac{s}{x}\right)^{\beta-1} e^{-s}\, ds.$$

Dabei ist der Kreis um x in Fig. 2 unendlich klein gedacht, was ohne Weiteres statthaft ist, da wir ja den reellen Theil von α als positiv voraussetzen. Substituiren wir in der letzten Gleichung $s = xs'$ und lassen den Accent dann weg, so erhalten wir:

$$(37)\quad \begin{cases} \bar{J}(\alpha, \beta, x) = \bar{J}_1(x) = e^{-2\pi i(\alpha+\beta)} J(\alpha, \beta, x) \\ \qquad\qquad + \dfrac{e^{-2\pi i \alpha} + e^{-2\pi i(\alpha+\beta)}}{\Pi(\beta-1)} \displaystyle\int_0^1 s^{\alpha-1}(1-s)^{\beta-1} e^{-sx}\, ds, \\ \bar{J}(\beta, \alpha, -x) = \bar{J}_2(x) = e^{-2\pi i(\alpha+\beta)} J(\beta, \alpha, -x) \\ \qquad\qquad + \dfrac{e^{-2\pi i \beta} - e^{-2\pi i(\alpha+\beta)}}{\Pi(\alpha-1)} \displaystyle\int_0^1 s^{\beta-1}(1-s)^{\alpha-1} e^{sx}\, ds. \end{cases}$$

Die zweite Formel geht aus der ersten durch Vertauschung von α mit β und von x mit $-x$ hervor.

Wir können $\bar{J}_1(x)$ und $\bar{J}_2(x)$ noch anders ausdrücken. Da nämlich $\bar{J}_1(x)$ und $e^{-x}\bar{J}_2(x)$ particulare Integrale von (N) sind, müssen sie sich linear durch $J_1(x)$ und $e^{-x}J_2(x)$ darstellen lassen. Man hat daher:

$$(38)\quad \begin{cases} \bar{J}(\alpha, \beta, x) = A_1 J(\alpha, \beta, x) + e^{-x} A_2 J(\beta, \alpha, -x), \\ \bar{J}(\beta, \alpha, -x) = e^{x} B_1 J(\alpha, \beta, x) + B_2 J(\beta, \alpha, -x). \end{cases}$$

Wie die Constanten in diesen Gleichungen bestimmt werden können, wird sich nachher zeigen (Formel (49)). Die Formeln (38) drücken die Integrale auf den durch den Umlauf von x veränderten Integrationswege aus durch die Integrale auf dem ursprünglichen Integrationswege.

Etwas ähnliches wollen wir jetzt für den Fall leisten, dass x eine *halbe* Umdrehung macht.

Wir nehmen x in *der oberen Halbebene* an und lassen es einen *halben Umkreis in positivem Sinn* machen. Nach den Erörterungen a. v. S. bleibt dabei der reelle Integrationsweg für $J_1(x)$ ungeändert, während er für $J_2(x)$ die Form Fig. 2 annimmt. Wir erhalten daher

$$(39)\qquad J_1(-x) = J(\alpha, \beta, -x) \quad \textit{Integral auf reellem Wege.}$$

$$J_2(-x) = J(\beta, \alpha, x) = e^{2\pi i \alpha} \frac{1}{x^{\beta}} \cdot \frac{1}{\Pi(\alpha-1)} \int_0^{\infty} e^{-s} s^{\beta-1} \left(1-\ \right)^{\alpha-1} ds$$

$$+ \frac{1-e^{-2\pi i \alpha}}{\Pi(\beta-1)} \int_0^1 s^{\beta-1}(1-s)^{\alpha-1} e^{-sx}\, ds,$$

oder nach (36) und (37)

$$J_2(-x) = e^{2\pi i\beta}\bar{J}(\beta, \alpha, x);$$

daher nach (38), wenn man noch

$$B_1 e^{\pi i\beta} = \lambda_1, \qquad B_2 e^{\pi i\beta} = \lambda_2$$

setzt:

(40) $$J_2(-x) = e^{-x}\lambda_1 J(\alpha, \beta, -x) + \lambda_2 J(\beta, \alpha, x).$$

Zusammenfassend haben wir:

(41) $$\begin{cases} J_1(-x) = J(\alpha, \beta, -x), \\ J_2(-x) = e^{-x}\lambda_1 J(\alpha, \beta, -x) + \lambda_2 J(\beta, \alpha, x). \end{cases}$$

Die Integrale rechts sind dabei auf reellem Wege zu erstrecken, und der Uebergang von x zu $-x$ geschieht durch eine Drehung in positivem Sinn.

Lassen wir ferner x eine halbe Drehung in *negativem* Sinn machen, (ebenfalls von einem Punkt der oberen Halbebene aus), so muss der Integrationsweg für $J_1(x)$ ausweichen, während er für $J_2(x)$ unverändert bleibt. Durch ähnliche Betrachtungen wie vorher erhält man:

(41a) $$\begin{cases} J_1(-x) = \varkappa_1 J(\alpha, \beta, -x) + e^{x}\varkappa_2 J(\beta, \alpha, x), \\ J_2(-x) = J(\beta, \alpha, +x). \end{cases}$$

Wieder sind die Integrale rechts auf reellem Wege zu erstrecken, aber der Uebergang von x zu $-x$ geschieht durch eine Drehung in negativem Sinn.

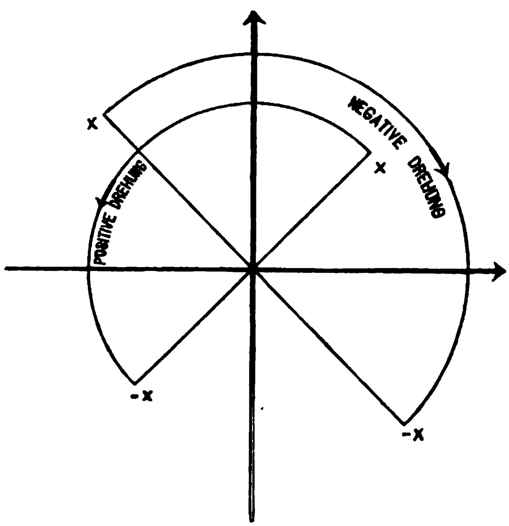


Fig. 4.

Wir wollen nun $J_1(x)$ und $J_2(x)$ zu Functionen machen, die in der ganzen Ebene *eindeutig, endlich und stetig* sind. Um sie *eindeutig* zu machen, muss ein Schnitt vom Nullpunkt ins Unendliche gelegt werden. Zur *Endlichkeit und Stetigkeit* ist nothwendig, dass der *Schnitt längs der negativen imaginären Axe geführt wird,* wie folgende Ueberlegung lehrt. Liegt x in der oberen Halbebene, so kann man bei der angegebenen Lage des Schnittes nach $-x$ gelangen

nur durch *positive* Drehung, wenn x im *ersten Quadranten liegt.*
nur durch *negative* Drehung, wenn x im *zweiten Quadranten* liegt (s. Fig. 4).

Nun haben wir im Anfang dieses Paragraphen gezeigt, dass die auf *reellem Wege erstreckten Integrale* $J(x)$ *stets endlich* sind. Damit ist die Endlichkeit der Integrale für Werthe von x in der *oberen Halbebene* ohne Weiteres klar. Liegt ferner x im ersten Quadranten, so dass also der *reelle Theil von* x *positiv* ist, so liefert Formel (41) die Functionen $J_1(x)$ und $J_2(x)$ im *dritten Quadranten*, ausgedrückt durch Integrale auf *reellem* Wege, und die Exponentialfunction e^{-x} kann auch für unendliches x nicht unendlich werden. Es sind somit $J_1(x)$ und $J_2(x)$ durch (41) in *eindeutiger Weise* und so definirt, dass sie *auch im dritten Quadranten nicht unendlich werden* und sich überdies *stetig* an die Werthe im ersten Quadranten anschliessen. Dasselbe leistet (41a) für den *vierten Quadranten*. *In der ganzen durch unsern Schnitt begrenzten Zahlenebene sind die Functionen* $J_1(x)$ *und* $J_2(x)$ *eindeutig, endlich und stetig.* — Beim Ueberschreiten des Schnittes findet eine Unstetigkeit statt, deren Grösse unmittelbar aus den Formeln (38) und (49) abzulesen ist.

Wir drücken noch zum Schlusse dieses Paragraphen $J_1(x)$ und $J_2(x)$ durch Y_1 und Y_2 (vgl. Formel (9)) aus. Es bestehen die Gleichungen:

$$\left\{\begin{aligned} J_1(x) &= c_1 Y_1 + c_2 Y_2, \\ e^{-x}\cdot J_2(x) &= C_1 Y_1 + C_2 Y_2, \end{aligned}\right. \tag{42}$$

wo die Constanten c_ν und C_ν zu bestimmen sind. Führen wir in der ersten Gleichung für Y_1 und Y_2 die Werthe aus Formel (9) ein und multipliciren mit $x^{\beta-1}$, so erhalten wir:

$$\frac{1}{\Pi(\beta-1)}\int_0^\infty e^{-s} s^{\alpha-1}(x-s)^{\beta-1}\,ds$$
$$= x^{\alpha+\beta-1} c_1 Y_1 + c_2\cdot\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\Pi(\nu-\beta)}{\Pi(\nu)\,\Pi(\nu-\alpha-\beta+1)}\cdot(-x)^\nu.$$

Da wir die reellen Theile von α und β positiv vorausgesetzt haben, fällt für $x=0$ der erste Term rechts weg, und aus dem übrigen wird:

$$(-1)^{\beta-1}\frac{\Pi(\alpha+\beta-2)}{\Pi(\beta-1)} = c_2\cdot\frac{\Pi(-\beta)}{\Pi(-\alpha-\beta+1)};$$
$$c_2 = e^{-\pi i(\beta-1)}\cdot\frac{\Pi(\alpha+\beta-2)\,\Pi(-\alpha-\beta+1)}{\Pi(\beta-1)\,\Pi(-\beta)},$$

oder mit Benutzung der bekannten Relation*):

$$\Pi(-\lambda)\,\Pi(\lambda-1) = \frac{\pi}{\sin\lambda\pi}, \tag{43}$$

$$c_2 = e^{-\pi i(\beta-1)}\frac{\sin\beta\pi}{\sin(\alpha+\beta-1)\pi} = e^{-\pi i\beta}\frac{\sin\beta\pi}{\sin(\alpha+\beta)\pi}. \tag{44}$$

*) Gauss, l. c. S. 148.

Zur Bestimmung von c_1 lassen wir x einen positiven Umlauf machen:

$$\bar{J}_1(x) = c_1 \bar{Y}_1 + c_2 \bar{Y}_2;$$

Nun ist:

$$\bar{Y}_1 = Y_1; \qquad \bar{Y}_2 = e^{-2\pi i(\alpha+\beta)} Y_2;$$

$$\begin{aligned} \bar{J}_1(x) &= c_1 Y_1 + e^{-2\pi i(\alpha+\beta)} c_2 Y_2, \\ &= c_1 Y_1 + e^{-2\pi i(\alpha+\beta)}[J_1(x) - c_1 Y_1], \\ &= c_1 Y_1 (1 - e^{-2\pi i(\alpha+\beta)}) + e^{-2\pi i(\alpha+\beta)} J_1(x). \end{aligned}$$

Setzt man für $\bar{J}_1(x)$ seinen Werth aus (37) ein, so kommt:

$$e^{-2\pi i\alpha} \cdot \frac{1-e^{-2\pi i\beta}}{\Pi(\beta-1)} \int_0^1 e^{-sx} s^{\alpha-1}(1-s)^{\beta-1} ds = c_1(1-e^{-2\pi i(\alpha+\beta)}) Y_1.$$

Setzt man nun $x = 0$, so wird

$$Y_1(0) = \frac{\Pi(\alpha-1)}{\Pi(\alpha+\beta-1)},$$

während das Integral in die Euler'sche Function

$$B(\alpha,\beta) = \frac{\Pi(\alpha-1)\,\Pi(\beta-1)}{\Pi(\alpha+\beta-1)}$$

übergeht. Daher:

$$c_1 = e^{-2\pi i\alpha} \frac{1-e^{-2\pi i\beta}}{1-e^{-2\pi i(\alpha+\beta)}} = e^{-\pi i\alpha} \cdot \frac{\dfrac{e^{\pi i\beta}-e^{-\pi i\beta}}{2i}}{\dfrac{e^{+\pi i(\alpha+\beta)}-e^{-\pi i(\alpha+\beta)}}{2i}} = e^{-\pi i\alpha} \frac{\sin\beta\pi}{\sin(\alpha+\beta)\pi},$$

(45) $$c_1 = \frac{e^{-\pi i\alpha}\sin\beta\pi}{\sin(\alpha+\beta)\pi}.$$

Auf genau analoge Weise findet man:

(46) $$\begin{cases} C_1 = e^{-\pi i\beta} \dfrac{\Pi(\beta-1)}{\Pi(\alpha-1)} \cdot \dfrac{\sin\alpha\pi}{\sin(\alpha+\beta)\pi}, \\ C_2 = - e^{-\pi i\beta} \dfrac{\Pi(\beta-1)}{\Pi(\alpha-1)} \cdot \dfrac{\sin\beta\pi}{\sin(\alpha+\beta)\pi}. \end{cases}$$

Die Gleichungen (42), (44), (45), (46) liefern nun die gesuchten Formeln:

(47) $$\begin{cases} J(\alpha,\beta,x = J_1(x) = e^{-\pi i\alpha} \dfrac{\sin\beta\pi}{\sin(\alpha+\beta)\pi} Y_1 + e^{-\pi i\beta} \dfrac{\sin\beta\pi}{\sin(\alpha+\beta)\pi} Y_2, \\ e^{-x}J(\beta,\alpha,-x) = e^{-x}J_2(x) = e^{-\pi i\beta} \dfrac{\Pi(\beta-1)}{\Pi(\alpha-1)} \cdot \dfrac{\sin\alpha\pi}{\sin(\alpha+\beta)\pi} Y_1 \\ \qquad\qquad - e^{-\pi i\beta} \dfrac{\Pi(\beta-1)}{\Pi(\alpha-1)} \cdot \dfrac{\sin\beta\pi}{\sin(\alpha+\beta)\pi} Y_2. \end{cases}$$

Jetzt sind wir auch in der Lage, die Constanten A_1, A_2, B_1, B_2 der Gleichung (38) wirklich zu berechnen. Aus (42) folgt nämlich:

$$(48)\qquad \begin{cases} Y_1 = c_1' J_1(x) + e^{-x}\, c_2' J_2(x), \\ Y_2 = C_1' J_1(x) + e^{-x} C_2' J_2(x), \end{cases}$$

wo c_ν' und C_ν' durch Auflösung von (47) erhalten werden. Nun ist:

$$\bar{J}_1(x) = c_1 Y_1 + c_2 e^{-2\pi i(\alpha+\beta)}\, Y_2 = (c_1 c_1' + c_2 C_1' e^{-2\pi i(\alpha+\beta)})\, J_1(x) + e^{-x}(c_1 c_2' + c_2 C_2' e^{-2\pi i(\alpha+\beta)})\, J_2(x).$$

Mithin:

$$(49)\qquad \begin{cases} A_1 = c_1 c_1' + e^{-2\pi i(\alpha+\beta)}\, c_2 C_1', & A_2 = c_1 c_2' + e^{-2\pi i(\alpha+\beta)}\, c_2 C_2', \\ B_1 = C_1 c_1' + e^{-2\pi i(\alpha+\beta)} C_2 C_1', & B_2 = C_1 c_2' + e^{-2\pi i(\alpha+\beta)} C_2 C_2'. \end{cases}$$

Die Constanten c_ν, C_ν, c_ν', C_ν' sind dabei schon berechnet oder leicht angebbar.

5.

Wir führen nach unserem Plane für die Integrale y_1, y_2 des § 2 die Functionen $J_1(x)$ und $e^{-x} J_2(x)$ ein (vgl. S. 134). Zunächst haben wir noch den Beweis nachzuholen, dass die in Gl. (18) stehende Constante C wirklich $= -1$ ist. Zunächst hat man:

$$J_1 \frac{dJ_2}{dx} - J_2 \frac{dJ_1}{dx} - J_1 J_2 = C \cdot x^{-(\alpha+\beta)}.$$

Multiplicirt man mit $x^{\alpha+\beta}$, so kommt:

$$x^\alpha J_1 \cdot x^\beta \frac{dJ_2}{dx} - x^\beta J_2 \cdot x^\alpha \frac{dJ_1}{dx} - x^\alpha J_1 \cdot x^\beta J_2 = C.$$

Lässt man nun x unendlich werden, so fallen die ersten beiden Terme links fort, und man erhält aus der Definition der Integrale J_1 und J_2:

$$C = -\frac{\Pi(\alpha-1)\cdot\Pi(\beta-1)}{\Pi(\beta-1)\cdot\Pi(\alpha-1)} = -1,$$

wie behauptet. *Zugleich ist damit die lineare Unabhängigkeit der Integrale*

$$(50)\qquad \begin{cases} y_1 = J_1(x), \\ y_2 = e^{-x} J_2(x) \end{cases}$$

erwiesen (vgl. S. 10). Denn nach einem bekannten Satze wäre D identisch Null, wenn diese Integrale linear abhängig wären. —

Wir stellen nun noch einmal die Formeln (19), (20), (11), (13) zusammen:

$$(51)\qquad Ay_1 + By_2 = S_n + R_n,$$

$$S_n = \frac{1}{x^\alpha} \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{\Pi(\alpha+\nu-1)}{\Pi(\beta-\nu-1)\Pi(\nu)} \cdot \frac{1}{(-x)^\nu}, \tag{52}$$

$$R_n = \int_x^\infty \Phi(\xi) e^\xi \xi^{\alpha+\beta} [y_1(x) y_2(\xi) - y_2(x) y_1(\xi)]\, d\xi, \tag{53}$$

$$\Phi(x) = (-1)^n \frac{n}{x^{\alpha+n}} \cdot \frac{\Pi(\alpha+n-1)}{\Pi(\beta-n-1)\Pi(n)}. \tag{54}$$

Wir setzen jetzt fest, dass die Integration in (53) *vom Punkte x aus parallel der imaginären Axe vollzogen werden soll,* lassen aber noch unentschieden, ob in positiver oder negativer Richtung. Bilden wir nun aus (50) und (51):

$$A J_1(x) + e^{-x} B J_2(x) = S_n + R_n$$

und lassen x vom Nullpunkt aus auf der imaginären Axe in's Unendliche gehn, so fällt das Integral R_n fort, und man erhält aus den Ausdrücken für $J_1(x)$ und $J_2(x)$ und unter Beachtung, dass e^{-x} unbestimmt wird:

$$A = 1, \quad B = 0,$$

das heisst:

$$\left\{\begin{aligned} &J_1(x) = S_n + R_n, \\ &R_n = (-1)^n n \frac{\Pi(\alpha+n-1)}{\Pi(\beta-n-1)\Pi(n)} \int_x^\infty \frac{J_1(x) J_2(\xi) - e^{(\xi - x)} J_2(x) J_1(\xi)}{\xi^{n-\beta}}\, d\xi \end{aligned}\right. \tag{55}$$

oder

$$\xi = x + \vartheta$$

substituirend:

$$R_n = (-1)^n n \frac{\Pi(\alpha+n-1)}{\Pi(\beta-n-1)\Pi(n)} \int_0^\infty \frac{J_1(x) J_2(x+\vartheta) - e^\vartheta J_2(x) J_1(x+\vartheta)}{(x+\vartheta)^{n-\beta}}\, d\vartheta$$

oder

$$R_n = R_n^{(1)} + R_n^{(2)}, \tag{56}$$

wo

$$\left\{\begin{aligned} &R_n^{(1)} = (-1)^n n \cdot \frac{\Pi(\alpha+n-1)}{\Pi(\beta-n-1)\Pi(n)} \cdot \frac{1}{x^\alpha} \int_0^\infty \frac{T_1(x) T_2(x+\vartheta)}{(x+\vartheta)^n}\, d\vartheta, \\ &R_n^{(2)} = (-1)^n n \cdot \frac{\Pi(\alpha+n-1)}{\Pi(\beta-n-1)\Pi(n)} \cdot \frac{1}{x^\beta} \int_0^\infty \frac{e^\vartheta T_2(x) T_1(x+\vartheta)}{(x+\vartheta)^{n+(\alpha-\beta)}}\, d\vartheta. \end{aligned}\right. \tag{57}$$

Der Integrationsweg ist dabei die imaginäre Axe.

Wir setzen nun:

$$\left\{\begin{aligned} &\text{mod. } R_n = \mathfrak{R}_n, \\ &\text{mod. } R_n^{(1)} = \mathfrak{R}_n^{(1)}, \\ &\text{mod. } R_n^{(2)} = \mathfrak{R}_n^{(2)}. \end{aligned}\right. \tag{58}$$

Dann ist:

$$\mathfrak{R}_n < \mathfrak{R}_n^{(1)} + \mathfrak{R}_n^{(2)}. \tag{59}$$

Indem wir nun eine obere Grenze für $\mathfrak{R}_n^{(1)}$ und $\mathfrak{R}_n^{(2)}$ aufsuchen, *setzen wir α und β als reell voraus*, weil die Resultate für complexes α und β vollständig bestehen bleiben und nur die Ausdrucksweise schwerfälliger wird (vgl. den vorigen Paragraphen). An Stelle von α und β treten bei complexen Werthen die reellen Theile.

Betrachten wir zuerst das Integral

$$\int_0^\infty \frac{T_1(x)\, T_2(x+\vartheta)}{(x+\vartheta)^n}\, d\vartheta.$$

Aus (35) folgt:

$$\text{mod.} \int_0^\infty \frac{T_1(x)\, T_2(x+\vartheta)}{(x+\vartheta)^n}\, d\vartheta < M^2 \int_0^\infty \frac{|\,d\vartheta\,|}{|\,(x+\vartheta)^n\,|}.$$

Wir unterscheiden zwei Fälle.

1. Fall: *x in der oberen Halbebene*, oder $0 \leqq \varphi \gtreqless \pi$.

Wir wählen in diesem Fall als Integrationsweg die *positive* imaginäre Axe. Wir setzen

$$\vartheta = ti;$$

dann wird:

$$\text{mod.}\,(x+\vartheta) = \sqrt{r^2\cos^2\varphi + (r\sin\varphi + t)^2} = \sqrt{r^2 + t^2 + 2rt\sin\varphi}.$$

Da nach Voraussetzung $0 \leqq \varphi \gtreqless \pi$, so ist:

$$\text{mod.}\,(x+\vartheta) \geqq \sqrt{r^2+t^2},$$

$$\text{mod.}\,(x+\vartheta)^n \geqq (r^2+t^2)^{\frac{n}{2}}. \tag{60}$$

2. Fall: *x in der unteren Halbebene*, oder $\pi < \vartheta < 2\pi$.

Wir wählen als Integrationsweg die *negative* imaginäre Axe. Wir setzen:

$$\vartheta = -ti,$$

dann wird:

$$\text{mod.}\,(x+\vartheta) = \sqrt{r^2\cos^2\varphi + (r\sin\varphi - t)^2} = \sqrt{r^2 + t^2 - 2rt\sin\varphi}.$$

Da nach Voraussetzung $\pi < \varphi < 2\pi$, so ist auch hier:

$$\text{mod.}\,(x+\vartheta) > \sqrt{r^2+t^2},$$

$$\text{mod.}\,(x+\vartheta)^n > (r^2+t^2)^{\frac{n}{2}} \tag{60}$$

In *der ganzen x-Ebene ist daher:*

(61) $$\operatorname{mod.}\int_0^\infty \frac{T_1(x)\,T_2(x+\vartheta)}{(x+\vartheta)^n}\,d\vartheta < M^2\int_0^\infty \frac{dt}{(r^2+t^2)^{\frac{n}{2}}}.$$

Aehnlich ergeht es mit dem Integral

$$\int_0^\infty \frac{e^\vartheta\,T_2(x)\,T_1(x+\vartheta)}{(x+\vartheta)^{n+\alpha-\beta}}\,d\vartheta.$$

Hier ist mod. $e^\vartheta = 1$, da ja ϑ rein imaginär. Sobald also $n+\alpha-\beta>0$ ist — und das ist von einem gewissen n ab stets der Fall, auch wenn $\alpha<\beta$ — ergiebt sich hier:

(62) $$\operatorname{mod.}\int_0^\infty \frac{e^\vartheta\,T_2(x)\,T_1(x+\vartheta)}{(x+\vartheta)^{n+\alpha-\beta}}\,d\vartheta < M^2\int_0^\infty \frac{dt}{(r^2+t^2)^{n+\alpha-\beta}}.$$

Wir haben in (61) und (62) Integrale vom Typus

$$\int_0^\infty \frac{dt}{(r^2+t^2)^a}.$$

In der Theorie der Euler'schen Integrale wird gelehrt*), dass

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dt}{(k+ti)^a(l-ti)^b} = \frac{2\pi}{(k+l)^{a+b-1}}\cdot\frac{\Pi(a+b-2)}{\Pi(a-1)\,\Pi(b-1)};\quad a+b>1.$$

Hieraus fliesst für $k=l=r$, $b=a$:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{dt}{(r^2+t^2)^a} = \frac{2\pi}{(2r)^{2a-1}}\cdot\frac{\Pi(2(a-1))}{\Pi(a-1)}\cdot\frac{1}{\Pi(a-1)}\qquad 2a>1.$$

Benutzen wir nun die Formel**):

$$\frac{\Pi(2\lambda)}{\Pi(\lambda)} = \frac{2^{2\lambda}}{\sqrt{\pi}}\,\Pi\left(\lambda-\frac{1}{2}\right),$$

und beachten zugleich, dass unterm Integralzeichen eine *gerade* Function steht, so erhalten wir:

(63) $$\int_0^\infty \frac{dt}{(r^2+t^2)^a} = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{\pi}}{r^{2a-1}}\cdot\frac{\Pi\left(a-\frac{3}{2}\right)}{\Pi(a-1)}.$$

Nach diesen Vorbereitungen gehen wir auf die Abschätzung von $\mathfrak{R}_n$ ein.

---

*) Vgl. z. B. Meyer, Vorlesungen über d. Theorie d. best. Integrale S. 206.

**) Vgl. z. B. Serret, l. c. S. 169, Formel (3).

Aus der wiederholt benutzten Formel $\Pi(\lambda-1)\cdot\Pi(-\lambda)=\frac{\pi}{\sin\lambda\pi}$ leitet man leicht ab:

$$\Pi(n-\lambda)\cdot\Pi(\lambda-n)=\mp\frac{(n-\lambda)\pi}{\sin\lambda\pi}.$$

Dies auf (57) angewandt giebt:

$$R_n^{(1)}=\mp\frac{n}{\pi}\sin\pi(\beta-1)\cdot\frac{\Pi(n+\alpha-1)\Pi(n-\beta+1)}{\Pi(n)\cdot(n-\beta+1)}\cdot\frac{1}{x^\alpha}\int_0^\infty\frac{T_1(x)\,T_2(x+\vartheta)}{(x+\vartheta)^n}\,d\vartheta,$$

$$R_n^{(2)}=\mp\frac{n}{\pi}\sin\pi(\beta-1)\cdot\frac{\Pi(n+\alpha-1)\Pi(n-\beta+1)}{\Pi(n)\cdot(n-\beta+1)}\cdot\frac{1}{x^\beta}\int_0^\infty\frac{e^\vartheta\,T_2(x)\,T_1(x+\vartheta)}{(x+\vartheta)^{n+\alpha-\beta}}\,d\vartheta.$$

Da nun für reelles positives Argument die Π-Function stets positiv ist, so erhält man, zum Modul übergehend und $\sin\pi(\beta-1)$ durch den Maximalwerth 1 ersetzend:

$$\mathfrak{R}_n^{(1)}<\frac{M^2}{2\sqrt{\pi}}\cdot\frac{n}{n-\beta+1}\cdot\frac{\Pi(n+\alpha-1)\Pi(n-\beta+1)}{\Pi(n)}\cdot\frac{\Pi\left(\frac{n-3}{2}\right)}{\Pi\left(\frac{n-2}{2}\right)}\cdot\frac{1}{r^{\alpha+n-1}},$$

$$\mathfrak{R}_n^{(2)}<\frac{M^2}{2\sqrt{\pi}}\cdot\frac{n}{n-\beta+1}\cdot\frac{\Pi(n+\alpha-1)\Pi(n-\beta+1)}{\Pi(n)}\cdot\frac{\Pi\left(\frac{n+\alpha-\beta-3}{2}\right)}{\Pi\left(\frac{n+\alpha-\beta-2}{2}\right)}\cdot\frac{1}{r^{\alpha+n-1}}.$$

In beiden Ungleichungen ist der letzte aus Π-Functionen gebildete Quotient ein echter Bruch; wir werden also die Ungleichungen nur verstärken, wenn wir diese echten Brüche durch 1 ersetzen. Alsdann erhalten wir durch Addition beider Ungleichungen:

$$\mathfrak{R}_n<\frac{M^2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{n}{n-\beta+1}\cdot\frac{\Pi(n+\alpha-1)\Pi(n-\beta+1)}{\Pi(n)}\cdot\frac{1}{r^{\alpha+n-1}}.\tag{64}$$

Es seien nun k und l die grössten in α und β enthaltenen ganzen Zahlen, so dass etwa

$$\begin{aligned}\alpha&=k+\varepsilon,\\ \beta&=l+\zeta\end{aligned}\tag{65}$$

gesetzt werden kann, wo ε und ζ echte Brüche sind. Unter Anwendung von (7) erhalten wir nun:

$$\mathfrak{R}_n<\frac{M^2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{n}{n-l}\,(n+k-1)\,(n+k-2)\cdots n\cdot\frac{\Pi(n+\varepsilon-1)\Pi(n-l+1)}{\Pi(n)}\cdot\frac{1}{r^{k+\varepsilon+n-1}}.\tag{66}$$

Wir unterscheiden drei Fälle:

Fall I. $l = 0$.

$$\mathfrak{R}_n < \frac{M^2}{\sqrt{\pi}} \frac{n+1}{n-l} \cdot n \left(\frac{n+k-1}{r}\right)^k \cdot \Pi(n+\varepsilon-1) \cdot \frac{1}{r^{n+\varepsilon-1}} \cdot$$

Fall II. $l = 1$.

$$\mathfrak{R}_n < \frac{M^2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{n}{n-l} \left(\frac{n+k-1}{r}\right)^k \cdot \Pi(n+\varepsilon-1) \cdot \frac{1}{r^{n+\varepsilon-1}} \cdot$$

Fall III. $l > 1$.

$$\mathfrak{R}_n < \frac{M^2}{\sqrt{\pi}} \frac{n}{n-l} \cdot \left(\frac{n+k-1}{r}\right)^k \cdot \frac{\Pi(n+\varepsilon-1)}{(n-l+2)(n-l+3)\cdots n} \cdot \frac{1}{r^{n+\varepsilon-1}}$$

oder

$$\mathfrak{R}_n < \frac{M^2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{(n-l)^{l-1}} \cdot \left(\frac{n+k-1}{r}\right)^k \cdot \Pi(n+\varepsilon-1) \cdot \frac{1}{r^{n+\varepsilon-1}} \cdot$$

In allen drei Fällen machen wir nun Gebrauch von der bekannten Ungleichung*)

$$\Pi(\lambda) < \sqrt{2\pi} \cdot \lambda^{\lambda+\frac{1}{2}} e^{-\lambda+\frac{1}{12\lambda}}.$$

Wir erhalten aus ihr die a fortiori geltende Ungleichung:

$$\Pi(n+\varepsilon-1) < \sqrt{2\pi}\, n^{n+\varepsilon-1} \cdot n^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-n} \cdot e^{\mu},$$

wo

$$\mu = \varepsilon - 1 + \frac{1}{12(n+\varepsilon-1)}$$

gesetzt ist. Dies liefert uns für:

$$(67)\quad \begin{cases} \text{Fall I:} & \mathfrak{R}_n < \sqrt{2}\, M^2 \cdot \left(\frac{n+k-1}{r}\right)^k e^{\mu} \cdot \frac{n+1}{n-l} \cdot \left[n^{\frac{3}{2}} \cdot e^{-n} \cdot \left(\frac{n}{r}\right)^{n+\varepsilon-1} \right], \\ \text{Fall II:} & \mathfrak{R}_n < \sqrt{2}\, M^2 \cdot \left(\frac{n+k-1}{r}\right)^k e^{\mu} \cdot \frac{n+1}{n-l} \cdot \left[n^{\frac{1}{2}} \cdot e^{-n} \cdot \left(\frac{n}{r}\right)^{n+\varepsilon-1} \right], \\ \text{Fall III:} & \mathfrak{R}_n < \sqrt{2}\, M^2 \cdot \left(\frac{n+k-1}{r}\right)^k e^{\mu} \cdot \left[\frac{n^{\frac{1}{2}}}{(n-l)^{l-1}} \cdot e^{-n} \cdot \left(\frac{n}{r}\right)^{n+\varepsilon-1} \right]. \end{cases}$$

In allen drei Fällen ist $\lim\limits_{n=\infty} \mathfrak{R}_n = \infty$, wie es sein muss. Nehmen wir aber immer r grösser als n, so können wir bei hinreichend grossem n das $\mathfrak{R}_n$ beliebig klein machen. Denn die ausserhalb der eckigen Klammern stehenden Glieder sind alle endlich: im Allgemeinen wird (bei grossem r) $\left(\frac{n+k-1}{r}\right)^k$ ebenso wie e^{μ} sogar *sehr klein* werden, während sich M^2 und $\frac{n+1}{n-l}$ der Einheit nähern. Die Grössenordnung von $\mathfrak{R}_n$ ist daher:

*) Vgl. z. B. Serret, l. c. S. 203.

$$(68)\qquad \begin{cases} \text{im Fall I} \;\; (l=0): & n^{\frac{3}{2}}\, e^{-n}, \\ \text{im Fall II} \;\; (l=1): & n^{\frac{1}{2}}\, e^{-n}, \\ \text{im Fall III} \, (l>1): & n^{-l+\frac{1}{2}}\, e^{-n}. \end{cases}$$

Es ist damit natürlich keineswegs behauptet, dass die Grössenordnung von $\mathfrak{R}_n$ in den drei Fällen in Wahrheit verschieden ist, da wir ja die obere Fehlergrenze immer in durchaus willkürlicher Weise vergrössert haben. *Grösser* sind aber die Fehler *keinesfalls.* —

Aus Gleichung (55) erhalten wir nun sofort folgende Resultate:

In der *ganzen* längs der negativen imaginären Axe aufgeschnittenen Zahlenebene wird das particuläre Integral der Gleichung (N):

$$J_1(x) = \frac{1}{\Pi(\beta-1)} \cdot \frac{1}{x^\alpha} \int_0^\infty e^{-s} s^{\alpha-1} \left(1 - \frac{s}{x}\right)^{\beta-1} ds$$

mit der in (68) angegebenen Genauigkeit asymptotisch dargestellt durch die Summe

$$S_n^{(1)} = S_n(\alpha, \beta, x) = \frac{1}{x^\alpha} \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{\Pi(\alpha+\nu-1)}{\Pi(\beta-\nu-1)\Pi(\nu)} \cdot \frac{1}{(-x)^\nu},$$

sobald der *absolute Werth von x grösser als die Gliederzahl n* ist.

Bemerkenswerth ist dabei, dass die *mehrdeutige* (resp. unstetige) Function $J_1(x)$ *im ganzen Gebiet* bei hinreichend grossen Werthen des Arguments mit einer *eindeutigen* und sogar *rationalen* Function übereinstimmt. Die *Mehrdeutigkeit* resp. Unstetigkeit kann also nur im *Restgliede* stecken.

In derselben Beziehung, wie $J_1(x) = J(\alpha, \beta, x)$ zu Gleichung (N), steht $J_2(x) = J(\alpha, \beta, -x)$ zur Gleichung (N') — vgl. S. 138. Es folgt:

Die Function

$$J_2(x) = \frac{1}{\Pi(\alpha-1)} \frac{1}{(-x)^\beta} \int_0^\infty e^{-s} s^{\beta-1} \left(1 - \frac{s}{x}\right)^{\alpha-1} ds$$

wird, sobald $r > n$, asymptotisch dargestellt durch die endliche Summe:

$$S_n^{(2)} = S_n(\alpha, \beta, -x) = \frac{1}{(-x)^\beta} \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{\Pi(\beta+\nu-1)}{\Pi(\alpha-\nu-1)\Pi(\nu)} \cdot \frac{1}{x^\nu}.$$

Der Grad der Annäherung ergiebt sich dabei aus (68), sobald man l durch k ersetzt.

Man hat somit in asymptotischer Darstellung folgendes Fundamentalsystem von (N):

$$y_1 = J_1(x) \sim S_n^{(1)},$$
$$y_2 = e^{-x} J_2(x) \sim e^{-x} S_n^{(2)},$$

wobei das Zeichen $\sim$ „asymptotisch dargestellt durch“ bedeutet.

Endlich bemerken wir noch, dass die Entwicklungen Y_1, Y_2 in der Umgebung des Nullpunktes, die für grosse Werthe des Arguments schlecht convergiren, in diesem Fall besser ersetzt werden durch die asymptotischen Darstellungen

$$Y_1 \sim c_1' S_n^{(1)} + e^{-x} c_2' S_n^{(2)},$$
$$Y_2 \sim C_1' S_n^{(1)} + e^{-x} C_2' S_n^{(2)},$$

wo die c_ν' und C_ν' nach § 5 leicht anzugebende Constanten sind.

Hierin besteht, wie auf Seite 131 bereits bemerkt, die *practische* Bedeutung der asymptotischen Entwicklungen.

Ueber die Transformation der partiellen Differentialgleichungen der Variationsrechnung.

Von

JOSEF KÜRSCHÁK in Budapest.

1. Vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Frage, ob die Differentialgleichungen der Variationsrechnung durch Berührungstransformationen wieder in Differentialgleichungen der Variationsrechnung überführt werden. Ich beweise wenigstens für die Differentialgleichungen zweiter Ordnung, dass diese Frage zu bejahen ist. Eine Untersuchung der Differentialgleichungen von höherer Ordnung würde zweifellos zu demselben Resultate führen, aber ein strenger analytischer Beweis scheint in diesem Falle umständlich zu sein.

2. Es mögen

$$p_k = \frac{\partial z}{\partial x_k}, \qquad p_{ik} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_k}$$
$$(k = 1, 2, \cdots, n) \qquad (i, k = 1, 2, \cdots, n)$$

die Ableitungen erster resp. zweiter Ordnung der gesuchten Function z bedeuten; f sei eine lineare Verbindung der Determinante

$$|p_{ik}|$$
$$(i, k = 1, 2, \cdots, n)$$

und deren Subdeterminanten mit Coefficienten, die nur von

$$z,\ x_1, \cdots, x_n,\ p_1, \cdots, p_n$$

abhängen. Soll nun

$$\delta J = \delta \int\int \cdots \int f\, dx_1\, dx_2 \cdots dx_n$$

verschwinden, so muss z der partiellen Differentialgleichung

$$V(f) \equiv \frac{\partial f}{\partial z} - \sum_{k=1}^{n} \frac{d}{dx_k} \frac{\partial f}{\partial p_k} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=i}^{n} \frac{d^2}{dx_i dx_k} \frac{\partial f}{\partial p_{ik}} = 0$$

genügen. $V(f) = 0$ ist, wie wir sehen werden, von der zweiten Ordnung, und hat dieselbe Beschaffenheit wie f. Auch ist, für $n = 1, 2, 3$ wenigstens, bekannt*), dass, wenn die Coefficienten von f beliebig sind, $V(f) = 0$ die allgemeinste Differentialgleichung zweiter Ordnung der Variationsrechnung darstellt.

Wenden wir nun auf $V(f) = 0$ die Berührungstransformation

$$z' = Z(z, x_1, \cdots, x_n, p_1, \cdots, p_n),$$
$$x_1' = X_1, \cdots, x_n' = X_n, \qquad p_1' = P_1, \cdots p_n' = P_n$$

an, indem wir die Transformation in bekannter Weise auf die p_{ik} erweitern, und dann $V(f)$ in den neuen Veränderlichen ausdrücken! Auch J wollen wir in

$$\bar{J} = \int\int \cdots \int \bar{f}\, dx_1'\, dx_2' \cdots dx_n'$$

transformiren, wo $\bar{f}$ der in den neuen Veränderlichen ausgedrückte Werth des Quotienten von f und

$$\sigma = \left|\frac{dX_i}{dx_k}\right|$$
$$(i, k = 1, 2, \cdots, n)$$

ist. (Sollen auch die Grenzen von $\bar{J}$ bestimmt werden, so muss man für jede Stelle $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ der Begrenzung von J auch die Werthe von z und den p_k kennen.) Betrachten wir diese Transformationen als Einführung neuer Coordinaten, so lässt sich vermuthen, das die in Angriff genommene Frage mit folgendem Satze beantwortet werden kann:

Die durch Transformation von $V(f) = 0$ erhaltene Gleichung unterscheidet sich nur durch einen unwesentlichen Factor von jener, die bei der Variation des transformirten Integrals zu lösen ist.

Wir brauchen also nur diesen Satz zu beweisen.

3. Vor allem entwickeln wir $V(f)$ ausführlich.

Die Determinante

$$|p_{ik}|$$
$$(i, k = 1, 2, \cdots, n)$$

und jede ihrer Subdeterminanten lässt sich als eine Functionaldeterminante

$$D_0 = \left|\frac{dU_\nu}{dx_\varkappa}\right|$$
$$(\nu, \varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

darstellen, wo U_ν nur von z, den x und den p abhängig ist. Z. B. für

$$\begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix}$$

*) Arthur Hirsch. Math. Annalen, Bd. 49.

ist

$$U_1 = p_1 \;\; U_2 = p_2 \;\; U_3 = x_3 \cdots U_n = x_n.$$

Bezeichnen wir den Coefficienten von D_0 in f mit U_0, *so ist f eine Summe von $U_0 D_0$ Producten, wo D_0 die dem Elemente U_0 adjungirte Subdeterminante von*

$$(1) \qquad \left| U_\nu \; \frac{dU_\nu}{dx_1} \; \frac{dU_\nu}{dx_2} \cdots \frac{dU_\nu}{dx_\nu} \right| \quad (\nu = 0, 1, 2, \cdots, n)$$

bedeutet, und $V(f)$ ist die Summe der einzelnen $V(U_0 D_0)$.

Bei der Berechnung von $V(U_0 D_0)$ hat man

$$(2) \qquad \frac{\partial (U_0 D_0)}{\partial z} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} U_0 D_{0\nu}^{(k)} \frac{\partial}{\partial z} \frac{dU_\nu}{dx_k} + D_0 \frac{\partial U_0}{\partial z}$$

wo $D_{0\nu}^{(k)}$ die zu $\frac{dU_\nu}{dx_k}$ adjungirte Subdeterminante von D_0 bezeichnet. Hier sind $\frac{\partial}{\partial z}$ und $\frac{d}{dx_k}$ vertauschbar, also

$$U_0 D_{0\nu}^{(k)} \frac{\partial}{\partial z} \frac{dU_\nu}{dx_k} = U_0 D_{0\nu}^{(k)} \frac{d}{dx_k} \frac{\partial U_\nu}{\partial z}$$

$$= \frac{d}{dx_k}\left(U_0 D_{0\nu}^{(k)} \frac{\partial U_\nu}{\partial z}\right) - U_0 \frac{\partial U_\nu}{\partial z} \frac{dD_{0\nu}^{(k)}}{dx_k} - D_{0\nu}^{(k)} \frac{\partial U_\nu}{\partial z} \frac{dU_0}{dx_k}.$$

Ferner hat man nach einem bekannten Satze über Functionaldeterminanten

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{dD_{0\nu}^{(k)}}{dx_k} = 0.$$

Folglich ist in (2)

$$\sum_{k=1}^{n} U_0 D_{0\nu}^{(k)} \frac{\partial}{\partial z} \frac{dU_\nu}{dx_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{d}{dx_k}\left(U_0 D_{0\nu}^{(k)} \frac{\partial U_\nu}{\partial z}\right) + D_\nu \frac{\partial U_\nu}{\partial z}$$

wo

$$D_\nu = -\sum_{k=1}^{n} D_{0\nu}^{(k)} \frac{dU_0}{dx_k}$$

die zu U_ν adjungirte Subdeterminante von (1) ist. Also haben wir

$$(3) \qquad \frac{\partial (U_0 D_0)}{\partial z} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{d}{dx_k}\left(U_0 D_{0\nu}^{(k)} \frac{\partial U_\nu}{\partial z}\right) + \sum_{\nu=0}^{n} D_\nu \frac{\partial U_\nu}{\partial z}.$$

Im zweiten Theile von $V(U_0 D_0)$ ist

$$\text{(4)} \qquad \frac{\partial (U_0 D_0)}{\partial p_k} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} U_0 D_{0\nu}^{(i)} \frac{\partial}{\partial p_k} \frac{d U_\nu}{d x_i} + D_0 \frac{\partial U_0}{\partial p_k}.$$

Hier sind $\frac{\partial}{\partial p_k}$ und $\frac{d}{d x_i}$ nicht immer vertauschbar, sondern man hat

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p_k} \frac{d U_\nu}{d x_i} &= \frac{\partial}{\partial p_k} \left(\frac{\partial U_\nu}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial U_\nu}{\partial z} + p_{i1} \frac{\partial U_\nu}{\partial p_1} + \cdots + p_{i\nu} \frac{\partial U_\nu}{\partial p_n} \right) \\ &= \frac{d}{d x_i} \frac{\partial U_\nu}{\partial p_k} + \delta_{ik} \frac{\partial U_\nu}{\partial z}, \end{aligned}$$

wo $\delta_{ik} = 0$, wenn $i \gtrless k$, hingegen $\delta_{ik} = 1$ ist, wenn $i = k$. Also ist

$$U_0 D_{0\nu}^{(i)} \frac{\partial}{\partial p_k} \frac{d U_\nu}{d x_i} = U_0 D_{0\nu}^{(i)} \frac{d}{d x_i} \frac{\partial U_\nu}{\partial p_k} + \delta_{ik} U_0 D_{\nu 0}^{(i)} \frac{\partial U_\nu}{\partial z},$$

und

$$\sum_{i=1}^{n} U_0 D_{0\nu}^{(i)} \frac{\partial}{\partial p_k} \frac{d U_\nu}{d x_i} = \sum_{i=1}^{n} U_0 D_{0\nu}^{(i)} \frac{d}{d x_i} \frac{\partial U_\nu}{\partial p_k} + U_0 D_{0\nu}^{(k)} \frac{\partial U_\nu}{\partial z},$$

wo

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} U_0 D_{0\nu}^{(i)} \frac{d}{d x_i} \frac{\partial U_\nu}{\partial p_k} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{d}{d x_i} \left(U_0 D_{0\nu}^{(i)} \frac{\partial U_\nu}{\partial p_k} \right) - D_{0\nu}^{(i)} \frac{d U_0}{d x_i} \frac{\partial U_\nu}{\partial p_k} - U_0 \frac{\partial U_\nu}{\partial p_k} \frac{d D_{0\nu}^{(i)}}{d x_i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{d x_i} \left(U_0 D_{0\nu}^{(i)} \frac{\partial U_\nu}{\partial p_k} \right) + D_\nu \frac{\partial U_\nu}{\partial p_k}. \end{aligned}$$

Folglich kann statt (4) geschrieben werden:

$$\text{(5)} \quad \frac{\partial (U_0 D_0)}{\partial p_k} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{d}{d x_i} \left(U_0 D_{0\nu}^{(i)} \frac{\partial U_\nu}{\partial p_k} \right) + \sum_{\nu=0}^{n} D_\nu \frac{\partial U_\nu}{\partial p_k} + \sum_{\nu=1}^{n} U_0 D_{0\nu}^{(k)} \frac{\partial U_\nu}{\partial z}.$$

Im letzten Theile von $V(U_0 D_0)$, nämlich in

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=i}^{n} \frac{d^2}{d x_i d x_k} \frac{\partial (U_0 D_0)}{\partial p_{ik}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (1 + \delta_{ik}) \frac{d^2}{d x_i d x_k} \frac{\partial (U_0 D_0)}{\partial p_{ik}},$$

ist

$$(1 + \delta_{ik}) \frac{\partial (U_0 D_0)}{\partial p_{ik}} = \sum_{\nu=1}^{n} \left(U_0 D_{0\nu}^{(i)} \frac{\partial U_\nu}{\partial p_k} + U_0 D_{0\nu}^{(k)} \frac{\partial U_\nu}{\partial p_i} \right),$$

also ist dieser Theil:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{d^2}{dx_i\,dx_k}\left(U_0 D_{0\nu}^{(i)}\frac{\partial U_\nu}{\partial p_k}\right). \tag{6}$$

Aus den Formeln (3), (5) und (6) erhalten wir

$$V(U_0 D_0)=\sum_{\nu=0}^{n}\left(D_\nu\frac{\partial U_\nu}{\partial z}-\sum_{k=1}^{n}\frac{d}{dx_k}\left(D_\nu\frac{\partial U_\nu}{\partial p_k}\right)\right). \tag{7}$$

Es ist auffallend, wenn auch leicht erklärlich, dass hier U_0 mit den übrigen U_ν in ganz gleicher Weise auftritt. Auch sieht man bereits, dass in $V(U_0 D_0)$ keine höheren Differentialquotienten auftreten, als bis zur dritten Ordnung. Dass auch letztere noch fehlen, ergiebt sich durch folgende Rechnung.

4. Wir wollen neben den bisherigen U noch ein U_{n+1} einführen, und bezeichnen mit $\Delta_{\nu\pi}$ diejenige Functionaldeterminante, die in

$$\left|\alpha_\nu\ \ U_\nu\ \ \frac{dU_\nu}{dx_1}\ \ \frac{dU_\nu}{dx_2}\cdots\frac{dU_\nu}{\partial x_n}\right|$$
$$(\nu=0,1,2,\cdots,n,n+1)$$

die adjungirte Subdeterminante von

$$\begin{vmatrix}\alpha_\nu & U_\nu\\ \alpha_\pi & U_\pi\end{vmatrix}$$

ist. Die α_ν sind hier Unbestimmte, die in dem Folgenden keine Rolle spielen.

Es ist dann

$$\sum_{\nu=0}^{n}\sum_{\pi=\nu+1}^{n+1}\Delta_{\nu\pi}[U_\nu U_\pi]=0, \tag{8}$$

wo $[U_\nu U_\pi]$ den Poisson'schen Klammerausdruck

$$[U_\nu U_\pi]=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial U_\nu}{\partial p_k}\frac{dU_\pi}{dx_k}-\frac{\partial U_\pi}{\partial p_k}\frac{dU_\nu}{dx_k}\right)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial U_\nu}{\partial p_k}\left(\frac{\partial U_\pi}{\partial x_k}+p_k\frac{\partial U_\pi}{\partial z}\right)-\frac{\partial U_\pi}{\partial p_k}\left(\frac{\partial U_\nu}{\partial x_k}+p_k\frac{\partial U_\nu}{\partial z}\right)\right)$$

bedeutet.

Es ist nämlich

$$\sum_{\nu=0}^{n}\sum_{\pi=\nu+1}^{n+1}\Delta_{\nu\pi}\left(\frac{\partial U_\nu}{\partial p_k}\frac{dU_\pi}{dx_k}-\frac{\partial U_\pi}{\partial p_k}\frac{dU_\nu}{dx_k}\right)$$

identisch mit der verschwindenden Determinante

$$\left|\frac{\partial U_\nu}{\partial p_k}\;\frac{d\,U_\nu}{d x_k}\;\frac{d\,U_\nu}{d x_1}\cdots\frac{d\,U_\nu}{d x_k}\cdots\frac{d\,U_\nu}{d x_k}\right|$$

$$(\nu = 0, 1, 2, \cdots, n, n+1).$$

Also muss, wenn wir nach k summiren auch die linke Seite von (8) verschwinden.

Nun ist in (8)

$$\Delta_{\nu, n+1} = -\Delta_{n+1,\nu} = (-1)^n D_\nu,$$

und für $\nu < \pi < n+1$ ist

$$\Delta_{\nu\pi} = (-1)^{\nu+\pi+1} D\left(\frac{U_0\; U_1 \cdots U_{\nu-1}\; U_{\nu+1} \cdots U_{\pi-1}\; U_{\pi+1}\; U_{\pi+2} \cdots U_{n+1}}{x_1\; x_2 \cdots x_\nu\;\; x_{\nu+1} \cdots x_{\pi-1}\; x_\pi\;\; x_{\pi+1} \cdots x_n}\right)$$

$$= (-1)^{\nu+n+1} D\left(\frac{U_0\; U_1 \cdots U_{\nu-1}\; U_{\nu+1} \cdots U_{\pi-1}\; U_{n+1}\; U_{\pi+1} \cdots U_n}{x_1\; x_2 \cdots x_\nu\;\; x_{\nu+1} \cdots x_{\pi-1}\; x_\pi\;\; x_{\pi+1} \cdots x_n}\right)$$

$$= (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^{n} D_{\nu\pi}^{(k)} \frac{d\,U_{n+1}}{d x_k}.$$

Also kann (8) auch so geschrieben werden:

$$\text{(9)} \qquad \sum_{\nu=0}^{n} D_\nu [U_\nu U_{n+1}] = \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\pi=\nu+1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} D_{\nu\pi}^{(k)} \frac{d\,U_{n+1}}{d x_k}\right) [U_\nu U_\pi],$$

woraus für $U_{n+1} = x_k$

$$\text{(10)} \qquad \sum_{\nu=0}^{n} D_\nu \frac{\partial U_\nu}{\partial p_k} = \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\pi=\nu+1}^{n} D_{\nu\pi}^{(k)} [U_\nu U_\pi]$$

fliesst. Hieraus ergiebt sich

$$\text{(11)} \qquad \sum_{\nu=0}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{d}{d x_k}\left(D_\nu \frac{\partial U_\nu}{\partial p_k}\right)\right) = \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\pi=\nu+1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} D_{\nu\pi}^{(k)} \frac{d}{d x_k} [U_\nu U_\pi]\right),$$

nachdem

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{d D_{\nu\pi}^{(k)}}{d x_k} = 0.$$

Die definitive Form von $V(U_0 D_0)$ ist also

$$\text{(12)} \qquad V(U_0 D_0) = \sum_{\nu=0}^{n} D_\nu \frac{\partial U_\nu}{\partial z} - \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\pi=\nu+1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} D_{\nu\pi}^{(k)} \frac{d}{d x_k} [U_\nu U_\pi]\right).$$

Hier ist D_ν von der Determinante, die durch Composition der beiden Matricen

$$\left\| \frac{\partial U_\nu}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial U_\lambda}{\partial z} \cdots \frac{\partial U_\lambda}{\partial x_n} + p_n \frac{\partial U_\lambda}{\partial z} \quad \frac{\partial U_\lambda}{\partial p_1} \cdots \frac{\partial U_\lambda}{\partial p_n} \right\|$$

$$(\lambda = 0, 1, \cdots, \nu - 1, \nu + 1, \cdots, n)$$

und

$$\left\| \frac{dx_\mu}{dx_1} \cdots \frac{dx_\mu}{dx_n} \, p_{\mu 1} \cdots p_{\mu n} \right\|$$

$$(\mu = 1, 2, \cdots n)$$

entsteht, höchstens dem Vorzeichen nach verschieden, ist also wie f eine lineare Function von

$$|p_{ik}|$$
$$(i, k = 1, 2, \cdots, n)$$

und ihren Minoren. Aehnliches gilt von

$$\sum_{k=1}^{n} D_{\nu\pi}^{(k)} \frac{d}{dx_k} [U_\nu U_\pi],$$

das man aus D_ν gewinnt, wenn man statt U_π den Klammerausdruck $[U_\nu U_\pi]$ setzt.

Auf diese Weise hat jedes $V(U_0 D_0)$, folglich auch $V(f)$ die Beschaffenheit von f.

5. Nun untersuchen wir die Wirkung der Berührungstransformation

$$z' = Z,\ x_1' = X_1, \cdots, x_n' = X_n,\ p_1' = P_1, \cdots, p_n' = P_n.$$

Nach der Definition der Berührungstransformationen ist

$$dZ - \sum_{k=1}^{n} P_k dX_k = \varrho \left(dz - \sum_{k=1}^{n} p_k dx_k \right), \tag{13}$$

wo ϱ bloss von

$$z,\ x_1, \cdots, x_n,\ p_1, \cdots, p_n$$

abhängt. Derselbe Factor spielt auch bei der Transformation des Klammerausdruckes eine Rolle. Es ist nämlich, wie bekannt:

$$[\varphi, \psi] = \varrho [\varphi, \psi]', \quad [\varphi, \psi] - \varphi \frac{\partial \psi}{\partial z} = [\varrho \varphi, \psi]' - \varrho \varphi \frac{\partial \psi}{\partial z'},$$

wo $[\varphi, \psi]'$ den bezüglich der neuen Variablen gebildeten Klammerausdruck bedeutet. Aus letzterer Formel hat man für $\varphi = 1$, $\psi = U_\nu$

$$\frac{\partial U_\nu}{\partial z} = \varrho \frac{\partial U_\nu}{\partial z'} + [U_\nu \varrho]'. \tag{14}$$

Das Verhalten von D_ν giebt die Formel

$$D_\nu = \sigma D_\nu' \tag{15}$$

an, wo

$$\sigma = \left| \frac{dX_i}{dx_k} \right|$$

$$(i, k = 1, 2, \cdots, n).$$

Aus (14) und (15) folgt

$$D_\nu \frac{\partial U_\nu}{\partial z} = \sigma D_\nu' \left(\varrho \frac{\partial U_\nu}{\partial z'} + [U_\nu \varrho]' \right). \tag{16}$$

Weiter ist

$$\sum_{k=1}^{n} D_{\nu\pi}^{(k)} \frac{d[U_\nu U_\pi]}{dx_k} = \sigma \sum_{k=1}^{n} D_{\nu\pi}'^{(k)} \frac{d[U_\nu U_\pi]}{dx_k'},$$

das heisst

$$\sum_{k=1}^{n} D_{\nu\pi}^{(k)} \frac{d[U_\nu U_\pi]}{dx_k} = \sigma \sum_{k=1}^{n} D_{\nu\pi}'^{(k)} \frac{d\varrho[U_k U_\pi]'}{dx_k'} \tag{17}$$

$$= \varrho\sigma \sum_{k=1}^{n} D_{\nu\pi}'^{(k)} \frac{d[U_\nu U_\pi]'}{dx_k'} + \sigma [U_\nu U_\pi]' \sum_{k=1}^{n} D_{\nu\pi}'^{(k)} \frac{d\varrho}{dx_k'}.$$

In Folge von (16) und (17) ist $V(U_0 D_0)$ gleich der Summe von

$$\varrho\sigma \left(\sum_{\nu=0}^{n} D_\nu' \frac{\partial U_\nu}{\partial z'} - \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\pi=\nu+1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} D_{\nu\pi}'^{(k)} \frac{d[U_\nu U_\pi]'}{dx_k'} \right) \right) \tag{18}$$

und

$$\sigma \left(\sum_{\nu=0}^{n} D_\nu' [U_\nu \varrho]' - \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\pi=\nu+1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} D_{\nu\pi}'^{(k)} \frac{d\varrho}{dx_k'} \right) [U_\nu U_\pi]' \right). \tag{19}$$

Der zweite Theil verschwindet aber in Folge der Relation (9), wenn dort $U_{n+1} = \varrho$ gesetzt wird, und die Relation auf die neuen Veränderlichen angewandt wird.

Wir haben also

$$V(U_0 D_0) = \varrho\sigma \left(\sum_{\nu=0}^{n} D_\nu' \frac{\partial U_\nu}{\partial z'} - \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{\pi=\nu+1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} D_{\nu\pi}'^{(k)} \frac{d[U_\nu U_\pi]'}{dx_k'} \right) \right). \tag{20}$$

Das ist aber der in 2. ausgesprochene Satz für $f = U_0 D_0$. Für ein beliebiges f ist $V(f)$ die Summe der einzelnen $V(U_0 D_0)$. Der fragliche Satz gilt also allgemein, und zwar ist der dort erwähnte Factor gleich $\varrho\sigma$.

6. Betrachten wir in f die Veränderlichen

$$z, x_1, \cdots, x_n, p_1, \cdots, p_n$$

als Functionen von n Veränderlichen

$$u_1 u_2 \cdots u_n,$$

so ist

$$A = f D \begin{pmatrix} x_1 \, x_2 \cdots x_n \\ \hline u_1 \, u_2 \cdots u_n \end{pmatrix} \tag{21}$$

eine lineare Form der Determinanten n^{ter} Ordnung in folgender Matrix

$$\left\| \frac{\partial x_1}{\partial u_k} \; \frac{\partial x_2}{\partial u_k} \cdots \frac{\partial x_n}{\partial u_k} \; \frac{\partial p_1}{\partial u_k} \; \frac{\partial p_2}{\partial u_k} \cdots \frac{\partial p_n}{\partial u_k} \right\|$$
$$(k = 1, 2, \cdots, n)$$

mit Coefficienten die nur z, die x_k und die p_k enthalten. *Nennen wir eine solche Form eine Ampère'sche,* so ist

$$L = V(f) D \begin{pmatrix} x_1 \, x_2 \cdots x_n \\ \hline u_1 \, u_2 \cdots u_n \end{pmatrix} \tag{22}$$

ebenfalls eine Ampère'sche Form, und der soeben bewiesene Satz kann in folgender Weise ausgesprochen werden:

Die Gleichung $L = 0$ ist bei Berührungstransformationen mit der Ampère'schen Form A invariant verknüpft.

Beschränken wir uns auf Transformationen, die

$$dz - \sum_{k=1}^{n} p_k \, dx_k$$

invariant lassen, so ist sogar die Form L mit A invariant verknüpft.

7. Darboux's Satz*), dass jede gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung einem Probleme oder eigentlich unendlich vielen Problemen der Variationsrechnung entspricht, erklärt sich nach Obigem einfach daraus, dass jede solche Gleichung in jede andere mit Hilfe einer Berührungstransformation überführt werden kann.

Ebenso entspricht jede Monge-Ampère'sche Gleichung

$$M(rt - s^2) + Rr + 2Ss + Tt + N = 0,$$

die zwei intermediäre Integrale erster Ordnung von der Form

$$\Phi(\varphi, \psi) = 0, \qquad \Psi(\varphi, \chi) = 0$$

hat, einem Probleme

$$\delta \int\!\!\int f \, dx \, dy = 0.$$

Jede solche Gleichung lässt sich nämlich in die Gleichung $r = 0$ des Problems

$$\delta \int\!\!\int p \, dx \, dy = 0$$

überführen. Soll eine Gleichung dieser Classe angehören, so muss

$$MN + S^2 - RT = 0$$

sein.

*) Théorie générale des surfaces, III. partie, p. 53 ff.

Umgekehrt: *Entspricht einem Probleme* $\delta\int\int f\,dx\,dy = 0$ *eine Monge-Ampère'sche Gleichung, für die*

$$MN + S^2 - RT = 0$$

ist, so hat diese Gleichung zwei intermediäre Integrale erster Ordnung von der Form

$$\Phi(\varphi, \psi) = 0, \qquad \Psi(\varphi, \chi) = 0.$$

Für $M = 0$ habe ich dies im 37. Bande der „Mathematischen Annalen" bewiesen. Der allgemeine Fall kann auf diesen immer zurückgeführt werden.

Man kann sich auch in folgender Weise ausdrücken: *Soll eine Monge-Ampère'sche Gleichung die einem Probleme* $\delta\int\int f\,dx\,dy = 0$ *entspricht, mittelst Berührungstransformationen eine Gestalt erhalten können, in der eine unabhängige Variable nur mehr als Parameter enthalten ist, so ist dazu die nothwendige und hinreichende Bedingung*

$$MN + S^2 - RT = 0.$$

8. Um ausser den eben genannten Gleichungen noch weiterer zu gedenken, die Variationsproblemen entsprechen, mögen jene Monge-Ampère'schen Gleichungen erwähnt werden, die sich auf die Form

$$s = \lambda(x, y) z$$

transformiren lassen.

Ob damit die Aufzählung für $n = 2$ vollständig ist oder nicht, ist nur eine von jenen vielen Fragen, zu denen die obigen Untersuchungen führen.

Les groupes qui coincident avec leurs groupes adjoints.

Par

Saul Epsteen à San Francisco.

Dans la théorie des groupes le groupe adjoint joue un rôle important. Quand on calcule les groupes adjoints de quelques groupes donnés, par les méthodes de Lie, on trouve en général qu'ils diffèrent des groupes donnés. Parfois ils coincident, comme par exemple, le groupe

$$zq - yr, \quad xr - zp, \quad yp - xq$$

coincide avec son groupe adjoint.

Voici notre problème: Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes qu'un groupe donné, $X_1, X_2, \cdots X_r$ coincide avec son groupe adjoint $E_1, E_2, \cdots E_r$ sous la forme

$$E_k = \Sigma \text{ const. } X_k?$$

Il s'agit de groupes qui ne contiennent pas de transformations permutables.*)

§ 1.

Nous savons que le groupe adjoint d'un groupe quelconque est toujours linéaire et homogène. Nous pouvons par conséquent constater immédiatement:

Les groupes linéaires et homogènes sont les seuls groupes qui puissent être identiques avec leurs groupes adjoints.

Cependant tous les groupes linéaires et homogènes ne coincident pas avec leurs groupes adjoints. Cette condition est donc nécessaire mais pas suffisante.

Dans les „Continuirliche Gruppen" (Lie-Scheffers) p. 467 la règle suivante est donnée pour la détermination du groupe adjoint:

„Man stellt den Ausdruck

(1) $$[\Sigma e_i X_i, \; X_k] \equiv \Sigma e_i c_{iks} X_s(f)$$

her und setzt darin schliesslich statt $X_s(f)$ allgemein $\frac{\partial f}{\partial e_s}$".

*) Les „Ausgezeichnete Transformationen" de Lie.

Supposons les substitutions effectuées, nous avons

$$(2)\qquad [\Sigma e_i X_i, X_k] \equiv E_k.$$

Et puis, formons le groupe adjoint du groupe $E_1, E_2, \cdots E_r$ d'après la même règle

$$[\Sigma e_i E_i, E_k] \equiv F_k.$$

Si nous écrivons dans l'équation (1) $X_k \equiv \alpha E_k$, nous trouverons, puisque le groupe adjoint a la même composition que le groupe donné, que $F_k = \alpha^2 E_k$, c'est-à-dire que nous avons le résultat suivant, déjà connu: Un group adjoint coincide avec son groupe adjoint.

Quoique nous ayons pris la relation spéciale $X_k = \alpha E_k$, il est évident que le résultat est général, parceque si nous avions écrit $X_k = \Sigma \,\text{const.}\, E_k$ nous aurions trouvé d'une manière analogue

$$F_k = \Sigma \,\text{const.}\, E_k.$$

Cherchons maintenant les conditions analytiques.

§ 2.

Pour comparer le groupe adjoint au groupe donné, il faut mettre x_i pour e_i et conséquemment p_s pour $\frac{\partial f}{\partial e_s}$ dans l'équation (1); il vient

$$(4)\qquad E_k = \sum_{s=1}^{r} \sum_{i=1}^{r} c_{iks} x_i p_s \qquad (k = 1, \cdots r)$$

et comme ce groupe doit coincider avec le groupe donné il faut l'égaler à

$$\alpha_{1\lambda} X_1 + \alpha_{2\lambda} X_2 + \cdots + \alpha_{r\lambda} X_r.$$

Ici les α sont des constantes.

Puisque les X sont linéaires et homogènes, nous pouvons écrire

$$(5)\qquad \begin{aligned} X_k \equiv & (a_{11}^{(k)} x_1 + a_{12}^{(k)} x_2 + \cdots + a_{1n}^{(k)} x_n) p_1 \\ & + (a_{21}^{(k)} x_1 + a_{22}^{(k)} x_2 + \cdots + a_{2n}^{(k)} x_n) p_2 \\ & + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot + \\ & + (a_{n1}^{(k)} x_1 + a_{n2}^{(k)} x_2 + \cdots + a_{nn}^{(k)} x_n) p_n. \end{aligned}$$

Pour que (4) coincide avec (5) il faut que le nombre des variables soit le même dans les équations (4) et (5); donc:

Pour qu'un groupe coincide avec son groupe adjoint il faut que le groupe donné ait le même nombre de variables comme de paramètres.

Supposons alors $r = n$, nous avons

$$(6)\qquad \sum_s \sum_i c_{iks} x_i p_s = \sum_k \alpha_{k\lambda} \begin{Bmatrix} (a_{11}^{(k)} x_1 + \cdots + a_{1r}^{(k)} x_r) p_1 \\ + \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ + (a_{r1}^{(k)} x_1 + \cdots + a_{rr}^{(k)} x_r) p_r \end{Bmatrix}$$

$$\equiv \sum_i (c_{ik1} x_i p_1 + c_{ik2} x_i p_2 + \cdots + c_{ikr} x_i p_r).$$

Ici p_s est égale à $\frac{\partial f}{\partial x_r}$, et puisque l'identité (6) est vraie pour toutes les valeurs de f, en écrivant successivement $f = x_1, x_2, \cdots x_r$ on obtiendra les équations suivantes:

$$(7)\qquad \begin{cases} \sum_k \alpha_{k\lambda}(a_{11}^{(k)} x_1 + a_{12}^{(k)} x_2 + \cdots + a_{1r}^{(k)} x_r) \equiv \sum_i c_{ik1} x_i, \\ \sum_k \alpha_{k\lambda}(a_{21}^{(k)} x_1 + a_{22}^{(k)} x_2 + \cdots + a_{2r}^{(k)} x_r) \equiv \sum_i c_{ik2} x_i, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \sum_k \alpha_{k\lambda}(a_{r1}^{(k)} x_1 + a_{r2}^{(k)} x_2 + \cdots + a_{rr}^{(k)} x_r) \equiv \sum_i c_{ikr} x_i. \end{cases}$$

Par une transposition cela donne

$$\left[\sum \alpha_{k\lambda} a_{11}^{(k)} - c_{1k1}\right] x_1 + \left[\sum \alpha_{k\lambda} a_{12}^{(k)} - c_{2k1}\right] x_2 + \cdots + \left[\sum \alpha_{k\lambda} a_{1r}^{(k)} - c_{rk1}\right] x_r \equiv 0,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\left[\sum \alpha_{k\lambda} a_{r1}^{(k)} - c_{1kr}\right] x_1 + \left[\sum \alpha_{k\lambda} a_{r2}^{(k)} - c_{2kr}\right] x_2 + \cdots + \left[\sum \alpha_{k\lambda} a_{rr}^{(k)} - c_{rkr}\right] x_r \equiv 0,$$

Ces équations sont indépendantes de x, et par conséquent

$$\sum_k \alpha_{k\lambda} a_{11}^{(k)} = c_{1k1}, \quad \sum_k \alpha_{k\lambda} a_{12}^{(k)} = c_{2k1}, \cdots \sum_k \alpha_{k\lambda} a_{1r}^{(k)} = c_{rk1}, \cdots$$

$$\cdots \sum_k \alpha_{k\lambda} a_{rt}^{(k)} = c_{tkr}$$

et en général

$$(9)\qquad \sum_k \alpha_{k\lambda} a_{mt}^{(k)} = c_{tkm}; \quad \text{où} \quad |\alpha_{k\lambda}| \neq 0,$$

($\lambda, k = 1, \cdots r$, et à chaque k il correspond un λ).

Quand on l'écrit complètement, l'équation (9) devient

$$(10)\qquad \alpha_{1\lambda} a_{mt}^{(1)} + \alpha_{2\lambda} a_{mt}^{(2)} + \cdots + \alpha_{r\lambda} a_{mt}^{(r)} = c_{tkm}$$

$m, t, k, \lambda = 1, \cdots r$, et entre les k et les λ il y a correspondance univoque.

Alors, nous avons r^3 équations pour les r^2 inconnus

$$\alpha_{1\lambda}, \cdots \alpha_{r\lambda}, \qquad (\lambda = 1, \cdots r).$$

Pour démontrer que cette condition est suffisante, nous supposons que ces équations ne se contredisent pas; alors nous pouvons intervertir l'ordre des raisonnements: nous pouvons construire l'expression

$$\alpha_{1\lambda} X_1 + \alpha_{2\lambda} X_2 + \cdots + \alpha_{r\lambda} X_r$$

qui est égale à $\Sigma c_{ik s} x_i p_s$ et par conséquent égale à E_k. Il s'ensuit que le groupe adjoint coincide avec le groupe donné; dès lors la condition (10) est nécessaire et suffisante.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un groupe coincide avec son groupe adjoint sont:

1° Il faut que le groupe soit linéaire et homogène de la forme

$$\text{(5)} \qquad \begin{aligned} X_k \equiv & (a_{11}^{(k)} x_1 + \cdots + a_{1n}^{(k)} x_n) p_1 \\ & + \cdots\cdots\cdots \\ & + (a_{n1}^{(k)} x_1 + \cdots + a_{nn}^{(k)} x_n) p_n \\ & (k = 1, \cdots r); \end{aligned}$$

2° Il faut que $n = r$;

3° Il faut que les r^3 équations

$$\text{(9)} \qquad \sum \alpha_{k\lambda} a_{mt}^{(k)} = c_{tkm}$$

($k, m, t, \lambda = 1, \cdots r$; où il existe correspondance univoque entre les k et les λ)

dans les r^2 inconnus $\alpha_{k\lambda}$ soient compatibles et qu'aucunes des valeurs α ne soient infinies.

Un cas spécial intéressant est $\alpha_{k\lambda} = 0$ pour $k \neq \lambda$ et $\alpha_{k\lambda} = \beta_k$ pour $k = \lambda$. Les équations (9) deviennent simplement $\beta_k a_{mt}^{(k)} = c_{tkm}$, c'est-à-dire:

Un groupe linéaire et homogène (5) coincidera avec son groupe adjoint s'il existe entre les coefficients $a_{mt}^{(k)}$ et les indices de composition c_{iks} une correspondance univoque de la forme

$$\text{(12)} \qquad \beta_k a_{mt}^{(k)} = c_{tkm}.$$

Exemple: Considérons

$$X_1 \equiv x_3 p_2 - x_2 p_3, \quad X_2 \equiv x_1 p_3 - x_3 p_1, \quad X_3 \equiv x_2 p_1 - x_1 p_2.$$

Nous avons ici

$$a_{23}^{(1)} = a_{31}^{(2)} = a_{12}^{(3)} = 1, \qquad a_{32}^{(1)} = a_{21}^{(2)} = a_{12}^{(3)} = -1$$

et tous les autres $a_{mt}^{(k)}$ sont $= 0$; les indices de composition sont

$$c_{123} = c_{131} = c_{322} = 1, \qquad c_{132} = c_{231} = c_{321} = -1.$$

Dans ce cas nous choisissons $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 1$ et nous voyons que la correspondance demandée existe. Alors le groupe coincide avec son groupe adjoint.

Genève, Octobre 1901.

Fricke, Robert, kurzgefafste Vorlesungen über verschiedene Gebiete der höheren Mathematik mit Berücksichtigung der Anwendungen. Analytisch-functionentheoretischer Teil. Mit 102 in den Text gedruckten Figuren. [IX u. 520 S.] gr. 8. 1900. In Leinwand geb. n. ℳ 14.—

Fricke, Robert, und **Felix Klein,** Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen. In 2 Bänden. II. Bd. 1. Hälfte. Mit 34 in den Text gedr. Fig. gr. 8. 1901. geh. n. ℳ 10.—

Gaufs, Carl Friedrich, Werke, herausg. v. d. Kgl. Gesellschaft d. Wissenschaften in Göttingen. 10 Bände. VIII. Band. [458 S.] 4. 1900. kart. n. ℳ 24.— (Band VII unter der Presse.)

Hammer, Dr. E., Sechsstellige Tafel der Werte $\overset{10}{\log}\frac{1+x}{1-x}$. Für jeden Wert des Arguments log x von 3.0—10 bis 9.99000—10 (vom Argument 9.99000—10 an bis 9.999700—10 sind die log $\frac{1+x}{1-x}$ nur noch fünfstellig angegeben, von dort an vierstellig [IV u. 73 S.] gr. 8. 1902. geb. n. ℳ 3.60.

Heun, Karl, die kinetischen Probleme der wissenschaftlichen Technik. Mit 16 Figuren im Text. A. u. d. T.: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. IX. Bd. 2. Heft. [IV u. 123 S.] gr. 8. 1900. geh. n. ℳ 4.—

Koenigsberger, Leo, die Principien der Mechanik. Math. Untersuchungen. [XII u. 228 S.] gr. 8. 1901. In Leinw. geb. ℳ 9.—

Kötter, Ernst, die Entwickelung der synthetischen Geometrie von Monge bis auf Staudt (1847). A. u. d. T.: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. V, 2. [XXVIII u. 486 S.] gr. 8. 1901. geh. n. ℳ 18.80.

Kronecker, L., Vorlesungen über Zahlentheorie. I. Band. Herausgegeben von Kurt Hensel. [XVI u. 509 S.] gr. 8. 1901. geh. n. ℳ 18.—

Lüroth, J., Vorlesungen über numerisches Rechnen. Mit 18 Figuren im Text. gr. 8. 1900. geh. n. ℳ 8.—

Müller, Felix, mathematisches Vokabularium, französisch-deutsch und deutsch-französisch, enthaltend die Kunstausdrücke aus der reinen und angewandten Mathematik. [XIV u. 315 S.] Lex.-8. 1901. In Leinw. geb. n. ℳ 20.—

Netto, E., Vorlesungen über Algebra. 2 Bde. II. Bd. 2. (Schlufs-) Lieferung. [XI u. S. 193—327.] gr. 8. 1900. geh. n. ℳ 10.—

——— Lehrbuch der Kombinatorik. [VIII u. 260 S.] 1902. gr. 8. In Leinwand geb. n. ℳ 9.—

Simon, Max, Euclid und die sechs planimetrischen Bücher. A. u. d. T.: Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschlufs ihrer Anwendungen. Begründet von Moritz Cantor. XI. Heft. Mit 192 Figuren im Text. [VII u. 141 S.] gr. 8. 1901. geh. n. ℳ 5.—

Stolz, O. und **J. A. Gmeiner,** theoretische Arithmetik. In 2 Abteilungen. I. Abteilung. Zweite umgearbeitete Auflage der Abschnitte I—IV des I. Teiles der Vorlesungen über allgemeine Arithmetik von O. Stolz. A. u. d. T.: B. G. Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der Mathematischen Wissenschaften mit Einschlufs ihrer Anwendungen. Band IV, 1. [IV u. 98 S.] gr. 8. 1901. geh. n. ℳ 2.40; in Leinwand geb. n. ℳ 3.—

Study, E., Geometrie der Dynamen. Die Zusammensetzung von Kräften und verwandte Gegenstände der Geometrie. 2 Lieferungen. I. Lieferung. Mit in den Text gedruckten Figuren. [240 S.] gr. 8. 1901. geh. n. ℳ 7.60.

von Weber, Dr. E., Privatdocent an der Universität München, Vorlesungen über das Pfaff'sche Problem und die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. A. u. d. T.: Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der Mathematischen Wissenschaften. Band II. [XI u. 622 S.] gr. 8. 1900. In Leinwd. geb. n. ℳ 24.—

INHALT.

**Wir ersuchen unsere geehrten Herren Mitarbeiter, etwaige, den Abha
Figuren — gleichviel ob dieselben im Texte selbst oder auf besonderen Tafeln
sollen — im Interesse einer raschen und exacten Ausführung stets auf be
wenn möglich in der gewünschten Grösse und in thunlichst präcis
Manuscripte beilegen zu wollen. Ausserdem wird um möglichst genaue
gebeten.**

**Jeder Band der Annalen besteht aus 4 Heft
36—38 Druckbogen. Um jedoch in jedem Heft nur
Artikel zu geben, werden die einzelnen Hefte mitunter
Stärke sein.**

**Der Preis für den Band von 4 Heften beträgt 20
erscheinen etwa 4—6 Hefte. Alle Buchhandlungen un
nehmen Bestellungen an.**

Verantwortliche Redaction: F. Klein, Göttingen, Wilh.-Weber-S
München, Hildegardstr. 1½, David Hilbert, Göttingen, Wil

Hierzu Beilagen von der Buchhandlung Gustav Fock G. m
B. G. Teubner in Leipzig.

Druck und Verlag von B. G. Teubner in Leipzig, Po

MATHEMATISCHE ANNALEN.

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN.

Unter Mitwirkung der Herren

PAUL GORDAN, ADOLPH MAYER, CARL NEUMANN, MAX NOETHER,
KARL VONDERMÜHLL, HEINRICH WEBER

gegenwärtig herausgegeben

von

Felix Klein
in Göttingen

Walther v. Dyck
in München

David Hilbert
in Göttingen.

56. Band. 2. Heft.

Mit 1 Figur im Text.

Ausgegeben am 8. Juli.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1902.

[Fortsetzung siehe 3. Umschlagseite.]

Beiträge zur Theorie und Anwendung der Variationsrechnung.

(Zweiter Aufsatz.)

Von

Adolf Kneser in Berlin.

Lord Kelvin hat in einem seiner populären Vorträge darauf hingewiesen, dass schon die Königin Dido veranlasst war, sich mit einem Problem der Variationsrechnung zu beschäftigen, und zwar nicht gerade mit einem der leichtesten. Es handelt sich für die kluge Königin darum, mit einer Kuhhaut ein möglichst grosses Stück Land zu umspannen; wir setzen voraus, dass der berühmte Einfall der Königin, die Kuhhaut in Streifen zu zerschneiden und diese zu einem Messband zusammenzuknüpfen, schon auf möglichst vortheilhafte Weise vollzogen sei. Dann wird verlangt, mit einer Linie von gegebener Länge eine Fläche von möglichst grossem Areal zu umspannen. Die Aufgabe erfordert indessen, um völlig bestimmt zu sein, nähere Festsetzungen; die Linie von gegebener Länge kann zunächst geschlossen sein; ein anderer Fall ist, dass die Endpunkte gegeben und durch eine feste Curve verbunden sind, welche zusammen mit der gesuchten Curve ein geschlossenes Gebiet umgrenzt. Diese beiden Fälle können jetzt als erledigt gelten; die gesuchte Linie ist ein Kreis oder Kreisbogen, und es sind nicht nur die nothwendigen Bedingungen des Maximums erfüllt, sondern dieses selbst ist vorhanden.

Neue Schwierigkeiten treten auf, wenn man die Endpunkte der gesuchten Curve nicht vorschreibt, sondern einen von ihnen oder beide willkürlich lässt. Auch in dieser Fassung konnte die Aufgabe für die Königin Dido praktische Bedeutung haben; handelt es sich doch um ein an der Meeresküste gelegenes Landstück, und es ist ganz natürlich, dass der Königin entweder über die Endpunkte ihrer Kuhhaut nichts vorgeschrieben wird, oder dass sie wenigstens nur an einer bestimmten Stelle der Küste zu messen beginnt, ohne sich von vornherein über den Punkt, in welchen sie endigen will, klar zu sein; die Königin kann hoffen, durch passende Wahl eines oder beider Endpunkte an der Küste das umspannte

Areal zu vergrössern. Es ist bekannt, dass auch in diesen Fällen die gesuchte Curve ein Kreisbogen sein muss; weit schwieriger aber ist die Frage, ob der Kreisbogen das gesuchte Maximum wirklich liefert, und es erhebt sich die Aufgabe, eine Grenze für die Länge des Kreisbogens anzugeben, welche, wenn sie nicht überschritten wird, das Maximum der umspannten Fläche sichert, aber nicht überschritten werden darf, ohne das Maximum zu gefährden. Diese Aufgabe ist für den Fall, dass der Anfangspunkt fest ist in § 34 meines Lehrbuchs der Variationsrechnung (Braunschweig 1900) gelöst. Auf den vorliegenden Blättern leite ich die dort erhaltenen Resultate mit einigen Erweiterungen auf eine neue Weise her, um eine so altberühmte und leicht zu formulirende Aufgabe mit den geringsten Mitteln zu erledigen; ausserdem aber bestimme ich jene Grenze auch für den Fall, dass beide Endpunkte der gesuchten Curve auf gegebenen Curven frei gewählt werden können. Es liegt dann eine Aufgabe der Variationsrechnung vor, bei welcher, wie man sagt, beide Integrationsgrenzen variabel sind; für eine solche hat man meines Wissens die Grenze, an welcher das Extremum aufhört, abgesehen von dem Falle der kürzesten Linie in der Ebene, bisher noch nicht untersucht und hinreichende Bedingungen des Extremums noch nicht aufgestellt.

Eine werthvolle Vorarbeit liegt in einer Abhandlung von Erdmann (Schlömilch's Zeitschrift Bd. 23) vor; ihr folge ich besonders darin, dass ich einen von Euler herrührenden und in seinem klassischen Werke Methodus inveniendi vielfach benutzten Kunstgriff anwende, durch welchen die Aufgabe, welche zunächst ein relatives Extremum fordert, auf die Untersuchung eines absoluten Extremums zurückgeführt wird.

Eine specielle Aufgabe, wie die bezeichnete, in allen Einzelheiten durchzuarbeiten erscheint mir fruchtbarer, als, wie es in der Mathematik vorgekommen ist, leere Allgemeinheiten zu entwickeln, zu denen die concreten Fälle mühsam gesucht werden müssen oder trivial sind. Gerade bei einer solchen genauen Einzeluntersuchung zeigen sich erst alle principiellen Schwierigkeiten sowie die nöthigen und möglichen Modificationen der allgemeinen Theorie. Das kann man bei den meisten wichtigeren Aufgaben der Variationsrechnung beobachten; viele von ihnen haben so zu sagen persönliche Eigenthümlichkeiten, die es unmöglich machen, sie mit einem Schlage durch Anwendung allgemeiner Sätze zu erledigen, und das giebt ihnen gerade ihren Reiz. Denn das eigentlich Interessante in der Wissenschaft, wie im Leben ist doch wohl nicht die widerspruchslose Anwendung der Regeln und nicht die schrankenlose Willkür der individuellen Bildungen, sondern der Conflict zwischen beiden, die Art, wie das Einzelne mit den allgemeinen Regeln in Widerspruch geräth und sich mit ihnen auseinandersetzt.

§ 1.

Das einfachere Problem; nothwendige Bedingungen des Extremums.

$\mathfrak{C}_0$ sei eine beliebige ebene Curve, deren Stetigkeitseigenschaften wir noch genauer formuliren, 0 und 1 seien zwei ihrer Punkte von denen der erste gegeben ist, der zweite zur Verfügung steht. Dann verlangt die Aufgabe, die wir im Auge haben, bei einer gewissen Auffassung, den Punkt 1 so zu wählen und die Punkte 0, 1 durch eine solche Curve $\mathfrak{C}$ zu verbinden, dass der auf dieser gemessene Bogen 01 die vorgeschriebene Länge l habe, die Fläche aber, welche von den beiden den Curven $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}_0$ angehörigen Bögen 01 umschlossen wird, ein grösstmögliches Areal besitze. Um analytische Hülfsmittel zur Behandlung dieser Aufgabe zu gewinnen, werde in der Ebene ein beliebig festgesetzter Drehungs- und und Umlaufssinn als positiv bezeichnet, und der Punkt 0 zum Anfangspunkt eines Polarcoordinatensystems gemacht; in diesem sei r der Radius, und φ der Winkel, um welchen eine Halbgerade im positiven Sinne gedreht werden muss, damit sie aus einer willkürlich festgelegten Anfangsrichtung in die Richtung des Radius r übergehe. Alsdann wird das Areal der von den Curven $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}_0$ umschlossenen Fläche in folgender Weise ausgedrückt:

$$J = \frac{1}{2}\int r^2\, d\varphi + \frac{1}{2}\int r^2\, D\varphi;$$

in dem ersten der rechts stehenden Integrale ist längs der Curve $\mathfrak{C}$ von 0 nach 1, im zweiten längs der Curve $\mathfrak{C}_0$ von 1 nach 0 hin integrirt, womit die Bedeutung der Differentialzeichen d und D festgesetzt ist.

Der Ausdruck J stellt das zu untersuchende Areal mit einem gewissen Vorzeichen dar; denn da allgemein $\frac{1}{2} r^2\, d\varphi$ ein Element der vom Radius überstrichenen Fläche bedeutet, positiv oder negativ genommen, je nachdem der Winkel φ wächst oder abnimmt, so ist J die algebraische Summe der Flächentheile, welche der Radius 02 beschreibt, wenn der Punkt 2 erst den Bogen 01 längs der Curve $\mathfrak{C}$, dann den Bogen 10 längs der Curve $\mathfrak{C}_0$ durchläuft. Diese Summe ist aber mit dem im gewöhnlichen Sinne bestimmten Areal der zwischen den beiden Bögen 01 liegenden Fläche, wenn diese sich nicht schneiden, identisch oder ihm entgegengesetzt, je nachdem man die Fläche bei der oben beschriebenen Bewegung des Punktes 2 im positiven oder negativen Sinne umkreist. Der ursprüngliche Sinn der Aufgabe ist aber offenbar der, dass man das absolut genommene Areal zwischen $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}_0$ zum Maximum machen soll: man hat daher, je nachdem der erste oder zweite jener beiden Fälle eintritt, das Maximum oder Minimum des Integrals J aufzusuchen.

Um nun in der Summe J Integrationsvariable einzuführen, von denen die vorkommenden Grössen in eindeutiger Weise abhängen, bezeichnen wir durch s den vom Punkte 0 ab in der Richtung nach 1 hin gemessenen Bogen der Curve $\mathfrak{C}$, durch σ den von einem beliebigen Anfangspunkte begonnenen Bogen der Curve $\mathfrak{C}_0$, durch ϱ, ψ die Polarcoordinaten eines Punktes der letzteren. Die Werthe, welche irgend eine Variable, insbesondere eine der Grössen r, φ, σ, s in einem durch eine Ziffer bezeichneten Punkte annimmt, werden stets durch Anheftung dieser Ziffer bezeichnet, sodass z. B. r_1 der Werth von r im Punkte 1 ist. Dann ist offenbar

$$s_0 = 0, \quad s_1 = l, \quad D\varphi = \frac{d\psi}{d\sigma}\, d\sigma,$$

$$(1) \qquad \begin{aligned} \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 &= 1, \\ \left(\frac{d\varrho}{d\sigma}\right)^2 + \varrho^2 \left(\frac{d\psi}{d\sigma}\right)^2 &= 1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2}\int_0^l r^2 \frac{d\varphi}{ds}\, ds + \frac{1}{2}\int_{\sigma_1}^{\sigma_0} \varrho^2 \frac{d\psi}{d\sigma}\, d\sigma \\ &= \frac{1}{2}\int_0^l r^2 \frac{d\varphi}{ds}\, ds - \frac{1}{2}\int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \varrho^2 \frac{d\psi}{d\sigma}\, d\sigma. \end{aligned}$$

Bei dieser Darstellung der Grösse J wird implicite vorausgesetzt, was wir hiermit ausdrücklich fordern, dass längs der Curven $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}_0$ die Grössen r, φ, ϱ, ψ stetige Functionen der Bogenlänge seien und erste Ableitungen nach dieser besitzen, die in solcher Weise integrirbar sind, dass die vorkommenden Integrale nach den gewöhnlichen Regeln der Differentialrechnung differenzirt werden können. Für die gesuchte Curve $\mathfrak{C}$ wollen wir weiter noch voraussetzen, dass längs ihrer auch die zweiten Ableitungen von r und φ nach s stetige Functionen dieser letzteren Grösse seien, womit die sogenannten discontinuirlichen Lösungen der Aufgabe von vornherein ausgeschlossen werden. Setzen wir noch

$$p = \frac{dr}{ds}$$

so ergiebt sich der ersten Identität (1) zufolge

$$J = \frac{1}{2}\int_0^l r\sqrt{1-p^2}\, ds - \frac{1}{2}\int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \varrho^2 \frac{d\psi}{d\sigma}\, d\sigma,$$

wobei das Vorzeichen der Quadratwurzel durch die Gleichung

$$\sqrt{1-p^2} = r\frac{d\varphi}{ds}$$

definirt wird.

Die Curve $\mathfrak{C}$ soll nun unter den die Curve $\mathfrak{C}_0$ mit dem Punkte 0 verbindenden Curven von der Länge l einen extremen Werth von J ergeben; speciell also soll sie auch diese Grösse zum Extremum machen, wenn man sie mit anderen Curven von derselben Länge und demselben Endpunkte 1 vergleicht. Für alle diese Curven bleibt der zweite Summand des Ausdrucks J derselbe; die Curve $\mathfrak{C}$ muss also auch den Ausdruck

$$J^0 = \int_0^l r\sqrt{1-p^2}\,ds$$

zum Extremum machen, wenn man den Punkt 1 als fest betrachtet. Indem wir aus dieser Forderung die Differentialgleichungen der Curve $\mathfrak{C}$ herleiten, benutzen wir den auch von Erdmann angewandten Kunstgriff Euler's, durch welchen das isoperimetrische Problem auf ein Problem des absoluten Extremums zurückgeführt wird.

Um die Bedeutung dieses Kunstgriffs völlig aufzuklären, verstehen wir unter s, r rechtwinklige Coordinaten in einer Ebene, die wir als die *zweite* bezeichnen, im Gegensatz zur ersten, in welcher die Curven $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}_0$ gezeichnet sind. Dann entspricht jeder vom Punkte 0 ausgehenden Curve der ersten Ebene in der zweiten eine ebenfalls vom Coordinatenanfangspunkt ausgehende Curve, bei welcher die Abscisse jedes Punktes der längs der ersten Curve bis zu dem entsprechenden Punkte gemessenen Bogenlänge, die Ordinate dem Radius in der ersten Curve gleich ist. Speciell entspricht der Curve $\mathfrak{C}$ eine Curve $\mathfrak{C}'$, welche im Punkte

$$s = l, \qquad r = r_1$$

endigt. Umgekehrt sei in der zweiten Ebene eine Curve $\mathfrak{C}_1'$ vom Coordinatenanfangspunkt in das Gebiet positiver Coordinaten hineingezogen, längs deren $dr:ds$ dem absoluten Werthe nach nicht grösser als $+1$ wird; dann entspricht ihr eine Curve $\mathfrak{C}_1$ in der ersten Ebene mittelst der Gleichungen

$$r = r, \qquad d\varphi = \frac{ds}{r}\sqrt{1-\left(\frac{dr}{ds}\right)^2}$$

oder

$$(2) \qquad r = r, \qquad \varphi = \varphi_0 + \int_0^s \frac{ds}{r}\sqrt{1-\left(\frac{dr}{ds}\right)^2},$$

in welchen die Quadratwurzel ein festes Vorzeichen haben und links die Polarcoordinaten der ersten Ebene stehen; bei beliebig fixirtem Werth von φ_0 ist die Länge dieser Curve gleich der Abscisse der Curve $\mathfrak{C}_1'$. Die willkürliche Grösse φ_0 kann benutzt werden, um dem Winkel φ in irgend einem Punkte, etwa im Endpunkte, einen vorgeschriebenen

Werth beizulegen. Hat nun die Curve $\mathfrak{C}_1'$ Anfangs- und Endpunkt mit $\mathfrak{C}'$ gemein — es sind die Punkte $(0, 0)$ und (l, r_1) in der zweiten Ebene —, so wird im Endpunkt der Curve $\mathfrak{C}_1$ für φ der Werth

$$\varphi_0 + \int_0^l \frac{ds}{r} \sqrt{1 - \left(\frac{dr}{ds}\right)^2}$$

erhalten; setzt man daher

$$\varphi_0 = \varphi_1 - \int_0^l \frac{ds}{r} \sqrt{1 - \left(\frac{dr}{ds}\right)^2},$$

so endigt die Curve $\mathfrak{C}_1$ ebenso wie $\mathfrak{C}$ im Punkte 1, und hat dieselbe Bogenlänge wie $\mathfrak{C}$.

Speciell werde die Curve $\mathfrak{C}_1'$ so gewählt, dass sie mit der Curve $\mathfrak{C}'$ zusammenfällt bis auf ein Stück, längs dessen $|p|$ den Werth 1 nicht erreicht; weicht $\mathfrak{C}_1'$ längs dieses Stückes auch bezüglich der Richtung hinreichend wenig von $\mathfrak{C}'$ ab, so ist auch für dieses Stück die Grösse p von ± 1 verschieden, und die Construction der Curve $\mathfrak{C}_1$ ist nach der angegebenen Vorschrift (2) möglich, und sie gehört, da sie Länge und Endpunkte mit $\mathfrak{C}$ gemein hat, zu denen, mit welchem $\mathfrak{C}$ in der vorliegenden Extremumsaufgabe verglichen werden muss. Es muss daher in leicht verständlicher Bezeichnung die Differenz

$$J^0(\mathfrak{C}_1) - J^0(\mathfrak{C}),$$

mithin auch die hiermit identische Grösse

$$J^0(\mathfrak{C}_1') - J^0(\mathfrak{C}')$$

ein festes Vorzeichen haben. Aus dieser letzteren Forderung ergiebt sich, wenn man

$$J^0 = \int F(r, s, dr, ds)$$

setzt, nach den gewöhnlichen Regeln der Variationsrechnung

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial r} - d\left(\frac{\partial F}{\partial dr}\right) &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial s} - d\left(\frac{\partial F}{\partial ds}\right) &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Diesen Gleichungen muss also jedes Stück der Curve $\mathfrak{C}$ genügen, auf welchem p die Werthe ± 1 nicht erreicht. Dass diese Werthe ausgeschlossen werden, ist übrigens auch deshalb nöthig, weil für sie die Function $F(r, s, dr, ds)$ singulär und der Ausdruck

$$F(r + \delta r,\ s + \delta s,\ dr + d\delta r,\ ds + d\delta s)$$

nicht mehr nach ganzen Potenzen von $\delta r, d\delta r, \cdots$ entwickelt werden kann, was die gewöhnliche Argumentation der Variationsrechnung voraussetzt.

Setzt man in die zweite Gleichung (3) den Werth

$$F = r\sqrt{ds^2 - dr^2}$$

ein, in welchem die Quadratwurzel, da p von ± 1 verschieden bleibt, ein festes Vorzeichen besitzt, so ergiebt sich, unter c eine Constante verstanden,

(4) $$\frac{r}{\sqrt{1-p^2}} = c$$

oder, da das Vorzeichen der Quadratwurzel durch die Gleichung

$$r\frac{d\varphi}{ds} = \sqrt{1-p^2}$$

definirt wird,

(5) $$d\varphi = \frac{ds}{c}.$$

Hier muss zunächst die Gleichung

$$dr = 0, \qquad p = 0,$$

welche die Gleichung (4) erfüllt, ausgeschlossen werden, da sie mit der ersten Gleichung (3) in Widerspruch steht: diese lautet nämlich

$$\sqrt{ds^2 - dr^2} - d\left(\frac{-r\,dr}{\sqrt{ds^2 - dr^2}}\right) = 0$$

und würde, wenn man $dr = 0$ setzte, auch $ds = 0$ ergeben, was bei einer eigentlichen Curve nicht möglich ist. Bringt man nun die Gleichung (4) auf die Form

$$ds = \frac{\varepsilon\, dr}{\sqrt{c^2 - r^2}},$$

so kann, da $dr : ds$ oder p sich längs des betrachteten Bogens der gesuchten Curve stetig ändert, die Quadratwurzel ihr Vorzeichen nur ändern, indem sie verschwindet. Für eine Strecke, auf welcher dies nicht eintritt, also p von 0, $+1$ und -1 verschieden bleibt, hat man daher

$$\varepsilon\frac{ds}{c} = \frac{\frac{dr}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{r}{c}\right)^2}},$$

wobei ε ein bestimmter der Werthe ± 1 und die Quadratwurzel positiv ist. Hieraus ergiebt sich, indem man die Gleichung (5) berücksichtigt und unter b eine neue Constante versteht,

$$\varepsilon\, d\varphi = d \arcsin\frac{r}{c},$$

(6) $$r = c \sin(\varepsilon\varphi + b).$$

Schreibt man für die letzte Gleichung

$$r^2 = c\varepsilon \cos b \cdot r \sin \varphi + c \sin b \cdot r \cos \varphi$$

und benutzt die zwischen rechtwinkligen und Polarcoordinaten geltenden Beziehungen

$$x = r \cos \varphi, \qquad y = r \sin \varphi,$$

so erhält man

$$x^2 + y^2 = c\varepsilon \cos b \cdot y + c \sin b \cdot x;$$

ein Bogen der gesuchten Curve, auf welchem p von ± 1 und 0 verschieden ist, muss also Theil eines durch den Coordinatenanfangspunkt gehenden Kreises sein. Nun ist aus elementaren Erwägungen unmittelbar ersichtlich, dass zwei solche Bögen, welche verschiedenen Kreisen angehören, sich stets nur in einer Ecke aneinanderschliessen können; soll also, wie wir verlangen, die gesuchte Curve eine stetig veränderliche Tangente haben, so kann sie nichts anderes sein als ein einziger im Punkte 0 beginnender Kreisbogen. Längs eines solchen dreht sich der Radius, der den Punkt 0 mit einem längs des Bogens in bestimmter Richtung laufenden Punkte verbindet, in einem bestimmten Sinne; die Zahl ε, welche diesen Sinn mittelst der Gleichung (5) bestimmt, ist also längs unsrer Curve constant. Der Durchmesser des Kreises ist offenbar $\pm c$; durch Vermehrung der Constanten b um π kann man nöthigenfalls bewirken dass c positiv ist. Ohne Schaden der Allgemeinheit kann also angenommen werden, dass c der Durchmesser des Kreises $\mathfrak{C}$ ist, wobei dann freilich die Gleichung (5) in dem Falle, dass der Radius sich bei wachsenden Werthen von s im negativen Sinne dreht, durch die Gleichung

$$d\varphi = -\frac{ds}{c}$$

zu ersetzen ist. Bei der festgesetzten Bedeutung der Zahl ε und positivem Werth von c hat man also allgemein

$$d\varphi = \frac{\varepsilon\, ds}{c}. \tag{7}$$

Die durchgeführte Argumentation versagt in dem Falle, dass längs eines Stücks der gesuchten Curve p entweder den Werth ± 1 hat oder verschwindet. Letzterer Fall ist, wie oben schon gezeigt, auszuschliessen; in ersterem Falle würde das betreffende Stück ein Segment einer durch den Anfangspunkt gehenden Geraden sein; ein solches kann sich mit den oben definirten Kreisbögen nur in Ecken zu einer zusammenhängenden Curve ergänzen; es bleibt also nur der Fall übrig, dass die Curve $\mathfrak{C}$ eine vom Punkte 0 ausgehende Gerade ist. Wir unterlassen eine nähere Untersuchung dieses Ausnahmefalles.

§ 2.

Die auf die variable Grenze bezügliche Bedingung.

Aus dem Umstande, dass über den Punkt 1 längs der Curve $\mathfrak{C}_0$ frei verfügt werden kann, ergiebt sich eine neue Bedingung, welche der Kreisbogen $\mathfrak{C}$ im Punkte 1 erfüllen muss, wenn das gesuchte Extremum vorliegen soll.

Um diese Bedingung abzuleiten, combiniren wir die Gleichungen (6), (7) des § 1 und erhalten für den Bogen $\mathfrak{C}$ die Gleichung

$$r = c \sin\left(\frac{s}{c} + b^0\right),$$

in welcher c der Durchmesser des Kreises, dem der Bogen $\mathfrak{C}$ angehört, und b^0 eine Constante ist. Da nun der Bogen s vom Punkte 0 an gerechnet wird, so folgt

$$\sin b^0 = 0;$$

b^0 hat also bis auf Vielfache von 2π einen der Werthe 0 und π. Da ferner c, s und r positive Grössen sind, und Vielfache von 2π weggelassen werden dürfen, so kann man

$$b^0 = 0$$

setzen, und es ergiebt sich

$$r = c \sin\frac{s}{c}$$

als Gleichung des Bogens $\mathfrak{C}$; denkt man denselben in der Richtung wachsender s durchlaufen, so bleibt die Grösse $\frac{s}{c}$ zwischen den Grenzen 0 und π. Daraus folgt, dass die Grösse

$$\frac{\partial r}{\partial c} = \sin\frac{s}{c} - \frac{s}{c}\cos\frac{s}{c}$$

abgesehen vom Punkte 0 längs des Bogens $\mathfrak{C}$ von Null verschieden ist; denn die kleinste von Null verschiedene Wurzel der Gleichung

$$\operatorname{tang} x - x = 0$$

liegt bekanntlich zwischen π und $\frac{3\pi}{2}$.

Hieraus ergiebt sich weiter, dass man die Gleichung

$$\rho - c^0 \sin\frac{l}{c^0} = 0, \tag{1}$$

in welcher ρ die in § 1 definirte Function von σ ist, nach c^0 auflösen kann, wenn $|\sigma - \sigma_1|$ hinreichend klein ist; denn sie ist für $c^0 = c$, $\sigma = \sigma_1$

erfüllt und die Ableitung ihrer linken Seite noch c^0 ist für dieses Werthsystem von Null verschieden.

Der erhaltene Werth von c^0 convergirt gegen die Grenze c, wenn die Differenz $|\sigma - \sigma_1|$ und damit $|\varrho - r_1|$ unendlich abnimmt.

Dieses Resultat bedeutet geometrisch, dass jeder in der Umgebung von 1 liegende Punkt der Curve $\mathfrak{C}_0$ mit 0 durch einen Kreisbogen von der Länge l verbunden werden kann, für welchen die Gleichung

$$(2) \qquad r = c^0 \sin \frac{s}{c^0}$$

besteht. Ein solcher Kreisbogen ist zunächst zweideutig bestimmt, da ja durch zwei Punkte je zwei Kreisbögen von derselben Länge gelegt werden können. Der Kreisbogen wird aber bestimmt, wenn noch festgesetzt wird, dass längs seiner der Drehungssinn des Radius 02, wenn der Punkt 2 vom Punkte 0 nach der Curve $\mathfrak{C}_0$ hin läuft, ein vorgeschriebener sein soll, etwa derselbe, wie für den Bogen $\mathfrak{C}$. Jetzt bilden wir, indem wir für r den Ausdruck (2) einsetzen und die Grösse c^0 durch die Gleichung (1) als Function von σ definirt denken, die Grösse

$$\Psi(\sigma) = \frac{1}{2}\int_0^l r\sqrt{1-p^2}\,ds - \frac{1}{2}\int_{\sigma_0}^{\sigma} \varrho^2 \frac{d\psi}{d\sigma}\,d\sigma,$$

welche für $\sigma = \sigma_1$, $c^0 = c$ den Werth J annimmt. Da nun die Kreisbögen (2) die Curve $\mathfrak{C}_0$ erreichen, wenn $s = l$ wird, so gehören sie zu den Curven, mit welchen man $\mathfrak{C}$ hinsichtlich des Werthes von J vergleichen muss, und die Forderung, dass J ein Extremum sei, ergiebt unmittelbar

$$\Psi'(\sigma_1) = 0.$$

Schreiben wir den Ausdruck $\Psi(\sigma)$ in der Form

$$\Psi(\sigma) = \int_0^l f(r, p)\,ds - \frac{1}{2}\int_{\sigma_0}^{\sigma} \varrho^2 \frac{d\psi}{d\sigma}\,d\sigma,$$

und operiren mit dem Zeichen der Ableitung nach σ, wie man in der Variationsrechnung mit dem Zeichen δ zu thun pflegt, so ergiebt sich, indem die partiellen Ableitungen von f durch ein entsprechendes Suffix bezeichnet werden,

$$\Psi'(\sigma) = \int_0^l \left(f_r \frac{\partial r}{\partial \sigma} + f_p \frac{\partial p}{\partial \sigma}\right) ds - \frac{1}{2}\varrho^2 \frac{d\psi}{d\sigma}$$

$$= f_p \frac{\partial r}{\partial \sigma}\Big|_0^l + \int_0^l \left(f_r - \frac{df_p}{ds}\right) ds - \frac{1}{2}\varrho^2 \frac{d\psi}{d\sigma}.$$

Nun verschwindet der Integrand im zweiten Summanden, da alle betrachteten Kreisbögen Extremalen des Integrals

$$\int f(r, p)\, ds$$

sind; also folgt, indem man den Werth von f_p ausrechnet und einsetzt,

$$\Psi'(\sigma) = \frac{-rp}{2\sqrt{1-p^2}} \frac{\partial r}{\partial \sigma}\bigg|_0^l - \frac{1}{2}\varrho^2 \frac{d\psi}{d\sigma};$$

und da für $s = 0$ der Werth von r stets Null ist, erhält man für den Punkt 1 die Gleichung

$$\Psi'(\sigma) = \frac{-rp}{2\sqrt{1-p^2}} \frac{\partial r}{\partial \sigma}\bigg|^l - \frac{1}{2}\varrho^2 \frac{d\psi}{d\sigma} = 0. \tag{3}$$

Um diese Gleichung zu deuten, bedenken wir, dass nach (1) und (2) für $s = l$ die Gleichungen

$$r = \varrho, \qquad \frac{\partial r}{\partial \sigma} = \frac{d\varrho}{d\sigma}$$

bestehen, und dass immer

$$\sqrt{1-p^2} = r\frac{d\varphi}{ds}$$

zu setzen ist; man erhält so aus der Gleichung (3) für den Punkt 1 das Resultat

$$\frac{dr}{ds}\frac{d\varrho}{d\sigma} + \varrho^2 \frac{d\varphi}{ds}\frac{d\psi}{d\sigma} = 0. \tag{4}$$

Die Curven $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}_0$ müssen sich also im Punkte 1 unter rechtem Winkel schneiden.

Versteht man unter ds, $d\sigma$ positive Differentiale, so sind für $s = l$, $\sigma = \sigma_1$ die Grössen

$$\frac{dr}{ds}ds, \qquad \varrho\frac{d\varphi}{ds}ds$$

die Componenten des in der Richtung 01 durchlaufenen Bogenelements der Curve $\mathfrak{C}$ im Punkte 1, genommen nach der Richtung wachsender r und nach der gegen diese um 90° im positiven Sinne gedrehten Richtung wachsender φ bei festem r, und die analoge Bedeutung haben die Grössen

$$\frac{d\varrho}{d\sigma}d\sigma, \qquad \varrho\frac{d\psi}{d\sigma}d\sigma$$

für das im Sinne wachsender σ durchlaufene Element der Curve $\mathfrak{C}_0$ im Punkte 1. Die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{dr}{ds}ds & r\frac{d\varphi}{ds}ds \\ \frac{d\varrho}{d\sigma}d\sigma & \varrho\frac{d\psi}{d\sigma}d\sigma \end{vmatrix}$$

giebt daher den doppelten Inhalt des mit seinem Vorzeichen genommenen Dreiecks an, welches die beiden Bogenelemente ds und $d\sigma$ einschliessen, wenn der Umlaufssinn dadurch bestimmt wird, dass man das Element ds von seinem Anfangspunkte beginnend durchläuft.

Nun kann man aber der Gleichung (4) zufolge setzen

$$\frac{d\varrho}{d\sigma} = -\eta\varrho\frac{d\varphi}{ds}, \qquad \varrho\frac{d\psi}{d\sigma} = \eta\frac{dr}{ds}, \tag{5}$$

und die Identitäten (1) des § 1 ergeben

$$\eta^2 = +1;$$

man hat also die Gleichung

$$\Delta = \eta,$$

und die Zahl η ist die positive oder negative Einheit, je nachdem das Element $d\sigma$ gegen das Element ds im positiven oder negativen Sinne um 90^0 gedreht ist, was wir in leicht verständlicher Bezeichnung schreiben

$$\sin(ds, d\sigma) = \eta.$$

Beiläufig folgt aus den Gleichungen (5), dass im Punkte 1 die Grösse $\frac{d\varrho}{d\sigma}$ nicht verschwinden kann; denn daraus würde folgen

$$\frac{d\varphi}{ds} = 0,$$

was der Gleichung (7) des § 1 widerspricht.

§ 3.

Bestimmung des extremalen Brennpunktes.

Wir nehmen nun an, ein Kreisbogen $\mathfrak{C}$, welcher den Punkt 0 mit der Curve $\mathfrak{C}_0$ verbindet, letztere im Punkte 1 senkrecht schneidet, und die vorgeschriebene Länge l besitzt, sei gefunden und es mögen für ihn die Gleichungen

$$r = c\sin\frac{s}{c}, \qquad d\varphi = \varepsilon\frac{ds}{c} \tag{1}$$

gelten, in welchen c der absolut genommene Durchmesser des Kreises ist, dem der Bogen $\mathfrak{C}$ angehört. Wir construiren sodann alle Kreisbögen, welche in der Nähe des Punktes 1 die Curve $\mathfrak{C}_0$ senkrecht schneiden und durch den Punkt 0 gehen; für diese gelten Gleichungen von der Form

$$r = c\sin\left(\frac{s}{c} + b\right), \qquad d\varphi = \varepsilon\frac{ds}{c}, \tag{2}$$

worin c eine positive Grösse ist, welche nicht mehr genau denselben Werth hat wie in den Gleichungen (1), ε aber dasselbe wie oben bedeutet, da der Drehungssinn des Radius, wenn man nur von $\mathfrak{C}$ hinreichend wenig abweichende Bögen betrachtet, derselbe bleibt wie auf dem Bogen $\mathfrak{C}$.

Auf dem Kreisbogen (2), dessen Länge vom Punkte 0 bis zur Curve $\mathfrak{C}_0$ im Allgemeinen nicht mehr l sein wird, sei 2 ein variabler, dem Argument s entsprechender Punkt, 3 der Schnittpunkt mit $\mathfrak{C}_0$. Verlegt man nun auf einer einzelnen Curve (2) den Punkt, von dem aus die Messung des Bogens beginnt, so kann man die Constante b um einen beliebigen Betrag ändern; man kann daher über dieselbe so verfügen, dass s an einer gegebenen Stelle einen vorgeschriebenen Werth annimmt, z. B. im Punkte 3 den Werth l, sodass immer

$$s_3 = l.$$

Damit wird, da auf der Curve $\mathfrak{C}_0$ immer $r = \varrho$ ist, die Gleichung

$$(3) \qquad c \sin\left(\frac{l}{c} + b\right) - \varrho = 0$$

gefordert; diese bestimmt mit einer den senkrechten Schnitt der Curven $\mathfrak{C}_0$ und (2) darstellenden Relation die Grössen b und c als Functionen von σ, sodass der durch die Gleichung (2) definirte Ausdruck r als Function von s und σ erscheint.

Wir bilden nun das Integral

$$u = -\frac{1}{2}\int_s^l r\sqrt{1-p^2}\, ds + \frac{1}{2}\int_{\sigma_0}^{\sigma} \varrho^2 \frac{d\psi}{d\sigma}\, d\sigma,$$

in welchem σ für σ_3, s für s_2 geschrieben ist; führen wir dann wieder die Bezeichnung

$$F(s, r, s', r') = \frac{1}{2} r\sqrt{s'^2 - r'^2}$$

ein, so hat man

$$\frac{\partial u}{\partial \sigma} = -\int_s^l \frac{\partial F(s, r, ds, dr)}{\partial \sigma} + \frac{1}{2}\varrho^2 \frac{d\psi}{d\sigma},$$

oder nach der bekannten partiellen Integration

$$(4) \qquad \frac{\partial u}{\partial \sigma} = -F_{r'} \frac{\partial r}{\partial \sigma}\Big|_s^l + \frac{1}{2}\varrho^2 \frac{d\psi}{d\sigma}.$$

Führt man $s = t$ als Parameter ein, sodass

$$(5) \qquad s' = 1$$

wird, so folgt

$$\frac{\partial u}{\partial \sigma} = F_{r'} \frac{\partial r}{\partial \sigma} - F_{r'} \frac{\partial r}{\partial \sigma}\Big|^l + \frac{1}{2}\varrho^2 \frac{d\psi}{d\sigma};$$

nun ist offenbar

$$F_{r'} = \frac{-rr'}{2\sqrt{s'^2 - r'^2}}$$

oder nach (5)

$$F_{r'} = \frac{-rp}{2\sqrt{1-p^2}},$$

und die senkrechte Lage der Curven $\mathfrak{C}_0$ und 03 wird dadurch charakterisirt, dass die Relation (4) des § 2 gilt, welche auf Grund der Gleichung (3) in der Form

$$F_{r'} \frac{\partial r}{\partial \sigma}\Big|^{s=l} - \frac{1}{2}\varrho^2 \frac{d\psi}{d\sigma} = 0 \tag{6}$$

geschrieben werden kann; die Gleichung (4) ergiebt also einfach

$$\frac{\partial u}{\partial \sigma} = F_{r'} \frac{\partial r}{\partial \sigma}.$$

Man findet ferner unmittelbar

$$\frac{\partial u}{\partial s} = F = F_{r'} \frac{\partial r}{\partial s} + F_{s'} \frac{\partial s}{\partial s},$$

also zusammengefasst

$$du = \frac{\partial u}{\partial \sigma} d\sigma + \frac{\partial u}{\partial s} ds = F_{r'} dr + F_{s'} ds, \tag{7}$$

wobei gesetzt ist

$$dr = \frac{\partial r}{\partial \sigma} d\sigma + \frac{\partial r}{\partial s} ds.$$

Es ist nun leicht zu sehen, dass unter gewissen Voraussetzungen in dieser Formel dr, ds als unabhängige Differentiale betrachtet werden können, sodass u als Function von r und s erscheint. Um dies zu zeigen, bringen wir zunächst die Gleichung (6) in möglichst explicite Form. Aus der Gleichung (2) folgt

$$p = \cos\left(\frac{s}{c} + b\right), \quad 1 - p^2 = \sin^2\left(\frac{s}{c} + b\right)$$

und da immer die Quadratwurzel $\sqrt{1-p^2}$ durch die Gleichung

$$\sqrt{1-p^2} = r\frac{d\varphi}{ds}$$

definirt wird, folgt mit Berücksichtigung der zweiten Gleichung (2)

$$\sqrt{1-p^2} = \frac{r\varepsilon}{c} = \varepsilon \sin\left(\frac{s}{c} + b\right).$$

Die Gleichung (6) wird hiernach, da der Relation (3) zufolge

$$\frac{\partial r}{\partial \sigma}\Big|^{s=l} = \frac{d\varrho}{d\sigma}$$

gesetzt werden kann,

$$\varepsilon c \cos\left(\frac{l}{c} + b\right) \frac{d\varrho}{d\sigma} + \varrho^2 \frac{d\psi}{d\sigma} = 0. \tag{8}$$

Nun folgt aus den Gleichungen (5) des § 2

$$\frac{d\varrho}{d\sigma} = -\eta\varrho\frac{d\varphi}{ds} = -\eta\varrho\frac{\varepsilon}{c};$$

also nimmt die Gleichung (8) folgende Gestalt an:

$$-\eta\varrho\cos\left(\frac{l}{c}+b\right)+\varrho^2\frac{d\psi}{d\sigma}=0,$$

oder mit Berücksichtigung der Gleichung (3)

(9) $$-\eta c\sin\left(\frac{2l}{c}+2b\right)+2\varrho^2\frac{d\psi}{d\sigma}=0.$$

Diese Gleichung giebt die oben schon erwähnte zweite Relation zwischen b, c und σ, welche geometrisch den senkrechten Schnitt der Curven 03 und $\mathfrak{C}_0$ bedeutet. Combinirt man hiermit die Gleichung (3), so kann man sich b und c als Functionen von σ ausgedrückt denken; denn die Functionaldeterminante der linken Seiten nach b und c hat den Ausdruck

$$-\eta c\begin{vmatrix}\sin\left(\frac{2l}{c}+2b\right)-\frac{2l}{c}\cos\left(\frac{2l}{c}+2b\right) & \sin\left(\frac{l}{c}+b\right)-\frac{l}{c}\cos\left(\frac{l}{c}+b\right)\\ 2\cos\left(\frac{2l}{c}+2b\right) & \cos\left(\frac{l}{c}+b\right)\end{vmatrix}$$

$$=-\eta c\begin{vmatrix}\sin\left(\frac{2l}{c}+2b\right) & \sin\left(\frac{l}{c}+b\right)\\ 2\cos\left(\frac{2l}{c}+2b\right) & \cos\left(\frac{l}{c}+b\right)\end{vmatrix}$$

$$=-2\eta c\sin\left(\frac{l}{c}+b\right)\left\{\cos^2\left(\frac{l}{c}+b\right)-\cos\left(\frac{2l}{c}+2b\right)\right\}$$

$$=-2\eta c\sin^3\left(\frac{l}{c}+b\right),$$

ist also in der Umgebung des dem Bogen $\mathfrak{C}$ entsprechenden Werthsystems $b=0$, $c=\c{c}$ von Null verschieden. Demzufolge haben die Grössen b und c als Functionen von σ an der Stelle $\sigma=\sigma_1$ stetige und endliche erste Ableitungen und dasselbe gilt von r als Function der Argumente s und σ.

Wenn nun die Differentiale dr und ds nicht unabhängig wären, so könnte man den Gleichungen

(10) $$dr = ds = 0$$

genügen, indem man für r den Werth

(11) $$r = c\sin\left(\frac{s}{c}+b\right)$$

setzt und die Grössen b, c als durch die Gleichungen (3), (9) gebundene Variable ansieht. Der erste Punkt, in welchem, wenn man die Curve $\mathfrak{C}$

vom Punkte 1 aus rückwärts durchläuft, die Gleichungen (10) zusammen bestehen, heisst der extremale Brennpunkt der Curve $\mathfrak{C}_0$ auf der Extremale $\mathfrak{C}$; er ist für das Eintreten und Aufhören des Extremums von wesentlicher Bedeutung. Bildet man die Gleichungen (10) mit dem Ausdruck (11) für r; differenzirt man ferner die beiden Gleichungen (3) und (9) und setzt:

$$\alpha = \frac{s}{c} + b, \qquad \beta = \frac{l}{c} + b,$$

so ergeben sich folgende drei Relationen, die zusammen für den extremalen Brennpunkt charakteristisch sind:

$$\left(\sin\alpha - \frac{s}{c}\cos\alpha\right)dc + c\cos\alpha\cdot db = 0,$$

$$-\eta\left(\sin 2\beta - \frac{2l}{c}\cos 2\beta\right)dc - 2\eta c\cos 2\beta\cdot db + 2\frac{d}{d\sigma}\left(\varrho^2\frac{d\psi}{d\sigma}\right)\cdot d\sigma = 0,$$

$$\left(\sin\beta - \frac{l}{c}\cos\beta\right)dc + c\cos\beta\cdot db - \frac{d\varrho}{d\sigma}d\sigma = 0;$$

nach der Differentiation ist in diesen Gleichungen, da wir speciell die Punkte des Bogens $\mathfrak{C}$ betrachten wollen, $b = 0$ zu setzen, sodass

$$\alpha = \frac{s}{c}, \qquad \beta = \frac{l}{c};$$

berechnet man noch die Grösse $\frac{d\varrho}{d\sigma}$ aus den Gleichungen (8) und (9), so erscheinen die erhaltenen Gleichungen in folgender Gestalt:

$$(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha)\,dc + c\cos\alpha\cdot db = 0,$$

$$(12)\qquad -\eta(\sin 2\beta - 2\beta\cos 2\beta)\,dc - 2\eta c\cos 2\beta\cdot db + 2\frac{d}{d\sigma}\left(\varrho^2\frac{d\psi}{d\sigma}\right)d\sigma = 0,$$

$$(\sin\beta - \beta\cos\beta)\,dc + c\cos\beta\cdot db + \eta\varepsilon\sin\beta\cdot d\sigma = 0.$$

Da nun die Quotienten $\frac{db}{d\sigma}$, $\frac{dc}{d\sigma}$, wie oben gezeigt, endliche Werthe haben, so folgt aus den letzten drei Gleichungen, indem man durch $d\sigma$ dividirt, dass die Determinante der Coefficienten der Differentiale dc, db, $d\sigma$ verschwindet.

Ehe wir die hiermit erhaltene Gleichung hinschreiben, transformiren wir noch den Coefficienten von $d\sigma$ in der zweiten Gleichung (12). Führen wir zu diesem Zweck neben dem bisher betrachteten Polarcoordinatensystem ein rechtwinkliges mittelst der Gleichungen

$$x = r\cos\psi, \qquad y = r\sin\psi$$

ein, so ist die $+y$-Axe desselben gegen die $+x$-Axe, welche mit der Richtung $\psi = 0$ zusammenfällt, im positiven Sinne um 90^0 gedreht, und man findet für die Punkte der Curve $\mathfrak{C}_0$, auf welcher $r = \varrho$ ist,

$$\varrho^2 \frac{d\psi}{d\sigma} = x \frac{dy}{d\sigma} - y \frac{dx}{d\sigma},$$

(13) $$\frac{d}{d\sigma}\left(\varrho^2 \frac{d\psi}{d\sigma}\right) = x \frac{d^2y}{d\sigma^2} - y \frac{d^2x}{d\sigma^2}.$$

Berücksichtigt man sodann die Identitäten

(14) $$\left(\frac{dx}{d\sigma}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\sigma}\right)^2 = 1,$$

(15) $$\frac{dx}{d\sigma}\frac{d^2x}{d\sigma^2} + \frac{dy}{d\sigma}\frac{d^2y}{d\sigma^2} = 0,$$

so sieht man zunächst, dass die Grösse

(16) $$\frac{1}{R} = \frac{d}{d\sigma} \operatorname{arctg}\left(\frac{dy}{d\sigma} : \frac{dx}{d\sigma}\right) = \frac{dx}{d\sigma}\frac{d^2y}{d\sigma^2} - \frac{dy}{d\sigma}\frac{d^2x}{d\sigma^2}$$

die Krümmung der Curve $\mathfrak{C}_0$ ist, und R der Krümmungsradius positiv oder negativ genommen, je nachdem die Richtung von der Curve nach dem Krümmungsmittelpunkte hin zu der Richtung wachsender σ ebenso oder entgegengesetzt liegt wie die $+y$-Axe zur $+x$-Axe; nach dem, was über die Lage dieser Axen bemerkt wurde, ist also R positiv oder negativ, je nachdem die Richtung des von der Curve weg gezogenen Krümmungsradius, welche wir R' nennen wollen, gegen die Richtung $d\sigma > 0$ um 90^0 oder 270^0 im positiven Sinne gedreht ist. Man hat daher die beiden Fälle

$$R > 0, \qquad (d\sigma, R') = 90^0,$$
$$R < 0, \qquad (d\sigma, R') = 270^0,$$

wobei die Winkel stets im positiven Sinne wachsend gemessen werden. Combinirt man hiermit die nach § 2 geltenden Relationen

$$\eta = +1, \qquad (ds, d\sigma) = 90^0,$$
$$\eta = -1, \qquad (ds, d\sigma) = 270^0,$$

so erhält man als die möglichen Fälle

$$R\eta > 0, \qquad (ds, R') = 180^0,$$
$$R\eta < 0, \qquad (ds, R') = 0^0.$$

Die Grösse $-R\eta$ ist also positiv oder negativ, je nachdem die Richtung vom Punkte 1 nach dem Krümmungsmittelpunkt der Curve $\mathfrak{C}_0$ die Verlängerung des von 0 nach 1 durchlaufenen Kreisbogens 01 bildet, oder nicht. Für diese Grösse $-R\eta$ werde die Bezeichnung

$$R^0 = -R\eta$$

eingeführt; ihr absoluter Werth ist offenbar der Krümmungsradius der Curve $\mathfrak{C}_0$.

Rechnen wir nun aus den Gleichungen (15), (16) die zweiten Ableitungen aus, so ergiebt sich nach (14)

$$\frac{d^2x}{d\sigma^2} = -\frac{1}{R}\frac{dy}{d\sigma}, \qquad \frac{d^2y}{d\sigma^2} = \frac{1}{R}\frac{dx}{d\sigma},$$

also nach (13)

$$\frac{d}{d\sigma}\left(\varrho^2\frac{d\psi}{d\sigma}\right) = +\frac{\varrho}{R}\frac{d\varrho}{d\sigma} \tag{17}$$

oder mit Benutzung der Gleichungen (5) des § 2 und (2) des gegenwärtigen Paragraphen

$$\frac{d}{d\sigma}\left(\varrho^2\frac{d\varphi}{d\sigma}\right) = -\frac{\varrho}{R}\eta\varrho\frac{d\varphi}{ds} = -\frac{\eta\varrho^2\varepsilon}{Rc} = -\frac{\eta\varepsilon\varrho\sin\beta}{R}.$$

Auf Grund dieses Resultats erhält die Resultante der Gleichungen (12) folgende Form:

$$\begin{vmatrix} \sin\alpha - \alpha\cos\alpha & c\cos\alpha & 0 \\ -\eta(\sin 2\beta - 2\beta\cos 2\beta) & -2\eta c\cos 2\beta & -\frac{2\eta\varepsilon\varrho\sin\beta}{R} \\ \sin\beta - \beta\cos\beta & c\cos\beta & \eta\varepsilon\sin\beta \end{vmatrix} = 0,$$

oder wenn man den von Null verschiedenen Factor $\varrho\varepsilon\sin\beta$ abscheidet, und $c\sin\beta$ für ϱ schreibt,

$$\begin{vmatrix} \sin\alpha - \alpha\cos\alpha & \cos\alpha & 0 \\ -\sin 2\beta + 2\beta\cos 2\beta & -2\cos 2\beta & +\frac{2c\sin\beta}{R^0} \\ \sin\beta - \beta\cos\beta & \cos\beta & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Von besonderer Wichtigkeit ist, wie wir sehen werden, die Frage, wann der Punkt 0 selbst der extremale Brennpunkt ist. Da in diesem Falle r_σ für $s = 0$, also im Punkte $r = 0$ verschwindet, geht die Curve $\mathfrak{C}$, wenn man σ um $d\sigma$ vermehrt, in eine benachbarte Curve der Schar (11) über, welche ebenfalls dem Werthe $s = 0$ entsprechend durch den Coordinatenanfangspunkt geht. Dieser ist dann also mit der Curve $\mathfrak{C}_0$ durch zwei benachbarte Kreisbögen der Schar (11) verbunden, deren Länge bis auf unendlich kleine Grössen höherer Ordnung dieselbe ist. Man erhält die analytische Bedingung für diese Erscheinung einfach, indem man in der letzten Gleichung die Annahme

$$s = 0, \qquad \alpha = 0$$

einführt; dann ergiebt sich

$$\sin 2\beta - 2\beta\cos 2\beta + \frac{2c}{R^0}\sin\beta(\sin\beta - \beta\cos\beta) = 0. \tag{18}$$

Diese Gleichung kann leicht discutirt werden, da sie, wenn man

$$B = 2\sin\beta(\sin\beta - \beta\cos\beta) = 1 - \cos 2\beta - \beta\sin 2\beta$$

setzt, in der Form

$$(19)\qquad \frac{dB}{d\beta}+\frac{cB}{R^0}=0, \qquad \frac{c}{R^0}=-\frac{1}{B}\frac{dB}{d\beta}$$

geschrieben werden kann; man findet nämlich aus der ersten Form des Ausdrucks B

$$(20)\qquad \frac{1}{B}\frac{dB}{d\beta}=\operatorname{cotg}\beta+\frac{\beta\sin\beta}{\sin\beta-\beta\cos\beta}$$

$$=\operatorname{cotg}\beta+\left(\frac{1}{\beta}-\operatorname{cotg}\beta\right)^{-1};$$

da nun die Grösse

$$\frac{d}{d\beta}\left(\frac{1}{\beta}-\operatorname{cotg}\beta\right)=-\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\sin^2\beta}$$

positiv ist, so nimmt die Grösse $\beta^{-1}-\operatorname{cotg}\beta$ mit β beständig zu; ihr reciproker Werth nimmt also ebenso wie $\operatorname{cotg}\beta$ mit wachsenden Werthen von β ab, und dasselbe gilt somit von der linken Seite der Gleichung (20). Da diese Grösse, sobald β den Werth Null verlassen hat und zwischen 0 und π liegt, stets endlich ist, so zeigt die Gleichung (19), dass zu jedem Werth von β in dem bezeichneten Intervall ein zugehöriger mit β wachsender Werth von $\frac{c}{R^0}$ bestimmt werden kann, und dass die verschiedenen Werthen von β entsprechenden Werthe $\frac{c}{R^0}$ verschieden sind. Man findet ferner für kleine Werthe von β die Entwicklungen

$$\sin\beta(\sin\beta-\beta\cos\beta)=\frac{\beta^4}{12}\quad+\cdots,$$

$$\sin 2\beta-2\beta\cos 2\beta=\frac{2}{3}\beta^3+\cdots,$$

und die Gleichung (18) ergiebt

$$\frac{c}{R^0}=-\frac{1}{\beta}(4+\cdots),$$

wobei die weggelassenen Glieder stets höhere Potenzen von β enthalten als das jeweils hingeschriebene Glied. Für unendlich kleine, positive Werthe von β erhält man somit

$$\frac{c}{R^0}=-\infty.$$

Sodann bemerkt man, dass für $\beta=\pi$ der Factor $\sin\beta$ verschwindet, während die Grössen $\sin\beta-\beta\cos\beta$ und $2\beta\cos 2\beta$ positiv sind; die Gleichung (18) ergiebt somit, wenn man β wachsend gegen die Grenze π convergiren lässt,

$$\frac{c}{R^0}=+\infty.$$

Durchläuft also β das Intervall von 0 bis π, so durchläuft die der Gleichung (18) gemäss bestimmte Grösse $c:R^0$ das Intervall aller reellen

Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ und erreicht jeden dieser Werthe ein einziges Mal.

Erinnern wir uns nun daran, dass

$$\beta = \frac{l}{c}$$

der halbe Centriwinkel des Kreisbogens 01 ist, so können wir das Resultat dieses Paragraphen in folgender Form zusammenfassen.

Die Curve $\mathfrak{C}_0$ *werde im Punkte* 1 *von einem Kreisbogen* 01, *dessen Durchmesser* c, *dessen Centriwinkel* 2β *ist, unter rechtem Winkel geschnitten;* R^0 *sei der Krümmungsradius der Curve* $\mathfrak{C}_0$ *im Punkte* 1 *positiv oder negativ genommen, je nachdem die Richtung von* 1 *nach dem Krümmungsmittelpunkte hin in die Verlängerung des Kreisbogens fällt oder nicht. Dann ist der Punkt* 0 *der extremale Brennpunkt der Curve* $\mathfrak{C}_0$, *d. h. Schnittpunkt zweier unendlich benachbarter Kreisbögen, welche die Curve* $\mathfrak{C}_0$ *senkrecht schneiden und bis auf unendlich kleine Grössen höherer Ordnung gleich lang sind, wenn die Gleichung*

$$\sin 2\beta - 2\beta \sin 2\beta + \frac{2c}{R^0} \sin \beta (\sin \beta - \beta \cos \beta) = 0$$

besteht. Lässt man das Verhältniss $c : R^0$ *alle reellen Werthe von* $-\infty$ *bis* $+\infty$ *durchlaufen, so hat diese Gleichung stets eine einzige Wurzel im Intervall von* 0 *bis* π, *und diese bewegt sich wachsend von* 0 *bis* π.

§ 4.

Allgemeines über das Aufhören des Extremums im Brennpunkte.

Will man zeigen, dass in dem extremalen Brennpunkte 0 das Extremum wirklich aufhört, so entsteht bei unsrer Aufgabe eine eigenthümliche Schwierigkeit daraus, dass eine Voraussetzung nicht mehr gilt, die man bisher bei der allgemeinen Theorie zu machen gewohnt war; im Punkte 0 wird nämlich die Grösse

$$\frac{\partial^2 f}{\partial p^2} = \frac{r}{2(\sqrt{1-p^2})^3} = \left.\frac{c \sin \frac{s}{c}}{\pm 2 \sin^3 \frac{s}{c}}\right|^{s=0}$$

unendlich gross, und der Integrand wird überhaupt in dem Anfangselement des Bogens 01, da hier $p = 1$ ist, singulär. Das verursacht folgende abnorme Erscheinung. Betrachtet man irgend eine von einem Parameter σ abhängende Schar von Extremalen, in welcher aber σ nicht gerade die bisher so bezeichnete Grösse zu sein braucht, und differenzirt demgemäss die Gleichung der Extremalen

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{r}{\sqrt{1-p^2}}\right)=0, \quad \text{oder} \quad 1-p^2+r\frac{dp}{ds}=0$$

nach σ, so ergiebt sich für die Grösse r_σ oder $\frac{\partial r}{\partial \sigma}$ die lineare Differentialgleichung

$$r_\sigma \frac{dp}{ds} - 2p\frac{dr_\sigma}{ds} + r\frac{d^2 r_\sigma}{ds^2} = 0.$$

Da nun die Coefficienten dieser Gleichung, wenn man durch den Factor der Grösse $\frac{d^2 r_\sigma}{ds^2}$ dividirt, nicht regulär sind, so kann man für den Punkt $r=0$ nicht schliessen, dass die Grössen r_σ und $\frac{dr_\sigma}{ds}$ nicht beide zugleich verschwinden. In der That ergiebt die Rechnung, wenn man von dem Ausdruck

$$r = c\sin\left(\frac{s}{c}+b\right)$$

ausgeht und die Differentiation durch Suffixe andeutet,

$$r_\sigma = c_\sigma \sin\left(\frac{s}{c}+b\right) + c\left(b_\sigma - \frac{sc_\sigma}{c^2}\right)\cos\left(\frac{s}{c}+b\right),$$

$$\frac{dr_\sigma}{ds} = \frac{c_\sigma}{c}\cos\left(\frac{s}{c}+b\right) - \frac{c_\sigma}{c}\cos\left(\frac{s}{c}+b\right) - \left(b_\sigma - \frac{sc_\sigma}{c^2}\right)\sin\left(\frac{s}{c}+b\right).$$

Für $b=0$, $s=0$, d. h. für den Punkt 0 auf der Extremale $\mathfrak{C}$ ergiebt sich also stets

$$\frac{dr_\sigma}{ds}=0,$$

und wenn dieser Punkt der im vorigen Paragraphen betrachtete Brennpunkt ist, hat man in ihm auch $r_\sigma = 0$. Damit fällt aber eine wesentliche Stütze des Beweises für das Aufhören des Extremums im Brennpunkte; hat man in der Bezeichnung meines Lehrbuchs (§ 25) die Extremalenschar

$$x = \xi(t, a), \qquad y = \eta(t, a),$$

und ist auf der dem Werthe $a = a_0$ entsprechenden Curve ein Brennpunkt dadurch charakterisirt, dass die Grösse

$$\Delta(t, a_0) = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(t, a)}\Bigg|^{a=a_0}$$

verschwindet, so wird wesentlich benutzt, dass unter den dort geltenden Voraussetzungen $\Delta_t(t, a_0)$ von Null verschieden ist. Die Grössen r_σ und $\frac{dr_\sigma}{ds}$ werden aber offenbar specielle Fälle von Δ und Δ_t, indem man

$$\xi(t, a) = t = s, \qquad \eta(t, a) = r, \qquad a = \sigma$$

setzt, womit die Abweichung unsrer Aufgabe von der allgemeinen Theorie vor Augen liegt. Zur Ergänzung der letzteren dient die folgende Untersuchung, die wir vollkommen unabhängig von der Variationsrechnung führen.

Durch die Gleichungen

$$(1) \qquad x = \xi(t, a), \qquad y = \eta(t, a)$$

sei eine Curvenschar definirt, deren Glieder den einzelnen Werthen von a entsprechen; ξ, η seien stetige mit stetigen ersten und zweiten Ableitungen versehene Functionen, und die Ableitungen ξ_t, η_t mögen in dem betrachteten Werthgebiet nirgends zugleich verschwinden. Dann bestimmen die Werthe $t = t_3$, wenn t_3 eine beliebige in der Nähe des Werthes a_0 stetige mit stetiger Ableitung versehene Function von a ist, auf jeder der Curven (1) einen bestimmten Punkt 3, dessen geometrischer Ort die Curve $\mathfrak{C}_0$ sei; für $a = a_0$ sei $t_3 = t_0$ und der Punkt

$$x_0 = \xi(t_0, a_0), \qquad y_0 = \eta(t_0, a_0)$$

werde durch 0, die Curve

$$x = \xi(t, a_0), \qquad y = \eta(t, a_0)$$

durch $\mathfrak{C}$ bezeichnet. Die Determinante

$$\Delta(t, a) = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(t, a)} = \xi_t \eta_a - \xi_a \eta_t$$

sei nicht identisch gleich Null und verschwinde längs der Curve $\mathfrak{C}$, wenn man dieselbe vom Punkt 0 ab durchlaufen denkt, zum ersten Male im Punkte 1, für den $t = t_1$ sei; ob sie für $t = t_0$ verschwindet, bleibe dahingestellt. Dann haben die Curven der Schar (1) in der Umgebung des Punktes 1 eine Enveloppe, wenn wir voraussetzen, dass die Grössen

$$\Delta_t(t_1, a_0), \qquad \Delta_a(t_1, a_0)$$

nicht beide verschwinden. Ist nämlich mindestens eine von ihnen von Null verschieden, so kann aus der Gleichung

$$(2) \qquad \Delta(t, a) = 0$$

entweder t als stetige mit stetiger Ableitung versehene Function von a oder a als ebensolche Function von t so bestimmt werden, dass die Werthe $t = t_1$, $a = a_0$ gemäss der vorausgesetzten Gleichung

$$\Delta(t_1, a_0) = 0$$

zusammengehören. Es sei z. B.

$$(3) \qquad \Delta_a(t_1, a_0) \gtrless 0,$$

und habe die Gleichung (2) die Lösung

$$a = \varphi(t),$$

wobei

$$a_0 = \varphi(t_1),$$

und die Functionen $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$ jedenfalls in der Umgebung von t_1 stetig sind. Dann ist durch die Gleichungen

$$(4) \qquad x = \xi(t, \varphi(t)) = X(t), \qquad y = \eta(t, \varphi(t)) = Y(t)$$

eine Curve definirt, welche den Punkt 1 für $t = t_1$ enthält. Offenbar gelten die Gleichungen

$$X'(t) = \xi_t + \xi_a \frac{da}{dt}, \qquad Y'(t) = \eta_t + \eta_a \frac{da}{dt};$$

da ferner

$$da = \varphi'(t)\,dt, \qquad \Delta_t dt + \Delta_a da = 0,$$

so kann man auch schreiben

$$X'(t) = \frac{\xi_t \Delta_a - \xi_a \Delta_t}{\Delta_a}, \qquad Y'(t) = \frac{\eta_t \Delta_a - \eta_a \Delta_t}{\Delta_a}.$$

Nun verschwinden ξ_t und η_t nach Voraussetzung nicht für die betrachteten Werthe von t und a zugleich, also speciell auch nicht in der Umgebung des Werthsystems (t_1, a_0); ist z. B. ξ_t von Null verschieden, so kann man nach (2) setzen

$$\eta_a = \frac{\xi_a \eta_t}{\xi_t}, \qquad \eta_t = \frac{\eta_t}{\xi_t}\xi_t,$$

und es folgt

$$Y'(t) = \frac{\eta_t}{\xi_t}\,\frac{\xi_t \Delta_a - \xi_a \Delta_t}{\Delta_a} = \frac{\eta_t}{\xi_t} X'(t).$$

Für jeden von t_1 hinreichend wenig abweichenden Werth t' wird also die Curve (4) von der Curve

$$x = \xi(t, \varphi(t')), \qquad y = \eta(t, \varphi(t'))$$

berührt, womit die erstere als Enveloppe der Schar (1) erkannt ist.

Wird statt der Ungleichung (3) vorausgesetzt

$$(5) \qquad \Delta_t(t_1, a_0) \gtrless 0,$$

so gilt eine ähnliche Argumentation, bei welcher a als Parameter längs der Enveloppe auftritt; man erhält

$$t = \psi(a)$$

und als Gleichungen der Enveloppe

$$x = \xi(\psi(a), a), \qquad y = \eta(\psi(a), a),$$

woraus sich für den Fortgang längs dieser Curve ergiebt

$$Dx = \frac{\xi_a \Delta_t - \xi_t \Delta_a}{\Delta_t}\,da, \qquad Dy = \frac{\eta_a \Delta_t - \eta_t \Delta_a}{\Delta_t}\,da,$$

$$Dy = \frac{\eta_t}{\xi_t}\,Dx.$$

Von Interesse ist es, zu wissen, wann der Punkt 1 Rückkehrpunkt der Enveloppe ist. Bei der Voraussetzung (5) ist dies ausgeschlossen, wenn nicht beide Grössen

$$\xi_a \Delta_t - \xi_t \Delta_a \Big|^{t_1}, \qquad \eta_a \Delta_t - \eta_t \Delta_a \Big|^{t_1}$$

verschwinden; ist übrigens die erste Null und ξ_t von Null verschieden, so verschwindet auch die zweite, und Analoges gilt, wenn die zweite Grösse verschwindet. Bei der Voraussetzung (3) dagegen, die im folgenden besonders wichtig ist, kann der Punkt 1 kein Rückkehrpunkt der Enveloppe sein, wenn zugleich

$$\Delta_t(t_1, a_0) = 0; \tag{6}$$

denn aus den Gleichungen

$$\xi_a \Delta_t - \xi_t \Delta_a = 0,$$
$$\eta_a \Delta_t - \eta_t \Delta_a = 0$$

ergiebt sich dann

$$\Delta_a(\xi_t^2 + \eta_t^2) = \Delta_t(\xi_a \xi_t + \eta_a \eta_t) = 0,$$

was, da ξ_t und η_t nicht zugleich verschwinden, der Voraussetzung (3) widerspricht.

Diese Erwägung zeigt zugleich, dass die Grössen $X'(t_1)$, $Y'(t_1)$ bei den Voraussetzungen (3), (6) nicht beide verschwinden; da dasselbe von ξ_t, η_t gilt, so kann man allgemein

$$X'(t) = m\xi_t, \qquad Y'(t) = m\eta_t \tag{7}$$

setzen, wobei m eine im Punkt 1 endliche und von Null verschiedene Grösse bedeutet.

Von dieser allein auf das Curvensystem (1) bezüglichen Betrachtung machen wir Gebrauch, um gewisse längs dieser Curven gebildete Integrale zu untersuchen. Es sei $F(x, y, x', y')$ eine bezüglich der letzten beiden Argumente in der ersten Dimension homogene Function; die für diese Eigenschaft charakteristische Gleichung

$$F(x, y, \alpha x', \alpha y') = \alpha F(x, y, x', y') \tag{8}$$

werde jedoch nur für positive Werthe von α vorausgesetzt, eine Beschränkung, die zwar nicht für die unten behandelten speciellen Aufgaben, wohl aber bei gewissen anderen Problemen nöthig ist, besonders wenn es sich um Längenintegrale handelt. In den Werthsystemen

$$x = \xi, \quad y = \eta, \quad x' = \xi_t, \quad y' = \eta_t$$

sei, wenn das System (t, a) sich auf den betrachteten Theil der Curven (1) bezieht, die Function F mit ihren Ableitungen erster und zweiter Ordnung endlich und stetig. Es sei ferner u eine Function von t und a, für welche die Gleichung

(9) $$du = F_{x'}(\xi, \eta, \xi_t, \eta_t)dx + F_{y'}(\xi, \eta, \xi_t, \eta_t)dy$$

gilt, wenn man

$$dx = \xi_t dt + \xi_a da, \qquad dy = \eta_t dt + \eta_a da$$

setzt. In diesen Formeln bestimmt das Differentialsystem (dx, dy) den Fortgang nach einer beliebigen Richtung, solange der Punkt (ξ, η) auf der Curve $\mathfrak{C}$ zwischen 0 und 1 liegt, und letztere Lage nicht erreicht, da dann dt und da durch dx und dy ausgedrückt werden können. Aus der Formel (9) erhält man speciell, indem man die Homogeneität der Function F berücksichtigt

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F_{x'}(\xi, \cdots)\xi_t + F_{y'}(\xi, \cdots)\eta_t = F(\xi, \eta, \xi_t, \eta_t),$$

und hieraus folgt, indem man von dem oben definirten Punkte 3 an integrirt,

$$u = \int_{t_3}^{t} F(\xi, \eta, \xi_t, \eta_t)\, dt + \Phi(a).$$

Sodann ergiebt sich durch directe Differentiation

$$\frac{\partial u}{\partial a} = \Phi'(a) - F(\xi, \eta, \xi_t, \eta_t)\Big|^{t_3} \frac{\partial t_3}{\partial a} + \int_{t_3}^{t} (F_x \xi_a + F_y \eta_a + F_{x'} \xi_{ta} + F_{y'} \eta_{ta})\, dt$$

$$= \Phi'(a) - F(\xi, \eta, \xi_t, \eta_t)\Big|^{t_3} \frac{\partial t_3}{\partial a} + F_{x'}\xi_a + F_{y'}\eta_a\Big|_{t_3}^{t} + \int_{t_3}^{t} (P\xi_a + Q\eta_a)\, dt,$$

wobei gesetzt ist

$$P = F_x(\xi, \eta, \xi_t, \eta_t) - \frac{dF_{x'}(\xi, \eta, \xi_t, \eta_t)}{dt},$$

$$Q = F_y(\xi, \eta, \xi_t, \eta_t) - \frac{dF_{y'}(\xi, \eta, \xi_t, \eta_t)}{dt}.$$

Andrerseits ergiebt die Formel (9)

$$\frac{\partial u}{\partial a} = F_{x'}(\xi, \eta, \xi_t, \eta_t)\xi_a + F_{y'}(\xi, \eta, \xi_t, \eta_t)\eta_a;$$

setzt man die beiden Werthe dieser Grösse gleich, so folgt

(10) $$\Phi'(a) - \left[F(\xi, \eta, \xi_t, \eta_t)\frac{\partial t_3}{\partial a} + F_{x'}(\xi, \eta, \xi_t, \eta_t)\xi_a + F_{y'}(\xi, \eta, \xi_t, \eta_t)\eta_a\right]\Bigg|^{t_3}$$
$$+ \int_{t_3}^{t} (P\xi_a + Q\eta_a)\, dt = 0.$$

Hier sind alle vor dem Integralzeichen stehenden Glieder von t unabhängig; somit erhält man, indem man nach t differenzirt,

$$P\xi_a + Q\eta_a = 0.$$

Andrerseits ergiebt sich aus der Gleichung

$$F(\xi, \eta, \xi_t, \eta_t) = \xi_t F_{x'}(\xi, \eta, \xi_t, \eta_t) + \eta_t F_{y'}(\xi, \eta, \xi_t, \eta_t),$$

indem man nach t differenzirt,

$$P\xi_t + Q\eta_t = 0;$$

da nun zwischen den Punkten 0 und 1 die Determinante $\xi_t\eta_a - \xi_a\eta_t$ von Null verschieden ist, so folgt

$$P = Q = 0,$$

d. h. wenn eine der Forderung (9) genügende Grösse u existirt, sind die Curven des Systems (1) die Extremalen des Integrals

$$J = \int F(x, y, dx, dy).$$

Hiermit ist ein Theil des § 19 meines Lehrbuchs in allgemeinerer Form wiederholt.

Setzt man umgekehrt von vornherein voraus, dass die Curven (1) Extremalen des Integrals

$$\int F(x, y, dx, dy)$$

sind, so ist leicht durch Umkehrung der vorstehenden Argumentation zu zeigen, dass für die Grösse

$$u = \Phi(a) + \int_{t_3}^{t} F(\xi, \eta, \xi_t, \eta_t)\, dt$$

die Gleichung (9) gilt, sobald man die Relation (10) annimmt, für welche man offenbar schreiben kann

$$\Phi'(a) - \left[F_{x'}(\xi, \eta, \xi_t, \eta_t)\frac{dx_3}{da} + F_{y'}(\xi, \eta, \xi_t, \eta_t)\frac{dy_3}{da}\right]\Bigg|^{t_3} = 0,$$

indem man die Coordinaten des Punktes 3 einführt und setzt

$$x_3 = \xi(t_3, a), \qquad \frac{dx_3}{da} = \xi_t(t_3, a)\frac{\partial t_3}{\partial a} + \xi_a(t_3, a),$$

$$y_3 = \eta(t_3, a), \qquad \frac{dy_3}{da} = \eta_t(t_3, a)\frac{\partial t_3}{\partial a} + \eta_a(t_3, a).$$

Diese Gleichung ist in dem speciellen von uns betrachteten Problem mit der Gleichung (3) des § 2 identisch; indem man s, r für x, y und

$$s \equiv t, \quad t_3 = l, \quad a = \sigma$$

setzt, hat man hier speciell

$$\frac{dx_3}{da} = 0.$$

Die Grösse u fällt mit der in § 3 ebenso bezeichneten zusammen.

Von der Gleichung (9) ausgehend kann nun leicht bewiesen werden, dass das Integral

$$\Phi(a_0) + \int_{t_0}^{t_1} F(\xi(t, a_0),\ \eta(t, a_0),\ \xi_t(t, a_0),\ \eta_t(t, a_0))\, dt$$

keinen extremen Werth hat im Vergleich zu den Grössen

$$S = \Phi(a) + \int_{3}^{1} F(x, y, dx, dy),$$

wenn im zweiten Summanden längs einer Curve 31 integrirt wird, deren Anfangspunkt 3 der Schnittpunkt der Extremale (1) mit der Curve $\mathfrak{C}_0$ ist. Zu diesem Zweck gehen wir davon aus, dass der in den Gleichungen (7) auftretende Proportionalitätsfactor m in der Umgebung der Stelle 1 nicht verschwindet; es giebt also eine solche Einheit ε, dass die Relationen

$$\varepsilon^2 = +1, \qquad \varepsilon m > 0$$

bestehen. Dann betrachte man diejenigen Punkte der Enveloppe, für welche

$$\varepsilon(t - t_1)(t_1 - t_0) < 0, \tag{11}$$

und bezeichne dieselben allgemein durch 2; der Schnittpunkt der durch einen solchen Punkt gehenden Extremale der Schar (1) mit $\mathfrak{C}_0$ ist derjenige Punkt 3, für welchen die Gleichung

$$a = \varphi(t)$$

gilt. Man setze ferner

$$\varepsilon t = \mathsf{t},$$

und beziehe diese Variable auf den Punkt 2; da die Grösse $t_2 - t_3$ für $a = a_0$ in $t_1 - t_0$ übergeht, so haben beide Differenzen bei hinreichend kleinen Werthen von $|a - a_0|$ dasselbe Vorzeichen und die Beziehung (11) ergiebt

$$(t_2 - t_3)(\mathsf{t} - \mathsf{t}_1) < 0, \tag{12}$$

d. h. die Richtung wachsender t bestimmt auf der Enveloppe die Bewegung auf den Punkt 1 hin, je nachdem t auf der Curve (1) in der Richtung 32 wächst oder abnimmt. Da nun auf der Enveloppe die Gleichungen

$$x = X(\varepsilon \mathsf{t}), \qquad y = Y(\varepsilon \mathsf{t}),$$

$$\frac{dx}{d\mathsf{t}} = \varepsilon X'(\varepsilon \mathsf{t}) = \varepsilon m \xi_t, \qquad \frac{dy}{d\mathsf{t}} = \varepsilon m \eta_t \tag{13}$$

gelten und εm positiv ist, so stimmt im Punkte 2 die Richtung wachsender t auf der Enveloppe mit der Richtung wachsender t auf der Extremale 32 überein; die Ungleichung (12) zeigt also, dass die Richtung 32 auf der

Extremale 32 und die Richtung 21 auf der Enveloppe im Punkte 2 übereinstimmen. Der Extremalenbogen 32 bildet also mit dem Enveloppenbogen 21 ein Curvenstück 321, längs dessen die Bewegungsrichtung eines von 3 nach 1 laufenden Punktes sich überall stetig ändert. Dieses Curvenstück unterscheidet sich in Punkten und Richtungen beliebig wenig von dem Extremalenbogen 01, wenn man die Differenz $\mathfrak{t}_1 - \mathfrak{t}_2$ hinlänglich abnehmen lässt.

Bildet man nun in dem Ausdruck S das Integral längs des definirten Linienzuges 321, so erhält man für dasselbe die genauere Form

$$\int_3^1 F(x,y,dx,dy) = \int_{t_3}^{t_2} F(\xi(t,a), \cdots \eta_t(t,a))\,dt + \int_{\mathfrak{t}_2}^{\mathfrak{t}_1} F(X(\varepsilon\mathfrak{t}), Y(\varepsilon\mathfrak{t}), \varepsilon X'(\varepsilon\mathfrak{t}), \varepsilon Y'(\varepsilon\mathfrak{t}))\,d\mathfrak{t};$$

hieraus folgt, da

$$u(t_2, a) = \Phi(a) + \int_{t_3}^{t_2} F(\xi(t, a), \cdots)\,dt$$

zu setzen ist,

$$S = \Phi(a) + \int_3^1 F(x,y,dx,dy) = u(t_2, a) + \int_{\mathfrak{t}_2}^{\mathfrak{t}_1} F(X(\varepsilon\mathfrak{t}), \cdots \varepsilon Y'(\varepsilon\mathfrak{t}))\,d\mathfrak{t}.$$

In diesem Ausdruck sind die Grössen t_2, a dadurch an einander gebunden, dass der Punkt 2 der Enveloppe angehört, dass also

$$(14) \qquad \begin{aligned} X(t_2) = X(\varepsilon\mathfrak{t}_2) = \xi(t_2, a), \\ Y(t_2) = Y(\varepsilon\mathfrak{t}_2) = \eta(t_2, a); \end{aligned}$$

da ferner in der Gleichung

$$dt\,\Delta_t(t, a) + da\,\Delta_a(t, a) = 0$$

der Factor von da nicht verschwindet, so kann man t_2 oder auch $\mathfrak{t}_2$ als unabhängige Variable nehmen, und erhält aus den Gleichungen (14) die Formeln

$$\begin{aligned} \varepsilon X'(\varepsilon\mathfrak{t}_2)\,d\mathfrak{t}_2 &= \xi_t(t_2, a)\,dt_2 + \xi_a(t_2, a)\,da, \\ \varepsilon Y'(\varepsilon\mathfrak{t}_2)\,d\mathfrak{t}_2 &= \eta_t(t_2, a)\,dt_2 + \eta_a(t_2, a)\,da, \end{aligned}$$

welche auf Grund der Gleichung (9) ergeben

$$\frac{du(t_2, a)}{d\mathfrak{t}_2} = F_{x'}(\xi(t_2, a), \cdots)\,\varepsilon X'(\varepsilon\mathfrak{t}_2) + F_{y'}(\eta(t_2, a), \cdots)\,\varepsilon Y'(\varepsilon\mathfrak{t}_2),$$

oder nach (13) und wegen der Homogeneität der Function F

$$\begin{aligned} \frac{du(t_2, a)}{d\mathfrak{t}_2} &= m\varepsilon(\xi_t F_{x'}(\xi, \eta, \xi_t, \eta_t) + \eta_t F_{y'}(\xi, \eta, \xi_t, \eta_t))\,|^{t_2}, \\ &= m\varepsilon F(\xi(t_2, a), \cdots \eta_t(t_2, a)). \end{aligned}$$

Andrerseits findet man sofort mit Berücksichtigung der Formeln (13)

$$\frac{d}{d\mathfrak{t}_2}\int_{\mathfrak{t}_2}^{\mathfrak{t}_1} F(X(\varepsilon\mathfrak{t}), \cdots \varepsilon Y'(\varepsilon\mathfrak{t}))\,d\mathfrak{t} = -F(X(\varepsilon\mathfrak{t}_2), Y(\varepsilon\mathfrak{t}_2), \varepsilon X'(\varepsilon\mathfrak{t}_2), \varepsilon Y'(\varepsilon\mathfrak{t}_2))$$
$$= -F(\xi(t_2, a), \eta(t_2, a), m\varepsilon\xi_t(t_2, a), m\varepsilon\eta_t(t_2, a));$$

da nun $m\varepsilon$ positiv ist, so kann die Gleichung (8) angewandt werden, und es ergiebt sich

$$\frac{d}{d\mathfrak{t}_2}\int_{\mathfrak{t}_2}^{\mathfrak{t}_1} F(X(\varepsilon\mathfrak{t}), \cdots \varepsilon Y'(\varepsilon\mathfrak{t}))\,d\mathfrak{t} = -\,m\varepsilon F(\xi(t_2, a), \eta(t_2, a), \xi_t(t_2, a), \eta_t(t_2, a)),$$

also

$$\frac{dS}{d\mathfrak{t}_2} = 0\,.$$

Für den speciellen Werth $\mathfrak{t}_2 = \mathfrak{t}_1$ geht aber S, da die Punkte 2 und 1 dann zusammenfallen, in die Grösse

$$S_0 = \Phi(a_0) + \int_{t_0}^{t_1} F(\xi(t, a_0), \cdots \eta_t(t, a_0))\,dt$$

über, sodass die allgemeine Gleichung

$$S = S_0$$

resultirt. Die Grösse S_0 ist also sicher kein Extremum unter allen Werthen der Summe

$$\Phi(a) + \int_{8}^{1} F(x, y, dx, dy),$$

in deren zweitem Summanden auf einem beliebigen Wege von der Curve $\mathfrak{C}_0$ zum Punkte 1 hin integrirt wird.

Dass neben t die Variable $\mathfrak{t}$ eingeführt wurde, könnte auf den ersten Blick überflüssig erscheinen, ist aber zweckmässig, um die durchgeführte Argumentation unmittelbar auf Integrale anwenden zu können, in denen vermöge der Definition die Function F verschiedene Formen annimmt, je nachdem man in der Richtung wachsender oder abnehmender Werthe von t integrirt; dies ist z. B. bei Längenintegralen der Fall. Bei der obigen Argumentation ist die hieraus resultirende Schwierigkeit vermieden, da die eingeführten Parameter in der Integrationsrichtung entweder stets wachsen oder stets abnehmen.

§ 5.

Anwendung des § 4 auf die specielle Aufgabe des § 1.

In der oben behandelten speciellen Aufgabe kann man, wie bemerkt, für a die Grösse σ nehmen; da ferner, indem man x und y durch s und r ersetzt, anzunehmen ist

$$s \equiv t, \quad \Delta(t, a) = r_\sigma, \quad S_0 = -J, \quad r = c \sin\left(\frac{s}{c} + b\right),$$

und zu Anfang des § 4 gezeigt ist, dass die Grösse

$$\Delta_t(t, a) = \frac{dr_\sigma}{ds}$$

im Punkte 0, der hier für den in § 4 durch 1 bezeichneten zu nehmen ist, verschwindet, so hört das Extremum im Punkte 0, wenn er Brennpunkt ist, sicher auf, sobald die Grösse

$$\Delta_a(t, a) = r_{\sigma\sigma}$$

von Null verschieden ist. Wir wollen zeigen, dass dies im Allgemeinen der Fall ist.

Setzen wir nämlich gemäss dem obigen Werthe von r

$$r_\sigma = c_\sigma \sin\left(\frac{s}{c} + b\right) + c\left(b_\sigma - \frac{sc_\sigma}{c^2}\right)\cos\left(\frac{s}{c} + b\right) = Cc_\sigma + Bb_\sigma,$$

so ergiebt sich

$$r_{\sigma\sigma} = Cc_{\sigma\sigma} + C_\sigma c_\sigma + Bb_{\sigma\sigma} + B_\sigma b_\sigma,$$

und da offenbar

$$C = \sin\left(\frac{s}{c} + b\right) - \frac{s}{c}\cos\left(\frac{s}{c} + b\right),$$

$$C_\sigma = \left(-\frac{c_\sigma s}{c^2} + b_\sigma\right)\cos\left(\frac{s}{c} + b\right) + \frac{sc_\sigma}{c^2}\cos\left(\frac{s}{c} + b\right)$$
$$+ \frac{s}{c}\sin\left(\frac{s}{c} + b\right)\left(-\frac{sc_\sigma}{c^2} + b_\sigma\right),$$

$$B = c\cos\left(\frac{s}{c} + b\right),$$

so folgt aus der für den Punkt 0 $(s = b = 0)$ vorausgesetzten Gleichung

$$r_\sigma = 0$$

zunächst, da C verschwindet und $B = c$ wird,

$$cb_\sigma = 0, \qquad b_\sigma = 0;$$

hieraus folgt für den Punkt 0 als Brennpunkt

$$C = C_\sigma = 0,$$
$$r_{\sigma\sigma} = Bb_{\sigma\sigma} = cb_{\sigma\sigma}.$$

Das Kriterium für den Ausnahmefall, in welchem man nicht sicher weiss, dass das gesuchte Extremum schon für den Bogen 01 nicht mehr vorhanden ist, kann also in der Form

$$b = b_\sigma = b_{\sigma\sigma} = 0$$

angesetzt werden; man sieht unmittelbar, dass diese Gleichungen erhalten bleiben, wenn man für den Bogen σ eine andere Variable einführt, deren Ableitung nach σ für $\sigma = \sigma_1$ endlich und von Null verschieden ist.

Auf Grund dieses Resultats ist es leicht, den Ausnahmefall geometrisch zu charakterisiren. Denn aus der Gleichung

$$r = c \sin \frac{s + bc}{c},$$

welche einen durch den Punkt 0 gehenden und im Punkte 3, für welchen $s = l$ ist, die Curve $\mathfrak{C}_0$ senkrecht schneidenden Kreis darstellt, erschliesst man sofort, dass $l + bc$ die Länge des Bogens 03 ist. Der erste und zweite Differentialquotient dieser Grösse nach σ sind aber

$$b_\sigma c + bc_\sigma, \qquad b_{\sigma\sigma} c + 2b_\sigma c_\sigma + bc_{\sigma\sigma};$$

da nun für den Kreisbogen 01 die Gleichungen

$$b = b_\sigma = 0$$

bestehen, so hat man

$$\frac{d^2(l + bc)}{d\sigma^2} = cb_{\sigma\sigma}, \qquad \frac{d(l + bc)}{d\sigma} = 0.$$

Die Bogenlänge 03 hat also, wenn 0 der betrachtete Brennpunkt ist, in der Lage 01 abgesehen von dem Ausnahmefall ein Extremum; ist dieses am zweiten Differentialquotienten zu erkennen, d. h. verschwindet derselbe nicht, so ist auch $b_{\sigma\sigma}$ von Null verschieden, und das Extremum in der Aufgabe der Königin Dido hört sicher schon im Punkte 0 auf. Wir formuliren dieses Resultat in folgendem Satze:

Ist 0 *der am Schluss des* § 3 *definirte extremale Brennpunkt der Curve* $\mathfrak{C}_0$, *so hat der Bogen* $\mathfrak{C}$ *verglichen mit den zur Curve* $\mathfrak{C}_0$ *senkrechten Kreisbögen* $\mathfrak{B}$, *welche vom Punkte* 0 *ausgehen, im Allgemeinen ein Extremum der Bogenlänge. Ist dieses in der Weise deutlich erkennbar, dass die zweite Ableitung der Länge des Bogens* $\mathfrak{B}$ *nach dem zu seinem Endpunkt gehörigen Werth des Bogens der Curve* $\mathfrak{C}_0$ *nicht verschwindet, so liefert der Bogen* 01 *sicher das in der Aufgabe des* § 1 *gesuchte Extremum nicht mehr; vielmehr kann der Punkt* 0 *mit* $\mathfrak{C}_0$ *durch Bögen verbunden werden, welche nicht nur ebenso lang wie* $\mathfrak{C}$ *sind, sondern auch mit* $\mathfrak{C}_0$ *eine Fläche von genau demselben Areal umschliessen wie* $\mathfrak{C}$.

§ 6.

Die isoperimetrische Aufgabe, wenn beide Endpunkte variabel sind.

Wir gehen nunmehr zu dem Problem über, zwei nicht vorgeschriebene Punkte einer gegebenen Curve durch einen neuen Bogen von gegebener Länge so zu verbinden, dass dieser mit der gegebenen Curve eine möglichst grosse Fläche umschliesst. Um aber die bisher benutzten Methoden verwenden und die Discussion ebensoweit wie bei der oben behandelten Aufgabe durchführen zu können, machen wir eine beschränkende Voraussetzung hinsichtlich der gegebenen Curve.

Es sei ein Kreis $\mathfrak{K}$ und eine von ihm ausgehende Curve $\mathfrak{C}_0$ gegeben; wir stellen uns die Aufgabe, von einem nicht vorgeschriebenen Punkte des Kreises $\mathfrak{K}$ nach der Curve $\mathfrak{C}_0$ hin eine Curve $\mathfrak{C}$ zu ziehen, deren Länge gegeben ist und die mit den Curven $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{C}_0$ zusammen eine Fläche maximalen Inhalts umschliesst. Es seien 0 und 1 der Anfangs- und Endpunkt der Curve $\mathfrak{C}$; der Inhalt, dessen Maximum gesucht wird, ist dann in einem beliebigen Polarcoordinatensystem (r, φ) durch das Integral

$$\frac{1}{2}\int r^2 d\varphi$$

ausgedrückt, in welchem zuerst längs der Curve $\mathfrak{C}$ von 0 bis 1 zu integriren ist, dann vom Punkte 1 längs der Curve $\mathfrak{C}_0$ bis zum Kreise $\mathfrak{K}$ zurück, der im Punkte 2 wieder erreicht werde; endlich längs des Kreises bis zum Punkte 0 zurück. Jeder dieser drei Theile des Integrals wird in besonderer Form dargestellt, indem die zu den Punkten 0, 1, 2 gehörigen Werthe der einzuführenden Variabeln jeweils durch die entsprechenden Suffixe gekennzeichnet werden.

1) Auf der Curve $\mathfrak{C}$ sei s die vom Punkte 0 beginnende Bogenlänge, sodass, wenn l die vorgeschriebene Länge der gesuchten Curve ist, die Gleichungen

$$s_0 = 0, \qquad s_1 = l$$

gelten. Dann kann

$$d\varphi = \frac{1}{r}\sqrt{ds^2 - dr^2}$$

oder, wenn $dr = p\,ds$ ist,

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{r}\sqrt{1-p^2} \tag{1}$$

gesetzt werden, womit zugleich das Vorzeichen der Quadratwurzel fixirt ist; der auf die Curve $\mathfrak{C}$ bezügliche Theil des Flächenintegrals wird mit diesen Bezeichnungen

$$\frac{1}{2}\int_0^1 r^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^l r\sqrt{1-p^2}\,ds. \tag{2}$$

2) Auf der Curve $\mathfrak{C}_0$ sei σ die Bogenlänge, ϱ, ψ die Polarcoordinaten eines Punktes in dem oben eingeführten System; der Punkt $\sigma = 0$ und die Richtung wachsender σ seien beliebig festgelegt. Dann kann man das auf die Curve $\mathfrak{C}_0$ bezügliche Theilintegral offenbar schreiben

$$\frac{1}{2}\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \varrho^2 \frac{d\psi}{d\sigma}\,d\sigma. \tag{3}$$

3) Der Kreis $\mathfrak{K}$ habe den Radius a, sein Mittelpunkt sei der Anfangspunkt der Polarcoordinaten; dann ist der vom Kreisbogen 20 gelieferte Beitrag zum Flächenintegral

$$\frac{1}{2}\int_{\varphi_2}^{\varphi_0} a^2\,d\varphi = \frac{a^2}{2}(\varphi_0 - \varphi_2)$$

oder auch

$$\frac{a^2}{2}(\varphi_0 - \varphi_1) + \frac{a^2}{2}(\varphi_1 - \varphi_2). \tag{4}$$

In diesem Ausdruck kann man sich die Differenz $\varphi_0 - \varphi_1$ hergestellt denken, indem man $-d\varphi$ längs der Curve $\mathfrak{C}$ von 0 bis 1 integrirt:

$$\frac{a^2}{2}(\varphi_1 - \varphi_0) = \frac{a^2}{2}\int_0^l \frac{d\varphi}{ds}\,ds,$$

oder nach (1)

$$\frac{a^2}{2}(\varphi_1 - \varphi_0) = \frac{a^2}{2}\int_0^l \frac{\sqrt{1-p^2}}{r}\,ds. \tag{5}$$

Analog kann man setzen, indem man längs der Curve $\mathfrak{C}_0$ integrirt und die Gleichungen

$$\varphi_2 = \psi_2, \qquad \varphi_1 = \psi_1$$

berücksichtigt,

$$\frac{a^2}{2}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{a^2}{2}\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{d\psi}{d\sigma}\,d\sigma, \tag{6}$$

und da der gesammte zu untersuchende Flächeninhalt die Summe der Grössen (2), (3) und (4) ist, so erhält man ihn auch, indem man von der Summe der erstgenannten beiden Grössen die Ausdrücke (5) und (6) subtrahirt; das Resultat ist

$$J = \int_0^l \frac{r^2 - a^2}{2r}\sqrt{1-p^2}\,ds + \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} S\,d\sigma,$$

wobei der Ausdruck

$$S = \frac{\varrho^2 - a^2}{2}\,\frac{d\psi}{d\sigma}$$

eine allein von der Gestalt der Curve $\mathfrak{C}_0$ abhängende, also gegebene Function von σ darstellt. Der die Fläche darstellende Ausdruck J erscheint hiermit zusammengesetzt aus je einem längs jeder der Curven $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}_0$ erstreckten Integral, während der Kreis $\mathfrak{K}$ als Integrationsbahn nicht mehr vorkommt.

Construirt man nun ähnlich wie in § 1 zu jeder auf dem Kreise $\mathfrak{K}$ beginnenden Curve eine entsprechende in einer zweiten Ebene, indem man die vom Kreise $\mathfrak{K}$ ab gerechnete Bogenlänge s und die Polarcoordinate r als rechtwinklige Abscisse und Ordinate aufträgt, so entspricht der Curve $\mathfrak{C}$ eine vom Punkte $s = 0$, $r = a$ ausgehende Curve $\mathfrak{C}'$, für deren Endpunkt $s = l$, die Ordinate r_1 aber ebensowenig wie der Punkt 1 von vornherein vorgeschrieben ist. Umgekehrt entspricht jeder vom Punkte $s = 0$, $r = a$ in der zweiten Ebene ausgehenden Curve, längs deren s immer wächst, r positiv und

$$\left(\frac{ds}{dr}\right)^2 \geqq 1$$

ist, eine auf dem Kreise $\mathfrak{K}$ beginnende Curve, längs deren die Polarcoordinate r der gleichbezeichneten Ordinate in der zweiten Ebene gleich ist und φ durch die Gleichung

$$\varphi = \varphi_0 + \int_0^s \frac{ds}{r} \sqrt{1 - \left(\frac{dr}{ds}\right)^2}$$

definirt ist; φ_0 ist dabei der willkürliche Werth der Winkelcoordinate des Anfangspunktes. Speciell entspricht einer Curve $\mathfrak{C}_1'$, welche mit $\mathfrak{C}'$ die Endpunkte gemein hat, eine Curve $\mathfrak{C}_1$ in der ersten Ebene, die erst dann bestimmt ist, wenn man über φ_0 eine bestimmte Verfügung getroffen hat. Wählt man diesen Werth in passender Weise, so kann man, da der Endwerth $r = r_1$ den Curven $\mathfrak{C}'$ und $\mathfrak{C}_1'$ gemeinsam ist, erreichen, dass die Curve $\mathfrak{C}_1$ im Punkte 1 endigt, wobei sich im Allgemeinen ihr Anfangspunkt auf dem Kreise $\mathfrak{K}$ verschiebt. Da hiernach, wenn man $\mathfrak{C}$ durch $\mathfrak{C}_1$ ersetzt, der zweite Summand des Ausdruckes J ungeändert bleibt, so ist, damit $\mathfrak{C}$ ein Extremum des Werthes J liefere, nothwendig, dass der erste Summand von J einen Zuwachs festen Vorzeichens erhalte, wenn man $\mathfrak{C}'$ durch $\mathfrak{C}_1'$ ersetzt. Eine nothwendige Bedingung des gesuchten Extremums ist also

$$\delta \int_0^l \frac{r^2 - a^2}{2r} \sqrt{1 - p^2}\, ds = 0. \tag{7}$$

Bezeichnen wir, um Anschluss an die allgemeine Theorie zu gewinnen, den Integranden dieses Integrals durch

$$f(r, p)\, ds = F(r, s, dr, ds) = F(r, s, r', s')\, dt,$$

so finden wir, da F die Variable s nicht explicite enthält, als Differentialgleichung der Extremalen

$$F_s - \frac{dF_{s'}}{dt} = 0, \qquad F_{s'} = \frac{\partial F}{\partial s'} = \text{const.}$$

oder

$$\frac{r^2 - a^2}{r} \frac{ds}{\sqrt{ds^2 - dr^2}} = \pm c,$$

wobei c eine positive Constante sei. Aus dieser Gleichung folgt unmittelbar

$$(r^2 - a^2)^2 = c^2 r^2 - c^2 r^2 \left(\frac{dr}{ds}\right)^2,$$

oder indem man $m = \frac{1}{2} r^2$ setzt,

$$(2m - a^2)^2 = 2c^2 m - c^2 \left(\frac{dm}{ds}\right)^2,$$

$$c^2 \left(\frac{dm}{ds}\right)^2 = -4m^2 - a^4 + 2(c^2 + 2a^2)m$$

$$= -\left[2m - \left(a^2 + \frac{c^2}{2}\right)\right]^2 + a^2 c^2 + \frac{c^4}{4},$$

oder mit positiver Quadratwurzel

$$\left(\frac{1}{\sqrt{a^2 + \frac{c^2}{4}}} \frac{dm}{ds}\right) = 1 - \left(\frac{2m - \left(a^2 + \frac{c^2}{2}\right)}{c\sqrt{a^2 + \frac{c^2}{4}}}\right)^2;$$

mit der Bezeichnung

$$\frac{2m - \left(a^2 + \frac{c^2}{2}\right)}{c\sqrt{a^2 + \frac{c^2}{4}}} = v, \qquad \frac{2s}{c} = t$$

erhält man einfach

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = 1 - v^2.$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung und damit die Gleichung der Extremalen der Aufgabe (7) ist, wenn b eine willkürliche Constante bedeutet,

$$v = \sin\left(t + b - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(t + b)$$

oder

(8) $$r^2 = a^2 + \frac{c^2}{2} - c\sqrt{a^2 + \frac{c^2}{4}} \cos\left(\frac{2s}{c} + b\right).$$

Für die gesuchte Curve, die in dieser Schar enthalten sein muss, hat man die nähere Bestimmung, dass sie vom Kreis $\mathfrak{K}$ ausgeht; es gehören daher die Werthe

$$r = a, \qquad s = 0,$$

mithin auch

$$m = \frac{a^2}{2}, \quad v = \frac{-c}{2\sqrt{a^2 + \frac{c^2}{4}}}, \quad t = 0, \quad \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 = \frac{4a^2}{4a^2 + c^2}$$

zusammen und es ergiebt sich mit positiver Quadratwurzel

$$(9) \qquad \cos b = \frac{c}{\sqrt{4a^2+c^2}}, \qquad \sin b = \pm \frac{2a}{\sqrt{4a^2+c^2}}.$$

Das Vorzeichen in dem Werthe $\sin b$ bestimmt sich aus der Gleichung

$$\frac{dv}{dt}\Big|^{t=0} = \sin b;$$

geht die Curve nach der convexen Seite des Kreises $\mathfrak{K}$, so hat man das positive, geht sie nach der concaven, das negative Vorzeichen zu nehmen. Je nachdem der eine oder andre Fall eintritt, werde a^0 für $+a$ oder $-a$ geschrieben; dann ist stets

$$\sin b = \frac{2a^0}{\sqrt{4a^2+c^2}}.$$

Gilt zunächst in der zweiten Gleichung (9) das obere Vorzeichen, sodass a^0 positiv ist und b zwischen den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ angenommen werden kann, so erhält man eine der Gleichung (8) genügende Curve in folgender Weise. In dem auf dem Kreise $\mathfrak{K}$ liegenden Punkte 0 ziehe man die Tangente und trage auf ihr von 0 beginnend die Länge $\frac{c}{2}$ ab; um den Endpunkt dieser Strecke beschreibe man einen Kreisbogen, der von $\mathfrak{K}$ im Punkte 0 unter rechtem Winkel geschnitten wird. Dass für diesen Kreisbogen die Gleichung (8) gilt, folgt daraus, dass b der spitze Winkel ist unter welchem der im Punkte 0 endigende Radius des Kreises $\mathfrak{K}$ vom Mittelpunkte des construirten Kreisbogens erscheint, und dass letzterer den Durchmesser c hat, $2s:c$ also der zur Bogenlänge s gehörige Centriwinkel ist. Ebenso leicht sieht man, dass bei negativem Werth von $\sin b$ und b die Gleichung (8) für einen Kreisbogen gilt, der nach der Innenseite des Kreises $\mathfrak{K}$ hingeht und diesen in dem Punkte schneidet, für welchen $s=0$ ist.

Es fragt sich nun aber, ob der oben definirte Kreisbogen mit der Curve $\mathfrak{C}$ identisch sein muss, für welche, wenn s der im Punkte 0 beginnende Bogen ist, die Gleichung (8) besteht. Zunächst giebt es, je nachdem man die Länge $\frac{1}{2}c$ nach der einen oder andern Richtung abträgt, zwei verschiedene solche Kreisbögen, die wir durch $\mathfrak{K}^0$ bezeichnen wollen; da für die Curve $\mathfrak{C}$ ebenso wie für die Kreisbögen $\mathfrak{K}^0$ die Gleichung

$$d\varphi = \pm \frac{1}{r}\sqrt{ds^2 - dr^2}$$

den Zuwachs der Winkelcoordinate definirt, so unterscheidet sich $\frac{d\varphi}{ds}$ auf den Curven $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{K}^0$ höchstens durch das Vorzeichen. Auf einem bestimmten der beiden Bögen $\mathfrak{K}^0$ erhält also die mit dem Werth Null beginnende Grösse $\frac{d\varphi}{ds}$ bei kleinen positiven Werthen von s dasselbe Vorzeichen, und hat daher auf diesem bestimmten Bogen $\mathfrak{K}^0$ denselben Werth wie für $\mathfrak{C}$, sodass beide Curven jedenfalls für hinreichend kleine Werthe von σ völlig zusammenfallen. Da weiter $\frac{d\varphi}{ds}$ auf der Curve $\mathfrak{C}$ sich stetig ändern soll, so können die Curven $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{K}^0$ sich nur da trennen, wo $\frac{d\varphi}{ds}$ verschwindet, was, wie eine elementare Erwägung zeigt, nicht eher geschieht, als bis der Kreisbogen $\mathfrak{K}^0$ die Linie $\mathfrak{K}$ wieder erreicht hat. In einem solchen Punkte ist aber die Grösse $\frac{d^2\varphi}{ds^2}$ auf der Curve $\mathfrak{K}^0$ von Null verschieden, sodass der Quotient $\frac{d\varphi}{ds}$ den Werth Null passirt, ohne den Sinn seiner Aenderung zu wechseln. Sollte nun diese Grösse auf der Curve $\mathfrak{C}$ von dem betrachteten Punkte an dem auf dem Kreisbogen $\mathfrak{K}^0$ erhaltenen Werthe entgegengesetzt sein, so müsste sie den Sinn ihrer Aenderung wechseln, $\frac{d^2\varphi}{ds^2}$ demnach auf der Curve $\mathfrak{C}$, ohne zu verschwinden, das Vorzeichen wechseln, d. h. unstetig sein. Suchen wir also überhaupt nur solche Curven $\mathfrak{C}$, längs deren die Polarcoordinaten stetige mit stetigen ersten und zweiten Ableitungen versehene Functionen von s sind, so ist die Curve $\mathfrak{C}$ nothwendig in ihrem ganzen Verlauf mit dem einen der Kreisbögen $\mathfrak{K}^0$ identisch. Die bezeichnete Beschränkung kann offenbar auch dadurch ersetzt werden, dass man voraussetzt, die Coordinaten seien Functionen irgend eines Parameters t von der angegebenen Beschaffenheit, die Grösse $\frac{ds}{dt}$ aber überall von Null verschieden.

Eine auf den Endpunkt 1 bezügliche Eigenschaft der Curve $\mathfrak{C}$, die wir als einen zum Kreise $\mathfrak{K}$ orthogonalen Kreisbogen erkannt haben, ergiebt sich daraus, dass der Punkt 1 der Curve $\mathfrak{C}_0$ angehört, ohne dass seine Lage von vornherein vorgeschrieben wäre. Um hieraus Folgerungen ziehen zu können, vergleichen wir die Curve $\mathfrak{C}$ mit einem benachbarten zum Kreise $\mathfrak{K}$ orthogonalen Kreisbogen $\mathfrak{C}_1$, welcher zwischen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{C}$ ebenfalls die Bogenlänge l besitzt, und bringen zum Ausdruck, dass die Differenz zwischen den mit den beiden Kreisbögen $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}_1$ erhaltenen Werthe von J ein von der speciellen Wahl von $\mathfrak{C}_1$ unabhängiges Vorzeichen haben muss. Die Construction eines solchen Bogens $\mathfrak{C}_1$ ist, wie eine einfache geometrische Betrachtung zeigt, immer möglich, wenn man einen beliebigen Punkt, der von 1 hinreichend wenig abweicht, als Endpunkt nimmt, z. B. einen beliebigen Punkt der Curve $\mathfrak{C}_0$, für welchen $|\sigma - \sigma_1|$ hinreichend klein ist; um indessen von dieser Thatsache Gebrauch machen zu können, muss noch gezeigt werden, dass der Radius von $\mathfrak{C}_1$

eine mit stetiger Ableitung versehene Function von σ ist, und dessen ist man, wie wir sofort sehen werden, nur dann sicher, wenn ein gewisser Ausnahmefall ausgeschlossen ist.

Führt man nämlich in die Gleichung (8) der Curve $\mathfrak{C}$ die Werthe (9) ein, so ergiebt sich

$$\rho^2|^{\sigma_1} = \rho_1^2 = a^2 + \frac{c^2}{2} - \frac{c}{2}\left(c\cos\frac{2l}{c} - 2a^0\sin\frac{2l}{c}\right). \tag{10}$$

Aus dieser Gleichung kann man c als eine mit stetiger Ableitung versehene Function von σ nur dann mit Sicherheit berechnen, wenn die Ableitung der rechten Seite nach c, also die Grösse

$$\begin{aligned} & c\left(1-\cos\frac{2l}{c}\right) - l\sin\frac{2l}{c} + a^0\left(\sin\frac{2l}{c} - \frac{2l}{c}\cos\frac{2l}{c}\right) \\ & = \frac{c}{2}\left\{2 - 2\cos\frac{2l}{c} - \frac{2l}{c}\sin\frac{2l}{c}\right\} + a^0\left(\sin\frac{2l}{c} - \frac{2l}{c}\cos\frac{2l}{c}\right) \\ & = a^0\left\{\sin\frac{2l}{c} - \frac{2l}{c}\cos\frac{2l}{c} + \frac{2c}{a_0}\sin\frac{l}{c}\left(\sin\frac{l}{c} - \frac{l}{c}\cos\frac{l}{c}\right)\right\} \end{aligned}$$

von Null verschieden ist. Das Verschwinden dieser Grösse charakterisirt aber nach § 3 den Punkt 1 als extremalen Brennpunkt des Kreises $\mathfrak{K}$ im Sinne der früheren Aufgabe. Schliessen wir diesen Fall aus, so kann man c vermittelst der Gleichung (10) als Function von σ und dann r vermöge der Gleichung

$$r^2 = a^2 + \frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{2}c\left(c\cos\frac{2s}{c} - 2a^0\sin\frac{2s}{c}\right)$$

als Function von s und σ definiren, welche nach letzterem Argument differenzirt eine stetige erste Ableitung ergiebt, und diese Gleichung definirt einen Kreisbogen $\mathfrak{C}_1$, der zwischen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{C}_0$ die vorgeschriebene Länge l hat, also zu den Curven gehört, mit denen $\mathfrak{C}$ hinsichtlich des Werthes J verglichen werden muss.

Nun ist die mit dem Kreisbogen $\mathfrak{C}_1$ gebildete Grösse J, wenn man unter r die bezeichnete Function von s und σ versteht,

$$\int_0^l \frac{r^2-a^2}{2r}\sqrt{1-p^2}\,ds + \int_\sigma^{\sigma_1} \frac{\rho^2-a^2}{2}\frac{d\psi}{d\sigma}\,d\sigma,$$

und diese Grösse muss für $\sigma = \sigma_1$, d. h. wenn $\mathfrak{C}_1$ in $\mathfrak{C}$ übergeht, ein Extremum besitzen. Hieraus folgt, indem man

$$\delta = d\sigma\,\frac{\partial}{\partial\sigma}$$

setzt,

$$\delta\int_0^l \frac{r^2-a^2}{2r}\sqrt{1-p^2}\,ds - \frac{\rho^2-a^2}{2}\frac{d\psi}{d\sigma}\,d\sigma = 0$$

oder, indem man mit dem Zeichen δ in bekannter Weise operirt, mittelst der Formel

$$\delta p = \frac{d\delta r}{ds}$$

partiell integrirt und berücksichtigt, dass für $s=0$ die Gleichung $r=a$ gilt,

$$-\frac{r^2-a^2}{2r}\frac{p\delta r}{\sqrt{1-p^2}}\Bigg|^l - \frac{\varrho^2-a^2}{2}\frac{d\psi}{d\sigma}d\sigma = 0.$$

Da nun

$$\sqrt{1-p^2} = r\frac{d\varphi}{ds}$$

zu setzen ist, da ferner für $s=l$ die Gleichungen

$$r=\varrho, \qquad r_\sigma = \frac{d\varrho}{d\sigma}$$

gelten, und dem Sinne der Aufgabe gemäss angenommen werden darf, dass r^2-a^2 für $s=l$ nicht verschwindet, so folgt

$$\frac{dr}{ds}\frac{d\varrho}{d\sigma} + \varrho^2\frac{d\psi}{d\sigma}\frac{d\varphi}{ds} = 0,$$

worin der Sinn der verschiedenen Differentiationen klar ist, indem ds und $d\sigma$ den Fortgang längs der Curven $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}_0$ bezeichnen. Die erhaltene Gleichung zeigt, dass diese Curven sich im Punkte 1 unter rechtem Winkel schneiden.

§ 7.

Der extremale Brennpunkt bei zwei veränderlichen Endpunkten.

Wir betrachten nun, um den Entwickelungen des § 3 analoge zur Seite zu stellen, die Schar der zum Kreise $\mathfrak{K}$ orthogonalen Kreise

$$(1)\qquad r^2 = a^2 + \frac{1}{2}c^2 - c\sqrt{a^2+\frac{1}{4}c^2}\cos\left(\frac{2s}{c}+b\right),$$

unter welchen dem Werthsystem

$$b=b_0, \qquad c=c_0$$

entsprechend die Curve $\mathfrak{C}$ vorkommt, in der Umgebung der letzteren, und bestimmen die Grössen b und c so, dass die dargestellten Kreise, welche wir $\mathfrak{S}$ nennen wollen, von der Curve $\mathfrak{C}_0$ in der Umgebung des Punktes 1 unter rechtem Winkel geschnitten werden, während für die Länge des Bogens zwischen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{C}_0$ keine Forderung aufgestellt wird; dem Schnittpunkte eines Kreises $\mathfrak{S}$ und der Curve $\mathfrak{C}_0$ entspreche stets der Werth $s=l$, wodurch nur auf jedem Kreise der Anfangspunkt der Bogenmessung in besonderer Weise festgelegt wird.

Der senkrechte Schnitt mit der Curve $\mathfrak{C}_0$ drückt sich, da im Schnittpunkte $r = \varrho$ ist, in der Gleichung

$$\frac{dr}{ds}\frac{d\varrho}{d\sigma} + r^2 \frac{d\varphi}{ds}\frac{d\psi}{d\sigma} = 0 \tag{2}$$

aus. Aus dieser folgt wie in § 2

$$\frac{d\varrho}{d\sigma} = -\eta r \frac{d\varphi}{ds}, \qquad \varrho \frac{d\psi}{d\sigma} = \eta \frac{dr}{ds}, \tag{3}$$

wobei η einer der Werthe ± 1 ist; bei der in § 2 angegebenen geometrischen Bedeutung dieser Zahl hat dieselbe für alle Kreise $\mathfrak{S}$ denselben Werth wie für $\mathfrak{C}$, da erstere nur insoweit betrachtet werden, als sie von $\mathfrak{C}$ hinreichend wenig abweichen.

Setzt man ferner

$$\frac{1}{2}\varrho^2 \frac{d\psi}{d\sigma} = T,$$

sodass T als gegebene Function von σ anzusehen ist, und führt den ersten der Werthe (3) in die Gleichung (2) ein, so erhält man

$$-\eta r \frac{dr}{ds}\frac{d\varphi}{ds} + 2T\frac{d\varphi}{ds} = 0.$$

Auf der linken Seite dieser Gleichung kann der Factor $\frac{d\varphi}{ds}$ nur dann allgemein, d. h. für alle von σ_1 hinreichend wenig abweichenden Werthe von σ verschwinden, wenn alle Kreise $\mathfrak{S}$ in ihren Schnittpunkten mit $\mathfrak{C}_0$ von den Radien r berührt werden, $\mathfrak{C}_0$ also ein mit $\mathfrak{K}$ concentrischer Kreis und $\mathfrak{C}$ eine Gerade ist. Schliessen wir diesen Fall aus, so ergiebt sich

$$-\eta r \frac{dr}{ds} + 2T = 0,$$

oder der Gleichung (1) zufolge, und da für den betrachteten Punkt $s = l$ zu setzen ist,

$$-\eta \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}c^2}\,\sin\left(\frac{2l}{c} + b\right) + 2T = 0. \tag{4}$$

Nimmt man hierzu die Gleichung

$$a^2 + \frac{1}{2}c^2 - c\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}c^2}\,\cos\left(\frac{2l}{c} + b\right) = \varrho^2, \tag{5}$$

so hat man zwei Gleichungen zur Bestimmung von b und c als Functionen von σ, welchen jedenfalls durch das Wertsystem

$$\sigma = \sigma_1, \qquad c = c_0, \qquad b = b_0 \tag{6}$$

genügt wird, da sie nach dieser Substitution nur den orthogonalen Schnitt der Curven $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}_0$ ausdrücken. Um aber dessen sicher zu sein, dass die Gleichungen (4), (5) die Grössen b, c als stetige, mit endlichen und stetigen ersten Ableitungen versehene Functionen von σ definiren, muss gezeigt werden, dass die nach b und c genommene Functionaldeterminante der linken Seiten jener Gleichungen für das Werthsystem (6) nicht verschwindet. Zu diesem Zwecke setzen wir

$$C = \sqrt{a^2 + \frac{1}{4} c^2}, \qquad \beta = \frac{2l}{c} + b,$$

$$w = C \sin \beta, \qquad v = \frac{1}{2} c^2 - c\, C \cos \beta,$$

sodass

$$C_c = \frac{c}{4C}, \qquad C_b = 0, \qquad \beta_b = 1;$$

dann genügt es, die Functionaldeterminante

$$\frac{1}{C} \frac{\partial(w, v)}{\partial(b, c)} = \begin{vmatrix} \cos \beta & C_c \sin \beta + C\beta_c \cos \beta \\ c \sin \beta & c - C \cos \beta - c C_c \cos \beta + c C \beta_c \sin \beta \end{vmatrix}$$

zu bilden, für die man sofort findet

$$c \cos \beta - C \cos^2 \beta - c C_c \cos^2 \beta - c C_c \sin^2 \beta$$
$$= -\frac{c^2}{4C} - C \cos^2 \beta + c \cos \beta = -\frac{1}{4C} (c - 2C \cos \beta)^2.$$

Diese Grösse könnte nur verschwinden, wenn

$$C \cos \beta = \frac{c}{2}$$

wäre, woraus, da die Gleichung (1) für $s = l$ ergiebt

$$r^2 = a^2 + \frac{1}{2} c^2 - c C \cos \beta,$$

folgen würde

$$r^2 = a^2;$$

der Punkt 1 läge also ebenso wie 0 auf dem Kreise $\mathfrak{K}$, was offenbar dem Sinn unsrer Aufgabe nicht entspricht und demnach auszuschliessen ist. Die Gleichungen (4), (5) definiren also in der That b und c als Functionen von der angegebenen Beschaffenheit; setzt man diese Werthe in die Gleichung (1) ein, so erscheint r als Function von s und σ allein:

(7) $$r = r(s, \sigma);$$

speciell ist offenbar

$$r(l, \sigma) = \varrho.$$

Die Bedeutung der Schar $\mathfrak{S}$ beruht nun auf folgendem Umstande. Es sei s ein beliebiger zwischen 0 und l gelegener Werth, σ liege in der Nähe von σ_1, dann hat die Grösse

$$u = -\int_s^l \frac{r^2 - a^2}{2r} \sqrt{1 - p^2}\, ds - \int_\sigma^{\sigma_2} \frac{\varrho^2 - a^2}{2} \frac{d\psi}{d\sigma}\, d\sigma,$$

in deren erstem Gliede für r der Werth (7) eingesetzt zu denken ist, eine leicht ersichtliche Bedeutung; für $s = 0$ und $\sigma = \sigma_1$ geht sie in den längs der Curve $\mathfrak{C}$ gebildeten Werth des Integrals $- J$ über. Betrachtet man u als Function von s und σ, so ergeben sich mit der Bezeichnung

$$F(r, s, r', s') = \frac{r^2 - a^2}{2r} \sqrt{s'^2 - r'^2},$$

in welcher die Striche Ableitungen nach irgend einem Parameter t bedeuten, die Gleichungen

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial s} = F(r, s, p, 1) = \frac{F(r, s, r', s')}{s'}, \\ (8) \qquad &\frac{\partial u}{\partial \sigma} = \frac{d\psi}{d\sigma} \frac{[r(l, \sigma)]^2 - a^2}{2} - \frac{\partial}{\partial \sigma} \int_s^l F(r, s, p, 1)\, ds. \end{aligned}$$

Das letzte Glied des zweiten Ausdruckes kann, indem man

$$\delta = d\sigma \frac{\partial}{\partial \sigma}$$

setzt, nach der gewöhnlichen Methode der Variationsrechnung ausgerechnet werden; da bei der Substitution (7) die Gleichungen

$$F_s - F'_{s'} = 0, \qquad F_r - F'_{r'} = 0$$

bestehen, so findet man, indem man $t = s$, $r' = p$ setzt,

$$\delta \int_s^l F(r, s, p, 1)\, ds = F_{r'} \delta r + F_{s'} \delta s \Big|_s^l$$

oder, da offenbar $\delta s = 0$,

$$\delta \int_s^l F(r, s, p, 1)\, ds = F_{r'} r_\sigma d\sigma \Big|_s^l,$$

wobei die partielle Ableitung r_σ mit dem Ausdruck (7) gebildet ist. Setzt man hier den Werth

$$F_{r'} = - \frac{r^2 - a^2}{2r} \frac{dr}{\sqrt{ds^2 - dr^2}}$$

ein, so ergiebt sich die Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial \sigma} = \frac{d\psi}{d\sigma} \frac{[r(l, \sigma)]^2 - a^2}{2} + \frac{r^2 - a^2}{2r} \frac{dr}{\sqrt{ds^2 - dr^2}} \Big|^l - F_{r'} r_\sigma,$$

in welcher das letzte Glied sich auf den Anfangswerth s bezieht. Die ersten beiden Glieder ergeben aber die Summe

$$- \frac{a^2 - [r(l, \sigma)]^2}{2} \left\{ \frac{d\psi}{d\sigma} + \frac{p r_\sigma}{r\sqrt{1 - p^2}} \right\} = - \frac{a^2 - \varrho^2}{2} \left(\frac{d\psi}{d\sigma} + \frac{p r_\sigma}{r\sqrt{1 - p^2}} \right) \Big|^{s = l},$$

und da die Grösse $1-p^2$ längs der Curve $\mathfrak{C}$ und demnach auch längs der Curven $\mathfrak{S}$ nicht verschwindet, abgesehen von Punkten des Kreises $\mathfrak{K}$, so kann für den eingeklammerten Ausdruck geschrieben werden

$$\frac{1}{r\sqrt{1-p^2}}\left\{\frac{d\psi}{ds}r\sqrt{1-p^2}+pr_\sigma\right\}=\frac{1}{r\sqrt{1-p^2}}\left\{r^2\frac{d\psi}{d\sigma}\frac{d\varphi}{ds}+\frac{\partial r}{\partial\sigma}\frac{dr}{ds}\right\}\Bigg|^l;$$

diese Grösse verschwindet aber, da offenbar

$$\frac{d\varrho}{d\sigma}=r_\sigma(l,\sigma)$$

zu setzen ist, der Gleichung (2) zufolge. Somit bleibt übrig

$$\frac{\partial u}{\partial\sigma}=r_\sigma F_{r'},$$

und die Gleichung (8) ergiebt, da F bezüglich der Argumente r', s' homogen von der ersten Dimension ist,

$$\frac{\partial u}{\partial s}=F_{r'}\frac{\partial r}{\partial s}+F_{s'}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt unmittelbar

$$du=\frac{\partial u}{\partial\sigma}d\sigma+\frac{\partial u}{\partial s}dr=F_{r'}dr+F_{s'}ds, \tag{9}$$

wobei gesetzt ist

$$dr=\frac{\partial r}{\partial s}ds+\frac{\partial r}{\partial\sigma}d\sigma=p\,ds+r_\sigma d\sigma.$$

Für die Frage, ob die Curve $\mathfrak{C}$ das gesuchte Extremum wirklich liefert, ist es wesentlich, ob dr in der Formel (9) als das Differential einer unabhängigen Variabeln betrachtet werden, oder ob r an Stelle von σ als Argument eingeführt werden kann. Das ist offenbar möglich, wenn längs der Curve $\mathfrak{C}$ die Ungleichung

$$r_\sigma\gtrless 0$$

gilt. Betrachten wir dann wieder die Figur in der zweiten Ebene, so kann unter dieser Voraussetzung durch jeden Punkt, der einer gewissen Umgebung des Bogens $\mathfrak{C}'$ angehört, eine und nur eine der durch die Gleichung (7) definirten Extremalen $\mathfrak{S}'$ gelegt werden, und der zu dieser gehörige Werth von σ ist eine stetige, mit stetigen ersten Ableitungen versehene Function von r und s.

Es sei nun eine Curve $\mathfrak{L}$ vom Kreise $\mathfrak{K}$ zur Curve $\mathfrak{C}_0$ hingezogen, welche die vorgeschriebene Länge l hat und demgemäss, auf die zweite Ebene übertragen, eine Curve $\mathfrak{L}'$ ergiebt, welche den Punkt 0 oder $s=0$, $r=a$ mit der Geraden $s=l$ verbindet. Ferner liege die Curve $\mathfrak{L}'$ innerhalb des von den Extremalen $\mathfrak{S}'$ bedeckten Gebiets; damit wird der Curve $\mathfrak{L}$ eine in § 38 meines Lehrbuchs näher besprochene Beschränkung auferlegt, die jedenfalls naturgemäss ist, wenn man sich $\mathfrak{C}$ als unausdehnbaren Faden und $\mathfrak{L}$ durch Deformation desselben entstanden denkt. Endlich seien φ und r längs der Curve $\mathfrak{L}$ stetige Functionen eines Parameters τ, deren erste Ableitungen stetig und so beschaffen sind, dass $\frac{ds}{d\tau}$ stets positiv ist. Lässt man dann den Punkt 3, dessen Abscisse $s = s_3$ ist, längs des Bogens $\mathfrak{L}'$ vom Anfangspunkte 0 zum Endpunkte 5 laufen, so wächst τ_3 ebenso wie s_3, und man kann in jeder Lage des Punktes 3 eine Curve $\mathfrak{S}'$ construiren, welche von 3 nach der Geraden $s = l$ geht und diese etwa im Punkte 4 trifft; denn die zugehörige Grösse $\sigma = \sigma_3$ ist als Function von r und s nach dem Obigen stetig und mit stetigen ersten Ableitungen versehen und hat demgemäss dieselben Eigenschaften auch als Function von τ. Jetzt bilde man die Grösse

$$W(\tau) = \int_{\tau_3}^{\tau_5} F\left(r, s, \frac{dr}{d\tau}, \frac{ds}{d\tau}\right) d\tau + \int_{\sigma_5}^{\sigma_2} \frac{\varrho^2 - a^2}{2} \frac{d\psi}{d\sigma} d\sigma$$
$$- \int_{s}^{l} F(r, s, p, 1)\, ds - \int_{\sigma}^{\sigma_2} \frac{\varrho^2 - a^2}{2} \frac{d\psi}{d\sigma} d\sigma,$$

indem man $\tau = \tau_3$ setzt; dann findet man unmittelbar

$$W(\tau_0) = \int_{\tau_0}^{\tau_5} F\left(r, s, \frac{dr}{d\tau}, \frac{ds}{d\tau}\right) d\tau + \int_{\sigma_5}^{\sigma_2} \frac{\varrho^2 - a^2}{2} \frac{d\psi}{d\sigma} d\sigma$$
$$- \int_{0}^{l} F(r, s, p, 1)\, ds - \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{\varrho^2 - a^2}{2} \frac{d\psi}{d\sigma} d\sigma,$$

und da der erste und dritte Summand von $W(\tau)$ verschwinden, wenn die Punkte 3 und 5 zusammenfallen, der zweite und vierte aber sich dann heben, so folgt

$$W(\tau_5) = 0.$$

Gelingt es also, das Vorzeichen der Grössen $\frac{dW}{d\tau}$ zu bestimmen und für das Intervall von τ_0 bis τ_5 als fest nachzuweisen, so hat die Grösse $W(\tau_0)$ das diesem festen entgegengesetzte Vorzeichen. Die Grösse $W(\tau_0)$ ist aber genau die Differenz der für die Curven $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{C}$ gebildeten Inhaltsintegrale unsres Problems; ist ihr Vorzeichen fest, so ist das Extremum nachgewiesen, und zwar liegt ein Minimum oder Maximum des Ausdrucks J vor, je nachdem das Vorzeichen der Differenz positiv oder negativ ist. Nun ist offenbar, da u die Summe der letzten beiden Glieder von $W(\tau)$ ist,

$$dW = du + d\int_{\tau_3}^{\tau_5} F\left(r, s, \frac{dr}{d\tau}, \frac{ds}{d\tau}\right) d\tau,$$

oder der Formel (9) zufolge

$$\begin{aligned}\frac{dW}{d\tau} &= F_{r'}(r, s, r', s')\frac{dr}{d\tau} + F_{s'}(r, s, r', s')\frac{ds}{d\tau} - F\left(r, s, \frac{dr}{d\tau}, \frac{ds}{d\tau}\right) \\ &= 8\left(r, s, r', s', \frac{dr}{d\tau}, \frac{ds}{d\tau}\right).\end{aligned}$$

In dieser Formel ist wie oben zu setzen

$$F(r, s, r', s') = \frac{r^2 - a^2}{2r}\sqrt{s'^2 - r'^2},$$

also

$$F_{r'} = \frac{r^2 - a^2}{2r}\cdot\frac{-r'}{\sqrt{s'^2 - r'^2}}, \qquad F_{s'} = \frac{r^2 - a^2}{2r}\cdot\frac{s'}{\sqrt{s'^2 - r'^2}};$$

damit ergiebt sich

$$8 = \frac{r^2 - a^2}{2r}\left[\frac{-r'\frac{dr}{d\tau}}{\sqrt{s'^2 - r'^2}} + \frac{s'\frac{ds}{d\tau}}{\sqrt{s'^2 - r'^2}} - \sqrt{\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 - \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2}\right],$$

oder, wenn

$$\frac{dr}{d\tau} = P\frac{ds}{d\tau}, \qquad s' = 1, \qquad r' = p$$

gesetzt und berücksichtigt wird, dass $\frac{ds}{d\tau}$ positiv ist,

$$8 = \frac{r^2 - a^2}{2r\sqrt{1 - p^2}}\frac{ds}{d\tau}\left[1 - pP - \sqrt{1 - p^2}\sqrt{1 - P^2}\right].$$

Hier sind die Quadratwurzeln in folgender Weise bestimmt: bezieht man das Differentialzeichen D auf die Curve $\mathfrak{L}$, d wie bisher auf die Extremale, so ist

$$\sqrt{1 - p^2} = r\frac{d\varphi}{ds}, \qquad \sqrt{1 - P^2} = r\frac{D\varphi}{Ds},$$

$$p = \frac{dr}{ds}, \qquad P = \frac{Dr}{Ds},$$

und die Grössen

$$\sqrt{1 - p^2}\,ds, \qquad \sqrt{1 - P^2}\,Ds$$

sind die Projectionen der Bogenelemente ds und Ds auf eine gegen den Radius r im positiven Sinne um 90^0 gedrehte Richtung. Ferner sind dr, Dr die Projectionen jener Elemente auf die Richtung des Radius selbst; es ist daher die Grösse

$$pP + \sqrt{1 - p^2}\sqrt{1 - P^2}$$

der Cosinus des Winkels der Elemente ds und Ds. Bezeichnet man die Richtungen derselben durch g und h, so folgt

$$8 = \frac{(r^2 - a^2)(1 - \cos(g\,h))}{2r\sqrt{1 - p^2}}\frac{ds}{d\tau}.$$

Dass diese Grösse zunächst nicht durch den Factor $1 - \cos(gh)$ längs der ganzen Curve $\mathfrak{L}$ zum Verschwinden gebracht werden kann, es sei denn dass letztere mit $\mathfrak{C}$ völlig zusammenfiele, sieht man wie in § 22 meines Lehrbuchs leicht; denn die Gleichung

$$p = P$$

würde bedeuten

$$\frac{dr}{ds} = \frac{dr}{ds} + r_\sigma \frac{d\sigma}{ds}, \qquad r_\sigma \frac{d\sigma}{ds} = 0;$$

da nun r_σ nicht verschwindet, so müsste σ constant, also dem Endwerth σ_1 gleich sein und jeder Punkt der Curve $\mathfrak{L}'$ auf der Extremale $\mathfrak{C}'$ liegen.

Was die übrigen Factoren der Grösse $\mathfrak{s}$ betrifft, so ist $\frac{ds}{d\tau}$ nach Voraussetzung positiv. Die Grösse

$$\sqrt{1 - p^2} = \frac{d\varphi}{ds}$$

könnte das Vorzeichen wechseln, indem der Bogen $\mathfrak{C}$ abgesehen von seinem Anfangspunkte noch in einem andern Punkte seine Tangente durch den Nullpunkt der Polarcoordinaten schickte. Das ist aber, da die Kreise $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{C}$ einander unter rechtem Winkel schneiden, nur in einem solchen Punkte möglich, wo die beiden Kreise sich zum zweiten Male kreuzen, sodass auch $r^2 - a^2$ das Vorzeichen wechseln, die Grösse $\mathfrak{s}$ aber das ihrige beibehalten würde. Letzteres ist das positive, wenn gleichzeitig eins der beiden Ungleichungssysteme

$$r > a, \qquad \frac{d\varphi}{ds} > 0,$$
$$r < a, \qquad \frac{d\varphi}{ds} < 0$$

besteht; dann wird bei wachsendem s das Innere des Kreises, dem der Bogen $\mathfrak{C}$ angehört, im positiven Sinne umkreist. Daraus folgt, dass die von den Curven $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}_0$ und $\mathfrak{K}$ umgrenzte Fläche im positiven oder negativen Sinne umkreist wird, J also positiv oder negativ ist, je nachdem diese Fläche auf der concaven oder convexen Seite des Bogens $\mathfrak{C}$ liegt. Im ersten dieser Fälle hat man, da $\mathfrak{s}$ positiv ist, ein Maximum, im zweiten ein Minimum des absolut genommenen Areals. Genau dasselbe Resultat ergiebt sich aber auch, wenn eins der Ungleichungssysteme

$$r > a, \qquad \frac{d\varphi}{ds} < 0,$$
$$r < a, \qquad \frac{d\varphi}{ds} > 0$$

besteht, das Innere des Kreises also, dem $\mathfrak{C}$ angehört, negativ umkreist wird bei wachsenden Werthen von s; dann ist, da $\mathfrak{s}$ negativ ist, J ein

Minimum, und hat einen positiven oder negativen Werth, je nachdem die betrachtete Fläche auf der convexen oder concaven Seite des Bogens $\mathfrak{C}$ liegt; im ersten dieser beiden Fälle hat also der absolute Werth von J ein Minimum, im zweiten ein Maximum, wie oben.

Unsicher wird das Eintreten des Extremums, wenn die Ungleichung

$$r_\sigma \gtrless 0$$

nicht mehr für das ganze Intervall

$$0 \leqq s \leqq l$$

gilt. Dann würden für einen Punkt desselben, wie die Formeln (4), (5) zeigen, die folgenden Gleichungen zusammen bestehen:

$$(10)\qquad \begin{aligned} &-\eta C \sin\beta + 2T = 0, \\ &a^2 + \frac{1}{2} c^2 - Cc\cos\beta = \varrho^2, \\ &\frac{\partial}{\partial s}\Big[a^2 + \frac{1}{2}c^2 - Cc\cos\alpha\Big] = 0; \end{aligned}$$

dabei ist gesetzt

$$T = \frac{1}{2}\varrho^2 \frac{d\psi}{d\sigma}, \qquad \varrho = r(l, \sigma), \qquad C = \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}c^2},$$

$$\alpha = \frac{2s}{c} + b, \qquad \beta = \frac{2l}{c} + b.$$

In diesen Gleichungen sind b und c als Functionen von σ zu betrachten, welche, wie oben gezeigt, durch die ersten beiden Gleichungen so definirt werden, dass in der Umgebung des Werthes $\sigma = \sigma_1$ die gewöhnlichen Regeln der Differentialrechnung angewandt werden können.

Differenzirt man demgemäss die ersten beiden Gleichungen (10) nach σ und führt in der dritten die angedeutete Derivation aus, so ergiebt sich

$$(11)\qquad \begin{aligned} &-\eta C_\sigma \sin\beta - \eta C\cos\beta\,\beta_\sigma + 2\frac{dT}{d\sigma} = 0, \\ &cc_\sigma - Cc_\sigma\cos\beta - C_\sigma c\cos\beta + Cc\beta_\sigma\sin\beta = 2\varrho\varrho_\sigma, \\ &cc_\sigma - Cc_\sigma\cos\alpha - C_\sigma c\cos\alpha + Cc\alpha_\sigma\sin\alpha = 0. \end{aligned}$$

Nun können die Grössen C_σ, α_σ, β_σ linear-homogen durch b_σ und c_σ ausgedrückt werden; ferner gilt nach § 3, dessen Gleichung (17) offenbar auch jetzt noch auf die Curve $\mathfrak{C}_0$ angewandt werden kann, die Gleichung

$$\frac{dT}{d\sigma} = \frac{\varrho}{2R}\frac{d\varrho}{d\sigma},$$

wobei R den Krümmungsradius der Curve $\mathfrak{C}_0$ bedeutet, mit einem in § 3 geometrisch definirten Vorzeichen versehen. Die Gleichungen (11) sind daher in den Grössen b_σ, c_σ, ϱ_σ linear und homogen, und da mindestens ϱ_σ aus denselben Gründen wie in § 3 von Null verschieden sein muss, so kann man die bezeichneten drei Grössen aus den Gleichungen (11) eliminiren, und erhält so eine Gleichung für die Grösse s, welche für den extremalen Brennpunkt der Geraden $s = l$ auf der Extremale $\mathfrak{C}'$ charakteristisch ist.

Wir betrachten in erster Linie den speciellen Fall, dass der extremale Brennpunkt in die Lage 0 ($r = a$, $s = 0$) übergeht, und berücksichtigen dabei die Gleichungen (9) des § 6:

$$\cos b = \frac{c}{2C}, \qquad \sin b = \frac{a^0}{C},$$

in welchen b, c die auf die Curve $\mathfrak{C}'$ bezüglichen Werthe der Constanten bedeuten; da offenbar

$$(12) \qquad \beta_\sigma = -\frac{2l}{c^2}c_\sigma + b_\sigma, \qquad \alpha_\sigma = -\frac{2sc_\sigma}{c^2} + b_\sigma, \qquad CC_\sigma = \frac{1}{4}cc_\sigma,$$

und für $s = 0$ die Gleichungen

$$\alpha = b, \qquad \cos\alpha = \frac{c}{2C}, \qquad \sin\alpha = \frac{a^0}{C}$$

gelten, so ergiebt zunächst die dritte Gleichung (11) in dem jetzt betrachteten Falle das auch für die folgenden Paragraphen wichtige Resultat:

$$cc_\sigma - Cc_\sigma \cdot \frac{c}{2C} - \frac{c^2c_\sigma}{4C} \cdot \frac{c}{2C} + ca^0b_\sigma = 0$$

oder kurz

$$(13) \qquad a^0c_\sigma + 2C^2b_\sigma = 0.$$

Hieraus folgt, dass die Grössen c_σ, b_σ nur zugleich verschwinden; wäre das der Fall, so müsste der zweiten Gleichung (11) zufolge auch ϱ_σ verschwinden, was wie in § 3 unmöglich ist. Die Grössen b_σ, c_σ sind also beide von Null verschieden. Die ersten beiden Gleichungen (11) nehmen nach Substitution der Werthe (12) folgende Form an:

$$\left[-\frac{\eta c\sin\beta}{4C} + 2\eta\frac{Cl}{c^2}\cos\beta\right]c_\sigma - \eta C\cos\beta\cdot b_\sigma + \frac{\varrho\varrho_\sigma}{R} = 0,$$

$$\left[c - \left(C + \frac{c^2}{4C}\right)\cos\beta - \frac{2lC}{c}\sin\beta\right]c_\sigma + Cc\sin\beta\cdot b_\sigma - 2\varrho\varrho_\sigma = 0;$$

oder nach Formel (13)

$$\left[-\frac{\eta c\sin\beta}{4C} + \left(2\eta\frac{Cl}{c^2} + \frac{a^0\eta}{2C}\right)\cos\beta\right]c_\sigma + \frac{\varrho\varrho_\sigma}{R} = 0,$$

$$\left[c - \frac{4a^2 + 2c^2}{4C}\cos\beta - \left(\frac{2lC}{c} + \frac{a^0c}{2C}\right)\sin\beta\right]c_\sigma - 2\varrho\varrho_\sigma = 0.$$

Weiter ergiebt sich, indem man die Werthe

$$\beta = \frac{2l}{c} + b, \qquad \gamma = \frac{2l}{c}, \qquad \cos\beta = \frac{c\cos\gamma}{2C} - \frac{a^0 \sin\gamma}{C},$$

$$\sin\beta = \frac{c\sin\gamma}{2C} + \frac{a^0\cos\gamma}{C}$$

einführt, und berücksichtigt, dass c_σ nicht verschwindet,

$$-2R\left[-\frac{\eta c}{4C}\left(\frac{c\sin\gamma}{2C} + \frac{a^0\cos\gamma}{C}\right) + \left(2\eta\frac{Cl}{c^2} + \frac{a^0\eta}{2C}\right)\left(\frac{c\cos\gamma}{2C}\sin\gamma - \frac{a^0\sin\gamma}{C}\right)\right]$$
$$= c - \frac{4a^2+2c^2}{4C}\left(\frac{c\cos\gamma}{2C} - \frac{a^0\sin\gamma}{C}\right) - \left(\frac{2lC}{c} + \frac{a^0 c}{2C}\right)\left(\frac{c}{2C}\sin\gamma + \frac{a^0\cos\gamma}{C}\right),$$

oder indem man ordnet und die Beziehungen

$$4C^2 = 4a^2 + c^2, \qquad \gamma = \frac{2l}{c}$$

benutzt,

$$\sin\gamma\left(R\eta + 4\eta R\frac{a^0 l}{c^2}\right) - \frac{2\eta Rl}{c}\cos\gamma$$

$$= c + \sin\gamma\,(a^0 - l) + \cos\gamma\left(-\frac{2la^0}{c} - c\right).$$

Setzt man

$$-R\eta = R^0,$$

so kann das erhaltene Resultat auch geschrieben werden

$$(14) \qquad c + \left(a^0 + R^0 + \frac{2a^0R^0\gamma}{c} - \frac{c\gamma}{2}\right)\sin\gamma - (c + (a^0+R^0)\gamma)\cos\gamma = 0.$$

Um die Bedeutung dieser Gleichung klar zu machen, erinnern wir daran, dass die in § 2 gegebene Definition von η sowie die in § 3 über das Product $-R\eta$ angestellte Betrachtung hier gültig bleibt und R^0 dieselbe Bedeutung wie dort hat. Die Grössen a^0, R^0 sind also die Krümmungsradien der Curven $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{C}_0$ in ihren Schnittpunkten mit $\mathfrak{C}$, positiv oder negativ gerechnet, jenachdem die Richtungen nach den Krümmungsmittelpunkten in die Verlängerung des Bogens $\mathfrak{C}$ fallen oder nicht.

§ 8.

Das Aufhören des Extremums in der Aufgabe des § 6.

Wenn zwischen den Grössen a^0, R^0 und dem Centriwinkel γ die Gleichung (14) des § 7 besteht, kann in strenger Weise gezeigt werden, dass der Bogen $\mathfrak{C}$ das verlangte Extremum im Allgemeinen nicht mehr liefert. Dieser Nachweis, der wesentlich auf den Entwicklungen des § 4 beruht, ist deshalb interessant, weil bisher nur bei der einfachen Aufgabe der kürzesten Linie in der Ebene unter der Voraussetzung zweier variabler Endpunkte der gesuchten Curve die entsprechende Untersuchung durchgeführt worden ist.

Denkt man sich die Grössen b und c als Functionen von σ durch die Gleichungen (4), (5) des § 7 definirt, so wird durch die Gleichung

$$(1) \qquad r^2 = a^2 + \frac{1}{2}c^2 - c\sqrt{a^2 + \frac{1}{4}c^2}\cos\left(\frac{2s}{c} + b\right)$$

eine von dem Parameter σ abhängende einfache Schar von Extremalen dargestellt, welcher dem Werthe $\sigma = \sigma_1$ entsprechend die Curve $\mathfrak{C}$ angehört, und es handelt sich um die Extremumseigenschaft der für diese Curve gebildeten Grösse

$$J = \int_0^l F(r, s, p, 1)\,ds + \Phi(\sigma_1);$$

die wesentliche Eigenthümlichkeit der Function $\Phi(\sigma)$ zeigt sich darin, dass für die Grösse

$$u = -\int_s^l F(r, s, p, 1)\,ds - \Phi(\sigma),$$

wenn man r und p auf eine beliebige Curve jener Schar bezieht, die Differentialbeziehung

$$du = F_{r'}\,dr + F_{s'}\,ds$$

gilt. Es tritt hier dieselbe Schwierigkeit auf wie bei dem früher behandelten analogen Problem von speciellerer Fassung; wenn nämlich, wie es der Gleichung (14) des § 7 entspricht, der Punkt $r = a$, $s = 0$ der extremale Brennpunkt ist, so verschwindet auch jetzt in ihm die Grösse $\frac{\partial^2 F}{(\partial dr)^2}$ und damit die Grösse F^1, welche in der älteren Theorie stets als von Null verschieden vorausgesetzt wurde. Die in § 4 entwickelte neue Theorie überwindet aber wiederum die Schwierigkeit, sodass man das Aufhören des Extremums nachweisen kann; denn wie in § 5 ist auch hier die in der allgemeinen Theorie durch S_0 bezeichnete Grösse mit $-J$ identisch.

In der That ergiebt die Gleichung (1), nach σ differenzirt, wenn man wieder mit positiver Quadratwurzel die Bezeichnung

$$C = \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}c^2}$$

einführt, das Resultat

$$(2) \quad 2rr_\sigma = \frac{\partial\left(C^2 + \frac{1}{4}c^2\right)}{\partial\sigma} - \frac{\partial(Cc)}{\partial\sigma}\cos\left(\frac{2s}{c} + b\right) + Cc\left(-\frac{2sc_\sigma}{c^2} + b_\sigma\right)\sin\left(\frac{2s}{c} + b\right),$$

und wenn man nach s differenzirt, erhält man

$$2r_\sigma \frac{dr}{ds} + 2r\frac{dr_\sigma}{ds} = \frac{2}{c}\frac{\partial(Cc)}{\partial\sigma}\sin\left(\frac{2s}{c}+b\right) - \frac{2Cc_\sigma}{c}\sin\left(\frac{2s}{c}+b\right)$$
$$+ 2C\left(-\frac{2sc_\sigma}{c^2}+b_\sigma\right)\cos\left(\frac{2s}{c}+b\right).$$

Nun soll für $s=0$ und die Curve $\mathfrak{C}$, d. h. für $c=c_0$, $b=b_0$ die Grösse r_σ verschwinden; somit folgt für dieses Werthsystem

$$2r\frac{dr_\sigma}{ds} = \frac{2}{c}\sin b\,\frac{\partial(Cc)}{\partial\sigma} - \frac{2Cc_\sigma}{c}\sin b - 2Cb_\sigma\cos b;$$

da ferner den Formeln (9) des § 6 zufolge

(3) $$\cos b = \frac{c}{2C}, \qquad \sin b = \frac{a^0}{C}$$

zu setzen ist und r für $s=0$ den Werth a hat, so folgt

$$2a\frac{dr_\sigma}{ds} = \frac{2a^0}{C}C_\sigma + b_\sigma c,$$

oder, wenn man die Gleichung

(4) $$4C_\sigma C = cc_\sigma$$

benutzt,

$$2a\frac{dr_\sigma}{ds} = \frac{a^0cc_\sigma}{2C^2} + b_\sigma c = \frac{c}{2C^2}(a^0c_\sigma + 2C^2b_\sigma).$$

Diese Grösse verschwindet der Gleichung (13) des § 7 zufolge; da nun in der Bezeichnung der allgemeinen Theorie des § 4

$$s = t$$

zu setzen ist, und σ an Stelle der dort durch a bezeichneten Grösse tritt, so geht $\Delta(t,a)$ in r_σ über und die Grösse $\Delta_t(t,a)$ verschwindet im extremalen Brennpunkte. Nach § 4 hört aber das Extremum in diesem Punkte sicher auf, wenn die Grösse $\Delta_a(t,a)$, d. h. in dem vorliegenden speciellen Falle $r_{\sigma\sigma}$ von Null verschieden ist. Darüber kann man leicht entscheiden; die Gleichung (2) ergiebt nämlich sofort

$$2r_\sigma^2 + 2rr_{\sigma\sigma} = 2CC_{\sigma\sigma} + 2C_\sigma^2 + \frac{1}{2}(cc_{\sigma\sigma}+c_\sigma^2)$$
$$-(Cc)_{\sigma\sigma}\cos\left(\frac{2s}{c}+b\right) + 2(Cc)_\sigma\left(-\frac{2sc_\sigma}{c^2}+b_\sigma\right)\sin\left(\frac{2s}{c}+b\right)$$
$$+ Cc\left(-\frac{2sc_\sigma}{c^2}+b_\sigma\right)^2\cos\left(\frac{2s}{c}+b\right)$$
$$+ Cc\sin\left(\frac{2s}{c}+b\right)\left(-\frac{2sc_{\sigma\sigma}}{c^2}+\frac{4sc_\sigma^2}{c^3}+b_{\sigma\sigma}\right).$$

Sodann folgt aus der Gleichung (4)

$$4(C_\sigma^2 + CC_{\sigma\sigma}) = cc_{\sigma\sigma} + c_\sigma^2,$$

(5) $$\frac{C_{\sigma\sigma}}{C} = \frac{c_\sigma^2 + cc_{\sigma\sigma}}{4C^2} - \frac{c^2c_\sigma^2}{16C^4} = \frac{a^2c_\sigma^2}{4C^4} + \frac{cc_{\sigma\sigma}}{4C^2}, \qquad \frac{C_\sigma}{C} = \frac{cc_\sigma}{4C^2};$$

setzt man daher $s = 0$ und führt die Werthe (3) ein, so erhält man

$$2r_\sigma^2 + 2rr_{\sigma\sigma} = 2rr_{\sigma\sigma} = cc_{\sigma\sigma} + c_\sigma^2 - (C_{\sigma\sigma}c + 2c_\sigma C_\sigma + Cc_{\sigma\sigma})\frac{c}{2C}$$
$$+ 2(C_\sigma c + c_\sigma C)b_\sigma \frac{a^0}{C} + Ccb_\sigma^2 \cdot \frac{c}{2C} + ca^0 b_{\sigma\sigma}.$$

Combinirt man mit diesem Resultat die Gleichung (13) des § 7 oder

$$c_\sigma = -\frac{2C^2b_\sigma}{a^0}, \qquad b_\sigma = -\frac{a^0c_\sigma}{2C^2}, \qquad a^0a^0 = a^2,$$

und benutzt die Formeln (5), so ergiebt sich

(6) $$2rr_{\sigma\sigma} = cc_{\sigma\sigma} + c_\sigma^2 - \frac{c^2}{2}\left(\frac{a^2c_\sigma^2}{4C^4} + \frac{cc_{\sigma\sigma}}{4C^2}\right) - \frac{c^2c_\sigma^2}{4C^2}$$
$$- \frac{cc_{\sigma\sigma}}{2} + 2\left(\frac{c^2c_\sigma}{4C} + c_\sigma C\right)\frac{a^0b_\sigma}{C} + \frac{c^2b_\sigma^2}{2} + ca^0b_{\sigma\sigma}$$
$$= \frac{cc_{\sigma\sigma}}{2}\left(1 - \frac{c^2}{4C^2}\right) + c_\sigma^2\left(1 - \frac{a^2c^2}{8C^4} - \frac{c^2}{4C^2}\right) - \frac{c^2c_\sigma^2a^2}{4C^4}$$
$$- \frac{a^2c_\sigma^2}{C^2} + \frac{c^2c_\sigma^2a^2}{8C^4} + ca^0b_{\sigma\sigma}$$
$$= ca^0\left\{\frac{c_{\sigma\sigma}a^0}{2C^2} + b_{\sigma\sigma} - \frac{ca^0c_\sigma^2}{4C^4}\right\}.$$

Wenn diese Grösse von Null verschieden ist, so lehrt die allgemeine Entwicklung des § 4, dass der Bogen $\mathfrak{C}'$ in der zweiten Ebene das gesuchte Extremum der Grösse J nicht mehr darbietet, und dass man vom Punkte 0 zur Geraden $s = l$ solche Curven $\mathfrak{L}'$ ziehen kann, welche für J genau denselben Werth ergeben wie $\mathfrak{C}'$. Für ihren Endpunkt habe etwa r den Werth $\bar{r}$, der von r_1 beliebig wenig verschieden genommen werden kann. Einer solchen Curve $\mathfrak{L}'$ entspricht in der ersten Ebene eine Curve $\mathfrak{L}$, welche in einem beliebig vorgeschriebenen Punkte des Kreises $\mathfrak{K}$ beginnt, und mit der Bogenlänge l den Kreis $r = \bar{r}$ erreicht. Dieser schneidet die Curve $\mathfrak{C}_0$ in der Umgebung des Punktes 1, etwa im Punkte $\bar{1}$, da $\frac{d\varrho}{d\sigma}$ für $\sigma = \sigma_1$ von Null verschieden ist, ϱ also auch den Werth $\bar{r}$ annimmt, sobald $|\bar{r} - r_1|$ hinreichend klein ist. Man kann daher die Curve $\mathfrak{L}$ so drehen, dass sie auf der Curve $\mathfrak{C}_0$ endigt und diese durch einen Bogen von der Länge l mit dem Kreise $\mathfrak{K}$ verbindet, dass sie also zu den Curven gehört, welche beim Problem der Königin Dido mit dem Kreisbogen $\mathfrak{C}$ verglichen werden müssen. Damit ist gezeigt, *dass auch in der ersten Ebene der Kreisbogen* $\mathfrak{C}$ *das gesuchte Extremum sicher nicht liefert, wenn die Gleichung* (14) *des* § 7 *besteht und die Grösse* (6) *von Null verschieden ist.*

Dieses Kriterium kann in einfacher Weise geometrisch formulirt werden, indem man die Bedeutung der Gleichung

$$r^2 = a^2 + \frac{1}{2}c^2 - Cc\cos\left(\frac{2s}{c} + b\right)$$

in der ersten Ebene näher ins Auge fasst. Zu diesem Zweck betrachten wir einen beliebigen Kreisbogen vom Durchmesser c und vom Centriwinkel t, der im Punkte A rechtwinklig vom Kreise $\mathfrak{K}$ ausgeht und in P endet; ist M der Mittelpunkt dieses Bogens, O derjenige des Kreises $\mathfrak{K}$, so ist

$$\cos OMP = \cos(t \pm AMO), \tag{7}$$

wobei das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nachdem der Bogen AP nach der äusseren oder inneren Seite des Kreises $\mathfrak{K}$ hingeht, also je nachdem $a^0 = \pm a$ ist, wenn AP in der Nähe des Bogens $\mathfrak{C}$ verläuft. Daraus folgt, da offenbar

$$OM = \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}c^2} = C$$

ist, wenn

$$\pm AMO = \beta$$

gesetzt wird,

$$\cos\beta = \frac{c}{2C}, \qquad \sin\beta = \frac{a^0}{C}, \tag{8}$$

und die Gleichung (7) geht für beide Fälle in die Form

$$\cos OMP = \cos(t + \beta)$$

über. Das Dreieck OMP ergiebt aber

$$\overline{OP}^2 = r^2 = \overline{OM}^2 + \overline{MP}^2 - 2\,OM \cdot MP \cos OMP;$$

oder

$$r^2 = a^2 + \frac{1}{2}c^2 - Cc\cos(t + \beta). \tag{9}$$

Bezeichnen wir nun durch s die von irgend einem Anfangspunkt A_0 gemessene in der Richtung von A nach P hin wachsende Bogenlänge A_0P auf der Curve AP, so ist

$$t = \frac{2s}{c} + \text{const.},$$

und über die Constante kann durch passende Wahl des Anfangspunktes willkürlich verfügt werden. Dies geschehe so, dass die Relation

$$t + \beta = \frac{2s}{c} + b$$

besteht; dann sind die Gleichungen (1) und (9) identisch und der Bogen AP fällt mit der durch letztere Gleichung dargestellten Curve $\mathfrak{S}$ (§ 7) zusammen. Dabei entspricht dem Werthe $s=l$ der Schnittpunkt des Kreisbogens $\mathfrak{S}$ mit der Curve $\mathfrak{C}_0$; die Länge des Bogens zwischen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{C}_0$ hat somit den Ausdruck

$$\frac{ct}{2} = \frac{c}{2}\left(\frac{2l}{c} + b - \beta\right) = l + \frac{c}{2}(b-\beta),$$

wobei die durch die Gleichungen (8) definirte Grösse β für die Curve $\mathfrak{C}$ mit b identisch ist.

Im Allgemeinen ergeben die Gleichungen (8) offenbar

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{2a^0}{c}, \qquad \beta = \operatorname{arctg}\frac{2a^0}{c};$$

sehen wir also c und b in der Weise, wie es für die Curven $\mathfrak{S}$ geschah, als Functionen von σ an, so folgt

$$(10) \qquad \beta_\sigma = \frac{-\dfrac{2a^0 c_\sigma}{c^2}}{1+\dfrac{4a^2}{c^2}} = -\frac{a^0 c_\sigma}{2C^2}.$$

Bildet man mit diesem Werthe die Bedingung dafür, dass die Grösse $\frac{1}{2}ct$ ein Extremum sei, so erhält man

$$c_\sigma(b-\beta) + c\left[b_\sigma + \frac{a^0 c_\sigma}{2C^2}\right] = 0;$$

für die Curve $\mathfrak{C}$, auf welcher $b=\beta$ ist, geht diese Gleichung in die folgende über

$$(11) \qquad b_\sigma + \frac{a^0 c_\sigma}{2C^2} = 0,$$

welche mit der Gleichung (13) des § 7 zusammenfällt, also richtig ist. Für die Curve $\mathfrak{C}$ ist also die durch das erste Differential ausgedrückte Bedingung für das Extremum des durch die Curven $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{C}_0$ abgeschnittenen Bogens erfüllt; man wird erwarten, dass der bezeichnete Bogen der Curve $\mathfrak{C}$ ein Extremum unter den Bögen der Curven $\mathfrak{S}$ sei, welche von den Schnittpunkten mit $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{C}_0$ begrenzt werden. Dieses Extremum ist gesichert, wenn der zweite Differentialquotient der Bogenlänge $\frac{1}{2}ct$ nach σ nicht verschwindet. Für diesen erhält man offenbar

$$2\frac{d^2\left(\frac{1}{2}ct\right)}{d\sigma^2} = (b-\beta)c_{\sigma\sigma} + 2(b_\sigma - \beta_\sigma)c_\sigma + (b_{\sigma\sigma}-\beta_{\sigma\sigma})c;$$

da nun für die Curve $\mathfrak{C}$ die Gleichung $b=\beta$ gilt, und die Relation (11) combinirt mit der Gleichung (10) nichts anderes bedeutet, als $b_\sigma - \beta_\sigma = 0$, so folgt für den untersuchten Werth von σ

$$\frac{d^2(ct)}{d\sigma^2} = c(b_{\sigma\sigma} - \beta_{\sigma\sigma}) = c\left(b_{\sigma\sigma} - \frac{a^0 c c_\sigma^2 - 2a^0 C^2 c_{\sigma\sigma}}{4C^4}\right).$$

Das ist aber bis auf den Factor a^0 der Ausdruck (6), der die Eigenschaft hat, dass, wenn er von Null verschieden ist, nach den früheren Entwicklungen das Extremum sicher für den Bogen $\mathfrak{C}$ nicht mehr vorhanden ist, und zwar in der Weise, dass Curven von gleicher Länge wie $\mathfrak{C}$ zwischen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{C}_0$ construirt werden können, welche mit diesen Curven ein ebenso grosses Areal umschliessen wie $\mathfrak{C}$. Wenn also der Bogen $\mathfrak{C}$ unter den Kreisbögen $\mathfrak{S}$ ein Extremum der von $\mathfrak{K}$ bis $\mathfrak{C}_0$ gemessenen Bogenlänge darbietet, welches an dem zweiten Differentialquotienten dieser Grösse nach σ zu erkennen ist, so bietet er sicher das von der Königin Dido gesuchte Extremum nicht mehr dar.

Wir formuliren dieses Ergebniss in folgendem Satze:

Der Kreis $\mathfrak{K}$ und eine von ihm ausgehende Curve $\mathfrak{C}_0$ seien durch eine einfach unendliche Schar zu beiden senkrechter Kreisbögen $\mathfrak{S}$ verbunden; unter diesen habe der Bogen $\mathfrak{C}$ ein Extremum der Bogenlänge, welches an der zweiten Ableitung dieser Grösse nach dem längs der Curve $\mathfrak{C}_0$ gemessenen Bogen σ deutlich zu erkennen ist. Dann können in beliebiger Nähe des Bogens $\mathfrak{C}$ andere Curven von derselben Länge zwischen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{C}_0$ construirt werden, welche mit letzteren Curven ein ebenso grosses Areal umschliessen wie $\mathfrak{C}$. Das isoperimetrische Extremum, dessen nothwendigen Bedingungen der Bogen $\mathfrak{C}$ genügt, ist also nicht vorhanden.

Der Bogen $\mathfrak{C}$ hat die bezeichnete Eigenschaft nur dann, wenn sein Centriwinkel γ mit dem Durchmesser c durch die Gleichung

$$(12)\qquad c + \left(a^0 + R^0 + \frac{2a^0R^0\gamma}{c} - \frac{c\gamma}{2}\right)\sin\gamma - [c + (a^0 + R^0)\gamma]\cos\gamma = 0$$

verbunden ist, in welcher a^0 den Radius des Kreises $\mathfrak{K}$, R^0 den Krümmungsradius der Curve $\mathfrak{C}_0$ im Endpunkte des Bogens $\mathfrak{C}$ bedeutet, und zwar jede dieser Grössen positiv oder negativ genommen, je nachdem die Richtung nach dem zugehörigen Krümmungscentrum hin mit der Verlängerung des Bogens $\mathfrak{C}$ gleich gerichtet ist oder nicht.

Die Symmetrie der Gleichung (12) hinsichtlich der Grössen a^0 und R^0 lässt vermuthen, dass das Resultat auch gültig bleibt, wenn der Kreis $\mathfrak{K}$ durch eine beliebige Curve ersetzt wird.

§ 9.

Discussion des in § 8 erhaltenen Resultats und hinreichende Bedingung des Extremums bei zwei variablen Endpunkten.

Löst man die Gleichung (12) des vorigen Paragraphen nach R^0 auf, so ergiebt sich

(1) $$M + \frac{2R^0}{c}\frac{dM}{d\gamma} = 0,$$

wobei

(2) $$M = \frac{c}{2}(2 - 2\cos\gamma - \gamma\sin\gamma) + a^0(\sin\gamma - \gamma\cos\gamma)$$
$$= a^0\left\{\sin\gamma - \gamma\cos\gamma + \frac{2c}{a^0}\sin\frac{\gamma}{2}\left(\sin\frac{\gamma}{2} - \frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\right)\right\}$$

gesetzt ist; wenn daher M von Null verschieden ist, so kann man die Gleichung (1) in die Form

(3) $$\frac{1}{R^0} = -\frac{2}{c}\frac{d\log M}{d\gamma}$$

setzen. Nun findet man leicht

(4) $$\frac{dM}{d\gamma} = \frac{c}{2}(\sin\gamma - \gamma\cos\gamma) + a^0\gamma\sin\gamma,$$
$$\frac{d^2M}{d\gamma^2} = \frac{c\gamma}{2}\sin\gamma + a^0(\sin\gamma + \gamma\cos\gamma),$$
$$\left(\frac{dM}{d\gamma}\right)^2 = \frac{c^2}{4}(\sin^2\gamma - 2\gamma\sin\gamma\cos\gamma + \gamma^2\cos^2\gamma)$$
$$+ c\,a^0(\gamma\sin^2\gamma - \gamma^2\sin\gamma\cos\gamma) + a^2\gamma^2\sin^2\gamma,$$
$$M\frac{d^2M}{d\gamma^2} = \frac{c^2}{4}\gamma\sin\gamma(2 - 2\cos\gamma - \gamma\sin\gamma)$$
$$+ \frac{a^0c}{2}(\gamma\cos\gamma + \sin\gamma)(2 - 2\cos\gamma - \gamma\sin\gamma)$$
$$+ \frac{a^0c}{2}\gamma\sin\gamma(\sin\gamma - \gamma\cos\gamma)$$
$$+ a^2(\sin\gamma - \gamma\cos\gamma)(\sin\gamma + \gamma\cos\gamma),$$
$$M\frac{d^2M}{d\gamma^2} - \left(\frac{dM}{d\gamma}\right)^2 = a^2(\sin^2\gamma - \gamma^2) + a^0c(1 - \cos\gamma)(\sin\gamma - \gamma)$$
$$- \frac{c^2}{4}(\sin\gamma - \gamma)^2$$
$$= (\sin\gamma - \gamma)\left[a^2(\sin\gamma + \gamma) + a^0c(1 - \cos\gamma) + \frac{c^2}{4}(\gamma - \sin\gamma)\right].$$

In diesem Ausdruck kann die in eckige Klammern eingeschlossene Grösse als eine quadratische Form der Argumente a^0 und $\frac{1}{2}c$ angesehen werden, welche definit und positiv ist, da, abgesehen vom Falle $\gamma = 0$, die Determinante

$$(1-\cos\gamma)^2-(\gamma^2-\sin^2\gamma)=2(1-\cos\gamma)-\gamma^2$$
$$=4\left[\sin^2\frac{\gamma}{2}-\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2\right]$$

negativ, der Coefficient von a^2 aber positiv ist. Sobald daher der Winkel γ von Null verschieden ist, muss die in eckige Klammern geschlossene Grösse positiv sein, und da $\sin\gamma-\gamma$ negativ ist, ergiebt sich

$$M\frac{d^2M}{d\gamma^2}-\left(\frac{dM}{d\gamma}\right)^2<0, \qquad M^2\frac{d^2\log M}{d\gamma^2}<0,$$

oder nach (3)

$$\frac{d}{d\gamma}\left(\frac{1}{R^0}\right)>0.$$

Man findet ferner aus den Gleichungen (2) und (4), wenn $[\gamma]_k$ eine mit der k^{ten} Potenz beginnende Potenzreihe des Arguments γ bedeutet, die Entwicklungen

$$M=\frac{c\gamma^4}{24}+\frac{a^0\gamma^3}{3}+[\gamma]_5,$$
$$\frac{dM}{d\gamma}=\frac{c\gamma^3}{6}+a^0\gamma^2+[\gamma]_4,$$

also

$$\frac{1}{R^0}=-\frac{6}{c\gamma}(1+[\gamma]_1), \qquad R^0=-\frac{c\gamma}{6}(1+[\gamma]_1),$$

sodass unendlich kleinen positiven Werthen von γ unendlich grosse negative Werthe von $1:R^0$ entsprechen. Lässt man nun γ wachsen, so nimmt $\frac{1}{R^0}$ der Relation (3) zufolge beständig zu, solange M von Null verschieden ist. Diese Grösse kann aber bei wachsenden Werthen von γ und R^0 erst dann wieder verschwinden, wenn $1:R^0$ den Werth $+\infty$ erreicht hat. Denn geschähe es vorher, so müssten die Gleichungen

$$M=0, \qquad \frac{dM}{d\gamma}=0$$

zusammen bestehen, und aus ihnen würde, da a^0 und c nicht verschwinden, auf Grund der Formeln (2), (4) die Gleichung

$$\begin{vmatrix} 2-2\cos\gamma-\gamma\sin\gamma & \sin\gamma-\gamma\cos\gamma \\ \sin\gamma-\gamma\cos\gamma & \gamma\sin\gamma \end{vmatrix}=0$$

folgen, welche mit der unrichtigen Gleichung

$$-\gamma^2+2\gamma\sin\gamma-\sin^2\gamma=0$$

identisch ist. Wenn daher γ_0 die kleinste positive Wurzel der schon in § 3 discutirten Gleichung

$$M=0$$

mit der Unbekannten γ ist, so wird die Grösse $\frac{1}{R^0}$ für $\gamma=\gamma_0$ zunehmend unendlich, also $+\infty$, und für jeden endlichen Werth von $\frac{1}{R^0}$ hat man im Intervall von 0 bis γ_0 einen und nur einen Werth von γ, für welchen die Gleichung (1) besteht, und welcher mit $\frac{1}{R^0}$ beständig wächst. Ein Werth γ_0 ist nach § 3 zwischen 0 und 2π immer vorhanden.

Um nun in möglichst expliciter Form die hinreichenden Bedingungen des gesuchten Extremums aufzustellen, gehen wir von einer bestimmten Curve $\mathfrak{C}$ aus und sehen demgemäss a^0, c und γ als gegeben an; dann handelt es sich darum, für R^0 eine Ungleichung aufzustellen, welche das Extremum sichert. Mit a^0 und c ist auch γ_0 gegeben; wir machen von vornherein die Annahme

$$\gamma = \frac{2l}{c}, \qquad 0 < \gamma < \gamma_0.$$

Aus der Gleichung (1) ergiebt sich ein bestimmter Werth von R^0, den wir jetzt durch R^{01} bezeichnen wollen:

$$\frac{1}{R^{01}} = \frac{2}{cM}\,\frac{dM}{d\gamma};$$

wir behaupten, das gesuchte Extremum ist vorhanden, sobald

$$\frac{1}{R^0} > \frac{1}{R^{01}}. \tag{5}$$

Um diese Behauptung zu beweisen gehen wir davon aus, dass, wie in § 7 gezeigt ist, das Extremum jedenfalls dann gesichert ist, wenn längs des ganzen Bogens $\mathfrak{C}$ die partielle Ableitung r_σ von Null verschieden ist. Für diese Grösse erhält man aus der Definition

$$r^2 = a^2 + \frac{1}{2}c^2 - Cc\cos\alpha$$

die Gleichung

$$2rr_\sigma = cc_\sigma - Cc_\sigma\cos\alpha - C_\sigma c\cos\alpha + Cc\alpha_\sigma\sin\alpha;$$

dabei sind b und c als Functionen von σ durch die ersten beiden Gleichungen (11) des § 7 definirt, d. h. durch die folgenden:

$$-\eta C_\sigma\sin\beta - \eta C\beta_\sigma\cos\beta = -\frac{\varrho\varrho_\sigma}{R},$$

$$cc_\sigma - Cc_\sigma\cos\beta - C_\sigma c\cos\beta + Cc\beta_\sigma\sin\beta = 2\varrho\varrho_\sigma.$$

Da nun

$$\alpha = \frac{2s}{c} + b, \qquad \beta = \frac{2l}{c} + b, \qquad \alpha_\sigma = -\frac{2sc_\sigma}{c^2} + b_\sigma, \qquad \beta_\sigma = -\frac{2lc_\sigma}{c^2} + b_\sigma,$$

$$C_\sigma = \frac{cc_\sigma}{4C}, \qquad R^0 = -R\eta,$$

so können die erhaltenen Gleichungen folgende Form annehmen:

$$2rr_\sigma = c_\sigma\left(c - C\cos\alpha - \frac{c^2}{4C}\cos\alpha - \frac{2Cs}{c}\sin\alpha\right) + b_\sigma cC\sin\alpha,$$

$$(6)\qquad 0 = c_\sigma\left(-\frac{c}{4C}\sin\beta + \frac{2Cl}{c^2}\cos\beta\right) - b_\sigma C\cos\beta - \frac{\varrho\varrho_\sigma}{R^0},$$

$$0 = c_\sigma\left(c - C\cos\beta - \frac{c^2}{4C}\cos\beta - \frac{2Cl}{c}\sin\beta\right) + b_\sigma cC\sin\beta - 2\varrho\varrho_\sigma.$$

Hieraus folgt, indem man b_σ und c_σ eliminirt,

$$(7)\quad 2rr_\sigma = \frac{1}{N}\begin{vmatrix} c - C\cos\alpha - \frac{c^2}{4C}\cos\alpha - \frac{2Cs}{c}\sin\alpha & cC\sin\alpha & 0 \\ -\frac{c}{4C}\sin\beta + \frac{2Cl}{c^2}\cos\beta & -C\cos\beta & -\frac{\varrho\varrho_\sigma}{R^0} \\ c - C\cos\beta - \frac{c^2}{4C}\cos\beta - \frac{2Cl}{c}\sin\beta & cC\sin\beta & -2\varrho\varrho_\sigma \end{vmatrix},$$

wobei N die Determinante der Coefficienten von b_σ und c_σ in den letzten beiden Gleichungen (6) bedeutet, also einen Ausdruck, der nach § 7 einen von Null verschiedenen Werth hat.

Der für r_σ erhaltene Ausdruck zeigt zunächst, dass diese Grösse nicht für alle Werthe von s verschwinden kann; denn dann müsste ein Ausdruck

$$A + B\cos\alpha + (D\alpha + E)\sin\alpha,$$

in welchem A, B, D, E von α unabhängig wären, identisch verschwinden, was, wie man leicht sieht, nur möglich ist, wenn alle jene vier Coefficienten verschwinden. Angewandt auf den Ausdruck (7) würde diese Bemerkung ergeben, dass in der rechts stehenden Determinante die zum ersten und zweiten Gliede der ersten Horizontalreihe gehörigen Adjuncten verschwinden müssten; hieraus würde weiter folgen, dass auch die zum dritten Gliede der ersten Horizontalreihe gehörige Adjuncte den Werth Null hätte, was aber, da sie mit N identisch ist, nicht der Fall ist. Die Grösse r_σ kann also nicht identisch verschwinden.

Weiter beachten wir, dass die Grösse r_σ einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung genügt, welche aus der Differentialgleichung der Extremalen

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{r^2 - a^2}{r}\,\frac{1}{\sqrt{1-p^2}}\right) = 0$$

oder

$$0 = p^2(1-p^2)(r^2+a^2) + r(r^2-a^2)\frac{dp}{ds}$$

hervorgeht, indem man nach σ differenzirt. Der Coefficient der höchsten Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial \sigma}\frac{dp}{ds} = \frac{d^2 r_\sigma}{ds^2}$$

ist $r(r^2 - a^2)$, also für $s = l$ jedenfalls von Null verschieden, da der diesem Argument entsprechende Punkt 1 weder auf dem Kreise $\mathfrak{K}$ liegt, für welchen $r = a$ ist, noch in den Coordinatenanfangspunkt fällt, der überhaupt mit dem Kreise $\mathfrak{K}$ durch keinen zu diesem orthogonalen Kreisbogen verbunden werden kann. Die Coefficienten der bezeichneten linearen Differentialgleichung sind also, auch wenn die höchste Ableitung den Factor Eins hat, für $s = l$ stetige, mit stetigen Ableitungen versehene Functionen von s; hieraus folgt, da r_σ nicht identisch verschwindet, dass die Grössen r_σ und $\frac{dr_\sigma}{ds}$ für $s = l$ nicht beide den Werth Null haben können. Nun findet man leicht aus der Formel (7)

$$(8) \qquad 2rr_\sigma\Big|^{s=l} = \frac{-2\varrho\varrho_\sigma}{N}\begin{vmatrix} c - C\cos\beta - \frac{c^2}{4C}\cos\beta - \frac{2Cl}{c}\sin\beta & cC\sin\beta \\ -\frac{c}{4C}\sin\beta + \frac{2Cl}{c^2}\cos\beta & -C\cos\beta \end{vmatrix}$$

$$= -\frac{2\varrho\varrho_\sigma}{N}\left(C\cos\beta - \frac{c}{2}\right)^2,$$

und dieser Werth ist wie N von R^0 unabhängig. Ist derselbe von Null verschieden, was offenbar, da $\varrho\varrho_\sigma$ nicht verschwindet, der allgemeine Fall ist, und lässt man den Werth $\frac{1}{R^0}$ irgend ein endliches Intervall durchlaufen, so durchläuft nach der Formel (7) auch $\frac{dr_\sigma}{ds}\Big|^{s=l}$ ein endliches Intervall und dasselbe gilt zufolge der für r_σ bestehenden Differentialgleichung von $\frac{d^2 r_\sigma}{ds^2}$; daraus folgt, dass um den Werth $s = l$ herum eine Strecke abgegrenzt werden kann, auf welcher r_σ für alle bezeichneten Werthe von $\frac{1}{R^0}$ von Null verschieden bleibt. Hat dagegen der Ausdruck (8) den Werth Null, so kann das von $\frac{dr_\sigma}{ds}$ durchlaufene Intervall den Werth Null nicht enthalten, da r_σ und $\frac{dr_\sigma}{ds}$ nicht zugleich verschwinden. Es bleibt also die Grösse $\frac{dr_\sigma}{ds}\Big|^{s=l}$ dem absoluten Werthe nach oberhalb einer von Null verschiedenen Grenze. Da nun $\frac{d^2 r_\sigma}{ds^2}$ jedenfalls nicht über alle Grenzen wächst, so folgt, dass auch in diesem Falle eine die Stelle $s = l$ enthaltende Strecke abgegrenzt werden kann, in welcher r_σ, abgesehen von $s = l$, von Null verschieden bleibt. Man kann dies auch so ausdrücken, dass bei einer

Veränderung von $\frac{1}{R^0}$ in das Intervall von $s = 0$ bis $s = l$ eine Nullstelle der Grösse r_σ niemals über die Grenze $s = l$ hereinrücken kann; wenn sich die Anzahl der in diesem Intervall befindlichen Nullstellen ändert, so kann dies nur dadurch geschehen, dass r_σ für $s = 0$ verschwindet.

Jetzt lassen wir die Grösse $\frac{1}{R^0}$ von dem Werthe ab, den sie für die Curve $\mathfrak{C}_0$ hat, bis zu einer beliebig grossen positiven Grenze hin wachsen, während c und γ feste Werthe behalten; dann kann die Gleichung (1) niemals erfüllt sein, da die Voraussetzung (5) gemacht ist, und die durch die Gleichung (1) definirte Grösse $\frac{1}{R^0}$, wie gezeigt, mit γ zugleich wächst. Es kann also niemals $s = 0$ eine Nullstelle von r_σ werden; die Anzahl der Nullstellen dieser Grösse im Intervall von $s = 0$ bis $s = l$ bleibt also bei der Voraussetzung (5) ungeändert, wenn man $\frac{1}{R^0}$ über alle Grenzen wachsen lässt.

Es bleibt nun noch zu untersuchen, ob die Grösse r_σ für $\frac{1}{R^0} = +\infty$ längs des betrachteten Intervalls von $s = 0$ bis $s = l$ von Null verschieden ist, wobei natürlich die Voraussetzung $\gamma < \gamma_0$ von wesentlicher Bedeutung ist; den Uebergang zu diesem Grenzfall können wir dadurch realisiren, dass die Curve $\mathfrak{C}_0$ stetig in einen Kreis von unendlich kleinem Radius übergeht, auf dessen Aussenseite der unveränderte Bogen $\mathfrak{C}$ liegt.

Um zunächst in der Formel (7) zu dem Werth $R^0 = 0$ übergehen zu können, bemerken wir, dass dieselbe richtig bleibt, wenn die unabhängige Variable nicht mehr die Bogenlänge bedeutet, sondern eine Grösse τ, deren Function jene ist, da man nur beide Seiten mit $\frac{d\sigma}{d\tau}$ zu multipliciren braucht, um σ durch τ zu ersetzen. Führt man z. B. den Winkel der Tangente der Curve $\mathfrak{C}_0$ mit einer festen Richtung als Variable σ ein, so vermeidet man die Schwierigkeit, welche, wenn σ die Bogenlänge ist, beim Uebergang zu einem unendlich kleinen Kreise mit dem Radius R^0 als Curve $\mathfrak{C}_0$ entsteht. Bei dieser Annahme hat man, wenn ϱ^0 der Abstand des Centrums vom Coordinatenanfangspunkt, und σ der Winkel zwischen irgend einem Radius des Kreises $\mathfrak{C}_0$ und der Geraden ϱ^0 ist, die Gleichung

$$\varrho^2 = \varrho^0 \varrho^0 + R^0 R^0 - 2\varrho^0 R^0 \cos\sigma,$$

also

$$2\varrho\varrho_\sigma = 2\varrho^0 R^0 \sin\sigma, \qquad \frac{\varrho\varrho_\sigma}{R^0} = \varrho^0 \sin\sigma.$$

Die Figur aber zeigt, dass im Grenzfalle $\sin\sigma_1$ von Null verschieden ist, da andernfalls die Gerade 01 den Bogen $\mathfrak{C}$ im Punkte 1 berühren, letzterer also auf dem Kreise $\mathfrak{K}$ liegen müsste, was wir immer ausgeschlossen haben. Da ferner die Grösse $\varrho\varrho_\sigma$ mit R^0 verschwindet, so giebt die Formel (7) den Grenzwerth

$$2rr_\sigma = -\frac{\varrho^0 \sin\sigma_1}{N}\begin{vmatrix} c-\left(C+\frac{c^2}{4C}\right)\cos\alpha - \frac{2Cs}{c}\sin\alpha & cC\sin\alpha \\ c-\left(C+\frac{c^2}{4C}\right)\cos\beta - \frac{2Cl}{c}\sin\beta & cC\sin\beta \end{vmatrix},$$

und der hiermit gegebene Ausdruck der Grösse r_σ genügt wieder derselben linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung wie die früher betrachtete Grösse r_σ. Offenbar verschwindet dieser neue Ausdruck r_σ nicht identisch, hat aber für $s=l$ den constanten Werth Null. Lässt man daher die Grösse a^0 irgend ein endliches Intervall durchlaufen, womit sich auch die bezeichnete Differentialgleichung ändern würde, so kann die Grösse r_σ, wenn sie für irgend einen Werth a^0 im Intervall von $s=0$ bis $s=l$ von Null verschieden ist, eine Nullstelle innerhalb desselben nur dadurch erhalten, dass dieselbe die Stelle $s=0$ passirt. Bei dem zugehörigen Werthe von a^0, welcher a^{01} sei, hat man dann

$$a^{01}(\sin\gamma-\gamma\sin\gamma)+c\sin\frac{\gamma}{2}\left(\sin\frac{\gamma}{2}-\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\right)=0.$$

Bei dem ursprünglichen Werthe von a^0, den wir jetzt a^{00} nennen wollen, war nun

$$a^{00}(\sin\gamma_0-\gamma_0\sin\gamma_0)+c\sin\frac{\gamma_0}{2}\left(\sin\frac{\gamma_0}{2}-\frac{\gamma_0}{2}\cos\frac{\gamma_0}{2}\right)=0,$$

und nach § 3 wachsen γ_0 und $\frac{1}{a^{00}}$ zugleich, wenn sie dieser Gleichung gemäss bestimmt werden; die Ungleichung $\gamma_0>\gamma$ ergiebt also

$$\frac{1}{a^{00}}>\frac{1}{a^{01}}.$$

Lässt man daher $\frac{1}{a^{00}}$ mit dem Werthe $+\infty$ beginnen und bis zum Werthe $\frac{1}{a^{00}}$ herabsinken, so wird der Werth $\frac{1}{a^{00}}$ nicht durchlaufen, es kann also keine Nullstelle der Grösse r_σ über die Grenze $s=0$ in das Intervall von 0 bis l hereinrücken. Zu Anfang dieser Aenderung, d. h. für $\frac{1}{a^0}=+\infty$, $a^0=0$, hat man einfach

$$r^2=\frac{c^2}{2}-\frac{c^2}{2}\cos\left(\frac{2s}{C}+b\right)=c^2\sin^2\left(\frac{s}{C}+\frac{1}{2}b\right),$$

und hier kann die Grösse, welche aus der Formel (7) hervorgeht,

$$2rr_\sigma = -\frac{c^2\varrho^0 \sin\sigma_1}{2N}\begin{vmatrix} c(1-\cos\alpha) - s\sin\alpha & \sin\alpha \\ c(1-\cos\beta) - l\sin\beta & \sin\beta \end{vmatrix},$$

nicht verschwinden. Die Function

$$S = \frac{c(1-\cos\alpha)}{\sin\alpha} - s = c\,\mathrm{tang}\,\frac{\alpha}{2} - s = c\,\mathrm{tang}\left(\frac{s}{c} + \frac{b}{2}\right) - s$$

hat nämlich die positive Ableitung

$$\frac{1}{\cos^2\left(\frac{s}{c} + \frac{b}{2}\right)} - 1;$$

da nun für die betrachtete Curve $b = 0$ zu setzen ist, s aber die Grenze πc nicht überschreitet, so wird die Grösse S nur für $s = \frac{1}{2}\pi c$ unendlich, und ist für kleinere Argumente positiv, für grössere negativ; da sie nun in jedem Intervall, für welches sie endlich bleibt, mit s wächst, so kann sie nicht für $s = l$ und ein von l verschiedenes Argument s denselben Werth annehmen. Das müsste aber eintreten, wenn der oben für rr_σ erhaltene Ausdruck verschwinden sollte.

Hiermit ist gezeigt, dass die Grösse r_σ für $R^0 = 0$ längs des Bogens $\mathfrak{C}$ abgesehen vom Endpunkte $s = l$ nicht verschwindet, und daraus folgt, wie oben bemerkt, das analoge Resultat für einen beliebigen Werth von R^0, der nur der Ungleichung (5) unterworfen ist. Da nun allgemein, wenn γ und R^0 durch die Gleichung

$$\frac{dM}{d\gamma} + \frac{2c}{R^0}M = 0 \tag{9}$$

an einander gebunden sind, $\frac{1}{R^0}$ mit γ zugleich wächst, so kann die bezeichnete Voraussetzung auch so formulirt werden, dass der Bogen $\frac{2l}{c}$ kleiner sein muss als die zu dem gegebenen Werth von R^0 gehörige kleinste Wurzel der Gleichung (9), womit er auch kleiner ist als die zu $R^0 = 0$ gehörige Wurzel γ_0. Erinnern wir uns noch dessen, was in § 7 über die Unterscheidung der Maxima und Minima abgeleitet worden ist, so können wir das Resultat dieses Paragraphen in folgender Form aussprechen:

Steht der Kreisbogen $\mathfrak{C}$ auf dem Kreise $\mathfrak{K}$ und der von diesem ausgehenden Curve $\mathfrak{C}_0$ senkrecht, so begrenzt er mit $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{C}_0$ zusammen ein maximales oder minimales Areal verglichen mit gleichlangen die Curven

$\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{C}_0$ verbindenden Bögen, solange der Centriwinkel des Bogens $\mathfrak{C}$ kleiner ist als die kleinste positive Wurzel der Gleichung

$$c + \left(a^0 + R^0 + \frac{2a^0 R^0 \gamma}{c} - \frac{c\gamma}{2}\right) \sin \gamma - (c + (a^0 + R^0)\gamma) \cos \gamma = 0,$$

in welcher γ die Unbekannte, c der Durchmesser des den Bogen $\mathfrak{C}$ enthaltenden Kreises, a^0 der Radius des Kreises $\mathfrak{K}$, R^0 der Krümmungsradius der Curve $\mathfrak{C}_0$ im Schnittpunkt mit $\mathfrak{C}$ ist, letztere beide Grössen positiv oder negativ genommen nach der am Schluss des § 8 angegebenen Regel. Das Maximum oder Minimum liegt vor, je nachdem die umschlossene Fläche auf der concaven oder convexen Seite des Bogens $\mathfrak{C}$ liegt.

Sur les formes quadratiques ternaires indéfinies.

Par

André Markoff à St. Pétersbourg.

Dans cette note j'ai en vue de traiter la question des limites précises de minima des formes quadratiques indéfinies

$$ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'xz + 2b''xy$$

d'un même déterminant

$$D = aa'a'' + 2bb'b'' - ab^2 - a'b'^2 - a''b''^2.$$

La question analogue pour les formes binaires a été traitée dans mes mémoires «Sur les formes quadratiques» (Mathem. Annalen XV et XVII).

Il y a été démontré, que les limites précises des minima des formes quadratiques indéfinies

$$ax^2 + 2bxy + cy^2$$

d'un même déterminant

$$D = b^2 - ac$$

forment la série

$$\sqrt{\frac{4}{5}D},\ \sqrt{\frac{1}{2}D},\ \sqrt{\frac{100}{221}D},\cdots$$

laquelle nous pouvons prolonger infiniment.

Il est très vraisemblable, que les limites précises des minima des formes ternaires font aussi une série infinie. Mais à présent je ne puis établir que les trois premiers membres de cette série:

$$\sqrt[3]{\frac{2}{3}(D)},\ \sqrt[3]{\frac{2}{5}(D)},\ \sqrt[3]{\frac{1}{3}(D)},$$

(D) étant la valeur absolue de D.

Conformément à cela nous allons démontrer la proposition suivante.

La limite supérieure précise des minima des toutes formes indéfinies

$$f = ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'xz + 2b''xy,$$

d'un même déterminant D, est égale au minimum

$$\sqrt[3]{\frac{2}{3}(D)}$$

des formes équivalentes à

$$\varphi_0 = -\sqrt[3]{\frac{2}{3}D}\,(x^2 + xy + y^2 - 2z^2)\,*).$$

Pour les formes non équivalentes à la forme φ_0 cette limite est égale au minimum

$$\sqrt[3]{\frac{2}{5}(D)}$$

des formes équivalentes à

$$\varphi_1 = \sqrt[3]{\frac{2}{5}D}\,(x^2 + xy - y^2 - 2z^2).$$

Pour les formes non équivalentes aux formes φ_0 et φ_1 cette limite est égale au minimum

$$\sqrt[3]{\frac{1}{3}(D)}$$

des formes équivalentes à

$$\varphi_2 = -\sqrt[3]{\frac{1}{3}D}\,(x^2 + y^2 - 3z^2).$$

Enfin, si l'on exclut les formes équivalentes aux formes φ_0, φ_1, φ_2 la valeur absolue de chaque autre forme f peut être faite plus petite que

$$\sqrt[3]{\frac{1}{8}(D)},$$

x, y, z étant les nombres entiers et

$$x^2 + y^2 + z^2 > 0.$$

Pour simplifier les recherches nous supposons

$$D = 1,$$

en remplaçant la forme f d'un déterminant arbitraire par la forme

$$\frac{ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'xz + 2b''xy}{\sqrt[3]{aa'a'' + 2bb'b'' - ab^2 - a'b'^2 - a''b''^2}}.$$

Outre cela nous supposons que tous les rapports

$$\frac{a'}{a},\ \frac{a''}{a},\ \frac{b}{a},\ \frac{b'}{a},\ \frac{b''}{a}$$

sont des nombres rationnels.

*) Ce résultat m'avait été communiqué déjà longtemps par M. A. Korkine, il y a 20 ans.

Dans cette supposition chaque forme f a un minimum et peut être réduite ainsi que la valeur absolue de son premier coefficient a est égale à ce minimum.

Quant aux formes, pour lesquelles les rapports

$$\frac{a'}{a},\ \frac{a''}{a},\ \frac{b}{a},\ \frac{b'}{a},\ \frac{b''}{a}.$$

sont des nombres irrationnels, on ne peut pas assurer que chacune de ces formes a un minimum; mais il n'est pas difficile d'étendre la proposition, enoncée plus haut, aussi sur ces formes.

En considérant avec la forme

$$f = ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + 2byz + 2b'zx + 2b''xy$$

son adjointe

$$F = AX^2 + A'Y^2 + A''Z^2 + 2BYZ + 2B'ZX + 2B''XY,$$

nous avons les relations

$$\begin{aligned}
A &= a'a'' - b^2, & B &= b'b'' - ab, & a &= A'A'' - B^2, & b &= B'B'' - AB,\\
A' &= a''a - b'^2, & B' &= b''b - a'b', & a' &= A''A - B'^2, & b' &= B''B - A'B',\\
A'' &= aa' - b''^2, & B'' &= bb' - a''b'', & a'' &= AA' - B''^2, & b'' &= BB' - A''B''.
\end{aligned}$$

De la théorie des formes quadratiques on sait la proposition suivante.

Si la forme f par la substitution

$$\begin{aligned}
x &= \alpha\, x_1 + \beta\, y_1 + \gamma\, z_1,\\
y &= \alpha' x_1 + \beta' y_1 + \gamma' z_1,\\
z &= \alpha'' x_1 + \beta'' y_1 + \gamma'' z_1
\end{aligned}$$

se transforme dans la forme

$$f_1 = a_1x_1^2 + a_1'y_1^2 + a_1''z_1^2 + 2b_1y_1z_1 + 2b_1'z_1x_1 + 2b_1''x_1y_1$$

équivalente à f, la forme F adjointe à f se transforme par la substitution

$$\begin{aligned}
X_1 &= \alpha X + \alpha' Y + \alpha'' Z,\\
Y_1 &= \beta X + \beta' Y + \beta'' Z,\\
Z_1 &= \gamma X + \gamma' Y + \gamma'' Z
\end{aligned}$$

dans une forme

$$F_1 = A_1X_1^2 + A_1'Y_1^2 + A_1''Z_1^2 + 2B_1Y_1Z_1 + 2B_1'Z_1X_1 + 2B_1''X_1Y_1.$$

équivalente à F et adjointe à f_1.

Pour notre but le cas particulier de cette proposition est important, où la forme f se transforme par la substitution

$$x = x_1,\quad y = \beta' y_1 + \gamma' z_1,\quad z = \beta'' y_1 + \gamma'' z_1$$

et la forme F — par la substitution

$$X_1 = X,\quad Y_1 = \beta' Y + \beta'' Z,\quad Z_1 = \gamma' Y + \gamma'' Z,$$

la différence

$$\beta'\gamma'' - \beta''\gamma'$$

étant égale à ± 1.

Dans ce cas

$$a = a_1, \qquad A = A_1$$

et les formes binaires

$$a'y^2 + 2byz + a''z^2, \qquad A'Y^2 + 2BYZ + A''Z^2$$

se transforment, par les substitutions indiquées, dans les formes équivalentes

$$a_1'y_1^2 + 2b_1y_1z_1 + a''z_1^2, \qquad A_1'Y_1^2 + 2B_1Y_1Z_1 + A_1''Z_1^2.$$

Il est aussi important de remarquer la représentation de la forme f par les sommes

$$f = a\left(x + \frac{b''}{a}y + \frac{b'}{a}z\right)^2 + \frac{A''y^2 - 2Byz + A'z^2}{a}$$

$$= a\left(x + \frac{b''}{a}y + \frac{b'}{a}z\right)^2 + \frac{A''}{a}\left(y - \frac{B}{A''}z\right)^2 + \frac{z^2}{A''}.$$

La seconde de ces deux représentations manifeste, que des deux nombres

$$a, \; A''$$

l'un au moins doit être négatif; car dans le cas contraire la forme f est une forme positive.

Il est facile de voir que ce résultat s'étend aussi à chacune des 5 paires:

$$(1)\ a, A'; \quad (2)\ a', A; \quad (3)\ a', A''; \quad (4)\ a'', A; \quad (5)\ a'', A'.$$

En supposant que la valeur absolue de a est égale au minimum de la forme f, nous allons distinguer deux cas:

(1) $$a > 0, \qquad a < 0.$$

Dans le cas

$$a > 0,$$

les nombres

$$A', \; A''$$

sont négatifs et par conséquent les formes

$$ax^2 + 2b'xz + a''z^2, \qquad ax^2 + 2b''xy + a'y^2$$

sont indéfinies.

Cela étant, nous pouvons assurer que les minima des deux formes

$$\frac{ax^2 + 2b'xz + a''z^2}{\sqrt{-A'}} \quad \text{et} \quad \frac{ax^2 + 2b''xy + a'y^2}{\sqrt{-A''}}$$

sont plus petits que $\sqrt{\frac{1}{2}}$, si ces formes ne sont pas équivalentes aux formes

$$\psi_0 = \sqrt{\frac{4}{5}}\,(x^2 - xy - y^2), \qquad \psi_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}\,(x^2 - 2xy - y^2).$$

D'autre part le minimum de la forme

$$ax^2 + 2b'xz + a''z^2$$

et le minimum de la forme

$$ax^2 + 2b''xy + a'y^2$$

ont, par supposition, la même valeur a.

Il en résulte, que le cas

$$a > 0$$

peut être réduit au cas

$$a < 0,$$

si l'une des deux formes

$$\frac{ax^2 + 2b'xz + a''z^2}{\sqrt{-A'}}, \qquad \frac{ax^2 + 2b''xy + a'y^2}{\sqrt{-A''}}$$

est equivalente à la forme ψ_0 ou à la forme ψ_1.

Et l'on aura

$$a < \sqrt{-\tfrac{1}{2}A'}, \qquad a < \sqrt{-\tfrac{1}{2}A''},$$

s'il n'y a pas cette équivalence.

Or en considérant la forme négative

$$A'Y^2 + 2BYZ + A''Z^2,$$

pour laquelle on a

$$A'A'' - B^2 = a,$$

nous pouvons supposer, que cette forme est réduite de telle manière, qu'on a

$$A'A'' \leqq \frac{4}{3}a.$$

En combinant la dernière inégalité avec les inégalités

$$a < \sqrt{-\tfrac{1}{2}A'}, \qquad a < \sqrt{-\tfrac{1}{2}A''}$$

on trouvera

$$a < \sqrt[3]{\frac{1}{3}}.$$

Donc le cas $a > 0$ peut être réduit au cas $a < 0$, si nous excluons les formes, dont la valeur absolue peut s'abaisser au dessous de $\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$.

En abordant le cas

$$a < 0,$$

nous pouvons supposer la forme indéfinie

$$A'Y^2 + 2BYZ + A''Z^2$$

réduite de telle manière, qu'on aura

$$A' < 0, \quad A'' > 0, \quad \xi > 1 \quad \text{et} \quad \eta > 1$$

en désignant par

$$\xi \quad \text{et} \quad -\frac{1}{\eta}$$

deux racines de l'équation

$$A'\xi^2 + 2B\xi + A'' = 0.$$

Soient

$$\xi = \xi_0 = \alpha_0 + \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \ddots}} \quad \text{et} \quad \eta = \eta_0 = \alpha_{-1} + \cfrac{1}{\alpha_{-2} + \ddots}$$

les développements des quantités ξ et η en fractions continues ordinaires, les nombres

$$\cdots, \alpha_{-2}, \alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots$$

étant entiers et positifs.

En nous servant des désignations des mémoires mentionnées «Sur les formes quadratiques binaires indéfinies», nous posons

$$\xi_k = \alpha_k + \cfrac{1}{\alpha_{k+1} + \ddots}, \qquad \eta_k = \alpha_{k-1} + \cfrac{1}{\alpha_{k-2} + \ddots},$$

$$\frac{2}{L_k} = \xi_k + \frac{1}{\eta_k}$$

et nous aurons

$$A' = -L_0\sqrt{-a}, \qquad A'' = L_{-1}\sqrt{-a}.$$

D'un autre coté, en considérant les formes

$$ax^2 + 2b'xz + a''z^2 \quad \text{et} \quad ax^2 + 2b''xy + a'y^2,$$

nous pouvons etablir les égalités

$$a = -\mu\sqrt{-A'} \quad \text{et} \quad a = -\nu\sqrt{A''},$$

où l'on a

$$\mu^2 \leqq \frac{4}{5} \quad \text{et} \quad \nu^2 \leqq \frac{4}{3}.$$

Ces égalités nous donnent les formules

$$-a = \sqrt[3]{\mu^4 L_0^2} = \sqrt[3]{\nu^4 L_{-1}^2}.$$

Or on peut prendre chaque paire

$$L_{2l}, \quad L_{2l-1}$$

au lieu des nombres

$$L_0, \quad L_{-1},$$

en remplacant les formules précédentes par celles plus générales

$$-a = \sqrt[3]{\mu_l^4 L_{2l}^2} = \sqrt[3]{\nu_l^4 L_{2l-1}^2},$$

et on aura

$$\mu_l^2 \leqq \frac{4}{5}, \qquad \nu_l^2 \leqq \frac{4}{3}.$$

Excluons de nos recherches toutes les formes dont la valeur absolue peut s'abaisser au dessous de $\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$.

En ajoutant l'inégalité

$$-a \geqq \sqrt[3]{\frac{1}{3}}$$

aux inégalités et aux formules précédentes on obtient

$$\frac{2}{L_{2i}} \leqq 2\mu_i^2\sqrt{3} \leqq \sqrt{7,68} < 2,772,$$

$$\frac{2}{L_{2i-1}} \leqq 2\nu_i^2\sqrt{3} < \sqrt{21,34} < 4,62.$$

Or les inégalités

$$\frac{2}{L_{2i}} < 2,772 \qquad \text{et} \qquad \frac{2}{L_{2i-1}} < 4,62$$

ne peuvent être satisfaites que dans les cas, où la série

$$\cdots, \alpha_{-4}, \alpha_{-2}, \alpha_0, \alpha_2, \alpha_4, \cdots$$

ne contient pas des nombres plus grands que 2 et la série

$$\cdots, \alpha_{-3}, \alpha_{-1}, \alpha_1, \alpha_3, \cdots$$

ne contient pas des nombres plus grands que 3; car on a

$$4 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} > 4,62.$$

Quant aux quantités μ_i^2 nous allons démontrer d'abord l'impossibilité de ces trois suppositions

$$(1) \quad \mu_{i-1}^2 = \mu_i^2 = \frac{4}{5},\ \mu_{i+1}^2 < \frac{1}{2}; \qquad (2) \quad \mu_{i-1}^2 < \frac{1}{2},\ \mu_i^2 = \mu_{i+1}^2 = \frac{4}{5};$$

$$(3) \quad \mu_{i-1}^2 < \frac{1}{2},\ \mu_i^2 = \frac{4}{5},\ \mu_{i+1}^2 < \frac{1}{2}.$$

Pour démontrer l'impossibilité de la première supposition

$$\mu_{i-1}^2 = \mu_i^2 = \frac{4}{5}, \quad \mu_{i+1}^2 < \frac{1}{2},$$

nous remarquons qu'elle donne

$$\frac{2}{L_{2i-2}} = \frac{2}{L_{2i}} \geqq \frac{221}{125}\,\frac{2}{L_{2i+2}};$$

car la quantité μ_{i+1}^2 étant plus petite que $\frac{1}{2}$ ne peut monter au dessus de $\frac{100}{221}$.

D'autre part on a

$$\frac{2}{L_{2l}} = \xi_{2l} + \cfrac{1}{\alpha_{2l-1} + \cfrac{1}{\eta_{2l-1}}} = \eta_{2l+1} + \cfrac{1}{\alpha_{2l+1} + \cfrac{1}{\xi_{2l+2}}}$$

$$\frac{2}{L_{2l-2}} = \eta_{2l-1} + \cfrac{1}{\alpha_{2l-1} + \cfrac{1}{\xi_{2l}}}, \qquad \frac{2}{L_{2l+2}} = \xi_{2l+2} + \cfrac{1}{\alpha_{2l+1} + \cfrac{1}{\eta_{2l+1}}}$$

et ensuite

$$\frac{\alpha_{2l-1}\,\xi_{2l}+1}{\alpha_{2l-1}\,\eta_{2l-1}+1}\cdot\frac{2}{L_{2l-2}} = \frac{2}{L_{2l}} = \frac{\alpha_{2l+1}\,\eta_{2l+1}+1}{\alpha_{2l+1}\,\xi_{2l+2}+1}\cdot\frac{2}{L_{2l+2}}.$$

A force de ces formules la supposition considerée fournit l'égalité

$$\xi_{2l} = \eta_{2l-1}$$

et l'inégalité

$$\eta_{2l+1} \geqq \frac{221}{125}\,\xi_{2l+2} + \frac{96}{125}\,\frac{1}{\alpha_{2l+1}}.$$

Mais en vertu des conditions, établies auparavant, on doit avoir

$$\eta_{2l+1} < 3, \quad \xi_{2l+2} > \alpha_{2l+2} + \frac{1}{4} \geqq \frac{5}{4}, \quad \alpha_{2l+1} \leqq 3.$$

Cela étant, il est facile d'établir les égalités

$$\alpha_{2l} = \alpha_{2l-2} = 2, \quad \alpha_{2l+2} = 1$$

et l'inégalité

$$\eta_{2l+1} > 2{,}21 + \frac{32}{125} = 2{,}466$$

laquelle ne peut être satisfaite que pour

$$\alpha_{2l-1} = 1,$$

car la fraction $\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4}}$, égale à $\frac{4}{9}$, est plus petite que 0,466.

Il en résulte l'inégalité

$$\frac{2}{L_{2l}} > 2 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}} + \frac{1}{4}$$

incompatible à l'inégalité établie plus haut

$$\frac{2}{L_{2l}} < 2{,}772.$$

De même manière on peut écarter la seconde supposition

$$\mu_{l-1}^2 < \frac{1}{2}, \qquad \mu_l^2 = \mu_{l+1}^2 = \frac{4}{5}.$$

Enfin, en faisant la troisième supposition

$$\mu_{i-1}^2 < \frac{1}{2}, \quad \mu_i^2 = \frac{4}{5}, \quad \mu_{i+1}^2 < \frac{1}{2},$$

on parvient aux inégalités

$$\eta_{2l+1} \geqq \frac{221}{125}\,\xi_{2l+2} + \frac{96}{125}\,\frac{1}{\alpha_{2l+1}},$$

$$\xi_{2l} \quad \geqq \frac{221}{125}\,\eta_{2l-1} + \frac{96}{125}\,\frac{1}{\alpha_{2l-1}},$$

et au moyen de ces inégalités on trouve

$$\alpha_{2l} = 2, \quad \alpha_{2l-1} = 1, \quad \alpha_{2l+1} = 1.$$

Il en résulte l'inégalité

$$\frac{2}{L_{2l}} > 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 3$$

incompatible aussi à l'inégalité précédente

$$\frac{2}{L_{2l}} < 2{,}772.$$

Nous pouvons exclure aussi les cas, où toutes les quantités μ_i^2 sont plus petites que $\frac{1}{2}$.

En effet dans ces cas on doit avoir

$$\frac{2}{L_{2l}} \leqq \frac{200}{221}\sqrt{3} < 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{3}$$

et par conséquent

$$\cdots = \alpha_{-4} = \alpha_{-2} = 1 = \alpha_0 = \alpha_2 = \cdots,$$

$$\cdots = \alpha_{-3} = \alpha_{-1} = 3 = \alpha_1 = \alpha_3 = \cdots.$$

Cela étant, la forme

$$A'Y^2 + 2BYZ + A''Z^2$$

est identique à celle ci

$$-\sqrt{\frac{-4a}{21}}\,(3Y^2 - 3YZ - Z^2)$$

et la forme $\frac{f}{a}$ peut être presentée par la somme

$$\frac{f}{a} = \left(x + \frac{b'}{a}z + \frac{b''}{a}y\right)^2 + \sqrt{\frac{-4}{21a^3}}\,(y^2 - 3yz - 3z^2).$$

Cette somme se réduit à

$$\left(x + \frac{b''}{a}\right)^2 + \sqrt{\frac{-4}{21a^3}},$$

pour

$$y = 1, \qquad z = 0$$

à

$$\left(x - \frac{b'}{a} + \frac{b''}{a}\right)^2 + \sqrt{\frac{-4}{21a^3}},$$

pour

$$y = 1, \qquad z = -1,$$

et à

$$\left(x + \frac{b'}{a} + 4\frac{b''}{a}\right)^2 + \sqrt{\frac{-4}{21a^3}}$$

pour

$$y = 4, \qquad z = +1.$$

À cause de l'inégalité

$$f^2 \geqq a^2$$

il en résulte, que les valeurs absolues des sommes

$$x + \frac{b''}{a}, \quad x - \frac{b'}{a} + \frac{b''}{a}, \quad x + \frac{b'}{a} + 4\frac{b''}{a}$$

ne peuvent s'abaisser au dessous de la quantité

$$\sqrt{1 - \sqrt{\frac{-4}{21a^3}}}.$$

Or cette quantité doit être plus grande que celle ci

$$\sqrt{1 - \sqrt{\frac{4}{7}}} = 0{,}49\cdots;$$

car nous supposons $-a^3 \geqq \frac{1}{3}$.

D'autre part, en choisissant convenablement les nombres entiers x, on peut faire les valeurs des sommes

$$x + \frac{b''}{a}, \quad x - \frac{b'}{a} + \frac{b''}{a}, \quad x + \frac{b'}{a} + 4\frac{b''}{a}$$

plus petites que $\frac{1}{2}$ ou égales à $\frac{1}{2}$.

Conformément à cela nous pouvons établir les égalités

$$x_0 + \frac{b''}{a} = \varepsilon_0\left(\frac{1}{2} - \delta_0\right), \quad x_1 - \frac{b'}{a} + \frac{b''}{a} = \varepsilon_1\left(\frac{1}{2} - \delta_1\right),$$

$$x_2 + \frac{b'}{a} + 4\frac{b''}{a} = \varepsilon_2\left(\frac{1}{2} - \delta_2\right),$$

où les nombres x_0, x_1, x_2 sont entiers, ε_0, ε_1, ε_2 sont égaux à ± 1, et enfin δ_0, δ_1, δ_2 satisfont aux inégalités

$$0 \leqq \delta_0 < 0{,}01, \quad 0 \leqq \delta_1 < 0{,}01, \quad 0 \leqq \delta_2 < 0{,}01.$$

Mais en combinant ces égalités il est facile d'obtenir l'égalité impossible

$$5x_0 - x_1 - x_2 = \frac{5\varepsilon_0 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} - 5\varepsilon_0\delta_0 + \varepsilon_1\delta_1 + \varepsilon_2\delta_2,$$

dont le premier membre est un nombre entier et le second n'est pas un nombre entier.

Donc il reste deux suppositions sur les valeurs des nombres μ_i^2:

1) tous ces nombres sont égaux à $\frac{4}{5}$;

2) parmi les nombres μ_i^2 se trouve $\frac{1}{2}$.

Si tous les nombres μ_i^2 sont égaux au $\frac{4}{5}$, on aura

$$L_{-2} = L_0 = L_2$$

et ensuite

$$\xi_0 = \eta_{-1}, \qquad \xi_2 = \eta_1.$$

Or ces égalités s'expriment par les suivantes

$$\begin{aligned}
&\alpha_0 = \alpha_2 = \alpha_{-2} = \alpha_4 = \alpha_{-4} = \alpha_6 = \alpha_{-6} = \cdots,\\
&\alpha_1 = \alpha_{-3} = \alpha_5 = \alpha_{-7} = \alpha_9 = \cdots,\\
&\alpha_{-1} = \alpha_3 = \alpha_{-5} = \alpha_7 = \alpha_{-9} = \cdots.
\end{aligned}$$

Il en résulte que dans notre supposition $\left(\mu_i^2 = \frac{4}{5}\right)$ tous les nombres α_{2i} doivent avoir la même valeur 2 ou 1.

Et si l'on pose

$$\alpha_{2i} = 2,$$

la série

$$\cdots, \alpha_{-3}, \alpha_{-1}, \alpha_1, \alpha_3, \cdots$$

ne peut contenir que 2 et 3, car on a

$$2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}} > 2{,}9.$$

Dans les mêmes suppositions cette série doit contenir 3, car la somme

$$2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \cdot_{\cdot_\cdot}}} + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \cdot_{\cdot_\cdot}}},$$

égale à $2\sqrt{2}$, est aussi plus grande que $\frac{8}{5}\sqrt{3}$.

Conformément à cela nous aurons trois cas

$$(1)\quad \xi = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\xi}}, \qquad (2)\quad \xi = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\xi}}}},$$

$$(3)\quad \xi = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\xi}}}}.$$

Dans le premier de ces trois cas on trouve

$$\frac{2}{L_{2l}} = 2 + \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\ddots}} + \cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\ddots}} = \frac{2\sqrt{15}}{3},$$

$$a = -\sqrt[3]{\frac{16}{25}\cdot\frac{9}{15}} = -\sqrt[3]{\frac{48}{125}}.$$

$$A'Y^2 + 2BYZ + A''Z^2 = -\sqrt{\frac{-a}{15}}\,(3Y^2 - 6YZ - 2Z^2)$$

et la forme $\frac{f}{a}$ peut être présentée par la somme

$$\left(x + \frac{b'}{a}z + \frac{b''}{a}y\right)^2 + \frac{5}{12}(2y^2 - 6yz - 3z^2).$$

Mais il n'est pas difficile de s'assurer, que la valeur absolue de cette somme peut s'abaisser au dessous de l'unité.

Pour cela il suffit de poser successivement

$$(1)\quad y = 0,\quad z = 1, \qquad\qquad (2)\quad y = 3,\quad z = 1,$$

en déterminant x par les inégalités

$$\frac{1}{2} \leqq \pm\left(x + \frac{b'}{a}z + \frac{b''}{a}y\right) \leqq 1,$$

et

$$(3)\quad y = 1,\quad z = 0,$$

en déterminant x par les inégalités

$$-\frac{1}{2} \leqq x + \frac{b''}{a} \leqq \frac{1}{2}.$$

Parmi les nombres ainsi obtenus

$$\left(x_0 + \frac{b'}{a}\right)^2 - \frac{5}{4}, \qquad \left(x_1 + \frac{b'}{a} + 3\frac{b''}{a}\right)^2 - \frac{5}{4}, \qquad \left(x_2 + \frac{b''}{a}\right)^2 + \frac{5}{6}$$

l'un au moins a la valeur absolue plus petite que l'unité.

En effet dans la supposition contraire la différence $\frac{b'}{a} - \frac{1}{2}$ et le produit $3\frac{b''}{a}$ se réduisent aux nombres entiers et en même temps la quantité $\frac{b''}{a}$ diffère d'un nombre entier par une quantité δ satisfaisante aux inégalités

$$\frac{1}{2} \geqq \delta \geqq \sqrt{\frac{1}{6}}.$$

Mais c'est impossible, car la quantité 3δ satisfaisante aux inégalités

$$\frac{3}{2} \geqq \delta \geqq 3\sqrt{\frac{1}{6}}$$

ne peut être un nombre entier.

De même manière il est facile d'écarter le cas (2), où l'on a

$$\xi = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\xi}}}}.$$

Dans ce cas la forme $\frac{f}{a}$ se présente par la somme

$$\left(x + \frac{b'}{a} z + \frac{b''}{a} y\right)^2 + \frac{5}{68}(12y^2 - 36yz - 17z^2),$$

laquelle se réduit à

$$\left(x + \frac{b'}{a}\right)^2 - \frac{5}{4},$$

pour

$$y = 0, \quad z = 1,$$

à

$$\left(x + \frac{b'}{a} + 3\frac{b''}{a}\right)^2 - \frac{5}{4},$$

pour

$$y = 3, \quad z = 1,$$

et à

$$\left(x + \frac{b''}{a}\right)^2 + \frac{15}{17},$$

pour

$$y = 1, \quad z = 0.$$

Or si l'on pose que les valeurs absolues des toutes trois expressions

$$\left(x + \frac{b'}{a}\right)^2 - \frac{5}{4}, \qquad \left(x + \frac{b'}{a} + 3\frac{b''}{a}\right)^2 - \frac{5}{4}, \qquad \left(x + \frac{b''}{a}\right)^2 + \frac{15}{17}$$

ne s'abaissent au dessous de l'unité, on obtient ce résultat impossible, qu'il existe un nombre entier dans l'intervalle

$$\text{de} \quad 3\sqrt{\frac{2}{17}} \quad \text{jusqu'à} \quad \frac{3}{2}.$$

Enfin nous pouvons aussi écarter et le cas (3), où l'on a

$$\xi = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\xi}}}},$$

en remarquant que ce cas se réduit au cas précédent par la substitution

$$y = 5y_1 + 2z_1, \qquad z = 2y_1 + z_1.$$

Par les considérations précédentes nous avons établi l'impossibilité de la supposition, que toutes les quantités μ_i^2 sont égales à $\frac{4}{5}$ et en même temps les nombres α_{2i} sont égaux à 2.

Maintenant nous allons traiter les cas, où toutes les quantités μ_i^2 sont égales à $\frac{4}{5}$ et les nombres α_{2i} sont égaux à l'unité.

On peut réduire ces cas aux six suppositions:

$$(1)\quad \xi = 1 + \frac{1}{\xi}, \qquad (2)\quad \xi = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\xi}}, \qquad (3)\quad \xi = 1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\xi}},$$

$$(4)\quad \xi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\xi}}}}, \qquad (5)\quad \xi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\xi}}}},$$

$$(6)\quad \xi = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\xi}}}}.$$

Or nous écartons les suppositions (2), (3), (5) et (6) par la seule remarque, que pour ces suppositions le rapport

$$\frac{L_{-1}}{L_0}$$

a les valeurs

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{3}{7},\ \frac{4}{11}$$

tandis que ce rapport dans les cas considerés ne peut s'abaisser au dessous de

$$\frac{4}{5} : \frac{4}{3} = \frac{3}{5}.$$

La supposition (1)

$$\xi = 1 + \frac{1}{\xi}$$

est aussi impossible.

En effet, cette supposition aboutit à l'égalité

$$\frac{f}{a} = \left(x + \frac{b'}{a} z + \frac{b''}{a} y\right)^2 + \frac{5}{4}(y^2 - yz - z^2)$$

et ensuite

$$\frac{f}{a} = \left(x + \frac{b'}{a}\right)^2 - \frac{5}{4} \qquad \text{pour} \quad y = 0, \quad z = 1,$$

$$\frac{f}{a} = \left(x + \frac{b'}{a} + \frac{b''}{a}\right)^2 - \frac{5}{4} \quad \text{pour} \quad y = z = 1,$$

$$\frac{f}{a} = \left(x + 2\frac{b'}{a} - \frac{b''}{a}\right)^2 - \frac{5}{4} \quad \text{pour} \quad y = -1, \quad z = 2.$$

Mais il est facile de voir, que le minimum des valeurs absolues des trois expressions

$$\left(x+\frac{b'}{a}\right)^2-\frac{5}{4},\quad \left(x+\frac{b'}{a}+\frac{b''}{a}\right)^2-\frac{5}{4},\quad \left(x+2\frac{b'}{a}-\frac{b''}{a}\right)^2-\frac{5}{4}$$

est plus petit que l'unité.

Quant à la supposition (4)

$$\xi = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\xi}}}},$$

elle donne

$$a = -\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$$

et

$$\frac{f}{a} = \left(x+\frac{b'}{a}z+\frac{b''}{a}y\right)^2+\frac{1}{4}(3y^2-6yz-5z^2).$$

En examinant la dernière expression $\frac{f}{a}$, nous trouvons, que sa valeur absolue ne s'abaisse au dessous de l'unité seulement dans les cas, où les deux différences

$$\frac{b'}{a}-\frac{1}{2},\qquad \frac{b''}{a}-\frac{1}{2}$$

sont des nombres entiers; car cette expression se réduit à

$$\left(x+\frac{b'}{a}\right)^2-\frac{5}{4}\quad \text{pour}\quad y=0,\quad z=1,$$

et à

$$\left(x+\frac{b''}{a}\right)^2+\frac{3}{4}\quad \text{pour}\quad y=1,\quad z=0.$$

Il en résulte une classe des formes f, dont le déterminant est égal à 1 et le minimum — à $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$.

Cette classe se détermine par la forme

$$\begin{aligned} f &= -\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\left\{\left(x-\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z\right)^2+\frac{1}{4}(3y^2-6yz-5z^2)\right\} \\ &= -\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\{x^2+y^2-z^2-yz-xz-xy\} \\ &= -\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\{(x-z)^2+(y-z)^2-(x-z)(y-z)-2z^2\} \end{aligned}$$

ou par la forme équivalente

$$-\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\{x^2-xy+y^2-2z^2\}.$$

Passons aux cas, où la quantité μ_i^2 obtient les valeurs différentes de $\frac{4}{5}$.

Pour ces cas nous avons établi, que parmi les valeurs μ_i^2 se trouve $\frac{1}{2}$. Et par conséquent dans tous ces cas on peut réduire la forme f de telle manière, que son premier coefficient a restera sans changement et que la forme

$$ax^2 + 2b'xz + a''z^2$$

sera équivalente à la forme

$$a(x^2 - 2xy - y^2).$$

D'après cela on peut réduire la forme f à l'une des formes

$$-a(x^2 - 2xy - y^2) + 2byz + 2b'xz + a''z^2,$$

dont le minimum est égal à $-a$.

Nous avons obtenu ainsi l'un des cas considerés plus haut, où la forme f atteint son minimum avec le signe $+$.

Conformément à ce que nous avons déjà établi la forme

$$-ax^2 + 2b'xz + a''z^2$$

doit être indéfinie; et il est facile de voir que cette forme doit être équivalente à la forme

$$-a(x^2 - xz - z^2),$$

ou à la forme

$$-a(x^2 - 2z^2)$$

afin que $-a$ ne puisse pas s'abaisser au dessous de $\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$.

Dans le cas, où la forme

$$-ax^2 + 2b'xz + a''z^2$$

est équivalente à la forme

$$-a(x^2 - xz - z^2),$$

la forme f peut être transformée de telle manière qu'on aura

$$\frac{f}{-a} = x^2 - 2y^2 - xz - z^2 + 2gyz,$$

le coefficient g étant lié avec a par la relation

$$-a^3\left(\frac{5}{2} - g^2\right) = 1.$$

Ce coefficient g peut être supposé positif, car on peut substituer $-y$ au lieu de y.

D'autre part, la forme

$$x^2 - 2y^2 - xz - z^2 + 2gyz$$

prend la valeur

$$-1+2g$$

pour

$$x=1, \quad y=z=-1$$

et la valeur

$$3-2g$$

pour

$$x=3, \quad y=-1, \quad z=1.$$

Le nombre g étant plus petit que $\sqrt{\frac{5}{2}}$, la différence

$$3-2g$$

est plus grande que -1 et par conséquent elle doit être égale à l'unité ou plus grande que l'unité; car dans le cas contraire la valeur absolue de la forme f s'abaisse au dessous de $-a$.

Il en résulte l'inégalité

$$g \leqq 1.$$

Par la raison analogue on doit poser

$$-1+2g=-1 \quad \text{ou} \quad 2g-1 \geqq 1.$$

En combinant ces inégalités, on trouve, qu'elles ne sont satisfaites que pour deux valeurs de g suivantes

$$g=0, \quad g=1.$$

En posant

$$g=1$$

on obtient la forme

$$f=+\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\,(x^2-2y^2-xz-z^2+2yz)$$
$$=-\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\left(z^2-z(2y-x)+(2y-x)^2-2(y-x)^2\right),$$

laquelle est équivalente à la forme obtenue plus haut

$$-\sqrt[3]{\frac{2}{3}}(x^2-xy+y^2-2z^2)$$

et par conséquent ne donne aucun resultat nouveau.

En posant ensuite

$$g=0$$

nous recevons la forme

$$f=\sqrt[3]{\frac{2}{5}}\,(x^2-xz-z^2-2y^2)$$

dont le minimum est égal à $\sqrt[3]{\frac{2}{5}}$.

Enfin il nous reste à supposer, qu'on a

$$f=-a(x^2-2xy-y^2)+2byz+2b'zx+a''z^2$$

et la forme

$$-ax^2+2b'zx+a''z^2$$

est équivalente à celle ci

$$-a(x^2-2y^2).$$

Or il est facile réduire cette supposition à celle plus simple, que l'on a

$$\frac{f}{-a}=x^2-2y^2-2z^2+2gyz,$$

le coefficient g étant lié à a par la formule

$$-(4-g^2)a^3=1.$$

D'autre part, en considérant la valeur de la forme

$$x^2-2y^2-2z^2+2gyz$$

pour

$$x=y=1 \quad \text{et} \quad z=\pm 1,$$

il est facile de s'assurer que la valeur absolue de g ne peut s'élever au dessus de 1.

D'après cela, ayant égard à la condition

$$-a^3 \geqq \frac{1}{3},$$

nous devons poser

$$g=\pm 1.$$

Il en résulte une classe des formes, dont le minimum est égal à $\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$.

Cette classe se détermine par la forme

$$\sqrt[3]{\frac{2}{3}}(x^2-2y^2-2z^2+2yz)$$

$$=-\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\{(y+z+x)^2+(y-2z-x)^2-3(x+z)^2\}$$

ou par la forme équivalente

$$-\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\{x^2+y^2-3z^2\}.$$

Donc il n'existe que les trois classes des formes ternaires indéfinies

$$f=ax^2+a'y^2+a''z^2+2byz+2b'zx+2b''yx,$$

dont la valeur absolue ne s'abaisse pas au dessous de $\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$, le déterminant

$$D=aa'a''+2bb'b''-ab^2-a'b'^2-a''b''^2$$

étant égal à l'unité.

Ces trois classes se déterminent par les formes

$$-\sqrt[3]{\frac{2}{3}}\,(x^2-xy+y^2-2z^2),$$

$$\sqrt[3]{\frac{2}{5}}\,(x^2-xy-y^2-2z^2),$$

$$-\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\,(x^2+y^2-3z^2),$$

dont les minima sont respectivement égaux à

$$\sqrt[3]{\frac{2}{3}},\quad \sqrt[3]{\frac{2}{5}},\quad \sqrt[3]{\frac{1}{3}}.$$

Notre proposition est ainsi démontrée.

St. Pétersbourg, Octobre 1901.

Eine in den hinterlassenen Papieren Franz Neumann's vorgefundene Rede von C. G. J. Jacobi.*)

Veröffentlicht von

Walther v. Dyck in München.

Die im Folgenden veröffentlichte Rede hat Jacobi zum Eintritt in die philosophische Facultät der Universität Königsberg am 7. Juli 1832 gehalten (die Ernennung Jacobi's zum Ordinarius war 1829 erfolgt).

Herr Carl Neumann in Leipzig hatte diese Rede als Student unter den Büchern seines Vaters gefunden, für sich abgeschrieben und eine besonders charakteristische Stelle derselben im Vorwort zu seinen „Beiträgen zu einzelnen Theilen der mathematischen Physik“ Leipzig 1893 veröffentlicht. Als ich mich im Herbste des vorigen Jahres mit Studien über „die Beziehungen zwischen dem künstlerischen und dem wissenschaftlichen Erfassen der Natur“ beschäftigte und mir eben jene citirte Stelle die Art wissenschaftlicher und künstlerischer Intuition besonders prägnant zu bezeichnen schien, ersuchte ich Herrn Carl Neumann um Mittheilungen über den Ursprung jenes Citates. Dies gab Veranlassung, dass ein Enkel F. Neumann's, Herr E. Neumann in Halle (nunmehr in Breslau), in dem Nachlasse seines GrossVaters nach jener Rede forschte, mit dem Erfolge, dass er das Original der Rede von der Hand Jacobi's eingetragen fand in einem durchschossenen Handexemplar einer für den eingangs genannten Zweck gedruckten Abhandlung, deren ausführlicher Titel lautet:

„Commentatio / de transformatione integralis duplicis indefiniti

$$\int \frac{d\varphi\, d\psi}{A+B\cos\varphi+C\sin\varphi+(A'+B'\cos\varphi+C'\sin\varphi)\cos\psi+(A''+B''\cos\varphi+C''\sin\varphi)\sin\psi}$$

in formam simpliciorem

$$\int \frac{d\eta\, d\vartheta}{G-G'\cos\eta\cos\vartheta-G''\sin\eta\sin\vartheta}$$

---

*) Abgedruckt aus den Sitzungsberichten der Math.-phys. Klasse der k. Bayer. Akademie d. W. 1901.

quam / auctoritate a. ordinis philosophorum / pro loco in eo rite obtinendo / D. VII. Julii MDCCCXXXII / h. l. q. c. / publice defendet / Carolus Gustavus Jacobus Jacobi Ph. Dr. /Math. P. P. O., Academiarum Parisiensis, Berolinensis, Petropolitanae sodalis. / assumpto ad respondendum socio / Herrmanno Henrico Haedenkamp Halensi / opponentibus / Julio Eduardo Czwalina, Tolksensi / Augusto Rudolpho Luchterhand, Mariaeinsulano / Regiomonti."

Es ist diese Abhandlung der erste Theil (Nr. 1—9) der im 8. Band von Crelle's Journal S. 253—279 und S. 321—357 abgedruckten Abhandlung „De transformatione integralis duplicis indefiniti etc." (Vergleiche Werke, Band III S. 91—158, sowie das Verzeichnis sämmtlicher Abhandlungen Jacobi's in Bd. VII der Werke, S. 427.)

Ihr sind noch folgende Thesen vorgedruckt.

Theses.

1. Mathesis est scientia eorum, quae per se clara sunt.
2. Principium methodi geometricae et analyticae idem est.
3. Per Theoriam Functionum ilustrissimi Lagrange analysis infinite parvi non refutatur, sed demonstratur.

Dass die vorliegende Rede wirklich für die genannte Gelegenheit verfasst wurde, geht aus der Anrede, wie aus der am Schluss zugefügten Aufforderung zur Disputation (die wir eben deshalb noch in ihren ersten Sätzen mit abdrucken) unzweifelhaft hervor.

Ich darf Herrn Geheimrath Carl Neumann, welcher mir mit dem Original der Rede ihre Veröffentlichung vollständig übergab, auch an dieser Stelle für die hierdurch erwiesene Auszeichnung aufs herzlichste danken. Ich glaube, dass auch heute noch die Rede Jacobi's das besondere Interesse der Fachgenossen durch die in ihr vertretene Auffassung mathematischer Arbeit erwecken wird.

Prorector magnifice, decane spectabilis, professores doctoresque clarissimi atque doctissimi, commilitones ornatissimi, auditores omnium ordinum honoratissimi.

Ex quo primum ad artem analyticam accuratius cognoscendam animum appuli atque exemplaria mathematicorum assidua manu evolvi, magnum illud admiratus sum et stupendum opus mentis humanae, quod mathesis nomine usurpamus. Nam si id jam celebramus atque posteritati commendamus, quoties Rex aut Imperator aedificii alicujus prae ceteris decori fundamento vel unum infixerit lapidem — habemus jam aedem amplam paene ad astra usque exstructam, cujus singulos lapides alios post alios per tantam saeculorum seriem struxerunt regia illa et imperatoria ingenia, quibus gloriatur genus humanum et saeculum, quod illustraverunt. Eo magis miratus sum errorem singularem, in quem video incidere viros non sane contemnendos aut rerum mathematicarum expertes, qui quasi caeci judicent de coloribus, sed viros eximios, ipsos adeo mathematicos praestantissimos, errorem dico, huic tantae disciplinae suum deesse sibi insitum principium progressionis; fieri scilicet rerum mathematicarum progressum, quoties hoc vel illud problema de mundo naturali petitum seu quaestio physica mathematicorum labores provocat. Tristis sane et deplorabilis sors disciplinae, sancto illo nomine indignae, quae e libera facta esses serva, e filia numinis divini, mentis humanae gloriam manifestante, ipsa mentis expers, ipsa nescia quid tibi velis, non proprio ac superbo volatu altum petens, sed dominae jussu alienae huc illuc dirigens gressus incertos ac titubantes. Permittatis velim, Auditores omnium ordinum honoratissimi pro humanitate vestra, quam imploro in re delicata et variis difficultatibus obnoxia, ut paucis erroris istius fontem detegam.

Et mundus naturalis et homo sibi conscius a Deo O. M. creati sunt; eaedem leges aeternae mentis humanae, eaedem naturae; quae est conditio, sine qua non intelligibilis esset mundus, sine qua nulla daretur rerum naturae cognitio. Missum hic faciamus ideas logicas quatenus expressas habet natura, quam hoc respectu habito considerant philosophi recentiores (ut verbo usitato utar et nimis usitato) tanquam logicam petrefactam. Consideremus naturam quatenus leges exprimat mathematicas. Non solis sensibus externis per tantam phaenomenorum varietatem et quasi tumultum dignosci potuit lex moderatrix, cui prorsus illa aut proxime obtemperant, nisi ipse accesseris ad contemplationem naturae ea fide et persuasione, ut mentis conceptiones tuae in ea expressas invenias. Leges naturae insitae mathematicae percipi non potuerunt, nisi jam proprio motu mentis humanae e legibus ei insitis exstructa esset mathesis. Corpora coelestia in sectionibus proxime conicis solem ambire non intellectum esset, nisi aeternum sectionum conicarum schema observabatur Graecorum ingenio. Quod Keplerus detexit stellae Martis moderari maeandros, idem jam Apollonii subtilitas mente conceperat, et praemedita erat. Quantum in explicanda arte proficit mens humana, tantum natura etiam suam ei explicat sibi insitam mathesin.

Crescunt disciplinae lente tardeque, per varios errores sero pervenitur ad veritatem, omnia praeparata esse debent diuturno et assiduo labore ad introitum veritatis novae; jam illa, certo temporis momento, divina quadam necessitate coacta emergit; praeparatis omnibus causa levissima accidens, quamvis remota quaestio physica eam elicere valet. Num hanc ob rem quaestioni physicae debemus incrementa, quae veritate nova in lucem prolata disciplina capit? Cur hodie applicas calculum? Num hoc die primum proponitur a natura problema? — Sedet Sphinx illa inde a creatione mundi, sedebit in sempiternum, proponit aenigmata generi mortalium; at suo tantum tempore venit Oedipus ab Apolline missus.

Errorem, in quem diximus magnos etiam incidisse geometras, in eo videmus consistere, quod non probe distinctum sit inter causas veras et causas accidentes; sive ut viri medici aiunt, inter causas proximas et causas remotas. Novimus, Eulerum olim e passu Virgiliano describente fluctuantes proras, puppes littore stantes, occasionem cepisse Hydraulicae condendi analyticae fundamenta. Exstat de Neutono lepida fabula, pomum super nares dormitantis incidens dedisse viro occasionem detegendi gravitatem universalem. Num pomo humi cadenti inest principium illud progressus, num carminibus Virgilianis? Inest ingeniis Neutonorum Eulerorum; inest ingeniis, quae magnos illos viros antecedebant, inest toti historiae artis.

Est causa vera progressus mathesis necessaria ejus explicatio, quae fit secundum leges menti humanae insitas aeternas. Causa accidens esse potest quaestio physica, pomum cadens, passus Virgilianus. Qui de causis illis fortuitis natam putant mathesin similes mihi videntur iis, qui Epicureorum sententia ex atomis per vacuum volitantibus construunt mundum. Contra quos disserens Keplerus narrat se fessum a scribendo animoque intus pulverulento ab atomorum istorum considerationibus vocatum esse ad coenam, apposuisse uxorem acetarium. Quam se interrogasse, num si toto aëre confertae volitarent patinae stanneae, folia lactucae, micae salis, guttae aquae, aceti, olei, ovorum decusses, idque ab aeterno duret, num futurum sit tandem aliquando, ut fortuito tale coeat acetarium; respondisse bellam suam: sed non hoc decore, neque hoc ordine. Neque, cum Kepleriana uxore dico, de phaenomenorum tumultu ac confusione nasci potuit divina illa mathesis structura, omnibus numeris absolutissima, non hoc decore neque hoc ordine.

Geometras Francogallos plerosque, qui prodiere e schola illustris comitis de la Place, his temporibus in errorem illum incidisse, dolemus. Qui dum unicam e quaestionibus physicis mathesis salutem petunt, relinquunt veram illam ac naturalem disciplinae viam, quam ingressi olim Eulerus et de la Grange, artem analyticam ad id evexerunt, quo nunc gaudet, fastigium. Quo non tantum mathesis pura, sed ipsae quoque ejus ad quaestiones physicas applicationes haud parum detrimenti capiunt. Semper enim arbitratus sum, ista maxime negligentia factum esse, ut magnum illud et inclytum problema de motu corporum coelestium per attractiones mutuas ex orbita elliptica exturbatorum, careat adhuc solutione, quae motibus systematis nostri solaris explicandis satisfaciat. Simulque persuasum habeo, omni studio ac labore excultis et theoria functionum ellipticarum et theoria integralium duplicium, quas ut problemata praecipua nostro tempore in rebus mathematicis proposita specto, fore, ut problematis illius paene desperati solutio vel sua sponte emergat. Theoriam functionum ellipticarum ante hos quatuor annos novis superstruxi fundamentis, itaque novum quasi calculi instrumentum cum Geometris communicavi. Fortasse etiam haec quam publico jam examini subjicio, de integralibus duplicibus commentatiuncula non omnino indigna videbitur hac solemnitate, qua coetui adscribar venerando eruditorum, qui artium plus ultra promovendarum sancto et augusto officio vitam et vigilias consecraverunt.

Jam ad arma vos procovo, juvenes ornatissimi, Czwalina et Luchterhand; surgite et tela contra nos nostraque dirigite, quae evitare studebo, et, si fors fert, remittere. Quo in certamine te oro rogoque, Respondens dilectissime, ut fidelis mihi sis armiger, nam fortes ac strenui sunt adversarii. Quos et tu jam ad certamen provoca, ut nostrum pugnandi ardorem cognoscant. . . .

Simultaninvarianten zweier zu einander contravarianter Systeme und ihre Anwendung auf die Biegung der Mannigfaltigkeiten.

Von

H. Kühne in Dortmund.

I. Simultaninvarianten zweier doppelt m-fach contravarianter Systeme.

Es seien $y_f\ (f=1,\cdots\nu)$ ν unabhängige Veränderliche und

$$a_{f_1\cdots f_m}\ (f_1,\cdots f_m=1,\cdots\nu)$$

ein System von ihnen abhängiger Grössen von der Eigenschaft, dass, wenn durch irgend eine Substitution die y_f in andere willkürliche Grössen $\bar{y}_f$ übergehen, und wenn aus den $\bar{y}_f$ entsprechend den Grössen $a_{f_1\cdots f_m}$ die Grössen $\bar{a}_{f_1\cdots f_m}$ gebildet werden, dann die Beziehungen bestehen

$$\bar{a}_{f_1\cdots f_m}=\sum_{g_1\cdots g_m} a_{g_1\cdots g_m} y_{g_1 f_1} y_{g_2 f_2}\cdots y_{g_m f_m}.$$

Ferner sei (η_{gf}) das reciproke System zu dem System der Substitutionscoefficienten (y_{fg}) und $\beta_{f_1\cdots f_m}$ ein anderes von den y_f abhängiges System von der Eigenschaft, dass beim Uebergang von den y_f zu den $\bar{y}_f$ und damit von den β zu den $\bar{\beta}$ die Beziehungen gelten

$$\bar{\beta}_{f_1\cdots f_m}=\sum_{g_1\cdots g_m}\beta_{g_1\cdots g_m}\eta_{f_1 g_1}\eta_{f_2 g_2}\cdots\eta_{f_m g_m}.$$

Nach Ricci*) bilden die a ein co- und die β ein contravariantes System von der m^{ten} Ordnung und

$$\sum_{f_1\cdots f_m} a_{f_1\cdots f_m}\beta_{f_1\cdots f_m}$$

ist eine Simultaninvariante

---

*) Bull. d. Darboux 2) 16. 1892.

Im Folgenden sollen nun doppelt m-fach variante Systeme betrachtet werden. Jedes a und jedes β hat dann zwei Zeigergruppen $f_1 \cdots f_m, g_1 \cdots g_m$. Wegen der Anwendungen beschränken wir uns auf solche a und β, die bei Vertauschung zweier Zeiger einer Gruppe ihr Zeichen ändern. Solche a, bei denen zwei Zeiger einer Gruppe einander gleich sind, verschwinden also. Die sämmtlichen verschiedenen Zeigersysteme $[f_1 \cdots f_m]$, bei denen $f_1 < f_2 < \cdots < f_m$ ist, sollen abkürzungsweise mit dem Buchstaben $\mathfrak{a}$ bezeichnet werden. Die Anzahl der Systeme $\mathfrak{a}$ ist dann $N = \binom{\nu}{m}$. Ferner setzen wir die Determinanten

$$|y_{f_i g_k}| = y_{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}, \quad |\eta_{g_k f_i}| = \eta_{\mathfrak{c}\mathfrak{a}} \begin{pmatrix} \mathfrak{a} = [f_1 \cdots f_m] & i, k = 1, \cdots m \\ \mathfrak{c} = [g_1 \cdots g_m] & \end{pmatrix}.$$

Dann folgt aus der Reciprocität der Matricen (y_{fg}) und (η_{gf}) nach einfachen Determinantensätzen, dass

$$\sum_{\mathfrak{c}} y_{\mathfrak{a}_1 \mathfrak{c}} \eta_{\mathfrak{c} \mathfrak{a}_2} = \sum_{\mathfrak{c}} \eta_{\mathfrak{a}_1 \mathfrak{c}} y_{\mathfrak{c} \mathfrak{a}_2} = \delta_{\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2}$$

ist, wobei $\delta = 1$ ist wenn $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ identisch sind, δ sonst aber verschwindet.

Da die $a_{f_1 \cdots f_m, g_1 \cdots g_m}$ doppelt m-fach covariant sein sollten, bestehen für sie die Gleichungen

$$\bar{a}_{f_1 \cdots f_m, g_1 \cdots g_m} = \sum_{\substack{p_1 \cdots p_m \\ q_1 \cdots q_m}} a_{p_1 \cdots p_m, q_1 \cdots q_m} \prod_{i=1}^{m} (y_{p_i f_i} y_{q_i g_i}),$$

die wegen der Eigenschaft der a die Gestalt annehmen

$$\bar{a}_{\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2} = \sum_{\mathfrak{c}_1 \mathfrak{c}_2} a_{\mathfrak{c}_1 \mathfrak{c}_2} y_{\mathfrak{c}_1 \mathfrak{a}_1} y_{\mathfrak{c}_2 \mathfrak{a}_2}.$$

Entsprechend wird für die contravarianten β

$$\bar{\beta}_{\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2} = \sum_{\mathfrak{c}_1 \mathfrak{c}_2} \beta_{\mathfrak{c}_1 \mathfrak{c}_2} \eta_{\mathfrak{a}_1 \mathfrak{c}_1} \eta_{\mathfrak{a}_2 \mathfrak{c}_2}.$$

Wir componiren nun aus den Systemen der a und β ein System j in folgender Weise:

$$j_{\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2} = \sum_{\mathfrak{c}} a_{\mathfrak{a}_1 \mathfrak{c}} \beta_{\mathfrak{c} \mathfrak{a}_2},$$

so ist sofort ersichtlich, dass

$$J = \sum_{\mathfrak{a}} j_{\mathfrak{a}\mathfrak{a}}$$

eine Simultaninvariante der beiden Systeme a und β darstellt, d. h. beim Uebergang von den y_f zu den $\bar{y}_f$ sich nicht ändert, denn es ist

$$\bar{J} = \sum_{a} \bar{j}_{aa} = \sum_{ac} \bar{a}_{ac} \bar{\beta}_{ca} = \sum_{\substack{a\, c\, a_1 \\ c_1\, a_2\, c_2}} a_{a_1 c_1} \beta_{c_2 a_2} y_{a_1 a} y_{c_1 c} \eta_{c c_2} \eta_{a a_2}$$

$$= \sum_{\substack{a_1 a_2 \\ c_1 c_2}} a_{a_1 c_1} \beta_{c_2 a_2} \delta_{a_1 a_2} \delta_{c_1 c_2} = \sum_{ac} a_{ac} \beta_{ca} = \sum_{a} j_{aa} = J.$$

Componiren wir die Matrix $(j_{a_1 a_2})$ mit sich selbst, so entsteht

$$(j^{(2)}_{a_1 a_2}) = \Big(\sum_{a} j_{a_1 a} j_{a a_2}\Big)$$

und es ist wieder $J^{(2)} = \sum_{a} j^{(2)}_{aa}$ eine Invariante. So schliesst man weiter und findet allgemein die Invariante

$$J^{(\lambda)} = \sum_{a} j^{(\lambda)}_{aa},$$

wobei

$$j^{(\lambda)}_{a a_\lambda} = \sum_{a_{\lambda-1}} j^{(\lambda-1)}_{a a_{\lambda-1}} j_{a_{\lambda-1} a_\lambda} = \cdots = \sum_{a_1 \cdots a_{\lambda-1}} j_{a a_1} j_{a_1 a_2} \cdots j_{a_{\lambda-1} a_\lambda}$$

durch λ-fache Composition des Systems (j) mit sich selbst entsteht.

Auf die Weise gelangt man zu einer unendlichen Reihe von Invarianten $J, J^{(2)}, \cdots J^{(\lambda)} \cdots$; sie lassen sich aber in bestimmter Weise durch gewisse einfache Invarianten ausdrücken. Diese sollen nun abgeleitet werden. Wir betrachten dazu die Matrix

$$\mathfrak{M}_i = (j_{a_1 a_2} + \omega_i u),$$

wobei ω_i und u vorläufig noch unbestimmt sind, und bilden das Product $\mathfrak{M}_1 \mathfrak{M}_2 \cdots \mathfrak{M}_\lambda$. Dieses ergiebt sich mit leichter Mühe zu

$$(j^{(\lambda)}_{a_1 a_2} + j^{(\lambda-1)}_{a_1 a_2} u \varpi_1 \delta_{a_1 a_2} + \cdots + j_{a_1 a_2} u^{\lambda-1} \varpi_{\lambda-1} \delta_{a_1 a_2} + u^\lambda \varpi_\lambda \delta_{a_1 a_2}),$$

dabei sind die ϖ die elementaren symmetrischen Functionen der ω. Wählt man die ω als Wurzeln der Gleichung $\omega^\lambda - 1 = 0$, so wird die Matrix zu

$$(j^{(\lambda)}_{a_1 a_2} - \delta_{a_1 a_2} u^\lambda).$$

Es seien $u_1, \cdots u_N$ die Wurzeln der Gleichung

$$J(u) = \pm\, |j_{a_1 a_2} - \delta_{a_1 a_2} u| = u^N - J_1 u^{N-1} + \cdots \pm J_N = 0,$$

dann ist

$$|j^{(\lambda)}_{a_1 a_2} - \delta_{a_1 a_2} u| = 0$$

die Gleichung N^{ten} Grades, deren Wurzeln die Potenzen $u_1^\lambda \cdots u_N^\lambda$ sind. Daraus folgt

$$J^{(\lambda)} = \sum_{a} j^{(\lambda)}_{aa} = \sum_{i=1}^{N} u_i^\lambda = P_\lambda(u),$$

wenn unter $P_\lambda(u)$ die λ^{te} Potenzsumme der u verstanden wird. Bezeichnet man noch die elementaren symmetrischen Functionen der u mit $S_\lambda(u)$, so hat man also die Beziehungen

$$J^{(\lambda)} = P_\lambda(u), \qquad J_\lambda = S_\lambda(u).$$

Nun lassen sich bekanntlich die S_λ durch die P_λ ausdrücken, aber auch die J_λ durch die $J^{(\lambda)}$; die J_λ sind also Invarianten. Umgekehrt lassen sich aber die P_λ auch durch die S_λ ausdrücken und damit die $J^{(\lambda)}$ durch die J_λ. Somit haben wir den Satz:

Die sämmtlichen Simultaninvarianten $J^{(\lambda)}$ lassen sich durch gewisse einfache Invarianten J_λ in derselben Weise ausdrücken, wie die Potenzsummen durch die elementaren symmetrischen Functionen. Dabei sind die J_λ die Invarianten

$$J^{(\lambda)} = \sum_{\mathfrak{a}} j^{(\lambda)}_{\mathfrak{a}\mathfrak{a}},$$

und die J_λ die Coefficienten der Gleichung

$$J(u) = \pm \left| j_{\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2} - \delta_{\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2} u \right| = 0.$$

II. Die Biegungsinvarianten einer beliebigen Mannigfaltigkeit.

In einer ν-fachen Mannigfaltigkeit sei das Gesetz der Streckenmessung durch die quadratische Differentialform $\varphi = \sum_{fg} a_{fg}\, dy_f\, dy_g$ gegeben. Dann sind bei einem Uebergang zu neuen Variablen die a_{fg} doppelt einfach covariant, die Elemente des reciproken Systems α_{gf} entsprechend doppelt einfach contravariant. Die aus den a gebildeten Determinanten zweiten Grades sind also doppelt zweifach covariant und die aus den α gebildeten Determinanten zweiten Grades doppelt zweifach contravariant. Also ist

$$\bar{\alpha}_{\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2} = \sum_{\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2} \alpha_{\mathfrak{c}_1\mathfrak{c}_2}\, \eta_{\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}_1}\, \eta_{\mathfrak{a}_2\mathfrak{c}_2} \qquad \left(\alpha_{\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2} = \begin{vmatrix} \alpha_{f_1g_1} & \alpha_{f_1g_2} \\ \alpha_{f_2g_1} & \alpha_{f_2g_2} \end{vmatrix}\right).$$

Die aus der Form φ gebildeten Christoffel'schen 4-Indices-Symbole (f_1f_2, g_1g_2), nachher abgekürzt $(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2)$ geschrieben, die die Coefficienten in dem Riemann'schen Krümmungsmass bilden, sind bekanntlich doppelt zweifach covariant, denn es ist

$$\overline{(f_1f_2,\, g_1g_2)} = \sum_{\substack{p_1p_2\\ q_1q_2}} (p_1p_2,\, q_1q_2)\, y_{p_1f_1}\, y_{p_2f_2}\, y_{q_1g_1}\, y_{q_2g_2},$$

ferner wechseln auch die Symbole ihr Zeichen bei Vertauschung der Zeiger einer Gruppe, also befriedigen sie die Transformationsgleichung

$$(\overline{\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2}) = \sum_{\mathfrak{c}_1 \mathfrak{c}_2} (\mathfrak{c}_1 \mathfrak{c}_2)\, y_{\mathfrak{c}_1 \mathfrak{a}_1}\, y_{\mathfrak{c}_2 \mathfrak{a}_2}.$$

Somit besitzen wir in $(\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2)$ und $\alpha_{\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2}$ zwei zu einander contravariante Systeme. Aus ihnen componiren wir, wie im allgemeinen Fall,

$$j_{\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2} = \sum_{\mathfrak{c}} (\mathfrak{a}_1 \mathfrak{c})\, \alpha_{\mathfrak{c}\, \mathfrak{a}_2},$$

so gelangen wir zu einer unendlichen Reihe von Invarianten J, $J^{(2)}, \cdots$, die sich aber durch die Invarianten J_λ ausdrücken lassen. Diese sind die Coefficienten der Function

$$J(u) = \pm \,|\, j_{\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2} - \delta_{\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2} u \,| = u^{\binom{\nu}{2}} - J_1 u^{\binom{\nu}{2} - 1} + - \cdots \pm J_{\binom{\nu}{2}}.$$

Nun sind aber die 4-Indices-Symbole $(\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2)$ allein abhängig von den a und ihren Ableitungen nach den y, also die Grössen j ebenfalls und damit auch die Gsössen $J^{(\lambda)}$ und J_λ. Eine nur von den a und ihren Ableitungen abhängige Grösse, die bei einer Substitution der unabhängigen Variablen sich nicht ändert, ist aber eine Biegungsinvariante der Mannigfaltigkeit. Somit haben wir:

> Für eine beliebige Mannigfaltigkeit sind die Grössen $J^{(\lambda)}$ und J_λ Biegungsinvarianten, und zwar lassen sich die $J^{(\lambda)}$ durch die J_λ ausdrücken, wie die Potenzsummen durch die elementaren symmetrischen Functionen. Die Grössen J_λ können also gewissermassen als die Fundamentalbiegungsinvarianten der Mannigfaltigkeit bezeichnet werden. Zusammenfassend kann man sogar die *Function $J(u)$ der Unbestimmten u die Fundamentalbiegungsinvariante der Mannigfaltigkeit* nennen.

Für $\nu = 2$, wenn also die Mannigfaltigkeit eine Fläche ist, wird

$$J(u) = u - (12, 12)\, \alpha_{12,12} = u - \frac{(12,\, 12)}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = u - K.$$

Es existirt als Fundamentalbiegungsinvariante also nur $J = K$, dem Gauss'schen Krümmungsmass.

Für Räume mit constantem Riemann'schen Krümmungsmass K_0 ist

$$(\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2) = K_0\, a_{\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2},$$

wobei die $a_{\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2}$ die aus den a_{fg} gebildeten Determinanten bedeuten. Folglich wird

$$j_{\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2} = K_0 \sum_{\mathfrak{a}} a_{\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}}\, \alpha_{\mathfrak{a}\mathfrak{a}_2} = K_0 \delta_{\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2}$$

also

$$J(u) = (u - K_0)^{\binom{\nu}{2}}.$$

III. Besonderheiten der Hyperflächen im euklidischen Raum.

Die Resultate des vorigen Abschnitts werden natürlich illusorisch, sobald die Mannigfaltigkeit überhaupt nicht verbiegbar ist. Dass man aber aus diesen Resultaten auch schliessen kann, ob eine Mannigfaltigkeit verbiegbar ist, oder nicht, soll das Beispiel der Hyperflächen im euklidischen Raum lehren. Ich setze [Bianchi, Vorlesungen über Differentialgeometrie S. 601] die beiden Grundformen der ν-fachen Mannigfaltigkeit, die in der $\nu + 1$-fachen ebenen Mannigfaltigkeit verläuft, an als

$$\varphi = \sum_{f,g} a_{fg}\, dy_f\, dy_g, \qquad \psi = \sum_{f,g} b_{fg}\, dy_f\, dy_g,$$

so bestehen die Beziehungen [Bianchi S. 602, C]

$$b_{f_1 g_1} b_{f_2 g_2} - b_{f_1 g_2} b_{f_2 g_1} = (f_1 f_2, g_1 g_2),$$

wobei die Christoffel'schen Symbole für die Form φ gebildet sind. In der von mir angewandten Bezeichnung lauten diese Gleichungen

$$b_{\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2} = (\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2).$$

Also wird die Matrix (j) zu

$$(j_{\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2}) = \left(\sum_{\mathfrak{c}} (\mathfrak{a}_1 \mathfrak{c})\, \alpha_{\mathfrak{c}\mathfrak{a}_2}\right) = \left(\sum_{\mathfrak{c}} b_{\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}}\, \alpha_{\mathfrak{c}\mathfrak{a}_2}\right)$$

und die Fundamentalbiegungsinvariante der Hyperfläche zu

$$J(u) = \pm \left| \sum_{p} b_{\mathfrak{a}_1\mathfrak{c}}\, \alpha_{\mathfrak{c}\mathfrak{a}_2} - \delta_{\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2} u \right|.$$

Hiermit werde die Gleichung, der die Hauptkrümmungsradien genügen,

$$K(\varrho) = \left| \sum_{\mathfrak{c}} b_{fp}\, \alpha_{pg} - \delta_{fg} \frac{1}{\varrho} \right| = 0$$

verglichen. Bilden wir, wie im ersten Theil dieser Arbeit

$$\prod_{i=1}^{\lambda} \left| k_{fg} + \delta_{fg}\, \omega_i \frac{1}{\varrho} \right| = \left| k_{fg}^{(\lambda)} - \delta_{fg} \frac{1}{\varrho^{\lambda}} \right|,$$

so giebt diese Determinante, $=0$ gesetzt, die Gleichung für die λ^{ten} Potenzen von $\frac{1}{\varrho}$. Diese Gleichung sei ausgeschrieben

$$\left(\frac{1}{\varrho}\right)^{\nu} - K_1^{(\lambda)}\left(\frac{1}{\varrho}\right)^{\nu-1} + \cdots \pm K_{\nu}^{\lambda},$$

so ist

$$K_2^{(\lambda)} = \sum_{a} k_{aa} = S_2\left(\frac{1}{\varrho^{\lambda}}\right).$$

Nun ist aber

$$k_{a_1 a_2} = \begin{vmatrix} k_{f_1 g_1} & k_{f_1 g_2} \\ k_{f_2 g_1} & k_{f_2 g_2} \end{vmatrix} = \sum_{p_1 p_2} \begin{vmatrix} b_{f_1 p_1}\, a_{p_1 g_1}, & b_{f_1 p_2}\, a_{p_2 g_2} \\ b_{f_2 p_1}\, a_{p_1 g_1}, & b_{f_2 p_2}\, a_{p_2 g_2} \end{vmatrix} = \sum_{c} b_{a_1 c}\, a_{c a_2} = j_{a_1 a_2},$$

also auch

$$k_{a_1 a_2}^{(\lambda)} = j_{a_1 a_2}^{(\lambda)}$$

und

$$J^{(\lambda)} = K_2^{(\lambda)} = S_2\left(\frac{1}{\varrho^{\lambda}}\right).$$

D. h. aber

$$J^{(\lambda)} = \sum_{f<g} \frac{1}{\varrho_f^{\lambda}\varrho_g^{\lambda}} = P_{\lambda}\left(\frac{1}{\varrho_f \varrho_g}\right) \quad (f<g),$$

und es wird

$$J_{\lambda} = S_{\lambda}\left(\frac{1}{\varrho_f \varrho_g}\right) \quad (f<g).$$

Die Gleichung $J(u)=0$ ist also die Gleichung, der die $\binom{\nu}{2}$ Producte $\frac{1}{\varrho_f \varrho_g}$ $(f<g)$ genügen. Diese Producte sind also Biegungsinvarianten, da die Coefficienten der Gleichung $J(u)=0$ es sind. Bemerkt sei noch, dass der letzte Coefficient $J_{\binom{\nu}{2}} = K^{\nu-1}$ ist, wobei K das Kronecker'sche Krümmungsmass $\prod_{f} \frac{1}{\varrho_f}$ bedeutet.

Ist nun $\nu \gtreqless 3$ und verschwinden nicht alle Unterdeterminanten des Systems (b_{fg}) von der dritten Ordnung [Bianchi S. 614], so lassen sich aus je drei der Grössen $\frac{1}{\varrho_f \varrho_g}$, z. B. $\frac{1}{\varrho_f \varrho_g}, \frac{1}{\varrho_f \varrho_p}, \frac{1}{\varrho_g \varrho_p}$ die Grössen $\varrho_f, \varrho_g, \varrho_p$ selbst berechnen, also sind diese auch Biegungsinvarianten, d. h. die Hyperfläche im euklidischen Raum von mehr als drei Dimensionen ist im Allgemeinen nicht verbiegbar.

Zum Schluss möchte ich noch Folgendes bemerken. Herr Stäckel hat in Anknüpfung an Arbeiten von Monro und Schur im Crelle'schen Journal (Bd. 113) die Invarianz des Riemann'schen Krümmungsmasses für eine Biegung nachgewiesen. Zwischen den dort behandelten biegungsinvarianten Ausdrücken und den von mir im zweiten Abschnitt der vorliegenden Arbeit abgeleiteten besteht insofern ein wesentlicher Unterschied, als jene abhängig sind von dem Punkte und einer durch ihn gelegten irgend wie orientirten geodätischen Fläche in der Mannigfaltigkeit, diese hingegen allein von dem Punkte, auf den sie sich beziehen, abhängen.

Dortmund, Januar 1902.

Ueber eine Eigenschaft der Differentialgleichungen der Rotation eines schweren Körpers um einen festen Punkt im Falle von Frau S. Kowalewski.

Von

G. KOLOSSOFF in St. Petersburg.

Die Differentialgleichungen der Rotation eines schweren Körpers um einen festen Punkt lassen sich im Kowalewski'schen Falle in der Form schreiben *):

$$(1)\qquad \begin{cases} 2\dfrac{dp}{dt} = qr, & \dfrac{d\gamma_1}{dt} = r\gamma_2 - q\gamma_3, \\ 2\dfrac{dq}{dt} = -pr - \gamma_3, & \dfrac{d\gamma_2}{dt} = p\gamma_3 - r\gamma_1, \\ \dfrac{dr}{dt} = \gamma_2, & \dfrac{d\gamma_3}{dt} = q\gamma_1 - p\gamma_2, \end{cases}$$

und die vier Integrale dieser Differentialgleichungen lauten:

$$(2)\qquad \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1,$$

$$(3)\qquad 2(p^2+q^2) + r^2 = 2\gamma_1 + 6l_1,$$

$$(4)\qquad 2(p\gamma_1+q\gamma_2) + r\gamma_3 = 2l,$$

$$(5)\qquad \{(p+iq)^2 + \gamma_1 + i\gamma_2\}\,\{(p-iq)^2 + \gamma_1 - i\gamma_2\} = k^2.$$

Im Folgenden soll gezeigt werden, dass sich die sechs Differentialgleichungen (1) mit Hülfe der Integrale (2) und (5) auf zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung reduciren lassen, und zwar auf die der Bewegung eines materiellen Punktes in der Ebene unter dem Einflusse einer Kraft, welche eine Kräftefunction besitzt, die eine gewisse Function der Entfernungen des Punktes von zwei in derselben Ebene liegenden Centren ist.

Diese Bemerkung, ermöglicht die Methode von C. G. Jacobi und Hamilton sehr einfach auf dieses Problem anzuwenden und die ultra-

*) Acta Math. 12; F. Kötter, Sur le cas traité par M[me] Kowalevski. Acta Math. 17.

elliptischen Differentialgleichungen, auf welche Frau S. Kowalewski die Integration der Differentialgleichungen (1) reducirt hat, zu ermitteln.

Wir führen mit S. Kowalewski die Grössen

$x_1 = p + iq,\ \ x_2 = p - iq,\ \ \xi_1 = (p+iq)^2 + \gamma_1 + i\gamma_2,\ \ \xi_2 = (p-iq)^2 + \gamma_1 - i\gamma_2$

an Stelle von $p,\ q,\ \gamma_1,\ \gamma_2$ ein; dann nehmen die Differentialgleichungen (1) folgende Gestalt an:

$$
(6)\qquad \begin{cases}
2\dfrac{dx_1}{dt} = (-rx_1 - \gamma_3)i, \\
2\dfrac{dx_2}{dt} = (rx_2 + \gamma_3)i, \\
2\dfrac{dr}{dt} = (\xi_2 - \xi_1 + x_1^2 - x_2^2)i, \\
\dfrac{d\xi_1}{dt} = -r\xi_1 i, \\
\dfrac{d\xi_2}{dt} = r\xi_2 i, \\
2\dfrac{d\gamma_3}{dt} = (x_2\xi_1 - x_1\xi_2 + x_1x_2(x_2 - x_1))i;
\end{cases}
$$

und die Integrale (2), (3), (4), (5) lauten

$$(2^*)\qquad \gamma_3^2 = 1 - k^2 + x_2^2\xi_1 + x_1^2\xi_2 - x_1^2x_2^2,$$

$$(3^*)\qquad r^2 = 6l_1 + \xi_1 + \xi_2 - (x_1 + x_2)^2,$$

$$(4^*)\qquad r\gamma_3 = 2l - x_2\xi_1 - x_1\xi_2 + x_1x_2(x_1 + x_2),$$

$$(5^*)\qquad \xi_1\xi_2 = k^2.$$

Ferner nehmen wir statt t eine neue unabhängige Veränderliche, welche durch die Gleichung

$$(7)\qquad i\,d\tau = \frac{2(rx_1 + \gamma_3)(rx_2 + \gamma_3)}{(x_2 - x_1)^2}\,dt$$

definirt ist.

Endlich setzen wir

$$x_0 = \frac{\xi_1(rx_2 + \gamma_3)^2}{(x_2 - x_1)^2}, \qquad y_0 = \frac{\xi_2(rx_1 + \gamma_3)^2}{(x_2 - x_1)^2}.$$

Durch Differentiation erhält man leicht*)

$$
\begin{aligned}
\frac{dx_0}{d\tau}\cdot\frac{dy_0}{d\tau} = \frac{\xi_1\xi_2}{4}\Bigg\{ & \frac{(x_2 - x_1)^2(\xi_1 - x_1^2)(\xi_2 - x_2^2)}{(rx_1 + \gamma_3)(rx_2 + \gamma_3)} - \frac{rx_1 + \gamma_3}{rx_2 + \gamma_3}(\xi_2 - x_2^2) \\
& - \frac{rx_2 + \gamma_3}{rx_1 + \gamma_3}(\xi_1 - x_1^2) - \xi_1 - \xi_2 + x_1^2 + x_2^2 \\
& + 2\frac{(rx_1 + \gamma_3)(rx_2 + \gamma_3)}{(x_2 - x_1)^2} + \frac{(rx_1 + \gamma_3)^2}{(x_2 - x_1)^2} + \frac{(rx_2 + \gamma_3)^2}{(x_2 - x_1)^2}\Bigg\}
\end{aligned}
$$

---

*) Die genauen Rechnungen sind in meiner Abhandlung in „Arbeiten der phys. Section der Moskauer Kais. Ges. der Freunde der Naturkunde" Heft XI, 1902 durchgeführt.

oder nach (2*), (3*), (5*)

$$(8)\quad \begin{aligned}\frac{2}{k^2}\frac{dx_0}{d\tau}\frac{dy_0}{d\tau} &= \frac{2(rx_1+\gamma_3)(rx_2+\gamma_3)}{(x_2-x_1)^2}+\frac{(x_2-x_1)^2}{2(rx_1+\gamma_3)(rx_2+\gamma_3)}-\\ &-\frac{\xi_1(rx_2+\gamma_3)^2+\xi_2(rx_1+\gamma_3)^2}{2(rx_1+\gamma_3)(rx_2+\gamma_3)}+\frac{r^2-\xi_1-\xi_2+(x_1+x_2)^2}{2}\\ &=\frac{2(rx_1+\gamma_3)(rx_2+\gamma_3)}{(x_2-x_1)^2}+\frac{(x_2-x_1)^2}{2(rx_1+\gamma_3)(rx_2+\gamma_3)}-\\ &-\frac{\xi_1(rx_2+\gamma_3)^2+\xi_2(rx_1+\gamma_3)^2}{2(rx_1+\gamma_3)(rx_2+\gamma_3)}+3l_1;\end{aligned}$$

und ferner

$$(9)\quad x_0\frac{dy_0}{d\tau}-y_0\frac{dx_0}{d\tau}=-\frac{k^2}{2}\frac{1}{x_2-x_1}\{(\xi_1-x_1^2)(rx_2+\gamma_3)-(\xi_2-x_2^2)(rx_1+\gamma_3)\}.$$

Differenziirt man die letzte Gleichung nach τ, so erhält man mit Hülfe von (2*)

$$(10)\qquad x_0\frac{d^2y_0}{d\tau^2}-y_0\frac{d^2x_0}{d\tau^2}=\frac{k^2}{4}\frac{\xi_2(rx_1+\gamma_3)^2-\xi_1(rx_2+\gamma_3)^2}{(rx_1+\gamma_3)(rx_2+\gamma_3)}.$$

In einer Ebene wird ein rechtwinkliges Coordinatensystem Ox, Oy gewählt, und es bewege sich in dieser Ebene ein materieller Punkt M (mit der Masse 1), welcher zur Zeit τ die Coordinaten

$$x=\frac{1}{k}(x_0+y_0),$$
$$y=\frac{1}{ki}(x_0-y_0)$$

habe. Die Entfernung des Punktes vom Punkte O (dem Coordinatenmittelpunkte) wird:

$$(11)\qquad \varrho=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\frac{1}{k^2}4x_0y_0}=\frac{2(rx_1+\gamma_3)(rx_2+\gamma_3)}{(x_2-x_1)^2}=i\frac{d\tau}{dt}.$$

Der Inhalt der Differentialgleichungen (1) *lässt sich dann mit Hülfe ihrer Integrale* (2), (5) *aussprechen in zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die Bewegung des Punktes M in der Ebene xy; die Bewegung findet statt unter dem Einflusse der Kraft, welche eine Kräftefunction*

$$(12)\qquad U=\frac{\varrho^2-kx+1}{\varrho}$$

besitzt.

In der That lauten die Differentialgleichungen dieser Bewegung des Punktes

$$(13)\qquad \begin{cases}\dfrac{d^2x}{d\tau^2}=\dfrac{\partial U}{\partial x}=\dfrac{\varrho(2x-k)-(\varrho^2-kx+1)\dfrac{x}{\varrho}}{\varrho^2},\\[2ex] \dfrac{d^2y}{d\tau^2}=\dfrac{\partial U}{\partial y}=\dfrac{\varrho\cdot 2y-(\varrho^2-kx+1)\dfrac{y}{\varrho}}{\varrho^2}.\end{cases}$$

Statt dieser Differentialgleichungen nehmen wir das Integral der lebendigen Kraft

$$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2\right\} = U + h$$

und die Differentialgleichung

$$y\frac{d^2x}{d\tau^2} - x\frac{d^2y}{d\tau^2} = -\frac{ky}{\varrho}.$$

Damit x, y diese Differentialgleichungen befriedigen, müssen x_0 und y_0 den Differentialgleichungen

$$\frac{2}{k^2}\frac{dx_0}{d\tau}\frac{dy_0}{d\tau} = U + h = \frac{2(rx_1+\gamma_3)(rx_2+\gamma_3)}{(x_2-x_1)^2} - \frac{\xi_1(rx_2+\gamma_3)^2 + \xi_2(rx_1+\gamma_3)^2}{2(rx_1+\gamma_3)(rx_2+\gamma_3)}$$
$$+ \frac{(x_2-x_1)^2}{2(rx_1+\gamma_3)(rx_2+\gamma_3)} + h,$$

$$x_0\frac{d^2y_0}{d\tau^2} - y_0\frac{d^2x_0}{d\tau^2} = -\frac{k^2\{\xi_1(rx_2+\gamma_3)^2 - \xi_2(rx_1+\gamma_3)^2\}}{4(rx_1+\gamma_3)(rx_2+\gamma_3)}$$

genügen.

Aber diese Gleichungen sind, wegen der Gleichungen (8), (10), erfüllt, unter der Voraussetzung, dass

$$6l_1 = 2h$$

d. h. dass die Constanten der Integrale der lebendigen Kraft in beiden Problemen dieselben sind.

Die Kräftefunction U kann in verschiedenen Formen geschrieben werden.

Auf der x-Axe wählen wir einen Punkt A in der Entfernung $OA = 2k$ von O, und es sei ϱ_1 die Entfernung des Punktes M von A.

Dann nimmt die Kräftefunction folgende Gestalt an:

$$U = \varrho - \frac{\varrho^2 - \varrho_1^2}{4\varrho} + \frac{1-k^2}{\varrho}\text{*)}.$$

Die Curven $U =$ const. können am bequemsten in Polarcoordinaten ϱ, θ untersucht werden; sie stellen eine Schaar von Curven:

$$\frac{\varrho^2 - k\varrho\cos\theta + 1}{\varrho} = \text{const.}$$

dar.

Die Integration der Differentialgleichungen der Bewegung des Punktes M werden wir nach der Jacobi-Hamilton'schen Methode ausführen. Wir führen zu diesem Zwecke in der (xy)-Ebene statt der rechtwinkligen Coordinaten elliptische ein, und zwar setzen wir

$$\lambda = \frac{1}{2}(\varrho + \varrho_1), \qquad \mu = \frac{1}{2}(\varrho - \varrho_1)\text{**)};$$

---

*) S. meine Abhandlung in „Arbeiten der phys. Section u. s. w."

**) Die Curvenscharen $\lambda =$ const. und $\mu =$ const. stellen in der xy-Ebene ein dann werden:

$$(14) \qquad x = \frac{\lambda\mu}{k} + k, \qquad y = \pm \frac{1}{k}\sqrt{(\lambda^2 - k^2)(k^2 - \mu^2)}.$$

Die lebendige Kraft des Punktes M wird in den neuen Coordinaten

$$T = \frac{1}{2}(\lambda^2 - \mu^2)\left\{\frac{\lambda'^2}{\lambda^2 - k^2} + \frac{\mu'^2}{\mu^2 - k^2}\right\}.$$

Es ist sehr leicht zu beweisen, dass die Coordinaten λ, μ mit den von Frau S. Kowalewski eingeführten Grössen t_1 und t_2*) identisch sind.

In der That, setzen wir nach Kowalewski

$$\begin{aligned}
R(x) &= -x^4 + 6l_1x^2 + 4lx + 1 - k^2,\\
R(x_1, x_2) &= -x_1^2x_2^2 + 6l_1x_1x_2 + 2l(x_1+x_2) + 1 - k^2,\\
R_1(x_1, x_2) &= -6l_1x_1^2x_2^2 - 4lx_1x_2(x_1+x_2) - (1-k^2)(x_1+x_2)^2 + 6l_1(1-k^2) - 4l^2,
\end{aligned}$$

wo k, l_1, l die Constanten der Integrale (5), (3) und (4) sind, dann werden wir mit Hülfe dieser Integrale und des Integrals (2)**)

$$\begin{gathered}
\xi_1 R(x_2) + \xi_2 R(x_1) + R_1(x_1, x_2) + k^2(x_2 - x_1)^2 = 0,\\
(rx_1 + \gamma_3)^2 = R(x_1) + (x_2 - x_1)^2\xi_1,\\
(rx_2 + \gamma_3)^2 = R(x_2) + (x_2 - x_1)^2\xi_2,\\
R(x_1, x_2) = (rx_1 + \gamma_3)(rx_2 + \gamma_3)
\end{gathered}$$

finden und daraus infolge (14)

$$\begin{aligned}
\lambda\mu &= \frac{\xi_1(rx_2+\gamma_3)^2 + \xi_2(rx_1+\gamma_3)^2}{(x_2-x_1)^2} - k^2 = \frac{\xi_2 R(x_1) + \xi_1 R(x_2)}{(x_2-x_1)^2} + k^2 = -\frac{R_1(x_1, x_2)}{(x_2-x_1)^2},\\
\lambda + \mu &= \frac{2(rx_1+\gamma_3)(rx_2+\gamma_3)}{(x_2-x_1)^2} = \frac{2R(x_1, x_2)}{(x_2-x_1)^2};
\end{aligned}$$

d. h. λ und μ sind die Wurzeln der Gleichung 2ten Grades:

$$t^2 - 2\frac{R(x_1, x_2)}{(x_2-x_1)^2}\,t - \frac{R_1(x_1, x_2)}{(x_2-x_1)^2} = 0,$$

welche***) die Grössen t_1 und t_2 von Frau Kowalewski definirt.

Die Kräftefunction wird in den neuen Coordinaten

$$U = \lambda + \mu + \frac{1}{\lambda+\mu} - k\,\frac{\frac{\lambda\mu}{k} + k}{\lambda+\mu} = \frac{\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2 + 1 - k^2}{\lambda+\mu},$$

---

isothermisches System von krummlinigen orthogonalen Coordinaten dar. (Vergl. N. Joukowski, Geometrische Interpretation des von S. Kowalewski behandelten Falles etc. im Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung IV, 1894—95).

*) Acta Math. 12. F. Kötter l. c.

**) F. Kötter l. c.

***) F. Kötter l. c. (diese Definition der Grössen wird im folgenden jedoch nicht benutzt).

und die Gleichung der lebendigen Kraft:

$$T - U = \frac{1}{2}(\lambda^2 - \mu^2)\left\{\frac{\lambda'^2}{\lambda^2 - k^2} + \frac{\mu'^2}{k^2 - \mu^2}\right\} - \frac{\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2 + 1 - k^2}{\lambda + \mu} = h = 3l_1.$$

Setzen wir

$$p_1 = \frac{\partial T}{\partial \lambda'}, \qquad p_2 = \frac{\partial T}{\partial \mu'}$$

und führen in die lebendige Kraft statt λ' und μ' die Grössen p_1 und p_2 ein, dann erhalten wir die Jacobi'sche partielle Differentialgleichung

$$(\lambda^2 - k^2)\left(\frac{\partial V}{\partial \lambda}\right)^2 + (k^2 - \mu^2)\left(\frac{\partial V}{\partial \mu}\right)^2 - 2(\lambda^3 - \mu^3) - 2(1-k^2)(\lambda - \mu) - 6l_1(\lambda^2 - \mu^2) = 0.$$

Das vollständige Integral dieser Gleichung kann in der Form

$$V = \int \frac{\sqrt{2\lambda^3 + 2(1-k^2)\lambda + 6l_1\lambda^2 + C}}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}}\,d\lambda + \int \frac{\sqrt{2\mu^3 + 2(1-k^2)\mu + 6l_1\mu^2 + C}}{\sqrt{\mu^2 - k^2}}\,d\mu$$

geschrieben werden.

Die Integrale der Differentialgleichungen (13) nehmen die Form an

$$\frac{\partial V}{\partial C} = \text{const.}, \qquad \frac{\partial V}{\partial h} = \frac{\partial V}{\partial 3l_1} = \tau - \tau_0.$$

Setzt man

$$\lambda^3 + (1-k^2)\lambda + 3l_1\lambda^2 + \frac{C}{2} = \varphi(\lambda),$$

so erhält man diese Integrale in der Form

$$\int \frac{d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)}\sqrt{\lambda^2 - k^2}} + \int \frac{d\mu}{\sqrt{\varphi(\mu)}\sqrt{\mu^2 - k^2}} = \text{const.},$$

$$\int \frac{\lambda^2 d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)}\sqrt{\lambda^2 - k^2}} + \int \frac{\mu^2 d\mu}{\sqrt{\varphi(\mu)}\sqrt{\mu^2 - k^2}} = \sqrt{2}(\tau - \tau_0).$$

Diesen Integralen sind die Differentialgleichungen

$$(15) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)}\sqrt{\lambda^2 - k^2}} &= \sqrt{2}\,\frac{d\tau}{\lambda^2 - \mu^2}, \\ \frac{d\mu}{\sqrt{\varphi(\mu)}\sqrt{\mu^2 - k^2}} &= \sqrt{2}\,\frac{d\tau}{\mu^2 - \lambda^2} \end{aligned}\right.$$

gleichwerthig.

Kehren wir zu der Veränderlichen t zurück, wobei

$$i\,d\tau = (\lambda + \mu)\,dt$$

ist, so erhalten die Differentialgleichungen (15) die Form

$$\frac{d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)}\sqrt{\lambda^2 - k^2}} + \frac{d\mu}{\sqrt{\varphi(\mu)}\sqrt{\mu^2 - k^2}} = 0,$$

$$\frac{\lambda\,d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)}\sqrt{\lambda^2 - k^2}} + \frac{\mu\,d\mu}{\sqrt{\varphi(\mu)}\sqrt{\mu^2 - k^2}} = -i\sqrt{2}\,dt.$$

Dieses System stimmt mit dem ultraelliptischen System von S. Kowalewski überein; man muss nur

$$C = 6l_1 - 4l^3 - 6l_1 k^2$$

setzen.

Im Falle $k = 0$ (von Herrn N. Delaunay untersucht*)) lassen sich x_0, y_0, x, y in der Form schreiben:

$$x_0 = k\frac{e^{-i\int r\,dt}(rx_2+\gamma_3)^2}{(x_2-x_1)^2}, \qquad y_0 = k\frac{e^{i\int r\,dt}(rx_1+\gamma_3)^2}{(x_2-x_1)^2};$$

$$x = \frac{e^{-i\int r\,dt}(rx_2+\gamma_3)^2 + e^{i\int r\,dt}(rx_1+\gamma_3)^2}{(x_2-x_1)^2}, \qquad y = \frac{1}{i}\,\frac{e^{-i\int r\,dt}(rx_2+\gamma_3)^2 - e^{i\int r\,dt}(rx_1+\gamma_3)^2}{(x_2-x_1)^2},$$

da auf Grund von (5*) und der 4ten und 5ten der Gleichungen (6)

$$\xi_1 = ke^{-i\int r\,dt},$$

$$\xi_2 = ke^{i\int r\,dt}$$

ist.

Die Kräftefunction ist einfach

$$U = \varrho + \frac{1}{\varrho}.$$

Die Integration der Differentialgleichungen der Bewegung können wir dann in Polarcoordinaten unmittelbar ausführen. Die Gleichung der lebendigen Kraft nimmt die Form an

$$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{d\varrho}{d\tau}\right)^2 + \varrho^2\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2\right\} = \varrho + \frac{1}{\varrho} + 3l_1,$$

und wir haben das Flächenintegral

$$\varrho^2\frac{d\theta}{d\tau} = \text{const.} = G, \tag{16}$$

wobei

$$\varrho = \frac{2(rx_1+\gamma_3)(rx_2+\gamma_3)}{(x_2-x_1)^2}$$

und

$$i\,d\tau = \varrho\,dt$$

ist. Aus diesen Differentialgleichungen finden wir

$$\frac{\varrho\,d\varrho}{\sqrt{\varrho^3+\varrho+3l_1\varrho^2-\frac{G^2}{2}}} = \sqrt{2}\,d\tau$$

oder

$$\frac{d\varrho}{\sqrt{\varrho^3+\varrho+3l_1\varrho^2-\frac{G^2}{2}}} = -i\sqrt{2}\,dt,$$

*) N. Delaunay, Zur Frage der geometrischen Deutung der Integrale von S. Kowalewski u. s. w. Mosk. Math. Gesellschaft XVI, F. d. M. XXIV, p. 886. Algebraische Integrale der Bewegung eines starren Körpers um einen festen Punkt, St. Petersburg 1892, F. d. M. XXIV, p. 886.

und das Problem wird, wie Herr Appelroth*) nachgewiesen hat, auf elliptische Functionen zurückgeführt.

Das Integral (16) kann mit Hülfe von (9) für diesen Fall ($\xi_1 = \xi_2 = 0$) in der Form

$$i(rx_1x_2 + \gamma_3(x_1 + x_2)) = G$$

geschrieben werden.

Mit der Grösse der Constanten G ist die Veränderung der Präcession $\frac{d\psi}{dt}$ des rotirenden Körpers eng verbunden. Mit Hülfe von (4), (2*) und (4*) finden wir:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{p\gamma_1 + q\gamma_2}{1 - \gamma_3^2} = \frac{2l - r\gamma_3}{2(1 - \gamma_3^2)} = -\frac{x_1 + x_2}{2x_1x_2},$$

und hieraus mit Hülfe von (6)

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = \frac{x_1 - x_2}{4}\,\frac{rx_1x_2 + (x_1 + x_2)\gamma_3}{x_1^2x_2^2}\,i = \frac{G(x_1 - x_2)}{4x_1^2x_2^2}.$$

Im Falle $G = 0$ (oder $2l^2 = 3l_1$) kommen wir auf den Satz von Appelroth**)

$$\frac{d\psi}{dt} = \text{const.}$$

---

*) H. Appelroth, Ergänzungen zu einem Werke von N. Delaunay. Arbeiten der phys. Section der Moskauer Kais. Ges. der Freunde der Naturkunde. VI. Heft 1893, F. d. M. XXV, p. 1437. Problem der Bewegung eines starren festen Körpers um einen festen Punkt, Moskau 1893, F. d. M, XXV, p. 1438.

**) l. c. s. auch N. Joukowski, Geometrische Interpretation des von S. Kowalewski untersuchten Falles u. s. w. Mosk. Math. Gesellschaft, XIX, 1896; F. d. M. XXVI, p. 839—841.

Note sur l'intégration des équations différentielles au moyen des variables complexes.

Par

W. Anissimoff à Varsovie.

I.

Dans mon Mémoire «*Sur la théorie des courbes géodésiques*», suivi d'un «*Complément*» (Annales de l'Ec. Norm., octobre-novembre 1901, janvier 1902), j'ai traité les problèmes généraux de cette théorie ainsi que le problème de M. Bonnet, en me servant exclusivement des variables complexes, des coordonnées symétriques. Leur emploi, il est vrai, est connu déjà depuis longtemps, mais les conclusions relatives à l'équation du 2-me ordre des géodésiques, auxquelles je suis parvenu, offrent, je pense, un intérêt de nouveauté et d'importance. Et, comme beaucoup de problèmes ne sont, au fond, que les questions de la théorie générale des équations différentielles, je me propose, dans la note suivante, d'exposer les fondements de cette *méthode d'intégrer les équations différentielles au moyen des variables complexes* et d'en donner les conséquences principales.

II.

Soit, aux variables *réelles* u et v,

$$f[u, v, v', \cdots v^{(n)}] = 0, \qquad v^{(k)} = \frac{d^k v}{du^k} \tag{1}$$

une équation *réelle* d'ordre n. En passant aux variables *complexes* x et y par la transformation

$$\begin{aligned} x &= u + iv, \\ y &= u - iv, \end{aligned} \qquad i = \sqrt{-1} \tag{2}$$

nous aurons une équation aussi d'ordre n

$$F[x, y, y', \cdots y^{(n)}] = 0, \qquad y^{(k)} = \frac{d^k y}{dx^k}. \tag{3}$$

En considérant une intégrale première de cette équation (3)

$$\Phi[x, y, y', \cdots y^{(n-1)}] = \text{Const.}, \tag{4}$$

revenons aux variables réelles u et v; on a, par la séparation des nombres réels des imaginaires,

$$\Phi = \varphi[u, v, v', \cdots v^{(n-1)}] + i\psi[u, v, v', \cdots v^{(n-1)}],$$

et il est bien visible, que les équations réelles

$$\varphi[u, v, v', \cdots v^{(n-1)}] = \alpha,$$
$$\psi[u, v, v', \cdots v^{(n-1)}] = \beta,$$

α et β étant des constantes arbitraires, nous offrent 2 intégrales premièrees de l'équation primitive (1). Maintenant il y a deux cas à distinguer:

1 Cas. — Si l'on a $\theta(\varphi, \psi) = 0$, les équations $\varphi = \alpha$ et $\psi = \beta$ ne sont que deux formes différentes d'une même intégrale première de l'équation (1). Nous donnerons aux intégrales correspondantes (4) de (3) le nom des intégrales de *la I-re classe.*

2 Cas. — S'il n'existe pas, au contraire, une liaison de la forme $\theta(\varphi, \psi) = 0$, les deux intégrales $\varphi = \alpha$ et $\psi = \beta$ sont indépendantes l'une de l'autre. Et le système des équations $\varphi = \alpha$, $\psi = \beta$ nous amène, par l'élimination de $v^{(n-1)}$, à une intégrale deuxième de l'équation (1). En cas considéré, une intégrale (4) sera nommée l'intégrale de la *II-me classe.*

On voit déjà d'ici quelles ressources importantes peut nous présenter, dans la théorie des équations différentielles, l'emploi des variables complexes et le théorème suivant met cet avantage hors de doute:

Il existe toujours, pour l'équation (3) *aux variables complexes, au moins une intégrale première de le II-me classe.*

En effet, prenons pour l'équation (3) un système complet de ses n intégrales premières indépendantes

$$\Phi_1 = \varphi_1[u, v, \cdots v^{(n-1)}] + i\psi_1[u, v, \cdots v^{(n-1)}] = \text{Const.},$$
$$\Phi_2 = \varphi_2[u, v, \cdots v^{(n-1)}] + i\psi_2[u, v, \cdots v^{(n-1)}] = \text{Const.},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Phi_n = \varphi_n[u, v, \cdots v^{(n-1)}] + i\psi_n[u, v, \cdots v^{(n-1)}] = \text{Const.}$$

Si ces intégrales sont toutes de la I-re classe, on aura, d'après la définition, $\theta_k(\varphi_k, \psi_k) = 0$, $k = 1, 2, \cdots n$. Mais, formons une expression

$$\varphi_k + i\varphi_l = \Phi_{k,l}[x, y, \cdots y^{(n-1)}] = \text{Const.}$$
$$k, l = 1, 2, \cdots n;$$

elle nous donnera une intégrale première de (3), mais déjà de la II-me classe. Car, une liaison de la forme $\theta(\varphi_k, \varphi_l) = 0$ nous amenerait aussi à une liaison de la forme $\Theta(\Phi_k, \Phi_l) = 0$, c'est qui est inadmissible, les intégrales $\Phi_k = \text{Const.}$, $\Phi_l = \text{Const.}$ étant indépendantes. Le théorème est démontré.

III.

Pour une équation réelle du 2-me ordre

$$f[u, v, v', v''] = 0 \tag{5}$$

son équation correspondante transformée aux variables complexes x et y admet toujours, d'après le théorème démontré, une intégrale première de la II-me classe

$$\Phi = \varphi[u, v, v'] + i\psi[u, v, v'] = \text{Const.}$$

et *l'intégrale générale* de (5) s'obtiendra du système

$$\begin{cases} \varphi[u, v, v'] = \alpha, \\ \psi[u, v, v'] = \beta \end{cases} \tag{6}$$

sans aucune quadrature.

Par exemple*), l'équation

$$2uv'' + v' + v'^3 = 0$$

se transforme en

$$(x + y)y'' = y' - y'^2,$$

dont l'intégrale première $(x + y)y' = 2y + \text{Const.}$ est de la II-me classe. L'intégrale générale de l'équation donnée s'en suivra, sans aucune quadrature, sous la forme

$$\frac{(u + \alpha)^2 + (v + \beta)^2}{u^2} = 1.$$

IV.

Maintenant poursuivons nos calculs un peu plus loin. Considérons pour l'équation (1) un système quelconque complet de ses n intégrales premières indépendantes

$$\begin{aligned} f_1[u, v, v', \cdots v^{(n-1)}] &= \alpha_1, \\ f_2[u, v, v', \cdots v^{(n-1)}] &= \alpha_2, \\ &\cdots\cdots \\ f_n[u, v, v', \cdots v^{(n-1)}] &= \alpha_n, \end{aligned} \tag{7}$$

et nous avons les deux cas suivants à discuter. En supposant $n = 2m$, rangeons toutes les n intégrales (7) en deux groupes, chacun de m intégrales

$$\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_m,$$
$$\psi_1, \psi_2, \cdots \psi_m.$$

Les équations

$$\begin{aligned} \varphi_1 + i\psi_1 &= \Phi_1[x, y, y', \cdots y^{(n-1)}] = \text{Const.}, \\ \varphi_2 + i\psi_2 &= \Phi_2[x, y, y', \cdots y^{(n-1)}] = \text{Const.}, \\ &\cdots\cdots \\ \varphi_m + i\psi_m &= \Phi_m[x, y, y', \cdots y^{(n-1)}] = \text{Const.} \end{aligned} \tag{8}$$

*) Mém. cité, p. 381.

seront les m intégrales premières de (3), toutes de la II-me classe, intépendantes les unes des autres. Le système (8), dès qu'on passe aux variables réelles, nous donne évidemment les n intégrales (7). C'est ainsi que nous parvenons à la conclusion:

Il existe toujours pour l'équation (3), *transformée de* (1) *d'ordre* $n = 2m$, *un système de* m *intégrales premières, d'où l'intégrale générale de* (1) *s'obtient sans quadratures.*

En cas de $n = 2m + 1$ le système (7) nous donne les $2m + 1$ fonctions

$$\begin{matrix} \varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_m, \\ \psi_n, \psi_2, \cdots \psi_m, \end{matrix} \; \theta,$$

indépendantes. Il suffit donc de joindre aux intégrales (8) une intégrale quelconque première de la I-re ou de la II-me classe

$$\theta + i\varphi(\theta) = \text{Const.},$$

$$\theta + i\varphi_k = \text{Const.} \quad \text{ou} \quad \theta + i\psi_k = \text{Const.},$$

pour parvenir à la conclusion, analogue à la précédente:

Il existe toujours pour l'équation (3), *transformée de* (1) *d'ordre* $n = 2m + 1$, *un système de* $m + 1$ *intégrales premières, d'où l'intégrale générale de* (1) *s'obtient sans quadratures.*

Varsovie, $\dfrac{\text{24 décembre 1901}}{\text{6 janvier 1902}}$.

Die Lehre von den geometrischen Proportionen.

Von

J. MOLLERUP in Kopenhagen.

Nachfolgende Lehre von den geometrischen Proportionen stützt sich auf die ebenen Axiome mit Ausnahme des Archimedischen.

1. Auf dem einen Schenkel eines rechten Winkels O werden die Punkte A und B, auf dem anderen C und D abgetragen; AC ist parallel zu BD. Diese Lage von den vier Strecken OA, OB, OC und OD wird durch die Gleichung

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD}$$

ausgedrückt; die einzelnen „Verhältnisse" haben hier keine Bedeutung. Die Gleichung wird eine Proportion genannt. Man kann auch schreiben

$$\frac{OB}{OA} = \frac{OD}{OC}$$

oder

$$\frac{OC}{OD} = \frac{OA}{OB};$$

denn der Winkel ist nach einem der gewöhnlichen Congruenzaxiome seinem umgekehrten congruent.

Es ist einleuchtend, dass drei von den Gliedern der Proportion das vierte eindeutig bestimmen.

2. *In ähnlichen rechtwinkligen Dreiecken sind die entsprechenden Katheten proportional. Denn die Dreiecke können wie OAC und OBD gelegt werden.*

3. (Das commutative Gesetz). *Wenn die Proportion*

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

gilt, hat man auch

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}.$$

Beweis. Auf die Schenkel eines rechten Winkels O werden die

Strecken $OA = a$, $OB = b$, endlich $OD = d$ in entgegengesetzter Richtung von OA abgetragen.

Die Punkte A, B und D bestimmen alsdann einen Kreis, der zum zweiten Male von BO in C geschnitten wird. Zieht man nun die Strecken AC und BD, so findet man in den ähnlichen rechtwinkligen Dreiecken OAC und OBD

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD},$$

und mithin

$$OC = c.$$

Zieht man nunmehr die Strecken AB und CD, so findet man in den ähnlichen rechtwinkligen Dreiecken OAB und OCD

$$\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$$

oder

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d},$$

was zu beweisen war.

4. *Wenn*

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

und

$$\frac{a}{b} = \frac{e}{f},$$

dann ist

$$\frac{c}{d} = \frac{e}{f}.$$

Dieser Satz ist eine unmittelbare Folge des Satzes 3 und des Parallelenaxioms.

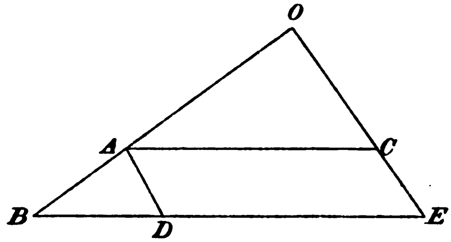
5. (Das distributive Gesetz). *Wenn*

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

dann ist auch

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}.$$

Beweis. OAC und ABD sind zwei ähnliche rechtwinklige Dreiecke: $OA = a$, $OC = c$, $AB = b$; AD muss dann gleich d sein. BD muss parallel zu AC sein. Werden BD und OC bis zum Schnittpunkte E verlängert, so erhält man



$$\frac{OB}{OA} = \frac{OE}{OC}$$

oder

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d},$$

was zu beweisen war.

6. Aus den eben bewiesenen Sätzen entnehmen wir: *Wenn*

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

dann ist

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}.$$

7. *In zwei ähnlichen Dreiecken sind die entsprechenden Seiten proportional.*

Beweis. Die entsprechenden Seiten seien a_1 und a_2, b_1 und b_2, c_1 und c_2. Man halbirt die Winkel der beiden Dreiecke und vom Schnittpunkt der Winkelhalbirenden fällt man Lote auf die Seiten; in jedem Dreiecke erhält man dann auf den Seiten sechs Strecken, die paarweise congruent sind. Diese Strecken seien $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1 - \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$.

$$\alpha_1 + \beta_1 = c_1, \quad \beta_1 + \gamma_1 = a_1, \quad \gamma_1 + \alpha_1 = b_1;$$
$$\alpha_2 + \beta_2 = c_2, \quad \beta_2 + \gamma_2 = a_2, \quad \gamma_2 + \alpha_2 = b_2.$$

Die Lote sind in demselben Dreiecke congruent; sie werden r_1 und r_2 genannt. Aus den vorigen Sätzen entnehmen wir:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} = \frac{\beta_1 + \gamma_1}{\beta_2 + \gamma_2} = \frac{\gamma_1 + \alpha_1}{\gamma_2 + \alpha_2} = \frac{\alpha_1 + \beta_1}{\alpha_2 + \beta_2}$$

oder

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2},$$

was zu beweisen war.

8. (Das associative Gesetz). *Wenn*

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

und

$$\frac{a}{e} = \frac{f}{d},$$

dann ist auch

$$\frac{b}{e} = \frac{f}{c}.$$

Man kann hier voraussetzen: $b > e > f$.

Beweis. Auf die Schenkel eines willkürlichen Winkels O werden die Strecken $OA = a$ und $OB = b$, endlich $OD = d$ in entgegengesetzter Richtung von OA abgetragen. Die Punkte A, B und D bestimmen einen Kreis, der zum zweiten Male von BO in C geschnitten wird; man findet nun in den ähnlichen Dreiecken OBD und OAC

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD},$$

mithin

$$OC = c.$$

Ein Kreisbogen mit O als Mittelpunkt und e als Radius schneidet den Kreis in E (wenn er den Kreis nicht schnitte, würde ein Kreis durch

A, D und einen Punkt E im Abstande e von O zum zweiten Male von EO in F geschnitten werden, indem $OF = f$, wo F ausserhalb des ursprünglichen Kreises liegen würde, was der obengenannten Voraussetzung widerspräche); EO schneidet diesen zum zweiten Male in F. Man findet nunmehr aus den ähnlichen Dreiecken OAF und OED

$$\frac{OA}{OE} = \frac{OF}{OD},$$

mithin

$$OF = f.$$

Endlich findet man aus den ähnlichen Dreiecken OBF und OEC

$$\frac{OB}{OE} = \frac{OF}{OC}$$

oder

$$\frac{b}{e} = \frac{f}{c},$$

was zu beweisen war.

9. In den vorstehenden Sätzen ist die ganze Lehre von den Proportionen, die ohne Hülfe des Archimedischen Axioms begründet ist, enthalten. Der Satz 8 ist der sogenannte „Pascal'sche Satz", den Professor Hilbert seiner Nicht-Archimedischen Geometrie zu Grunde gelegt hat; für diesen Satz habe ich also hier einen neuen Beweis geliefert. Die Aufgabe, die ich mir hier gestellt habe, ist früher in dem tiefsinnigen Werke: Grundlagen der Geometrie, des obengenannten Mathematikers, gelöst; ich habe aber einen anderen Weg eingeschlagen und, wie es mir scheint, das Ziel auf einfachere Weise erreicht.

Herr Professor Hilbert macht mich darauf aufmerksam, dass meine Vereinfachung des Beweises des commutativen Gesetzes auch in seiner Darstellung erreicht wird, wenn er das Streckenproduct ab mittelst eines Kreises definirt. Auf die Schenkel eines rechten Winkels O werden die Strecken $OA = a$ und $OC = 1$, endlich $OB = b$ in entgegengesetzter Richtung von OA abgetragen. Die Punkte A, B und C bestimmen einen Kreis, der zum zweiten Male von CO in D geschnitten wird. OD wird dann dem Streckenproducte ab gleich gesetzt; dieses Product ist dann in den Factoren symmetrisch. Natürlicherweise ist der Beweis des Satzes 7 dem Hilbert'schen ganz analog.

Kopenhagen, Januar 1902.

Fricke, Robert, und **Felix Klein,** Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen. In 2 Bänden. II. Bd. 1. Hälfte. Mit 34 in den Text gedr. Fig. gr. 8. 1901. geh. n. *M.* 10.—

Gaufs, Carl Friedrich, Werke, herausg. v. d. Kgl. Gesellschaft d. Wissenschaften in Göttingen. 10 Bände. VIII. Band. [458 S.] 4. 1900. kart. n. *M.* 24.— (Band VII unter der Presse.)

Gleichen, Dr. A., Oberlehrer am Königl. Kaiser Wilhelms-Realgymnasium zu Berlin, Lehrbuch der geometrischen Optik. Aus Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften mit Einschlufs ihrer Anwendungen. Band VIII. Mit 251 Fig. im Text. [XIV u. 511 S.] gr. 8. 1902. geb. n. *M.* 20.—

Hammer, Dr. E., Sechsstellige Tafel der Werte $^{10}\log \frac{1+x}{1-x}$. Für jeden Wert des Arguments $\log x$ von 3.0—10 bis 9.99000—10 (vom Argument 9.99000—10 an bis 9.999700—10 sind die $\log \frac{1+x}{1-x}$ nur noch fünfstellig angegeben, von dort an vierstellig [IV u. 73 S.] gr. 8. 1902. geb. n. *M.* 3.60.

Klein, F., Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, eine Revision der Principien. Vorlesung, gehalten während des Sommersemesters 1901. Ausgearbeitet von Conrad Müller. [VIII u. 468 S.] gr. 8. 1902. geh. n. *M.* 10.—

Kronecker, L., Vorlesungen über Zahlentheorie. I. Band. Herausgegeben von Kurt Hensel. [XVI u. 509 S.] gr. 8. 1901. geh. n. *M.* 18.—

Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn. Mit Unterstützung der Ungarischen Akademie der Wissenschaften und der Kgl. Ungar. naturwissenschaftlichen Gesellschaft herausgegeben von Roland Baron Eötvös, Julius König, Karl von Than. Redigiert von August Heller. 17. Band. [VII u. 364 S.] gr. 8. geh. *M.* 8.—

Müller, Felix, mathematisches Vokabularium, französisch-deutsch und deutsch-französisch, enthaltend die Kunstausdrücke aus der reinen und angewandten Mathematik. [XIV u. 315 S.] Lex.-8. 1901. In Leinw. geb. n. *M.* 20.—

Netto, E., Vorlesungen über Algebra. 2 Bde. II. Bd. 2. (Schlufs-) Lieferung. [XI u. S. 193—327.] gr. 8. 1900. geh. n. *M.* 10.—

——— Lehrbuch der Kombinatorik. [VIII u. 260 S.] 1902. gr. 8. In Leinwand geb. n. *M.* 9.—

Pascal, Ernst, o. Prof. a. d. Universität zu Pavia, Repertorium der höheren Mathematik (Definitionen, Formeln, Theoreme, Litteratur). Autorisierte deutsche Ausgabe nach einer neuen Bearbeitung des Originals von A. Schepp, Oberleutnant a. D. zu Wiesbaden. In 2 Teilen: Analysis und Geometrie. gr. 8. In Leinwand geb. I Teil: Die Analysis. [XII u. 638 S.] 1900. n. *M.* 10.— II. Teil: Die Geometrie. [X u. 712 S.] 1902. n. *M.* 12.—

Perry, Dr. John, F. R. S., Professor der Mechanik und Mathematik am Royal College of Science zu London, höhere Analysis für Ingenieure. Autorisierte deutsche Bearbeitung von Dr. Robert Fricke, o. Professor an der technischen Hochschule zu Braunschweig, und Fritz Süchting, Oberingenieur am städtischen Elektrizitätswerke zu Minden i. W. Mit 106 in den Text gedruckten Figuren. [X u. 423 S.] gr. 8. 1902. geb. n. *M.* 12.—

Sellenthin, Dr. Bernhard, Oberlehrer der Kaiserlichen Marineschule zu Kiel, mathematischer Leitfaden mit besonderer Berücksichtigung der Navigation. Auf Veranlassung der Kaiserl. Inspektion des Bildungswesens der Marine bearbeitet. Mit 324 Figuren im Text. [XI u. 450 S.] gr. 8. 1902. geb. *M.* 8.40.

INHALT.

Wir ersuchen unsere geehrten Herren Mitarbeiter, etwaige, den Abhandlungen beizufügende Figuren — gleichviel ob dieselben im Texte selbst oder auf besonderen Tafeln veröffentlicht werden sollen — im Interesse einer raschen und exacten Ausführung stets auf besonderen Blättern, wenn möglich in der gewünschten Grösse und in thunlichst präciser Zeichnung dem Manuscripte beilegen zu wollen. Ausserdem wird um möglichst genaue Angabe der Adresse gebeten.

Die Redaction.

☞ **Jeder Band der Annalen besteht aus 4 Heften und umfasst 36—38 Druckbogen. Um jedoch in jedem Heft nur abgeschlossene Artikel zu geben, werden die einzelnen Hefte mitunter von ungleicher Stärke sein.**

Der Preis für den Band von 4 Heften beträgt 20 Mark; jährlich erscheinen etwa 4—6 Hefte. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

Verantwortliche Redaction: **F. Klein**, Göttingen, Wilh.-Weber-Str. 3, **W. v. Dyck**, München, Hildegardstr. 1½, **David Hilbert**, Göttingen, Wilh.-Weber-Str. 29.

Hierzu Beilagen von **H. Welter in Paris** und **B. G. Teubner in Leipzig.**

Druck und Verlag von B. G. Teubner in Leipzig, Poststrasse 3.

MATHEMATISCHE ANNALEN.

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN.

Unter Mitwirkung der Herren

Paul Gordan, Adolph Mayer, Carl Neumann, Max Noether,
Karl VonderMühll, Heinrich Weber

gegenwärtig herausgegeben

von

Felix Klein
in Göttingen

Walther v. Dyck
in München

David Hilbert
in Göttingen.

56. Band. 3. Heft.

Mit 5 Figuren im Text.

Ausgegeben am 13. Oktober.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1902.

[Fortsetzung siehe 3. Umschlagseite.]

Ueber die Grundlagen der Geometrie.

Von

David Hilbert in Göttingen.

Die Untersuchungen von **Riemann** und **Helmholtz** über die Grundlagen der Geometrie veranlassten **Lie** das Problem der axiomatischen Behandlung der Geometrie unter Voranstellung des Gruppenbegriffes in Angriff zu nehmen und führten diesen scharfsinnigen Mathematiker zu einem System von Axiomen, von denen er mittelst seiner Theorie der Transformationsgruppen nachwies, dass sie zum Aufbau der Geometrie hinreichend sind*).

Nun hat **Lie** bei Begründung seiner Theorie der Transformationsgruppen stets die Annahme gemacht, dass die die Gruppe definirenden Functionen differenzirt werden können, und daher bleibt in den **Lie**'schen Entwickelungen unerörtert, ob die Annahme der Differenzirbarkeit bei der Frage nach den Axiomen der Geometrie thatsächlich unvermeidlich ist oder ob die Differenzirbarkeit der betreffenden Functionen nicht vielmehr als eine Folge des Gruppenbegriffs und der übrigen geometrischen Axiome erscheint. Auch ist **Lie** zufolge seines Verfahrens genöthigt, ausdrücklich das Axiom aufzustellen, dass die Gruppe der Bewegungen von infinitesimalen Transformationen erzeugt sei. Diese Forderungen, sowie wesentliche Bestandtheile der übrigen von **Lie** zu Grunde gelegten Axiome bezüglich der Natur der die Punkte in gleicher Entfernung definirenden Gleichung lassen sich rein geometrisch nur auf recht gezwungene und complicirte Weise zum Ausdruck bringen und scheinen überdies nur durch die von **Lie** benutzte analytische Methode, nicht durch das Problem selbst bedingt.

Ich habe daher im Folgenden für die ebene Geometrie ein System von Axiomen aufzustellen gesucht, welches, ebenfalls auf dem Begriff der Gruppe beruhend, nur einfache und geometrisch übersichtliche Forderungen enthält und insbesondere die Differenzirbarkeit der die Bewegung vermittelnden Functionen keineswegs voraussetzt. Die Axiome des von mir

---

*) **Lie-Engel**, Theorie der Transformationsgruppen Bd. 3 Abtheilung 5.

aufgestellten Systems sind als specielle Bestandtheile in den Lie'schen Axiomen enthalten oder, wie ich glaube, aus ihnen sofort ableitbar.

Meine Beweisführung ist völlig von der Methode Lie's verschieden: ich operire vornehmlich mit den von Cantor ausgebildeten Begriffen der Theorie der Punktmengen und benutze den Satz von C. Jordan, wonach jede ebene stetige geschlossene Curve ohne Doppelpunkte die Ebene in ein inneres und ein äusseres Gebiet theilt.

Gewiss sind auch in dem von mir aufgestellten System noch einzelne Bestandtheile entbehrlich; doch habe ich von einer weiteren Untersuchung dieses Umstandes abgesehen aus Rücksicht auf die einfache Fassung der Axiome und vor Allem, weil ich eine verhältnissmässig zu complicirte und geometrisch nicht übersichtliche Beweisführung vermeiden wollte.

Ich behandle im Folgenden die Axiome nur für die Ebene, obwohl ich meine, dass ein analoges Axiomensystem für den Raum aufgestellt werden kann, das den Aufbau der räumlichen Geometrie in analoger Weise ermöglicht*).

Wir schicken eine Erklärung voran.

Erklärung. Wir verstehen unter der *Zahlenebene* die gewöhnliche Ebene mit einem rechtwinkligen Coordinatensystem x, y.

Eine doppelpunktslose und einschliesslich ihrer Endpunkte stetige Curve in dieser Zahlenebene heisse eine *Jordan'sche Curve.* Ist eine Jordan'sche Curve geschlossen, so heisse das Innere des von derselben begrenzten Gebietes der Zahlenebene ein *Jordan'sches Gebiet.*

Der leichteren Darstellung und Fasslichkeit wegen will ich in der vorliegenden Untersuchung die Definition der Ebene enger fassen, als es meine Beweisführung erfordert**), ich will nämlich annehmen, dass es möglich ist, die sämmtlichen Punkte unserer Geometrie zugleich auf die

---

*) Durch die nachfolgende Untersuchung wird zugleich, wie ich glaube, eine allgemeine die Gruppentheorie betreffende Frage, die ich in meinem Vortrag „Mathematische Probleme", Göttinger Nachrichten 1900, S. 17 aufgeworfen habe, für den speciellen Fall der Gruppe der Bewegungen in der Ebene beantwortet.

**) Betreffs der weiteren Fassung des Begriffes der Ebene vergleiche man meine Note über die Grundlagen der Geometrie in den Göttinger Nachrichten 1902. Die daselbst S. 234—235 aufgestellten Forderungen enthalten, wie mir scheint, für den Fall zweier Dimensionen die scharfe Definition des Begriffes, den Riemann und Helmholtz als „mehrfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit" und Lie als „Zahlenmannigfaltigkeit" bezeichneten und ihren gesammten Untersuchungen zu Grunde legten.

Indem wir die obige engere Definition der Ebene annehmen, wird offenbar die elliptische Geometrie von vornherein ausgeschlossen, da sich deren Punkte nicht in einer mit unseren Axiomen verträglichen Weise auf die im Endlichen gelegenen Punkte der Zahlenebene abbilden lassen. Es ist jedoch nicht schwer die Abänderungen zu erkennen, die in unserer Beweisführung nöthig sind, wenn man die weitere Fassung des Begriffes der Ebene zu Grunde legt.

im Endlichen gelegenen Punkte der Zahlenebene oder auf ein bestimmtes Theilsystem derselben umkehrbar eindeutig abzubilden, so dass dann jeder Punkt unserer Geometrie durch ein bestimmtes Zahlenpaar x, y charakterisirt ist. Wir formuliren diese Fassung des Begriffes der Ebene, wie folgt:

Definition der Ebene. Die Ebene ist ein System von Punkten, die sich umkehrbar eindeutig auf die im Endlichen gelegenen Punkte der Zahlenebene oder auf ein gewisses Theilsystem derselben abbilden lassen.

Zu jedem Punkte A unserer Ebene giebt es Jordan'sche Gebiete, in welchen der Bildpunkt von A liegt und deren sämmtliche Punkte ebenfalls Punkte unserer Ebene darstellen. Diese Jordan'schen Gebiete heissen Umgebungen des Punktes A. Jedes in einer Umgebung von A enthaltene Jordan'sche Gebiet, welches den Punkt A einschliesst, ist wiederum eine Umgebung von A. Ist B irgend ein Punkt in einer Umgebung von A, so ist diese Umgebung auch zugleich eine Umgebung von B.

Wenn A und B irgend zwei Punkte unserer Ebene sind, so giebt es stets eine Umgebung, die zugleich eine Umgebung vou A und eine Umgebung von B ist.

Wir werden die Bewegung als eine umkehrbar eindeutige Transformation unserer Ebene in sich definiren. Offenbar lassen sich von vornherein zwei Arten von umkehrbar eindeutigen stetigen Transformationen der Zahlenebene in sich unterscheiden. Nehmen wir nämlich irgend eine geschlossene Jordan'sche Curve in der Zahlenebene an und denken uns dieselbe in einem bestimmten Sinn durchlaufen, so geht dieselbe bei einer solchen Transformation wiederum in eine geschlossene Jordan'sche Curve über, die in einem gewissen Sinne umlaufen wird. Wir wollen nun in der gegenwärtigen Untersuchung annehmen, dass dieser Umlaufssinn derselbe ist, wie für die ursprüngliche Jordan'sche Curve, wenn wir eine Transformation der Zahlenebene in sich anwenden, aus der eine Bewegung hervorgeht. Diese Annahme*) bedingt folgende Fassung des Begriffes der Bewegung:

Definition der Bewegung. Eine Bewegung ist eine umkehrbar eindeutige stetige Transformation der Bildpunkte der Zahlenebene in sich von der Art, dass dabei der Umlaufssinn einer geschlossenen Jordan'schen Curve stets derselbe bleibt.

Eine Bewegung, bei welcher der Punkt M ungeändert bleibt, heisst eine Drehung um den Punkt M.

---

*) Bei Lie ist diese Annahme in der Forderung enthalten, dass die Gruppe der Bewegungen durch infinitesimale Transformationen erzeugt sei. Die entgegengesetzte Annahme würde wesentlich die Beweisführung erleichtern, insofern alsdann die „wahre Gerade" unmittelbar als der Ort derjenigen Punkte definirt werden kann, welche bei einer den Umlaufssinn ändernden Transformation (Umklappung) fest bleiben.

Nach Festlegung des Begriffes „Ebene" und „Bewegung" stellen wir folgende drei Axiome auf:

Axiom I. Werden zwei Bewegungen hintereinander ausgeführt, so ist die dann entstehende Transformation unserer Ebene in sich wiederum eine Bewegung.

Wir sagen kurz:

Axiom I. Die Bewegungen bilden eine Gruppe.

Axiom II. Wenn A und M beliebige von einander verschiedene Punkte der Ebene sind, so kann man den Punkt A durch Drehung um M stets in unendlich viele verschiedene Lagen bringen.

Nennen wir die Gesammtheit derjenigen Punkte, die durch die sämmtlichen Drehungen um M aus einem von M verschiedenen Punkte entstehen, einen *wahren Kreis* in unserer ebenen Geometrie, so können wir die Aussage des Axioms II auch so fassen:

Axiom II. Jeder wahre Kreis besteht aus unendlich vielen Punkten.

Dem letzten Axiom schicken wir eine Erklärung voran.

Erklärung. Es sei A ein bestimmter Punkt in unserer Geometrie und $A_1, A_2, A_3, \cdots$ irgend ein unendliches System von Punkten; mit den nämlichen Buchstaben mögen auch die Bilder dieser Punkte in der Zahlenebene bezeichnet werden. Wir grenzen um den Punkt A in der Zahlenebene eine beliebig kleine Umgebung α ab; wenn dann jedesmal irgend welche Bildpunkte A_i in die Umgebung α fallen, so sagen wir, dass es in beliebiger Nähe des Punktes A Punkte A_i gäbe.

Es sei AB ein bestimmtes Punktepaar in unserer Geometrie und $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, \cdots$ irgend ein unendliches System von Punktepaaren; mit den nämlichen Buchstaben mögen auch die Bilder dieser Punktepaare in der Zahlenebene bezeichnet werden. Wir grenzen um die Punkte A und B in der Zahlenebene je eine beliebig kleine Umgebung α bez. β ab; wenn es dann jedesmal Punktepaare A_iB_i giebt, so dass A_i in die Umgebung α und zugleich B_i in die Umgebung β fällt, so sagen wir, dass es in beliebiger Nähe des Punktepaares AB Punktepaare A_iB_i gäbe.

Es sei ABC ein bestimmtes Punktetripel in unserer Geometrie und $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, A_3B_3C_3, \cdots$ irgend ein unendliches System von Punktetripeln; mit den nämlichen Buchstaben mögen auch die Bilder dieser Punktetripel in der Zahlenebene bezeichnet werden. Wir grenzen um die Punkte A, B, C in der Zahlenebene je eine beliebig kleine Umgebung α bez. β bez. γ ab; wenn es dann jedesmal Punktetripel $A_iB_iC_i$ giebt, so dass A_i in die Umgebung α und zugleich B_i in die Umgebung β

und C_i in die Umgebung γ fällt, so sagen wir, dass es in beliebiger Nähe des Punktetripels ABC Punktetripel $A_i B_i C_i$ gäbe.

Beim Gebrauch der Worte „Punktepaar" und „Punktetripel" wird nicht angenommen, dass die Punkte des Punktepaares oder des Punktetripels von einander verschieden sind.

Axiom III. Wenn es Bewegungen giebt, durch welche Punktetripel in beliebiger Nähe des Punktetripels ABC in beliebige Nähe des Punktetripels $A'B'C'$ übergeführt werden können, so giebt es stets auch eine solche Bewegung, durch welche das Punktetripel ABC genau in das Punktetripel $A'B'C'$ übergeht).*

Die Aussage dieses Axioms wollen wir kurz so ausdrücken:

Axiom III. Die Bewegungen bilden im Endlichen ein abgeschlossenes System.

Wenn wir in Axiom III gewisse Punkte der Punktetripel zusammenfallen lassen, so ergeben sich leicht einige specielle Fälle des Axioms III, die wir noch besonders hervorheben, wie folgt:

Wenn es Drehungen um einen Punkt M giebt, durch welche Punktepaare in beliebiger Nähe des Punktepaares AB in beliebige Nähe des Punktepaares $A'B'$ übergeführt werden können, so giebt es stets auch eine solche Drehung um M, durch welche das Punktepaar AB genau in das Punktepaar $A'B'$ übergeht.

Wenn es Bewegungen giebt, durch welche Punktepaare in beliebiger Nähe des Punktepaares AB in beliebige Nähe des Punktepaares $A'B'$ übergeführt werden können, so giebt es stets auch eine solche Bewegung, durch welche das Punktepaar AB genau in das Punktepaar $A'B'$ übergeht.

Wenn es Drehungen um den Punkt M giebt, durch welche Punkte in beliebiger Nähe des Punktes A in beliebige Nähe von A' übergeführt werden können, so giebt es stets auch eine solche Drehung um M, durch welche A genau in A' übergeht.

Diesen letzten Specialfall des Axioms III werde ich bei der nachfolgenden Beweisführung oftmals in der Weise anwenden, dass für A der Punkt M eintritt**).

Ich beweise nun folgende Behauptung:

Eine ebene Geometrie, in welcher die Axiome I—III erfüllt

*) Es genügt Axiom III für genügend kleine Umgebungen als erfüllt anzunehmen, wie es ähnlich auch bei Lie geschieht; meine Beweisführung lässt sich so abändern, dass nur diese engere Annahme darin benutzt wird.

**) Eine Folgerung, die ich im mündlichen Vortrage in der Festsitzung zur Jubelfeier der Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1901 als besonderes Axiom aufgeführt habe, ist diese: „Irgend zwei Punkte können durch Bewegung niemals in beliebige Nähe zu einander gerathen". Es wäre zu untersuchen, mit welchen Forderungen zusammen diese Forderung das oben aufgestellte Axiom III zu ersetzen im Stande ist.

sind, ist entweder die Euklidische oder die Bolyai-Lobatschefsky'sche ebene Geometrie.

Wollen wir allein die Euklidische Geometrie erhalten, so haben wir nur nöthig, bei Axiom I den Zusatz zu machen, dass die Gruppe der Bewegungen eine invariante Untergruppe besitzen soll. Dieser Zusatz vertritt die Stelle des Parallelenaxioms.

Den Gedankengang meiner Beweisführung möchte ich kurz wie folgt skizziren:

In der Umgebung irgend eines Punktes M wird durch ein besonderes Verfahren ein gewisses Punktgebilde kk und auf diesem ein gewisser Punkt K construirt (§ 1—§ 2) und dann der wahre Kreis $\varkappa$ durch K um M der Untersuchung unterworfen. Es ergiebt sich, dass der wahre Kreis $\varkappa$ eine abgeschlossene und in sich dichte, d. h. eine perfecte Punktmenge ist (§ 3).

Das nächste Ziel unserer Entwickelungen besteht darin, zu zeigen, dass der wahre Kreis $\varkappa$ eine geschlossene Jordan'sche Curve ist*). Dies gelingt, indem wir zunächst die Möglichkeit einer Anordnung der Punkte des wahren Kreises $\varkappa$ erkennen (§ 4—§ 5), hieraus eine umkehrbar eindeutige Abbildung der Punkte von $\varkappa$ auf die Punkte eines gewöhnlichen Kreises schliessen (§ 6—§ 7) und endlich beweisen, dass diese Abbildung nothwendig eine stetige sein muss (§ 8). Nunmehr ergiebt sich auch, dass das ursprünglich construirte Punktgebilde kk mit dem wahren Kreise $\varkappa$ identisch ist (§ 9). Weiter gilt der Satz, dass jeder wahre Kreis innerhalb $\varkappa$ ebenfalls eine geschlossene Jordan'sche Curve ist (§ 10—12).

Wir wenden uns nun zur Untersuchung der Gruppe der Transformationen, die bei den Drehungen der Ebene um M ein bestimmter wahrer Kreis $\varkappa$ in sich erfährt (§ 13). Diese Gruppe besitzt folgende Eigenschaften: 1) Jede Drehung um M, die einen Punkt von $\varkappa$ festlässt, lässt alle Punkte desselben fest (§ 14). 2) Es giebt stets eine Drehung um M, die irgend einen gegebenen Punkt von $\varkappa$ in irgend einen anderen Punkt von $\varkappa$ überführt (§ 15). 3) Die Gruppe der Drehungen um M ist eine stetige (§ 16). Diese drei Eigenschaften bestimmen vollständig den Bau der Gruppe der Transformationen aller Drehungen des wahren Kreises in sich. Wir stellen nämlich den folgenden Satz auf: Die Gruppe aller Transformationen des wahren Kreises in sich, die Drehungen um M sind, ist holoedrisch isomorph mit der Gruppe der gewöhnlichen Drehungen des gewöhnlichen Kreises in sich (§ 17—§ 18).

*) Vgl. hierzu die ein ähnliches Ziel verfolgende interessante Note von A. Schönflies: „Ueber einen grundlegenden Satz der Analysis Situs" Göttinger Nachrichten. 1902.

Nunmehr untersuchen wir die Gruppe der Bewegungen *aller* Punkte unserer Ebene bei Drehungen um M. Es gilt der Satz, dass es ausser der Identität keine Drehung der Ebene um M giebt, welche jeden Punkt des wahren Kreises $\varkappa$ festlässt (§ 19). Wir erkennen jetzt, dass *jeder* wahre Kreis eine geschlossene Jordan'sche Curve ist, und gewinnen Formeln für die Transformationen jener Gruppe aller Drehungen um M (§ 20—§ 21). Endlich folgen leicht die Sätze: Wenn irgend zwei Punkte bei einer Bewegung der Ebene festbleiben, so bleiben alle Punkte fest, d. h. die Bewegung ist die Identität. Jeder Punkt der Ebene lässt sich durch eine geeignete Bewegung in jeden anderen Punkt der Ebene überführen (§ 22).

Unser wichtigstes weiteres Ziel besteht darin, den Begriff der wahren Geraden in unserer Geometrie zu definiren und die für den Aufbau der Geometrie nothwendigen Eigenschaften dieses Begriffes zu entwickeln. Zunächst werden die Begriffe Halbdrehung und Mitte einer Strecke definirt (§ 23). Eine Strecke hat höchstens eine Mitte (§ 24) und wenn man von einer Strecke ihre Mitte kennt, so folgt, dass auch jede kleinere Strecke eine Mitte besitzt (§ 25—26).

Um die Lage der Streckenmitten zu beurtheilen, haben wir einige Sätze über sich berührende wahre Kreise nöthig, und zwar kommt es vor Allem darauf an, zwei zu einander congruente Kreise zu construiren, die sich einander von aussen in einem und nur in einem Punkte berühren (§ 27). Wir leiten ferner einen allgemeinen Satz über Kreise, die sich von Innen berühren, ab (§ 28) und sodann einen Satz über den besonderen Fall, dass der von Innen berührende Kreis durch den Mittelpunkt des berührten Kreises geht (§ 29).

Nunmehr wird eine bestimmte genügend kleine Strecke als Einheitsstrecke zu Grunde gelegt und aus dieser durch fortgesetzte Halbirung und Halbdrehung ein System von Punkten von der Art construirt, dass jedem Punkte dieses Systems eine bestimmte Zahl a zugeordnet erscheint, die rational ist und nur eine Potenz von 2 als Nenner hat (§ 30). Nach Aufstellung eines Gesetzes über diese Zuordnung (§ 31) werden die Punkte des gewonnenen Punktsystems untereinander angeordnet, wobei die früheren Sätze über sich berührende Kreise zur Geltung kommen (§ 32). Jetzt gelingt der Nachweis, dass die den Zahlen $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots$ entsprechenden Punkte gegen den Punkt 0 convergiren (§ 33). Dieser Satz wird schrittweise verallgemeinert, bis wir schliesslich erkennen, dass eine jede Punktreihe unseres Systems convergirt, sobald die entsprechende Zahlenreihe convergirt (§ 34—35).

Nach diesen Vorbereitungen gelingt die Definition der wahren Geraden als eines Systems von Punkten, die aus zwei zu Grunde gelegten Punkten entstehen, wenn man fortgesetzt Halbdrehungen ausführt, die

Mitten nimmt und die Häufungsstellen aller erhaltenen Punkte hinzufügt (§ 36). Sodann können wir beweisen, dass die wahre Gerade eine stetige Curve ist (§ 37), keinen Doppelpunkt besitzt (§ 38) und mit irgend einer anderen wahren Geraden höchstens einen Punkt gemein hat (§ 39). Es ergiebt sich ferner, dass die wahre Gerade jeden um einen ihrer Punkte gelegten Kreis schneidet, und hieraus folgt, dass man irgend zwei beliebige Punkte der Ebene stets durch eine wahre Gerade verbinden kann (§ 40). Auch erkennen wir in unserer Geometrie die Congruenzsätze als gültig, wobei sich jedoch zwei Dreiecke nur dann als congruent erweisen, wenn für sie auch der Umlaufssinn der gleiche ist (§ 41).

Hinsichtlich der Lage des Systems aller wahren Geraden gegen einander sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem das Parallelenaxiom gültig ist oder durch jeden Punkt zu einer gegebenen Geraden zwei Gerade existiren, die die schneidenden Geraden von den nicht schneidenden Geraden abgrenzen. Im ersteren Falle gelangen wir zur Euklidischen, im letzteren zur Bolyai-Lobatschefsky'schen Geometrie (§ 42).

---

§ 1.

Es sei M irgend ein Punkt in unserer Geometrie und zugleich der Bildpunkt in der Zahlenebene x, y. Unser nächstes Ziel ist dann, um M gewisse Punktgebilde zu construiren, die sich schliesslich als die wahren Kreise um M herausstellen werden.

Wir schlagen in der Zahlenebene um M einen „Zahlenkreis" d. h. einen Kreis $\mathfrak{K}$ im Sinne der gewöhnlichen Maassbestimmung, so klein dass sämmtliche Punkte innerhalb und auf diesem Kreise $\mathfrak{K}$ ebenfalls Bildpunkte sind. Dann giebt es gewiss einen zu $\mathfrak{K}$ concentrischen Kreis $\mathfrak{k}$ innerhalb $\mathfrak{K}$ von der Art, dass sämmtliche Punkte innerhalb dieses Kreises $\mathfrak{k}$ bei beliebigen Drehungen um M innerhalb des Kreises $\mathfrak{K}$ bleiben.

Um dies zu beweisen, betrachten wir in der Zahlenebene eine unendliche Reihe von concentrischen Zahlenkreisen $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2, \mathfrak{k}_3, \ldots$ mit abnehmenden und gegen 0 convergirenden Radien und nehmen dann im Gegensatz zur Behauptung in jedem dieser Kreise einen Punkt von der Art an, dass derselbe bei einer gewissen Drehung um M an eine ausserhalb des Kreises $\mathfrak{K}$ gelegene Stelle kommt oder auf die Peripherie des Kreises $\mathfrak{K}$ rückt: es sei A_i ein solcher im Kreise $\mathfrak{k}_i$ gelegener Punkt, der bei der Drehung Δ_i in eine ausserhalb des Kreises $\mathfrak{K}$ oder auf demselben gelegene Stelle übergeht. Wir denken uns dann von M nach jedem Punkte A_i den Radius r_i des betreffenden Kreises $\mathfrak{k}_i$ gezogen und fassen die Curve γ_i ins Auge, in welche der Radius r_i bei der Drehung Δ_i übergeht. Da diese Curve γ_i vom Punkte M nach einer gewissen Stelle ausserhalb oder auf dem

Kreise $\mathfrak{K}$ läuft, so muss sie nothwendig die Peripherie des Kreises $\mathfrak{K}$ treffen; es sei B_i einer dieser Treffpunkte und B eine Verdichtungsstelle der Treffpunkte $B_1, B_2, B_3, \cdots$. Nun sei allgemein C_i derjenige Punkt auf dem Radius r_i, der bei der Drehung Δ_i in B_i übergeht. Da die Punkte $C_1, C_2, C_3, \cdots$ gegen M convergiren, so giebt es nach Axiom III eine Drehung um M, bei welcher der auf der Peripherie des Kreises $\mathfrak{K}$ gelegene Punkt B in den Punkt M übergeht. Dies widerspricht dem vorhin definirten Begriff der Bewegung.

§ 2.

Wie bereits in § 1 festgesetzt, sei $\mathfrak{k}$ ein Zahlenkreis innerhalb $\mathfrak{K}$, der die Bedingungen des in § 1 bewiesenen Satzes erfüllt, so dass sämmtliche Punkte innerhalb $\mathfrak{k}$ bei den Drehungen um M innerhalb $\mathfrak{K}$ bleiben; ferner sei k ein Zahlenkreis innerhalb $\mathfrak{k}$, dessen sämmtliche Punkte bei den Drehungen um M innerhalb $\mathfrak{k}$ bleiben. Dann bezeichnen wir kurz diejenigen Punkte der Zahlenebene, die bei irgend einer Drehung um M aus Punkten innerhalb oder auf k entstehen, als *bedeckt* und diejenigen Punkte, die bei keiner Drehung um M aus Punkten innerhalb oder auf k entstehen, als *unbedeckt*. Aus Axiom III folgt sofort, dass die bedeckten Punkte eine abgeschlossene Punktmenge bilden. Ferner sei A ein bestimmter Punkt ausserhalb $\mathfrak{K}$, welcher Bildpunkt für einen Punkt unserer Geometrie ist. Wenn sich nun ein unbedeckter Punkt A' durch eine Jordan'sche Curve, die aus lauter unbedeckten Punkten besteht, mit A verbinden lässt, so heisse A' *ausserhalb* kk gelegen. Insbesondere sind alle Punkte ausserhalb des Zahlenkreises $\mathfrak{k}$ gewiss ausserhalb kk gelegene Punkte. Jeder bedeckte Punkt, in dessen beliebiger Nähe sich Punkte ausserhalb kk befinden, heisse ein Punkt *auf* kk. Die Punkte auf kk bilden eine abgeschlossene Punktmenge. Diejenigen Punkte J, die weder Punkte ausserhalb kk noch Punkte auf kk sind, sollen Punkte *innerhalb* kk heissen. Insbesondere sind also alle bedeckten Punkte, zu welchen nicht in beliebiger Nähe unbedeckte Punkte liegen, wie z. B. der Punkt M und die Punkte innerhalb k, sicher innerhalb kk gelegen.

§ 3.

Mit wesentlicher Hilfe unserer Definition der Bewegung, der zufolge die Drehung eine umkehrbare stetige Transformation ist, und indem wir bedenken, dass desshalb A bei den Drehungen um M niemals in das Innere von $\mathfrak{k}$ hineingelangt, erkennen wir, dass bei einer jeden Drehung um M die Punkte ausserhalb kk wieder in Punkte ausserhalb kk, ferner die Punkte auf kk wieder in Punkte auf kk und die Punkte innerhalb kk wiederum in Punkte innerhalb kk übergehen.

Jeder Punkt auf kk ist nach unserer Festsetzung ein bedeckter Punkt, und da wir wissen, dass die Punkte innerhalb k auch innerhalb kk liegen, so schliessen wir hieraus folgende Thatsache:

Zu jedem Punkte K auf kk giebt es gewiss eine Drehung Δ um M, durch welche ein auf der Peripherie von k gelegener Punkt K' nach K

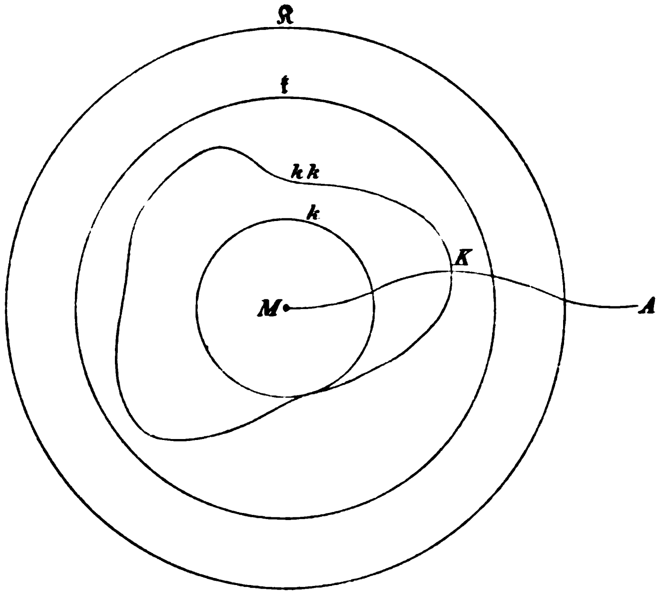


Fig. 1.

gelangt. Der Radius MK' des Zahlenkreises k liefert nach der Drehung Δ um M eine Jordan'sche Curve, welche M mit dem Punkte K auf kk verbindet und die sonst ganz innerhalb kk verläuft.

Zugleich sehen wir, dass mindestens ein Punkt der Peripherie des Zahlenkreises k, nämlich gewiss der Punkt K', auf kk liegt.

Wir verbinden den ausserhalb kk gelegenen Punkt A durch irgend eine Jordan'sche Curve mit M und bezeichnen jetzt mit K denjenigen Punkt dieser Jordan'schen Curve, der auf kk liegt und von der Art ist, dass alle auf der Jordan'schen Curve zwischen K und A gelegenen Punkte ausserhalb kk liegen. Sodann fassen wir das System aller aus K durch Drehungen um M hervorgehenden Punkte, d. h. den wahren Kreis $\varkappa$ um M durch K ins Auge. Die Punkte dieses wahren Kreises sind sämmtlich Punkte auf kk.

Nach Axiom II enthält $\varkappa$ unendlich viele Punkte. Ist K^* eine Verdichtungsstelle von Punkten des wahren Kreises $\varkappa$, so gehört diese wegen Axiom III ebenfalls zum wahren Kreise $\varkappa$. Bezeichnet K_1 irgend einen Punkt des wahren Kreises $\varkappa$, so folgt, wenn wir diejenige Drehung um M

ausführen, welche K^* in K_1 überführt, dass auch K_1 eine Verdichtungsstelle von Punkten des wahren Kreises $\varkappa$ ist. Wir erhalten somit den Satz:

Der wahre Kreis $\varkappa$ ist eine abgeschlossene und in sich dichte d. h. eine perfecte Punktmenge.

§ 4.

Das wichtigste Ziel der nächstfolgenden Entwickelungen besteht darin, zu zeigen, dass der wahre Kreis $\varkappa$ eine geschlossene Jordan'sche Curve ist. Es wird sich ferner herausstellen, dass der wahre Kreis $\varkappa$ mit den Punkten auf kk übereinstimmt.

Zunächst beweisen wir, *dass irgend zwei Punkte K_1, K_2 des wahren Kreises $\varkappa$ sich stets untereinander sowohl durch eine Jordan'sche Curve verbinden lassen, die abgesehen von den Endpunkten ganz innerhalb kk verläuft, als durch eine solche Jordan'sche Curve, die abgesehen von den Endpunkten ganz ausserhalb kk verläuft.*

In der That, ziehn wir entsprechend den obigen Ausführungen die Jordan'schen Curven MK_1 und MK_2, welche innerhalb kk den Mittelpunkt M mit K_1 bezüglich K_2 verbinden, und bestimmen auf der Curve MK_1 von M ausgehend den letzten auf MK_2 gelegenen Punkt P, so bildet das Stück PK_1 der ersteren Jordan'schen Curve zusammen mit dem Stück PK_2 der letzteren Jordan'schen Curve eine Verbindungscurve von der zuerst verlangten Art.

Andererseits fassen wir die Drehungen um M ins Auge, bei denen K in K_1 bezüglich in K_2 übergeht; die Punkte A_1 bez. A_2, die dabei aus A entstehen, sind nach § 3 Punkte ausserhalb kk und lassen sich daher ausserhalb kk mit A verbinden. Aus diesen Verbindungscurven und denjenigen Jordan'schen Curven, die bei jenen Drehungen aus der in § 3 construirten Jordan'schen Curve AK entstehen, können wir leicht eine Jordan'sche Curve zwischen K_1 und K_2 zusammensetzen, die ganz ausserhalb kk verläuft.

§ 5.

Der eben gefundene Satz setzt uns in den Stand, die Punkte des wahren Kreises in bestimmter Weise anzuordnen.

Es seien K_1, K_2, K_3, K_4 irgend vier verschiedene Punkte des wahren Kreises $\varkappa$. Wir verbinden die Punkte $K_1 K_2$ einerseits durch eine Jordan'sche Curve, die ganz innerhalb kk verläuft, und andrerseits durch eine solche, die ganz ausserhalb kk verläuft. Da diese beiden Verbindungscurven einschliesslich ihrer Endpunkte K_1, K_2 stetig sind, so bilden sie zusammen eine geschlossene Jordan'sche Curve. Eine in dieser Weise aus K_1, K_2 hergestellte Curve wollen wir stets mit $\overline{K_1 K_2}$ bezeichnen. Die ganze Zahlenebene zerfällt dann, abgesehen von $\overline{K_1 K_2}$ selbst, nach dem bekannten Jordan'schen Satze in zwei Gebiete, nämlich das Innere und das Aeussere dieser

Curve $\overline{K_1K_2}$. Betreffs der Lage der Punkte K_3, K_4 sind nun zwei Fälle möglich: erstens die Punkte K_3, K_4 werden durch die Curve $\overline{K_1K_2}$ nicht getrennt, d. h. sie liegen beide innerhalb oder beide ausserhalb derselben; zweitens die Punkte K_3, K_4 werden durch die Curve $\overline{K_1K_2}$ getrennt, d. h. es liegt K_3 innerhalb und K_4 ausserhalb der Curve $\overline{K_1K_2}$ oder umgekehrt.

Verbinden wir die Punkte K_1, K_2 irgend wie anders durch einen innerhalb kk und einen ausserhalb kk verlaufenden Weg, so erkennen wir leicht, dass hinsichtlich der Lage der Punkte K_3, K_4 zu der neu entstehenden geschlossenen Jordan'schen Curve $\overline{\overline{K_1K_2}}$ gewiss derselbe Fall eintritt, wie vorhin. In der That, liegt beispielsweise der erste Fall vor, und befinden sich K_3, K_4 beide im Innern von $\overline{\overline{K_1K_2}}$, so verbinde man K_3 und K_4 durch einen innerhalb kk verlaufenden Weg W. Sollte derselbe aus dem Inneren der geschlossenen Curve $\overline{\overline{K_1K_2}}$ heraustreten, so müsste er im weiteren Verlauf doch schliesslich wieder in dieses Innere zurückführen; es ist daher gewiss möglich den ausserhalb $\overline{K_1K_2}$ verlaufenden Theil dieses Weges W durch ein nahe an dem betreffenden Stücke von $\overline{K_1K_2}$ verlaufenden Weg zu ersetzen, welcher ganz innerhalb kk und zugleich innerhalb $\overline{\overline{K_1K_2}}$ verläuft, so dass dadurch ein Verbindungsweg W^* zwischen K_3 und K_4 entsteht, welcher ebenfalls ganz innerhalb kk und innerhalb $\overline{\overline{K_1K_2}}$ verläuft. Setzen wir aus dem innerhalb kk liegenden Theil der Curve $\overline{K_1K_2}$ und dem ausserhalb kk liegenden Theil der Curve $\overline{\overline{K_1K_2}}$ eine neue geschlossene Jordan'sche Curve $\overline{\overline{\overline{K_1K_2}}}$ zusammen, so ist W^* offenbar ein Weg, welcher K_3 und K_4 innerhalb dieser neuen Curve verbindet, ohne die Curve $\overline{\overline{\overline{K_1K_2}}}$ zu durchsetzen, d. h. K_3 und K_4 werden durch $\overline{\overline{\overline{K_1K_2}}}$ gewiss nicht getrennt. Hieraus folgt nach entsprechender Construction ausserhalb kk, dass K_3 und K_4 auch durch die Curve $\overline{\overline{K_1K_2}}$ nicht getrennt werden. Wir dürfen daher im ersten Falle schlechthin sagen: das Punktepaar K_3, K_4 wird durch das Punktepaar K_1, K_2 nicht getrennt. Dann aber folgt auch im zweiten Falle, dass wir schlechthin sagen dürfen: das Punktepaar K_3, K_4 wird durch das Punktepaar K_1, K_2 getrennt.

Wir führen nun irgend eine Drehung um M aus, durch welche die Punkte K_1, K_2, K_3, K_4 in K_1', K_2', K_3', K_4' übergehen. Bedenken wir, dass die Drehung nach der Definition eine stetige und eindeutige umkehrbare Transformation der Zahlenebene ist und die Punkte innerhalb kk in Punkte innerhalb kk, die Punkte ausserhalb kk in Punkte ausserhalb kk überführt, so folgt, dass die Punktepaare K_1', K_2' und K_3', K_4' von einander getrennt oder nicht getrennt liegen, je nachdem die Punktepaare K_1, K_2 und K_3, K_4 sich einander trennen oder nicht, d. h. *die gegenseitige Lage der Punkte-*

paare K_1, K_2 *und* K_3, K_4 *bleibt bei einer beliebigen Drehung um* M *unverändert.*

Wir leiten in ähnlicher Weise auch die Sätze ab, die den übrigen bekannten Thatsachen hinsichtlich der gegenseitigen Lage der Punktepaare auf der Peripherie eines gewöhnlichen Zahlenkreises entsprechen, nämlich die Sätze:

Wenn K_1, K_2 *durch* K_3, K_4 *getrennt werden, so werden auch* K_3, K_4 *durch* K_1, K_2 *getrennt. Wenn* K_1, K_4 *durch* K_2, K_5 *und* K_2, K_4 *durch* K_3, K_5 *getrennt werden, so wird auch* K_1, K_4 *durch* K_3, K_5 *getrennt.*

Dadurch sind wir zu dem folgenden Ergebniss gelangt:

Die Punkte des wahren Kreises $\varkappa$ *sind cyklisch, d. h. mit Rücksicht auf die gegenseitige Trennung von Punktepaaren wie die Punkte eines gewöhnlichen Zahlenkreises angeordnet. Diese Anordnung ist gegenüber den Drehungen um den Mittelpunkt* M *des wahren Kreises* $\varkappa$ *invariant.*

§ 6.

Eine weitere wichtige Eigenschaft des wahren Kreises $\varkappa$ sprechen wir wie folgt aus:

Zu irgend einem Punktepaar des wahren Kreises $\varkappa$ *giebt es stets ein Punktepaar dieses Kreises* $\varkappa$, *welches jenes Punktepaar trennt.*

Wir bezeichnen mit K_∞ einen bestimmt gewählten Punkt des wahren Kreises $\varkappa$ und wollen dann von irgend drei anderen Punkten K_1, K_2, K_3 des wahren Kreises $\varkappa$ sagen, es liege K_2 zwischen K_1 und K_3 bez. nicht zwischen K_1 und K_3, je nachdem das Punktepaar K_1, K_3 durch das Punktepaar K_2, K_∞ getrennt oder nicht getrennt wird.

Wir nehmen im Gegensatz zu der obigen Behauptung an, es seien K und K' zwei Punkte des wahren Kreises $\varkappa$, die durch kein Punktepaar getrennt werden; dann folgt nach unserer Festsetzung gewiss auch, dass zwischen denselben kein Punkt von $\varkappa$ liegt. Ferner dürfen wir annehmen, es gäbe einen Punkt K_1 von der Art, dass das Punktepaar K_1, K' durch das Punktepaar K, K_∞ getrennt wird; anderenfalls nämlich denken wir uns in der folgenden Entwickelung die Rollen der Punkte K und K' mit einander vertauscht. Sodann wählen wir eine unendliche Reihe R von Punkten des wahren Kreises $\varkappa$, die gegen den Punkt K convergiren, und verbinden K_1 mit K' sowohl durch eine innerhalb kk verlaufende Curve, wie durch eine ausserhalb kk verlaufende Curve. Durch Zusammensetzung dieser beiden Curven erhalten wir eine geschlossene Jordan'sche Curve $\overline{K_1 K'}$, welche K_∞ von K trennt und daher nothwendig auch von unendlich vielen Punkten der gegen K convergenten Punktreihe R trennen muss. Es sei K_2 einer dieser Punkte der Reihe R. Da K_2 zwischen K_1 und K' liegt und nicht zwischen K und K' liegen darf, so liegt K_2 nothwendig zwischen K_1 und K. Nunmehr verbinden wir analog K_2 mit K' durch eine geschlossene Jordan'sche Curve $\overline{K_2 K'}$ und gelangen ebenso zu einem Punkte K_3 der Reihe R, der zwischen K_2 und K liegt u. s. f. Auf diese Weise erhalten wir *eine unendliche Reihe von Punkten* $K_1, K_2, K_3, \cdots$ *von denen jeder Punkt zwischen dem vorangehenden und* K *gelegen ist, und die gegen den Punkt* K *convergiren.*

Wir führen jetzt eine Drehung um M aus, bei welcher K in einen der Punkte $K_1, K_2, K_3, \cdots$, etwa in K_i übergeht; Der Punkt K' gehe bei dieser Drehung in den Punkt K_i' über. Da unserer Annahme zufolge K und K' durch kein Punktepaar getrennt werden, so ist das gleiche mit dem Punktepaar K_i, K_i' der Fall. Infolgedessen muss K_i' entweder mit K_{i-1} oder mit K_{i+1} zusammenfallen oder zwischen K_{i-1} und K_{i+1} liegen; in jedem Falle liegt also K_i' zwischen K_{i-2} und K_{i+2}, so dass auch die unendliche Reihe von Punkten $K_1, K_3', K_5, K_7', K_9, K_{11}', \cdots$ gewiss von der Beschaffenheit ist, dass jeder Punkt dieser Reihe zwischen dem vorangehenden Punkte und dem Punkte K gelegen ist.

Wir wollen nun zeigen, dass auch die Punkte $K_3', K_7', K_{11}', \cdots$ gegen den Punkt K convergiren müssen. In der That, würden die Punkte $K_3', K_7', K_{11}', \cdots$ einen von K verschiedenen Punkt Q zur Verdichtungsstelle haben, so wähle man aus ihnen einen Punkt K_l' aus. Da $K_{l+4}', K_{l+8}', K_{l+12}', \cdots$ sämmtlich zwischen K_l' und K liegen, so giebt es eine geschlossene Jordan'sche Curve $\overline{K_l' K}$, die den Punkt K_∞ von den Punkten $K_{l+4}', K_{l+8}', K_{l+12}', \cdots$ und daher auch von Q trennt, d. h. Q liegt nothwendig zwischen K_l' und K. Wegen der Anordnung der Punkte K_i zu den Punkten K_i' folgt hieraus, dass Q auch zwischen den sämmtlichen Punkten $K_1, K_5, K_9, \cdots$ einerseits und K andrerseits liegt. Die geschlossene Jordan'sche Curve $\overline{QK_\infty}$ müsste mithin sämmtliche Punkte $K_1, K_5, K_9, \cdots$ von K trennen; dann könnten aber die Punkte $K_1, K_5, K_9, \cdots$ nicht gegen K convergiren, wie es sein sollte.

Nunmehr betrachten wir die gegen K convergirenden Punkte K_3, $K_7, K_{11}, \cdots$ und die Punkte $K_3', K_7', K_{11}', \cdots$, die nach dem eben Bewiesenen ebenfalls gegen K convergiren. Da mittelst einer Drehung um M der Punkt K in K_i und zugleich K' in K_i' übergeht, so müsste es nach Axiom III auch eine Drehung geben, welche K und zugleich K' in die gemeinsame Convergenzstelle K überführt. Dies ist aber ein Widerspruch gegen die Definition der Drehung. Somit ist durch Widerlegung unserer Annahme der zu Anfang dieses § 6 aufgestellte Satz vollständig bewiesen.

§ 7.

Mit Rücksicht auf die Festsetzungen zu Beginn des § 6 fassen wir den wahren Kreis $\varkappa$ unter Ausschluss des Punktes K_∞ als eine geordnete

Punktmenge im Sinne Cantor's auf: *dann besitzt diese Punktmenge den Ordnungstypus des Linearcontinuums.*

Zum Beweise hierfür benutzen wir wesentlich die Schlussweisen, die Cantor in seinen „Beiträgen zur Begründung der transfiniten Mengenlehre"*) entwickelt hat. Zunächst bestimmen wir eine abzählbare Menge S von Punkten des wahren Kreises $\varkappa$, deren Verdichtungsstellen den wahren Kreis $\varkappa$ selbst ausmachen. Eine solche Menge S besitzt nach Cantor den Ordnungstypus des Systems aller rationalen Zahlen in ihrer natürlichen Rangordnung**) d. h. es ist möglich, den Punkten des Systems S derart die rationalen Zahlen zuzuordnen, dass wenn A, B, C irgend drei Punkte in S sind, von denen B zwischen A und C liegt, von den drei zugeordneten rationalen Zahlen bez. a, b, c allemal die Zahl b ihrem Werthe nach zwischen a und c liegt.

Es sei nun K irgend ein Punkt des wahren Kreises $\varkappa$, welcher nicht dem System S angehört; sind dann A, B Punkte von S, so nennen wir A, B auf verschiedenen Seiten oder auf derselben Seite von K gelegen, je nachdem K zwischen A und B oder nicht zwischen A und B liegt. Uebertragen wir diese Festsetzung von den Punkten des Systems S auf die denselben zugeordneten rationalen Zahlen, so erhalten wir unter Vermittlung des Punktes K einen bestimmten Schnitt im Sinne Dedekind's durch das System der rationalen Zahlen: wir ordnen dem Punkte K die durch diesen Schnitt definirte irrationale Zahl zu.

Es kann nicht zwei verschiedene Punkte K und K' auf $\varkappa$ geben, denen die gleiche irrationale Zahl zugeordnet erscheint. In der That, construiren wir eine geschlossene Jordan'sche Curve $\overline{KK'}$ und sei H irgend ein zwischen K und K' und folglich innerhalb $\overline{KK'}$ gelegener Punkt von $\varkappa$, so muss es, da H eine Verdichtungsstelle von Punkten des Systems S ist, gewiss auch einen Punkt A in S geben, der innerhalb $\overline{KK'}$ und daher auch zwischen K und K' liegt. Die zu A gehörige rationale Zahl a bedingt daher jedenfalls eine Verschiedenheit der Schnitte, die unter Vermittelung der Punkte K und K' entstanden sind.

Wir wollen endlich zeigen, dass es auch umgekehrt zu jeder irrationalen Zahl α einen Punkt K auf $\varkappa$ giebt, dem diese zugeordnet erscheint. Zu dem Zwecke sei $a_1, a_2, \cdots$ eine Reihe zunehmender und $b_1, b_2, b_3, \cdots$ eine Reihe abnehmender Zahlen, deren jede gegen α convergirt. Man construire die diesen Zahlen zugehörigen Punkte $A_1, A_2, A_3, \cdots$ bez. $B_1, B_2, B_3, \cdots$ und bezeichne mit K irgend eine Verdichtungsstelle dieser Punkte $A_1, A_2, A_3, \cdots, B_1, B_2, B_3, \cdots$. Der Punkt K gehört dann nothwendig

*) Diese Annalen Bd. 46, vgl. insbesondere § 11.

**) Cantor l. c. § 9.

der Zahl α zu. Denn wenn wir allgemein eine geschlossene Jordan'sche Curve $\overline{A_i B_i}$ construiren, so liegen die Punkte $A_{i+1}, A_{i+2}, A_{i+3}, \cdots$, $B_{i+1}, B_{i+2}, B_{i+3}, \cdots$ und folglich auch der Verdichtungspunkt K innerhalb $\overline{A_i B_i}$ d. h. zwischen den Punkten A_i, B_i. Der unter Vermittlung von K entstehende Schnitt ist mithin kein anderer als derjenige, der die Zahl α bestimmt.

Betrachten wir nun die Punkte auf der Peripherie eines gewöhnlichen Zahlenkreises mit dem Radius 1 und ordnen einem dieser Punkte das Zeichen $\pm\infty$ und den Punkt K_∞ zu, den übrigen Punkten dagegen in stetiger Folge die sämmtlichen reellen Zahlen und diesen wiederum die entsprechenden Punkte des wahren Kreises $\varkappa$, so gelangen wir zu folgendem Resultat: *Die Punkte des wahren Kreises $\varkappa$ lassen sich unter Erhaltung ihrer Anordnung umkehrbar eindeutig auf die Punkte der Peripherie eines gewöhnlichen Zahlenkreises mit dem Radius* 1 *abbilden.*

§ 8.

Um das in § 4 bezeichnete Ziel zu erreichen, bleibt nur noch die Stetigkeit der gewonnenen Abbildung d. h. die Lückenlosigkeit des wahren Kreises $\varkappa$ zu zeigen übrig. Zu dem Zwecke denken wir uns die Punkte des wahren Kreises $\varkappa$ durch die Coordinaten x, y der Zahlenebene und andererseits die Punkte des Zahlenkreises mit dem Radius 1 durch den Bogen t von einem bestimmten Anfangspunkte an bestimmt: dann haben wir zu beweisen, dass x, y stetige Functionen von t sind.

Es seien nun $t_1, t_2, t_3, \cdots$ irgend eine Reihe gegen t convergirender entweder sämmtlich wachsender oder sämmtlich abnehmender Werthe und $K_1, K_2, K_3, \cdots$ seien bez. die diesen Parameterwerthen zugeordneten Punkte des wahren Kreises $\varkappa$, während der Werth t einem Punkte K auf $\varkappa$ entsprechen möge. Es sei ferner Q eine Verdichtungsstelle der Punkte $K_1, K_2, K_3, \cdots$. Construiren wir allgemein eine geschlossene Jordan'sche Curve $\overline{K_i K}$, so liegen nothwendig die Punkte $K_{i+1}, K_{i+2}, K_{i+3}, \cdots$ und folglich auch deren Verdichtungsstelle Q innerhalb $\overline{K_i K}$ d. h. es liegt auch der Punkt Q zwischen K_i und K; demnach muss sich auch der zu Q gehörige Werth des Parameters t allgemein zwischen t_i und t befinden. Der letztere Widerspruch löst sich nur, wenn Q und K zusammenfällt; mithin convergiren die Punkte $K_1, K_2, K_3, \cdots$ gegen den Punkt K. Damit ist die Stetigkeit der Function x, y vom Parameter t völlig bewiesen und es folgt eine Thatsache, die wir in § 4 als das erste wichtige Ziel unserer Entwickelung hingestellt haben, nämlich der folgende Satz:

Der wahre Kreis $\varkappa$ ist in der Zahlenebene eine geschlossene Jordan'sche Curve.

§ 9.

Wir wissen, dass die Punkte des wahren Kreises $\varkappa$ sämmtlich zu den Punkten auf kk gehören; es wird sich auch zeigen, dass diese sämmtlich auf $\varkappa$ liegen, so dass der weitergehende Satz gilt:

Der wahre Kreis $\varkappa$ ist identisch mit den Punkten auf kk; die innerhalb $\varkappa$ liegenden Punkte sind zugleich die Punkte innerhalb kk und die ausserhalb $\varkappa$ liegenden Punkte sind zugleich die Punkte ausserhalb kk.

Um diesen Satz zu erkennen, zeigen wir zunächst, dass der Punkt M, der „Mittelpunkt“ des wahren Kreises $\varkappa$ mit jedem Punkte J innerhalb $\varkappa$ durch eine stetige Curve verbunden werden kann, ohne dass dabei der wahre Kreis $\varkappa$ überschritten wird.

In der That, ziehen wir durch J irgend eine gewöhnliche Gerade in der Zahlenebene, eine sogenannte „Zahlengerade“, so seien K_1 und K_2 die ersten Punkte dieser Zahlengeraden, die auf $\varkappa$ liegen, nach den beiden Richtungen hin von J aus gerechnet. Da K_1 und K_2 auch Punkte auf kk sind, so können sie mit M durch je eine Jordan'sche Curve MK_1 bez. MK_2 verbunden werden, die ganz innerhalb kk verlaufen und daher gewiss nicht den wahren Kreis $\varkappa$ überschreiten. Trifft eine dieser Jordan'schen Curven das Geradenstück K_1K_2 etwa im Punkte B, so bildet das Curvenstück MB mit dem Geradenstück JB zusammen den gesuchten Verbindungsweg. Im entgegengesetzten Falle bilden MK_1 und MK_2 zusammen mit dem Geradenstück K_1K_2 eine geschlossene Jordan'sche Curve γ. Da diese Curve γ ganz innerhalb des Zahlenkreises $\mathfrak{k}$ liegt, so lässt sich der ausserhalb des Zahlenkreises $\mathfrak{K}$ gelegene Punkt A gewiss nicht mit einem Punkte innerhalb γ verbinden, ohne dass dabei ein Punkt der Curve γ überschritten wird. Die Curve γ besteht nun aus Punkten innerhalb kk, aus Punkten auf kk und aus Punkten innerhalb $\varkappa$. Da die letzteren Punkte von A aus nur durch Ueberschreitung eines Punktes auf $\varkappa$, der ebenfalls ein Punkt auf kk ist, erreicht werden kann, so liegt das ganze innerhalb γ gelegene Gebiet nothwendig auch innerhalb kk. Verbinden wir also M mit J durch einen stetigen innerhalb γ verlaufenden Weg, so überschreitet dieser Weg den wahren Kreis $\varkappa$ sicher nicht und ist mithin von der gewünschten Art.

Wir schliessen daraus zunächst, dass M innerhalb $\varkappa$ liegt, d. h. *der Mittelpunkt M des wahren Kreises $\varkappa$ liegt innerhalb desselben.*

Da ferner alle Punkte auf kk mit M durch eine Jordan'sche Curve verbunden werden können, die ganz innerhalb kk verläuft und also $\varkappa$ gewiss nicht trifft, so liegen alle Punkte auf kk nothwendig auf $\varkappa$ oder innerhalb $\varkappa$. Gäbe es einen Punkt P auf kk, der innerhalb $\varkappa$ liegt, so könnte der ausserhalb $\mathfrak{K}$ gelegene Punkt A nicht mit Punkten in beliebiger

Nähe von P verbunden werden, ohne dass dabei ein Punkt von $\varkappa$ überschritten wird; da aber jeder Punkt von $\varkappa$ zu den bedeckten gehört, so könnte P nicht ein Punkt auf kk sein; dies ist ein Widerspruch. Alle Punkte auf kk liegen also zugleich auf $\varkappa$, womit die obige Behauptung völlig erwiesen ist.

§ 10.

Das Punktgebilde kk ist in § 2 durch eine gewisse Construction aus dem Zahlenkreise k hervorgegangen. Da der Zahlenkreis k, wie in § 3 gezeigt worden ist, mindestens einen Punkt auf kk enthält und ganz auf oder innerhalb kk liegt und die Punkte auf kk nach § 9 nichts anderes als der wahre Kreis $\varkappa$ sind, so haben wir in der obigen Construction zugleich ein Mittel, um aus dem Zahlenkreise k einen wahren Kreis $\varkappa$ zu construiren, welcher eine geschlossene Jordan'sche Curve ist und den Zahlenkreis k umschliesst, diesen von aussen berührend.

Durch eine geringe Abänderung des früheren Verfahrens, nämlich durch eine Vertauschung der Rollen, die den Punkten innerhalb und ausserhalb k zugetheilt worden sind, können wir aus dem Zahlenkreise k noch einen anderen wahren Kreis construiren: wir bezeichnen kurz diejenigen Punkte der Zahlenebene, die bei irgend einer Drehung um M aus Punkten ausserhalb oder auf k entstehen, als *bedeckt;* alle andern Punkte dagegen als *unbedeckt.* Wenn nun ein unbedeckter Punkt sich durch eine Jordan'sche Curve, die aus lauter unbedeckten Punkten besteht, mit M verbinden lässt, so heisse dieser Punkt *innerhalb* kkk. Die Grenzpunkte dieser Punkte innerhalb kkk heissen Punkte *auf* kkk und alle übrigen Punkte heissen *ausserhalb* kkk. Wir zeigen dann ähnlich wie in § 3—§ 9, *dass die Punkte auf kkk einen wahren Kreis um M bilden, der eine geschlossene Jordan'sche Curve ist, den Mittelpunkt M umschliesst und innerhalb des Zahlenkreises k verläuft, diesen von innen berührend.*

§ 11.

An Stelle des Zahlenkreises k kann man nun eine beliebige geschlossene innerhalb k verlaufende Jordan'sche Curve z wählen, die den Punkt M im Innern enthält: *durch Anwendung der nämlichen Construction erhalten wir dann zu dieser Curve z sowohl einen bestimmten sie umschliessenden wahren Kreis um M, der eine geschlossene Jordan'sche Curve ist und z von aussen berührt, als auch einen bestimmten innerhalb z verlaufenden wahren Kreis um M, der eine geschlossene Jordan'sche Curve ist und z von innen berührt.*

Wir bemerken noch, dass jeder solche aus einer Jordan'schen Curve z construirte wahre Kreis auch aus einem Zahlenkreise erzeugt werden kann:

man braucht nur denjenigen Zahlenkreis zu wählen, der innerhalb des vorgelegten wahren Kreises ihn von innen berührend verläuft bez. ihn von aussen berührend umschliesst; denn zwei wahre Kreise, die geschlossene Jordan'sche Curven sind und denselben Zahlenkreis sei es umschliessend, sei es ganz innerhalb verlaufend berühren, müssten gewiss einen Punkt gemein haben und wären folglich überhaupt mit einander identisch.

§ 12.

Nunmehr können wir ohne erhebliche Schwierigkeit die wichtige Thatsache beweisen, *dass jeder durch irgend einen Punkt P innerhalb $\varkappa$ bestimmte wahre Kreis um M ebenso wie die in* § 11 *construirten wahren Kreise eine geschlossene Jordan'sche Curve ist, die M im Innern enthält.*

Zum Beweise fassen wir einerseits alle wahren Kreise um M ins Auge, die geschlossene Jordan'sche Curven sind und P ausschliessen: sie mögen wahre Kreise *erster* Art heissen; und andrerseits alle diejenigen, die geschlossene Jordan'sche Curven sind und P einschliessen: sie mögen wahre Kreise *zweiter* Art heissen.

Wir denken uns zunächst aus jedem Zahlenkreise mit dem Mittelpunkt M den *umschliessenden* wahren Kreis erzeugt und fassen dann diejenigen Zahlenkreise ins Auge, aus denen wahre Kreise entspringen, die erster Art sind. Sodann suchen wir für diese Zahlenkreise den Grenzkreis g, d. h. den kleinsten Zahlenkreis, der sie sämmtlich enthält. Alle Zahlenkreise, die kleiner als g sind, liefern dann wahre Kreise erster Art. Der aus dem Zahlenkreise g entspringende wahre Kreis γ müsste, wenn er nicht durch P geht, diesen Punkt ebenfalls ausschliessen. Denn läge P innerhalb γ, so ziehe man eine ganz innerhalb γ verlaufende, die Punkte M und P umschliessende geschlossene Jordan'sche Curve und erzeuge aus dieser den wahren Kreis, der sie umschliesst. Dieser wahre Kreis liesse sich, da er ja gewiss in das Innere des Zahlenkreises g hineintritt, durch einen Zahlenkreis erzeugen, der kleiner als g ist; er umschliesst ferner den Punkt P, was nicht möglich ist. Da, wie erwähnt, alle wahren Kreise um M, die geschlossene Jordan'sche Curven sind, auch aus Zahlenkreisen um M entspringen, so ist offenbar der aus g entspringende wahre Kreis ein solcher Kreis erster Art, welcher alle anderen wahren Kreise erster Art umschliesst.

Indem wir andererseits aus jedem Zahlenkreise mit dem Mittelpunkt M denjenigen wahren Kreis erzeugt denken, der jenen Zahlenkreis ausschliesst, beweisen wir auf ähnlichem Wege die Existenz eines wahren Kreises zweiter Art, welcher von allen anderen wahren Kreisen zweiter Art umschlossen wird.

Würden nun die gefundenen wahren Grenzkreise beide nicht durch P gehen, so könnte man eine Jordan'sche Curve in dem zwischen ihnen gelegenen ringförmigen Gebiete ziehen, welche sicher durch unser Verfahren einen wahren Kreis liefern würde, der weder von der ersten noch von der zweiten Art wäre; dies ist ein Widerspruch und damit haben wir die zu Anfang von § 12 aufgestellte Behauptung bewiesen.

§ 13.

Nachdem wir im Vorstehenden die wichtigsten Eigenschaften der wahren Kreise um M gefunden haben, die durch Punkte innerhalb $\varkappa$ laufen, wenden wir uns nun zur *Untersuchung der Gruppe aller Bewegungen, die bei den Drehungen der Ebene um M ein bestimmter wahrer Kreis in sich erfährt.*

Es seien den Entwickelungen in § 8 gemäss die Punkte des wahren Kreises $\varkappa$ auf die Punkte t der Peripherie eines Zahlenkreises mit dem Radius 1 unter Erhaltung ihrer Anordnung abgebildet: dann entspricht einer jeden Drehung Δ unserer Ebene um M eine bestimmte umkehrbar eindeutige stetige Transformation der Punkte t des Einheitskreises in sich, da ja nach § 5 bei einer Drehung die Anordnung der Punkte auf dem wahren Kreise und daher mit Rücksicht auf § 7 auch die Anordnung der Parameterwerthe t ungeändert bleibt. Diese Transformation lässt sich durch eine Formel von der Gestalt

$$t' = \Delta(t)$$

darstellen, wo $\Delta(t)$ eine stetige Function ist, die mit wachsendem t entweder stets wächst oder stets abnimmt und die bei Vermehrung des Arguments t um 2π sich ebenfalls um den Betrag 2π ändert.

Diejenigen Functionen $\Delta(t)$, die bei wachsendem Argument t abnehmen, entsprechen Transformationen, die den Umlaufssinn auf dem wahren Kreise ändern, und da zufolge unserer Fassung des Begriffes der Bewegung bei einer Bewegung der Umlaufssinn stets derselbe bleiben soll, so ergiebt sich, dass die Function $\Delta(t)$ bei wachsendem Argument t stets wachsen muss.

§ 14.

Wir fragen zunächst, ob es in dieser Gruppe aller Drehungen um M eine Drehung geben kann, bei welcher ein Punkt A des wahren Kreises $\varkappa$ ungeändert bleibt. Es sei $t = a$ der Parameterwerth für einen solchen Punkt A und dieser bleibe bei der eigentlichen Drehung Δ fest, die durch die Formel

$$t' = \Delta(t)$$

dargestellt wird. Ferner sei B irgend ein Punkt des wahren Kreises mit dem Parameterwerth $t = b$, der bei der Drehung Δ seine Lage verändere; wir machen etwa die Annahme $b < a$, worin keine Einschränkung liegt.

Sowohl $\Delta(t)$ als auch die umgekehrte Function $\Delta^{-1}(t)$ sind von der Art, dass sie bei zunehmendem Argument zunehmen. Wegen $\Delta(a) = a$ schliessen wir hieraus der Reihe nach, dass sämmtliche Grössen, die durch die symbolischen Potenzen

$$\Delta(b),\ \Delta\Delta(b) = \Delta^2(b),\ \Delta^3(b), \cdots, \Delta^{-1}(b),\ \Delta^{-2}(b),\ \Delta^{-3}(b), \cdots$$

dargestellt werden, unterhalb a liegen. Nun bilden, falls $\Delta(b) > b$ ausfällt, die Grössen

$$\Delta(b),\ \Delta^2(b),\ \Delta^3(b), \cdots$$

eine Reihe beständig zunehmender Werthe; im Falle $\Delta(b) < b$ gilt das Gleiche von der Grössenreihe

$$\Delta^{-1}(b),\ \Delta^{-2}(b),\ \Delta^{-3}(b), \cdots.$$

Aus diesen Thatsachen entnehmen wir, dass im ersteren Falle die directen Wiederholungen der Drehung Δ auf b angewandt, im letzteren die symbolischen Potenzen von $\Delta(b)$ mit negativen Exponenten sich einem Grenzwerth g nähern müssen, der zwischen a und b liegt oder mit a übereinstimmt. Entspricht der Grenzzahl g etwa der Punkt G auf dem wahren Kreise $\varkappa$, so bilden die Potenzen von Δ mit positiven bez. negativen Exponenten Bewegungen, so dass durch sie der Punkt B in beliebige Nähe von G übergeht und zugleich durch sie Punkte in beliebiger Nähe von G in beliebiger Nähe von G bleiben. Nach Axiom III müsste es demnach eine Bewegung geben, welche B in G überführt und zugleich G ungeändert lässt; dies widerspräche dem Begriffe der Bewegung. *Es ist demnach die Drehung Δ, welche den Punkt A festlässt, nothwendig eine solche, die alle Punkte des Kreises festlässt, d. h. für diesen Kreis die Identität ist.*

§ 15.

Aus der Definition des wahren Kreises leuchtet unmittelbar die folgende Thatsache ein:

Es giebt stets eine Drehung um M, welche den gegebenen Punkt O des wahren Kreises in einen anderen gegebenen Punkt S desselben überführt.

§ 16.

Wir leiten jetzt eine weitere Eigenschaft für die Gruppe der Bewegungen eines wahren Kreises in sich ab.

Es seien O, S, T, Z vier solche Punkte auf dem wahren Kreise $\varkappa$, dass diejenige Drehung um M, vermöge welcher O in S übergeht, den Punkt

T nach Z bewegt, so dass die Lage von Z eindeutig durch die Punkte O, S, T mitbestimmt ist. Halten wir O fest und bewegen S und T auf dem wahren Kreise, *so erfolgt bei stetiger Aenderung von S und T auch die Aenderung von Z stetig.*

Um dies zu beweisen, wählen wir eine unendliche Reihe von Punkten $S_1, S_2, S_3, \cdots$, die gegen den Punkt S convergiren, und eine unendliche Reihe von Punkten $T_1, T_2, T_3, \cdots$, die gegen den Punkt T convergiren. Die Drehungen um M, vermöge deren O in $S_1, S_2, S_3, \cdots$ übergeht, bezeichnen wir bez. mit $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \cdots$ und die durch diese Drehungen bez. aus $T_1, T_2, T_3, \cdots$ entspringenden Punkte seien $Z_1, Z_2, Z_3, \cdots$; dann haben wir zu zeigen, dass die Punkte $Z_1, Z_2, Z_3, \cdots$ gegen Z convergiren. Es sei Z^* eine Verdichtungsstelle der Punkte $Z_1, Z_2, Z_3, \cdots$. Nach Axiom III giebt es dann eine Drehung um M, vermöge deren O in S und zugleich T in Z^* übergeht. Hierdurch erweist sich aber Z^* als eindeutig bestimmt und mit Z identisch.

§ 17.

In § 14—§ 16 haben wir erkannt, dass die Gruppe aller Drehungen eines wahren Kreises $\varkappa$ in sich die folgenden Eigenschaften besitzt:

1. Es giebt ausser der Identität keine Drehung um M, welche einen Punkt des wahren Kreises festlässt.

2. Wenn O, S irgend zwei beliebige Punkte des wahren Kreises sind, so giebt es gewiss eine Drehung um M, welche O und S überführt.

3. Bei einer Drehung um M, die O nach S bewegt, gehe zugleich T in Z über; der somit durch O, S, T eindeutig bestimmte Punkt Z erfährt auf $\varkappa$ eine stetige Aenderung, wenn S und T auf $\varkappa$ stetig ihre Lage ändern.

Diese drei Eigenschaften bestimmen vollständig den Bau der Gruppe der Transformationen $\Delta(t)$, die den Bewegungen des wahren Kreises in sich entsprechen. Wir stellen nämlich den folgenden Satz auf:

Die Gruppe aller Bewegungen des wahren Kreises in sich, die Drehungen um M sind, ist holoedrisch-isomorph mit der Gruppe der gewöhnlichen Drehungen des Zahlenkreises um M in sich.

§ 18.

Wenn wir uns diejenige Drehung um M, die den Punkt O des wahren Kreises mit dem Parameterwerth 0 in den Punkt S mit dem Parameterwerth s überführt, durch die Transformationsformel

$$t' = \Delta(t, s)$$

dargestellt denken, wobei wir den Functionswerth $\Delta(0,0) = 0$ nehmen, so erkennen wir auf Grund der gefundenen Eigenschaften der Drehungsgruppe, dass die Function $\Delta(t, s)$ eindeutig und stetig für alle Werthe der beiden Veränderlichen t, s ist. Auch folgt, da s bis auf Vielfache von 2π eindeutig durch zwei zusammengehörige Werte t und t' bestimmt ist, dass die Function $\Delta(t, s)$ bei constantem t mit wachsendem s nur entweder beständig wächst oder abnimmt, und da sie für $t = 0$ in s übergeht, so tritt nothwendig der erstere Fall ein. Nun ist

$$\Delta(t, t) > \Delta(0, t), \quad \Delta(0, t) = t; \qquad (t > 0)$$

und wegen

$$\Delta(2\pi, s) = 2\pi + \Delta(0, s) = 2\pi + s$$

folgt

$$\Delta(2\pi, 2\pi) = 4\pi.$$

Mithin hat die Function $\Delta(t, t)$ $(> t)$ der einen Veränderlichen t die Eigenschaft, beständig von 0 bis 4π zu wachsen, während das Argument t von 0 bis 2π wächst. Aus diesem Umstande schliessen wir sofort folgende Thatsache:

Wenn irgend eine positive Zahl $t' \leqq 2\pi$ vorgelegt ist, so giebt es stets eine und nur eine positive Zahl t, so dass

$$\Delta(t, t) = t'$$

wird; es ist $t < t'$. Der Parameterwerth t liefert einen Punkt des wahren Kreises von der Art, dass bei einer gewissen Drehung um M der Punkt $t = 0$ sich nach t und zugleich der Punkt t nach t' bewegt.

Wir bezeichnen nun denjenigen Werth von t, für welchen

$$\Delta(t, t) = 2\pi$$

wird, mit $\varphi\left(\frac{1}{2}\right)$, denjenigen, für welchen

$$\Delta(t, t) = \varphi\left(\frac{1}{2}\right)$$

wird, mit $\varphi\left(\frac{1}{2^2}\right)$, denjenigen, für welchen

$$\Delta(t, t) = \varphi\left(\frac{1}{2^2}\right)$$

wird, mit $\varphi\left(\frac{1}{2^3}\right) \cdots$; ferner setzen wir allgemein

$$\Delta\left(\varphi\left(\frac{a}{2^n}\right), \varphi\left(\frac{1}{2^n}\right)\right) = \varphi\left(\frac{a+1}{2^n}\right),$$

wo $2a$ eine gerade ganze Zahl bedeutet, und ferner setzen wir

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = 2\pi.$$

Damit ist die Function φ für alle rationalen Argumente, deren Nenner eine Potenz von 2 ist, widerspruchslos definirt.

Ist nun σ ein beliebiges positives Argument < 1, so entwickeln wir σ in einen Dualbruch von der Form

$$\sigma = \frac{z_1}{2} + \frac{z_2}{2^2} + \frac{z_3}{2^3} + \cdots,$$

wo z_1, z_2, z_3 lauter Ziffern 0, 1 bedeuten. Da die Zahlen der Reihe

$$\varphi\left(\frac{z_1}{2}\right),\ \varphi\left(\frac{z_1}{2} + \frac{z_2}{2^2}\right),\ \varphi\left(\frac{z_1}{2} + \frac{z_2}{2^2} + \frac{z_3}{2^3}\right), \cdots$$

gewiss niemals abnehmen und sämmtlich $\leqq \varphi(1)$ bleiben, so nähern sie sich einem Grenzwerth; diesen bezeichnen wir mit $\varphi(\sigma)$. Die Function $\varphi(\sigma)$ ist eine Function, die mit wachsendem Argument stets wächst; wir wollen beweisen, dass sie auch stetig ist. In der That wäre sie an einer Stelle

$$\sigma = \frac{z_1}{2} + \frac{z_2}{2^2} + \frac{z_3}{2^3} + \cdots = \underset{n=\infty}{L} \frac{a_n}{2^n} = \underset{n=\infty}{L} \frac{a_n + 1}{2^n},$$

$$\left(\frac{a_n}{2^n} = \frac{z_1}{2} + \frac{z_2}{2^2} + \cdots + \frac{z_n}{2^n}\right)$$

nicht stetig, so müssten die beiden Grenzwerthe

$$\underset{n=\infty}{L} \varphi\left(\frac{a_n}{2^n}\right) \quad \text{und} \quad \underset{n=\infty}{L} \varphi\left(\frac{a_n + 1}{2^n}\right)$$

von einander verschieden ausfallen und mithin die unendliche Reihe von Punkten, die den Parametern

$$t = \varphi\left(\frac{a_1}{2}\right),\quad t = \varphi\left(\frac{a_2}{2^2}\right),\quad t = \varphi\left(\frac{a_3}{2^3}\right), \cdots$$

entsprechen, gegen einen anderen Punkt convergiren als die unendliche Reihe von Punkten, die den Parametern

$$t = \varphi\left(\frac{a_1 + 1}{2}\right),\quad t = \varphi\left(\frac{a_2 + 1}{2^2}\right),\quad t = \varphi\left(\frac{a_3 + 1}{2^3}\right), \cdots$$

entsprechen. Nun führt dieselbe Drehung, vermöge deren der Punkt $t = \varphi\left(\frac{a_n}{2^n}\right)$ in den Punkt $t = \varphi\left(\frac{a_n + 1}{2^n}\right)$ übergeht, auch zugleich den Punkt $t = \varphi\left(\frac{1}{2^n}\right)$ in den Punkt $t = \varphi\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)$ über, und da die Zahlen $\varphi\left(\frac{1}{2}\right)$, $\varphi\left(\frac{1}{2^2}\right)$, $\varphi\left(\frac{1}{2^3}\right), \cdots$ beständig abnehmen und die diesen Parameterwerthen entsprechenden Punkte daher jedenfalls gegen eine gewisse Stelle A convergiren müssen, so convergiren mit Rücksicht auf Axiom III einer oft angewandten Schlussweise zufolge auch die vorhin genannten unendlichen Reihen von Punkten beide gegen denselben Punkt.

Die Function $\varphi(\sigma)$ gestattet, da sie stets wächst und stetig ist, auch eine eindeutige und stetige Umkehrung.

Die Drehung um M, durch welche der Punkt $t = 0$ in den Punkt $t = \varphi\left(\frac{a_n}{2^n}\right)$ übergeht, führt zugleich den Punkt $t = \varphi\left(\frac{b_m}{2^m}\right)$ in $t = \varphi\left(\frac{b_m}{2^m} + \frac{a_n}{2^n}\right)$ über, unter b_m irgend eine ganze Zahl verstanden. Da für $n = \infty$ die Werthe $\varphi\left(\frac{a_n}{2^n}\right)$ gegen $\varphi(\sigma)$ und zugleich die Zahlen $\varphi\left(\frac{b_m}{2^m} + \frac{a_n}{2^n}\right)$ gegen $\varphi\left(\frac{b_m}{2^m} + \sigma\right)$ convergiren, so giebt es nach Axiom III eine Drehung, welche den Punkt $t = 0$ nach $t = \varphi(\sigma)$ und zugleich den Punkt $t = \varphi\left(\frac{b_m}{2^m}\right)$ nach $t = \varphi\left(\frac{b_m}{2^m} + \sigma\right)$ bewegt, d. h. es ist

$$\Delta\left(\varphi\left(\frac{b_m}{2^m}, \varphi(\sigma)\right)\right) = \varphi\left(\frac{b_m}{2^m} + \sigma\right)$$

und, da σ eine stetige Function ist, so folgt hieraus allgemein für beliebige Parameterwerthe τ, σ

$$\Delta(\varphi(\tau), \varphi(\sigma)) = \varphi(\tau + \sigma).$$

Damit ist bewiesen, dass, wenn wir in der Transformationsformel

$$t' = \Delta(t, s)$$

mittelst einer gewissen umkehrbar eindeutigen Function φ an Stelle von t, t', s neue Parameter τ, τ', σ gemäss

$$t = \varphi(\tau), \quad t' = \varphi(\tau'), \quad s = \varphi(\sigma)$$

einführen, sich die Drehung in den neuen Parametern durch die Formel

$$\tau' = \tau + \sigma$$

ausdrückt. Dieser Satz lehrt die Richtigkeit der in § 17 aufgestellten Behauptung.

Wir setzen noch an Stelle des Parameters σ den Parameter $\omega = 2\pi\sigma$, und nennen diesen Parameterwerth ω *den Winkel* oder *die Bogenlänge* zwischen den Punkten O ($\sigma = 0$) und S (d. h. σ) auf dem wahren Kreise $\varkappa$; die Drehung, bei welcher der Punkt O ($\sigma = 0$) in den Punkt S (d. h. σ) übergeht, heisse *eine Drehung* $\Delta[\omega]$ *des wahren Kreises in sich um den Winkel* ω.

§ 19.

Durch diesen Beweis des Satzes in § 17 haben wir die Untersuchung der Drehungen eines einzelnen wahren Kreises in sich beendet und wenden uns nun zu den Eigenschaften der Gruppe der Transformationen *aller* Punkte bei den Drehungen der Ebene um den festen Punkt M.

Zum Zweck dieser Untersuchung beweisen wir der Reihe nach folgende Sätze:

Es sei von einem wahren Kreise $\varkappa$ um M bekannt, dass er eine geschlossene Jordan'sche Curve ist, in deren Innerem M liegt: dann giebt es ausser der Identität keine Drehung der Ebene um M, welche jeden Punkt des wahren Kreises $\varkappa$ festlässt.

Zum Beweise bezeichnen wir eine Drehung um M, die jeden Punkt auf $\varkappa$ festlässt, mit K und nehmen dann *erstens* im Gegensatz zur Behauptung an, es gäbe auf $\varkappa$ einen Punkt A, in dessen beliebiger Nähe Punkte liegen, die ihre Lage bei einer Drehung K verändern. Um A schlagen wir, was nach § 12 gewiss möglich ist, einen wahren Kreis α, der durch einen gegenüber K veränderlichen Punkt gehe. Es sei B ein Schnittpunkt dieses Kreises mit $\varkappa$; dann charakterisirt sich die Bewegung K zugleich als eine Drehung des Kreises α in sich, bei der B festbleibt. Bei einer solchen Drehung bleiben aber nach § 14 alle Punkte auf α fest, was nicht der Fall ist; unsere erstere Annahme erweist sich demnach als unzulässig.

Wir construiren nunmehr ein System von geschlossenen Jordan'schen Curven um M, zu denen $\varkappa$ gehört und von denen jede die andere entweder ganz ein- oder ganz umschliesst, so dass durch jeden Punkt der Zahlenebene eine und nur eine Curve des Systems hindurchgeht. Dann nehmen wir *zweitens* im Gegensatz zur obigen Behauptung an, es sei λ eine Curve dieses Systems innerhalb $\varkappa$ bez. ausserhalb $\varkappa$, so dass alle Punkte in dem ringförmigen Gebiete zwischen $\varkappa$ und λ bei jeder Drehung K festbleiben, während in beliebiger Nähe der Curve λ solche Punkte vorhanden sind, die nicht bei jeder Drehung K festbleiben.

Es sei A ein Punkt auf λ, in dessen beliebiger Nähe bei K bewegliche Punkte liegen; dann schlagen wir um A einen wahren Kreis, der durch einen dieser beweglichen Punkte läuft. Da dieser Kreis bei genügender Kleinheit jedenfalls durch einen Theil des ringförmigen bei den Bewegungen K festbleibenden Gebietes hindurchläuft, so charakterisirt sich die Bewegung K zugleich als eine Drehung des Kreises α in sich, bei welcher unendlich viele Punkte von α festbleiben. Bei K müssten daher nach § 14 alle Punkte von α festbleiben, was nicht der Fall ist. Damit ist gezeigt, dass bei den Drehungen K alle Punkte der Ebene festbleiben.

§ 20.

Wir stellen nun folgende wichtige Behauptungen auf:

Jeder wahre Kreis ist eine geschlossene Jordan'sche Curve: das System aller wahren Kreise um irgend einen Punkt M erfüllt lückenlos unsere Ebene, so dass jeder wahre Kreis um M jeden anderen solchen Kreis ein- oder umschliesst.

Die sämmtlichen Drehungen $\Delta[\omega]$ unserer Ebene um M werden durch Transformationsformeln von der Gestalt

$$x' = f(x, y; \omega),$$
$$y' = g(x, y; \omega)$$

ausgedrückt; darin bedeuten x, y bez. x', y' die Coordinaten in der Zahlenebene und f, g eindeutige stetige Functionen in den drei Veränderlichen x, y, ω. Ferner haben für jeden Punkt x, y die Functionen f, g hinsichtlich des Argumentes ω die Zahl 2π zur kleinsten simultanen Periode, d. h. man erhält jeden Punkt des wahren Kreises durch den Punkt (x, y) je einmal und nur einmal, wenn man ω die Werthe von 0 bis 2π durchlaufen lässt. Endlich gilt für die Zusammensetzung zweier Drehungen um die Winkel ω, ω' die Formel

$$\Delta[\omega]\,\Delta[\omega'] = \Delta[\omega + \omega'].$$

§ 21.

Zum Beweise der aufgestellten Behauptungen construiren wir irgend einen wahren Kreis $\varkappa$ um M, der eine geschlossene Jordan'sche Curve ist, und betrachten zunächst die Drehungen dieses wahren Kreises $\varkappa$ in sich. Nach § 18 führen wir den Winkel ω ein, so dass durch die Angabe eines Werthes von ω zwischen 0 und 2π eine Bewegung des wahren Kreises $\varkappa$ in sich eindeutig bestimmt ist. Nun entspricht aber einer jeden Drehung des wahren Kreises in sich nur e i n e bestimmte Drehung der Ebene um M, da ja nach § 19 bei Festhaltung aller Punkte auf $\varkappa$ überhaupt alle Punkte der Ebene festbleiben. Daraus folgt, dass in den in § 20 aufgestellten Formeln für die Drehung der Ebene um M die Functionen f, g für alle x, y, ω *eindeutige* Functionen sind, die hinsichtlich ω die Periode 2π besitzen.

Wir beweisen nun, dass f, g *stetige* Functionen in x, y, ω sind. Zu dem Zwecke sei O irgend ein Punkt auf $\varkappa$, ferner $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \cdots$ eine unendliche Reihe von Werthen, die gegen einen bestimmten Werth ω convergiren, und $T_1, T_2, T_3, \cdots$ eine unendliche Reihe von Punkten unserer Ebene, die gegen irgend einen Punkt T convergiren. Diejenigen Punkte, die aus O bez. bei Anwendung der Drehungen um den Winkel $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \cdots$ hervorgehen, bezeichnen wir mit $S_1, S_2, S_3, \cdots$ und die Punkte, die aus $T_1, T_2, T_3, \cdots$ bez. bei den Drehungen $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \cdots$ entstehen, mögen $Z_1, Z_2, Z_3, \cdots$ heissen. Endlich mögen die Punkte, die aus O bez. T durch eine Drehung um den Winkel ω hervorgehen, bez. mit S, Z bezeichnet werden. Es kommt darauf an zu zeigen, dass die Punkte $Z_1, Z_2, Z_3, \cdots$ gegen Z convergiren.

Da die Punkte $T_1, T_2, T_3, \cdots$ gegen T convergiren, so können wir ein Jordan'sches Gebiet G bestimmen, in dessen Innerem die sämmtlichen

Punkte $M, T, T_1, T_2, T_3, \cdots$ liegen. Auf dieses Jordan'sche Gebiet wenden wir dann diejenige Drehung um M an, welche O nach S bewegt. Das so aus G entstehende Jordan'sche Gebiet heisse H; dasselbe enthält gewiss die Punkte M und Z. Endlich construiren wir eine geschlossene Jordan'sche Curve α, die das Gebiet H ganz umschliesst, ohne H zu berühren.

Wir wollen nun beweisen, dass von den Punkten $Z_1, Z_2, Z_3, \cdots$ gewiss nur eine endliche Anzahl ausserhalb der Curve α liegen. In der That, würden unendlichviele von ihnen, etwa die Punkte $Z_{i_1}, Z_{i_2}, Z_{i_3}, \cdots$ ausserhalb α liegen, so denke man sich allgemein M mit T_{i_h} durch eine Jordan'sche innerhalb G verlaufende Curve γ_h verbunden und dann mit γ_h die Drehung um den Winkel ω_{i_h} ausgeführt. Die so entstehende Curve verbindet M mit Z_{i_h} und schneidet folglich die Curve α gewiss in einem Punkte, etwa B_h; es sei A_h der Punkt auf γ_h, der bei der Drehung um den Winkel ω_{i_h} in B_h übergeht. Da die Punkte $A_1, A_2, A_3, \cdots$ sämmtlich innerhalb G und die Punkte $B_1, B_2, B_3, \cdots$ sämmtlich auf α bleiben, so giebt es gewiss eine unendliche Reihe von Indices $h_1, h_2, h_3, \cdots$ von der Art, dass $A_{h_1}, A_{h_2}, A_{h_3}, \cdots$ gegen einen Punkt A innerhalb G oder auf der Grenze von G und zugleich $B_{h_1}, B_{h_2}, B_{h_3}, \cdots$ gegen einen Punkt B auf α convergiren. Nun wissen wir, dass die Punkte $S_1, S_2, S_3, \cdots$ gegen S convergiren; mit Rücksicht auf Axiom III müsste es demnach eine Drehung um M geben, die O nach S und zugleich A nach B bewegt; dies ist aber nicht möglich. Denn bei dieser Drehung müsste A in einen Punkt innerhalb H oder auf der Grenze von H übergehen; dagegen ist B ein Punkt auf der Curve α, die das Gebiet H umschliesst, ohne H zu berühren.

Damit haben wir erkannt, dass das Punktsystem $Z_1, Z_2, Z_3, \cdots$ ganz innerhalb eines gewissen Jordan'schen Gebietes liegen muss.

Es sei nun Z^* eine Verdichtungsstelle der Punkte $Z_1, Z_2, Z_3, \cdots$. Da die Punkte $S_1, S_2, S_3, \cdots$ gegen S convergiren, so giebt es nach Axiom III eine Drehung um M, bei welcher O in S und zugleich T in Z^* übergeht. Da aber bei derjenigen Drehung um M, welche O in S überführt, T in Z übergehen sollte, so folgt wegen der vorhin bewiesenen Eindeutigkeit der Functionen f, g nothwendig $Z^* = Z$, d. h. die Punkte $Z_1, Z_2, Z_3, \cdots$ verdichten sich nur an einer Stelle, nämlich an der Stelle Z. Damit ist die Stetigkeit der Functionen f, g in x, y, ω bewiesen.

Wir setzen jetzt in f, g für x, y die Coordinaten irgend eines Punktes P unserer Ebene ein, der innerhalb oder ausserhalb des Kreises $\varkappa$ liegt. Die dann entstehenden Functionen $f(\omega)$, $g(\omega)$ in der Veränderlichen ω allein dürfen nicht beliebig kleine simultane Perioden haben. Denn da sie stetige Functionen von ω sind, so wären sie in diesem Falle Constante; dann aber würde der Punkt P bei allen Drehungen der Ebene um M festbleiben, was Axiom II widerspräche. Die kleinste simultane Periode jener beiden Functionen $f(\omega)$, $g(\omega)$ muss demnach von der Form $\frac{2\pi}{n}$ sein, wo n eine ganze positive Zahl bedeutet. Hieraus folgt, dass der durch P gehende wahre Kreis erhalten wird, wenn man in den Formeln

$$x = f(\omega), \qquad y = g(\omega)$$

den Werth ω von 0 bis $\frac{2\pi}{n}$ laufen lässt. Diese Curve ist geschlossen und ohne Doppelpunkte; sie stellt daher den durch P gehenden wahren Kreis um M dar. Wenden wir nunmehr auf die Ebene eine Drehung um den Winkel $\frac{2\pi}{n}$ an, so bleiben dabei alle Punkte dieses durch P gelegten wahren Kreises fest, und daher müssten nach § 19 alle Punkte der Ebene fest bleiben; die Punkte auf dem wahren Kreise $\varkappa$ bleiben aber bei jener Drehung nur fest, wenn $n = 1$ ist, und damit haben wir die Aussagen des in § 20 aufgestellten Satzes in allen Theilen bewiesen.

§ 22.

Wir erkennen jetzt leicht auch die Richtigkeit der folgenden Thatsachen:

Wenn irgend zwei Punkte bei einer Bewegung der Ebene festbleiben, so bleiben alle Punkte fest, d. h. die Bewegung ist die Identität.

Jeder Punkt der Ebene lässt sich durch eine Bewegung gewiss in jeden anderen Punkt der Ebene überführen.

Die erstere Thatsache folgt sofort mit Rücksicht auf den Satz in § 20; die letztere, wenn wir um jeden der Punkte den wahren Kreis durch den anderen legen, wobei diese Kreise sich nothwendig treffen müssen.

§ 23.

Unser wichtigstes weiteres Ziel besteht darin, den Begriff der wahren Geraden in unserer Geometrie einzuführen und die für den Aufbau der Geometrie nothwendigen Eigenschaften dieses Begriffes zu entwickeln.

Zu dem Zwecke setzen wir zunächst folgende Benennungen fest: Wenn A, B und A', B' zwei Punktepaare von der Art sind, dass sich vermöge einer Bewegung A in A' und zugleich B in B' überführen lässt, so sagen wir, *die (wahre) Strecke AB sei congruent* (in Zeichen $\equiv$) *der (wahren) Strecke $A'B'$*. Ferner nennen wir *zwei wahre Kreise congruent*, wenn es eine Bewegung giebt, welche ihre Mittelpunkte und zugleich sie selbst ineinander überführt.

Unter einer *Halbdrehung H* um einen Punkt M verstehen wir eine Drehung um den Winkel π d. h. eine Drehung, die noch einmal ausgeführt die Identität ergiebt. Wenn A, B, C drei Punkte sind, so dass A bei einer Halbdrehung um B in C und demnach auch zugleich C bei dieser Halbdrehung in A übergeht, so heisse B die *Mitte der Strecke* AC.

Wenn C ein Punkt innerhalb bez. ausserhalb des um A durch B geschlagenen wahren Kreises ist, so nennen wir die Strecke AC *kleiner bez. grösser* als die Strecke AB. Um in analoger Weise die Begriffe „kleiner" und „grösser" für beliebige Strecken bez. für beliebige Kreise zu definiren, führe man Bewegungen aus, vermöge welcher die Anfangspunkte der Strecken bez. die Mittelpunkte der Kreise in den nämlichen Punkt fallen.

§ 24.

Eine wahre Strecke AC hat höchstens *eine* Mitte; gäbe es nämlich für AC zwei Mitten und bezeichnen wir die Halbdrehungen um diese Mitten mit H_1 und H_2, so würde die zusammengesetzte Substitution $H_1 H_2^{-1}$ eine Bewegung darstellen, welche jeden der Punkte A und C festliesse, und somit entnehmen wir nach § 22 symbolisch

$$H_1 H_2^{-1} = 1 \quad \text{d. h.} \quad H_1 = H_2;$$

mithin stimmen auch die Mitten selbst überein. Insbesondere folgern wir hieraus die weitere Thatsache:

Wenn zwei Strecken einander congruent sind, so sind auch ihre Hälften einander congruent.

§ 25.

Für die weiteren Entwicklungen brauchen wir folgenden Hilfssatz:

Es mögen die Punkte $A_1, A_2, A_3, \cdots$ gegen den Punkt A und die Punkte $M_1, M_2, M_3, \cdots$ gegen den Punkt M convergiren; wenn dann allgemein bei Ausführung der Halbdrehung um M_i der Punkt A_i in B_i übergeht, so convergiren die Punkte $B_1, B_2, B_3, \cdots$ ebenfalls und zwar gegen denjenigen Punkt B, der durch die Halbdrehung um M aus A entsteht.

Zunächst lässt sich gewiss ein Jordan'sches Gebiet finden, innerhalb dessen das Punktsystem $B_1, B_2, B_3, \cdots$ gelegen ist. Davon überzeugen wir uns durch das nämliche Schlussverfahren, welches in § 21 auf das Punktsystem $Z_1, Z_2, Z_3, \cdots$ angewandt worden ist.

Wir bezeichnen nun mit B^* eine Verdichtungsstelle der Punkte $B_1, B_2, B_3, \cdots$. Auf Grund des Axioms III muss es dann eine Bewegung geben, welche die Punkte A, M, B^* bez. in die Punkte B^*, M, A überführt; d. h. B^* geht aus A durch die Halbdrehung um M hervor. Da aber auch B aus A durch die Halbdrehung um M hervorgeht, so folgt $B^* = B$ und damit ist der gewünschte Nachweis erbracht.

§ 26.

Es sei M die Mitte einer gewissen Strecke AB; dann wollen wir zeigen, dass jede Strecke AC, die kleiner als AB ist, ebenfalls eine Mitte N besitzt.

Zu dem Zwecke ziehen wir irgend eine stetige Curve γ von A bis M und suchen zu jedem Punkte M' dieser Curve γ den Punkt B', so dass M' die Mitte von AB' wird; dann ist der Ort der Punkte B', wie wir aus dem in § 25 bewiesenen Hilfssatze schliessen, eine stetige Curve γ'. Diese Curve γ' mündet gewiss in A, wenn der Punkt M' auf der Curve γ nach A hin läuft. Denn im anderen Falle nehmen wir an, es sei $M_1, M_2, M_3, \ldots$ eine unendliche Reihe von Punkten auf γ, die gegen A convergiren, und $B_1, B_2, B_3, \ldots$ die entsprechenden Punkte auf der Curve γ'. Würden nun $B_1, B_2, B_3, \ldots$ eine von A verschiedene Verdichtungsstelle A^* besitzen, so entnehmen wir daraus, dass es eine Bewegung giebt, welche gewisse Punkte in beliebiger Nähe von A in beliebiger Nähe von A lässt und zugleich den Punkt A in beliebige Nähe von A^* bringt. Dann müsste also auf Grund des Axioms III bei einer gewissen Bewegung A fest bleiben und zugleich in A^* übergehen, was unmöglich ist.

Da nun unserer Annahme zufolge AC kleiner als AB ist, so muss der um A durch C geschlagene wahre Kreis die A mit B verbindende stetige Curve γ' in irgend einem Punkte B' treffen. Der diesem Punkte entsprechende Punkt M' auf γ ist die Mitte der wahren Strecke AB' und da $AC \equiv AB'$ ist, so findet man durch eine geeignete Drehung um A aus M' auch die gesuchte Mitte N von AC.

Da die Strecke AC durch die Halbdrehung um ihre Mitte N in die Strecke CA übergeht, so folgt aus unserem eben bewiesenen Satze:

Die Strecke AC ist stets der Strecke CA congruent — vorausgesetzt, dass die Strecke AC kleiner als die bestimmte am Anfange dieses § 26 zu Grunde gelegte Strecke AB ist.

Zugleich erkennen wir, dass, wenn die Punkte $C_1, C_2, C_3, \cdots$ gegen den Punkt A convergiren, stets auch die Mitten $N_1, N_2, N_3, \cdots$ der Strecken bez. $AC_1, AC_2, AC_3, \cdots$ gegen A convergiren.

§ 27.

Für unsere weiteren Entwickelungen haben wir einige Sätze über sich berührende wahre Kreise nöthig und zwar kommt es vor Allem darauf an, *zwei zu einander congruente Kreise zu construiren, die sich einander von aussen in einem und nur in einem Punkte berühren.*

Zu dem Zwecke wählen wir einen Kreis $\varkappa'$ so klein, dass innerhalb desselben keine Strecke liegt, die der bestimmten in § 26 zu Grunde gelegten Strecke AB congruent wird; der Satz in § 20 zeigt, dass dies gewiss möglich ist, da sich sonst die Punkte A und B gleichzeitig beliebig nahe an M bewegen liessen. Sodann sei $\varkappa$ ein innerhalb $\varkappa'$ liegender Kreis um denselben Mittelpunkt wie $\varkappa'$. Wir nehmen nun auf dem Kreise $\varkappa$ irgend zwei Punkte an und schlagen um diese zu einander congruente Kreise α und β so klein, dass irgend zwei Punkte auf $\varkappa$, die innerhalb α liegen, niemals von irgend zwei Punkten auf $\varkappa$, die innerhalb β liegen, im Sinne der Anordnung der Punkte auf $\varkappa$ getrennt liegen können. Ausserdem seien die Kreise α, β so klein gewählt, dass sie ganz innerhalb des Kreises $\varkappa'$ liegen. Dann nehme man einen Punkt P' an,

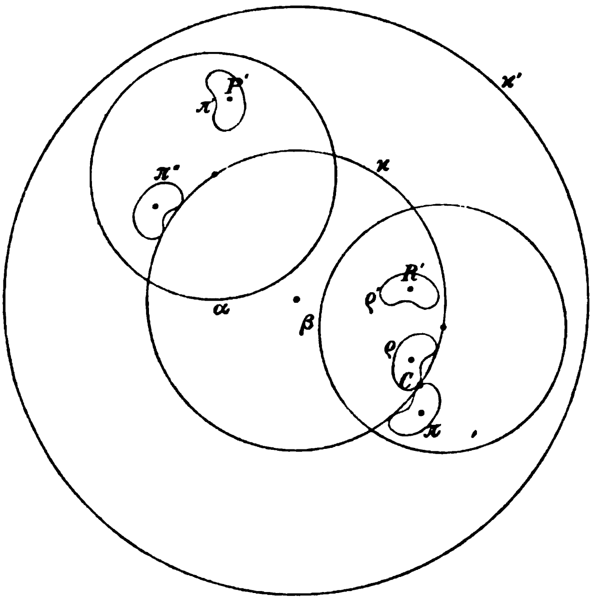


Fig. 2.

der innerhalb α und ausserhalb $\varkappa$ liegt und einen Punkt R' an, der innerhalb β und innerhalb $\varkappa$ liegt, und schlage dann um P' und R' zu einander congruente Kreise π' bez. ϱ' so klein, dass π' ganz innerhalb α und ausserhalb $\varkappa$ und ferner ϱ' ganz innerhalb β und innerhalb $\varkappa$ fällt. Nun führe man eine Drehung um den Mittelpunkt von α aus, so dass der Kreis π' in einen Kreis π'' übergeht, der den Kreis $\varkappa$ von aussen berührt: die Berührungspunkte bilden ein Punktsystem, welches mit S bezeichnet werden möge. Sodann führe man eine Drehung um den Mittelpunkt von β aus, so dass der Kreis ϱ' in einen Kreis ϱ übergeht, der den Kreis $\varkappa$ von innen berührt. Die Berührungspunkte bilden ein Punktsystem, welches mit T bezeichnet werden möge.

Da wegen der Wahl der Kreise α, β keine zwei Punkte des Systems S durch ein Punktepaar des Systems T auf $\varkappa$ getrennt werden, so ist es gewiss möglich, durch eine Drehung der Ebene um den Mittelpunkt des Kreises $\varkappa$ einen der äussersten Punkte von S auf $\varkappa$ mit einem der äussersten Punkte von T auf $\varkappa$ derart zur Deckung zu bringen, dass die übrigen Punkte von S in Punkte übergehen, die von den Punkten des Systems T

durchweg verschieden sind. Bei dieser Drehung gelangt der Kreis $\varkappa''$ mit dem Kreise ϱ in Berührung in der Weise, dass der Punkt C, in dem das Zusammenfallen stattfindet, der einzige Berührungspunkt wird. Wir bezeichnen den Kreis $\varkappa''$ in seiner neuen Lage mit $\varkappa$ und die Mittelpunkte von $\varkappa$ und ϱ bez. mit P und R.

Wir wollen nun beweisen, dass der Berührungspunkt C nothwendig die Mitte zwischen den beiden Mittelpunkten P, R ist. In der That wegen unserer Wahl von $\varkappa'$ ist die Strecke PR nothwendig kleiner als die bestimmte Strecke AB und besitzt daher nach § 26 gewiss eine Mitte; dieselbe heisse C^*. Dann geht jeder der beiden Kreise $\varkappa$, ϱ durch eine Halbdrehung um C^* in den andern über und daher wird aus jedem Punkte des einen Kreises ein Punkt des andern. Da der Punkt C beiden Kreisen $\varkappa$, ϱ gemeinsam ist, so muss er bei einer solchen Halbdrehung ebenfalls in einen den Kreisen $\varkappa$, ϱ gemeinsamen Punkt übergehen, er muss folglich bei dieser Halbdrehung ungeändert bleiben und stimmt mithin nothwendig mit dem Punkte C^* überein, um welchen die Halbdrehung ausgeführt wurde.

Aus der eben bewiesenen Thatsache erkennen wir zugleich folgende Thatsache:

Aus dem Kreise $\varkappa$ entsteht durch Halbdrehung um den Punkt C auf $\varkappa$ der Kreis ϱ, der $\varkappa$ in C von aussen berührt; es giebt ausser ϱ keinen anderen Kreis, der mit dem Kreise $\varkappa$ congruent ist und ihn im Punkte C und nur in diesem einen Punkte von aussen berührt.

§ 28.

Ferner gilt der Satz:

Wenn irgend ein Kreis ι von dem Kreise $\varkappa$ umschlossen und berührt wird, so findet diese Berührung nur in einem Punkte statt.

Zum Beweise nehmen wir an, es seien Q, Q' zwei von einander verschiedene Berührungspunkte der Kreise ι und $\varkappa$. Dann führen wir eine Halbdrehung um Q' aus; durch diese geht $\varkappa$ in einen Kreis $\varkappa'$ über, der $\varkappa$ nur im Punkte Q' berührt, und ι geht in einen Kreis ι' über, der innerhalb $\varkappa'$ und daher gewiss ganz ausserhalb $\varkappa$ verläuft, beide Kreise $\varkappa$, $\varkappa'$ nur in Q berührend. Führen wir jetzt diejenige Drehung um den Mittelpunkt des Kreises $\varkappa$ aus, durch welche Q in Q' übergeht, so entsteht aus ι ein Kreis ι'', welcher ganz innerhalb $\varkappa$ und daher gewiss auch ausserhalb ι' liegt, diesen nur in Q' berührend. Damit haben wir zwei Kreise ι, ι'' die beide den

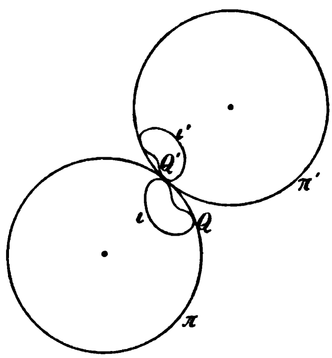


Fig. 3.

congruenten Kreis ι' in Q' und nur in diesem Punkte von aussen berühren, und dieser Umstand widerspricht dem Satze in § 27.

Die in § 27 und § 28 gefundenen Thatsachen bleiben gültig, wenn wir statt π, ϱ kleinere Kreise nehmen.

§ 29.

Es sei P der Mittelpunkt des in § 27 construirten Kreises π und Q ein Punkt auf π, ferner sei O ein beliebiger Punkt. Dann können wir unter Heranziehung der Bemerkung am Schluss von § 26 und wie in § 27, auf Grund des Satzes in § 20 gewiss einen Punkt E in solcher Nähe von O angeben, dass innerhalb des Kreises ι, der um die Mitte M der Strecke OE durch O und E gelegt wird, keine zu PQ congruente Strecke existirt und das Gleiche auch für jeden Punkt E' und den entsprechenden Kreis ι' gilt, wenn E' noch näher als E an dem Punkte O gelegen ist.

Alsdann gilt der Satz:

Der um die Mitte M (bez. M') von OE (bez. OE') durch O gelegte Kreis ι (bez. ι') wird von dem Kreise um O durch E (bez. E') ganz umschlossen und nur in E (bez. E') berührt.

Zum Beweise construiren wir zunächst denjenigen Kreis ω um O, der den Kreis ι umschliesst und zugleich berührt. Dieser Kreis ω ist nothwendig kleiner als der Kreis π; denn im anderen Falle würde der um O gelegte zu π congruente Kreis in's Innere des Kreises ι eintreten und dann müsste innerhalb ι eine zu PQ congruente Strecke existiren, was nicht der Fall sein sollte. Nach dem in § 28 bewiesenen Satze kann dieser Kreis ω mit ι nur einen Berührungspunkt haben; derselbe sei E_1. Wäre nun E_1 verschieden von E, so führe man um M diejenige Drehung aus, durch welche E_1 nach O gelangt; bei dieser Drehung gelangt dann O in einen Punkt E_2 des Kreises ι, der von E_1 verschieden sein müsste. Da die Strecke OE_1 der Strecke E_2O und also auch OE_2 congruent wird, so müsste E_2 ebenfalls ein Punkt des Kreises ω sein, dies wiederspräche dem Umstande, dass E_1 der einzige den Kreisen ω und ι gemeinsame Punkt sein sollte; d. h. der Kreis ω läuft durch E und damit ist unsere Behauptung bewiesen.

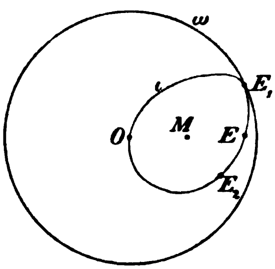


Fig. 4.

§ 30.

Bei den folgenden Entwickelungen legen wir die zu Beginn des § 29 construirte Strecke OE zu Grunde und ertheilen den Punkten O, E die Zahlenwerthe 0 bez. 1; sodann construiren wir die Mitte von OE und ertheilen dieser Mitte den Zahlenwerth $\frac{1}{2}$, ferner ertheilen wir den Mitten der Strecken $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ bez. $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ die Werthe $\frac{1}{4}$ bez. $\frac{3}{4}$ und dann den Mitten der Strecke $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ bez. $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$, $\left(\frac{3}{4}, 1\right)$ die Werthe $\frac{1}{8}$ bez. $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{7}{8}$; und so fort. Ferner führen wir mit der ganzen Strecke $(0, 1)$ um den Punkt 0 eine Halbdrehung aus und ertheilen allgemein demjenigen Punkte, der aus dem zur Zahl a gehörigen Punkte hervorgeht, den Zahlenwerth $-a$; sodann führen wir um den Punkt 1 eine Halbdrehung aus und ertheilen allgemein demjenigen Punkte, der aus dem zur Zahl a gehörigen Punkte hervorgeht, den Zahlenwerth $2-a$ und so fort denken wir uns abwechselnd Halbdrehungen um O und um E ausgeführt und die neu entstehenden Punkte entsprechend benannt, bis schliesslich jede Zahl a einem bestimmten Punkte zugeordnet erscheint, wenn a eine rationale Zahl bedeutet, deren Nenner eine Potenz von 2 ist.

§ 31.

Wir erkennen für diese Zuordnung leicht folgendes Gesetz:

Durch eine Halbdrehung um den zur Zahl a gehörigen Punkt geht jeder Punkt x in den Punkt $2a - x$ über. Wenn wir mithin erst eine Halbdrehung um den Punkt $O = 0$ und dann eine solche um den Punkt a ausführen, so wird jeder Punkt x in den Punkt $x + 2a$ verwandelt.

§ 32.

Um die Punkte, denen Zahlen zugehören, unter einander anzuordnen und die von ihnen begrenzten Strecken mit einander zu vergleichen, benutzen wir den in § 29 aufgestellten Satz über sich berührende Kreise in folgender Weise:

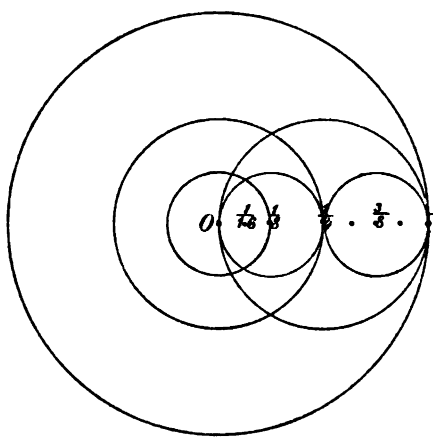


Fig. 5.

Der Kreis um den Punkt 0 durch den Punkt $\frac{1}{2}$ umschliesst ganz den Kreis um $\frac{1}{4}$ durch $\frac{1}{2}$, und da dieser die Kreise um $\frac{1}{8}$ durch $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ und um $\frac{3}{8}$ durch $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ umschliesst, die letzteren wiederum die Kreise um $\frac{1}{16}$ durch $\frac{2}{16} = \frac{1}{8}$, um $\frac{3}{16}$ durch $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$, um

$\frac{5}{16}$ durch $\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$, um $\frac{7}{16}$ durch $\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$, u. s. f., so erkennen wir, dass die Strecke $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ grösser als alle Strecken $(0, a)$ ist, wenn a eine positive rationale Zahl bedeutet, deren Nenner eine Potenz von 2 ist und deren Werth unterhalb $\frac{1}{2}$ liegt.

Ferner umschliesst der Kreis um 0 durch $\frac{1}{4}$ den Kreis um $\frac{1}{8}$ durch $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$. Der zweite umschlossene Kreis umschliesst seinerseits die Kreise um $\frac{1}{16}$ durch $\frac{2}{16}$ und um $\frac{3}{16}$ durch $\frac{4}{16}$, diese umschliessen wiederum die kleineren Kreise um $\frac{1}{32}, \frac{3}{32}, \frac{5}{32}, \frac{7}{32}$ u. s. f.; daraus erkennen wir, dass die Strecke $\left(0, \frac{1}{4}\right)$ grösser ist als alle Strecken $(0, a)$, wenn a eine positive rationale Zahl bedeutet, deren Nenner eine Potenz von 2 ist und deren Werth unterhalb $\frac{1}{4}$ liegt.

Weiter betrachten wir den Kreis um 0 durch $\frac{1}{8}$; derselbe umschliesst den Kreis um $\frac{1}{16}$ durch $\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$ und dieser wiederum umschliesst die kleineren Kreise um $\frac{1}{32}$ durch $\frac{2}{32}$ u. s. f.; daraus erkennen wir, dass die Strecke $\left(0, \frac{1}{8}\right)$ grösser als alle Strecken $(0, a)$ ist, wenn a eine positive rationale Zahl bedeutet, deren Nenner eine Potenz von 2 ist und deren Werth unterhalb $\frac{1}{8}$ liegt. Durch Fortsetzung dieses Schlussverfahrens finden wir das allgemeine Resultat:

Ist a eine positive rationale Zahl, deren Nenner eine Potenz von 2 ist und deren Werth unterhalb $\frac{1}{2^m}$ liegt, so ist die Strecke $(0, a)$ stets kleiner als die Strecke $\left(0, \frac{1}{2^m}\right)$.

§ 33.

Nunmehr sind wir im Stande, der Reihe nach folgende Hilfssätze zu beweisen:

Die Punkte, die den Zahlen $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots$ entsprechen, convergiren gegen den Punkt 0.

Denn im entgegengesetzten Falle müssten, da die Strecken $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, $\left(0, \frac{1}{4}\right)$, $\left(0, \frac{1}{8}\right)$, $\left(0, \frac{1}{16}\right), \cdots$ beständig kleiner werden, die Punkte $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots$ ihre Verdichtungsstellen auf einem bestimmten wahren Kreise $\varkappa$

um den Punkt 0 haben. Es sei etwa $\frac{1}{2^{n_1}}, \frac{1}{2^{n_2}}, \frac{1}{2^{n_3}}, \cdots$ eine Reihe von Punkten, die gegen einen Punkt K auf $\varkappa$ convergiren: dann mögen die Punkte

$$\frac{1}{2^{n_1+1}}, \frac{1}{2^{n_2+1}}, \frac{1}{2^{n_3+1}}, \cdots$$

im Punkte K^* eine Verdichtungsstelle haben. Aus dem Satze in § 25 geht hervor, dass dann K^* die Mitte der Strecke OK sein müsste; dies widerspricht unter Hinzuziehung der am Schlusse von § 27 gefundenen Thatsache dem Umstande, dass K^* ebenfalls auf dem Kreise $\varkappa$ liegt.

§ 34.

Es mögen $a_1, a_2, a_3, \cdots$ positive rationale Zahlen bedeuten, deren Nenner Potenzen von 2 sind. Wenn dann die unendliche Zahlenreihe $a_1, a_2, a_3, \cdots$ gegen 0 convergirt, so convergirt auch die diesen Zahlen entsprechende Punktreihe gegen den Punkt 0.

Zum Beweise wählen wir die ganzen Exponenten $n_1, n_2, n_3, \cdots$ derart dass

$$a_1 < \frac{1}{2^{n_1}}, \; a_2 < \frac{1}{2^{n_2}}, \; a_3 < \frac{1}{2^{n_3}}, \cdots$$

wird, und die Reihe $\frac{1}{2^{n_1}}, \frac{1}{2^{n_2}}, \frac{1}{2^{n_3}}, \cdots$ ebenfalls gegen 0 convergirt. Da zufolge des Satzes in § 32 allgemein der Punkt a_i innerhalb des Kreises um 0 durch $\frac{1}{2^{n_i}}$ liegt und nach dem in § 33 bewiesenen Hilfssatze die Kreise um 0 durch $\frac{1}{2^{n_1}}, \frac{1}{2^{n_2}}, \frac{1}{2^{n_3}}, \cdots$ gegen 0 convergiren, so folgt sofort auch die zu beweisende Behauptung.

§ 35.

Endlich gilt der folgende Satz:

Es seien $a_1, a_2, a_3 \cdots$ eine unendliche Reihe von rationalen Zahlen, deren Nenner Potenzen von 2 sind und die gegen irgend eine reelle Zahl a convergiren: dann convergiren die entsprechenden Punkte $a_1, a_2, a_3, \cdots$ ebenfalls gegen einen bestimmten Punkt.

Zum Beweise nehmen wir das Gegentheil an: es seien etwa V' und V'' zwei von einander verschiedene Verdichtungsstellen der Punkte $a_1, a_2, a_3, \cdots$ und zwar mögen die Punkte $a_{1'}, a_{2'}, a_{3'}, \cdots$ gegen V' und $a_{1''}, a_{2''}, a_{3''}, \cdots$ gegen V'' convergiren. Nach den Bemerkungen in § 31 giebt es für jeden Punkt a_k eine aus zwei Halbdrehungen zusammengesetzte Bewegung, die allgemein den Punkt $a_{i'}$ in den Punkt $a_{i'} - a_k$ und zugleich den Punkt $a_{i''}$ in den Punkt $a_{i''} - a_k$ überführt, und da sowohl die Zahlenwerthe $a_{i'} - a_k$ als auch die Zahlenwerthe $a_{i''} - a_k$ mit wachsenden Indices beliebig nahe an 0 kommen, so erkennen wir mit Rücksicht auf den Satz in § 34, dass es Bewegungen giebt, die einen Punkt in beliebiger Nähe von V' und zugleich einen Punkt in beliebiger Nähe von V'' in beliebige Nähe des Punktes 0 bringen. Dies ist im Hinblick auf Axiom III einer oft angewandten Schlussweise zufolge nicht möglich.

§ 36.

Ertheilen wir nun dem Punkte, gegen den die Punkte $a_1, a_2, a_3, \cdots$ convergiren, den Zahlenwerth a, so ist damit überhaupt jedem reellen Zahlenwerthe ein bestimmter Punkt unserer Ebene zugeordnet; wir nennen das System aller dieser Punkte eine *wahre Gerade*, so dass also *die wahre Gerade dasjenige System von Punkten ist, die aus den Punkten 0, E entstehen, wenn man fortgesetzt die Mitten nimmt, Halbdrehungen ausführt und die Häufungsstellen aller erhaltenen Punkte hinzufügt. Sämmtliche durch Bewegung aus dieser wahren Geraden entstehenden Punktsysteme sind wiederum wahre Gerade. Die Gerade zerfällt vom Punkte 0 aus in zwei Halbgerade.*

§ 37.

Mit Benutzung des Hilfssatzes in § 25 erkennen wir leicht, dass bei der Halbdrehung um einen beliebigen Punkt a unserer wahren Geraden allgemein der Punkt x in den Punkt $2a - x$ übergeht; bei der Ausführung zweier Halbdrehungen um die Punkte 0 und a geht also allgemein x in $x + 2a$ über.

Aus dem Satze in § 35 folgern wir leicht, dass auch dann, wenn $a_1, a_2, a_3, \cdots$ beliebige gegen a convergente Zahlen sind, die entsprechenden Punkte $a_1, a_2\ a_3, \cdots$ stets gegen den entsprechenden Punkt a convergiren; d. h. *die wahre Gerade ist eine stetige Curve.*

§ 38.

Versuchen wir die Annahme, dass es zwei Zahlenwerthe a und b gäbe, die auf der wahren Geraden den nämlichen Punkt P der Ebene darstellen. Der Punkt $\frac{a+b}{2}$ ist die Mitte der Strecke (a, b); derselbe müsste daher mit dem Punkte P übereinstimmen. Das Gleiche müsste dann von den Mitten der Strecken $\left(a, \frac{a+b}{2}\right)$ und $\left(\frac{a+b}{2}, b\right)$ d. h. den Punkten $\frac{3a+b}{4}$ und $\frac{a+3b}{4}$ gelten. Indem wir fortgesetzt die Mitten nehmen, erkennen wir, dass sämmtliche Punkte $\frac{A_n a + B_n b}{2^n}$, wo A_n, B_n positive ganze Zahlen mit der Summe 2^n bedeuten, mit P identisch sein müssten, und hieraus folgt nach § 37, dass überhaupt allen zwischen a und b gelegenen reellen Zahlen der nämliche Punkt P der Geraden entsprechen müsste. Dieser Widerspruch zeigt, dass *die wahre Gerade keinen Doppelpunkt besitzt.* Ebenso erkennen wir, dass *die wahre Gerade nicht in sich selbst zurücklaufen kann.*

§ 39.

Zwei Gerade haben höchstens einen Punkt gemein.

In der That, hätten sie die zwei Punkte A und B gemein und entsprächen diesen Punkten auf der einen Graden die Zahlenwerthe a, b und auf der andern Geraden die Zahlenwerthe a', b', so müssten nach § 24 auch die Mitten $\frac{a+b}{2}$ und $\frac{a'+b'}{2}$ mit einander übereinstimmen. Indem wir fortgesetzt wie in § 38 die Mitten nehmen, schliessen wir in ähnlicher Weise, dass sämmtliche zwischen a und b bez. a' und b' gelegenen Punkte auf beiden Geraden und mithin diese Geraden selbst mit einander identisch sind.

§ 40.

Unsere wahre Gerade schneidet jeden um einen ihrer Punkte, etwa um den Punkt 0 *gelegten Kreis.*

In der That, bei der entgegengesetzten Annahme sind nur zwei Fälle möglich: entweder es giebt einen bestimmten Kreis $\varkappa$ um den Punkt 0, der von der wahren Geraden g noch getroffen wird, während die den Kreis $\varkappa$ umschliessenden Kreise um 0 von g nicht mehr getroffen werden; oder es giebt einen bestimmten Kreis $\varkappa$, der von g nicht getroffen wird, während alle innerhalb $\varkappa$ verlaufenden Kreise um den Punkt 0 von g getroffen werden.

Da die Gerade g ihrer Construction gemäss über jeden ihrer Punkte hinaus stets fortgesetzt werden kann und, wie in § 38 gezeigt worden ist, keinen Doppelpunkt besitzen darf, so müsste es im *ersteren* Falle gewiss einen innerhalb $\varkappa$ verlaufenden Kreis um den Punkt 0 geben, den sie auf derselben Seite von 0 an zwei Stellen A, B träfe. Führt man nun eine Drehung um den Punkt 0 aus, durch welche A in B übergeht, so würde dabei unsere Gerade g in eine andere übergehen, welche g ausser in 0 noch in B schnitte; dies ist dem in § 39 bewiesenen Satze zufolge unmöglich.

Im *zweiten* Falle bezeichne K einen Punkt des Kreises $\varkappa$, in dessen beliebige Nähe die wahre Gerade g gelangt. Man schlage dann um K einen wahren Kreis π^*, der kleiner als $\varkappa$ ist und g etwa im Punkte M treffe. Sodann schlage man um M einen Kreis π, der grösser als π^* und kleiner als $\varkappa$ ist. Dieser Kreis π enthält, da er grösser als π^* ist, den

Punkt K im Inneren und da er kleiner als $\varkappa$ ist, so ergiebt unsere Annahme in Verbindung mit dem vorhin Bewiesenen, dass die durch M gehende Gerade g stetig innerhalb $\varkappa$ verläuft, nach der einen oder anderen Richtung hin verlängert je durch einen Punkt auf $\varkappa$ aus dem Kreise $\varkappa$ heraustritt und dann nicht mehr in den Kreis $\varkappa$ zurückläuft. Da die Gerade g andererseits dem innerhalb $\varkappa$ gelegenen Punkte K beliebig nahe kommen soll, so enthält sie nothwendig den Punkt K selbst; hierin liegt ein Widerspruch mit unserer gegenwärtigen Annahme.

Da das System aller Kreise um einen Punkt die ganze Ebene lückenlos bedeckt, so folgt zugleich aus dem Vorigen, dass *irgend zwei Punkte in unserer ebenen Geometrie stets durch eine wahre Gerade verbunden werden können.*

§ 41.

Wir haben nun zu zeigen, dass *die Congruenzaxiome in unserer ebenen Geometrie gültig sind.*

Zu dem Zwecke wählen wir einen bestimmten wahren Kreis $\varkappa$ aus und führen für die Punkte desselben nach § 18 die Parameterdarstellung durch den Winkel ω ein: dann wird, wenn ω die Werthe 0 bis 2π erhält, der wahre Kreis in einem bestimmten Sinne durchlaufen. Aus dieser Einführung folgt für jeden anderen mit $\varkappa$ congruenten Kreis ebenfalls ein bestimmter Umlaufssinn, nämlich derjenige, der sich ergiebt, wenn wir den Mittelpunkt des Kreises $\varkappa$ nach § 22 durch zwei hintereinander angewandte Drehungen mit dem Mittelpunkt des vorgelegten Kreises zur Deckung bringen. Da es im Hinblick auf den zu Anfang dieser Abhandlung definirten Begriff der Bewegung nicht möglich ist, den ursprünglichen Kreis $\varkappa$ mit sich selbst im umgekehrten Umlaufssinn zur Deckung zu bringen, so existirt in der That für jeden Kreis ein bestimmter Umlaufssinn.

Jetzt nehmen wir zwei von einem Punkte M ausgehende Halbgeraden, die nicht beide zusammen eine wahre Gerade ausmachen, schlagen um M einen zu $\varkappa$ congruenten Kreis und fixiren dasjenige von den Halbgeraden ausgeschnittene Stück dieses Kreises, welches einem unterhalb der Zahl π liegenden Parameterintervall entspricht. Der festgesetzte Umlaufssinn führt dann innerhalb des fixirten Kreisbogenstückes von einer der beiden Halbgeraden zu der anderen Halbgeraden: wir bezeichnen die erstere Halbgerade als den rechten, die letztere Halbgerade als den linken Schenkel des Winkels zwischen beiden Halbgeraden, während das Parameterintervall ($< \pi$) selbst das Mass für diesen Winkel abgiebt. Aus unserem Begriffe der Bewegung folgt dann der erste Congruenzsatz für zwei Dreiecke in folgender Gestalt:

Wenn für zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ die Congruenzen

$$AB \equiv A'B',\ AC \equiv A'C'\ \sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'C'$$

gelten, wenn ferner AB *bez.* $A'B'$ *die rechten,* AC *bez.* $A'C'$ *die linken Schenkel der Winkel* BAC *bez.* $B'A'C'$ *sind, so gelten stets auch die Congruenzen*

$$\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C' \quad \textit{und} \quad \sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle A'C'B',$$
$$BC \equiv B'C'.$$

§ 42.

Nachdem in § 30—§ 40 die wahre Gerade definirt und ihre Eigenschaften abgeleitet worden sind, haben wir zwei Fälle zu unterscheiden:

Erstens nehmen wir an, dass es durch einen Punkt nur *eine* Gerade giebt, die eine gegebene Gerade nicht schneidet (Parallelenaxiom). Für unsere Ebene gelten dann die sämmtlichen Axiome, die ich in meiner Abhandlung über die Grundlagen der Geometrie aufgestellt habe, nur dass das Congruenzaxiom IV, 6 dort in der vorhin in § 41 aufgestellten engeren Fassung zu nehmen ist. Auch bei dieser engeren Fassung des letzten Congruenzaxioms folgt mit Nothwendigkeit die Euklidische ebene Geometrie*).

Zweitens nehmen wir an, dass es durch jeden Punkt A zwei Halbgeraden giebt, die nicht zusammen ein und dieselbe Gerade ausmachen, und die eine gegebene Gerade nicht schneiden, während jede in dem durch sie gebildeten Winkelraum gelegene von A ausgehende Halbgerade die gegebene Gerade schneidet.

Mit Hilfe der Stetigkeit folgt dann leicht, dass auch umgekehrt zu irgend zwei von einem Punkte A ausgehenden Halbgeraden, die nicht zusammen ein und dieselbe Gerade ausmachen, stets eine bestimmte Gerade g gehört, die jene beiden Halbgeraden nicht schneidet, dagegen von jeder anderen Halbgeraden getroffen wird, die von A ausgeht und in dem Winkelraum zwischen den beiden gegebenen Halbgeraden verläuft. Unter diesen Umständen folgt dann die Bolyai-Lobatschefsky'sche ebene Geometrie, auch wenn wir das Congruenzaxiom IV, 6 in der vorhin aufgestellten engeren Fassung zu Grunde legen**).

Zum Schlusse möchte ich auf den charakteristischen Unterschied hinweisen, der uns entgegentritt, wenn wir die vorstehende Begründung der

*) Vgl. dazu meine demnächst in den Proceedings of the London mathematical society erscheinende Abhandlung „Ueber den Satz von der Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreiecke".

**) Vgl. meine Begründung der Bolyai-Lobatschefsky'schen Geometrie, die ich demnächst in diesen Annalen zu veröffentlichen gedenke.

Geometrie mit derjenigen vergleichen, die ich in meiner Festschrift „Grundlagen der Geometrie“ *) zu geben versucht habe. In dieser Festschrift ist eine solche Anordnnng der Axiome befolgt worden, wobei die Stetigkeit hinter allen übrigen Axiomen an *letzter* Stelle gefordert wird, so dass dann naturgemäss die Frage in den Vordergrund tritt, inwieweit die bekannten Sätze und Schlussweisen der elementaren Geometrie von der Forderung der Stetigkeit unabhängig sind. In der vorstehenden Untersuchung dagegen wird die Stetigkeit vor allen übrigen Axiomen an *erster* Stelle durch die Definitionen der Ebene und der Bewegung gefordert, so dass hier vielmehr die wichtigste Aufgabe darin bestand, das geringste Mass von Forderungen zu ermitteln, um aus demselben unter weitester Benutzung der Stetigkeit die elementaren Gebilde der Geometrie (Kreis und Gerade) und ihre zum Aufbau der Geometrie nothwendigen Eigenschaften gewinnen zu können. In der That hat die vorstehende Untersuchung gezeigt, dass hierzu die in den obigen Axiomen I—III ausgesprochenen Forderungen hinreichend sind.

Göttingen, den 10. Mai 1902.

*) Leipzig 1899. Vergleiche auch die mit Zusätzen versehenen Uebersetzungen ins Französische (Annales de l'école Normale 1900) und Englische (Chicago 1902).

Beitrag zur Auflösung von Differentialgleichungen zweiter Ordnung, denen gewisse bestimmte Integrale genügen.

Von

J. H. Graf in Bern.

Im 45ten Band dieser Zeitschrift S. 235 u. s. f. haben wir im Abschnitte B darauf hingewiesen, dass man bei der Integration linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung auch auf indirectem Wege vorgehen könne, indem man eine Differentialgleichung bildet, der eine bestimmte Integralform zukommt; die allgemeine Methode ist kurz folgende:

$$(1)\ (a_0x+b_0)\frac{\partial^n y}{\partial x^n}+(a_1x+b_1)\frac{\partial^{n-1}y}{\partial x^{n-1}}+\cdots+(a_{n-1}x+b_{n-1})\frac{\partial y}{\partial x}+(a_nx+b_n)y=0,$$

sei die Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit linearen Coefficienten.

$$f(x) \quad \text{und} \quad g(x)$$

seien zwei ganze Functionen n^{ten} Grades in x,

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n,$$
$$g(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_{n-1}x + b_n;$$

dann kann (1) dargestellt werden in der Form

$$(2) \qquad x f\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) y + g\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) y = 0.$$

Dieser Gleichung versuche man durch ein bestimmtes Integral zu genügen, das die Form habe

$$y = \int e^{xt}\frac{h(t)}{f(t)}\,dt,$$

wo $h(t)$ eine noch zu bestimmende Function von t allein, ferner die Grenzen constant und noch aus den Bedingungen zu finden sind.

Da

$$f\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) e^{xt} = e^{xt}f(t),$$

$$g\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) e^{xt} = e^{xt}g(t),$$

so giebt die Anwendung von (2) auf das Integral

$$\int e^{xt} f(t) \frac{h(t)}{f(t)}\, x\, dt + \int e^{xt} h(t) \frac{g(t)}{f(t)}\, dt = 0,$$

$$(3) \qquad \int e^{xt} h(t)\, x\, dt \quad + \int e^{xt} h(t) \frac{g(t)}{f(t)}\, dt = 0.$$

Der erste Term wird partiell integrirt, er wird

$$= \{e^{xt} h(t)\} - \int e^{xt} h'(t)\, dt,$$

in (3) substituirt, giebt

$$\underbrace{\{e^{xt} h(t)\}}_{\mathrm{I}} + \int \underbrace{e^{xt} h(t) \left\{\frac{g(t)}{f(t)} - \frac{h'(t)}{h(t)}\right\}}_{\mathrm{II}} dt = 0$$

als Bedingungsgleichung.

Dieselbe wird am bequemsten dadurch erfüllt, dass die Grenzen so ausgewählt werden, dass der Ausdruck I verschwindet und dass längs des ganzen Integrationsweges II das gleiche thut. Dann folgt

$$(4) \qquad \begin{aligned} \frac{g(t)}{f(t)} - \frac{h'(t)}{h(t)} &= 0, \\ \frac{h'(t)}{h(t)}\, dt &= \frac{g(t)}{f(t)}\, dt, \\ \operatorname{Log} h(t) &= \int \frac{g(t)}{f(t)}\, dt. \end{aligned}$$

Der leichteste Fall ist der, bei welchem der Zähler $g(t)$ den Nenner $f(t)$ nicht im Grad übertrifft und alle Wurzeln der Gleichung $f(t)$ verschieden und wirklich in der Anzahl n vorhanden sind. Da nun im Ausdruck für $f(x)$ der Coefficient a_0 nicht verschwinden darf, so kann man es immer so einrichten, dass die erste Voraussetzung erfüllt wird, indem man die Variable x so um eine additive Constante verändert, dass b_0 verschwindet und somit die Function $g(t)$ den $(n-1)^{\text{ten}}$ Grad nicht übersteigt. Schliesslich darf man noch $a_0 = 1$ setzen, dann ist

$$f(t) = (t-\alpha_1)(t-\alpha_2)\cdots(t-\alpha_n) = \Pi(t-\alpha)$$

und der Bruch $\frac{g(t)}{f(t)}$ lässt sich in Partialbrüche zerlegen

$$\frac{g(t)}{f(t)} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{A_\lambda}{t-\alpha_\lambda}.$$

Irgend ein A ist nach bekannter Methode

$$A = \frac{g(\alpha)}{f'(\alpha)}.$$

Daher

$$\text{Log}\, h(t) = \sum \int \frac{A}{t-\alpha}\, dt = A \sum \text{Log}\,(t-\alpha)$$
$$= \sum \text{Log}\,(t-\alpha)^A,$$

also

(5) $$h(t) = \Pi(t-\alpha)^A.$$

Die Bedingung $\{e^{xt}h(t)\}$ geht über in $\{e^{xt}\Pi(t-\alpha)^A\}$ und es sind die Grenzen des bestimmten Integrals so zu wählen, dass $\{e^{xt}\Pi(t-\alpha)^A\}$ längs des Weges verschwindet. Angenommen, auch alle Exponenten A wären negativ, so giebt es doch immer eine Gegend des Horizonts, wo e^{xt} in einer alle algebraischen Ordnungen übertreffenden Kleinheit verschwindet. Von dieser Stelle aus kann man um jeden der n Pole α besonders eine Schleife legen. Einer jeden solchen Schleife entspricht eines der n particulären Integrale von der Form

$$y = \int e^{xt}\Pi(t-\alpha)^{A-1}dt.$$

I. Beispiel.

(1) $$x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + a\frac{\partial y}{\partial x} - b^2 xy = 0.$$

$x = \frac{x_1}{b}$, $a = 2a_1 + 1$, dann folgt

$$\frac{x_1}{b}\cdot b^2\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} + (2a_1+1)b\frac{\partial y}{\partial x_1} - b^2\cdot\frac{x_1}{b}\cdot y = 0,$$

lassen wir die Accente weg

(2) $$x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + (2a+1)\frac{\partial y}{\partial x} - xy = 0,$$

$$x^2 = 4z, \quad 4\partial z = 2x\partial x, \quad \partial z = \frac{1}{2}x\partial x,$$

beide Seiten mit $z = \frac{1}{4}x^2$ dividirt,

$$\frac{\partial z}{z} = 2\frac{\partial x}{x}, \quad \frac{\partial x}{x} = \frac{1}{2}\frac{\partial z}{z}, \quad x\frac{\partial}{\partial x} = 2z\frac{\partial}{\partial z},$$

dann ist

$$x^2\frac{\partial^2 y}{dx^2} + x\frac{\partial y}{\partial x} = x\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial y}{\partial x}\right)$$
$$= 4z\frac{\partial}{\partial z}\left(z\frac{\partial y}{\partial z}\right)$$
$$= 4\left\{z^2\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + z\frac{\partial y}{\partial z}\right\}.$$

Man multiplicire daher (2) mit x und setze ein, so folgt

$$4\left(z^2 \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + z \frac{\partial y}{\partial z}\right) + 4az \frac{\partial y}{\partial z} - 4zy = 0$$

durch $4z$ gekürzt,

$$z \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + (a+1) \frac{\partial y}{\partial z} - y = 0. \tag{3}$$

Nach der allgemeinen Theorie ist nun hier

$$f(t) = t^2,$$

$$g(t) = (a+1)t - 1,$$

$$\frac{g(t)}{f(t)} = \frac{a+1}{t} - \frac{1}{t^2},$$

$$\operatorname{Log} h(t) = \int \frac{g(t)}{f(t)} dt = \int \left(\frac{a+1}{t} - \frac{1}{t^2}\right) dt = (a+1) \operatorname{Log} t + \frac{1}{t},$$

$h(t) = e^{\frac{1}{t}} t^{a+1}$ und es muss längs des ganzen Integrationsweges die Bedingung erfüllt sein

$$e^{zt} e^{\frac{1}{t}} t^{a+1} = \left\{ e^{zt + \frac{1}{t}} t^{a+1} \right\} = 0.$$

Dann stecken die particulären Integrale, welche der Gleichung (3) genügen, in der Form

$$y = \int e^{zt + \frac{1}{t}} t^{a-1} dt,$$

und es lassen sich, wenn z positiv vorausgesetzt ist, folgende zwei Integrationswege gebrauchen:

I. Fall, Weg von der negativen Seite von Null zur negativen Seite von ∞,

II. Fall, Weg, eine von der negativen Seite von ∞ um Null geworfene Schleife.

I. Fall:

$$y = \int_0^\infty e^{zt + \frac{1}{t}} t^{a-1} dt, \quad t = -\frac{2}{x} e^{\varphi}, \quad z = \frac{1}{4} x^2,$$

dann erhält man statt der Grenzen 0 und ∞ die Grenzen $-\infty$ und ∞

$$y = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{1}{4} x^2 \cdot -\frac{2}{x} e^{\varphi} - \frac{x}{2} e^{-\varphi}} \left(-\frac{2}{x}\right)^{a-1} \varphi^{a-1} \cdot -\frac{2}{x} e^{\varphi} d\varphi,$$

$$y = \left(\frac{x}{2}\right)^{-a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x}{2}(e^{\varphi} + e^{-\varphi}) + a\varphi} d\varphi,$$

die Potenz $(-1)^a$ kann als Constante weggelassen werden,

$$y = \left(\frac{x}{2}\right)^{-a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x \cos \varphi + a\varphi}\, d\varphi = \left(\frac{x}{2}\right)^{-a} \left\{ \int_0^{\infty} + \int_{-\infty}^{0} \right\},$$

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-x \cos \varphi + a\varphi}\, d\varphi = \int_{\infty}^{0} e^{-x \cos \varphi - a\varphi} - d\varphi = \int_0^{\infty} e^{-x \cos \varphi - a\varphi}\, d\varphi,$$

$$y = \left(\frac{x}{2}\right)^{-a} \int_0^{\infty} e^{-x \cos \varphi} (e^{a\varphi} + e^{-a\varphi})\, d\varphi,$$

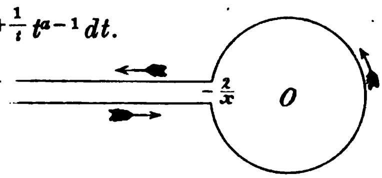
(4) $$y = 2 \left(\frac{x}{2}\right)^{-a} \int_0^{\infty} e^{-x \cos \varphi} \cos a\varphi\, d\varphi,$$

als *erstes particuläres Integral.*

II. Fall: Man setze $t = \frac{2}{x} e^{\varphi}$, dann läuft φ von $N - i\pi$ bis $N + i\pi$, wo N eine sehr grosse zum unendlich werden bestimmte Zahl bedeutet.

Führt man zuerst φ von $N - i\pi$ bis $-i\pi$, dann von da bis $i\pi$ und von da bis $i\pi$ und endlich wieder zu $N + i\pi$, so geht t von $-\frac{2}{x} e^N$ bis $-\frac{2}{x}$, dann rechtläufig im Kreise um Null zu $-\frac{2}{x}$ zurück und von da wieder bis $-\frac{2}{x} e^N$, also

$$y = \int_{-\frac{2}{x} e^N} e^{zt + \frac{1}{t}} t^{a-1}\, dt.$$



In diesem Sinne sei also der Weg von $N - i\pi$ bis $N + i\pi$ aufgefasst. Setzt man

$$t = \frac{2}{x} e^{\varphi}, \quad z = \frac{1}{4} x^2,$$

so erhält man

$$y = \int_{N - i\pi}^{N + i\pi} e^{\frac{1}{4} x^2 \cdot \frac{2}{x} e^{\varphi} + \frac{x}{2} e^{-\varphi}} \left(\frac{2}{x}\right)^{a-1} e^{\varphi(a-1)} \cdot \frac{2}{x} e^{\varphi}\, d\varphi,$$

$$y = \left(\frac{x}{2}\right)^{-a} \int_{N - i\pi}^{N + i\pi} e^{\frac{x}{2}\left(e^{\varphi} + e^{-\varphi}\right)} e^{a\varphi}\, d\varphi,$$

(5) $$y = \left(\frac{x}{2}\right)^{-a} \int_{N - i\pi}^{N + i\pi} e^{x \cos \varphi + a\varphi}\, d\varphi.$$

Man betrachte zuerst

$$\int_{-i\pi}^{i\pi} e^{x\mathfrak{Cos}\,\varphi + a\varphi}\, d\varphi = \int_{-i\pi}^{0} + \int_{0}^{i\pi},$$

$$(\alpha) \qquad \int_{-i\pi}^{0} e^{x\mathfrak{Cos}\,\varphi + a\varphi}\, d\varphi = \int_{\pi}^{0} e^{x\cos\varphi} e^{-ia\varphi} \,.\, -i\,d\varphi = i\int_{0}^{\pi} e^{x\cos\varphi - ia\varphi}\, d\varphi,$$

$$(\beta) \qquad \int_{0}^{i\pi} e^{x\mathfrak{Cos}\,\varphi + a\varphi}\, d\varphi = i\int_{0}^{\pi} e^{x\cos\varphi + ia\varphi}\, d\varphi,$$

(α) und (β) zusammengenommen bekommt man

$$\text{I.} \qquad 2i\int_{0}^{\pi} e^{x\cos\varphi} \cos a\varphi\, d\varphi\,.$$

Nun betrachte man

$$\underbrace{\int_{N-i\pi}^{-i\pi} e^{x\mathfrak{Cos}\,\varphi + a\varphi}\, d\varphi}_{1)} + \underbrace{\int_{i\pi}^{N+i\pi} e^{x\mathfrak{Cos}\,\varphi + a\varphi}\, d\varphi}_{2)}.$$

In 1) setze man $\varphi = \varphi_1 - i\pi$ und lasse hernach die Accente weg, dann werden die Grenzen N und 0

$$1) \qquad = \int_{N}^{0} e^{x\mathfrak{Cos}\,(\varphi - i\pi) + a(\varphi - i\pi)}\, a\, d\varphi,$$

$$\mathfrak{Cos}\,(\varphi - i\pi) = -\,\mathfrak{Cos}\,\varphi,$$

$$(\gamma) \qquad = \int_{N}^{0} e^{-x\mathfrak{Cos}\,\varphi + a\varphi} \,.\, e^{-ai\pi}\, d\varphi = -\int_{0}^{N} e^{-x\mathfrak{Cos}\,\varphi + a\varphi} \,.\, e^{-ai\pi}\, d\varphi.$$

In 2) setze man $\varphi = \varphi_1 + i\pi$ und lasse hernach die Accente weg, dann werden die Grenzen zu 0 und N

$$(\delta) \quad 2) \qquad = \int_{0}^{N} e^{x\mathfrak{Cos}\,(\varphi - i\pi) + a(\varphi + i\pi)}\, d\varphi = \int_{0}^{N} e^{-x\mathfrak{Cos}\,\varphi + a\varphi} \,.\, e^{ai\pi}\, d\varphi,$$

(γ) und (δ) zusammen ergeben, wenn N nun endlich gross wird,

$$\text{II.} \qquad \int_{0}^{N} e^{-x\mathfrak{Cos}\,\varphi + a\varphi} \{e^{ia\pi} - e^{-ia\pi}\}\, d\varphi = 2i\int_{0}^{N} e^{-x\mathfrak{Cos}\,\varphi + a\varphi} \sin a\pi\, d\varphi\,.$$

Setzt man I. und II. ein, so erhält man als *zweites particuläres Integral*

$$(6) \qquad y = 2i\left(\frac{x}{2}\right)^{-a}\left\{\int_0^\pi e^{x\cos\varphi}\cos a\varphi\, d\varphi + \sin a\pi\int_0^\infty e^{-x\operatorname{Cos}\varphi + a\varphi}\, d\varphi\right\}.$$

Hieran schliessen wir einige Betrachtungen. Es sei

$$f(a, x) = \int_0^\pi e^{x\cos\varphi}\cos a\varphi\, d\varphi + \sin a\pi\int_0^\infty e^{-x\operatorname{Cos}\varphi + a\varphi}\, d\varphi,$$

$$f(-a, x) = \int_0^\pi e^{x\cos\varphi}\cos a\varphi\, d\varphi - \sin a\pi\int_0^\infty e^{-x\operatorname{Cos}\varphi - a\varphi}\, d\varphi,$$

$$f(a, x) - f(-a, x) = 2\sin a\pi\int_0^\infty e^{-x\operatorname{Cos}\varphi}\cos a\varphi\, d\varphi.$$

Das *erste particuläre Integral* (4) kann somit dargestellt werden

$$(7) \qquad y = \left(\frac{x}{2}\right)^{-a}\frac{f(a, x) - f(-a, x)}{\sin a\pi}$$

und das *zweite* (5)

$$(8) \qquad y = 2i\left(\frac{x}{2}\right)^{-a} f(a, x).$$

Andrerseits kann nach Formel (5) $f(a, x)$ auch dargestellt werden

$$(9) \qquad f(a, x) = \frac{1}{2i}\int_{N - i\pi}^{N + i\pi} e^{x\operatorname{Cos}\varphi + a\varphi}\, d\varphi,$$

und mittelst dieses Ausdruckes kann man $f(a, x)$ in eine Reihe von steigenden Potenzen von x entwickeln.

Man hat

$$e^{a\varphi} = \sum_{n=0}^{n=\infty}\binom{2n - a}{n}(2\operatorname{Cos}\varphi)^{a - 2n - 1}\, 2\operatorname{Sin}\varphi.$$

$$f(a, x) = \frac{1}{2i}\int_{N - i\pi}^{N + i\pi} e^{x\operatorname{Cos}\varphi}\sum_{n=0}^{n=\infty}\binom{2n - a}{n}(2\operatorname{Cos}\varphi)^{a - 2n - 1}\, 2\operatorname{Sin}\varphi\, d\varphi.$$

Nun sei $x\operatorname{Cos}\varphi = u$, $x\operatorname{Sin}\varphi\, d\varphi = du$,

$$2\operatorname{Cos}\varphi = \frac{2u}{x}, \quad \operatorname{Cos}\varphi = \frac{u}{x}, \quad \operatorname{Sin}\varphi\, d\varphi = \frac{1}{x}\, du,$$

der Weg wird zu einer Schleife von $-\infty$ um Null, also

$$f(a,x) = \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{n=\infty}\binom{2n-a}{n}\int\limits_{-\infty}^{(0)} e^u\left(\frac{2u}{x}\right)^{a-2n-1}\frac{2}{x}\,du$$

$$= \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{n=\infty}\binom{2n-a}{n}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-a}\underbrace{\int\limits_{-\infty}^{(0)} e^u u^{a-2n-1}\,du}_{\frac{2i\pi}{\Gamma(2n-a+1)}\;*)},$$

$$f(a,x) = \pi\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{\binom{2n-a}{n}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-a}}{\Gamma(2n-a+1)},$$

(10) $$f(a,x) = \pi\left(\frac{x}{2}\right)^{-a}\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{\left(\frac{1}{4}x^2\right)^n}{n!\,(n-a)!}.$$

Führen wir die Function $F(a,x)$ mit neuem Parameter a ein, wo

$$F(a,x) = \sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{x^n}{n!\,(n+a)!},$$

so ist obige Summe

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{\left(\frac{1}{u}x^2\right)^n}{n!\,(n-a)!} = F\left(-a,\ \frac{1}{4}x^2\right),$$

also

(11) $$f(a,x) = \pi\left(\frac{x}{2}\right)^{-a}F\left(-a,\ \frac{1}{4}x^2\right).$$

In Berücksichtigung von (9) hat man somit

$$\pi\left(\frac{x}{2}\right)^{-a}F\left(-a,\ \frac{1}{4}x^2\right) = \frac{1}{2i}\int\limits_{N-i\pi}^{N+i\pi} e^{x\cos\varphi + a\varphi}\,d\varphi,$$

oder

(12) $$\left(\frac{x}{2}\right)^{-a}F\left(-a,\ \frac{1}{4}x^2\right) = \frac{1}{2i\pi}\int\limits_{N-i\pi}^{N+i\pi} e^{x\cos\varphi + a\varphi}\,d\varphi,$$

und unter Berücksichtigung von (6)

---

*) Graf, Einleitung in die Theorie der Gammaf. u. Euler'schen Integrale S. 31 Formel 39.

$$(13)\quad \left(\frac{x}{2}\right)^{-a} F\left(-a, \frac{1}{4}x^2\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{x\cos\varphi}\cos a\varphi\, d\varphi + \frac{\sin a\pi}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-x\operatorname{Cof}\varphi + a\varphi}\, d\varphi,$$

$$(14)\quad \left(\frac{x}{2}\right)^{a} F\left(\;a, \frac{1}{4}x^2\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{x\cos\varphi}\cos a\varphi\, d\varphi - \frac{\sin a\pi}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-x\operatorname{Cof}\varphi - a\varphi}\, d\varphi.$$

Subtrahirt man (14) von (13)

$$(15)\quad \left(\frac{x}{2}\right)^{-a} F\left(-a, \frac{1}{4}x^2\right) - \left(\frac{x}{2}\right)^{a} F\left(a, \frac{1}{4}x^2\right)$$

$$= \frac{\sin a\pi}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-x\operatorname{Cof}\varphi + a\varphi}\, d\varphi - \frac{\sin a\pi}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-x\operatorname{Cof}\varphi - a\varphi}\, d\varphi$$

$$= \frac{\sin a\pi}{\pi}\left\{\int_0^{\infty} e^{-x\operatorname{Cof}\varphi + a\varphi}\, d\varphi + \int_{-\infty}^{0} e^{-x\operatorname{Cof}\varphi + a\varphi}\, d\varphi\right\}$$

$$= \frac{\sin a\pi}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x\operatorname{Cof}\varphi + a\varphi}\, d\varphi.$$

oder auch

$$(16)\quad \left(\frac{x}{2}\right)^{-a} F\left(-a, \frac{x^2}{4}\right) - \left(\frac{x}{2}\right)^{a} F\left(a, \frac{x^2}{4}\right) = \frac{2\sin a\pi}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-x\operatorname{Cof}\varphi}\operatorname{Sin} a\varphi\, d\varphi.$$

Bei der Form

$$y = \int e^{zt + \frac{1}{t}}\, t^{a-1}\, dt$$

sind demnach die zwei bequemsten Integrationswege:

1) eine Schleife von $-\infty$ rechtläufig um Null und zurück, er liefert
$$y = 2i\pi z^{-a} F(-a, z).$$
2) Von ∞ aus westwärts, dann rechtläufig um Null, dann zurück, er liefert
$$y = 2i\pi F(a, z).$$

Zieht man das zweite Integral vom ersten ab, so heben sich die Theile des Weges des Gesammtintegrals auf, die auf den Umlauf um 0 fallen, der übrig bleibende Theil besteht aus einem Weg von $-\infty$ bis 0, wo die Variable t die Phase $-\pi$ hat, und einem Weg von 0 bis $-\infty$, wo die Phase π ist. Auf dem Hinweg hat man $e^{ia\pi}$ als drehenden Factor, auf dem Rückweg $e^{-ia\pi}$ und zugleich das Wegelement entgegengesetzt; somit ist, wenn $t = -u$ gesetzt wird

$$y = (e^{ia\pi} - e^{-ia\pi})\int_0^{\infty} e^{-zu - \frac{1}{u}}\, u^{a-1}\, du,$$

(17) $$y = 2i \sin a\pi \int_0^\infty e^{-zu - \frac{1}{u}} u^{a-1} du,$$

oder nach vorigem

(18) $$y = 2i \sin a\pi \left(\frac{x}{2}\right)^{-a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x \operatorname{cof} \varphi + a\varphi} d\varphi,$$

(19) $$y = 2i[z^{-a} F(-a, z) - F(a, z)].$$

Ist z negativ, $z = -\frac{1}{4}x^2$, so geht das zweite Integral über in

$$-2i \sin a\pi \int_0^1 e^{-\frac{1}{u} + \frac{1}{4}x^2 u} u^{-a-1} du + i\left(\frac{x}{2}\right)^{-a} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ix \sin\varphi + ia\varphi} d\varphi.$$

Setzt man $u = \frac{2}{x} e^{-\varphi}$, so erhält man

$$2i\left(\frac{x}{2}\right)^{-a} \left\{ \int_0^\pi \cos(x \sin\varphi - a\varphi) d\varphi - \sin a\pi \int_0^\infty e^{-x \operatorname{sin} \varphi - a\varphi} d\varphi \right\},$$

also

$$\left(\frac{x}{2}\right)^a F\left(a, -\frac{1}{4}x^2\right) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin\varphi - a\varphi) d\varphi - \frac{\sin a\pi}{\pi} \int_0^\infty e^{-x \operatorname{sin} \varphi - a\varphi} d\varphi.$$

Da die Bessel'sche Function I. Art

$$J^a(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} (-1)^\lambda \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{a+2\lambda}}{\lambda!\,(a+\lambda)!} = \left(\frac{x}{2}\right)^a \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \frac{\left(-\frac{x^2}{4}\right)^\lambda}{\lambda!\,(a+\lambda)!} = \left(\frac{x}{2}\right)^a F\left(a, -\frac{x^2}{4}\right),$$

so ist das letzte Integral ein Integral für $J^a(x)$ und in der That haben wir dasselbe in unserer Einleitung zur Theorie der Bessel'schen Functionen auch gegeben*) und damit ist der Zusammenhang der betrachteten Differentialgleichung dargelegt.

II. Beispiel.

$$x^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + (2a+1) \frac{\partial y}{\partial x} - xy = 0;$$

man setze

$$f(t) = t^2 - 1,$$
$$g(t) = (2a+1)t,$$

*) Graf und Gubler, Einleitung in die Theorie der Bessel'schen Functionen I. Heft S. 54 Formel (A_2).

$$\operatorname{Log} h(t) = \int \frac{g(t)}{f(t)}\,dt = \int \frac{(2a+1)t}{t^2-1}\,dt = \frac{2a+1}{2} \cdot \int \frac{2t\,dt}{t^2-1} = \frac{2a+1}{2} \operatorname{Log}(t^2-1),$$

also

$$h(t) = (t^2-1)^{a+\frac{1}{2}}.$$

Nach

$$y = \int e^{xt} \frac{h(t)}{f(t)}\,dt$$

ist daher

$$y = \int e^{xt} \frac{(t^2-1)^{a+\frac{1}{2}}}{t^2-1}\,dt = \int e^{xt} (t^2-1)^{a-\frac{1}{2}}\,dt,$$

wenn

$$\left\{ e^{xt} (t^2-1)^{a+\frac{1}{2}} \right\}$$

längs des ganzen Integrationsweges verschwindet.

1) Wenn x positiv, so führe man die Variable t, da die Pole des Integrals bei $+1$ und -1 sind, rechtläufig um $+1$ und -1 nahe am Horizont vom Westpunkt, den wir mit $-N$ bezeichnen wollen, aus, und wieder dahin zurück, setze also

$$y = \int\limits_{-N\,(-1,\,+1)} e^{xt} (t^2-1)^{a-\frac{1}{2}}\,dt.$$

Nun entwickelt man das Binom $(t^2-1)^{a-\frac{1}{2}}$ nach fallenden Potenzen von t,

$$(t^2-1)^{a-\frac{1}{2}} = \sum (-1)^n \binom{a-\frac{1}{2}}{n} (t^2)^{a-\frac{1}{2}-n},$$

$$(-1)^n \binom{a-\frac{1}{2}}{n} = \frac{\left(n-a-\frac{1}{2}\right) \cdots \left(\frac{1}{2}-a\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} = \binom{n-a-\frac{1}{2}}{n},$$

also

$$y = \sum \binom{n-a-\frac{1}{2}}{n} \int\limits_{-N\,(0)} e^{xt}\, t^{2a-2n-1}\,dt.$$

Setzt man $xt = u$, so wird

$$\int e^{xt}\, t^{2a-2n-1}\,dt = x^{2n-2a} \int\limits_{-N\,(0)} e^{u}\, u^{2a-2n-1}\,du = x^{2n-2a} \cdot \frac{2i\pi}{\Gamma(2n-2a+1)},$$

daher

$$(1)\qquad y = 2i\pi \sum \binom{n-a-\frac{1}{2}}{n} \frac{x^{2n-2a}}{\Gamma(2n-2a+1)}.$$

Nun ist

$$(\alpha)\qquad \binom{n-a+\frac{1}{2}}{n} = \frac{\left(n-a-\frac{1}{2}\right)!}{n!\left(-a-\frac{1}{2}\right)!} = \frac{\Gamma\left(n-a+\frac{1}{2}\right)}{n!\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-a\right)}.$$

Nach dem Satz über die Verdoppelung des Arguments bei der Gammafunction hat man

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(2a) = 2^{2a-1}\Gamma(a)\,\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right) *),$$

$$\frac{1}{\Gamma(2a)} = \frac{2^{1-2a}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(a)\,\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)},$$

also

$$(\beta)\qquad \frac{1}{\Gamma(2n-2a+1)} = \frac{2^{2a-2n}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n-a+\frac{1}{2}\right)\Gamma(n-a+1)},$$

(α) und (β) in (1) substituirt

$$(2)\qquad y = 2i\pi \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-a\right)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{-2a} \sum_0^\infty \frac{\left(\frac{x^2}{4}\right)^n}{n!\,\Gamma(n-a+1)}$$

und nach der Formel $F(a, x) = \sum\limits_0^\infty \dfrac{x^n}{n!\,\Gamma(n+a+1)}$

$$(3)\qquad y = 2i\pi \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-a\right)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{-2a} F\left(-a, \frac{1}{4}x^2\right).$$

Da

$$J^{-a}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-a} \sum_0^\infty \frac{\left(-\frac{x^2}{4}\right)^n}{n!\,\Gamma(n-a+1)},$$

so kann (2) in die Form gebracht werden

$$y = 2i\pi \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-a\right)} \cdot \left(\frac{x}{2i}\right)^{-a} \cdot \left(\frac{ix}{2}\right)^{-a} \cdot \sum_0^\infty \frac{\left(-\frac{(ix)^2}{4}\right)^n}{n!\,\Gamma(n-a+1)},$$

*) Graf, Einleitung und Theorie der Gammaf. etc. S. 21, Formel 27.

also

$$(4) \qquad y = 2i\pi \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - a\right)} \cdot \left(\frac{x}{2i}\right)^{-a} J^{-a}(ix)$$

(1), (2), (3), (4) sind Formen des I. particulären Integrals.

2) Wenn $a + \frac{1}{2}$ östlich, so führe man die Variable t vom Westpunkt aus südlich an -1 vorbei der Realitätsgerade nach $+1$.

In $y = \int e^{xt}(t^2-1)^{a-\frac{1}{2}} dt$ haben westlich von -1 die Factoren $t+1$ und $t-1$ die Phase $-\pi$, nachher erhält $t+1$ die Phase 0, $t-1$ behält die Phase $-\pi$, der drehende Factor ist demnach $e^{-i\pi\left(a-\frac{1}{2}\right)} = e^{i\pi\left(\frac{1}{2}-a\right)}$, somit

$$y = e^{i\pi\left(\frac{1}{2}-a\right)} \int_{-1}^{1} e^{xt}(1-t^2)^{a-\frac{1}{2}} dt.$$

Setzt man $t = \cos\varphi$, so werden die Grenzen π und 0,

$$y = e^{i\pi\left(\frac{1}{2}-a\right)} \int_{\pi}^{0} e^{x\cos\varphi} \sin^{2a-1}\varphi \cdot -\sin\varphi \, d\varphi,$$

$$(5) \qquad y = e^{i\pi\left(\frac{1}{2}-a\right)} \int_{0}^{\pi} e^{x\cos\varphi} \sin^{2a}\varphi \, d\varphi.$$

Es ist aber

$$\int_{0}^{\pi} \cos^{2n}\varphi \sin^{2a}\varphi \, d\varphi = \int_{0}^{1} (1-z)^{n-\frac{1}{2}} z^{a-\frac{1}{2}} dz = \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+a+1)}$$

und nach dem Satz über die Verdopplung des Arguments der Gammafunction

$$2^{2n}\Gamma(n+1)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(2n+1),$$

$$\frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{(2n)!} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{n!},$$

daher

$$\text{Formel 5)} = e^{i\pi\left(\frac{1}{2}-a\right)} \sum_{n=0}^{n=\infty} \int_0^\pi \frac{(x\cos\varphi)^{2n}}{(2n)!} \cdot \sin^{2a}\varphi \cdot d\varphi$$

$$= e^{i\pi\left(\frac{1}{2}-a\right)} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \int_0^\pi \cos^{2n}\varphi \sin^{2a}\varphi\, d\varphi$$

$$= e^{i\pi\left(\frac{1}{2}-a\right)} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \frac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+a+1)}$$

$$= e^{i\pi\left(\frac{1}{2}-a\right)} \sum_{n=0}^{n=\infty} x^{2n}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{u!} \cdot \frac{\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+a+1)},$$

$$(6)\qquad y = e^{i\pi\left(\frac{1}{2}-a\right)}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right) \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{n!\,\Gamma(n+a+1)},$$

$$(7)\qquad y = e^{i\pi\left(\frac{1}{2}-a\right)}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right) F\left(a, \frac{x^2}{4}\right).$$

Hat nun t den Pol 1 umlaufen, so hat $t+1$ die Phase 0 beibehalten, hingegen $t-1$ die Phase π bekommen. Setzt man nun das den Rückweg von $+1$ und -1 entsprechende Integral, so ist der drehende Factor

$$e^{i\pi\left(\frac{1}{2}-a\right)} - e^{-i\pi\left(\frac{1}{2}-a\right)} = 2i\sin\pi\left(\frac{1}{2}-a\right) = 2i\cos a\pi.$$

Man hat daher im Ganzen als Theilbetrag an das II$^{\text{te}}$ particuläre Integral

$$(8)\qquad y = 2i\cos a\pi\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right) F\left(a, \frac{x^2}{4}\right)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-a\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+a\right) = \frac{\pi}{\cos a\pi}$$

$$\cos a\pi\,\Gamma\left(\frac{1}{2}+a\right) = \frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-a\right)},$$

$$(9)\qquad \bar{y} = \frac{2i\pi\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-a\right)} F\left(a, \frac{x^2}{4}\right).$$

Nun müssen noch die Theile des Integrals berücksichtigt werden, welche auf die Wege von

$$-\infty \text{ bis } -1$$

und von

$$-1 \text{ bis } -\infty$$

fallen.

Auf dem Hinweg hat u^2-1 die Phase -2π, auf dem Rückweg $+2\pi$, dann ist

$$S=(e^{2ia\pi}-e^{-2ia\pi})\int_1^\infty e^{-xu}(u^2-1)^{a-\frac{1}{2}}\,du,$$

$$u=\operatorname{cos}\varphi,\quad u^2-1=\operatorname{sin}^2\varphi,\quad du=\operatorname{sin}\varphi\,d\varphi,$$

die Grenzen werden 0 und ∞, dann ist

$$S=2i\sin 2a\pi\int_0^\infty e^{-x\operatorname{cos}\varphi}\operatorname{sin}^{2a}\varphi\,d\varphi,$$

$$S=2i\sin a\pi\cdot\cos a\pi\int_0^\infty e^{-x\operatorname{cos}\varphi}\operatorname{sin}^{2a}\varphi\,d\varphi.$$

Den nämlichen Werth erhält man auch, wenn (9) von (3) subtrahirt wird

$$S=\frac{2i\pi\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-a\right)}\left[\left(\frac{x}{2}\right)^{-2a}F\left(-a,+\frac{x^2}{4}\right)-F\left(a,\frac{x^2}{4}\right)\right],$$

aus den beiden letzten Werthen folgt

$$\int_0^\infty e^{-x\operatorname{cos}\varphi}\operatorname{sin}^{2a}\varphi\,d\varphi$$

$$=\frac{2i\pi\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2i\sin a\pi\cdot\cos a\pi\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-a\right)}\left[\left(\frac{x}{2}\right)^{-2a}F\left(-a,\frac{x^2}{4}\right)-F\left(a,\frac{x^2}{4}\right)\right],$$

(10) $$\int_0^\infty e^{-x\operatorname{cos}\varphi}\operatorname{sin}^{2a}\varphi\,d\varphi$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+a\right)}{\sin a\pi}\left[\left(\frac{x}{2}\right)^{-2a}F\left(-a,\frac{x^2}{4}\right)-F\left(a,\frac{x^2}{4}\right)\right],$$

wenn

$$\frac{\pi}{\cos a\pi}=\Gamma\left(\frac{1}{2}-a\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+a\right)$$

eingesetzt wird, und hieraus durch Einführung von $i\varphi$ für φ

(11) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos(x\cos\varphi)\sin^{2a}\varphi\,d\varphi=\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+a\right)F\left(a,\frac{x^2}{4}\right),$$

(12) $$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\int_0^\infty e^{-x\operatorname{cos}\varphi}\operatorname{sin}^{2a}\varphi\,d\varphi=\left(\frac{x}{2}\right)^{-a}\Gamma\left(\frac{1}{2}+a\right)\int_0^\infty e^{-x\operatorname{cos}\varphi}\cos a\varphi\,d\varphi.$$

III. Beispiel.

$$\frac{\partial y^2}{\partial x^2} + ax\frac{\partial y}{\partial x} + by = 0.$$

Es sei

$$\sqrt{\frac{-a}{2}} \cdot x = x_1; \quad dx = \sqrt{\frac{-2}{a}}\, dx_1,$$

also

$$-\frac{a}{2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^{\,2}} + a\sqrt{-\frac{2}{a}}\, x_1 \cdot \sqrt{\frac{-2}{a}}\, \frac{\partial y}{\partial x_1} + by = 0,$$

$$-\frac{a}{2}\, \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^{\,2}} + ax_1 \frac{\partial y}{\partial x_1} + by = 0,$$

durch $\frac{a}{2}$ dividirt und der Index weggelassen

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - 2x\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{2b}{a}\, y = 0.$$

Setzt man für $\frac{b}{2a}$ ein neues a, so folgt die Gleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - 2x\frac{\partial y}{\partial x} - 4ay = 0.$$

Nun sei

$$x^2 = z, \quad x = z^{\frac{1}{2}}, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 2\sqrt{z} \cdot \frac{\partial y}{\partial z},$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 2\left(\frac{\partial y}{\partial z} + 2z\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}\right),$$

die Gleichung lautet daher

$$2\left(\frac{\partial y}{\partial z} + 2z\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}\right) - 2\sqrt{z} \cdot 2\sqrt{z}\,\frac{\partial y}{\partial z} - 4ay = 0,$$

durch 4 gekürzt

$$z\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + \left(\frac{1}{2} - z\right)\frac{\partial y}{\partial z} - ay = 0.$$

Nach dem allgemeinen Verfahren ist

$$f(t) = t(t-1), \quad g(t) = \frac{1}{2}t - a, \quad \frac{g(t)}{f(t)} = \frac{a}{t} + \frac{\frac{1}{2} - a}{t-1}, \quad h(t) = t^a(t-1)^{\frac{1}{2}-a},$$

somit

$$y = \int e^{zt}\, t^{a-1}(t-1)^{-\frac{1}{2}-a}\, dt,$$

wenn

$$\left\{e^{zt}\, t^a(t-1)^{\frac{1}{2}-a}\right\}$$

längs des ganzen Integrationsweges verschwindet.

I. Setzt man ein Integral $zt = u$ und führt man, wenn z positiv, t vom Westpunkt aus rechtläufig um 0 und wieder zurück, so folgt

$$t = \frac{u}{z}, \quad 1 - t = 1 - \frac{u}{z} = \frac{z-u}{z}, \quad dt = \frac{1}{z}\,du,$$

$$y = \int\limits_{-\infty}^{\circlearrowleft 0} e^u u^{a-1} z^{1-a} (z-a)^{-\frac{1}{2}-a} z^{\frac{1}{2}+a} \cdot z^{-1}\,du,$$

$$y = z^{\frac{1}{2}} \int\limits_{-\infty}^{\circlearrowleft 0} e^u u^{a-1} (u-z)^{-\frac{1}{2}-a}\,du,$$

aber

$$(u-z)^{-\frac{1}{2}-a} = \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}-a}{n} u^{-\frac{1}{2}-a-n} z^n,$$

$$(-1)^n \binom{-\frac{1}{2}-a}{n} = \binom{n+a-\frac{1}{2}}{n},$$

ferner sei z wieder $= x^2$ gesetzt, daher

$$y = \sum_0^\infty \binom{n+a-\frac{1}{2}}{n} x^{2n+1} \int\limits_{-\infty}^{\circlearrowleft 0} e^u u^{-\frac{3}{2}-n}\,du,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\circlearrowleft 0} e^u u^{-\frac{3}{2}-n}\,du = \frac{2i\pi}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)},$$

$$y = 2i\pi \sum_{n=0}^{n=\infty} \binom{n+a-\frac{1}{2}}{n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}$$

$$= \frac{2i\pi}{\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\Gamma\left(n+a+\frac{1}{2}\right)}{n!\,\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)} x^{2n+1}.$$

Aber nach dem Satz über die Verdoppelung des Arguments bei der Gammafunction ist

$$\Gamma(n+1)\,\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(2n+2)}{2^{2n+1}},$$

somit

$$(1) \qquad y = \frac{2i\pi}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)} \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\Gamma\left(n+a+\frac{1}{2}\right)}{(2n+1)!} \cdot (2x)^{2n+1}.$$

Setzt man in

$$y = z^{\frac{1}{2}} \int e^u u^{a-1} (u-z)^{-\frac{1}{2}-a} du,$$

$u = t + z$, so wird

$$y = z^{\frac{1}{2}} \int e^{t+z} (t+z)^{a-1} t^{-\frac{1}{2}-a} dt,$$

$$y = z^{\frac{1}{2}} e^z \int e^t t^{-\frac{1}{2}-a} (t+z)^{a-1} dt.$$

$$(t+z)^{a-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a-1}{n} t^{a-1-n} z^n,$$

oder

$$y = z^{\frac{1}{2}} e^z \sum_0^{\infty} \binom{a-1}{n} z^n \int_{-\infty \circlearrowleft 0} e^t t^{-\frac{3}{2}-n} dt,$$

$$\binom{a-1}{n} = (-1)^n \binom{n-a}{n} = (-1)^n \frac{\Gamma(n-a+1)}{n!\,\Gamma(1-a)}, \quad \int_{-\infty \circlearrowleft 0} e^t t^{-\frac{3}{2}-n} dt = \frac{2i\pi}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+n\right)},$$

$$y = z^{\frac{1}{2}} e^z \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{\Gamma(n-a+1)}{n!\,\Gamma(1-a)} \cdot \frac{2i\pi \cdot z^n}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+n\right)}.$$

$$x^2 = z, \quad i(-1)^n = i^{2n+1},$$

folgt

$$(2) \qquad y = \frac{e^{x^2} \cdot 2\pi}{\Gamma(1-a)} \cdot \sum_0^{\infty} \frac{\Gamma(n-a+1)}{n!\,\Gamma\left(\frac{3}{2}+n\right)} \cdot (ix)^{2n+1}.$$

Nach

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(2a) \qquad = 2^{2a-1} \Gamma(a) \Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right),$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(2n+2) = 2^{2n+1} \Gamma(n+1) \Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right),$$

somit

$$(3) \qquad y = \frac{2\pi}{\Gamma(1-a)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot e^{x^2} \sum_0^{\infty} \frac{\Gamma(n-a+1)}{(2n+1)!} (2ix)^{2n+1}.$$

Vergleicht man die (3) mit (1), so hat man die Gleichung

$$(4) \quad \frac{1}{\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)} \sum_0^{\infty} \frac{\Gamma\left(n+a+\frac{1}{2}\right)}{n!\,\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)} z^n = \frac{1}{\Gamma(1-a)} e^z \sum_0^{\infty} \frac{\Gamma(n-a+1)}{n!\,\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)} \cdot (-z)^n$$

als identisch richtig.

II. Sind a und z positiv, so kann man beim Integral

$$y=\int e^{zt}t^{a-1}(t-1)^{-\frac{1}{2}-a}dt$$

die Variable t rechtläufig von 0 aus um 1 und zurückführen und dann e^{zt} nach z entwickeln, dann ist

$$e^{zt}=\cdots+\frac{z^n t^n}{n!}+\cdots,$$

also der Coefficient von

$$\frac{z^n}{n!}=\int_{-\infty}^{(1)} t^{n+a-1}(t-1)^{-\frac{1}{2}-a}dt.$$

Zieht man nun den Weg auf die Strecke von 0 bis 1 zusammen, so ist

beim Hinweg die Phase $=-\pi$,

beim Rückweg „ „ $=+\pi$,

der drehende Factor, somit

$$=e^{i\pi\left(\frac{1}{2}+a\right)}-e^{-i\pi\left(\frac{1}{2}+a\right)}=2i\sin\left(\frac{1}{2}+a\right)\pi,$$

daher das Integral

$$=2i\cos a\pi\int_0^1 t^{n+a-1}(1-t)^{-\frac{1}{2}-a}dt$$

$$=2i\cos a\pi\,\frac{\Gamma(n+a)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-a\right)}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\frac{2i\pi}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+a\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-a\right)}\cdot\frac{\Gamma(n+a)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-a\right)}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}$$

$$=\frac{2i\pi}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+a\right)}\cdot\frac{\Gamma(n+a)}{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)},$$

dies ist mit $\frac{z^n}{n!}$ zu multipliciren und zu summiren von $n=0$ bis ∞, dann folgt

$$y=\frac{2i\pi}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+a\right)}\cdot\sum_0^\infty\frac{\Gamma(n+a)}{n!\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}\cdot z^n.$$

Da aber

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(2n+1)=2^{2n}\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)\Gamma(n+1),$$

ist

$$\frac{1}{n!\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(2n+1)}{2^{2n}},$$

also

(4) $$y = \frac{2i\pi}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+a\right)} \cdot \sum_0^\infty \frac{\Gamma(n+a)}{(2n)!}(2x)^{2n}.$$

Zieht man dieses Integral vom vorigen ab, so bleibt die Summe von zwei Integralen. Eines entspricht dem Hinweg von $-\infty$ bis 0, das andere von 0 bis $-\infty$. Die Summe beider Integrale ist daher:

$$= 2i\int_0^\infty e^{-zt}t^{a-1}(t+1)^{-\frac{1}{2}-a}dt,$$

was gleich ist der Differenz der beiden vorigen Integrale. Wir dividiren beide Seiten mit $2i$

(5) $$\int_0^\infty e^{-zt}t^{a-1}(t+1)^{-\frac{1}{2}-a}dt$$

$$= \frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+a\right)}\left\{\sum_0^\infty \frac{\Gamma(n+a)}{n!\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}z^n - z^{\frac{1}{2}}\sum_0^\infty \frac{\Gamma\left(n+a+\frac{1}{2}\right)}{n!\,\Gamma\left(n+\frac{3}{2}\right)}z^n\right\},$$

(6) $$= \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+a\right)}\sum_0^\infty \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+a\right)}{n!\,\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}(2x)^n,$$

(7) $$= \frac{\Gamma(a)}{2\sqrt{\pi}}e^z\left\{e^{ia\pi}\sum_0^\infty \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}-a\right)}{n!}(2ix)^n + e^{-ia\pi}\sum_0^\infty \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}-a\right)}{n!}(-2ix)^n\right\}.$$

Giebt man der anfänglichen Gleichung eine andere Form, so erhält man andere Resultate. Sie war

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + ax\frac{\partial y}{\partial x} + by = 0.$$

Jetzt

$$\sqrt{\frac{-a}{2}}\,x = x_1, \qquad dx = \sqrt{\frac{-2}{a}}\,dx_1,$$

so folgt

$$-\frac{a}{2}\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} + a\sqrt{\frac{-2}{a}}\,x_1\sqrt{\frac{-a}{2}}\,\frac{\partial y}{\partial x_1} + by = 0,$$

Index weg,

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - 2x\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{2b}{a}y = 0$$

dividirt mit 4

$$\frac{d^2 y}{\partial (2x)^2} - \frac{1}{2}(2x)\frac{\partial y}{\partial (2x)} - \frac{b}{2a}y - 0;$$

ersetzt man $\frac{b}{2a}$ durch ein neues a

$$\frac{\partial^2 y}{\partial (2x)^2} - \frac{1}{2}(2x)\frac{\partial y}{\partial (2x)} - ay = 0.$$

Wird hier das allgemeine Verfahren angewendet, so ist

$$f(t) = -\frac{1}{2}t, \quad g(t) = t^2 - a, \quad \frac{g(t)}{f(t)} = -\frac{t^2 - a}{\frac{1}{2}t} = \frac{2a}{t} - 2t,$$

$$\operatorname{Log} h(t) = \int \frac{2a}{t}\,dt - 2\int t\,dt, \quad h(t) = e^{-t^2} t^{2a}.$$

Wenn $\{e^{-t^2+2xt}t^{2a}\}$ längs des ganzen Integrationsweges verschwindet, so ist die allgemeine Form des Integrals

$$y = \int e^{-t^2+2xt} t^{2a-1}\,dt.$$

Wie auch a beschaffen sein mag, so ist wegen der Potenz e^{t^2} der Horizont sowohl im Osten als auch im Westen zugänglich. Man kann somit von Osten um Null eine Schleife legen oder von Westen und beide Schleifen werden zwei von einander unabhängige particuläre Integrale liefern.

Ist a östlich, so wird auch der Nullpunkt zugänglich sein und der erste Weg wird in diesem Fall einfach zu einem geradlinigen von ∞ bis 0, also das Integral

$$\int_{\infty}^{0} e^{-t^2+2xt} t^{2a-1}\,dt + e^{4ia\pi}\int_0^{\infty} e^{-t^2+2xt} t^{2a-1}\,dt = (e^{4ia\pi} - 1)\int_0^{\infty} e^{-t^2+2xt} t^{2a-1}\,dt,$$

also

$$\text{I.} \qquad y = e^{2\pi i a}\, 2i \sin 2\pi a \int_0^{\infty} e^{-t^2+2xt} t^{2a-1}\,dt$$

als erstes particuläres Integral.

Im zweiten Fall wird der Nullpunkt ebenfalls zugänglich und wir haben

$$\text{II.} \qquad y = (-e^{2i\pi a} + e^{2i\pi a})\int_0^{\infty} e^{-t^2-2xt} t^{2a-1}\,dt$$

$$y = 2i \sin 2\pi a \int_0^{\infty} e^{-t^2-2xt} t^{2a-1}\,dt$$

als zweites particuläres Integral.

Daher kann man kurzweg sagen, die beiden particulären Integrale sind

I. $$\int_0^\infty e^{-t^2+2xt}\,t^{2a-1}\,dt,$$

II. $$\int_0^\infty e^{-t^2-2xt}\,t^{2a-1}\,dt.$$

Diese Ausdrücke lassen sich wegen der raschen Abnahme von e^{-t^2} nach steigenden Potenzen von x entwickeln, dann erhält man 1) wenn a östlich, x positiv und längs des ganzen Weges Log t, Log$(t+1)$ reell verstanden wird

$$\int_0^\infty e^{-t^2-2xt}\,t^{2a-1}\,dt = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+a\right)}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-x^2 t}\,t^{a-1}(t+1)^{-\frac{1}{2}-a}\,dt.$$

2) Wenn t von 0 aus rechtläufig um -1 südlich an 0 vorbei nach Osten geht und der Weg mit einer auf der positiven Hälfte der Realitätsgeraden befindlichen Strecke beginnt

$$\int_0^\infty e^{-t^2+2xt}\,t^{2a-1}\,dt = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}+a\right)}{2\sqrt{\pi}}\int_{-1\quad 0}^{\infty} e^{-x^2 t}\,t^{2a-1}(t+1)^{-\frac{1}{2}-a}\,dt.$$

Endlich hat man auch, wenn der Weg nördlich von $-ix$ durchgeht und Log$(t+xi)$ am Ende des Weges (im Ostpunkt) reell verstanden wird

$$\int_0^\infty e^{-t^2-2xt}\,t^{2a-1}\,dt = 2^{-2a}\,\frac{\Gamma(2a)}{\sqrt{\pi}}\,e^{ia\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}(t+ix)^{-2a}\,dt.$$

Die Anregung zu dieser Arbeit wie auch zu der früheren verdanke ich L. Schlaefli.

Bern, Mai 1902.

Die Differentialresolvente einer algebraischen Gleichung sechsten Grades allgemeiner Art.

Von

L. LACHTIN in Moskau.

Einleitung.

In einer, Band 51 der „Mathematischen Annalen" gedruckten, Arbeit (datirt März 1898) ist es mir gelungen, die Differentialresolvente einer algebraischen Gleichung 6^{ten} Grades mit einer Gruppe 360^{ster} Ordnung zu gewinnen. In der Einleitung zu jener Arbeit sprach ich die Vermuthung aus, „dass hier der Schlüssel zur Lösung von Gleichungen 6^{ten} Grades zu suchen sei, analog der Lösung von Gleichungen 5^{ten} Grades, wie sie von Prof. Klein angegeben wurde."

Darauf veröffentlichte Prof. *Klein* unter dem 9. April 1899 eine Note in den „Rendiconti della reale accademia dei lincei" unter dem Titel „Sulla risoluzione delle equazioni di sesto grado." Dort zeigt er die Möglichkeit, drei irrationale Functionen der Wurzeln einer Gleichung 6^{ten} Grades zu bilden, welche bei geraden Substitutionen dieser Wurzeln sich linear transformiren.

Dieser Hinweis bestärkte mich in dem Gedanken, es müsse sich für jede Gleichung 6^{ten} Grades eine Differentialresolvente 3^{ter} Ordnung construiren lassen.

In meiner im XXII. Bande der „Moskauer Mathematischen Sammlung" in russischer Sprache erschienenen Arbeit (datirt August 1901) habe ich den von Prof. Klein in seiner Note ausgesprochenen Gedanken ausführlich behandelt und gezeigt, dass die Wurzeln jeglicher Gleichung 6^{ten} Grades mit Hilfe von quadratischen und cubischen Radikalen sich ausdrücken lassen durch ein Lösungspaar des Fundamentalgleichungssystems

$$(1)\qquad v = \frac{\Phi(u_1, u_2)}{F'^5(u_1, u_2)}, \qquad w = \frac{H(u_1, u_2)}{F'^2(u_1, u_2)},$$

wo

$$F(u_1, u_2), \quad H(u_1, u_2), \quad \Phi(u_1, u_2)$$

die von *Wiman**) gefundenen, in Bezug auf die Substitutionen der Valentiner'schen Gruppe G_{360} invarianten Formen, v und w rationale Functionen einer Variablen t sind,

$$v = \varphi(t), \qquad w = \psi(t), \tag{2}$$

und die Variable t sich mit Hilfe quadratischer und cubischer Wurzeln durch die Coefficienten der gegebenen Gleichung 6^{ten} Grades ausdrücken lässt.

So wird die Auflösung jeder Gleichung 6^{ten} Grades auf die Auffindung der Wurzeln eines Fundamental-Gleichungssystems zurückgeführt.

Betrachten wir ein Grössenpaar u_1, u_2, welches den Gleichungen (1) genügt, als ein Paar von Functionen der Variablen t, so sehen wir, dass die Functionen u_1, u_2 bei Umläufen der Variablen t in ihrer Ebene lineare nichthomogene Substitutionen der Valentiner'schen Gruppe G_{360} erleiden.

Hieraus folgt, dass die Grössen u_1, u_2 unter der Form der Verhältnisse

$$u_1 = \frac{y_1}{y_3}, \qquad u_2 = \frac{y_2}{y_3} \tag{3}$$

dargestellt werden können, wo

$$y_1, y_2, y_3 \tag{4}$$

Integrale einer linearen Differentialgleichung 3^{ter} Ordnung mit rationalen Coefficienten in t sind. *Diese Gleichung ist die Differentialresolvente 3^{ter} Ordnung für die algebraische Gleichung 6^{ten} Grades allgemeiner Art.*

Wenn wir in den Gleichungen (1) v und w als unabhängige Variabelen betrachten, so sind die Grössen (4) Integrale eines Systems dreier partieller Differentialgleichungen 2^{ter} Ordnung. Man kann dieses System gleichfalls *Differentialresolvente einer algebraischen Gleichung 6^{ten} Grades* nennen.

In vorliegender Arbeit habe ich die Absicht, die Berechnung der Differentialresolvente in beiden Formen zu zeigen.

Mit der Lösung fast derselben Aufgabe für die Gruppen G_{216} von Hesse und G_{168} von Klein hat sich *Boulanger* in den Jahren 1898 und 1901 im „Journal de l'École Polytechnique" beschäftigt.

Seiner Berechnung legt er die Differentialcovarianten von *Goursat* und *Painlevé* zu Grunde, und entwickelt hieraus eine Methode zur Bildung einer Differentialresolvente für die Gruppen G_{216} und G_{168}. Was nun die Valentiner'sche Gruppe G_{360} betrifft, so sagt Boulanger von der Anwendung seiner Methode auf diesen Fall Folgendes: „Ce calcul devient presque rebutant pour le groupe de M. Valentiner."

Es ist mir gelungen, die Lösung dieser Aufgabe, abgesehen von einigen sehr mühsamen, aber in der Idee durchaus einfachen, arithmetischen Rechnungen, zu Ende zu führen.

---

*) Mathem. Annalen Bd. 47.

§ 1.

Einige vorläufige Formeln.

Wie in der Einleitung erwähnt war, wollen wir „Fundamental-Gleichungssystem“ folgende Gleichungen nennen:

$$(1) \qquad v = \frac{\Phi(u_1, u_2)}{F^5(u_1, u_2)}, \qquad w = \frac{H(u_1, u_2)}{F^2(u_1, u_2)},$$

wo wir v und w als unabhängige Variabele betrachten werden. Schafft man in den Gleichungen (1) die Nenner weg, so ergiebt sich

$$(5) \qquad H(u_1, u_2) - wF^2(u_1, u_2) = 0,$$

$$(6) \qquad \Phi(u_1, u_2) - vF^5(u_1, u_2) = 0.$$

Setzen wir für u_1 und u_2 deren Ausdrücke durch die Grössen y_1, y_2, y_3 nach den Formeln (3), so finden wir

$$(5') \qquad H(y_1, y_2, y_3) - wF^2(y_1, y_2, y_3) = 0,$$

$$(6') \qquad \Phi(y_1, y_2, y_3) - vF^5(y_1, y_2, y_3) = 0.$$

Die Form $F(y_1, y_2, y_3)$ ist vom 6^{ten} Grade. Sie ist die einfachste Form, die bezüglich der Collineationen der Gruppe G_{360} invariant ist. Sie hat folgende Gestalt:

$$F(y_1, y_2, y_3) = 10y_1^3y_2^3 + 9(y_1^5 + y_2^5)y_3 - 45y_1^2y_2^2y_3^2 - 135y_1y_2y_3^4 + 27y_3^6.$$

Die Form $H(y_1, y_2, y_3)$ ist die Hesse'sche Covariante von $F(y_1, y_2, y_3)$; sie ist vom 12^{ten} Grade. $\Phi(y_1, y_2, y_3)$ ist die geränderte Covariante derselben Form vom 30^{sten} Grade. Ausser diesen Covarianten giebt es nur noch eine einzige rational unabhängige Covariante von $F(y_1, y_2, y_3)$, und zwar $\Psi(y_1, y_2, y_3)$ 45^{ster} Ordnung. Das ist die Jacobi'sche Determinante von

$$F(y_1, y_2, y_3), \quad H(y_1, y_2, y_3), \quad \Phi(y_1, y_2, y_3).$$

Wiman hat gezeigt*), dass jede Covariante der Form F sich als ganze rationale Function von F, H, Φ, Ψ, und ausserdem Ψ^2 sich als ganze rationale Function von F, H, Φ ausdrücken lässt.

Letzterer Ausdruck stellt sich folgendermassen dar:

$$\begin{aligned}(7) \quad 27\Psi^2 = \Phi^3 &+ \{A_1H^3 + A_2HF^2 + A_3F^4\}F\Phi^2 \\ &+ \{A_4H^5 + A_5H^4F^2 + A_3H^3F^4 + A_7H^2F^6 + A_8HF^8 + A_9F^{10}\}\Phi \\ &+ \{A_{10}H^7 + A_{11}H^6F^2 + A_{12}H^5F^4 + A_{13}H^4F^6 + A_{14}H^3F^8 \\ &\qquad + A_{15}H^2F^{10} + A_{16}HF^{12} + A_{17}F^{14}\}F,\end{aligned}$$

wo $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_{17}$ constante Zahlen sind.

*) Mathem. Annalen Bd. 47, p. 555.

Um diese Coefficienten zu berechnen, setzen wir in der Identität (7) statt $F(y_1, y_2, y_3)$, $H(y_1, y_2, y_3)$, $\Phi(y_1, y_2, y_3)$, $\Psi(y_1, y_2, y_3)$ die entsprechenden Formeln ein und setzen die Coefficienten gleicher Potenzen zur rechten und zur linken Hand einander gleich. Dann finden wir ein System von Gleichungen 1sten Grades zur Bestimmung der unbekannten Grössen

$$A_1, A_2, A_3, \cdots, A_{17}.$$

Die Lösung dieses Systems würde freilich nur arithmetische, aber sehr mühsame Rechnungen erfordern. Wir unterlassen daher diese Rechnung und werden die constanten Zahlen $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_{17}$ als bekannt betrachten.

Vermittelst der Formeln (5′) und (6′) geben wir der Gleichung (7) folgende Gestalt:

$$(8)\quad \begin{aligned} 27\Psi^2(y_1, y_2, y_3) = \{ & v^3 + (A_1 w^2 + A_2 w + A_3) v^2 \\ & + (A_4 w^5 + A_5 w^4 + A_6 w^3 + A_7 w^2 + A_8 w + A_9) v \\ & + A_{10} w^7 + A_{11} w^6 + A_{12} w^5 + A_{13} w^4 + A_{14} w^3 + A_{15} w^2 \\ & + A_{16} w + A_{17} \} F^{15}(y_1, y_2, y_3). \end{aligned}$$

Der Kürze halber bedienen wir uns fernerhin folgender Bezeichnungen:

$$a_2(w) = A_1 w^2 + A_2 w + A_3,$$
$$a_5(w) = A_4 w^5 + A_5 w^4 + A_6 w^3 + A_7 w^2 + A_8 w + A_9,$$
$$a_7(w) = A_{10} w^7 + A_{11} w^6 + A_{12} w^5 + A_{13} w^4 + A_{14} w^3 + A_{15} w^2 + A_{16} w + A_{17}.$$

Folglich sind $a_2(w)$, $a_5(w)$, $a_7(w)$ in Bezug auf w ganze Polynome mit constanten Coefficienten; der Grad dieser Polynome übersteigt nicht die unten stehenden Indices. Die Gleichung (8) nimmt daraufhin folgende Gestalt an:

$$(9)\quad 27\Psi^2(y_1, y_2, y_3) = \{ v^3 + a_2(w) v^2 + a_5(w) v + a_7(w) \} F^{15}(y_1, y_2, y_3).$$

Der in Gleichung (9) in Klammern stehende Ausdruck ist ein Polynom 3ten Grades in v und 7ten Grades in w. Kurz werden wir dasselbe so bezeichnen:

$$(10)\qquad f(w, v) = v^3 + a_2(w) v^2 + a_5(w) v + a_7(w).$$

Die Gleichung (9) erscheint dann in der Form

$$(11)\qquad 27\Psi^2(y_1, y_2, y_3) = f(w, v) \cdot F^{15}(y_1, y_2, y_3).$$

Nehmen wir die Formel

$$(12)\qquad \Psi(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y_1}, & \frac{\partial H}{\partial y_1}, & \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} \\ \frac{\partial F}{\partial y_2}, & \frac{\partial H}{\partial y_2}, & \frac{\partial \Phi}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F}{\partial y_3}, & \frac{\partial H}{\partial y_3}, & \frac{\partial \Phi}{\partial y_3} \end{vmatrix}.$$

Die entsprechende nicht homogene Form $\Psi(u_1, u_2)$ stellt sich folgendermassen dar:

$$\Psi(u_1, u_2) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u_1}, & \frac{\partial H}{\partial u_1}, & \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} \\ \frac{\partial F}{\partial u_2}, & \frac{\partial H}{\partial u_2}, & \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} \\ 6F, & 12H, & 30\Phi \end{vmatrix}.$$

Wenn man diese Determinante nach den Elementen der 3ten Zeile entwickelt und setzt:

$$\begin{cases} (F,H) = \frac{\partial F}{\partial u_1}\frac{\partial H}{\partial u_2} - \frac{\partial F}{\partial u_2}\frac{\partial H}{\partial u_1}, \\ (F,\Phi) = \frac{\partial F}{\partial u_1}\frac{\partial \Phi}{\partial u_2} - \frac{\partial F}{\partial u_2}\frac{\partial \Phi}{\partial u_1}, \\ (H,\Phi) = \frac{\partial H}{\partial u_1}\frac{\partial \Phi}{\partial u_2} - \frac{\partial H}{\partial u_2}\frac{\partial \Phi}{\partial u_1}, \end{cases}$$

so wird

$$(13) \quad \frac{1}{6}\Psi(u_1, u_2) = (H,\Phi)F(u_1,u_2) - 2(F,\Phi)H(u_1,u_2) + 5(F,H)\Phi(u_1,u_2).$$

Diese und ähnliche Formeln werden für unsere weiteren Rechnungen sehr geeignet sein.

Obgleich wir wissen, dass jede Covariante der Form F sich rational durch die Fundamentalcovarianten F, H, Φ, Ψ ausdrücken lässt, so ist es dennoch nützlich, einige nichtfundamentale Covarianten, welche uns später begegnen werden, im voraus durch besondere Symbole zu bezeichnen. Hierher gehören die Covarianten D und E:

$$(14) \qquad D(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y_1}, & \frac{\partial H}{\partial y_1}, & \frac{\partial \Psi}{\partial y_1} \\ \frac{\partial F}{\partial y_2}, & \frac{\partial H}{\partial y_2}, & \frac{\partial \Psi}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F}{\partial y_3}, & \frac{\partial H}{\partial y_3}, & \frac{\partial \Psi}{\partial y_3} \end{vmatrix}$$

vom Grade 60 und

$$(15) \qquad E(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y_1}, & \frac{\partial \Phi}{\partial y_1}, & \frac{\partial \Psi}{\partial y_1} \\ \frac{dF}{\partial y_2}, & \frac{\partial \Phi}{\partial y_2}, & \frac{\partial \Psi}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F}{\partial y_3}, & \frac{\partial \Phi}{\partial y_3}, & \frac{\partial \Psi}{\partial y_3} \end{vmatrix}$$

vom Grade 78.

Nimmt man in den Formeln (14) und (15) eine ähnliche Transformation vor, wie in (12), so ergiebt sich

$$(16)\quad \begin{cases} \frac{1}{6}D(u_1,u_2)=(H,\Psi)F(u_1,u_2)-2(F,\Psi)H(u_1,u_2)+\frac{15}{2}(F,H)\Psi(u_1,u_2), \\ \frac{1}{6}E(u_1,u_2)=(\Phi,\Psi)F(u_1,u_2)-5(F,\Psi)\Phi(u_1,u_2)+\frac{15}{2}(F,\Phi)\Psi(u_1,u_2). \end{cases}$$

Die Ausdrücke der Covarianten D und E durch die Fundamentalcovarianten F, H, Φ, Ψ können nach derselben Methode, wie oben die Formel (7), gefunden werden. Die Zahlencoefficienten dieser Formeln erfordern nur arithmetische Rechnung.

§ 2.

Ausdruck der Functionen y_1, y_2, y_3 und ihrer Derivirten nach v und w durch die Grössen u_1 und u_2.

Nehmen wir die Formeln

$$(17)\qquad y_3 = F^{-\frac{1}{6}}(u_1,u_2),\quad y_1 = u_1 y_3,\quad y_2 = u_2 y_3.$$

Sie genügen allen Forderungen, welche man an die Grössen

$$(4)\qquad y_1,\ y_2,\ y_3$$

stellt, denn in der That:

1) aus den Formeln (17) ist direct zu sehen, dass

$$(3)\qquad u_1 = \frac{y_1}{y_3},\quad u_2 = \frac{y_2}{y_3};$$

2) machen wir in den Formeln (17) eine der nichthomogenen Substitutionen der Gruppe G_{360}, so ergiebt sich, dass die durch die Formeln definirten Grössen y_1, y_2, y_3 die entsprechende Collineation der Valentiner'schen Gruppe erleiden.

Im weiteren Verlauf der Arbeit werden wir unter y_1, y_2, y_3 gerade die Grössen (17) verstehen und uns bemühen, diejenigen Differentialresolventen zu finden, denen obige Grössen genügen.

Berechnen wir die partiellen Derivirten der Grössen (17) nach v und w. Indem wir die erste der Gleichungen (17), v als constant betrachtend, nach w differenziren, kommt

$$\frac{\partial y_3}{\partial w} = -\frac{1}{6}F^{-\frac{1}{6}-1}(u_1,u_2)\cdot\left\{\frac{\partial F}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial w}+\frac{\partial F}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial w}\right\},$$

oder

$$(18)\qquad 6F\cdot\frac{\partial y_3}{\partial w} = -\left\{\frac{\partial F}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial w}+\frac{\partial F}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial w}\right\}y_3,$$

wo F kurz die nichthomogene Form $F(u_1,u_2)$ bezeichnet.

Um aus dieser Gleichung die Grössen $\frac{\partial u_1}{\partial w}$ und $\frac{\partial u_2}{\partial w}$ zu eliminiren, wollen wir die Gleichungen (5) und (6) nach w differenziren. So kommt:

$$\begin{cases} -F^2+\left\{\frac{\partial H}{\partial u_1}-2F\cdot w\cdot\frac{\partial F}{\partial u_1}\right\}\frac{\partial u_1}{\partial w}+\left\{\frac{\partial H}{\partial u_2}-2F\cdot w\cdot\frac{\partial F}{\partial u_2}\right\}\frac{\partial u_2}{\partial w}=0, \\ \qquad\left\{\frac{\partial \Phi}{\partial u_1}-5F^4\cdot v\cdot\frac{\partial F}{\partial u_1}\right\}\frac{\partial u_1}{\partial w}+\left\{\frac{\partial \Phi}{\partial u_2}-5F^4\cdot v\cdot\frac{\partial F}{\partial u_2}\right\}\frac{\partial u_2}{\partial w}=0, \end{cases}$$

oder

$$(19)\quad \begin{cases} -F^3+\left\{F\cdot\frac{\partial H}{\partial u_1}-2H\cdot\frac{\partial F}{\partial u_1}\right\}\frac{\partial u_1}{\partial w}+\left\{F\cdot\frac{\partial H}{\partial u_2}-2H\cdot\frac{\partial F}{\partial u_2}\right\}\frac{\partial u_2}{\partial w}=0, \\ \qquad\left\{F\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial u_1}-5\Phi\cdot\frac{\partial F}{\partial u_1}\right\}\frac{\partial u_1}{\partial w}+\left\{F\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial u_2}-5\Phi\cdot\frac{\partial F}{\partial u_2}\right\}\frac{\partial u_2}{\partial w}=0. \end{cases}$$

Durch Elimination von $\frac{\partial u_1}{\partial w}$ und $\frac{\partial u_2}{\partial w}$ aus den Gleichungen (18) und (19) ergiebt sich

$$\begin{vmatrix} 6F\cdot\frac{\partial y_3}{\partial w}, & \frac{\partial F}{\partial u_1}y_3, & \frac{\partial F}{\partial u_2}y_3 \\ -F^3, & F\cdot\frac{\partial H}{\partial u_1}-2H\cdot\frac{\partial F}{\partial u_1}, & F\cdot\frac{\partial H}{\partial u_2}-2H\cdot\frac{\partial F}{\partial u_2} \\ 0, & F\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial u_1}-5\Phi\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial u_1}, & F\cdot\frac{\partial \Phi}{\partial u_2}-2\Phi\cdot\frac{\partial F}{\partial u_2} \end{vmatrix}=0.$$

Entwickeln wir diese Determinante und bedienen wir uns der oben vorgeschlagenen Bezeichnungen, so kommt

$$6F^2\cdot\{(H,\Phi)\cdot F-2(F,\Phi)\cdot H+5(F,H)\Phi\}\frac{\partial y_3}{\partial w}+F^4\cdot(F,\Phi)y_3=0,$$

oder, nach Reducirung durch F^2 und vermittelst der Identität (13),

$$(20)\qquad \Psi\cdot\frac{\partial y_3}{\partial w}+(F,\Phi)\cdot F^2\cdot y_3=0.$$

Diese Gleichung definirt die erste partielle Derivirte $\frac{\partial y_3}{\partial w}$.

Um $\frac{\partial^2 y_3}{\partial w^2}$ zu finden, differenziren wir die Gleichung (20) nach w und eliminiren $\frac{\partial u_1}{\partial w}$ und $\frac{\partial u_2}{\partial w}$ vermittelst der Gleichungen (19).

Nach einigen Umformungen ergiebt sich als Resultat der Elimination folgende Gleichung:

$$(21)\qquad \Psi^2\cdot\frac{\partial^2 y_3}{\partial w^2}-F^2\cdot E\cdot\frac{\partial y_3}{\partial w}-F^4\cdot L\cdot y_3=0,$$

wo L die nichthomogene Form 67[sten] Grades ist, welche der homogenen

$$(22)\qquad L(y_1,y_2,y_3)=\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y_1}, & \frac{\partial \Phi}{\partial y_1}, & \frac{\partial (F,\Phi)}{\partial y_1} \\ \frac{\partial F}{\partial y_2}, & \frac{\partial \Phi}{\partial y_2}, & \frac{\partial (F,\Phi)}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F}{\partial y_3}, & \frac{\partial \Phi}{\partial y_3}, & \frac{\partial (F,\Phi)}{\partial y_3} \end{vmatrix}$$

entspricht.

Diese Form ist keine Covariante.

Die Derivirten $\frac{\partial y_3}{\partial v}$ und $\frac{\partial^2 y_3}{\partial v^2}$ lassen sich ganz auf dieselbe Weise finden, und zwar ergiebt sich

$$\Psi \cdot \frac{\partial y_3}{\partial v} - (F, H) \cdot F^5 \cdot y_3 = 0, \tag{23}$$

$$\Psi^2 \cdot \frac{\partial^2 y_3}{\partial v^2} + F^5 \cdot D \cdot \frac{\partial y_3}{\partial v} - F^{10} \cdot M \cdot y_3 = 0, \tag{24}$$

wo M die nichthomogene Form 31[sten] Grades ist, welche der homogenen

$$M(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y_1}, & \frac{\partial H}{\partial y_1}, & \frac{\partial (F,H)}{\partial y_1} \\ \frac{\partial F}{\partial y_2}, & \frac{\partial H}{\partial y_2}, & \frac{\partial (F,H)}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F}{\partial y_3}, & \frac{\partial H}{\partial y_3}, & \frac{\partial (F,H)}{\partial y_3} \end{vmatrix} \tag{25}$$

entspricht.

Diese Form ist keine Covariante. Die Grösse D ist die Covariante 60[sten] Grades, welche wir schon oben durch Gleichung (14) definirt haben.

Differenziren wir die Gleichung (23) nach w, so ergiebt sich nach denselben Umformungen, wie oben, Folgendes:

$$\Psi^2 \cdot \frac{\partial^2 y_3}{\partial v \, \partial w} - F^2 \cdot E \cdot \frac{\partial y_3}{\partial v} + F^7 \cdot N \cdot y_3 = 0, \tag{26}$$

wo N die nichthomogene Form 49[sten] Grades ist, welche der homogenen

$$N(y_1, y_2, y_3) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y_1}, & \frac{\partial \Phi}{\partial y_1}, & \frac{\partial (F,H)}{\partial y_1} \\ \frac{\partial F}{\partial y_2}, & \frac{\partial \Phi}{\partial y_2}, & \frac{\partial (F,H)}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F}{\partial y_3}, & \frac{\partial \Phi}{\partial y_3}, & \frac{\partial (F,H)}{\partial y_3} \end{vmatrix} \tag{27}$$

entspricht. Sie ist keine Covariante.

Ebenso finden wir durch Differenzirung der Gleichungen

$$y_1 = u_1 y_3, \qquad y_2 = u_2 y_3$$

die *Formeln, welche die Derivirten von* y_1 *und* y_2 *bestimmen:*

$$\Psi \cdot \frac{\partial y_1}{\partial w} + (F_2, \Phi_3)\, F^2 \cdot \frac{1}{u_1} \cdot y_1 = 0, \tag{20'}$$

$$\Psi^2 \cdot \frac{\partial^2 y_1}{\partial w^2} - F^2 \cdot E \cdot \frac{\partial y_1}{\partial w} - F^4 \cdot L' \cdot \frac{1}{u_1} \cdot y_1 = 0, \tag{21'}$$

$$\Psi \cdot \frac{\partial y_1}{\partial v} - (F_2, H_3) \cdot F^5 \cdot \frac{1}{u_1} \cdot y_1 = 0, \tag{23'}$$

$$(24') \qquad \Psi^2 \cdot \frac{\partial^2 y_1}{\partial v^2} + F^5 \cdot D \cdot \frac{\partial y_1}{\partial v} - F^{10} \cdot M' \cdot \frac{1}{u_1} \cdot y_1 = 0,$$

$$(26') \qquad \Psi^2 \cdot \frac{\partial^2 y_1}{\partial v \partial w} - F^2 \cdot E \cdot \frac{\partial y_1}{\partial v} + F^7 \cdot N' \cdot \frac{1}{u_1} \cdot y_1 = 0,$$

$$(20'') \qquad \Psi \cdot \frac{\partial y_2}{\partial w} + (F_3, \Phi_1) \cdot F^2 \cdot \frac{1}{u_2} \cdot y_2 = 0,$$

$$(21'') \qquad \Psi^2 \cdot \frac{\partial^2 y_2}{\partial w^2} - F^2 \cdot E \cdot \frac{\partial y_2}{\partial w} - F^4 \cdot L'' \cdot \frac{1}{u_2} \cdot y_2 = 0,$$

$$(23'') \qquad \Psi \cdot \frac{\partial y_2}{\partial v} - (F_3, H_1) F^5 \cdot \frac{1}{u_2} \cdot y_2 = 0,$$

$$(24'') \qquad \Psi^2 \cdot \frac{\partial^2 y_2}{\partial v^2} + F^5 \cdot D \cdot \frac{\partial y_2}{\partial v} - F^{10} \cdot M'' \cdot \frac{1}{u_2} \cdot y_2 = 0,$$

$$(26'') \qquad \Psi^2 \cdot \frac{\partial^2 y_2}{\partial v \partial w} - F^2 \cdot E \cdot \frac{\partial y_2}{\partial v} + F^7 \cdot N'' \cdot \frac{1}{u_2} \cdot y_2 = 0,$$

wo die Bedeutung der eingeführten Bezeichnungen folgende ist:

(A) $\qquad (F_2, \Phi_3),\ (F_2, H_3),\ (F_3, \Phi_1),\ (F_3, H_1)$

sind die nichthomogenen Formen, welche den homogenen

$$\frac{\partial F(y_1, y_2, y_3)}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial \Phi(y_1, y_2, y_3)}{\partial y_3} - \frac{\partial F(y_1, y_2, y_3)}{\partial y_3} \cdot \frac{\partial \Phi(y_1, y_2, y_3)}{\partial y_2},$$

$$\frac{\partial F(y_1, y_2, y_3)}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial H(y_1, y_2, y_3)}{\partial y_3} - \frac{\partial F(y_1, y_2, y_3)}{\partial y_3} \cdot \frac{\partial H(y_1, y_2, y_3)}{\partial y_2},$$

u. s. w.

entsprechen;

(B) $\qquad L'(y_1, y_2, y_3),\ M'(y_1, y_2, y_3),\ N'(y_1, y_2, y_3)$

ergeben sich aus den Formeln (22), (25), (27), wenn man in der dritten Colonne der Determinanten die Grössen (F, Φ) und (F, H) bezw. durch (F_2, Φ_3) und (F_2, H_3) ersetzt;

(C) $\qquad L''(y_1, y_2, y_3),\ M''(y_1, y_2, y_3),\ N''(y_1, y_2, y_3)$

ergeben sich, wenn man in denselben Formeln die Grössen (F, Φ) und (F, H) durch (F_3, Φ_1) und (F_3, H_1) ersetzt.

Die Grade der Formen L', M', N', bezw. L'', M'', N'' sind dieselben, wie die der Formen L, M, N.

Diese Formen sind keine Covarianten.

Zur Erleichterung der folgenden Rechnungen schreiben wir die von uns bisher eingeführten covarianten und nichtcovarianten Formen und ihre Grade in folgender Tabelle:

Covarianten sind:	F,	H,	Φ,	Ψ,	D,	E.
Ihre Grade sind:	6,	12,	30,	45,	60,	78.

Die nichtcovarianten Formen sind:	L, L', L'',	M, M', M'',	N, N', N''.
Ihre Grade sind:	67,	31,	49.

§ 3.

Die Differentialresolvente in der Gestalt eines Systems dreier linearer partieller Differentialgleichungen 2ter Ordnung.

Nehmen wir die Gleichung

$$
(28)\qquad \begin{vmatrix}
\frac{\partial^2 y}{\partial w^2}, & \frac{\partial y}{\partial w}, & \frac{\partial y}{\partial v}, & y \\
\frac{\partial^2 y_1}{\partial w^2}, & \frac{\partial y_1}{\partial w}, & \frac{\partial y_1}{\partial v}, & y_1 \\
\frac{\partial^2 y_2}{\partial w^2}, & \frac{\partial y_2}{\partial w}, & \frac{\partial y_2}{\partial v}, & y_2 \\
\frac{\partial^2 y_3}{\partial w^2}, & \frac{\partial y_3}{\partial w}, & \frac{\partial y_3}{\partial v}, & y_3
\end{vmatrix} = 0,
$$

wo y_1, y_2, y_3 jene Functionen sind, über die wir im vorigen Paragraphen gesprochen haben.

Es leuchtet ein, dass die Gleichung (28) bezüglich y eine lineare partielle Differentialgleichung 2ter Ordnung mit den unabhängigen Veränderlichen v und w ist.

Es ist auch klar, dass bei der Transformation von y_1, y_2, y_3 vermittelst einer linearen homogenen Substitution mit einer von Null verschiedenen Determinante Δ die linke Seite der Gleichung (28), abgesehen vom Factor Δ, unverändert bleibt.

Hieraus folgt, dass die Coefficienten von $y, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial w}, \frac{\partial^2 y}{\partial w^2}$, welche sich bei Entwicklung der Determinante (28) ergeben, solche Functionen von y_1, y_2, y_3 sein werden, welche unter dem Einflusse einer linearen homogenen Substitution der letzteren Grössen, abgesehen vom Factor Δ, unverändert bleiben.

Diese Coefficienten sind also Covarianten.

Endlich folgt unmittelbar aus der äusseren Gestalt der Gleichung (28), dass die Grössen y_1, y_2, y_3 derselben genügen.

Formen wir jetzt die linke Seite der Gleichung (28) um, ohne ihren Werth zu verändern. Nach der bekannten Eigenschaft der Determinanten kann man sie in folgende Gestalt bringen:

$$
\frac{1}{\psi^4}\cdot\begin{vmatrix}
\psi^2.\frac{\partial^2 y}{\partial w^2} - F^2.E.\frac{\partial y}{\partial w}, & \psi.\frac{\partial y}{\partial w}, & \psi.\frac{\partial y}{\partial v}, & y \\
\psi^2.\frac{\partial^2 y_1}{\partial w^2} - F^2.E.\frac{\partial y_1}{\partial w}, & \psi.\frac{\partial y_1}{\partial w}, & \psi.\frac{\partial y_1}{\partial v}, & y_1 \\
\psi^2.\frac{\partial^2 y_2}{\partial w^2} - F^2.E.\frac{\partial y_2}{\partial w}, & \psi.\frac{\partial y_2}{\partial w}, & \psi.\frac{\partial y_2}{\partial v}, & y_2 \\
\psi^2.\frac{\partial^2 y_3}{\partial w^2} - F^2.E.\frac{\partial y_3}{\partial w}, & \psi.\frac{\partial y_3}{\partial w}, & \psi.\frac{\partial y_3}{\partial v}, & y_3
\end{vmatrix}
$$

Vermittelst der Gleichungen (21), (20), (23), (21'), (20'), (23'), (21''), (20''), (23'') bringen wir diese Grösse in die Form folgender Determinante:

$$(29)\quad \frac{1}{\Psi^4}\cdot\begin{vmatrix} \Psi^2\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial w^2}-F^2\cdot E\cdot\frac{\partial y}{\partial w}, & \Psi\cdot\frac{\partial y}{\partial w}, & \Psi\cdot\frac{\partial y}{\partial v}, & y \\ F^4\cdot L'\cdot y_3, & -(F_2,\Phi_3)\cdot F^2\cdot y_3, & (F_2,H_3)\cdot F^5\cdot y_3, & u_1 y_3 \\ F^4\cdot L''\cdot y_3, & -(F_3,\Phi_1)\cdot F^2\cdot y_3, & (F_3,H_1)\cdot F^5\cdot y_3, & u_2 y_3 \\ F^4\cdot L\cdot y_3, & -(F,\Phi)\, F^2\cdot y_3, & (F,H)\cdot F^5\cdot y_3, & y_3 \end{vmatrix}.$$

Wir setzen jetzt:

$$(30)\quad \begin{gathered} -\begin{vmatrix} (F_2,\Phi_3), & (F_2,H_3), & u_1 \\ (F_3,\Phi_1), & (F_3,H_1), & u_2 \\ (F,\Phi), & (F,H), & 1 \end{vmatrix} = F_{51}(u_1,u_2), \quad -\begin{vmatrix} L', & (F_2,H_3), & u_1 \\ L'', & (F_3,H_1), & u_2 \\ L, & (F,H), & 1 \end{vmatrix} = F_{84}(u_1,u_2), \\ -\begin{vmatrix} L', & (F_2,\Phi_3), & u_1 \\ L'', & (F_3,\Phi_1), & u_2 \\ L, & (F,\Phi), & 1 \end{vmatrix} = F_{102}(u_1,u_2), \quad \begin{vmatrix} L', & (F_2,\Phi_3), & (F_2,H_3) \\ L'', & (F_3,\Phi_1), & (F_3,H_1) \\ L, & (F,\Phi), & (F,H) \end{vmatrix} = F_{117}(u_1,u_2); \end{gathered}$$

dann sind $F_{51}(u_1,u_2)$, $F_{84}(u_1,u_2)$, $F_{102}(u_1,u_2)$, $F_{117}(u_1,u_2)$ ganze nicht-homogene Formen, deren Grade durch die resp. Indices bezeichnet werden. Diese Formen sind durch die Gleichungen (30) vollständig definirt.

Führen wir diese Bezeichnungen in die Formel (29) ein und ersetzen wir u_1 und u_2 durch die Formeln

$$(3)\qquad u_1=\frac{y_1}{y_3},\qquad u_2=\frac{y_2}{y_3},$$

so bekommt (29) folgende Gestalt:

$$(31)\left\{\begin{aligned} &\frac{F^7(y_1,y_2,y_3)\cdot F_{51}(y_1,y_2,y_3)}{\Psi^2(y_1,y_2,y_3)}\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial w^2} \\ &+\left\{-E(y_1,y_2,y_3)\cdot\frac{F_{51}(y_1,y_2,y_3)}{\Psi(y_1,y_2,y_3)}+F_{84}(y_1,y_2,y_3)\right\}\frac{F^9(y_1,y_2,y_3)}{\Psi^3(y_1,y_2,y_3)}\cdot\frac{\partial y}{\partial w} \\ &+\frac{F^6(y_1,y_2,y_3)\cdot F_{102}(y_1,y_2,y_3)}{\Psi^3(y_1,y_2,y_3)}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} \\ &+\frac{F^{11}(y_1,y_2,y_3)\cdot F_{117}(y_1,y_2,y_3)}{\Psi^4(y_1,y_2,y_3)}\cdot y. \end{aligned}\right.$$

Wir haben bereits gesehen, dass die Coefficienten von

$$\frac{\partial^2 y}{\partial w^2},\quad \frac{\partial y}{\partial w},\quad \frac{\partial y}{\partial v},\quad y$$

Covarianten sein müssen.

Hieraus folgt, dass F_{51}, F_{84}, F_{102}, F_{117} Covarianten sind und sich als ganze Functionen von F, H, Φ, Ψ ausdrücken lassen. Zunächst bemerken wir, dass die Grade aller Fundamentalcovarianten, ausser Ψ, durch 6 theilbare Zahlen sind; nur der Grad 45 der Covariante Ψ lässt sich durch 6 nicht dividiren. Hieraus folgt, dass die Covarianten F_{51} und F_{117}, deren Grade nicht durch 6 theilbar sind, Ψ als Factor enthalten müssen:

$$(32)\qquad \begin{cases} F_{51}\ (y_1, y_2, y_3) = \Psi(y_1, y_2, y_3)\cdot F_6\ (y_1, y_2, y_3), \\ F_{117}(y_1, y_2, y_3) = \Psi(y_1, y_2, y_3)\cdot F_{72}(y_1, y_2, y_3), \end{cases}$$

wo F_6 und F_{72} wieder Covarianten sind, deren Grade durch die Indices angezeigt werden.

Da die einzige linear unabhängige Covariante 6ten Grades die Form F selbst ist, so haben wir

$$(33)\qquad F_6(y_1, y_2, y_3) = C\cdot F(y_1, y_2, y_3),$$

wo C eine Constante ist.

Da (31) die linke Seite der Gleichung (28) darstellt, so bringen wir letztere vermittelst der Formeln (31), (32), (33) in folgende Gestalt:

$$(34)\qquad \begin{cases} C\cdot F^2(y_1, y_2, y_3)\cdot \Psi^2(y_1, y_2, y_3)\cdot \dfrac{\partial^2 y}{\partial w^2} \\ + \{F_{84}(y_1, y_2, y_3) - C\cdot E(y_1, y_2, y_3)\cdot F(y_1, y_2, y_3)\}\cdot F^3(y_1, y_2, y_3)\cdot \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ + F_{102}(y_1, y_2, y_3)\cdot \dfrac{\partial y}{\partial v} + F_{72}(y_1, y_2, y_3)\cdot F^5(y_1, y_2, y_3)\cdot y = 0. \end{cases}$$

Da wir die Ausdrücke der Covarianten F_{84}, F_{102}, F_{72}, E in den y_1, y_2, y_3 kennen, so ist es möglich, dieselben nach der in § 1 für Ψ^2 angewandten Methode durch die Fundamentalcovarianten F, H, Φ, Ψ auszudrücken.

Als Resultat ergiebt sich:

$$(35)\qquad \begin{cases} \dfrac{27}{C}\cdot F_{84}(y_1, y_2, y_3) - 27E(y_1, y_2, y_3)F(y_1, y_2, y_3) \\ \qquad\qquad = \{b_2(w)\cdot v^2 + b_4(w)\cdot v + b_7(w)\}\cdot F^{14}(y_1, y_2, y_3), \\ \dfrac{27}{C}\cdot F_{102}(y_1,y_2,y_3) = \{c_1(w)\cdot v^3 + c_3(w)\cdot v^2 + c_6(w)\cdot v + c_8(w)\}\cdot F^{17}(y_1,y_2,y_3), \\ \dfrac{27}{C}\cdot F_{72}(y_1, y_2, y_3) = \{d_1(w)\cdot v^2 + d_3(w)\cdot v + d_6(w)\}\cdot F^{12}(y_1, y_2, y_3), \end{cases}$$

wo $b_2(w)$, $b_4(w)$, $\cdots$, $d_6(w)$, in Bezug auf w ganze Polynome sind, deren Grade die resp. Indices nicht übersteigen.

Die Werthe der in diesen Polynomen enthaltenen Zahlencoefficienten können nach der Methode der unbestimmten Coefficienten rein arithmetisch berechnet werden.

Vermittelst (35) *und* (11) *nimmt die Gleichung* (28) *schliesslich folgende Form an:*

$$(36)\qquad \begin{cases} f(w, v)\dfrac{\partial^2 y}{\partial w^2} + \{b_2(w)\cdot v^2 + b_4(w)\cdot v + b_7(w)\}\cdot \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ + \{c_1(w)\cdot v^3 + c_3(w)\cdot v^2 + c_6(w)\cdot v + c_8(w)\}\cdot \dfrac{\partial y}{\partial v} \\ \qquad + \{d_1(w)\cdot v^2 + d_3(w)\cdot v + d_6(w)\}\cdot y = 0. \end{cases}$$

Nehmen wir jetzt die Gleichung

$$(37)\qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 y}{\partial v \partial w}, & \frac{\partial y}{\partial w}, & \frac{\partial y}{\partial v}, & y \\ \frac{\partial^2 y_1}{\partial v \partial w}, & \frac{\partial y_1}{\partial w}, & \frac{\partial y_1}{\partial v}, & y_1 \\ \frac{\partial^2 y_2}{\partial v \partial w}, & \frac{\partial y_2}{\partial w}, & \frac{\partial y_2}{\partial v}, & y_2 \\ \frac{\partial^2 y_3}{\partial v \partial w}, & \frac{\partial y_3}{\partial w}, & \frac{\partial y_3}{\partial v}, & y_3 \end{vmatrix} = 0.$$

In Bezug auf dieselbe kann man das von der Gleichung (28) Gesagte wiederholen.

Setzen wir:

$$(38)\qquad \begin{gathered} \begin{vmatrix} N', & (F_2, H_3), & u_1 \\ N'', & (F_3, H_1), & u_2 \\ N, & (F, H), & 1 \end{vmatrix} = F_{66}(u_1, u_2); \quad \begin{vmatrix} N', & (F_2, \Phi_3), & u_1 \\ N'', & (F_3, \Phi_1), & u_2 \\ N, & (F, \Phi), & 1 \end{vmatrix} = F'_{84}(u_1, u_2)^{*)}; \\ - \begin{vmatrix} N', & (F_2, \Phi_3), & (F_2, H_3) \\ N'', & (F_3, \Phi_1), & (F_3, H_1) \\ N, & (F, \Phi), & (F, H) \end{vmatrix} = F_{99}(u_1, u_2), \end{gathered}$$

so sind die Formen

$$F_{66}(y_1, y_2, y_3), \quad F'_{84}(y_1, y_2, y_3), \quad F_{99}(y_1, y_2, y_3)$$

gleichfalls Covarianten. Insbesondere lässt sich die letzte Form so ausdrücken:

$$(39)\qquad F_{99}(y_1, y_2, y_3) = \Psi(y_1, y_2, y_3) \cdot F_{54}(y_1, y_2, y_3),$$

wo F_{54} ein ganzes Polynom ist und zwar eine Covariante 54^{sten} Grades.

Vermittelst der Formeln (30), (32), (38), (39) bringen wir die Gleichung (37) in folgende Gestalt:

$$(40)\qquad \left\{ \begin{aligned} & C \cdot \Psi^2(y_1, y_2, y_3) \frac{\partial^2 y}{\partial v \partial w} + F_{66}(y_1, y_2, y_3) \cdot F^4(y_1, y_2, y_3) \frac{\partial y}{\partial w} \\ & + \{F'_{84}(y_1, y_2, y_3) - C \cdot E(y_1, y_2, y_3) \cdot F(y_1, y_2, y_3)\} \cdot F(y_1, y_2, y_3) \cdot \frac{\partial y}{\partial v} \\ & + F_{54}(y_1, y_2, y_3) \cdot F^6(y_1, y_2, y_3) \cdot y = 0. \end{aligned} \right.$$

Wenn wir die in dieser Formel enthaltenen Covarianten durch F, H, Φ, Ψ ausdrücken, so ergiebt sich

*) Wir bezeichnen diese Form durch das Symbol $F'_{84}(u_1, u_2)$ zum Unterschiede von der in (30) definirten Form $F_{84}(u_1, u_2)$.

$$(41)\quad \begin{cases} 27\cdot \Psi^2(y_1,y_2,y_3) = f(w,v)\cdot F^{15}(y_1,y_2,y_3), \\ \frac{27}{C}\cdot F_{66}(y_1,y_2,y_3) = \{e_0\cdot v^2 + e_3(w)\cdot v + e_5(w)\}\, F^{11}(y_1,y_2,y_3), \\ \frac{27}{C}\cdot F'_{84}(y_1,y_2,y_3) - 27\,E(y_1,y_2,y_3)\,F(y_1,y_2,y_3) \\ \qquad\qquad = \{f_2(w)\cdot v^2 + f_4(w)\cdot v + f_7(w)\}\, F^{14}(y_1,y_2,y_3), \\ \frac{27}{C}\cdot F_{54}(y_1,y_2\cdot y_3) = \{g_2(w)\cdot v + g_4(w)\}\, F^9(y_1,y_2,y_3), \end{cases}$$

wo e_0, $e_3(w)$, $e_5(w)$, $\cdots$, $g_4(w)$ in Bezug auf w ganze Polynome sind, deren Grade die resp. Indices nicht übersteigen. *Die Gleichung* (37) *sieht schliesslich so aus:*

$$(42)\quad \begin{cases} f(w,v)\cdot\frac{\partial^2 y}{\partial v\partial w} + \{e_0v^2 + e_3(w)\cdot v + e_5(w)\}\frac{\partial y}{\partial w} \\ \qquad + \{f_2(w)\cdot v^2 + f_4(w)\cdot v + f_7(w)\}\frac{\partial y}{\partial v} \\ \qquad + \{g_2(w)\cdot v + g_4(w)\}\, y = 0. \end{cases}$$

Nehmen wir endlich die Gleichung

$$(43)\quad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}, & \frac{\partial y}{\partial w}, & \frac{\partial y}{\partial v}, & y \\ \frac{\partial^2 y_1}{\partial v^2}, & \frac{\partial y_1}{\partial w}, & \frac{\partial y_1}{\partial v}, & y_1 \\ \frac{\partial^2 y_2}{\partial v^2}, & \frac{\partial y_2}{\partial w}, & \frac{\partial y_2}{\partial v}, & y_2 \\ \frac{\partial^2 y_3}{\partial v^2}, & \frac{\partial y_3}{\partial w}, & \frac{\partial y_3}{\partial v}, & y_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Auch hier lässt sich das für die Gleichungen (28), (37) Gesagte wiederholen. Setzen wir:

$$(44)\quad \begin{gathered} -\begin{vmatrix} M', & (F_2,H_3), & u_1 \\ M'', & (F_3,H_1), & u_2 \\ M, & (F,H), & 1 \end{vmatrix} = F_{48}(u_1,u_2), \quad -\begin{vmatrix} M', & (F_2,\Phi_3), & u_1 \\ M'', & (F_3,\Phi_1), & u_2 \\ M, & (F,\Phi), & 1 \end{vmatrix} = F'_{66}(u_1,u_2)^{*}), \\ \begin{vmatrix} M', & (F_2,\Phi_3), & (F_2,H_3) \\ M'', & (F_3,\Phi_1), & (F_3,H_1) \\ M, & (F,\Phi), & (F,H) \end{vmatrix} = F_{81}(u_1,u_2), \end{gathered}$$

so sind die Formen

$$F_{48}(y_1,y_2,y_3),\quad F'_{66}(y_1,y_2,y_3),\quad F_{81}(y_1,y_2,y_3)$$

wiederum Covarianten.

---

*) Wir bezeichnen diese Form durch das Symbol $F'_{66}(u_1,u_2)$ zum Unterschiede von der in (38) definirten Form $F_{66}(u_1,u_2)$.

Die letzte Form lässt sich so ausdrücken:

$$F_{81}(y_1, y_2, y_3) = \Psi(y_1, y_2, y_3) \cdot F_{36}(y_1, y_2, y_3), \tag{45}$$

wo F_{36} ein ganzes Polynom ist und zwar eine Covariante 36ten Grades.

Die Gleichung (43) nimmt jetzt folgende Gestalt an:

$$(46)\quad \begin{cases} C \cdot \Psi^2(y_1, y_2, y_3) \cdot \dfrac{\partial^2 y}{\partial v^2} + F_{48}(y_1, y_2, y_3) \cdot F^7(y_1, y_2, y_3) \cdot \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \quad + \{C \cdot D(y_1, y_2, y_3) \cdot F(y_1, y_2, y_3) + F'_{66}(y_1, y_2, y_3)\} \cdot F^4(y_1, y_2, y_3) \dfrac{\partial y}{\partial v} \\ \quad + F_{36}(y_1, y_2, y_3) \cdot F^9(y_1, y_2, y_3) \cdot y = 0. \end{cases}$$

Wenn wir die in dieser Formel enthaltenen Covarianten durch F, H, Φ, Ψ ausdrücken, so ergiebt sich

$$(47)\quad \begin{cases} \dfrac{27}{C} \cdot F_{48}(y_1, y_2, y_3) = \{h_1(w) \cdot v + h_4(w)\} F^8(y_1, y_2, y_3), \\ 27\, D(y_1, y_2, y_3) \cdot F(y_1, y_2, y_3) + \dfrac{27}{C} \cdot F'_{66}(y_1, y_2, y_3) \\ \qquad\qquad = \{k_0 \cdot v^2 + k_3(w) \cdot v + k_5(w)\} F^{11}(y_1, y_2, y_3), \\ \dfrac{27}{C} \cdot F_{36}(y_1, y_2, y_3) = \{l_0 \cdot v + l_3(w)\} F^6(y_1, y_2, y_3). \end{cases}$$

Die Gleichung (43) *sieht zum Schluss so aus:*

$$(48)\quad \begin{cases} f(w, v) \dfrac{\partial^2 y}{\partial v^2} + \{h_1(w) \cdot v + h_4(w)\} \dfrac{\partial y}{\partial w} + \{k_0 \cdot v^2 + k_3(w) \cdot v + k_5(w)\} \dfrac{\partial y}{\partial v} \\ \qquad + \{l_0 \cdot v + l_3(w)\} y = 0. \end{cases}$$

Im vorliegenden Paragraphen haben wir also ein System dreier partieller, zur Definirung von y dienender Differentialgleichungen gefunden:

$$(36)\quad \begin{cases} f(w, v) \dfrac{\partial^2 y}{\partial w^2} + \{b_2(w) \cdot v^2 + b_4(w) \cdot v + b_7(w)\} \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \qquad + \{c_1(w) \cdot v^3 + c_3(w) \cdot v^2 + c_6(w) \cdot v + c_8(w)\} \dfrac{\partial y}{\partial v} \\ \qquad + \{d_1(w) \cdot v^2 + d_3(w) \cdot v + d_6(w)\} y = 0, \end{cases}$$

$$(42)\quad \begin{cases} f(w, v) \dfrac{\partial^2 y}{\partial v \partial w} + \{e_0 v^2 + e_2(w) \cdot v + e_5(w)\} \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \qquad + \{f_2(w) \cdot v^2 + f_4(w) \cdot v + f_7(w)\} \dfrac{\partial y}{\partial v} + \{g_2(w) \cdot v + g_4(w)\} y = 0, \end{cases}$$

$$(48)\quad \begin{cases} f(w, v) \dfrac{\partial^2 y}{\partial v^2} + \{h_1(w) \cdot v + h_4(w)\} \dfrac{\partial y}{\partial w} + \{k_0 \cdot v^2 + k_3(w) \cdot v + k_5(w)\} \dfrac{\partial y}{\partial v} \\ \qquad + \{l_0 \cdot v + l_3(w)\} y = 0. \end{cases}$$

Dieses Gleichungssystem hat ein vollständiges Integral mit drei willkürlichen Constanten.

Da die Gleichungen dieses Systems linear sind und als particuläre Integrale die Functionen

$$(4) \qquad y_1, \; y_2, \; y_3$$

haben, so genügt ihnen auch folgender Ausdruck:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3,$$

wo C_1, C_2, C_3 willkürliche Constanten sind.

Es ist klar, dass letzterer Ausdruck das vollständige Integral des Gleichungssystems (36), (42), (48) ist.

Dieses System simultaner partieller Differentialgleichungen können wir die Differentialresolvente der algebraischen Gleichungen (1) *und folglich auch jeder algebraischen Gleichung 6ten Grades nennen**).

§ 4.

Die Differentialresolvente in der Gestalt einer linearen Differentialgleichung 3ter Ordnung mit einer unabhängigen Veränderlichen v oder w.

Differenziren wir die Gleichung (48) nach v, so kommt:

$$(49) \quad \begin{cases} f(w,v)\dfrac{\partial^3 y}{\partial v^3} + \{f_v'(w,v) + k_0 v^2 + k_3(w)\cdot v + k_5(w)\}\dfrac{\partial^2 y}{\partial v^2} \\ \qquad + \{[2k_0 + l_0]v + [k_3(w) + l_3(w)]\}\dfrac{\partial y}{\partial v} + l_0 y \\ \qquad + \{h_1(w)\cdot v + h_4(w)\}\dfrac{\partial^2 y}{\partial v \partial w} + h_1(w)\dfrac{\partial y}{\partial w} = 0, \end{cases}$$

wo $f_v'(w,v)$ die partielle Derivirte von $f(w,v)$ nach v ist. Durch Eliminirung von $\dfrac{\partial^2 y}{\partial v \partial w}$ und $\dfrac{\partial y}{\partial w}$ aus den Gleichungen (49), (42), (48) finden wir

$$\begin{vmatrix} f\cdot\dfrac{\partial^3 y}{\partial v^3} + \{f_v' + k_0 v^2 + k_3 v + k_5\}\dfrac{\partial^2 y}{\partial v^2} + \{(2k_0 + l_0)v + (k_3 + l_3)\}\dfrac{\partial y}{\partial v} + l_0 y, & h_1 v + h_4, & h_1 \\ f\cdot\dfrac{\partial^2 y}{\partial v^2} + \{k_0 v^2 + k_3 v + k_5\}\dfrac{\partial y}{\partial v} + \{l_0 v + l_3\} y, & 0, & h_1 v + h_4 \\ \{f_2 v^2 + f_4 v + f_7\}\dfrac{\partial y}{\partial v} + \{g_2 v + g_4\} y, & f, & e_0 v^2 + e_3 v + e_5 \end{vmatrix} = 0,$$

*) Es leuchtet ein, dass das Gleichungssystem (36), (42), (48), abgesehen von den Bezeichnungen, dieselbe Bedeutung hat, wie die Gleichungen A_2 in § 2 des 2. Theiles der oben citirten Arbeit von *Boulanger* „Journal de l'école polytechnique" 1898. Der Unterschied besteht nur darin, dass Boulanger die Coefficienten dieser Gleichungen nicht endgültig durch die unabhängigen Variablen, sondern durch die Differentialinvarianten von Goursat und Painlevé ausdrückt. Vergleicht man die obigen Formeln (36), (42), (48) mit denen von Boulanger, so kann man die Ausdrücke der Differentialinvarianten für die Valentiner'sche Gruppe durch die unabhängigen Variabelen finden. Ausserdem kann uns dieselbe Vergleichung eine einfachere Methode, als die oben angedeutete, zur Berechnung der Zahlencoefficienten bieten.

wo der Kürze wegen die Functionen $f(w,v)$, $f_v'(w,v)$, $k_3(w)$, $k_5(w)$, $\cdots$ durch die Buchstaben $f, f_v', k_3, k_5, \cdots$ bezeichnet sind.

Entwickeln wir die letztere Determinante, so ergiebt sich

$$
(50)\quad \begin{cases}
f^2\cdot(h_1\cdot v+h_4)\,\dfrac{\partial^3 y}{\partial v^3} + f\cdot\{[f_v' + (k_0+e_0)v^2 + (k_3+e_3)v \\
\qquad\qquad + (k_5+e_5)](h_1\cdot v+h_4) - h_1\cdot f\}\,\dfrac{\partial^2 y}{\partial v^2} \\
\quad + \{f\cdot[(2k_0+l_0)v + (k_3+l_3)](h_1\cdot v+h_4) \\
\qquad\qquad + (k_0\cdot v^2+k_3\cdot v+k_5)[(e_0\cdot v^2+e_3\cdot v+e_5)(h_1\cdot v+h_4)-h_1\cdot f] \\
\qquad\qquad - (f_2\cdot v^2+f_4\cdot v+f_7)(h_1\cdot v+h_4)^2\}\,\dfrac{\partial y}{\partial v} \\
\quad + \{l_0\cdot f\cdot(h_1\cdot v+h_4)+(l_0\cdot v+l_3)[(h_1\cdot v+h_4)(e_0\cdot v^2+e_3\cdot v+e_5)-h_1\cdot f] \\
\qquad\qquad - (g_2\cdot v+g_4)(h_1\cdot v+h_4)^2\}\,y = 0.
\end{cases}
$$

Diese Gleichung kann man Differentialresolvente 3ter Ordnung für den Fall nennen, wo v als unabhängige Veränderliche dient.

Differenziren wir die Gleichung (36) nach w, so bekommen wir

$$
(51)\quad \begin{cases}
f\cdot\dfrac{\partial^3 y}{\partial w^3} + \{f_w' + b_2\cdot v^2 + b_4\cdot v + b_7\}\,\dfrac{\partial^2 y}{\partial w^2} \\
\quad + \{(b_2'+d_1)v^2+(b_4'+d_3)\,v+(b_7'+d_6)\}\,\dfrac{\partial y}{\partial w} + \{d_1'\cdot v^2+d_3'\cdot v+d_6'\}\,y \\
\quad + \{c_1\cdot v^3+c_3\cdot v^2+c_6 v+c_8\}\,\dfrac{\partial^2 y}{\partial v\,\partial w} \\
\quad + \{c_1'\cdot v^3+c_3'\cdot v^2+c_6'\cdot v+c_8'\}\,\dfrac{\partial y}{\partial v} = 0,
\end{cases}
$$

wo f_w', b_2', b_4', $\cdots$ Derivirte von $f(w,v)$, $b_2(w)$, $b_4(w)$, $\cdots$ nach w sind. Durch Eliminirung von $\frac{\partial^2 y}{\partial v\,\partial w}$ und $\frac{\partial y}{\partial v}$ aus den Gleichungen (51), (36), (42) finden wir

$$
\begin{vmatrix}
\begin{array}{l} f\cdot\dfrac{\partial^3 y}{\partial w^3} + (f_w'+b_2\cdot v^2+b_4\cdot v+b_7)\,\dfrac{\partial^2 y}{\partial w^2} \\ \quad + \{(b_2'+d_1)v^2+(b_4'+d_3)\,v+(b_7'+d_6)\}\,\dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \quad + \{d_1'v^2+d_3'v+d_6'\}\,y \end{array}, &
\begin{array}{c} c_1\cdot v^3+c_3\cdot v^2 \\ +c_6\cdot v+c_8, \end{array} &
\begin{array}{c} c_1'\cdot v^3+c_3'\cdot v^2 \\ +c_6'\cdot v+c_8' \end{array} \\[2ex]
\begin{array}{l} f\cdot\dfrac{\partial^2 y}{\partial w^2} + \{b_2\cdot v^2+b_4\cdot v+b_7\}\,\dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \quad + \{d_1\cdot v^2+d_3\cdot v+d_6\}\,y \end{array}, &
0\quad, &
\begin{array}{c} c_1\cdot v^3+c_3\cdot v^2 \\ +c_6\cdot v+c_8 \end{array} \\[2ex]
\{e_0\cdot v^2+e_3\cdot v+e_5\}\,\dfrac{\partial y}{\partial w} + \{g_2\cdot v+g_4\}\,y\quad, &
f\quad, &
f_2\cdot v^2+f_4\cdot v+f_7
\end{vmatrix} = 0.
$$

Entwickeln wir diese Determinante, so ergiebt sich:

$$
(52)\quad \left\{\begin{aligned}
& f^2 \cdot \{c_1 \cdot v^3 + c_3 \cdot v^2 + c_6 \cdot v + c_8\} \frac{\partial^3 y}{\partial w^3} \\
& + f \cdot \{(c_1 \cdot v^3 + c_3 \cdot v^2 + c_6 \cdot v + c_8)[f'_w + (b_2 + f_2) v^2 + (b_4 + f_4) v + (b_7 + f_7)] \\
& \qquad - f \cdot (c_1' \cdot v^3 + c_3' \cdot v^2 + c_6' \cdot v + c_8')\} \frac{\partial^2 y}{\partial w^2} \\
& + \{f \cdot [(b_2' + d_1) v^2 + (b_4' + d_3) v + (b_7' + d_6)](c_1 \cdot v^3 + c_3 \cdot v^2 + c_6 \cdot v + c_8) \\
& \qquad + (b_2 \cdot v^2 + b_4 \cdot v + b_7)[(c_1 \cdot v^3 + c_3 \cdot v^2 + c_6 \cdot v + c_8)(f_2 \cdot v^2 + f_4 \cdot v + f_7) \\
& \qquad\qquad - f \cdot (c_1' \cdot v^3 + c_3' \cdot v^2 + c_6' \cdot v + c_8')] \\
& \qquad - (e_0 \cdot v^2 + e_3 \cdot v + e_5)(c_1 \cdot v^3 + c_3 \cdot c^2 + c_6 \cdot v + c_8)^2\} \frac{\partial y}{\partial w} \\
& + \{f \cdot (d_1' \cdot v^2 + d_3' \cdot v + d_6')(c_1 \cdot v^3 + c_3 \cdot v^2 + c_6 \cdot v + c_8) \\
& \qquad + (d_1 \cdot v^2 + d_3 \cdot v + d_6)[(c_1 \cdot v^3 + c_3 \cdot v^2 + c_6 \cdot v + c_8)(f_2 \cdot v^2 + f_4 \cdot v + f_7) \\
& \qquad\qquad - f \cdot (c_1' \cdot v^3 + c_3' \cdot v^2 + c_6' \cdot v + c_8')] \\
& \qquad - (g_2 \cdot v + g_4)(c_1 \cdot v^3 + c_3 \cdot v^2 + c_6 \cdot v + c_8)^2\} y = 0.
\end{aligned}\right.
$$

Diese Gleichung kann man Differentialresolvente 3ter Ordnung für den Fall nennen, wo w als unabhängige Veränderliche dient.

In den drei folgenden Paragraphen werden wir einige Eigenschaften der Functionen y_1, y_2, y_3 von v resp. w zeigen, und auf Grund der Kenntnis dieser Eigenschaften werden wir dann im Stande sein, die äussere Gestalt der Gleichungen (50) und (52) zu vereinfachen.

§ 5.

Primformen.

Es seien y_1, y_2, y_3 Integrale der oben gefundenen Differentialgleichungen; dann wollen wir „Primform" ein derartiges homogenes Polynom in den genannten Veränderlichen nennen, welches entweder einer rationalen Function der Grössen v, w oder einem Radikale aus einer rationalen Function derselben Grössen gleich ist.

Es ist klar, dass jede Covariante eine Primform ist. Suchen wir insbesondere die Ausdrücke der Fundamentalcovarianten F, H, Φ, Ψ durch die Veränderlichen v und w.

Wenn man die Ausdrücke

$$
(17)\qquad y_3 = F^{-\frac{1}{6}}(u_1, u_2), \quad y_1 = u_1 y_3, \quad y_2 = u_2 y_3
$$

in die Form $F(y_1, y_2, y_3)$ einsetzt, so ergiebt sich

$$
F(y_1, y_2, y_3) = 1.
$$

Genau so finden wir

$$H(y_1, y_2, y_3) = \frac{H(u_1, u_2)}{F^2(u_1, u_2)} = w,$$

$$\Phi(y_1, y_2, y_3) = \frac{\Phi(u_1, u_2)}{F^5(u_1, u_2)} = v,$$

$$\Psi(y_1, y_2, y_3) = \frac{\Psi(u_1, u_2)}{F^{\frac{15}{2}}(u_1, u_2)}.$$

Auf Grund der Gleichung

$$(11) \qquad 27\Psi^2(y_1, y_2, y_3) = f(w, v) \cdot F^{15}(y_1, y_2, y_3)$$

bringen wir letztere Formel in folgende Gestalt:

$$\Psi(y_1, y_2, y_3) = \frac{1}{3\sqrt{3}} \sqrt{f(w, v)}.$$

Somit haben wir gefunden:

$$(53) \qquad \begin{cases} F(y_1, y_2, y_3) = 1, \\ H(y_1, y_2, y_3) = w, \\ \Phi(y_1, y_2, y_3) = v, \\ \Psi(y_1, y_2, y_3) = \frac{1}{3\sqrt{3}} \sqrt{f(w, v)}. \end{cases}$$

Diese Formeln geben die Ausdrücke der fundamentalen Primformen durch v und w.

§ 6.

Die Riemann'schen Flächen R_{360}^{v} und R_{360}^{w}, auf welchen die Functionen u_1 und u_2 eindeutig ausgebreitet sind.

Wir wollen jetzt zunächst v als unabhängige Veränderliche und w als Parameter betrachten.

Dann sind bei festgehaltenem w die u_1 und u_2 zwei algebraische Functionen der Veränderlichen v, die eindeutig auf ein und derselben regulären 360-blättrigen (mit w veränderlichen) Riemann'schen Fläche ausgebreitet sind, welche wir mit dem Symbole R_{360}^{v} bezeichnen.

Wenn die constante Grösse w gegeben ist, so entspricht jedem Punkte der Fläche R_{360}^{v} ein vollständig bestimmtes Grössenpaar u_1, u_2. Und umgekehrt entspricht jedem möglichen Grössenpaare u_1, u_2 ein einzelner Punkt der Fläche R_{360}^{v}.

Nehmen wir die Curve 12ter Ordnung

$$(5) \qquad H(u_1, u_2) - wF^2(u_1, u_2) = 0,$$

wo w ein constanter Parameter ist, und nennen wir diese Curve die Fundamentalcurve. Jedem möglichen Grössenpaar u_1, u_2 entspricht ein vollständig bestimmter Punkt dieser Curve, und umgekehrt entspricht jedem Punkte derselben ein vollständig bestimmtes Grössenpaar u_1, u_2.

Hieraus folgt, dass die Riemann'sche Fläche R_{360}^v und die Curve (5) auf einander eindeutig bezogen sind. Sie haben ein und dasselbe Geschlecht, ihre Eigenschaften hängen unter einander eng zusammen.

Die Curve (5) gehört zu einem Büschel von Curven, welche durch alle Schnittpunkte der Curven

$$H(u_1, u_2) = 0, \qquad F^2(u_1, u_2) = 0$$

gehen.

Die Eigenschaften der Curve

$$F(u_1, u_2) = 0$$

und einiger anderer verwandter Curven wurden bereits von *Wiman* studirt*).

Wir erinnern an diejenigen Eigenschaften dieser Curven, welche uns bald nöthig sein werden.

1) Die Curve $H(u_1, u_2) = 0$ geht durch jeden ihrer Schnittpunkte mit der Curve $F(u_1, u_2) = 0$ nur ein Mal. Hieraus folgt unter anderem, dass die Curve $F(u_1, u_2) = 0$ nur ein Mal durch jeden ihrer Schnittpunkte mit der Curve (5) gehen wird.

2) Die Curve $\Phi(u_1, u_2) = 0$ geht zwei Mal durch jeden ihrer Schnittpunkte mit der Curve $F(u_1, u_2) = 0$.

3) Die drei Curven $F(u_1, u_2) = 0$, $H(u_1, u_2) = 0$, $\Phi(u_1, u_2) = 0$ können sich in keinem Punkte der Ebene treffen. Mit anderen Worten: Die drei Functionen $F(u_1, u_2)$, $H(u_1, u_2)$, $\Phi(u_1, u_2)$ können für kein Werthsystem u_1, u_2 gleichzeitig verschwinden.

Wenden wir uns jetzt zur Bestimmung der Lage der *kritischen Punkte* der Function u_1 oder, was dasselbe ist, der Lage der *Windungspunkte* der Fläche R_{360}^v.

Wir finden die Abhängigkeit zwischen u_1 und v vermittelst Eliminirung von u_2 aus den Gleichungen

$$(5) \qquad H(u_1, u_2) - wF^2(u_1, u_2) = 0,$$

$$(6) \qquad \Phi(u_1, u_2) - v\,F^5(u_1, u_2) = 0.$$

Als Resultat gewinnen wir eine Gleichung der Form

$$(54) \qquad \Omega(u_1, v, w) = 0,$$

welche u_1 als Function der Veränderlichen v bestimmt, wobei w als constanter Parameter betrachtet wird. Um die Lage der kritischen Punkte der Function u_1 zu finden, setzen wir die partielle Derivirte nach u_1 der linken Seite der Gleichung (54) gleich Null.

Nun ist klar, dass wir dasselbe Ziel erreichen, wenn wir die Glei-

*) Math. Annalen Bd. 47 „Ueber eine einfache Gruppe von 360 ebenen Collineationen".

chungen (5) und (6) unter der Voraussetzung, dass u_2 Function von u_1 ist, nach u_1 differenziren und aus den gewonnenen Gleichungen

$$(55)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial u_1} - 2wF \cdot \dfrac{\partial F}{\partial u_1} + \left(\dfrac{\partial H}{\partial u_2} - 2wF \cdot \dfrac{\partial F}{\partial u_2}\right) \dfrac{\partial u_2}{\partial u_1} = 0, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial u_1} - 5vF^4 \cdot \dfrac{\partial F}{\partial u_1} + \left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial u_2} - 5vF^4 \cdot \dfrac{\partial F}{\partial u_2}\right) \dfrac{\partial u_2}{\partial u_1} = 0 \end{cases}$$

die Ableitung $\frac{\partial u_2}{\partial u_1}$ eliminiren. Das Resultat dieser Elimination ist

$$\frac{1}{F} \cdot \{(H, \Phi) \cdot F - 2(F, \Phi) \cdot H + 5(F, H) \cdot \Phi\} = 0,$$

oder, auf Grund der Gleichung (13),

$$\frac{\Psi(u_1, u_2)}{F(u_1, u_2)} = 0.$$

Erhebt man diese Gleichung zum Quadrat, so kommt auf Grund der oben gefundenen Gleichung (11)

$$f(w, v) \cdot F^{13}(u_1, u_2) = 0.$$

Hieraus folgt, dass *die Windungspunkte der Fläche R_{360}^v denjenigen Werthen von v entsprechen, welche' durch folgende Gleichungen bestimmt werden:*

$$(56)\qquad \text{I.}\qquad f(w, v) = 0,$$

also auch

$$(57)\qquad \Psi(u_1, u_2) = 0;$$

$$(58)\qquad \text{II.}\qquad F(u_1, u_2) = 0.$$

I. Die Gleichung (56), oder in entwickelter Form,

$$(59)\qquad v^3 + a_3(w) \cdot v^2 + a_5(w) \cdot v + a_7(w) = 0$$

bestimmt die Lage von drei endlichen kritischen Punkten. Bezeichnen wir die Wurzeln der in Bezug auf v gelösten Gleichung (59) mit den Buchstaben α, β, γ, so können wir sagen, dass die Fläche R_{360}^v an drei unter einander verschiedenen endlichen Stellen α, β, γ Windungspunkte hat.

II. Aus den Gleichungen (5) und (6) ist zu sehen, dass die Gleichung (58) nur unter der Bedingung $v = \infty$ statthaben kann*). Folglich bestimmt die Gleichung (58) die Lage eines vierten, in der Unendlichkeit befindlichen kritischen Punktes.

I. Wir fangen mit dem Punkte α an. Wenn bei $v = \alpha$ die Wurzel u_1 eine mehr als zweifache Wurzel der Gleichung (54) ist, so wird bei diesem Werthe von v sowohl die erste als auch die zweite Derivirte der linken

*) Andernfalls würden die Functionen $F(u_1, u_2)$, $H(u_1, u_2)$, $\Phi(u_1, u_2)$ an der nämlichen Stelle verschwinden, was, wie wir oben gesehen haben, unmöglich ist.

Seite der Gleichung (54) verschwinden. Hieraus folgt, dass im genannten Falle, ausser der Gleichung (57), noch die folgende Gleichung

(60) $$\frac{\partial \Psi}{\partial u_1} + \frac{\partial \Psi}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial u_2}{\partial u_1} = 0$$

statthaben muss, wo $\frac{\partial u_2}{\partial u_1}$ durch die erste der Gleichungen (55) definirt wird. Durch Eliminirung von $\frac{\partial u_2}{\partial u_1}$ aus der Gleichung (60) und der ersten der Gleichungen (55) ergiebt sich dann

$$\frac{1}{F} \cdot \{(H, \Psi) \cdot F - 2(F, \Psi) \cdot H\} = 0,$$

oder, auf Grund der Gleichung (16),

(61) $$D(u_1, u_2) = 0.$$

Also, wenn $v = \alpha$ eine mehr als zweifache Wurzel der Gleichung (54) ist, so muss, bei beliebigem w, der Werth $v = \alpha$ den Gleichungen (5), (6), (57), (61) gleichzeitig genügen. Dieses könnte nur in dem Falle geschehen, wenn die Covarianten $\Psi(u_1, u_2)$ und $D(u_1, u_2)$ einen gemeinschaftlichen Theiler hätten, welcher dann seinerseits eine Covariante wäre. Aber in diesem Falle würde Ψ sich durch die übrigen Covarianten F, H, Φ rational ausdrücken lassen und wäre keine Fundamentalcovariante. Also ist α nur eine zweifache Wurzel der Gleichung (54).

Das von der Wurzel α Gesagte bezieht sich sofort auch auf β und γ. Folglich sind wir zu dem Schlusse gekommen, dass die Fläche R_{360}^v im Endlichen Windungspunkte nur an drei Stellen α, β, γ besitzt. Diese werden durch die Gleichung

(56) $$f(w, v) = 0$$

bestimmt. Die Windungspunkte sind einfach, d. h. *alle Blätter der Fläche* R_{360}^v *sind in ihnen paarweise unter einander verbunden.*

II. Es erübrigt noch den Charakter der unendlich entfernten Windungspunkte zu betrachten.

Bei $v = \infty$ nimmt die Gleichung (6) die Form

(62) $$F^5(u_1, u_2) = 0$$

an. Wir haben aber schon oben erwähnt, dass die Curve $F(u_1, u_2) = 0$ jeden ihrer Schnittpunkte mit der Curve (5) nur ein Mal passirt. Hieraus folgt direct, dass die Curve (62) durch jeden ihrer Schnittpunkte mit der Curve (5) fünf Mal hindurchgeht. *Also hängen alle Blätter der Fläche* R_{360}^v *in den unendlich entfernten Windungspunkten zu je fünf mit einander zusammen.*

Die gefundenen Eigenschaften der Fläche R_{360}^v lassen das Geschlecht derselben leicht berechnen.

Wenn man mit N die Blätterzahl einer regulären Riemann'schen Fläche, mit p ihr Geschlecht, mit ϱ die Zahl der verschiedenen Stellen, wo ihre Windungspunkte liegen, und mit $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots, \lambda_\varrho$ die Zahlen der an diesen Stellen mit einander verbundenen Blätter bezeichnet, so muss bekanntlich folgende Relation gelten:

$$\frac{2p-2}{N} + \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} + \cdots + \frac{1}{\lambda_\varrho} = \varrho - 2. \tag{63}$$

Für die Fläche R_{360}^v haben wir nun

$$N = 360, \ \varrho = 4; \ \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2, \ \lambda_4 = 5.$$

Die Gleichung (63) lautet daher

$$\frac{p-1}{180} + \frac{3}{2} + \frac{1}{5} = 2,$$

woraus

$$p = 55.$$

Die Fläche R_{360}^v ist vom Geschlecht 55.

Wir haben schon oben erwähnt, dass das Geschlecht der Fundamentalcurve (5) dem Geschlecht der Fläche R_{360}^v gleich ist. Bezeichnet man die Ordnung einer nicht zerfallenden Curve mit n, ihr Geschlecht mit p und die Zahl der Doppelpunkte mit d, so gilt zwischen diesen Grössen folgende Relation:

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} - d = p. \tag{64}$$

In unserem Falle haben wir

$$n = 12, \quad p = 55.$$

Folglich ist

$$d = 0,$$

d. h. *die Curve* (5) *hat keine Doppelpunkte.*

Betrachten wir jetzt umgekehrt w als unabhängige Veränderliche und v als constanten Parameter. Dann sind u_1 und u_2 zwei algebraische Functionen der Veränderlichen w, die eindeutig auf ein und derselben regulären Riemann'schen Fläche R_{360}^w ausgebreitet sind. Die Fläche hängt dabei noch von dem Parameter v ab.

Diese Fläche ist auf die Fundamentalcurve

$$\Phi(u_1, u_2) - vF^5(u_1, u_2) = 0 \tag{6}$$

eindeutig bezogen. Ihr Geschlecht ist dem dieser Curve gleich.

In Betreff der Fläche R_{360}^w gilt mutatis mutandis das von R_{360}^v Gesagte. Daher beschränken wir uns auf die Resultate.

I. Die endlichen Windungspunkte der Fläche R_{360}^w werden durch die Gleichung siebenten Grades

(59) $$v^8 + a_2(w) \cdot v^2 + a_5(w) \cdot v + a_7(w) = 0$$

bestimmt. *In allen diesen Punkten sind die Blätter der Fläche R_{360}^w paarweise unter einander verbunden.*

II. Die Fläche R_{360}^w hat unendlich entfernte Windungspunkte. Bei $w = \infty$ gewinnt die Gleichung (5) folgende Gestalt:

(65) $$F^2(u_1, u_2) = 0.$$

Nun haben wir oben bereits erwähnt, dass die Curve $\Phi(u_1, u_2) = 0$ jeden ihrer Schnittpunkte mit $F(u_1, u_2) = 0$ zweimal passirt. Daher passirt die Curve (65) jeden ihrer Schnittpunkte mit der Fundamentalcurve (6) viermal. Hieraus folgt, dass *im Unendlichen die Blätter der Fläche R_{360}^w zu je vier unter einander verbunden sind.*

Bezeichnen wir das Geschlecht der Fläche R_{360}^w abermals mit p, so können wir diese Zahl aus der Gleichung (63) berechnen, indem wir in derselben

$$N = 360, \quad \varrho = 8, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_7 = 2, \quad \lambda_8 = 4$$

setzen. So kommt

$$\frac{p-1}{180} + \frac{7}{2} + \frac{1}{4} = 6; \quad p = 406.$$

Das Geschlecht der Fläche R_{360}^w ist gleich 406.

Ebenso gross muss demnach das Geschlecht der Fundamentalcurve 30^{ster} Ordnung (6) sein. Bezeichnen wir die Anzahl der Doppelpunkte dieser Curve mit d und setzen wir in die Gleichung (64)

$$n = 30, \quad p = 406,$$

so kommt

$$d = 0.$$

Die Curve (6) *hat also keine Doppelpunkte.*

§ 7.

Berechnung der Wurzeln der determinirenden Gleichungen für die im § 4 gefundenen Differentialresolventen 3ter Ordnung.

Nehmen wir die in § 4 gefundene Differentialresolvente (50). Die Verhältnisse u_1 und u_2 ihrer Integrale y_1, y_2, y_3 sind die Wurzeln des Fundamentalgleichungssystems (1). Demnach sind durchaus kritische Punkte der Integrale der Gleichung (50) alle Windungspunkte der Fläche R_{360}^v, daneben aber vielleicht auch noch einige andere Punkte.

Im vorigen Paragraphen haben wir gesehen, dass als Windungspunkte der Fläche R_{360}^v die folgenden auftreten:

I. die drei durch die Gleichung

$$f(w, v) = 0 \tag{56}$$

bestimmten Punkte α, β, γ,

II. der Punkt

$$v = \infty.$$

Aus der Gleichung (50) sehen wir andererseits, dass als kritische Punkte ihrer Integrale auftreten können:

I. die durch die Gleichung

$$f(w, v) = 0 \tag{56}$$

bestimmten Punkte α, β, γ,

II. der Punkt

$$v = \infty,$$

III. ein neuer durch die Gleichung

$$h_1(w) \cdot v + h_4(w) = 0 \tag{66}$$

bestimmter Punkt v_0.

Beginnen wir mit letzterem.

Wenn man für diesen Punkt nach dem gewöhnlichen Verfahren die determinirende Gleichung der Resolvente (50) berechnet, so kommt

$$f^2(w, v_0) \cdot h_1(w) \cdot r(r-1)(r-2) - f^2(w, v_0) \cdot h_1(w) \cdot r(r-1) = 0,$$

woraus

$$r(r-1)(r-3) = 0.$$

Die Wurzeln der determinirenden Gleichung für $v = v_0$ sind also

$$3, \quad 1, \quad 0.$$

Folglich giebt es drei linear unabhängige particuläre Integrale der Gleichung (50), die im Gebiete des Punktes v_0 sich so darstellen:

$$y' = (v-v_0)^3 P_1(v-v_0), \quad y'' = (v-v_0) P_2(v-v_0), \quad y''' = P_3(v-v_0), \tag{67}$$

wo

$$P_1(v-v_0), \quad P_2(v-v_0), \quad P_3(v-v_0)$$

im Gebiete des Punktes v_0 holomorphe Functionen sind, die bei $v = v_0$ nicht verschwinden.

Hieraus folgt: *Der Punkt v_0 ist ein pseudokritischer Punkt der Integrale der Gleichung* (50).

Wir setzen jetzt

$$u' = \frac{y'}{y'''}, \quad u'' = \frac{y''}{y'''}. \tag{68}$$

Da y_1, y_2, y_3 lineare homogene Functionen von y', y'', y''' sind, so sind u_1 und u_2 lineare nichthomogene Functionen von u' und u''. Die Grössen u', u'' können daher als nichthomogene Coordinaten eines Punktes derselben Curve (5) nach einer linearen Transformation betrachtet werden.

In der Nähe des, dem Werthe $v = v_0$ entsprechenden, Punktes der Curve (5) werden dessen Coordinaten sich so ausdrücken lassen:

$$u' = (v - v_0)^3 \cdot \frac{P_1(v - v_0)}{P_3(v - v_0)}, \qquad u'' = (v - v_0) \cdot \frac{P_2(v - v_0)}{P_3(v - v_0)}.$$

In erster Approximation stellt sich folglich der Verlauf der Curve (5) an der genannten Stelle folgendermassen dar:

$$u' = \frac{P_1(0) \cdot P_3^{\,2}(0)}{P_2^{\,3}(0)} \cdot u''^3.$$

Da der Factor

$$\frac{P_1(0) \cdot P_3^{\,2}(0)}{P_2^{\,3}(0)}$$

endlich und von Null verschieden ist, so ist der betrachtete Punkt ein Wendepunkt der Curve (5).

Hieraus folgt: *die Curve*

(66) $$h_1(w) \cdot v + h_4(w) = 0$$

schneidet auf der Curve (5) *ein System von Punkten aus, welche Wendepunkte der letzteren sind.*

Setzt man in der Gleichung (66) statt v dessen Ausdruck aus der Gleichung (6), so erhält man

$$h_1(w) \cdot \Phi(u_1, u_2) + h_4(w) \cdot F^5(u_1, u_2) = 0.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist eine Form 30^{sten} Grades, ebenso wie die Hesse'sche Covariante der linken Seite der Gleichung

(5) $$H(u_1, u_2) - w \cdot F^2(u_1, u_2) = 0.$$

Hieraus folgt, dass die Form

$$h_1(w) \cdot \Phi(u_1, u_2) + h_4(w) \cdot F^5(u_1, u_2)$$

von der genannten Hesse'schen Covariante sich nur durch einen constanten Factor unterscheiden kann.

Dieses Resultat bietet ein dreifaches Interesse:

1) Es erklärt den geometrischen Sinn des Factors

$$h_1(w) \cdot v + h_4(w),$$

welcher in den Coefficienten der Gleichung (50) fungirt.

2) Es erlaubt die Berechnung der Coefficienten der Polynome $h_1(w)$, $h_4(w)$ zu vereinfachen, da es nicht schwierig ist, die Hesse'sche Covariante der linken Seite der Gleichung (5) zu bilden.

3) Es gestattet den Schluss, dass diejenigen Punkte der Curve (5), für welche die Gleichung (66) nicht gilt, keine Wendepunkte sind.

Letzteres Ergebnis wird uns bald zu Statten kommen.

Wenden wir uns jetzt zu denjenigen kritischen Punkten, die den Wurzeln der Gleichung (56) entsprechen.

Wir bezeichnen die Wurzeln der determinirenden Gleichung für einen dieser Punkte, z. B. α, mit r_1, r_2, r_3, und setzen fest

$$(69) \qquad r_1 > r_2 > r_3.$$

Indem wir dieselben Bezeichnungen, wie in der vorigen Untersuchung, behalten, sagen wir, dass es drei linear unabhängige Integrale y', y'', y''' der Gleichung (50) giebt, die sich im Gebiete des Punktes α durch die Formeln

$$(70) \quad y' = (v-\alpha)^{r_1} P_1(v-\alpha), \quad y'' = (v-\alpha)^{r_2} P_2(v-\alpha), \quad y''' = (v-\alpha)^{r_3} P_3(v-\alpha),$$

darstellen lassen, wo

$$P_1(v-\alpha), \quad P_2(v-\alpha), \quad P_3(v-\alpha)$$

im Gebiete des Punktes α holomorphe Functionen sind, die bei $v = \alpha$ nicht verschwinden.

Weiter haben wir

$$(71) \qquad \begin{cases} u' = \dfrac{y'}{y'''} = (v-\alpha)^{r_1 - r_3} \cdot \dfrac{P_1(v-\alpha)}{P_3(v-\alpha)}, \\[2ex] u'' = \dfrac{y''}{y'''} = (v-\alpha)^{r_2 - r_3} \cdot \dfrac{P_2(v-\alpha)}{P_3(v-\alpha)}. \end{cases}$$

Da u' und u'' lineare Functionen von u_1 und u_2 sind, so ist α für u' und u'' ein kritischer Punkt desselben Charakters, wie für u_1 und u_2: in diesem Punkte hängen die Werthe jeder dieser Functionen paarweise zusammen. Hieraus folgt, dass $r_1 - r_3$ und $r_2 - r_3$ rationale Brüche sind, die nach der Reducirung zum Nenner entweder 2 oder 1 haben. Also sind wir berechtigt zu schreiben

$$(72) \qquad r_1 - r_3 = \frac{p}{2}, \quad r_2 - r_3 = \frac{q}{2},$$

wo p und q ganze Zahlen sind, die der Ungleichung

$$(73) \qquad p > q > 0$$

genügen.

Setzt man die Ausdrücke (72) in die Formeln (71) ein und setzt ausserdem

$$Q_1(v-\alpha) = \frac{P_1(v-\alpha)}{P_3(v-\alpha)}, \quad Q_2(v-\alpha) = \frac{P_2(v-\alpha)}{P_3(v-\alpha)},$$

wo $Q_1(v-\alpha)$ und $Q_2(v-\alpha)$ im Gebiete des Punktes α holomorphe Functionen sind, die bei $v = \alpha$ nicht verschwinden, so kommt

$$(74) \qquad u' = (v-\alpha)^{\frac{p}{2}} Q_1(v-\alpha), \quad u'' = (v-\alpha)^{\frac{q}{2}} Q_2(v-\alpha).$$

Nachdem man die Grössen y_1, y_2, y_3 als lineare homogene Functionen von y', y'', y''' ausgedrückt und in die Formeln (53) des § 5 eingesetzt hat, kann man die beiden Seiten jeder der gewonnenen Gleichungen in Reihen nach steigenden Potenzen von $v-\alpha$ entwickeln und die niedrigsten Exponenten von $v-\alpha$ in beiden Seiten jeder Formel einander gleichsetzen. So erhält man

$$r_3 = 0, \quad q = 1,$$

und es ist somit

$$r_1 = \frac{p}{2}, \quad r_2 = \frac{1}{2}, \quad r_3 = 0$$

Die Formeln (74) nehmen daher folgende Gestalt an:

$$u' = (v-\alpha)^{\frac{p}{2}} Q_1(v-\alpha), \qquad u'' = (v-\alpha)^{\frac{1}{2}} \cdot Q_2(v-\alpha),$$

woraus folgt, dass der Lauf der Curve (5) in der Nähe des dem Werthe $v = \alpha$ entsprechenden Punktes approximativ durch die Gleichung

$$u' = \frac{Q_1(0)}{Q_2^{\frac{p}{2}}(0)} u''^p \tag{75}$$

dargestellt werden kann.

Wäre nun p grösser als 2, so hätte die Curve (5) bei $v = \alpha$ einen Wendepunkt. Da aber α keine Wurzel der Gleichung (66) ist, so schliessen wir aus dem oben Gesagten, dass bei $v = \alpha$ die Curve (5) keinen Wendepunkt haben kann; daher ist in der Formel (75) die Zahl p nicht grösser als 2. Da andererseits diese Zahl p der Ungleichung (73) genügen muss, so kommt

$$p = 2.$$

Das Resumé des über den kritischen Punkt α Gesagten lautet: *Für den Punkt α sind die Wurzeln der determinirenden Gleichung*

$$1, \ \frac{1}{2}, \ 0,$$

Dasselbe gilt natürlich auch für die Punkte β und γ.

Wenden wir uns endlich zum Punkte $v = \infty$. Da die Blätter der Riemann'schen Fläche R_{360}^{v} bei $v = \infty$ zu je fünf unter einander verbunden sind, so müssen die Differenzen zwischen je zwei Wurzeln der determinirenden Gleichung Brüche sein, deren Nenner nach der Reducirung entweder 5 oder 1 sind. Mit Hilfe analoger Erwägungen, wie für die Punkte α, β, γ, finden wir von hier aus, *dass für den Punkt $v = \infty$ die Wurzeln der determinirenden Gleichung*

$$+\frac{11}{30}, \quad +\frac{1}{6}, \quad -\frac{1}{30}$$

sind.

Für die Gleichung (52) kann man, mit geringen Veränderungen, das über die Resolvente (50) Gesagte wiederholen. Daher bringen wir nur die Resultate.

Die Integrale der Gleichung (52) haben kritische Punkte bei den Werthen der Veränderlichen w, die

1) durch die Gleichung

$$c_1(w) \cdot v^3 + c_3(w) \cdot v^2 + c_6(w) \cdot v + c_8(w) = 0, \tag{76}$$

2) durch

$$f(w, v) = 0, \tag{56}$$

3) durch

$$w = \infty$$

bestimmt werden.

I. Berechnen wir die determinirende Gleichung für einen durch die Gleichung (76) bestimmten Punkt, so finden wir:

$$r(r-1)(r-3) = 0.$$

Folglich sind alle durch die Gleichung (76) *bestimmten Punkte pseudokritische Punkte der Integrale der Resolvente* (52).

Die ihnen entsprechenden Punkte der Fundamentalcurve (6) sind Wendepunkte.

Der Grad der Gleichung (76), in Bezug auf w, übersteigt nicht 8; aber wie gross derselbe in Wirklichkeit ist, wissen wir noch nicht. Wir bezeichnen ihn mit $8-k$, wo k eine ganze positive Zahl oder gleich Null ist.

Wenn wir in die Gleichung (76) statt w seinen Ausdruck aus der Gleichung (5) einsetzen und in der gefundenen Gleichung den gemeinsamen Nenner wegschaffen, so erhalten wir zur linken Hand eine Form des Grades $12(8-k)$ in u_1 und u_2. Diese muss ein Theiler der Hesse'schen Covariante der linken Seite der Gleichung (6) sein. Daher kann sie sich von dieser Hesse'schen Covariante entweder nur durch einen constanten Factor unterscheiden, oder durch einen Factor, der wiederum eine covariante Form ist.

Der Grad der genannten Hesse'schen Form in u_1 und u_2 ist nun gleich 84. Daher ist

$$12(8-k) \leqq 84,$$

folglich

$$k \geqq 1.$$

Falls $k = 1$, so sind alle Wendepunkte der Curve (6) durch die Wurzeln der Gleichung (76) erschöpft. Falls jedoch $k > 1$, so hat die Curve (6) ausser diesen noch andere Wendepunkte. Diese complementären Wendepunkte werden unbedingt den kritischen Punkten der Integrale der Gleichung (52) entsprechen. Sie können den Wurzeln der Gleichung (56) nicht entsprechen, da die Form $\Psi(u_1, u_2)$ nicht in rationale covariante Factoren zerfallen kann. Sie können auch nicht dem Punkte $w = \infty$ entsprechen, da in solchem Falle die Curve (6) in ihren Schnittpunkten mit der Curve $F(u_1, u_2) = 0$ Wendepunkte hätte, durch welche dann auch die Curven $H(u_1, u_2) = 0$ und $\Phi(u_1, u_2) = 0$ hindurchgehen müssten, was aber nicht der Fall ist.

So kommen wir zu dem Schlusse, dass $k = 1$.

Daher hat die Curve (6) keine Wendepunkte ausser den durch die Gleichung

$$c_1(w) \cdot v^3 + c_3(w) \cdot v^2 + c_6(w) \cdot v + c_8(w) = 0 \tag{76}$$

bestimmten. *Der Grad letzterer Gleichung in w, folglich auch der Grad von $c_8(w)$, ist hiernach gleich* 7*); wenn wir in die linke Seite der Gleichung (76) statt w seinen Ausdruck aus der Gleichung (5) einsetzen und den gemeinschaftlichen Nenner wegschaffen, so erhalten wir eine Form vom Grade 84, die von der Hesse'schen Covariante der Gleichung (6) nur durch einen constanten Factor sich unterscheidet.

II. *Für die durch die Gleichung* (56) *gegebenen Punkte sind die Wurzeln der determinirenden Gleichung*

$$1, \quad +\frac{1}{2}, \quad 0.$$

III. *Für $w = \infty$ sind die Wurzeln der determinirenden Gleichung*

$$\frac{5}{12}, \quad \frac{1}{6}, \quad -\frac{1}{12}.$$

§ 8.

Vereinfachung der äusseren Gestalt der im § 4 gewonnenen Differentialresolventen dritter Ordnung.

Die Kenntniss der determinirenden Gleichungen der Differentialresolvente (50) für alle ihre kritischen Punkte gestattet uns einige Schlüsse auf die Eigenschaften der Coefficienten dieser Resolvente.

I. Berechnen wir nach der allgemeinen Methode die determinirende Gleichung für den Punkt α, so erhalten wir:

$$\tag{77} \left\{ \begin{aligned} & \qquad f_\alpha'^2(w, \alpha)\,(h_1\cdot\alpha + h_4)\, r(r-1)\,(r-2) \\ & + \{ f_\alpha'^2(w, \alpha) + f_\alpha'(w, \alpha)\,[(k_0+e_0)\alpha^2 + (k_3+e_3)\alpha \\ & \qquad\qquad + (k_5+e_5)]\}\,(h_1\cdot\alpha + h_4)\, r(r-1) \\ & + \{ (k_0\cdot\alpha^2 + k_3\cdot\alpha + k_5)\,(e_0\cdot\alpha^2 + e_3\cdot\alpha + e_5) \\ & \qquad - (f_2\cdot\alpha^2 + f_4\cdot\alpha + f_7)\,(h_1\cdot\alpha + h_4)\}\,(h_1\cdot\alpha + h_4)\, r = 0. \end{aligned} \right.$$

*) Um diese Eigenthümlichkeit hervorzuheben, werden wir das Polynom $c_8(w)$ fortan mit $c_7(w)$ bezeichnen.

Ihre Wurzeln waren aber die Zahlen

$$1, \ \frac{1}{2}, \ 0.$$

Diese müssen also der Gleichung (77) genügen.

Dass 0 der Gleichung genügt, ist evident. Damit auch 1 und $\frac{1}{2}$ ihr genügen, sind die Bedingungen

$$(k_0\cdot\alpha^2+k_3\cdot\alpha+k_5)\,(e_0\cdot\alpha^2+e_3\cdot\alpha+e_5)-(f_2\cdot\alpha^2+f_4\cdot\alpha+f_7)\,(h_1\cdot\alpha+h_4)=0,$$

$$-\frac{1}{2}f_\alpha'(w,\alpha)+(k_0+e_0)\alpha^2+(k_3+e_3)\alpha+(k_5+e_5)=0$$

zu erfüllen. Das von der Wurzel α Gesagte gilt aber auch für die Wurzeln β und γ der cubischen Gleichung

(56) $$f(w,v)=0.$$

Mit anderen Worten: *jedes der Polynome*

(78) $$(k_0\cdot v^2+k_3\cdot v+k_5)\,(e_0\cdot v^2+e_3\cdot v+e_5)-(f_2\cdot v^2+f_4\cdot v+f_7)\,(h_1\cdot v+h_4),$$

(79) $$-\frac{1}{2}f_v'(w,v)+(k_0+e_0)v^2+(k_3+e_3)v+(k_5+e_5)$$

muss mit der cubischen Gleichung (56) *drei gemeinsame Wurzeln haben.*

Dafür aber ist nothwendig und hinreichend, dass

1) das Polynom (78) durch $f(w,v)$ theilbar ist,

2) dass die Identität

(80) $$(k_0+e_0)v^2+(k_3+e_3)v+(k_5+e_5)=\frac{1}{2}f_v'(w,v)$$

stattfindet.

Aus der ersten Bedingung folgt, dass der Coefficient von $\frac{\partial y}{\partial v}$ in der Gleichung (50) sich durch $f(w,v)$ dividiren lässt. Das Resultat dieser Division

(81) $$\left\{\begin{aligned} &[(2k_0+l_0)v+(k_3+l_3)]\,(h_1\cdot v+h_4)-h_1\cdot(k_0\cdot v^2+k_3\cdot v+k_5)\\ &+\frac{1}{f(w,v)}\cdot\{(k_0\cdot v^2+k_3\cdot v+k_5)\,(e_0\cdot v^2+e_3\cdot v+e_5)\\ &\qquad-(f_2\cdot v^2+f_4\cdot v+f_7)\,(h_1\cdot v+h_4)\}\,(h_1\cdot v+h_1)\end{aligned}\right.$$

ist also ein ganzes Polynom in v und w und muss folgende Form haben

(82) $$\alpha_1(w)\cdot v^2+\alpha_4(w)\cdot v+\alpha_7(w),$$

wo $\alpha_1(w)$, $\alpha_4(w)$, $\alpha_7(w)$ in Bezug auf w ganze Polynome sind, deren Grade die beigefügten Indices nicht übersteigen.

Kennen wir die Polynome $k_0, l_0, k_3, l_3, h_1, h_4, \cdots$, so ist es auch möglich, $\alpha_1(w)$, $\alpha_4(w)$, $\alpha_7(w)$ durch die in Formel (81) angegebene Division zu berechnen.

Der Coefficient von $\frac{\partial y}{\partial v}$ *in der Gleichung* (50) *nimmt die Form*

(83) $$f \cdot (\alpha_1 \cdot v^2 + \alpha_4 \cdot v + \alpha_7)$$

an.

Nachdem wir weiter die Ausdrücke (80) und (83) in die Gleichung (50) eingesetzt haben, ergiebt sich, dass f in die Coefficienten der drei ersten Glieder der Gleichung (50) als Factor eintritt. Daraus folgt insbesondere, dass die Coefficienten der genannten drei ersten Glieder durch $(v-\alpha)$ theilbar sind.

Indem wir die Bezeichnungen des vorigen Paragraphen beibehalten, bemerken wir, dass dasjenige Integral, welches der Wurzel 0 der determinirenden Gleichung entspricht, sich durch die Formel

(70') $$y''' = P_3(v-\alpha)$$

ausdrücken lässt, wo $P_3(v-\alpha)$ eine im Gebiet des Punktes α holomorphe Function ist, die bei $v=\alpha$ nicht verschwindet. Setzen wir in die Gleichung (50) statt y den Ausdruck (70'), so bemerken wir, dass alle Glieder des gewonnenen Resultates bei $v=\alpha$ verschwinden, mit Ausnahme vielleicht des letzten Gliedes. Dieses wird von Null verschieden sein, wenn der Coefficient von y in der Gleichung (50) durch $v-\alpha$ nicht theilbar ist.

Da im letzten Falle der Ausdruck (70') nicht der Gleichung (50) genügen könnte, so kommen wir zu dem Schlusse, dass auch der Coefficient von y, ebenso wie die drei ersten Coefficienten der Gleichung (50), sich durch $v-\alpha$ theilen lässt.

Aus demselben Grunde muss genannter Coefficient durch $v-\beta$ und $v-\gamma$, also auch durch das ganze Polynom $f(w, v)$ theilbar sein.

Der Quotient dieser Division stellt sich in folgender Form dar:

(84) $$l_0 \cdot h_4 - h_1 \cdot l_3 + \frac{1}{f} \cdot \{(l_0 \cdot v + l_3)(e_0 \cdot v^2 + e_3 \cdot v + e_5) - (g_2 \cdot v + g_4)(h_1 \cdot v + h_4)\} \cdot (h_1 \cdot v + h_4).$$

Nach Vollziehung der Division hat der Ausdruck die Gestalt

(85) $$\beta_1(w) \cdot v + \beta_4(w),$$

wo $\beta_1(w)$ und $\beta_4(w)$ in Bezug auf w ganze Polynome sind, deren Grade die beigefügten Indices nicht übersteigen.

Kennen wir $l_0, h_4, h_1, l_3, \cdots$, so ist es auch möglich, $\beta_1(w)$ und $\beta_4(w)$ durch Vollziehung der in der Formel (84) angegebenen Division zu berechnen.

Der Coefficient von y *in der Gleichung* (50) *nimmt die Gestalt*

(86) $$f \cdot (\beta_1 v + \beta_4)$$

an.

Setzt man die Ausdrücke (80), (83), (86) *in die Gleichung* (50) *ein und schafft man den gemeinsamen Factor f weg, so kommt also im ganzen:*

$$
(87) \qquad \left\{\begin{aligned}
&f\cdot(h_1\cdot v+h_4)\,\frac{\partial^3 y}{\partial v^3}+\left\{\frac{3}{2}\,f_v'\cdot(h_1\cdot v+h_4)-h_1\cdot f\right\}\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}\\
&\qquad+(\alpha_1 v^2+\alpha_4 v+\alpha_7)\,\frac{\partial y}{\partial v}+(\beta_1 v+\beta_4)y=0.
\end{aligned}\right.
$$

II. Die dem Punkte $v=\infty$ entsprechende determinirende Gleichung für (87) hat die Form

$$h_1\cdot r(r+1)\,(r+2)-\frac{7}{2}\,h_1\cdot r(r+1)+\alpha_1\cdot r-\beta_1=0$$

oder

$$r^3-\frac{1}{2}\,r^2+\left(-\frac{3}{2}+\frac{\alpha_1}{h_1}\right)r-\frac{\beta_1}{h_1}=0.$$

Im vorigen Paragraphen haben wir aber gesehen, dass die Wurzeln dieser Gleichung den Zahlen

$$\frac{11}{30},\quad +\frac{1}{6},\quad -\frac{1}{30}$$

gleich sein müssen. Die Summe dieser Zahlen, die Summe ihrer Producte zu je zwei und das Product aller drei Zahlen sind beziehungsweise gleich

$$+\frac{1}{2},\quad \frac{12}{300},\quad -\frac{11}{5400}.$$

Auf Grund der bekannten Relationen zwischen den Coefficienten und den Wurzeln der Gleichung finden wir daher die Beziehungen

$$
\left\{\begin{aligned}
\frac{1}{2}&=\frac{1}{2},\\
-\frac{3}{2}+\frac{\alpha_1}{h_1}&=\frac{13}{300},\\
\frac{\beta_1}{h_1}&=-\frac{11}{5400}.
\end{aligned}\right.
$$

Die erste dieser Identitäten ist evident und kann als Probe für die Richtigkeit der obigen, ziemlich schwierigen Rechnungen dienen. Aus den zwei letzten Gleichungen finden wir

$$(88) \qquad \alpha_1=\frac{463}{300}\,h_1,\qquad \beta_1=-\frac{11}{5400}\,h_1.$$

Die Gleichung (87) lautet also schliesslich

$$
(89) \qquad \left\{\begin{aligned}
&f\cdot(h_1\cdot v+h_4)\,\frac{\partial^3 y}{\partial v^3}+\left\{\frac{3}{2}\,f_v'\cdot(h_1\cdot v+h_4)-h_1\cdot f\right\}\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}\\
&+\left(\frac{463}{300}\,h_1\cdot v^2+\alpha_4 v+\alpha_7\right)\frac{\partial y}{\partial v}+\left(-\frac{11}{5400}\,h_1\cdot v+\beta_4\right)y=0.
\end{aligned}\right.
$$

Das ist die endgültige Gestalt der Differentialresolvente 3^{ter} *Ordnung mit der unabhängigen Veränderlichen* v.

Die Zahlencoefficienten dieser Gleichung lassen sich, wie erwähnt, rein arithmetisch berechnen.

Transformiren wir die Gleichung (89) durch die Substitution

$$y = \sqrt{f} \cdot \varphi, \tag{90}$$

wo φ eine neue unbekannte Function ist, so ergiebt sich für φ eine lineare homogene Differentialgleichung 3^{ter} Ordnung. Die kritischen Punkte der Integrale der transformirten Differentialresolvente werden dieselben sein, wie in (89). Die Wurzeln der ihnen entsprechenden determinirenden Gleichungen werden folgende sein:

1) für den Punkt v_0 die früheren

$$3, \quad 1, \quad 0;$$

2) für die Punkte α, β, γ werden alle drei Wurzeln um $-\frac{1}{2}$ grösser und sind also

$$+\frac{1}{2}, \quad 0, \quad -\frac{1}{2};$$

3) für $v = \infty$ werden alle drei Wurzeln um $+\frac{3}{2}$ grösser, also gleich

$$\frac{28}{15}, \quad \frac{5}{3}, \quad \frac{22}{15}.$$

Daraus folgt, dass das nach v genommene unbestimmte Integral der Function φ bei allen Werthen von v endlich bleibt; es ist also ein Abel'sches Integral 1^{ster} Gattung.

Also ist die durch Gleichung (90) *definirte Function* φ *eine Riemann'sche* φ*-Function für die Fläche* R^{v}_{360}.

Für die Gleichung (52) kann man mutatis mutandis alles oben von der Gleichung (50) Gesagte wiederholen. Daher beschränken wir uns auf Angabe der Resultate:

I. *Damit für die durch die Gleichung* $f(w, v) = 0$ *definirten Punkte die Wurzeln der determinirenden Gleichung*

$$1, \quad -\frac{1}{2}, \quad 0$$

werden, ist nothwendig, dass

1) *die Gleichung*

$$(b_2 + f_2)v^2 + (b_4 + f_4)v + b_7 + f_7 = \frac{1}{2} f'_w \tag{91}$$

gilt,

2) *die Coefficienten von* $\frac{\partial y}{\partial w}$ *und von* y *durch* $f(w, v)$ *sich theilen lassen.*

II. *Nachdem wir alle Glieder der Resolvente* (52) *mit Berücksichtigung von Gleichung* (91) *durch $f(w, v)$ getheilt haben, bekommt die Resolvente folgende Gestalt:*

$$(92)\quad \begin{cases} \qquad\qquad f\cdot\{c_1\cdot v^3+c_3\cdot v^2+c_6\cdot v+c_7\}\,\dfrac{\partial^3 y}{\partial w^3} \\ +\left\{\frac{3}{2}f'_w\cdot(c_1\cdot v^3+c_3\cdot v^2+c_6\cdot v+c_7)-f\cdot(c_1'\cdot v^3+c_3'\cdot v^2+c_6'\cdot v+c_7')\right\}\dfrac{\partial^2 y}{\partial w^2} \\ +\{\gamma_2\cdot v^5+\gamma_5\cdot v^4+\gamma_7\cdot v^3+\gamma_{10}\cdot v^2+\gamma_{12}^I\cdot v+\gamma_{12}\}\,\dfrac{\partial y}{\partial v} \\ +\{\delta_1\cdot v^5+\delta_4\cdot v^4+\delta_6\cdot v^3+\delta_9\cdot v^2+\delta_{11}^I\cdot v+\delta_{11}\}\,y=0, \end{cases}$$

wo $\gamma_2, \gamma_5, \gamma_7, \cdots$ in Bezug auf w ganze Polynome sind, deren Grade die Indices nicht übersteigen. Diese Polynome lassen sich durch einfache Divisionen berechnen.

Transformiren wir diese Gleichung (92) vermittelst der Formel (90), so ergiebt sich für φ eine lineare Differentialgleichung 3ten Grades mit der unabhängigen Veränderlichen w; *die Function φ ist eine Riemann'sche φ-Function für die Fläche R^w_{360}.*

§ 9.

Berechnung der Differentialresolvente 3ter Ordnung im allgemeinen Falle, wo v und w Functionen einer unabhängigen Veränderlichen t sind.

Es seien v und w gegebene rationale Functionen der Veränderlichen t,

$$(2)\qquad v=\varphi(t),\qquad w=\psi(t);$$

ihre Ableitungen nach t bezeichnen wir durch

$$v',\ w',\ v'',\ w'',\ v''',\ w''',\ \cdots.$$

Ferner sei, wie vorher, y eine lineare homogene Function der Grössen y_1, y_2, y_3, die durch die Gleichungen (17) bestimmt sind.

Diese Grössen genügen, wie § 3 erwähnt, einem System dreier partieller Differentialgleichungen 2ter Ordnung (36), (42), (48). Wir schreiben diese Gleichungen kurz so:

$$(36')\qquad \frac{\partial^2 y}{\partial w^2}=P_1\frac{\partial y}{\partial w}+P_2\frac{\partial y}{\partial v}+P_3 y,$$

$$(42')\qquad \frac{\partial^2 y}{\partial v\partial w}=Q_1\frac{\partial y}{\partial w}+Q_2\frac{\partial y}{\partial v}+Q_3 y,$$

$$(48')\qquad \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}=R_1\frac{\partial y}{\partial w}+R_2\frac{\partial y}{\partial v}+R_3 y,$$

wo $P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, \cdots$ bekannte Functionen der Veränderlichen v und w sind. Auf Grund der Gleichungen (2) werden sie explicite Functionen von t sein.

Die Ableitung von y nach t ist

(93) $$\frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial w} w' + \frac{\partial y}{\partial v} v'.$$

Differenziren wir diese Gleichung nochmals, so kommt

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\partial y}{\partial w} w'' + \frac{\partial y}{\partial v} v'' + \frac{\partial^2 y}{\partial w^2} w'^2 + 2 \frac{\partial^2 y}{\partial v \partial w} v' w' + \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} v'^2,$$

oder, vermittelst der Formeln (36'), (42'), (48'),

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dt^2} = \{w'' + P_1 w'^2 + 2 Q_1 v' w' + R_1 v'^2\} \frac{\partial y}{\partial w} \\ + \{v'' + P_2 w'^2 + 2 Q_2 v' w' + R_2 v'^2\} \frac{\partial y}{\partial v} \\ + \{P_3 w'^2 + 2 Q_3 v' w' + R_3 v'^2\} y.\end{aligned}$$

Die in Klammern stehenden Ausdrücke sind bekannte Functionen von t. Bezeichnen wir kurz jede derselben mit einem Buchstaben, so kommt

(94) $$\frac{d^2y}{dt^2} = S_1 \frac{\partial y}{\partial w} + S_2 \frac{\partial y}{\partial v} + S_3 y.$$

Die Differenzirung dieser Gleichung nach t giebt

(95) $$\left\{\begin{aligned}\frac{d^3y}{dt^3} = S_1' \frac{\partial y}{\partial w} + S_2' \frac{\partial y}{\partial v} + S_3' y + S_3 \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial w} w' + \frac{\partial y}{\partial v} v'\right) \\ + S_1 w' \frac{\partial^2 y}{\partial w^2} + (S_1 v' + S_2 w') \frac{\partial^2 y}{\partial v \partial w} + S_2 v' \frac{\partial^2 y}{\partial v^2},\end{aligned}\right.$$

wo S_1', S_2', S_3' die Ableitungen der Functionen S_1, S_2, S_3 nach t sind. Vermittelst der Gleichungen (36'), (42'), (48') nimmt die Gleichung (95) dann schliesslich folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned}\frac{d^3y}{dt^3} = \{S_1' + S_3 w' + S_1 P_1 w' + (S_1 v' + S_2 w') Q_1 + S_2 R_1 v'\} \frac{\partial y}{\partial w} \\ + \{S_2' + S_3 v' + S_1 P_2 w' + (S_1 v' + S_2 w') Q_2 + S_2 R_2 v'\} \frac{\partial y}{\partial v} \\ + \{S_3' + S_1 P_3 w' + (S_1 v' + S_2 w') Q_3 + S_2 R_3 v'\} y.\end{aligned}$$

Die in Klammern stehenden Ausdrücke sind bekannte Functionen von t. Indem wir jede derselben mit einem Buchstaben bezeichnen, erhalten wir

(96) $$\frac{d^3y}{dt^3} = T_1 \frac{\partial y}{\partial w} + T_2 \frac{\partial y}{\partial v} + T_3 y.$$

Als Endresultat ergiebt sich endlich durch Elimination von $\frac{\partial y}{\partial w}$ und $\frac{\partial y}{\partial v}$ aus den drei Gleichungen (93), (94), (96):

$$\begin{vmatrix} \frac{d^3y}{dt^3} - T_3 y, & T_1, & T_2 \\ \frac{d^2y}{dt^2} - S_3 y, & S_1, & S_2 \\ \frac{dy}{dt} \quad , & w', & v' \end{vmatrix} = 0. \tag{97}$$

Das ist eine lineare Differentialgleichung 3[ter] Ordnung bezüglich y mit der unabhängigen Veränderlichen t. Ihre Coefficienten sind bekannte Functionen von t. *Die Gleichung* (97) *ist die gesuchte Differentialresolvente 3[ter] Ordnung im allgemeinsten Falle, wo v und w beliebige Functionen von t sind.*

Die im vorigen Paragraphen gewonnenen Gleichungen sind diejenigen Specialfälle, in welchen t einer der Grössen v oder w gleich ist, wobei dann die andere constant bleibt.

Moskau, im Februar 1902.

Inhaltsverzeichnis.

Ueber die Zusammensetzung von Substitutionen aus den Transpositionen.

Von

E. Netto in Giessen.

Herr A. Hurwitz ist wohl der Erste gewesen, welcher die Frage nach der Anzahl der Darstellungen einer vorgelegten Substitution durch ein Product einer bestimmten Anzahl von Transpositionen gegebener n Elemente behandelt hat (Math. Ann. 39; (1891) p. 1, § 3). Er ist auf Grund sehr scharfsinniger Betrachtungen zu folgendem Resultate gelangt:

Die Anzahl der Darstellungen einer mit n Elementen gebildeten Substitution als Product von w Transpositionen ist gleich

$$c_1 f_1^w + c_2 f_2^w + \cdots + c_k f_k^w, \tag{1}$$

wo die Zahlen $c_1, c_2, \cdots c_k$; $f_1, f_2, \cdots f_k$ von w nicht abhängen. Die Coefficienten $c_1, c_2, \cdots c_k$ sind rationale von der Substitution und von der Zahl n abhängende Zahlen. Dagegen sind $f_1, f_2, \cdots f_k$ ganze Zahlen, welche ausschliesslich von n abhängen und folgendermassen gebildet werden. Man zerlegt n auf alle möglichen Weisen in positive ganzzahlige Summanden

$$n = \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_r, \tag{2}$$

wobei $\nu_1 \geqq \nu_2 \geqq \nu_3 \geqq \cdots \geqq \nu_r > 0$ vorausgesetzt wird, und setzt

$$f = \frac{\nu_1(\nu_1 - 1)}{2} + \frac{\nu_2(\nu_2 - 1)}{2} + \cdots + \frac{\nu_r(\nu_r - 1)}{2} - (\nu_1 + 2\nu_2 + 3\nu_3 + \cdots + r\nu_r) + n. \tag{3}$$

Die auf diese Weise entstehenden Zahlen f sind gerade die oben mit $f_1, f_2, \cdots f_k$ bezeichneten Zahlen.

Im fünften Paragraphen seines Aufsatzes giebt Herr A. Hurwitz als Beispiele die Darstellung der identischen Substitution 1 bei $n = 3, 4, 5, 6$, jedoch ohne Mittheilung darüber zu machen, auf welche Art die Coefficienten $c_1, c_2, \cdots c_k$ bestimmt worden sind. Ich will im Folgenden eine Methode der Herleitung dieser Coefficienten liefern und sie auf alle Arten von Substitutionen für 3, 4, 5, 6, 7 Elemente anwenden. Dabei drängen sich sehr merkwürdige, zum Theil freilich nur durch Induction bestätigte Verhältnisse dem Beobachter auf.

§ 1.

Wir leiten zunächst die Formel (1) her.

Wir bezeichnen die *Typen* der Substitutionen, welche aus einer *geraden* Anzahl von Transpositionen hergestellt werden können, mit $[g_1], [g_2], [g_3], \cdots$; die, welche aus einer ungeraden Anzahl von Transpositionen bestehen, mit $[u_1], [u_2], [u_3], \cdots$. Dann werden zu den $[g_\alpha]$ alle Transpositionen gehören, welche in Cyklen geschrieben eine der Formen haben

$$1;\ (abc);\ (ab)(cd);\ (abcde);\ (abcd)(ef);\ (abc)(de)(fg);\cdots$$

oder in kürzerer Bezeichnung

$$[0];\ [3];\ [2,2]=[2^2];\ [5];\ [4,2];\ [3,2,2]=[3,2^2];\cdots.$$

Zu den $[u_\alpha]$ gehören, in Cyklen geschrieben

$$(ab);\ (abcd);\ (abc)(de);\ (abcdef);\ (ab)(cd)(ef);\cdots$$

oder in kürzerer Bezeichnung

$$[2];\ [4];\ [3,2];\ [6];\ [2,2,2]=[2^3];\cdots.$$

Multiplicirt man alle $[u_\alpha]$, die mit n Elementen $a, b, c, d, \cdots$ gebildet werden können, mit einer Transposition dieser Elemente, so entstehen lauter $[g_\alpha]$ und umgekehrt. Bezeichnen wir nun die Anzahl aller $[u_\alpha]$ und die aller $[g_\alpha]$, welche aus den n Elementen durch Multiplication von $\varkappa$ Transpositionen unter Berücksichtigung ihrer Folge gebildet werden können, mit

$$[u_\alpha]_\varkappa^{(n)} \quad \text{und} \quad [g_\alpha]_\varkappa^{(n)},$$

dann kann man alle $[u_\alpha]$, die aus $(\varkappa+1)$ Transpositionen gebildet sind, durch alle $[g_\alpha]$ von $\varkappa$ Transpositionen vermittels einer neuen Transposition als letzten Factor herstellen. Wir schreiben dies in leicht verständlicher Bezeichnung

$$[g_\alpha]_\varkappa = \sum [u_\beta]_{\varkappa-1}\,\tau_\beta.$$

Daher bestehen Gleichungen

$$(4)\qquad \begin{aligned} [u_1]_{\varkappa+1}^{(n)} &= a_{11}[g_1]_\varkappa^{(n)} + a_{12}[g_2]_\varkappa^{(n)} + \cdots, \\ [u_2]_{\varkappa+1}^{(n)} &= a_{21}[g_1]_\varkappa^{(n)} + a_{22}[g_2]_\varkappa^{(n)} + \cdots, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

und ebenso erhält man für die $[g]$

$$(5)\qquad \begin{aligned} [g_1]^{(n)}_{\varkappa+1} &= b_{11}[u_1]^{(n)}_{\varkappa} + b_{12}[u_2]^{(n)}_{\varkappa} + \cdots, \\ [g_2]^{(n)}_{\varkappa+1} &= b_{21}[u_1]^{(n)}_{\varkappa} + b_{22}[u_2]^{(n)}_{\varkappa} + \cdots, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Benutzt man nun jedes dieser Gleichungssysteme zur Umgestaltung und weiteren Indices-Verminderung der rechten Seite des andern, so erhält man Gleichungen

$$(6)\qquad [u_\alpha]^{(n)}_{\varkappa+2} = A_{\alpha 1}[u_1]^{(n)}_{\varkappa} + A_{\alpha 2}[u_2]^{(n)}_{\varkappa} + \cdots \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots)$$

und

$$(7)\qquad [g_\alpha]^{(n)}_{\varkappa+2} = B_{\alpha 1}[g_1]^{(n)}_{\varkappa} + B_{\alpha 2}[g_2]^{(n)}_{\varkappa} + \cdots \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots).$$

Aus (6) und (7) kann man dann mit Hülfe geeigneter Coefficienten $\mu_1, \mu_2, \cdots$ bekanntlich lineare Functionen

$$\mu_1[u_1]^{(n)}_{\varkappa} + \mu_2[u_2]^{(n)}_{\varkappa} + \cdots$$

herstellen, welche sich bei der Vermehrung des Index $\varkappa$ um 2 bis auf einen Zahlenfactor ϱ reproduciren. Man erhält also

$$(8)\quad \mu_{1,\alpha}[u_1]^{(n)}_{2\varkappa+1} + \mu_{2,\alpha}[u_2]^{(n)}_{2\varkappa+1} + \cdots = \varrho_\alpha \left\{\mu_{1,\alpha}[u_1]^{(n)}_{2\varkappa-1} + \mu_{2,\alpha}[u_2]^{(n)}_{2\varkappa-1} + \cdots\right\};$$

dabei kann für ϱ_α jede Wurzel ϱ von

$$(9)\qquad \begin{vmatrix} A_{11} - \varrho & A_{21} & A_{31} & \cdots \\ A_{12} & A_{22} - \varrho & A_{32} & \cdots \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} - \varrho & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = 0$$

genommen werden.

Aehnliches gilt für die $[g_\alpha]^{(n)}_{2\varkappa}$.

Löst man endlich alle Gleichungen (8) für die verschiedenen ϱ_α, die man durch fortgesetzte Verminderung der unteren Klammerindices auf die Form

$$(8\text{a})\quad \mu_{1,\alpha}[u_1]^{(n)}_{2\varkappa+1} + \mu_{2,\alpha}[u_2]^{(n)}_{2\varkappa+1} + \cdots = \varrho_\alpha^{\varkappa} \left\{\mu_{1,\alpha}[u_1]^{(n)}_{1} + \mu_{2,\alpha}[u_2]^{(n)}_{1} + \cdots\right\} \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots)$$

bringen kann, nach den $[u_\varrho]^{(n)}_{2\varkappa+1}$ auf, so entsteht die Form des Herrn A. Hurwitz; jedoch sind dabei die $\varrho_1, \varrho_2, \cdots$ durch die Grössen $f_1^2, f_2^2, \cdots$ zu ersetzen.

Für die $[g_\alpha]^{(n)}_{2\varkappa}$ gelten die gleichen Ueberlegungen.

§ 2.

Die Coefficienten der Gleichungen (4) bezw. (5) lassen sich allgemein bestimmen. Auf der linken Seite von (4) oder (5) stehe eine Substitution s vom Typus

(10) $$s=[k_1, k_2, \cdots k_\mu,\ k_{\mu+1}, \cdots k_\nu]; \qquad (\Sigma k_\alpha = n_0 \leqq n).$$

In ihr mögen die ersten μ Cyklen von zweiter Ordnung sein, d. h.

$$k_1, k_2, \cdots k_\mu = 2; \quad k_{\mu+1}, \cdots k_\nu > 2.$$

Es handelt sich um die Bestimmung von

(10*) $$[k_1, k_2, \cdots k_\nu]_\varkappa^{(n)} = [2^\mu, k_{\mu+1}, \cdots k_\nu]_\varkappa^{(n)}$$

durch Betrachtung der Producte passender

(11) $$\sigma = [g] \quad \text{oder} \quad [u],$$

welche aus $(\varkappa - 1)$ Transpositionen zusammengesetzt sind, mit je einer passenden Transposition $\tau = (\alpha\beta)$. Dabei sind für die Typen σ und τ verschiedene Formen möglich, durch welche $\sigma \cdot \tau$ mit dem Typus (10) übereinstimmend gemacht werden kann.

I. Es habe die hinzugefügte Transposition τ *zwei* in (11) noch nicht vorkommende *neue* Elemente. Das ist nur möglich, wenn (11) die Form

(12) $$\sigma = [2^{\mu-1}, k_{\mu+1}, \cdots k_\nu]$$

hat, und τ gleich dem, in σ gegen s fehlenden Cyklus zweiter Ordnung ist. Die beiden Elemente von τ können aus den $(n-n_0+2)$ in σ nicht vorkommenden Elementen beliebig gewählt werden; folglich kann man für jedes σ vom Typus (12) $\binom{n-n_0+2}{2}$ Transpositionen τ herstellen, für die $\sigma\tau$ den Typus (10) besitzt. Dieser Fall liefert also zu (10*) den Beitrag

(A₁) $$\binom{n-n_0+2}{2}[2^{\mu-1}, k_{\mu+1}, \cdots k_\nu]_{\varkappa-1}^{(n)}.$$

II. Es habe die hinzugefügte Transposition τ *ein* in (11) noch nicht vorkommendes *neues* Element. Das andere Element von τ, welches auch in σ auftritt, mag in dieser Substitution einem Cyklus von r Elementen angehören. Dann unterscheidet sich der Typus des $\sigma\tau$ von dem des σ nur dadurch, dass jener Cyklus von r Elementen durch einen solchen von $(r+1)$ Elementen ersetzt ist; entsteht dann der Typus (10) so wird, da $r \geqq 2$ ist $r+1 \geqq 3$ sein, d. h. r kommt nicht unter $k_1, k_2, \cdots k_\mu$ vor, und es ist

$$\sigma = [2^\mu, k_{\mu+1}, \cdots (k_\alpha - 1), \cdots k_\nu] \quad (\mu + 1 \leqq \alpha \leqq \nu).$$

Das mit τ gemeinsame Element kann dem Cyklus der Ordnung $(k_\alpha - 1)$ auf $(k_\alpha - 1)$ Arten entnommen werden; für das nicht gemeinsame Element haben wir die Wahl unter $(n - n_0 + 1)$. Dieser Fall liefert sonach zu (10*) den Beitrag

$$(\mathrm{A}_2) \qquad (n - n_0 + 1) \sum_{\alpha=\mu+1}^{\nu}{}' (k_\alpha - 1) \cdot [k_1, \cdots, (k_\alpha - 1), \cdots k_\nu]_{x-1}^{(n)}.$$

Der an das Summenzeichen gesetzte Accent soll andeuten, dass die Summation nur über je eins der etwa unter einander gleichen k_α erstreckt werden darf. Diese Einschränkung ist nöthig, da es nur auf den Typus der Substitutionen ankommt.

III^a. Es habe die hinzugefügte Transposition τ *zwei* Elemente, die schon in σ vorkommen; beide sollen dagegen in $\sigma\tau$ verschwunden sein. Das ist nur möglich für ein

$$\sigma = [2^{\mu+1}, k_{\mu+1}, \cdots k_\nu]$$

und ein τ, welches gleich dem in s verschwundenen Cyklus zweiter Ordnung ist. Da dieser Cyklus unter den $(\mu + 1)$ vorhandenen beliebig gewählt werden kann, weil es ja nur auf den Typus der Substitutionen ankommt, so erhalten wir hier den Beitrag

$$(\mathrm{A}_3) \qquad (\mu + 1) \cdot [2^{\mu+1}, k_{\mu+1}, \cdots k_\nu]_{x-1}^{(n)}.$$

III^b. Es habe die hinzugefügte Transposition τ *zwei* schon in σ vorkommende Elemente, von denen eins in $\sigma\tau$ verbleibt, während das andere in $\sigma\tau$ nicht mehr vorkommt. Dies ist nur möglich, wenn τ aus zwei, in einem Cyklus von σ aufeinanderfolgenden Elementen besteht; die Ordnung dieses Cyklus muss > 2 sein. Es ist also

$$\sigma = [k_1, \cdots, (k_\alpha + 1), \cdots k_\nu],$$

und da τ hiernach auf $(k_\alpha + 1)$ Arten gewählt werden kann, so erhält man als Beitrag

$$(\mathrm{A}_4) \qquad \sum_{\alpha=1}^{\nu}{}' (k_\alpha + 1) \cdot [k_1, \cdots, (k_\alpha + 1), \cdots k_\nu]_{x-1}^{(n)}.$$

Der an das Summenzeichen gesetzte Accent soll andeuten, dass die Summation nur über je eins der etwa unter einander gleichen k_α erstreckt werden darf.

III$^{c\alpha}$. Es habe die hinzugefügte Transposition τ *zwei* schon in σ vorkommende Elemente; beide sollen auch in $\sigma\tau$ vorkommen. Sie sollen *demselben* Cyklus von der Ordnung h in σ als erstes und als $(\varrho + 1)^{\text{tes}}$ angehören. In dem Producte $\sigma\tau$ tritt statt jenes Cyklus von h Elementen ein solcher von ϱ und ein anderer von $(h - \varrho)$ Elementen auf. Da $\sigma\tau$ den Typus (10) haben soll, so muss $\varrho = k_\alpha$, $h - \varrho = k_\beta$ und

$$\sigma = [k_1, \cdots, (k_\alpha + k_\beta), \cdots k_\mu]$$

sein. τ besteht dann aus zwei Elementen des Cyklus von der Ordnung $(k_\alpha + k_\beta)$, die um k_α Elemente von einander entfernt sind. Ist $k_\alpha = k_\beta$, dann kann man τ auf $\frac{1}{2}(k_\alpha + k_\beta)$ Arten wählen; ist $k_\alpha \neq k_\beta$, auf $(k_\alpha + k_\beta)$ Arten. Bedeutet ε die Zahlen 0 oder 1, je nachdem $k_\alpha = k_\beta$ oder $\neq k_\beta$ ist, so giebt es für τ

$$\frac{1+\varepsilon}{2}(k_\alpha + k_\beta)$$

Möglichkeiten, und wir erhalten in diesem Falle als Beitrag

$$(\mathrm{A}_5) \qquad \sum_{\alpha,\beta=1}^{\nu}{}' \frac{1+\varepsilon}{2}(k_\alpha + k_\beta)\cdot[k_1, \cdots, (k_\alpha + k_\beta), \cdots k_\nu]_{\varkappa-1}^{(n)} \qquad (\alpha \neq \beta).$$

Auch hier bedeutet der Accent, dass jeder Typus nur einmal aufgenommen werden darf.

III$^{c\beta}$. Es habe die hinzugefügte Transposition τ *zwei* schon in σ vorkommende Elemente; beide sollen auch in $\sigma\tau$ vorkommen. Sie sollen in σ verschiedenen Cyklen angehören. In dem Producte $\sigma\tau$ werden dann beide Cyklen in einen übergehen, dessen Ordnung die Summe der Ordnungen jener beiden ist. Folglich ist

$$\sigma = [k_1, k_2, \cdots, (k_\alpha - \varrho), \varrho, \cdots k_\nu] \qquad (\varrho = 2, 3, \cdots, k_\alpha - 2),$$

und hier ergiebt sich als Beitrag zu (10*)

$$(\mathrm{A}_6) \qquad \sum_{\alpha=1}^{\nu} \sum_{\varrho_\alpha=2}^{k_\alpha-2}{}' \varrho_\alpha(k - \varrho_\alpha)\cdot[k_1, k_2, \cdots, (k_\alpha - \varrho_\alpha), \varrho_\alpha, \cdots k_\nu]_{\varkappa-1}^{(n)}.$$

Auch hier bedeutet der Accent, dass jeder Typus nur einmal aufgenommen werden darf.

Aus der Summe der Ausdrücke $(\mathrm{A}_1), (\mathrm{A}_2), \cdots (\mathrm{A}_6)$ setzt sich der Werth von (10*) zusammen.

Als Beispiele führe ich an, indem ich den oberen Index n unterdrücke,

$$[0]_{2\alpha+2} = [2]_{2\alpha+1};$$
$$[2]_{2\alpha+1} = \binom{n}{2}[0]_{2\alpha} + 3[3]_{2\alpha} + 2[2^2]_{2\alpha};$$
$$[3]_{2\alpha+2} = 2(n-2)[2]_{2\alpha+1} + 4[4]_{2\alpha+1} + 1[3,2]_{2\alpha+1};$$
$$[4]_{2\alpha+1} = 3(n-3)[3]_{2\alpha} + 4[2,2]_{2\alpha} + 5[3]_{2\alpha} + 1[2,4];$$
$$[k]_{\alpha+1} = (k-1)(n-k+1)[k-1]_\alpha + [k,2]_\alpha + (k+1)[k+1]_\alpha$$
$$+ 2(k-2)[k-2,2]_\alpha + 3(k-3)[k-3,3]_\alpha + 4(k-4)[k-4,4]_\alpha + \cdots.$$

§ 3.

Auf diese Art kann man die Gleichungen (4) und (5) herstellen. Wie schon oben bemerkt wurde, folgen dann die Gleichungen (6) und (7) ohne jede Schwierigkeit. Ihre directe allgemeine Herstellung ist selbst bei einfacherem Typus der linksseitigen Substitution ziemlich beschwerlich. Wir geben sie deshalb auch nur für $[0]_{2\alpha+2} = [2]_{2\alpha+1}$ und für $[3]_{2\alpha+2}$.

Es ist zu setzen

$$[0]_{2\alpha+2} = g_1[0]_{2\alpha} + g_2[3]_{2\alpha} + g_3[2,2]_{2\alpha};$$

weitere Glieder können auf der rechten Seite nicht auftreten, da das Product $\tau_1 \cdot \tau_2$ zweier Transpositionen höchstens vier Elemente und diese nur in der Verbindung $[2,2]$ enthält. — Um von $[0]_{2\alpha}$ auf $[0]_{2\alpha+2}$ zu gelangen, muss $\tau_1 \cdot \tau_2 = 1$, d. h. $\tau_2 = \tau_1$ sein; τ_1 ist auf $\binom{n}{2}$ Arten wählbar; also ist $g_1 = \binom{n}{2}$.

Um von $[3]_{2\alpha} = (\alpha\gamma\beta)$ auf $[0]_{2\alpha+2}$ zu kommen, muss $\tau_1\tau_2 = (\alpha\beta\gamma)$ sein, d. h.

$\tau_1 = (\alpha\beta)$, $\tau_2 = (\alpha\gamma)$ oder $\tau_1 = (\alpha\gamma)$, $\tau_2 = (\beta\gamma)$ oder $\tau_1 = (\beta\gamma)$, $\tau_2 = (\alpha\beta)$. Es bestehen also drei Möglichkeiten, und es ist $g_2 = 3$.

Um von $[2^2]_{2\alpha}$ auf $[0]_{2\alpha+2}$ zu kommen, muss, wenn $[2^2] = (\alpha\beta)(\gamma\delta)$ ist, $\tau_1 = (\alpha\beta)$, $\tau_2 = (\gamma\delta)$ sein oder $\tau_1 = (\gamma\delta)$, $\tau_2 = (\alpha\beta)$. Es bestehen also zwei Möglichkeiten, und es ist $g_3 = 2$.

Also erhält man

$$[0]_{2\alpha+2} = \binom{n}{2}[0]_{2\alpha} + 3[3]_{2\alpha} + 2[2^2]_{2\alpha}.$$

Wir setzen ferner

$$[3]_{2\alpha+2} = g_1[0]_{2\alpha} + g_2[3]_{2\alpha} + g_3[2,2]_{2\alpha} + g_4[5]_{2\alpha} + g_5[4,2]_{2\alpha} + g_6[3^2] + g_4[3,2^2].$$

Um von $[0]_{2\alpha}$ auf $[3]_{2\alpha+2}$ zu kommen, giebt es, wenn wir $[3] = (\alpha\beta\gamma)$ setzen, für τ_1, τ_2 drei Möglichkeiten, wie soeben gezeigt worden ist. Ferner kann $(\alpha\beta\gamma)$ aus n Elementen gebildet werden; das giebt $\frac{n(n-1)(n-2)}{3}$ Möglichkeiten; also ist $g_1 = 3\,\frac{n(n-1)(n-2)}{3} = n(n-1)(n-2)$;

Um von $[3]_{2\alpha}$ auf $[3]_{2\alpha+2}$ zu kommen, setzen wir die zweite Substitution $= (\alpha\beta\gamma)$ und haben dann für die erste zu wählen

I.) $(\alpha\beta\gamma)$ oder II.) $(\alpha\gamma\beta)$ oder III.) $(\alpha\beta\delta)$ oder IV.) $(\alpha\delta\beta)$

dem entsprechend wird $\tau_1\tau_2$

I.) 1 oder II.) $(\alpha\gamma\beta)$ oder III.) $(\alpha\delta\gamma)$ oder IV.) $(\alpha\gamma)(\beta\delta)$.

Der erste Fall $\tau_1\tau_2 = 1$ liefert, wie wir oben sahen, $\binom{n}{2}$ Möglichkeiten. — Der zweite Fall liefert, wie gleichfalls schon gezeigt ist, drei Möglichkeiten. —

Der dritte Fall lässt für die Ausscheidung eines Elements γ aus $(\alpha\beta\gamma)$ drei Möglichkeiten zu, für die Einführung eines neuen Elementes δ ferner $(n-3)$ Möglichkeiten, für die Zerfällung von $\tau_1\tau_2 = (\alpha\delta\gamma)$ in zwei Transpositionen, wie beim zweiten Falle, drei Möglichkeiten. Zusammen giebt das $9(n-3)$ Möglichkeiten. Der vierte Fall führt ebenso auf $6(n-3)$ Möglichkeiten; und zusammen hat man also

$$g_2 = \binom{n}{2} + 3 + 9(n-3) + 6(n-3) = \frac{n^2 + 29n - 84}{2}.$$

Um von $[2, 2]_{2a}$ auf $[3]_{2a+2}$ zu gelangen, setzen wir die erste Substitution $= (\alpha\beta)(\gamma\delta)$ und fragen, wie $\tau_1\tau_2$ beschaffen sein muss, damit $(\alpha\beta)(\gamma\delta)\cdot\tau_1\tau_2$ vom Typus $[3]$ werde. Führt $\tau_1\cdot\tau_2$ kein neues Element ein, so muss etwa γ verschwinden, während α, β, δ in Verbindung treten. Das geschieht durch $\tau_1\tau_2 = (\delta\gamma\beta)$ oder $= (\delta\alpha\beta)$. Die Auswahl des verschwindenden Elementes gestattet vier Möglichkeiten; für $\tau_1\tau_2$ bestehen deren zwei; die Zerlegung jedes in Transpositionen ist auf drei Arten möglich. Somit erlangen wir 24 Möglichkeiten. — Führt dagegen $\tau_1\cdot\tau_2$ ein neues Element ϑ ein, so müssen zwei andere verschwinden. Also wird $\tau_1\tau_2 = (\alpha\vartheta)(\beta\gamma)$. Hier ist ϑ auf $(n-4)$ Arten wählbar, der wegfallende Cyklus $(\beta\gamma)$ auf zwei Arten, das zurückbleibende, mit ϑ verbundene Element α auf zwei Arten; die Zerlegung von $\tau_1\tau_2$ ebenfalls auf zwei Arten. Somit erlangen wir $8(n-4)$ Möglichkeiten, und es wird

$$g_3 = 24 + 8(n-4) = 8(n-1).$$

Bestimmen wir in ähnlicher Weise $g_4, \cdots g_7$, so folgt

$$[3]_{2a+2} = n(n-1)(n-2)\cdot[0]_{2a} + \frac{n^2+29n-84}{2}\cdot[3]_{2a} + 8(n-1)\cdot[2^2]_{2a}$$
$$+ 25\cdot[5]_{2a} + 8\cdot[4, 2]_{2a} + 6\cdot[3^2]_{2a} + 2\cdot[3, 2^2]_{2a}.$$

§ 4.

Sind auf diese oder eine andere Art die Gleichungen (6) und (7) abgeleitet, dann handelt es sich um die Bestimmung der Gleichungen (8), zu der die Auflösung von (9) und der entsprechenden Gleichung mit den $B_{\varkappa\lambda}$ nothwendig ist. Die Hurwitz'schen Untersuchungen überheben uns dieser recht mühsamen Arbeit, indem die Wurzeln beider aufzulösenden Gleichungen durch die Quadrate der Grössen

$$f = \frac{\nu_1(\nu_1-1)}{2} + \frac{\nu_2(\nu_2-1)}{2} + \cdots + \frac{\nu_r(\nu_r-1)}{2} - (\nu_1 + 2\nu_2 + 3\nu_3 + \cdots + r\nu_r) + n \tag{3}$$

bei

$$\nu_1 \geqq \nu_2 \geqq \nu_3 \geqq \cdots \geqq \nu_r > 0; \qquad \sum_{\alpha=1}^{r} \nu_\alpha = n \tag{3*}$$

geliefert werden.

Bei der Berechnung der Grössen (3) ist bemerkenswerth, dass die von Null verschiedenen unter ihnen ihrem absoluten Werthe nach eine gerade Anzahl von Malen und zwar eben so oft positiv wie negativ auftreten. Am einfachsten beweisen wir dies, indem wir die Zerlegung von n, welche durch (3*) geliefert wird, in einer anderen Art mit (3) verknüpfen. Wir wählen dazu die Darstellung der Zerlegung von n durch ein *Punkt-Diagramm* (vgl. meine Combinatorik, § 96), indem wir in r Horizontal-Zeilen der Reihe nach $\nu_1, \nu_2, \cdots \nu_r$ Punkte eintragen, die spaltenweise untereinander stehen und deren Anfangs-Elemente in eine Verticalreihe kommen sollen. So stellt das Punktdiagramm

$$\begin{array}{lllll} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \\ \bullet & \bullet & \bullet & & \\ \bullet & \bullet & & & \end{array}$$

die Zerlegung $18 = 5 + 5 + 3 + 3 + 2$ dar. In diesem Punktdiagramm geben wir nun jedem Punkte der Diagonale das Gewicht 0, jedem Punkte der rechts benachbarten Parallelreihe zur Diagonale das Gewicht $+1$; jedem Punkte der dieser Reihe rechts benachbarten das Gewicht $+2$; u. s. f.; links von der Diagonale treten in gleicher Weise die Gewichte $-1, -2, -3, \cdots$ auf. Das oben angeführte Punktdiagramm liefert beispielsweise

$$\begin{array}{rrrrr} 0, & +1, & +2, & +3, & +4 \\ -1, & 0, & +1, & +2, & +3 \\ -2, & -1, & 0 & & \\ -3, & -2, & -1 & & \\ -4, & -3. & & & \end{array}$$

Bildet man dann die Summe der so aufgeschriebenen Zahlen, so entsteht, wie sich ohne Schwierigkeit nachweisen lässt, gerade das zugehörige f in (3).

Wird nun aber das Diagramm von links nach rechts vertical gelesen, so erhält man eine Zerlegung, die stets und nur dann von der ersten verschieden ausfällt, wenn das zugehörige f nicht den Werth 0 hat. Die zu den beiden Deutungen des Diagramms zugehörigen f haben die Summe 0, wie sofort zu erkennen ist; und damit ist bewiesen: *jedes von Null verschiedene f kommt gleich oft positiv wie negativ vor.*

Ferner erkennt man leicht, dass bei jedem n Zerlegungen bestehen, welche $f = 0$ liefern. Dazu ist es nämlich ausreichend, dass die beiden Deutungen des Punktdiagramms identische Zerlegungen geben, und dazu, dass das Diagramm symmetrisch zu seiner Diagonale liegt. Dies ist bei gegebenem n stets zu erreichen. Ist $n = 2m + 1$, so genügt die Zerlegung: $[m, 1, 1, 1, \cdots]$; ist $n = 2m + 2$, so reicht: $[m, 2, 1, 1, \cdots]$ dazu aus. Ist $n > 7$, so giebt es mehrere Zerlegungen, die $f = 0$ liefern, so für $n = 8$ die beiden $[4, 2, 1, 1]$ und $[3, 3, 2]$; für $n = 13$ die drei $[7, 1^6]$, $[5, 3^2, 1^2]$ und $[4^2, 3, 2]$.

§ 5.

Nachdem die ϱ erlangt sind, hängt die Aufstellung der Gleichungen (8) und der entsprechenden für die $[g]_{2\alpha}^{(n)}$ von der Lösung je eines Systems von linearen Gleichungen ab. Die Herleitung von (8*) aus (8) ist dadurch sehr einfach, dass für die $[u]_1^{(n)}$ nur der Typus $[2]_1^{(n)} = \binom{n}{2}$ von Null verschieden bleibt, und für die $[g]_0^{(n)}$ nur der Typus $[0]_0^{(n)} = 1$. Die so erlangten Gleichungen schreiben wir nochmals, indem wir den Coefficienten ihre möglichst kleinen ganzzahligen Werthe geben und die rechten Seiten positiv nehmen, in der Form

$$\mu_{1,\alpha}[u_1]_{2\varkappa+1}^{(n)} + \mu_{2,\alpha}[u_2]_{2\varkappa+1}^{(n)} + \cdots = \mathsf{M}_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots), \tag{13}$$

$$\nu_{1,\alpha}[g_1]_{2\varkappa}^{(n)} + \nu_{2,\alpha}[g_2]_{2\varkappa}^{(n)} + \cdots = \mathsf{N}_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots). \tag{14}$$

In jedem Systeme (13) und (14) kommen so viele Gleichungen vor, als Unbekannte $[u]$ bezw. $[g]$ vorhanden sind. Die $[u]$ und $[g]$ wollen wir nach steigender Zahl der wirklich auftretenden Elemente geordnet denken, also

$$[u_1] = [2],\ [u_2] = [4],\ [u_3] = [3, 2], \cdots$$

und

$$[g_1] = [0],\ [g_2] = [3],\ [g_3] = [2, 2], \cdots.$$

In den Systemen (13), (14) treten nun, wenigstens bis $n = 7$, einige merkwürdige Umstände zu Tage. *Das System* (13) *hat die Eigenschaft orthogonaler Determinanten, dass*

$$\sum_{\lambda = 1, 2, \cdots} \mu_{\alpha,\lambda} \cdot \mu_{\beta,\lambda} = 0 \qquad (\alpha \neq \beta)$$

wird. Man kann daher die Auflösung des Systems (13) ohne Weiteres hinschreiben

$$\Big(\sum_{\lambda = 1, 2, \cdots} \mu_{\alpha,\lambda}^2\Big) \cdot [u_\alpha]_{2\varkappa+1}^{(n)} = \sum_{\lambda = 1, 2, \cdots} \mu_{\alpha,\lambda} \cdot \mathsf{M}_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots). \tag{13*}$$

Bei (14) liegen die Verhältnisse etwas complicirter. Unter den zugehörigen Factoren ϱ_α kommt ein solcher vom Werthe 0 vor. Es sei dies ϱ_1; das N_1 ist dann natürlich auch gleich Null. Man muss die erste der Gleichungen (14) zunächst durch

$$\frac{v_{11}}{\sqrt{2}}\,[g_1]^{(n)}_{2\varkappa} + \frac{v_{21}}{\sqrt{2}}\,[g_2]^{(n)}_{2\varkappa} + \cdots = 0$$

ersetzen; erst dann gilt dieselbe Auflösungsart wie bei (13), d. h. es ist

$$\left(\frac{1}{2}\,\nu_{\alpha 1}^2 + \sum_{\lambda=2,3,\cdots} \nu_{\alpha\lambda}^2\right)\cdot[g_\alpha]^{(n)}_{2\varkappa} = \sum_{\lambda=2,3,\cdots} \nu_{\alpha\lambda} \mathrm{N}_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \cdots). \tag{14*}$$

Es giebt noch weitere Eigenschaften, welche sich auf die Coefficienten der linken Seiten in (13*), (14*) beziehen. Diese wollen wir aber erst nach Anführung der fertigen Formeln für $n = 2, 3, \cdots 7$ darlegen.

§ 6.

Ist $n = 2$, so bestehen nur die beiden Typen [0] und [2]. Offenbar ist

$$[0]_{2\varkappa+2} = [2]_{2\varkappa+1} = 1.$$

Ist $n = 3$, so haben wir als Typen [0], [3] und [2]. Hier wird

$$\begin{aligned}[0]_{2\alpha+2} &= [2]_{2\alpha+1},\\ [3]_{2\alpha+2} &= 2[2]_{2\alpha+1};\end{aligned} \qquad [2]_{2\alpha+1} = 3[0]_{2\alpha} + 3[3]_{2\alpha};$$

$$\begin{aligned}[0]_{2\alpha+2} &= 3[0]_{2\alpha} + 3[3]_{2\alpha},\\ [3]_{2\alpha+2} &= 6[0]_{2\alpha} + 6[3]_{2\alpha};\end{aligned} \qquad [2]_{2\alpha+1} = 9[2]_{2\alpha-1};$$

$$\varrho = 0;\ 9.$$

$$\begin{aligned}2[0]_{2\alpha+2} - [3]_{2\alpha+2} &= 0,\\ [0]_{2\alpha+2} + [3]_{2\alpha+2} &= 3^2\{[0]_{2\alpha} + [3]_{2\alpha}\} = 3^{2\alpha+2};\end{aligned} \qquad [2]_{2\alpha+1} = 3^2[2]_{2\alpha-1}.$$

$$3[0]_{2\alpha} = 1\cdot 3^{2\alpha}; \qquad \frac{3}{2}\,[3]_{2\alpha} = 1\cdot 3^{2\alpha}, \qquad [2]_{2\alpha+1} = 1\cdot 3^{2\alpha+1}.$$

Ist $n = 4$, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned}[0]_{2\alpha+2} &= [2]_{2\alpha+1},\\ [3]_{2\alpha+2} &= 4[2]_{2\alpha+1} + 4[4]_{2\alpha+1},\\ [2,2]_{2\alpha+2} &= [2]_{2\alpha+1} + 2[4]_{2\alpha+1};\end{aligned} \qquad \begin{aligned}[2]_{2\alpha+1} &= 6[0]_{2\alpha} + 3[3]_{2\alpha} + 2[2^2]_{2\alpha},\\ [4]_{2\alpha+1} &= 3[3]_{2\alpha} + 4[2^2]_{2\alpha}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[0]_{2\alpha+2} &= 6[0]_{2\alpha} + 3[3]_{2\alpha} + 2[2^2]_{2\alpha},\\ [3]_{2\alpha+2} &= 24[0]_{2\alpha} + 24[3]_{2\alpha} + 24[2^2]_{2\alpha},\\ [2,2]_{2\alpha+2} &= 6[0]_{2\alpha} + 9[3]_{2\alpha} + 10[2^2]_{2\alpha};\end{aligned} \qquad \begin{aligned}[2]_{2\alpha+1} &= 20[2]_{2\alpha-1} + 16[2]_{2\alpha-1},\\ [4]_{2\alpha+1} &= 16[2]_{2\alpha-1} + 20[2]_{2\alpha-1};\end{aligned}$$

$\varrho = 0;\ 2^2;\ 6^2.$

$$\begin{aligned}
2[0]_{2a} - [3]_{2a} + 2[2^2]_{2a} &= 0, \\
3[0]_{2a} \qquad\quad - [2^2]_{2a} &= 3\cdot 2^{2a}, \\
[0]_{2a} + [3]_{2a} + [2^2]_{2a} &= 1\cdot 6^{2a};
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
[2]_{2a+1} - [4]_{2a+1} &= 3\cdot 2^{2a+4}, \\
[2]_{2a+1} + [4]_{2a+1} &= 1\cdot 6^{2a+1};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
12[0]_{2a} &= 1^2\cdot 6^{2a} + 3^2\cdot 2^{2a}, \\
\tfrac{3}{2}[3]_{2a} &= 1\ \cdot 6^{2a} \qquad\qquad , \\
4[2^2]_{2a} &= 1\cdot 1\ \cdot 6^{2a} - 1\cdot 3\ \cdot 2^{2a};
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
2[2]_{2a+1} &= 1\cdot 6^{2a+1} + 1\cdot 3\cdot 2^{2a+1}, \\
2[4]_{2a+1} &= 1\cdot 6^{2a+1} - 1\cdot 3\cdot 2^{2a+1}.
\end{aligned}$$

Ist $n = 5$, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
[0]_{2a+2} &= [2]_{2a+1} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad , \\
[3]_{2a+2} &= 6[2]_{2a+1} + 4[4]_{2a+1} + [3,2]_{2a+1}, \\
[2^2]_{2a+2} &= 3[2]_{2a+1} + 2[4]_{2a+1} + 3[3,2]_{2a+1}, \\
[5]_{2a+2} &= \qquad\qquad\quad 4[4]_{2a+1} + 6[3,2]_{2a+1};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[2]_{2a+1} &= 10[0]_{2a} + 3[3]_{2a} + 2[2^2]_{2a} \qquad\qquad , \\
[4]_{2a+1} &= \qquad\qquad\quad 6[3]_{2a} + 4[2^2]_{2a} + 5[5]_{2a}, \\
[3,2]_{2a+1} &= \qquad\qquad\quad\ [3]_{2a} + 4[2^2]_{2a} + 5[5]_{2a};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[0]_{2a+2} &= 10[0]_{2a} + 3[3]_{2a} + 2[2^2]_{2a} \qquad\qquad , \\
[3]_{2a+2} &= 60[0]_{2a} + 43[3]_{2a} + 32[2^2]_{2a} + 25[5]_{2a}, \\
[2^2]_{2a+2} &= 30[0]_{2a} + 24[3]_{2a} + 26[2^2]_{2a} + 25[5]_{2a}, \\
[5]_{2a+2} &= \qquad\qquad\quad 30[3]_{2a} + 40[2^2]_{2a} + 50[5]_{2a};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[2]_{2a+1} &= 34[2]_{2a-1} + 16[4]_{2a-1} + 9[3,2]_{2a-1}, \\
[4]_{2a+1} &= 48[2]_{2a-1} + 52[4]_{2a-1} + 48[3,2]_{2a-1}, \\
[3,2]_{2a+1} &= 18[2]_{2a-1} + 32[4]_{2a-1} + 43[3,2]_{2a-1};
\end{aligned}$$

$\varrho = 0,\ 2^2,\ 5^2,\ 10^2$

$$\begin{aligned}
6[0]_{2a} \qquad\qquad - 2[2^2]_{2a} + [5]_{2a} &= 0 \qquad\quad , \\
5[0]_{2a} - [3]_{2a} + [2^2]_{2a} \qquad\qquad &= 5\cdot 2^{2a}\ , \\
4[0]_{2a} + [3]_{2a} \qquad\qquad\quad - [5]_{2a} &= 4\cdot 5^{2a}\ , \\
[0]_{2a} + [3]_{2a} + [2^2]_{2a} + [5]_{2a} &= 1\cdot 10^{2a};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[2]_{2a+1} - [4]_{2a+1} + [3,2]_{2a+1} &= 5\cdot 2^{2a+1}\ , \\
2[2]_{2a+1} \qquad\qquad - [3,2]_{2a+1} &= 4\cdot 5^{2a+1}\ , \\
[2]_{2a+1} + [4]_{2a+1} + [3,2]_{2a+1} &= 1\cdot 10^{2a+1};
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
60[0]_{2a} &= 1^2\cdot 10^{2a} + 4^2\cdot 5^{2a} + 5^2\cdot 2^{2a},\\
3[3]_{2a} &= 1^2\cdot 10^{2a} + 1\cdot 4\cdot 5^{2a} - 1\cdot 5\cdot 2^{2a},\\
4[2^2]_{2a} &= 1^2\cdot 10^{2a} \qquad\qquad\quad + 1\cdot 5\cdot 2^{2a},\\
\frac{5}{2}[5]_{2a} &= 1^2\cdot 10^{2a} - 1\cdot 4\cdot 5^{2a} \qquad\qquad ;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
6[2]_{2a+1} &= 1\cdot 10^{2a+1} + 2\cdot 4\cdot 5^{2a+1} + 1\cdot 5\cdot 2^{2a+1},\\
2[4]_{2a+1} &= 1\cdot 10^{2a+1} \qquad\qquad\quad - 1\cdot 5\cdot 2^{2a+1},\\
3[3,2]_{2a+1} &= 1\cdot 10^{2a+1} - 1\cdot 4\cdot 5^{2a+1} + 5\cdot 2^{2a+1}.
\end{aligned}
$$

Ist $n=6$, so setzen wir, um die Formeln gedrängter schreiben zu können,

$[0]_{2a+2}=\alpha'$, $[3]_{2a+2}=\beta'$, $[2^2]_{2a+2}=\gamma'$, $[5]_{2a+2}=\delta'$, $[4,2]_{2a+2}=\varepsilon'$, $[3^2]_{2a+2}=\zeta'$;
$[0]_{2a}=\alpha$, $[3]_{2a}=\beta$, ... ;
$[2]_{2a+1}=\eta'$, $[4]_{2a+1}=\vartheta'$, $[3,2]_{2a+1}=\iota'$, $[6]_{2a+1}=\varkappa'$, $[2^3]_{2a+1}=\lambda'$;
$[2]_{2a-1}=\eta$, $[4]_{2a-1}+\vartheta$, ...

Dann ergiebt sich

$$
\begin{array}{ll}
\alpha' = \eta' \hspace{12em}, & \eta' = 15\alpha+3\beta+2\gamma \hspace{6em},\\
\beta' = 8\eta'+4\vartheta'+\iota' \hspace{7em}, & \vartheta' = \quad 9\beta+4\gamma+5\delta+1\varepsilon \hspace{2em},\\
\gamma' = 6\eta'+2\vartheta'+3\iota'+\quad+3\lambda', & \iota' = \quad 3\beta+8\gamma+5\delta+4\varepsilon+6\zeta,\\
\delta' = \quad 8\vartheta'+6\iota'+6\varkappa' \hspace{4em}, & \varkappa' = \hspace{6em} 5\delta+8\varepsilon+9\zeta,\\
\varepsilon' = \quad \vartheta'+3\iota'+6\varkappa'+12\lambda', & \lambda' = \hspace{4em} \gamma \quad +2\varepsilon \hspace{3em};\\
\zeta' + \quad 2\iota'+3\varkappa' \hspace{5em}; &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha' &= 15\alpha+3\beta+2\gamma,\\
\beta' &= 120\alpha+63\beta+40\gamma+25\delta+8\varepsilon+6\zeta,\\
\gamma' &= 90\alpha+45\beta+47\gamma+25\delta+20\varepsilon+18\zeta,\\
\delta' &= 90\beta+80\gamma+100\delta+80\varepsilon+90\zeta,\\
\varepsilon' &= 18\beta+40\gamma+50\delta+85\varepsilon+72\zeta,\\
\zeta' &= 6\beta+16\gamma+25\delta+32\varepsilon+39\zeta;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\eta' &= 51\eta+16\vartheta+9\iota+6\lambda,\\
\vartheta' &= 96\eta+85\vartheta+54\iota+36\varkappa+24\lambda,\\
\iota' &= 72\eta+72\vartheta+81\iota+72\varkappa+72\lambda,\\
\varkappa' &= 48\vartheta+72\iota+105\varkappa+96\lambda,\\
\lambda' &= 6\eta+4\vartheta+9\iota+12\varkappa+27\lambda;
\end{aligned}
$$

$\varrho = 0,\ 3^2,\ 3^2,\ 5^2,\ 9^2,\ 15^2.$

Zu bemerken ist, dass hier durch das doppelte Auftreten von 3^2 einige Schwierigkeiten hervorgerufen werden.

$$\begin{aligned}
16\alpha - 2\beta \quad\quad + \delta \quad\quad - 2\zeta &= 0 \quad\quad ,\\
5\alpha - 1\beta + \gamma \quad\quad - \varepsilon + 2\zeta &= 5\cdot 3^{2\alpha},\\
10\alpha + \beta - 2\gamma \quad\quad\quad + \zeta &= 10\cdot 3^{2\alpha},\\
9\alpha \quad + \gamma - \delta + \varepsilon \quad &= 9\cdot 5^{2\alpha},\\
5\alpha + 2\beta + \gamma \quad\quad - \varepsilon - \zeta &= 5\cdot 9^{2\alpha},\\
\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \zeta &= 1\cdot 15^{2\alpha};
\end{aligned}$$

* * *

$$\begin{aligned}
2\eta' \quad\quad - \iota' + \varkappa' - 2\lambda' &= 10\cdot 3^{2\alpha+1},\\
\eta' - \vartheta' + \iota' \quad\quad - 3\lambda' &= 5\cdot 3^{2\alpha+1},\\
3\eta' - \vartheta' \quad\quad\quad + 3\lambda' &= 9\cdot 5^{2\alpha+1},\\
3\eta' + \vartheta' \quad\quad - \varkappa' - \lambda' &= 5\cdot 9^{2\alpha+1},\\
\eta' + \vartheta' + \iota' + \varkappa' + \lambda' &= 1\cdot 15^{2\alpha+1};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
360\cdot\alpha &= 1^2.15^{2\alpha} + 5^2.9^{2\alpha} + 9^2.5^{2\alpha} + 10^2.3^{2\alpha} + 5^2.3^{2\alpha},\\
9\cdot\beta &= 1^2.15^{2\alpha} + 2\cdot5\cdot9^{2\alpha} \quad\quad + 1\cdot10\cdot3^{2\alpha} - 1\cdot5\cdot3^{2\alpha},\\
8\cdot\gamma &= 1^2.15^{2\alpha} + 1\cdot5\cdot9^{2\alpha} + 1\cdot9\cdot5^{2\alpha} - 2\cdot10\cdot3^{2\alpha} + 1\cdot5\cdot3^{2\alpha},\\
\frac{5}{2}\cdot\delta &= 1^2.15^{2\alpha} \quad\quad - 1\cdot9\cdot5^{2\alpha} \quad\quad ,\\
4\cdot\varepsilon &= 1^2.15^{2\alpha} - 1\cdot5\cdot9^{2\alpha} + 1\cdot9\cdot5^{2\alpha} \quad\quad - 1\cdot5\cdot3^{2\alpha},\\
9\cdot\zeta &= 1^2.15^{2\alpha} - 1\cdot5\cdot9^{2\alpha} \quad\quad + 1\cdot10\cdot3^{2\alpha} + 2\cdot5\cdot3^{2\alpha};
\end{aligned}$$

* * *

$$\begin{aligned}
24\eta' &= 1^2\cdot15^{2\alpha+1} + 3\cdot5\cdot9^{2\alpha+1} + 3\cdot9\cdot5^{2\alpha+1} + 2\cdot10\cdot3^{2\alpha+1} + 1\cdot5\cdot3^{2\alpha+1},\\
4\vartheta' &= 1^2\cdot15^{2\alpha+1} + 1\cdot5\cdot9^{2\alpha+1} - 1\cdot9\cdot5^{2\alpha+1} \quad\quad - 1\cdot5\cdot3^{2\alpha+1},\\
3\iota' &= 1^2\cdot15^{2\alpha+1} \quad\quad - 1\cdot10\cdot3^{2\alpha+1} + 1\cdot5\cdot3^{2\alpha+1},\\
3\varkappa' &= 1^2\cdot15^{2\alpha+1} - 1\cdot5\cdot9^{2\alpha+1} \quad\quad + 1\cdot10\cdot3^{2\alpha+1} \quad\quad ,\\
24\lambda' &= 1^2\cdot15^{2\alpha+1} - 1\cdot5\cdot9^{2\alpha+1} + 3\cdot9\cdot5^{2\alpha+1} - 2\cdot10\cdot3^{2\alpha+1} - 3\cdot5\cdot3^{2\alpha+1}.
\end{aligned}$$

Ist $n = 7$, so gebrauchen wir folgende weitere Abkürzungen

$$[7]_{2\alpha+2} = \mu',\quad [3,2^2]_{2\alpha+2} = \nu';\quad [5,2]_{2\alpha+1} = \pi',\quad [4,3]_{2\alpha+1} = \varrho';$$
$$[7]_{2\alpha} = \mu,\quad [3,2^2]_{2\alpha} = \nu;\quad [5,2]_{2\alpha-1} = \pi,\quad [4,3]_{2\alpha-1} = \varrho.$$

Es wird dann

$$\begin{aligned}
\alpha' &= \eta' ,\\
\beta' &= 10\eta' + 4\vartheta' + 1\iota' ,\\
\gamma' &= 10\eta' + 2\vartheta' + 3\iota' + 3\lambda' ,\\
\delta' &= 12\vartheta' + 6\iota' + 6\kappa' + \pi' ,\\
\varepsilon' &= 3\vartheta' + 6\iota' + 6\kappa' + 12\lambda' + 5\pi' + 3\varrho',\\
\zeta' &= 4\iota' + 3\kappa' + 4\varrho',\\
\mu' &= 6\kappa' + 10\pi' + 12\varrho',\\
\nu' &= \iota' + 6\lambda' + 5\pi' + 2\varrho';
\end{aligned}$$

* * *

$$\begin{aligned}
\eta' &= 21\alpha + 3\beta + 2\gamma ,\\
\vartheta' &= 12\beta + 4\gamma + 5\delta + 1\varepsilon ,\\
\iota' &= 6\beta + 12\gamma + 5\delta + 4\varepsilon + 6\zeta + 2\nu,\\
\kappa' &= 10\delta + 8\varepsilon + 9\zeta + 7\mu ,\\
\lambda' &= 3\gamma + 2\varepsilon + 3\nu,\\
\pi' &= \delta + 4\varepsilon + 7\mu + 12\nu,\\
\varrho' &= 2\varepsilon + 6\zeta + 7\mu + 4\nu;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha' &= 21\alpha + 3\beta + 2\gamma ,\\
\beta' &= 210\alpha + 84\beta + 48\gamma + 25\delta + 8\varepsilon + 6\zeta + 2\nu,\\
\gamma' &= 210\alpha + 72\beta + 73\gamma + 25\delta + 20\varepsilon + 18\zeta + 15\nu,\\
\delta' &= 180\beta + 120\gamma + 151\delta + 88\varepsilon + 90\zeta + 49\mu + 24\nu,\\
\varepsilon' &= 72\beta + 120\gamma + 110\delta + 125\varepsilon + 108\zeta + 98\mu + 120\nu,\\
\zeta' &= 24\beta + 48\gamma + 50\delta + 48\varepsilon + 75\zeta + 49\mu + 24\nu,\\
\mu' &= 70\delta + 112\varepsilon + 126\zeta + 196\mu + 168\nu,\\
\nu' &= 6\beta + 30\gamma + 10\delta + 40\varepsilon + 18\zeta + 49\mu + 88\nu;
\end{aligned}$$

* * *

$$\begin{aligned}
\eta' &= 71\eta + 16\vartheta + 9\iota + 6\lambda ,\\
\vartheta' &= 160\eta + 119\vartheta + 60\iota + 36\kappa + 24\lambda + 10\pi + 3\varrho,\\
\iota' &= 180\eta + 120\vartheta + 122\iota + 72\kappa + 96\lambda + 35\pi + 40\varrho,\\
\kappa' &= 144\vartheta + 144\iota + 177\kappa + 96\lambda + 120\pi + 144\varrho,\\
\lambda' &= 30\eta + 12\vartheta + 24\iota + 12\kappa + 51\lambda + 25\pi + 12\varrho,\\
\pi' &= 24\vartheta + 42\iota + 72\kappa + 120\lambda + 151\pi + 120\varrho,\\
\varrho' &= 6\vartheta + 40\iota + 72\kappa + 48\lambda + 100\pi + 122\varrho;
\end{aligned}$$

$\varrho = 0,\ 1^2,\ 3^2,\ 6^2,\ 7^2,\ 9^2,\ 14^2,\ 21^2.$

$$\begin{aligned}
20\alpha + 2\beta - 4\gamma \qquad\qquad + 2\zeta - \mu + 2\nu &= 0 \quad ,\\
21\alpha - 3\beta + 1\gamma + \delta - \varepsilon \qquad\qquad + \nu &= 21\cdot 1^{2a},\\
35\alpha - 1\beta - 1\gamma + \varepsilon - 1\zeta \qquad - \nu &= 35\cdot 3^{2a},\\
14\alpha - 1\beta + 2\gamma - \delta + 2\zeta \qquad - \nu &= 14\cdot 6^{2a},\\
15\alpha + 3\beta - 1\gamma - \varepsilon \qquad + \mu - \nu &= 15\cdot 7^{2a},\\
14\alpha + 2\beta + 2\gamma - \delta - 1\zeta \qquad + 2\nu &= 14\cdot 9^{2a},\\
6\alpha + 3\beta + 2\gamma + \delta \qquad - \mu - \nu &= 6\cdot 14^{2a},\\
1\alpha + 1\beta + 1\gamma + \delta + \varepsilon + 1\zeta + \mu + \nu &= 1\cdot 21^{2a};
\end{aligned}$$

* * *

$$\begin{aligned}
\eta' - \vartheta' + \iota' - 3\lambda' + \varkappa' - \varrho' &= 21\cdot 1^{2a+1},\\
5\eta' - \vartheta' - \iota' + \varkappa' + \lambda' - \varrho' &= 35\cdot 3^{2a+1},\\
4\eta' - 2\vartheta' + \iota' - \pi' + \varrho' &= 14\cdot 6^{2a+1},\\
5\eta' + \vartheta' - \iota' - 3\lambda' + \varrho' &= 15\cdot 7^{2a+1},\\
6\eta' - \varkappa' + 2\lambda' + \pi' &= 14\cdot 9^{2a+1},\\
4\eta' + 2\vartheta' + \iota' - \pi' - \varrho' &= 6\cdot 14^{2a+1},\\
\eta' + \vartheta' + \iota' + \varkappa' + \lambda' + \pi' + \varrho' &= 1\cdot 21^{2a+1};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2520[0]_{2a} &= 1^2\cdot 21^{2a} + 6^2\cdot 14^{2a} + 14^2\cdot 9^{2a} + 15^2\cdot 7^{2a} + 14^2\cdot 6^{2a} + 35^2\cdot 3^{2a} + 21^2\cdot 1^{2a},\\
36[3]_{2a} &= 1^2\cdot 21^{2a} + 3\cdot 6\cdot 14^{2a} + 2\cdot 14\cdot 9^{2a} + 3\cdot 15\cdot 7^{2a} - 1\cdot 14\cdot 6^{2a} - 1\cdot 35\cdot 3^{2a} - 3\cdot 21\cdot 1^{2a},\\
24[2^2]_{2a} &= 1^2\cdot 21^{2a} + 2\cdot 6\cdot 14^{2a} + 2\cdot 14\cdot 9^{2a} - 1\cdot 15\cdot 7^{2a} + 2\cdot 14\cdot 6^{2a} - 1\cdot 35\cdot 3^{2a} + 1\cdot 21\cdot 1^{2a},\\
5[5]_{2a} &= 1^2\cdot 21^{2a} + 1\cdot 6\cdot 14^{2a} - 1\cdot 14\cdot 9^{2a} - 1\cdot 14\cdot 6^{2a} + 1\cdot 21\cdot 1^{2a},\\
4[4,2]_{2a} &= 1^2\cdot 21^{2a} - 1\cdot 15\cdot 7^{2a} + 1\cdot 35\cdot 3^{2a} - 1\cdot 21\cdot 1^{2a},\\
9[3^2]_{2a} &= 1^2\cdot 21^{2a} - 1\cdot 14\cdot 9^{2a} + 2\cdot 14\cdot 6^{2a} - 1\cdot 35\cdot 3^{2a} \quad ,\\
\tfrac{7}{2}[7]_{2a} &= 1^2\cdot 21^{2a} - 1\cdot 6\cdot 14^{2a} + 1\cdot 15\cdot 7^{2a} \quad ,\\
12[3,2^2]^{2a} &= 1^2\cdot 21_{2a} - 1\cdot 6\cdot 14^{2a} + 2\cdot 14\cdot 9^{2a} - 1\cdot 15\cdot 7^{2a} - 1\cdot 14\cdot 6^{2a} - 1\cdot 35\cdot 3^{2a} + 1\cdot 21\cdot 1^{2a};
\end{aligned}$$

* * *

$$\begin{aligned}
120[2]_{2a+1} &= 1^2\cdot 21^{2a+1} + 4\cdot 6\cdot 14^{2a+1} + 6\cdot 14\cdot 9^{2a+1} + 5\cdot 15\cdot 7^{2a+1} + 4\cdot 14\cdot 6^{2a+1} + 5\cdot 35\cdot 3^{2a+1}\\
&\quad + 1\cdot 21\cdot 1^{2a+1},\\
12[4]_{2a+1} &= 1^2\cdot 21^{2a+1} + 2\cdot 6\cdot 14^{2a+1} + 1\cdot 15\cdot 7^{2a+1} - 2\cdot 14\cdot 6^{2a+1} - 1\cdot 35\cdot 3^{2a+1}\\
&\quad - 1\cdot 21\cdot 1^{2a+1},\\
6[3,2]_{2a+1} &= 1^2\cdot 21^{2a+1} + 1\cdot 6\cdot 14^{2a+1} - 1\cdot 15\cdot 7^{2a+1} + 1\cdot 14\cdot 6^{2a+1} - 1\cdot 35\cdot 3^{2a+1}\\
&\quad + 1\cdot 21\cdot 1^{2a+1},\\
3[3,2]_{2a+1} &= 1^2\cdot 21^{2a+1} - 1\cdot 14\cdot 9^{2a+1} + 1\cdot 35\cdot 3^{2a+1}\\
24[2^3]_{2a+1} &= 1^2\cdot 21^{2a+1} + 2\cdot 14\cdot 9^{2a+1} - 3\cdot 15\cdot 7^{2a+1} + 1\cdot 35\cdot 3^{2a+1}\\
&\quad - 3\cdot 21\cdot 1^{2a+1},\\
5[5,2]_{2a+1} &= 1^2\cdot 21^{2a+1} - 1\cdot 6\cdot 14^{2a+1} + 1\cdot 14\cdot 9^{2a+1} - 1\cdot 14\cdot 6^{2a+1} + 1\cdot 21\cdot 1^{2a+1},\\
6[4,3]_{2a+1} &= 1^2\cdot 21^{2a+1} - 1\cdot 16\cdot 14^{2a+1} + 1\cdot 15\cdot 7^{2a+1} + 1\cdot 14\cdot 6^{2a+1} - 1\cdot 35\cdot 3^{2a+1}\\
&\quad - 1\cdot 21\cdot 1^{2a+1}.
\end{aligned}$$

---

§ 7.

Aus den jedesmaligen Schlussformeln, welche die Anzahl der Darstellungen für die Substitutionstypen bei $n = 2, 3, \cdots 6, 7$ geben, scheinen noch einige Beziehungen hervorzuleuchten.

Beispielsweise lassen sich die Coefficienten der $[g_\alpha]_{2\alpha}^{(n)}$, $[u_\alpha]_{2\alpha+1}^{(n)}$ in der Form einer mit constantem Factor multiplicirten Facultät $c\cdot(n-n_0)!$ darstellen. So erhält man als Coefficienten der linken Seite für jedes n

bei $[0]_{2\alpha}^{(n)}$ den Werth $\frac{1}{2}(n-2)!$,

bei $[3]_{2\alpha}^{(n)}$ den Werth $\frac{3}{2}(n-3)!$,

bei $[2]_{2\alpha+1}^{(n)}$ den Werth $1\cdot(n-2)!$,

bei $[4]_{2\alpha+1}^{(n)}$ den Werth $2\cdot(n-4)!$, u. s. w.

Hierbei ist natürlich auf die in § 5 gemachte Annahme zu achten, dass in (13) und (14) die Coefficienten möglichst kleine ganze Zahlen seien, deren Vorzeichen so gewählt sind, dass die rechte Seite positiv wird. —

Eine zweite Bemerkung ist die, dass in allen den Gleichungssystemen, welche den Nummern (13) und (14) entsprechen, stets dieselben Wurzeln ϱ_α (abgesehen von den ϱ, die gleich Null sind) auftreten bei den $[g]$ wie bei den $[u]$, so dass also die Gleichungen

$$(9)\quad \begin{vmatrix} A_{11}-\varrho & A_{21} & ,\cdots \\ A_{12} & A_{22}-\varrho, & \cdots \\ A_{13} & A_{23} & ,\cdots \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \end{vmatrix} = 0 \quad \text{und} \quad (9^*)\quad \begin{vmatrix} B_{11}-\varrho & B_{21} & ,\cdots \\ B_{12} & B_{22}-\varrho, & \cdots \\ B_{13} & B_{23} & ,\cdots \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \end{vmatrix} = 0$$

die gleichen Wurzeln in gleicher Multiplicität haben, wenn man von verschwindenden Wurzeln absieht.

Dies ist auch leicht zu beweisen; jede Gleichung (13) geht nämlich durch Verwendung von (4) in eine der Gleichungen (14) über, und umgekehrt jede Gleichung (14) durch Verwendung von (5) in eine der Gleichungen (14); und da jede dieser Gleichungen durch einen Werth von ϱ_α festgelegt ist, so folgt die Richtigkeit unserer Bemerkung. —

Weiter sei noch darauf aufmerksam gemacht, dass zwei derartig sich entsprechende Gleichungen aus (13) und (14) auf ihren rechten Seiten

$$c_\alpha\cdot\varrho_\alpha^{2\varkappa+1} \quad \text{und} \quad c_\alpha\cdot\varrho_\alpha^{2\varkappa}$$

lauten, dass also die Coefficienten der Potenzen von ϱ_α dieselben in den beiden Gleichungen sind. —

Die behandelten Formeln beziehen sich auf die Darstellung *aller* Substitutionen eines Typus durch eine vorgeschriebene Anzahl von Transpositionen. Verlangt man die Darstellung *einer gegebenen* Substitution auf diese Weise, so sind die abgeleiteten Zahlen durch diejenige Zahl zu dividiren, welche angiebt, wieviel Individuen der zugehörige Typus von Substitutionen enthält. Für $[0]_{2a}^{(n)}$ bleibt das Resultat also dasselbe; für $[2]_{2a+1}^{(n)}$ ist es durch $\binom{n}{2}$ zu dividiren. Aus der zu Beginn des § 4 über die Berechnung der rechten Seiten von (8*) und der entsprechenden Gleichung gemachten Bemerkung geht dann hervor, dass der Werth für die Darstellung einer gegebenen *Transposition* bei n Elementen dieselbe einfache Gestalt erhält, wie bei der Darstellung von $[0]_{2a}^{(n)}$, nämlich für

$$n=3 \quad \frac{1}{3}[2]_{2a+1}^{(3)}=1^2\cdot 3^{2a},$$

$$n=4 \quad \frac{2}{6}[2]_{2a+1}^{(4)}=1^2\cdot\ 6^{2a}+1^2\cdot\ 2^{2a},$$

$$n=5 \quad \frac{6}{10}[2]_{2a+1}^{(5)}=1^2\cdot 10^{2a}+2^2\cdot\ 5^{2a}+1^2\cdot 2^{2a},$$

$$n=6 \quad \frac{24}{15}[2]_{2a+1}^{(6)}=1^2\cdot 15^{2a}+3^2\cdot\ 9^{2a}+3^2\cdot 5^{2a}+2^2\cdot 3^{2a}+1^2\cdot 3^{2a},$$

$$n=7 \quad \frac{120}{21}[2]_{2a+1}^{(7)}=1^2\cdot 21^{2a}+4^2\cdot 14^{2a}+6^2\cdot 9^{2a}+5^2\cdot 7^{2a}+4^2\cdot 6^{2a}+5^2\cdot 3^{2a}+1^2\cdot 1^{2a};$$

hier wie dort treten die Hurwitz'schen f^w auf, jedes mit einem Quadrate multiplicirt.

Wir können zum Schluss noch einen oben gegebenen Satz vervollständigen. Auf S. 145 meiner Combinatorik ist der Satz angegeben: „Der Ueberschuss der Darstellungsarten einer Zahl aus einer geraden und aus einer ungeraden Anzahl von Summanden der Reihe $1, 2, 3, 4, \cdots$ mit Wiederholung ist gleich dem Ueberschusse der Darstellungsarten derselben Zahl aus einer geraden und aus einer ungeraden Anzahl von Summanden der Reihe $1, 3, 5, 7, \cdots$ ohne Wiederholungen." Bedenkt man aber, dass n, je nachdem es gerade (oder ungerade) ist, nur durch eine gerade (ungerade) Anzahl von Summanden der Reihe $1, 3, 5, 7, \cdots$ ohne Wiederholungen genommen, dargestellt werden kann, so vereinfacht sich der Satz. Wir können ihn für unsere Zwecke am geeignetesten so ausdrücken: *Der Ueberschuss der Anzahl aller Typen gerader Substitutionen von n Elementen über die Anzahl aller Typen ungerader Substitutionen von n Elementen ist gleich der Anzahl der Darstellungen von n durch Summanden der Reihe* $1, 3, 5, 7, \cdots$ *ohne Wiederholung.*

Jede dieser letzten Zerlegungen giebt Veranlassung zur Bildung einer der oben betrachteten Substitutionen, deren f gleich Null ist. (Da diesen Substitutionen Punktdiagramme zugehören, welche zur Diagonale symmetrisch liegen, so wollen wir die Substitutionen selbst *symmetrische* nennen.) Ist nämlich z. B. $17 = 9 + 5 + 3$, so zerlegen wir die 9, die 5 und die 3 Punkte in gleichschenklige Haken und schieben diese in einander

$$\begin{array}{lllllllll}
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & & & \\
\bullet & & & & & & & & \\
\bullet & & (9) & & & & & & \\
\bullet & & & & & & & & \\
\bullet & & & & & & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lll}
\bullet & \bullet & \bullet \\
\bullet & (5) & \\
\bullet & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ll}
\bullet & \bullet \\
\bullet & (3)
\end{array}
\qquad \text{und} \qquad
\begin{array}{lllll}
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet; \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \\
\bullet & \bullet & \bullet & & \\
\bullet & & & &
\end{array}$$

so entsteht das Diagramm einer symmetrischen Substitution. Offenbar ist es im allgemeinen Falle genau eben so.

Danach können wir sagen: „*Der Ueberschuss der Anzahl aller Typen gerader Substitutionen von n Elementen über die Anzahl aller Typen ungerader Substitutionen von n Elementen ist gleich der Anzahl der symmetrischen Substitutionen dieser Elemente.*“

Nun ist oben gezeigt worden, dass die nicht verschwindenden Werthe von $\varrho_\alpha = f_\alpha^2$ als Wurzeln von (13ᵃ) und (14ᵃ) mit einander auch ihrer Multiplicität nach übereinstimmend vorkommen. Es giebt also *gleich viele* gerade und ungerade Substitutionstypen von n Elementen, deren $\varrho_\alpha \neq 0$ sind. Nach dem eben hergeleiteten Satze lässt sich also schliessen, dass *alle* Wurzeln $\varrho_\alpha = 0$ der Gleichung angehören, welche den [9] zugeordnet ist; denn ihre Anzahl ist ja dem obigen Ueberschusse gleich.

Demnach erkennt man: *Die Gleichungen*

$$\begin{vmatrix} A_{11} - \varrho, & A_{21} & , \cdots \\ A_{12} & , A_{22} - \varrho, & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} B_{11} - \varrho, & B_{21} & , \cdots \\ B_{12} & , B_{22} - \varrho, & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} = 0,$$

sind bis auf einen Factor ϱ^s mit einander identisch; s bedeutet dabei die Anzahl der symmetrischen Substitutionen von n Elementen.

Giessen, den 26. April 1902.

Lineare Scharen geodätischer Linien.

Von

PAUL STÄCKEL in Kiel.

Untersuchungen über *Mechanische Beziehungen bei der Flächendeformation* haben Herrn Finsterwalder zu dem schönen Satze geführt, dass eine jede krumme Fläche, bei der es vier lineare Scharen geodätischer Linien giebt, d. h. bei der durch vier wesentlich verschiedene lineare Gleichungen zwischen den Gauss'schen Coordinaten u, v:

$$a_\varkappa u + b_\varkappa v = \text{const.} \qquad (\varkappa = 1, 2, 3, 4)$$

je ∞^1 geodätische Linien dargestellt werden, constantes Krümmungsmass besitzt*). Der Beweis beruht darauf, dass die Differentialgleichung der geodätischen Linien:

$$du\,d^2v - dv\,d^2u + A\,du^3 + B\,du^2\,dv + C\,du\,dv^2 + D\,dv^3 = 0$$

mit den vier Gleichungen

$$a_\varkappa\,du + b_\varkappa\,dv = 0$$

nur dann verträglich ist, wenn man $A = B = C = D = 0$ hat, und dass die Differentialgleichung der geodätischen Linien von der Form

$$du\,d^2v - dv\,d^2u = 0$$

nach Beltrami für die Flächen von constantem Krümmungsmasse charakteristisch ist.

Da man auf jeder krummen Fläche zwei lineare Scharen geodätischer Linien $u = \text{const.}$ und $v = \text{const.}$ erhält, indem man als Coordinatenlinien irgend zwei Scharen von ∞^1 geodätischen Linien wählt, so entsteht die Frage, ob es Flächen giebt, bei denen drei, aber auch nur drei solcher Scharen vorhanden sind. Es liess sich nun leicht zeigen, dass die Rotationsflächen von variablem Krümmungsmass sowie die darauf abwickelbaren Flächen die verlangte Eigenschaft besitzen (und sogar auf unendlich viele

*) Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. Bd. VI. Leipzig 1899. S. 50—51.

Arten), Herr Finsterwalder sprach aber die Vermuthung aus, dass noch andere Flächen der angegebenen Art existiren. Diese Vermuthung lässt sich als richtig erweisen.

Unbeschadet der Allgemeinheit kann man die drei linearen Scharen durch die Gleichungen

$$(1)\quad u = \text{const.},\qquad (2)\quad v = \text{const.},\qquad (3)\quad u - v = \text{const.}$$

darstellen, und gelangt dann zu den Bedingungsgleichungen

$$A = 0,\qquad D = 0,\qquad B - C = 0,$$

oder, wenn man das Linienelement ds durch die Gleichung

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

erklärt, zu den Gleichungen:

$$\text{(I)}\quad 2E\frac{\partial F}{\partial u} - E\frac{\partial E}{\partial v} - F\frac{\partial E}{\partial u} = 0,$$

$$\text{(II)}\quad 2G\frac{\partial F}{\partial v} - G\frac{\partial G}{\partial u} - F\frac{\partial G}{\partial v} = 0,$$

$$\text{(III)}\quad E\left(2\frac{\partial G}{\partial u} + \frac{\partial G}{\partial v}\right) - F\left(3\frac{\partial E}{\partial v} - 2\frac{\partial F}{\partial u} + 2\frac{\partial F}{\partial v} - 3\frac{\partial G}{\partial u}\right) - G\left(\frac{\partial E}{\partial u} + 2\frac{\partial E}{\partial v}\right) = 0.$$

Es ist also zu untersuchen, ob diese Gleichungen für E, F, G sich erfüllen lassen, ohne dass das zugehörige ds einer Rotationsfläche angehört, d. h. ohne dass die Beltrami'schen Differentialparameter des Krümmungsmasses K:

$$\Delta(K) = \frac{1}{EG - F^2}\left\{E\left(\frac{\partial K}{\partial v}\right)^2 - 2F\frac{\partial K}{\partial v}\frac{\partial K}{\partial u} + G\left(\frac{\partial K}{\partial u}\right)^2\right\}$$

und

$$\Delta_2(K) = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G\frac{\partial K}{\partial u} - F\frac{\partial K}{\partial v}}{\sqrt{EG - F^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E\frac{\partial K}{\partial v} - F\frac{\partial K}{\partial u}}{\sqrt{EG - F^2}}\right)\right\}$$

Functionen von K allein sind. Augenscheinlich genügt es ein System von Fundamentalgrössen E, F, G anzugeben, für das die Gleichungen (I), (II), (III) erfüllt sind, während $\Delta(K)$ und $\Delta_2(K)$ nicht gleichzeitig Functionen von K allein sind. Das lässt sich folgendermassen erreichen.

Die Gleichung (II) wird durch

$$G = 0$$

befriedigt. Da nun die Gleichung (I) durch die Substitution:

$$E = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2,\quad F = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v}$$

in eine Identität verwandelt wird, so existiren drei lineare Scharen geodätischer Linien, sobald die Function $\varphi(u, v)$ der aus der Gleichung (III) hervorgehenden partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} + 2\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} = 0$$

genügt. Es liegt nahe, den Ansatz

$$\varphi = \alpha u^2 + 2\beta uv + \gamma v^2$$

zu machen, wo die constanten Coefficienten α, β, γ zur Verfügung stehen, und man findet dann ohne Mühe, dass

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1}{2}, \quad \gamma = -1$$

zu nehmen ist, sodass sich

$$\text{(A)} \qquad ds^2 = (u+v)^2 du^2 + 2(u+v)(u-2v)\,du\,dv$$

ergiebt. Weiter erhält man

$$K = \frac{1}{(u+v)^3(u-2v)}$$

und, indem zur Abkürzung

$$u + v = p, \qquad u - 2v = q$$

gesetzt wird:

$$\Delta(K) = \frac{-4p^3 + 8p^2q - 15pq^2 + 18q^3}{p^9q^6},$$

sodass $\Delta(K)$ sicher keine Function von K allein ist.

Obgleich damit die Richtigkeit der Vermuthung von Herrn Finsterwalder bewiesen ist, so hat das durch die Gleichung (A) definirte Linienelement ds doch den wesentlichen Mangel, dass dazu nur imaginäre Flächen gehören. Wenn man reelle Flächen der verlangten Art erhalten will, so scheint sich vor allem der Ausdruck von ds^2 für die geradlinigen Flächen:

$$x = a_1 u + b_1, \qquad y = a_2 u + b_2, \qquad z = a_3 u + b_3$$

darzubieten, bei denen man ja eine Schar geodätischer Linien, $v =$ const., von vornherein kennt. Die genauere Discussion zeigt jedoch, dass der Ausdruck von ds^2:

$$ds^2 = \mathfrak{A} du^2 + 2(\mathfrak{B}u + \mathfrak{C})\,du\,dv + (\mathfrak{D}u^2 + 2\mathfrak{E}u + \mathfrak{F})\,dv^2,$$

wo $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \mathfrak{E}, \mathfrak{F}$ Functionen von v allein sind, nur dann die drei linearen Scharen geodätischer Linien $u =$ const., $v =$ const., $u - v =$ const. liefert, wenn die zugehörigen Flächen auf Rotationsflächen abwickelbar sind. Ja man erhält sogar nicht einmal alle diese Flächen, denn es fehlt z. B. das einschalige Rotationshyperboloid:

$$x^2 + y^2 - \frac{z^2}{\alpha^2} = 1,$$

bei dem man die Darstellung

$$x = \cos v + \sin v \cdot \operatorname{tg}\left(v - \frac{1}{2} u\right),$$
$$y = \sin v - \cos v \cdot \operatorname{tg}\left(v - \frac{1}{2} u\right),$$
$$z = \alpha \cdot \operatorname{tg}\left(v - \frac{1}{2} u\right)$$

zu Grunde legen muss, damit die Meridiane und die beiden Scharen von erzeugenden Geraden die drei linearen Scharen geodätischer Linien für die Coordinaten u, v werden.

Um reelle Flächen zu erhalten, die nicht auf Rotationsflächen abwickelbar sind und doch drei lineare Scharen geodätischer Linien besitzen, muss man daher eine allgemeinere Form für ds^2 wählen, und da scheint es im Hinblick auf die Gestalt des Ausdruckes (A) angezeigt, alle drei Fundamentalgrössen E, F, G als ganze rationale Functionen zweiten Grades von u anzunehmen, deren Coefficienten noch zur Verfügung stehende Functionen von v sind, also zu setzen:

$$E = A_0(v)\,u^2 + B_0(v)\,u + C_0(v),$$
$$F = A_1(v)\,u^2 + B_1(v)\,u + C_1(v),$$
$$G = A_2(v)\,u^2 + B_2(v)\,u + C_2(v).$$

Man gelangt so zu Flächen, die als Verallgemeinerungen der geradlinigen Flächen angesehen werden können. Zu beachten ist auch, dass wie bei diesen Flächen der Ausdruck für ds^2 bei einer Transformation

$$u_1 = au + \varphi(v), \qquad v_1 = bv + c,$$

wo a, b, c Constanten bedeuten, dieselbe Gestalt behält.

Setzt man die Ausdrücke für E, F, G in die Gleichungen (I), (II), (III) ein, so werden die linken Seiten ganze rationale Functionen vierten Grades von u, deren Coefficienten für sich verschwinden müssen, und man erhält daher für die neun Functionen $A_0, \cdots, C_2$ folgende fünfzehn Gleichungen, in denen die Striche Ableitungen nach v bedeuten:

$$(\mathrm{I}) \begin{cases} (1) \quad A_0 A_0' = 0, \\ (2) \quad A_0 A_1 - A_0 B_0' - A_0' B_0 = 0, \\ (3) \quad -A_0 C_0' + 6 A_1 B_0 - 4 B_0 B_0' - A_0' C_0 = 0, \\ (4) \quad 2 B_0 B_1 - B_0 C_0' + 2 A_1 C_0 - B_0' C_0 - A_0 C_1 = 0, \\ (5) \quad 4 B_1 C_0 - C_0 C_0' - 2 B_0 C_1 = 0; \end{cases}$$

$$(\mathrm{II}) \begin{cases} (1) \quad 2 A_1' A_2 - A_1 A_2' = 0, \\ (2) \quad 2 A_2 B_1' - A_2^2 + 2 A_1' B_2 - A_1 B_2' - A_2' B_1 = 0, \\ (3) \quad 2 A_2 C_1' - 6 A_2 B_2 + 8 B_1' B_2 + 2 A_1' C_2 - A_1 C_2' - 4 B_1 B_2' - A_2' C_1 = 0, \\ (4) \quad 2 B_2 C_1' - 2 B_2^2 + 2 B_1' C_2 - A_2 C_2 - B_1 C_2' - B_2' C_1 = 0, \\ (5) \quad 2 C_1' C_2 - 2 B_2 C_2 - C_1 C_2' = 0; \end{cases}$$

$$
(\mathrm{III})\begin{cases}
(1)\quad A_0A_2'-3A_0'A_1-2A_1A_1'+2A_0A_2=0,\\
(2)\quad A_0A_2+A_0B_2'+A_2'B_0+2A_1^2-3A_1B_0'-2A_1B_1'+3A_1A_2\\
\qquad -3A_0'B_1-2A_1'B_1-2A_2B_0'-2A_0'B_2=0,\\
(3)\ 6A_2B_0+A_2'C_0+4B_0B_2'+A_0C_2'+12A_1B_1-3A_0'C_1-12B_0'B_1\\
\qquad -3A_1C_0'-2A_1'C_1-8B_1B_1'-2A_1C_1'+12A_2B_1+6A_1B_2\\
\qquad -2A_0'C_2-8B_0'B_2-2A_2C_0'=0,\\
(4)\ 2A_2C_0+2B_0B_2+B_2'C_0+B_0C_2'+2A_1C_1+4B_1^2-3B_0'C_1-3B_1C_0'\\
\qquad -2B_1'C_1-2B_1C_1'+3A_2C_1+6B_1B_2-A_0C_2-2B_0'C_2\\
\qquad -2B_2C_0'=0,\\
(5)\ 4B_2C_0+C_0C_2'+4B_1C_1-3C_0'C_1-2C_1C_1'+6B_2C_1-2B_0C_2\\
\qquad -2C_0'C_2=0.
\end{cases}
$$

Da der Ausdruck (A) zeigt, dass man diese Gleichungen durch

$$
\begin{array}{lll}
A_0=1, & B_0=2v, & C_0=v^2,\\
A_1=1, & B_1=-v, & C_1=-2v^2,\\
A_2=0, & B_2=0, & C_2=0
\end{array}
$$

erfüllen kann, so schien der Versuch einer Discussion nicht aussichtslos. Einer meiner Zuhörer, Herr Fritz Ahl, hat diese übernommen und mit Ausdauer und Geschick durchgeführt*). Da die Anzahl der zu unterscheidenden Fälle und Unterfälle sonst ins Unübersehbare gewachsen wäre, hat er in dem Abschnitte II seiner Abhandlung einige einfache Annahmen über E, F, G betrachtet, die auf Rotationsflächen führen und daher bei der Discussion der Gleichungen (I) (1) bis (III) (5) sofort bei Seite gelassen werden dürfen. Es sind das die Annahmen:

1) $E=0,\ G=0$,

2) $F=0$,

3) $F=\text{const.}\neq 0$,

4) $E=\text{const.}\neq 0$,

$\left.\begin{array}{l}5)\ E=\lambda\cdot F^2\\ 6)\ F=\lambda\cdot E\end{array}\right\}$, wo λ eine Constante bedeutet, die von Null verschieden ist.

Auf diese Weise hat er elf Systeme von Fundamentalgrössen E, F, G gefunden, die der Aufgabe genügen; bei neun von ihnen sind die E, F, G homogene Functionen zweiten Grades von u und v. Beachtet man nun, dass ein Ausdruck ds^2, für den $u=\text{const.}$, $v=\text{const.}$, $u-v=\text{const.}$ Gleichungen geodätischer Linien sind, durch die Substitutionen

*) *Untersuchungen über geodätische Linien.* Inaugural-Dissertation. Kiel 1901. 50 S. 8°.

(S_1) $u = v_1, \qquad v = u_1,$

(S_2) $u = v_1, \qquad v = -u_1 + v_1,$

(S_3) $u = u_1 - v_1, \qquad v = -v_1,$

in einen neuen Ausdruck verwandelt wird, bei dem die Gleichungen $u_1 = \text{const.}$, $v_1 = \text{const.}$, $u_1 - v_1 = \text{const.}$ ebenfalls geodätische Linien darstellen, so reduciren sich die gefundenen elf Linienelemente auf nur drei wesentlich verschiedene, nämlich:

$$\text{(A)} \quad ds^2 = (u+v)^2 du^2 + 2(u+v)(u-2v)\,du\,dv,$$

$$\text{(B)} \quad ds^2 = -2\frac{u-2v}{v^3}\,du\,dv + \frac{u(u-2v)}{v^4}\,dv^2,$$

$$\text{(C)} \quad ds^2 = (2u-v)^2 du^2 - 2(2u-v)(u-2v)\,du\,dv + 3u(u-2v)\,dv^2.$$

Der Ausdruck (A) ist der früher gefundene. Der Ausdruck (B) gehört zu Flächen, die sich auf Rotationsflächen abwickeln lassen, indem K, $\Delta(K)$ und $\Delta_2(K)$ Functionen von $\frac{u}{v}$ allein werden; man kann auch

$$u = pe^q, \qquad v = e^q$$

setzen, wodurch

$$ds^2 = -2(p-2)\,dp\,dq - p(p-2)\,dq^2$$

wird. Der Ausdruck (C) endlich ergiebt, wenn zur Abkürzung

$$u - 2v = p, \qquad u + v = q$$

gesetzt wird,

$$K = \frac{1}{4p^2q^2},$$

und

$$\Delta(K) = \frac{2p^2 - 3pq + 2q^2}{4p^7q^7},$$

sodass $\Delta(K)$ keine Function von K allein ist. *Der Ausdruck* (C) *gehört mithin zu reellen Flächen, die nicht auf Rotationsflächen abwickelbar sind und doch drei lineare Scharen geodätischer Linien besitzen.* Es sind nach der Bezeichnung von Sophus Lie *Spiralflächen;* ihr Linienelement hat die hübsche Eigenschaft, durch die Transformation (S_3) in sich selbst übergeführt zu werden.

Wenn hiernach die Rotationsflächen durch die Eigenschaft drei lineare Scharen geodätischer Linien zu besitzen nicht charakterisirt werden können, so ist es doch bemerkenswerth, dass man bei ihnen Tripel von linearen Scharen *auf unendlich viele Arten* bilden kann, und es dürfte sich daher der Mühe lohnen, zu untersuchen, bei welchen Linienelementen ds man Tripel von linearen Scharen auf mehr als eine Art auswählen kann.

Kiel, im Januar 1902.

Ueber endlichgleiche Polyeder.

Von

K. Th. Vahlen in Königsberg.

Die von Herrn Hilbert*) in Erinnerung gebrachte Gauss'sche Frage nach der Zurückführbarkeit der Theorie des Polyeder-Inhalts auf die Theorie der Congruenz, ist jüngst von Herrn Dehn**) in negativem Sinne beantwortet worden. Die hierfür entscheidende Relation hatte ich zur Zeit des Erscheinens der ersten Arbeit des Herrn Dehn bereits mit den elementarsten Mitteln folgendermassen hergeleitet.

Es seien Π und Π' zwei „zerlegungsgleiche" Polyeder, die also in Aggregate $\Pi = \sum_i P_i$, $\Pi' = \sum_i P_i'$ einer endlichen Anzahl congruenter Polyeder $P_i \cong P_i'$ zerfallen. Auf der Oberfläche jedes Theilpolyeders P_i bilden die auf ihr liegenden Kanten der im Aggregat Π sowohl, wie in Π' an P_i anstossenden Polyeder ein Netz: man zerlege jedes P_i derartig in Theilpolyeder $P_i = \Sigma p_i$, dass die an der Oberfläche des P_i liegenden Kanten der p_i jenes selbe Netz bilden, und betrachte die Zerlegungen $\Pi = \Sigma\Sigma p_i$, $\Pi' = \Sigma\Sigma p_i'$, $p_i \cong p_i'$. Die Summe aller Flächenwinkel der p_i ist gleich der Summe aller Flächenwinkel der p_i'. In dieser Identität lassen wir zunächst beiderseits diejenigen Flächenwinkel fort, deren Scheitelkante im Innern eines Polyeders P_i liegt. Von den übrigen ergänzen sich diejenigen Flächenwinkel, die an einer Scheitelkante im Innern von Π oder Π' liegen, zu 2π; diejenigen an einer Scheitelkante auf der Oberfläche von Π oder Π', die aber nicht in einer Kante von Π oder Π' liegt, zu π; endlich diejenigen, deren Scheitelkante in der Kante des Flächenwinkels α (resp. α') von Π (resp. Π') liegt, zu α (resp. α'). Liegen also μ (resp. μ') Kanten der Theilpolyeder $p(p')$ auf dieser Kante, so reducirt sich obige Identität auf die Congruenz

$$\sum_\alpha \mu\alpha \equiv \Sigma\mu'\alpha' \pmod{\pi},$$

die Summen resp. bezogen auf alle Flächenwinkel α von Π, und α' von Π'.

Diese Herleitung bezieht sich auf beliebige, auch nicht-convexe Polyeder Π, Π', P_i. Doch kann man auch zunächst jedes nicht-convexe P_i durch Verlängerung seiner Flächen in convexe zerlegen. Die Zerlegung

*) Mathematische Probleme, Göttinger Nachr. 1901.

**) Gött. Nachr. 1901 und Math. Ann. Bd. 55, S. 465.

eines convexen P_i in Σp_i erfolgt dann am einfachsten, indem man einen beliebigen innern Punkt des P_i mit allen Punkten des bezeichneten Netzes durch Grade verbindet.

Aber in der obigen allgemeineren Fassung ist die Herleitung unmittelbar auf den allgemeinsten Fall der Endlichgleichheit übertragbar.

Unter einem „allgemeinen" Polyeder ist ein Aggregat von Polyedern zu verstehen, bei deren jedem auch mehrfache Raumbedeckungen, positive wie negative, vorkommen. Ein allgemeines Polyeder Π besteht demnach aus „gewöhnlichen" d. h. einen Raumtheil nur einfach und positiv bedeckenden Polyedern ϖ, deren jedes in bestimmter Vielfachheit, positiv oder negativ, auftritt.

Zwei allgemeine Polyeder Π und Π' heissen „endlichgleich", wenn für zwei ungleiche ganze Zahlen $\varkappa$ und $\varkappa'$ zwei Aggregate $\varkappa\Pi + \varkappa'\Pi'$ und $\varkappa'\Pi + \varkappa\Pi'$ existiren, welche sich in Aggregate $\Sigma k_i P_i$, $\Sigma k_i P_i'$ congruenter gewöhnlicher Theilpolyeder $P_i \cong P_i'$ zerlegen lassen, deren jedes in bestimmter Vielfachheit k_i, positiv oder negativ, zu zählen ist. Das Netz auf der Oberfläche jedes P_i aus den auf ihr liegenden Kanten der andern Theilpolyeder P ist trotz des eventuellen gegenseitigen Durchdringens derselben unzweideutig bestimmt. Die Zerlegung jedes P_i in Σp_i wird wie oben vollzogen. In den Aggregaten $\varkappa\Pi+\varkappa'\Pi'=\Sigma k_i p_i$, $\varkappa'\Pi+\varkappa\Pi'=\Sigma k_i p_i'$ kommt jedes Theilpolyeder p_i in derselben Vielfachheit, wie sein Stammpolyeder P_i vor. Behandelt man wie oben die Summe aller Flächenwinkel p_i, deren jeder resp. k_i-fach zu zählen ist, so erhält man die Relation $\Sigma m\alpha + \Sigma m'\alpha' \equiv \Sigma n\alpha + \Sigma n'\alpha' \pmod{\pi}$, also $\sum_\alpha \mu\alpha \equiv \sum_\alpha \mu'\alpha' \pmod{\pi}$, wo z. B. m das Aggregat der Anzahlen von Kanten der p_i ist, in welche die in mehreren Theilpolyedern ϖ von $\varkappa\Pi+\varkappa'\Pi'$ vorkommende Scheitelkante von α zerfällt.

Die einfachsten Beispiele für das Nichterfülltsein der Relation liefern die regulären Körper. Da nämlich die Gleichungen

$$x^n - nx^{n-2} + \frac{n(n-3)}{2}x^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{6}x^{n-6} - \cdots - 2 = 0 \quad (n=3,4,5,\cdots)$$

keine andern rationalen Wurzeln $x = 2\cos\frac{k\pi}{n}$ als ganzzahlige, also nur ± 1, ± 2, haben können, so sind die Winkel der regulären Körper: $\arccos \pm\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{9}$, $\frac{1}{2}\arccos\frac{-3}{5}$ keine rationalen Theile von π, also kein regulärer Körper ausser dem Würfel einem rechtwinkligen Parallelpiped endlichgleich. Aehnliches gilt für die Aggregate mehrerer regulärer Körper.

Königsberg i. Pr., 4. Febr. 1902.

Fischer, Dr. Karl T., der naturwissenschaftliche Unterricht in England, insbesondere in Physik und Chemie. Mit einer Übersicht der englischen Unterrichtslitteratur zur Physik und Chemie und 18 Abbildungen im Text und auf 8 Tafeln. [VIII u. 94 S.] gr. 8. 1902. In Leinw. geb. n. ℳ 3.60.

——— neuere Versuche zur Mechanik der festen und flüssigen Körper. Mit einem Anhange über das absolute Maasssystem. Ein Beitrag zur Methodik des physikalischen Unterrichts. Mit 55 Fig. im Text. [VI u. 68 S.] gr. 8. 1902. geb. n. ℳ 2.—

Gleichen, Dr. A., Oberlehrer am Königl. Kaiser Wilhelms-Realgymnasium zu Berlin, Lehrbuch der geometrischen Optik. Aus Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften mit Einschlufs ihrer Anwendungen. Band VIII. Mit 251 Fig. im Text. [XIV u. 511 S.] gr. 8. 1902. geb. n. ℳ 20.—

Hammer, Dr. E., Sechsstellige Tafel der Werte $\overset{10}{\log} \frac{1+x}{1-x}$. Für jeden Wert des Arguments log x von 3.0—10 bis 9.99000—10 (vom Argument 9.99000—10 an bis 9.999700—10 sind die log $\frac{1+x}{1-x}$ nur noch fünfstellig angegeben, von dort an vierstellig). [IV u. 73 S.] gr. 8. 1902. geb. n. ℳ 3.60.

Hensel, K., und G. Landsberg, Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln und ihre Anwendung auf algebraische Kurven und Abelsche Integrale. Mit zahlr. Textfig. [XVI u. 708 S.] gr. 8. 1902. In Leinwand geb. n. ℳ 28.—

Klein, F., Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, eine Revision der Principien. Vorlesung, gehalten während des Sommersemesters 1901. Ausgearbeitet von Conrad Müller. [VIII u. 468 S.] gr. 8. 1902. geh. n. ℳ 10.—

Kübler, Baurat J., in Esslingen, die Theorie der Knick-Elastizität und -Festigkeit. Mit 5 Figuren und einer zweifarbigen Tafel. [29 S.] gr. 8. 1902. geh. n. ℳ 1.50.

Loria, Dr. Gino, ord. Professor der Geometrie an der Universität Genua, spezielle algebraische und transscendente ebene Kurven. Theorie und Geschichte. Autorisierte, nach dem italienischen Manuskript bearbeitete deutsche Ausgabe von Fritz Schütte, Oberl. am Kgl. Gymnasium zu Neuwied. Erste Hälfte. Mit 122 Figuren auf 13 lithogr. Tafeln. A. u. d. T.: B. G. Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der Mathematischen Wissenschaften mit Einschlufs ihrer Anwendungen. Band V, 1. Heft. [416 S.] gr. 8. 1902. geh. n. ℳ 16.—

Musil, A., o. ö. Professor an der k. k. deutschen technischen Hochschule in Brünn, Grundlagen der Theorie und des Baues der Wärmekraftmaschinen. Zugleich autorisierte, erweiterte deutsche Ausgabe des Werkes The steam-engine and other heat-engines von J. A. Ewing, Prof. an der Universität in Cambridge. Mit 302 Abbildungen im Text. [X u. 794 S.] gr. 8. 1902. In Leinw. geb. n. ℳ 20.—

Pascal, Ernst, o. Prof. a. d. Universität zu Paris, Repertorium der höheren Mathematik (Definitionen, Formeln, Theoreme, Litteratur). Autorisierte deutsche Ausgabe nach einer neuen Bearbeitung des Originals nach A. Schepp, Oberleutnant a. D. zu Wiesbaden. In 2 Teilen: Analysis und Geometrie. gr. 8. In Leinwand geb. I. Teil: Die Analysis. [XII u. 638 S.] 1900. n. ℳ 10.— II. Teil: Die Geometrie. [X u. 712 S.] 1902. n. ℳ 12.—

Sapolski, Dr. L., über die Theorie der relativ Abelschen kubischen Zahlkörper. 2 Teile. [XII u. 482 S.] gr. 8. 1902. geh. n. ℳ 6.—

INHALT.

*) Druckfehler.

Durch ein Versehen in der Paginierung dieses Heftes folgt auf Seite 280 gleich Seite 381 u. ff. Es fehlen daher im gegenwärtigen Bande die zwischenliegenden Seitenzahlen 281—380.

Wir ersuchen unsere geehrten Herren Mitarbeiter, etwaige, den Abhandlungen beizufügende Figuren — gleichviel ob dieselben im Texte selbst oder auf besonderen Tafeln veröffentlicht werden sollen — im Interesse einer raschen und exacten Ausführung stets auf besonderen Blättern, wenn möglich in der gewünschten Grösse und in thunlichst präciser Zeichnung dem Manuscripte beilegen zu wollen. Ausserdem wird um möglichst genaue Angabe der Adresse gebeten.

Die Redaction.

☞ **Jeder Band der Annalen besteht aus 4 Heften und umfasst ca. 36 Druckbogen. Um jedoch in jedem Heft nur abgeschlossene Artikel zu geben, werden die einzelnen Hefte mitunter von ungleicher Stärke sein.**
Der Preis für den Band von 4 Heften beträgt 20 Mark; jährlich erscheinen etwa 4—6 Hefte. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

Verantwortliche Redaction: **F. Klein**, Göttingen, Wilh.-Weber-Str. 3, **W. v. Dyck**, München, Hildegardstr. $1\frac{1}{2}$, **David Hilbert**, Göttingen, Wilh.-Weber-Str. 29.

Hierzu Beilagen von **B. G. Teubner** in **Leipzig**.

Druck und Verlag von B. G. Teubner in Leipzig, Poststrasse 3.

MATHEMATISCHE ANNALEN.

BEGRÜNDET 1868 DURCH

ALFRED CLEBSCH UND CARL NEUMANN.

Unter Mitwirkung der Herren

PAUL GORDAN, ADOLPH MAYER, CARL NEUMANN, MAX NOETHER,
KARL VONDERMÜHLL, HEINRICH WEBER

gegenwärtig herausgegeben

von

Felix Klein
in Göttingen

Walther v. Dyck
in München

David Hilbert
in Göttingen.

56. Band. 4. Heft.

Ausgegeben am 15. Januar.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1903.

Über Modulfunktionen von mehreren Veränderlichen*).

Von

Otto Blumenthal in Göttingen.

(Erste Hälfte.)

Einleitung.

Wenn bisher neben der weit ausgedehnten und hoch entwickelten Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen die Funktionen mehrerer Variabelen auffallend zurücktraten, so liegt dies wohl wesentlich an dem Fehlen geeigneter interessanter Beispiele, an welche die allgemeine Theorie anknüpfen konnte. In der Tat standen lange Zeit die *Abelschen Funktionen* ziemlich isoliert**), in den letzten Jahren erst haben *Picard* und *Simart****) einerseits und *Hensel*†) andererseits eine systematische Untersuchung der *algebraischen Funktionen* von zwei Veränderlichen begonnen. Gleichzeitig nimmt *Cousin*††) zum ersten Male wieder seit *Weierstraß*†††) die allgemeine Theorie der eindeutigen Funktionen mehrerer Variabelen in Angriff. — Die vorliegende Arbeit stellt den Abelschen und algebraischen Funktionen eine neue Funktionenklasse an die Seite, deren Untersuchung sich in ausgedehntem Maße durchführen läßt, und die daher bei dem Ausbau der allgemeinen Theorie gute Dienste wird leisten können. Die Funktionenklasse ist außerdem dadurch ausgezeichnet, daß sie in einem engen Zusammenhang mit den Abelschen Funktionen steht.

*) Diese Arbeit ist vom Verfasser im Juli 1901 der Göttinger philosophischen Fakultät als Habilitationsschrift vorgelegt worden.

**) Betr. der Picardschen fonctions hyperfuchsiennes et hyperabéliennes siehe unten.

***) Fonctions algébriques de deux variables. (Paris, Gauthier-Villars, 1897—1901.)

†) Acta Mathematica 23 (1900).

††) Acta Mathematica 19 (1895).

†††) Hauptsächlich: Abhandlungen aus der Funktionenlehre, pag. 105—164, Crelles Journal 89 (1880); Werke II, 135—188 und 125—133.

In den Jahren 1893—94 beschäftigte sich Herr *Hilbert* mit einer *Verallgemeinerung der Modulfunktionen* auf mehrere unabhängige Variabele. Es handelt sich um folgendes Problem:

Die Modulgruppe ist die Gruppe der linearen Substitutionen mit ganzen rationalen Koeffizienten und der Determinante 1. Sie „gehört" also zu dem Körper R der rationalen Zahlen. Legt man nun an Stelle des Körpers R einen beliebigen Zahlkörper k vom n^{ten} Grade zu Grunde, der mit seinen sämtlichen Konjugierten reell ist, so gelangt man zu einer analogen Gruppe in n Variabelen. Man ordnet jedem der konjugierten Körper $k^{(i)}$ eine komplexe Variable $x^{(i)}$ zu und betrachtet die Gruppe H der simultanen Substitutionen

$$y = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, \ldots, y^{(n-1)} = \frac{\alpha^{(n-1)} x^{(n-1)} + \beta^{(n-1)}}{\gamma^{(n-1)} x^{(n-1)} + \delta^{(n-1)}}.$$

Dabei sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze Zahlen des Körpers, deren Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma = \varepsilon$ eine total (d. h. mit allen ihren Konjugierten) positive Einheit des Körpers ist.

Die Gruppe H hat ganz analoge Eigenschaften wie die gewöhnliche Modulgruppe.

1) Sie transformiert den $\frac{1}{2^n}$-Teilraum, in welchem die Koordinaten $x, x', \cdots, x^{(n-1)}$ positive imaginäre Bestandteile haben, in sich, ist in diesem Teilraum „eigentlich diskontinuierlich" und besitzt einen *Fundamentalbereich* D.

2) Es lassen sich Funktionen konstruieren, welche sich zu den Substitutionen von H invariant verhalten, ebenso wie die Modulfunktionen zu der Modulgruppe. Mit anderen Worten: es gibt *Funktionen des Fundamentalbereichs* von H. Man gewinnt solche Funktionen als Quotienten von Reihen, welche den *Eisenstein*schen*) oder *Poincaré*schen**) in der Theorie der Modulfunktionen bezw. automorphen Funktionen analog sind. Die Reihen konvergieren unbedingt und gleichmäßig im Inneren des $\frac{1}{2^n}$-Teilraums und haben auf dem Rande eine natürliche Grenze.

3) Für $2n$-fach periodische Funktionen von n Veränderlichen hat *Weierstraß****) zwei *allgemeine Sätze* ausgesprochen:

I. Durch n von einander unabhängige $2n$-fach periodische Funktionen ist jede andere algebraisch ausdrückbar.

II. Durch $n+1$ geeignet gewählte $2n$-fach periodische Funktionen ist jede andere rational ausdrückbar.

---

*) Eisenstein, Werke, pg. 213 ff., s. a. Hurwitz, Math. Ann. 18 (1881), pg. 546.

**) Poincaré, Acta 1 (1882), pg. 207; 3 (1884), pg. 88.

***) Brief an Borchardt, Crelles Journal 89 (1880) und Werke II, pg. 125 ff.

Diese Sätze gelten auch für die Funktionen des Fundamentalbereichs D. Es lassen sich nun n von einander unabhängige Reihenquotienten konstruieren. Man kann also alle Funktionen des Fundamentalbereichs durch Reihenquotienten algebraisch und sogar — wie sich weiterhin ergibt — rational ausdrücken.

4) Die interessanteste Analogie mit den Modulfunktionen aber bezieht sich auf den Zusammenhang der neuen Funktionen mit dem *Transformationsproblem der ϑ-Funktionen* mehrerer Veränderlicher. Herr Hilbert zeigt hier, daß seine Funktionen bei diesem Problem eine ganz ähnliche Rolle spielen, wie die Modulfunktionen in Bezug auf die elliptischen Funktionen. Er leitet insbesondere eine Formel ab, aus der sich schließen läßt, daß man zu Funktionen des Fundamentalbereichs gelangen kann, indem man Quotienten von Theta-Nullwerten bildet.

Herr Hilbert hat mir diese Notizen zur Ausarbeitung freundlichst überlassen. Es ergaben sich hieraus für mich hauptsächlich drei Aufgaben. Während nämlich die Theorie der ϑ-Funktionen mit größerer Ausführlichkeit durchgeführt war, waren die übrigen Gedankengänge nur kurz und ohne Beweis angedeutet. Hier habe ich nun

1) die *Existenz eines Fundamentalbereichs* für die Gruppe H bewiesen und die tatsächliche, formelmäßige Aufstellung dieses Fundamentalbereichs allgemein so weit gefördert, daß die Detailarbeit in jedem speziellen Falle nur noch rein rechnerische Schwierigkeiten bietet. Der Fundamentalbereich ist einfach zusammenhängend*) und hat mit dem Rande des $\frac{1}{2^n}$-Teilraums, auf welchem die Gruppe nicht mehr eigentlich diskontinuierlich ist, nur *einen* Punkt im Unendlichen gemein.

2) Zur *Aufstellung von Funktionen* des Fundamentalbereichs verwandte ich eine von *Picard***) angegebene, sehr elegante und allgemein anwendbare Methode. Die Reihen, als deren Quotienten die Funktionen sich darstellen, sind genau nach dem gleichen Prinzip gebaut, wie die *Poincaré*schen fonctions thétafuchsiennes und thétakleinéennes***). Die Anwendung der Picardschen Methode auf die Funktionen der Gruppe H erfordert eine leichte Verallgemeinerung, welche schon von Picard†) selbst und später von Herrn *Bourget*††) gegeben war.

*) d. h. es existiert in dem Bereich keine Mannigfaltigkeit $(2n-1)^{\text{ter}}$ Dimension, die sich nicht in seinem Innern auf eine Mannigfaltigkeit geringerer Dimension zusammenziehen läßt.

**) Siehe besonders Acta 1, pg. 310 ff.

***) l. c. Acta 1, 3.

†) Société Mathématique de France 15 (1887).

††) Thèses de la Faculté des Sciences de Paris 1898; Annales de la Faculté de Toulouse 12 (1898).

Ein besonders wichtiger Punkt in der Theorie dieser Reihen und der daraus hervorgehenden Funktionen des Fundamentalbereichs ist ihr *Verhalten im Unendlichen* des Bereichs an der wesentlich singulären Stelle. Auch hier ließen sich die Vorarbeiten von Picard und Bourget durch leichte Übertragung benutzen. Es ergab sich das Resultat, daß die Reihen sich im Unendlichen entwickeln lassen nach aufsteigenden Potenzen gewisser Variabelen $U', U'', \cdots, U^{(n)}$, welche mit den $x, x', \cdots, x^{(n-1)}$ in einfachem Zusammenhange stehen. — Ich werde übrigens auf die Picard-Bourgetschen Arbeiten sofort noch zurückkommen.

3) Weierstraß ist durch Krankheit verhindert worden, seinen *Beweis für die Sätze I und II* zu publizieren, hat ihn auch, soviel ich in Erfahrung bringen konnte, in seinen Vorlesungen nicht vorgetragen*). Von neueren Autoren haben sich meines Wissens nur *Poincaré***) und *Wirtinger****) mit diesen Sätzen beschäftigt, doch kann ich beider Beweise nicht für einwandfrei halten. Ich bin auf diese Arbeiten und die Einwände, die ich gegen sie erhebe, in Abschnitt e und f des Teiles III ausführlicher eingegangen.

Aus diesen Gründen habe ich den Beweis auf dem von Weierstraß angedeuteten Wege nochmals aufgenommen und mich bemüht, die Durchführung exakt und befriedigend zu gestalten. Der Beweis wird wohl mit leicht erkennbaren Ausnahmen für alle Funktionen mit Fundamentalbereich gültig sein. Das Interesse der zu dem Beweise nötigen, ziemlich weit ausholenden Entwicklungen beschränkt sich übrigens nicht auf die Sätze, von denen sie ausgingen: sie sind besonders dadurch wertvoll, daß sie uns einen Einblick verschaffen in die spezifischen Schwierigkeiten, welche den Funktionen mehrerer Variabelen gegenüber denen einer einzigen Veränderlichen eigen sind.

Die Untersuchungen über den Zusammenhang der Funktionen des Bereichs mit den ϑ-Funktionen sind in die vorliegende Arbeit nicht aufgenommen worden, sie werden in einem folgenden zweiten Aufsatze Platz finden.

Von sonstigen Autoren scheint sich nur Herr *Picard* mit ähnlichen Entwicklungen beschäftigt zu haben†). Er gibt Verallgemeinerungen der Modulfunktionen auf zwei Variabele und hat dabei besonders den Zusammenhang mit dem Transformations-Problem der ϑ-Funktionen im Auge.

---

*) Er findet sich auch nicht in Werke IV, „Vorlesungen über die Theorie der Abelschen Transcendenten".

**) Comptes Rendus 124 (1897, I).

***) Wiener Akademie, Math.-Naturw. Klasse, 108 (1899).

†) Fonctions hyperfuchsiennes, Acta 1, 2, 5 (1882—1884); Fonctions hyperabéliennes, Journal de Liouville, IV, 1 (1885).

Seine „groupes hyperabéliens“ enthalten die Gruppe H in zwei Veränderlichen als Spezialfall. Picards Untersuchungen sind dann von Bourget in der genannten thèse genauer durchgeführt worden. Er wird dabei — immer im Falle von zwei Variabelen —, ausgehend von der Transformation der ϑ-Funktionen, auf eine Gruppe geführt, welche der unsrigen nahe steht (die Formeln unterscheiden sich nur in zwei Vorzeichen). Sein Ausgangspunkt beim Transformations-Problem aber ist von dem Hilbertschen gänzlich verschieden*).

Ich habe bereits hervorgehoben, daß ich mich in Teil II durchweg auf die Picardschen Methoden und Resultate stützen konnte. Dagegen erscheint mir die Methode der kontinuierlichen Reduktion einer quadratischen Form in mehreren Veränderlichen, welche Picard zur Aufstellung des Fundamentalbereichs empfiehlt, mühsamer als der direkte Weg, auf dem ich zu meinem Fundamentalbereich gelangt bin.

Die Arbeit zerfällt in drei Teile:

In Teil I wird die Gruppe H studiert und ihr Fundamentalbereich aufgestellt. Anhangsweise folgt ein gleichfalls in den Hilbertschen Notizen ausgesprochener zahlentheoretischer Satz über Einheiten, dessen Beweis sich mit Hilfe der in Teil I entwickelten Methoden besonders einfach ergibt.

In Teil II werden die Picardschen Reihen aufgestellt, ihre Konvergenz bewiesen und ihr Verhalten im Unendlichen untersucht.

Teil III schließlich bringt den Beweis der Weierstraßschen Sätze.

Die vorliegende erste Hälfte enthält die Teile I und II.

Herrn Hilbert möchte ich an dieser Stelle meinen herzlichen Dank aussprechen für das warme Interesse, mit dem er dem Fortgang meiner Arbeit folgte.

Teil I.

a. Definitionen. Einführung der Gruppe H.

Unseren Betrachtungen liegt zu Grunde ein algebraischer Zahlkörper k vom n^{ten} Grade, welcher mit seinen *sämtlichen Konjugierten reell* ist. Die Konjugierten werden mit $k', k'', \cdots, k^{(n-1)}$ bezeichnet. Eine Zahl μ des Körpers, welche mit ihren sämtlichen Konjugierten $\mu', \mu'', \cdots, \mu^{(n-1)}$ positiv ist, heißt *„total positiv“* **). Der Körper habe die *Basis* $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$; seine *Diskriminante* sei d. Da ferner in einem Körper, unter dessen

*) Eine genaue Ausarbeitung eines Spezialfalles von fonctions hyperfuchsiennes gibt Herr R. Alezais, Sur une classe de fonctions hyperfuchsiennes (Paris, Gauthier-Villars, 1901).

**) Hilbert, Göttinger Nachrichten 1898, pg. 374.

Konjugierten sich r_1 reelle Körper und r_2 imaginäre Körperpaare befinden, ein System von $r_1 + r_2 - 1$ fundamentalen Einheiten besteht, so hat der Körper k genau $n-1$ *Fundamentaleinheiten*, die mit $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_{n-1}$ bezeichnet werden.

Ist η eine nicht-quadratische Einheit, so wird die Gesamtheit der in der Form $\eta\varepsilon^2$ darstellbaren Einheiten zu einem *Einheitenverbande**) zusammengefaßt. Aus jedem Einheitenverband wählen wir einen Repräsentanten η aus; der „Hauptverband" hat den Repräsentanten 1. ϱ Einheitenverbände heißen dann „von einander unabhängig", wenn zwischen ihren Repräsentanten keine Gleichung der Form

$$\eta_1^{q_1}\,\eta_2^{q_2}\cdots\eta_\varrho^{q_\varrho} = \varepsilon^2 \qquad \left(q_i = \begin{Bmatrix}0\\1\end{Bmatrix}\right)$$

besteht.

Nach diesen Festsetzungen über den Körper k bezeichnen wir mit $x, x', \cdots, x^{(n-1)}$ n komplexe Variabele und setzen

$$x = x_1 + i\,x_2, \cdots, x^{(n-1)} = x_1^{(n-1)} + i\,x_2^{(n-1)}.$$

Die $x_1, x_2, \cdots, x_1^{(n-1)}, x_2^{(n-1)}$ deuten wir als Koordinaten in einem $(2n)$-dimensionalen Raume. Ein Punkt $(x, x', \cdots, x^{(n-1)})$ dieses Raumes wird zur Abkürzung mit $((x))$ bezeichnet werden. Der Raumteil, in welchem sämtliche imaginären Bestandteile $x_2, x_2', \cdots, x_2^{(n-1)}$ positiv sind, bildet einen $\frac{1}{2^n}$-Teilraum; wir werden ihn im folgenden immer besonders auszeichnen und durch den Buchstaben T abkürzen. Ordnen wir andererseits der reellen Achse der x-Ebene die Gesamtheit der komplexen Ebenen $(x'), \cdots, (x^{(n-1)})$ zu, so erhalten wir einen $(2n-1)$-dimensionalen Raum, welcher mit R bezeichnet werden soll. Die Anzahl dieser Räume R ist n. Sie bilden die Begrenzung von T.

Folgendermaßen stellen wir zwischen den n konjugierten Körpern $k, k', \cdots, k^{(n-1)}$ und den n Variabelen $x, x', \cdots x^{(n-1)}$ einen Zusammenhang her. Wir ordnen jedem Körper $k^{(i)}$ die Variabele $x^{(i)}$ zu, wählen dann vier ganze Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in k, deren Determinante

$$\alpha\delta - \beta\gamma = \varepsilon \tag{1}$$

eine Einheit des Körpers ist (woraus sich ergibt, daß auch

$$\alpha'\delta' - \beta'\gamma' = \varepsilon', \cdots, \alpha^{(n-1)}\delta^{(n-1)} - \beta^{(n-1)}\gamma^{(n-1)} = \varepsilon^{(n-1)}$$

Einheiten sind) und unterwerfen die x dem System linearer simultaner Substitutionen

$$y = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}, \cdots, y^{(n-1)} = \frac{\alpha^{(n-1)}x^{(n-1)} + \beta^{(n-1)}}{\gamma^{(n-1)}x^{(n-1)} + \delta^{(n-1)}}. \tag{2}$$

Zerlegung in reellen und imaginären Bestandteil ergibt

*) Hilbert, Relativ-quadratischer Zahlkörper, Math. Ann. 51 (1899), pg. 21.

$$(3)\qquad y_1=\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\varepsilon(\gamma x_1+\delta)}{\gamma[(\gamma x_1+\delta)^2+\gamma^2 x_2^{\,2}]},\quad y_2=\frac{\varepsilon x_2}{(\gamma x_1+\delta)^2+\gamma^2 x^2}$$

und analog für die Konjugierten. Demnach transformiert ein Substitutionen-System (2) die Räume R in sich. Ein Substitutionen-System mit total positiver Determinante η wird ferner auch den $\frac{1}{2^n}$-Teilraum in sich transformieren.

Die Determinanten ε werden daher in der Folge immer als total positiv angenommen werden.

Ein Substitutionen-System (2) werden wir dann als Ganzes als eine *Transformation des Raumes der* $((x))$ auffassen. Die Zusammensetzung zweier Transformationen geschieht, indem man die einzelnen Substitutionen des Systems nach den gewöhnlichen Regeln zusammensetzt. Die zusammengesetzte Transformation ist dann wieder von der Form (2).

Die Gesamtheit aller Transformationen (2) *bildet eine Gruppe H**). Ein Punkt $((y))$, welcher nach einer Substitution der Gruppe H einem vorgegebenen Punkte $((x))$ entspricht, heißt zu $((x))$ *äquivalent.*

Da mit jeder Substitution (2) mit Determinante η die Substitution $\left(\left(y=\frac{\varepsilon\alpha x+\varepsilon\beta}{\varepsilon\gamma x+\varepsilon\delta}\right)\right)$ mit Determinante $\varepsilon^2\eta$ identisch ist, so entsprechen einer und derselben Substitution der Gruppe alle Einheiten eines Einheitenverbandes als Determinanten. Zerlegen wir also die Gesamtheit der Substitutionen nach den Werten ihrer Determinanten in *Klassen*, so gibt es deren nur eine endliche Anzahl und zwar ebensoviele, als es total positive Einheitenverbände gibt. Ist ϱ die Zahl der von einander unabhängigen total positiven Einheitenverbände, so ist die Zahl der Klassen $=2^\varrho$. Jeder Klasse ordnen wir dann einen bestimmten Repräsentanten des Einheitenverbandes als Determinante zu. Dem Hauptverbande entspricht die Hauptklasse H_1, welche die besondere Eigenschaft hat, eine Untergruppe der Gruppe H zu bilden. Die Repräsentanten der total positiven Einheitenverbände sollen im folgenden überall mit η bezeichnet werden.

Eine wichtige Untergruppe von H ist die *affine Untergruppe.* Wir nennen affin eine Substitution, für welche $\gamma=0$ ist. Sie hat die Form

$$(4)\quad y=\frac{\eta\varepsilon x+\beta_1}{\frac{1}{\varepsilon}}=\eta\varepsilon^2 x+\beta,\cdots,y^{(n-1)}=\eta^{(n-1)}\varepsilon^{(n-1)^2}x^{(n-1)}+\beta^{(n-1)},$$

und die Gesamtheit dieser Substitutionen bildet die affine Untergruppe.

---

*) Die Gruppe H gehört zu der allgemeinen Klasse von Gruppen, welche Herr Hurwitz in der Abhandlung „Die unimodularen Substitutionen in einem algebraischen Zahlenkörper" (Göttinger Nachrichten 1895, pg. 332 ff.) in zahlentheoretischer Hinsicht diskutiert hat. Wir erwähnen insbesondere das Hurwitzsche Resultat, daß die Gruppe H aus einer endlichen Anzahl erzeugender Substitutionen zusammengesetzt werden kann.

Wir haben noch eine Bemerkung bezüglich der Einheiten η hinzuzufügen. Wir können nämlich immer das System der Fundamentaleinheiten des Körpers so wählen, daß Repräsentanten $\eta_1, \cdots, \eta_\varrho$ der ϱ von einander unabhängigen total positiven Einheitenverbände darin figurieren.

Dies ist leicht zu sehen. Sei nämlich

$$\varepsilon_1^{q_1} \varepsilon_2^{q_2} \cdots \varepsilon_{n-1}^{q_{n-1}} = \eta_1 \qquad \left(q_i = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix}\right)$$

eine total positive Einheit und etwa $q_1 = 1$, so können wir an Stelle von ε_1 das η_1 in das System der Einheiten aufnehmen, und das so entstandene neue System ist wieder ein Fundamentalsystem, da sich ja ε_1 durch η_1 und die übrigen ε rational ausdrücken läßt. Indem wir so fortfahren, können wir der Reihe nach ϱ der ε durch die entsprechenden η ersetzen.

Wir werden in Zukunft immer annehmen, *daß das System der Fundamental-Einheiten in der Form*

$$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_\varrho; \quad \varepsilon_{\varrho+1}, \varepsilon_{\varrho+2}, \cdots, \varepsilon_{n-1}$$

gegeben ist.

b. Diskontinuität der Gruppe H. Fixpunkte.

Eine Gruppe ist nach *Poincarés* und *Frickes**) Bezeichnung innerhalb eines Gebietes A *„eigentlich diskontinuierlich"*, wenn innerhalb A kein Punkt existiert, welcher Häufungsstelle von unendlich vielen ihm äquivalenten Punkten ist. Wir werden beweisen:

Im Innern des Teilraumes T ist die Gruppe H eigentlich diskontinuierlich.

Der Beweis gründet sich auf die folgenden beiden einfachen Tatsachen:

1) Es gibt in einem algebraischen Körper nur eine endliche Anzahl von ganzen Zahlen, welche mit ihren sämtlichen Konjugierten absolut genommen unterhalb einer endlichen Grenze liegen.

2) Es gibt in einem algebraischen Zahlkörper nicht zwei von einander verschiedene ganze Zahlen $\varkappa$ und $\bar{\varkappa}$, so daß $\varkappa$ und seine sämtlichen Konjugierten sich nur um beliebig geringe Beträge von $\bar{\varkappa}$ und den entsprechenden Konjugierten unterscheiden. In Formeln: die Ungleichungen

$$|\varkappa - \bar{\varkappa}| < \sigma, \cdots, |\varkappa^{(n-1)} - \bar{\varkappa}^{(n-1)}| < \sigma$$

sind für keine von einander verschiedenen ganzen Zahlen $\varkappa$ und $\bar{\varkappa}$ bei beliebig kleinem σ gleichzeitig verifizierbar.

---

*) Poincaré, Acta 3, pg. 57; Fricke-Klein, Automorphe Funktionen I, pg. 62.

Zum Beweise der eigentlichen Diskontinuität von H betrachten wir zunächst die affinen Substitutionen. Sei $((x))$ ein Punkt von T mit nicht verschwindenden imaginären Koordinaten $x_2, \cdots, x_2^{(n-1)}$. Aus

$$y_2 = \eta \varepsilon^2 x_2, \cdots, y_2^{(n-1)} = \eta^{(n-1)} \varepsilon^{(n-1)^2} x_2^{(n-1)}$$

folgt nach Hilfssatz 2), daß für eine gegen $((x))$ konvergierende Reihe äquivalenter Punkte $((y))$

$$\eta \varepsilon^2 = \cdots = \eta^{(n-1)} \varepsilon^{(n-1)^2} = 1$$

sein muß, und dann folgt aus den Gleichungen für die reellen Bestandteile

$$\beta = \cdots = \beta^{(n-1)} = 0.$$

Es gibt also keinen Punkt $((x))$, welcher Häufungsstelle von affin äquivalenten Punkten wäre.

Bei nicht-affinen Substitutionen sehen wir nach den Formeln (3), daß die Größen

$$E = \frac{1}{\eta} [(\gamma x_1 + \delta)^2 + \gamma^2 x_2^2], \cdots$$

$$\cdots, E^{(n-1)} = \frac{1}{\eta^{(n-1)}} [(\gamma^{(n-1)} x_1^{(n-1)} + \delta^{(n-1)})^2 + \gamma^{(n-1)^2} x_2^{(n-1)^2}]$$

für unendlich viele Substitutionen sich beliebig wenig von 1 unterscheiden müssen, wenn $((x))$ Häufungsstelle von äquivalenten Punkten sein soll. Aus $\lim E = 1, \cdots$ folgt aber

$$\lim \gamma^2 \leqq \frac{\eta}{x_2^2}, \cdots, \lim \gamma^{(n-1)^2} \leqq \frac{\eta^{(n-1)}}{x_2^{(n-1)^2}},$$

d. h. γ bleibt nebst allen seinen Konjugierten unterhalb einer endlichen Grenze. Also gehört (nach Hilfssatz 1)) zu allen unseren unendlich vielen Substitutionen nur eine endliche Zahl von Werten γ.

Es muß demnach mindestens *ein* Wert, γ_r, noch in unendlich vielen der betrachteten Substitutionen auftreten. Unter Benutzung von $\lim E = 1$ finden wir dann aus den Transformationsformeln für die reellen Teile

$$2\gamma_r x_1 = \lim (\alpha - \delta), \cdots, 2\gamma_r^{(n-1)} x_1^{(n-1)} = \lim (\alpha^{(n-1)} - \delta^{(n-1)}).$$

Die Punkte $(\alpha - \delta, \cdots, \alpha^{(n-1)} - \delta^{(n-1)})$ haben aber im Endlichen nach Hilfssatz 2) keine Häufungsstelle.

Daher kann Häufung äquivalenter Punkte höchstens nach solchen speziellen Stellen $((x))$ eintreten, deren reelle Koordinaten den Gleichungen genügen

$$2\gamma_r x_1 = \varkappa, \cdots, 2\gamma_r^{(n-1)} x_1^{(n-1)} = \varkappa^{(n-1)},$$

wo $\varkappa$ eine ganze Zahl des Körpers bedeutet, und die sämtlichen gegen $((x))$ konvergierenden äquivalenten Stellen müssen die nämlichen reellen Koordinaten besitzen.

Aus dieser Annahme folgt aber für jede der Substitutionen

$$E = 1, \cdots, E^{(n-1)} = 1$$

und somit

$$y_2 = x_2, \cdots, y_2^{(n-1)} = x_2^{(n-1)};$$

d. h. jede der Substitutionen führt den Punkt in sich selbst über. Es findet also keine Häufung von äquivalenten Punkten gegen $((x))$ statt.

Die Gruppe H ist also in der Tat im Innern von T eigentlich diskontinuierlich. Jeder Punkt wird außerdem nur durch eine endliche Anzahl von Substitutionen in sich übergeführt.

Dagegen liegen in den Begrenzungsräumen R die äquivalenten Punkte überall dicht. Zum Beweise zeigen wir, daß dieselbe Eigenschaft den Fixpunkten der Gruppe zukommt, und zwar können wir uns dabei auf die Untergruppe H_1 mit der Determinante 1 beschränken.

Die Fixpunkte einer Substitution sind bestimmt durch das Gleichungssystem

$$(5) \quad \begin{cases} \gamma x^2 + (\delta - \alpha)x - \beta = 0, \\ \vdots \\ \gamma^{(n-1)} x^{(n-1)2} + (\delta^{(n-1)} - \alpha^{(n-1)}) x^{(n-1)} - \beta^{(n-1)} = 0. \end{cases}$$

Jede Substitution hat sonach 2^n Fixpunkte. Für H_1 schreiben sie sich in der Form

$$(5a) \quad \begin{cases} x = \dfrac{\alpha - \delta}{2\gamma} \pm \dfrac{1}{2\gamma}\sqrt{(\alpha + \delta)^2 - 4}, \\ \vdots \\ x^{(n-1)} = \dfrac{\alpha^{(n-1)} - \delta^{(n-1)}}{2\gamma^{(n-1)}} \pm \dfrac{1}{2\gamma^{(n-1)}}\sqrt{(\alpha^{(n-1)} + \delta^{(n-1)})^2 - 4}. \end{cases}$$

Sind die sämtlichen konjugierten Größen $(\alpha + \delta)^2$ kleiner als 4, so heißt die Substitution *elliptisch;* ist $(\alpha + \delta)^2 = 4$, so heißt sie *parabolisch;* ist aber mindestens *eine* der konjugierten Größen $(\alpha + \delta)^2$ größer als 4, so soll sie *hyperbolisch* heißen.

Die Fixpunkte der parabolischen Substitutionen erfüllen das (n-dimensionale) reelle Gebiet des $(2n)$-dimensionalen Raumes überall dicht. In der Tat zeigen die Gleichungen (5a), daß jeder Punkt $\left(\left(\frac{\varkappa}{\lambda}\right)\right)$ Fixpunkt einer parabolischen Substitution ist, wenn $\varkappa$ und λ ganze Zahlen des Körpers bedeuten.

Wir betrachten an zweiter Stelle die hyperbolischen Substitutionen und behaupten, daß ihre Fixpunkte alle Räume R überall dicht erfüllen. Zu diesem Zwecke beweisen wir den allgemeinen Satz:

Ist

$$(7)\qquad \begin{cases} \lambda x^2 + \mu x + \nu = 0 \\ \vdots \qquad \vdots \\ \lambda^{(n-1)} x^{(n-1)2} + \mu^{(n-1)} x^{(n-1)} + \nu^{(n-1)} = 0 \end{cases}$$

ein System konjugierter irreduzibeler quadratischer Gleichungen mit ganzen Koeffizienten in den Körpern $k, \cdots, k^{(n-1)}$, und ist mindestens eine der nichtquadratischen Größen

$$\Delta = \mu^2 - 4\lambda\nu, \cdots, \Delta^{(n-1)} = \mu^{(n-1)2} - 4\lambda^{(n-1)}\nu^{(n-1)}$$

größer als Null, so sind die Wurzelpunkte dieses Gleichungssystems Fixpunkte einer hyperbolischen Substitution.

Damit der Satz richtig sei, muß — wie Vergleich von (5) und (7) zeigt —

$$(8)\qquad \sigma\gamma = v\lambda, \quad \sigma(\delta - \alpha) = v\mu, \quad \sigma\beta = -v\nu$$

sein, wo σ und v ganze Zahlen des Körpers bedeuten. Die gleichen Beziehungen finden dann auch für die konjugierten Körper statt. Setzen wir noch

$$\tau = \sigma(\alpha + \delta),$$

so ergibt sich

$$2\sigma\delta = \tau + v\mu, \qquad 2\sigma\alpha = \tau - v\mu;$$

und da $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ sein soll, muß zwischen den ganzen Zahlen σ, τ, v die Relation bestehen

$$(9)\qquad 4 = \frac{\tau^2 - v^2\Delta}{\sigma^2}.$$

Das Gleichungssystem (8) und (9) für die ganzen Zahlen $\sigma, \beta, \gamma, \delta, v$ des Körpers läßt sich bei beliebigem σ durch von Null verschiedene Werte der Unbekannten befriedigen, wenn es eine ganze Zahl τ_1 und eine nicht verschwindende ganze Zahl v_1 des Körpers gibt, welche der Gleichung

$$(9')\qquad \tau_1^2 - \Delta v_1^2 = 1$$

genügen.

Diese Gleichung aber ist das Analogon der *Pellschen Gleichung* im Körper k. *Fricke**) hat nachgewiesen, daß sie immer unendlich viele Lösungen τ_1, v_1 mit von Null verschiedenem v_1 hat, sobald mindestens eine der konjugierten Determinanten $\Delta, \cdots, \Delta^{(n-1)}$ größer als Null ist.

Es handelt sich dabei wesentlich um folgendes: Die verallgemeinerte Pellsche Gleichung

$$\frac{\tau_1^2 - \Delta v_1^2}{\sigma_1^2} = 1$$

*) Fricke, Math. Ann. 42 (1893), pg. 569f

für die drei Unbekannten $\tau_1, \upsilon_1, \sigma_1$ liefert die Einheiten des relativ-quadratischen Zahlkörpers $K(\sqrt{\Delta})$. Dieser Zahlkörper hat die Konjugierten

$$K(\sqrt{\Delta}),\ K(-\sqrt{\Delta}),\ \cdots,\ K(\sqrt{\Delta^{(n-1)}}),\ K(-\sqrt{\Delta^{(n-1)}}),$$

von welchen bei unserer Voraussetzung über Δ mindestens zwei reell sind. Daher ist die Anzahl der Fundamentaleinheiten in $K(\sqrt{\Delta})$ $r \geqq n$, also größer als die Einheitenzahl in k. Die verallgemeinerte Pellsche Gleichung hat somit immer eine unendliche Mannigfaltigkeit von Lösungen. Fricke zeigt dann, daß es unter diesen immer auch unendlich viele solche gibt, welche die spezielle Pellsche Gleichung (9') befriedigen.

Somit sind sämtliche Wurzelpunkte des Gleichungssystems (7) Fixpunkte hyperbolischer Substitutionen, und da diese Wurzelpunkte — d. h. die sämtlichen Systeme zusammengehöriger rationaler gebrochener Zahlen aller Relativkörper $K(\sqrt{\Delta}), \cdots, K(-\sqrt{\Delta^{(n-1)}})$, — die Räume R überall dicht erfüllen, so ist unser Satz bewiesen.

Die Fixpunkte elliptischer Substitutionen bilden nach unserem Diskontinuitätsbeweis eine isolierte Menge. Wir können sie aber auch aus der Pellschen Gleichung direkt berechnen. Sind nämlich die sämtlichen Größen $\Delta, \cdots, \Delta^{(n-1)}$ kleiner als Null, so ist der relativ-quadratische Körper $K(\sqrt{\Delta})$ mit seinen sämtlichen Konjugierten imaginär, und neue Einheiten, d. h. Lösungen der verallgemeinerten Pellschen Gleichung mit von Null verschiedenem υ, können nur dann auftreten, wenn $K(\sqrt{\Delta})$ eine Einheitswurzel enthält; es tritt aber in der Gesamtheit aller Körper $(2n)^{\text{ten}}$ Grades nur eine endliche Anzahl von Einheitswurzeln auf*), und demnach gibt es a fortiori nur eine endliche Anzahl von Werten Δ, für welche die spezielle Gleichung (9') erfüllt ist. Die Wurzeln sämtlicher Gleichungen (7) mit gleichem Δ ergeben sich dann in der Form

$$x = \frac{\xi \pm \sqrt{\Delta}}{\zeta},\ \cdots,\ x^{(n-1)} = \frac{\xi^{(n-1)} \pm \sqrt{\Delta^{(n-1)}}}{\zeta^{(n-1)}},$$

wo ξ, ζ ganze Zahlen in k sind. In dieser Form lassen sich also alle Fixpunkte elliptischer Substitutionen darstellen; sie liegen also in der Tat im Innern des Teilraumes T nirgends überall dicht und häufen sich gegen die Räume R.

c. Konstruktion eines Fundamentalbereichs für die Gruppe $((y = x + \beta))$.

(Reduktion des n-dimensionalen Raumes nach n Vektoren.)

Nach Feststellung der Diskontinuität der Gruppe H innerhalb T schreiten wir zur Konstruktion eines *Fundamentalbereichs*, d. h. eines

*) Hilbert, Alg. Zahlkörper, pg. 332.

Bereichs von der Beschaffenheit, daß sich in seinem Innern und auf seinem Rande zu jedem Punkte $(\!(y)\!)$ von T ein und nur ein äquivalenter Punkt $(\!(x)\!)$ findet. Wir verfahren zu diesem Zwecke successive, indem wir einen Fundamentalbereich zuerst für die einfachste Untergruppe $(\!(y=x+\beta)\!)$, dann für die allgemeine affine Untergruppe, schließlich für die gesamte Gruppe H angeben.

Da die Gruppe $(\!(y = x + \beta)\!)$ die imaginären Koordinaten ungeändert läßt, haben wir bei Aufstellung unseres ersten Fundamentalbereichs nur mit den reellen Koordinaten zu operieren. Führen wir die Basis $\omega_1, \cdots, \omega_n$ des Körpers ein, so transformieren sich die reellen Koordinaten durch die Gruppe nach den Gleichungen

$$(9)\qquad \begin{cases} y_1 = x_1 + m_1\omega_1 + \cdots + m_n\omega_n, \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ y_1^{(n-1)} = x_1^{(n-1)} + m_1\omega_1^{(n-1)} + \cdots + m_n\omega_n^{(n-1)}, \end{cases}$$

wo die m ganze rationale Zahlen sind.

Diese Formeln deuten wir anschaulich im n-dimensionalen Raume der $x_1, \cdots, x_1^{(n-1)}$, wobei wir zur Vereinfachung der Vorstellung $n = 3$ voraussetzen. In dem dreidimensionalen Raume der x_1, x_1', x_1'' betrachten wir die $\omega_1, \omega_1', \omega_1''$; $\omega_2, \omega_2', \omega_2''$; $\omega_3, \omega_3', \omega_3''$ als Projektionen dreier windschiefer Vektoren*) V_1, V_2, V_3. Nennen wir alle diejenigen Punkte nach einem Vektor V äquivalent, welche aus einem Punkte durch mehrfaches Abtragen des Vektors hervorgehen, so verstehen wir unter *Reduktion des Raumes nach dem Vektor V* den Prozeß der Abgrenzung eines Gebietes, in welchem von jeder Reihe äquivalenter Punkte ein und nur ein Exemplar vorhanden ist.

Unter Benutzung dieses Begriffes läßt sich das Problem der Aufstellung unseres Fundamentalbereichs folgendermaßen geometrisch fassen:

Die Aufstellung unseres Fundamentalbereichs ist identisch mit dem Problem, den dreidimensionalen Raum nach drei windschiefen Vektoren zu reduzieren.

Die Lösung der Aufgabe ist unmittelbar. Durch einen beliebigen Punkt des Raumes legen wir eine Ebene e_1, welche den Vektor V_1 nicht enthält, tragen von dem Punkte den Vektor ab und legen durch den

*) Windschief nennen wir drei Vektoren, wenn sie, von dem gleichen Anfangsfangspunkte aus abgetragen, nicht in einer Ebene liegen. V_1, V_2, V_3 sind windschief zu einander, weil die Determinante

$$\Omega = \begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ \omega_1' & \omega_2' & \omega_3' \\ \omega_1'' & \omega_2'' & \omega_3'' \end{vmatrix} = \sqrt{d}$$

von Null verschieden ist.

Endpunkt eine Parallelebene e_1'. Dann ist nach dem Vektor V_1 der ganze Raum auf das Gebiet zwischen den beiden Ebenen reduziert. Nun wählen wir speziell die Ebene e_1 parallel zu den Richtungen der beiden anderen Vektoren V_2, V_3. Führen wir dann dieselbe Konstruktion auch für diese letzteren aus, so erhalten wir als Durchdringungsgebilde der drei planparallelen Gebiete ein Parallelepiped, dessen Kanten nach Länge und Richtung mit den Vektoren übereinstimmen. Auf dieses Parallelepiped ist dann der ganze Raum nach den drei Vektoren reduziert. Denn ich kann zu jedem beliebigen Punkt $((y_1))$ des Raumes einen Punkt $((x_1))$ im Innern oder auf dem Rande des Parallelepipeds finden, so daß durch mehrmalige Abtragung der drei Vektoren $((x_1))$ aus $((y_1))$ hervorgeht.

Die analytische Übertragung dieser geometrischen Konstruktion kommt auf eine einfache Determinantenrechnung hinaus, die wir wieder für allgemeines n durchführen wollen. Wir denken uns die $\omega_1, \cdots, \omega_n$ so gewählt, daß die Determinante

$$\Omega = \begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 & \cdots \omega_n \\ \omega_1' & \omega_2' & \cdots \omega_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \omega_1^{(n-1)} & \omega_2^{(n-1)} & \cdots \omega_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

positives Vorzeichen erhält. Die Unterdeterminante von Ω nach $\omega_i^{(k)}$ sei $\Omega_i^{(k)}$.

Beschränken wir die $x, \cdots, x^{(n-1)}$ auf das durch die Ungleichungen

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} -\frac{\Omega}{2} \leqq \Omega_1 x_1 + \Omega_1' x_1' + \cdots + \Omega_1^{(n-1)} x_1^{(n-1)} < +\frac{\Omega}{2}, \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ -\frac{\Omega}{2} \leqq \Omega_n x_1 + \Omega_n' x_1' + \cdots + \Omega_n^{(n-1)} x_1^{(n-1)} < +\frac{\Omega}{2} \end{cases}$$

definierte Gebiet, so liegt innerhalb desselben von jeder nach der Untergruppe $((y = x + \beta))$ äquivalenten Reihe von Punkten ein und nur ein Exemplar.

Ist in der Tat $((y))$ ein beliebiger Punkt von T, und sind $M_1, \cdots, M_n$ die Werte der Ausdrücke (I) für diesen Punkt, so bestehen an einem nach den Gleichungen (8) äquivalenten Punkte $((x))$ die Werte

$$M_1 + m_1 \Omega, \cdots, M_n + m_n \Omega$$

und die m lassen sich auf eine und nur eine Weise derart bestimmen, daß $((x))$ innerhalb des angegebenen Gebietes liegt. Dies ist also ein Fundamentalbereich für die betrachtete Untergruppe $((y = x + \beta))$. Er werde mit D_3 bezeichnet.

In der Wahl von D_3 liegt noch eine bedeutende Willkürlichkeit. Wir können nämlich die $\omega_1, \cdots, \omega_n$ durch eine beliebige andere Basis

$\omega_1^*, \cdots, \omega_n^*$ ersetzen und mit diesen neuen Vektoren ein Parallelepiped (I) konstruieren. Da die $\omega_1^*, \cdots, \omega_n^*$ aus $\omega_1, \cdots, \omega_n$ durch eine Transformation mit Determinante ± 1 hervorgehen, so haben alle diese Parallelepipede das gleiche (absolut genommene) Volumen. Multiplizieren wir insbesondere die Basiszahlen mit einer total positiven Einheit η, so erhalten wir einen für das folgende wichtige Fundamentalbereich D_3^*:

$$(\mathrm{I}^*)\qquad \begin{cases} -\frac{\Omega}{2} \leqq \Omega_1 \frac{x_1}{\eta} + \Omega_1' \frac{x_1'}{\eta'} + \cdots + \Omega_1^{(n-1)} \frac{x_1^{(n-1)}}{\eta^{(n-1)}} < + \frac{\Omega}{2}, \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ -\frac{\Omega}{2} \leqq \Omega_n \frac{x_1}{\eta} + \Omega_n' \frac{x_1'}{\eta'} + \cdots + \Omega_n^{(n-1)} \frac{x_1^{(n-1)}}{\eta^{(n-1)}} < + \frac{\Omega}{2}. \end{cases}$$

Die zu D_3 äquivalenten Fundamentalbereiche ergeben sich durch einfache kongruente Nebeneinanderlagerung, wie man aus der geometrischen Vorstellung des Parallelepipeds sofort ableitet. Analytisch entspricht der kongruenten Fortsetzung über die Ebene e_1 hinaus die Substitution $((y = x + \omega_1))$. Da sich die gesamte Gruppe $((y = x + \beta))$ aus den n Substitutionen

$$((y = x + \omega_1)), \cdots, ((y = x + \omega_n))$$

erzeugen läßt, so stellen sich die erzeugenden Substitutionen geometrisch gerade als kongruente Fortsetzungen über die einzelnen Randflächen unseres Parallelepipeds dar.

d. Fundamentalbereich für die allgemeine affine Gruppe.

(Reduktion des n-dimensionalen Raumes nach $n-1$ Vektoren.)

Bei der Behandlung der allgemeinen affinen Gruppe gehen wir in der Weise vor, daß wir zuerst für die imaginären Koordinaten $x_2, \cdots, x_2^{(n-1)}$ einen Fundamentalbereich suchen und diesen dann mit dem oben gefundenen Bereich D_3 für die reellen Koordinaten kombinieren.

Die imaginären Koordinaten transformieren sich nach den Formeln

$$(10')\qquad y_2 = \eta \varepsilon^2 x_2, \cdots, y_2^{(n-1)} = \eta^{(n-1)} \varepsilon^{(n-1)2} x_2^{(n-1)}.$$

Um diese Formeln analog wie die des vorigen Paragraphen behandeln zu können, gehen wir zu Logarithmen über. Wir bezeichnen mit $Y, \cdots, Y^{(n-1)}$; $X, \cdots, X^{(n-1)}$ die Hauptwerte der Logarithmen von $y_2, \cdots, y_2^{(n-1)}$; $x_2, \cdots, x_2^{(n-1)}$ *); ferner mit $l_i, \cdots, l_i^{(n-1)}$ die Hauptwerte der Logarithmen von

$$\eta_i, \cdots, \eta_i^{(n-1)} \qquad (i = 1, 2, \cdots, \varrho),$$

schließlich mit $\lambda_j, \cdots, \lambda_j^{(n-1)}$ die Logarithmen der absoluten Beträge von

$$\varepsilon_j, \cdots, \varepsilon_j^{(n-1)} \qquad (j = \varrho + 1, \varrho + 2, \cdots, n - 1).$$

*) Die Y und X sind reell, da wir die y, x auf den Teilraum T beschränken.

Die Formeln (10′) nehmen dann die Gestalt an

$$(10)\begin{cases} Y = X + p_1 l_1 + \cdots + p_\varrho l_\varrho + 2q_{\varrho+1}\lambda_{\varrho+1} + \cdots + 2q_{n-1}\lambda_{n-1}, \\ \vdots \\ Y^{(n-1)} = X^{(n-1)} + p_1 l_1^{(n-1)} + \cdots + p_\varrho l_\varrho^{(n-1)} + 2q_{\varrho+1}\lambda_{\varrho+1}^{(n-1)} + \cdots + 2q_{n-1}\lambda_{n-1}^{(n-1)}, \end{cases}$$

wo die p und q ganze rationale Zahlen bedeuten. Dabei denken wir uns die l_i, λ_j derartig numeriert, daß die Determinante

$$R = \begin{vmatrix} l_1 & \cdots l_\varrho & \lambda_{\varrho+1} & \cdots \lambda_{n-1} \\ l_1' & \cdots l_\varrho' & \lambda_{\varrho+1}' & \cdots \lambda_{n-1}' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_1^{(n-2)} & \cdots l_\varrho^{(n-2)} & \lambda_{\varrho+1}^{(n-2)} & \cdots \lambda_{n-1}^{(n-2)} \end{vmatrix}$$

einen positiven Wert hat. Sie ist dann der *Regulator**) des Körpers k. Die Unterdeterminanten von R nach $l_i^{(k)}$, $\lambda_j^{(k)}$ sollen bezw. mit $L_i^{(k)}$, $\Lambda_j^{(k)}$ bezeichnet werden.

Wir wollen unseren Fundamentalbereich, wie im vorigen Paragraphen, zuerst durch geometrische Betrachtungen ermitteln, wobei wir wieder der Anschaulichkeit halber $n = 3$ annehmen und die Logarithmen zu den Einheiten mit l_1, l_1', l_1'' und l_2, l_2', l_2'' bezeichnen. Wir deuten die Größen l wieder als Projektionen zweier Vektoren V_1, V_2. Unser Problem lautet dann:

Den Raum der X, X', X'' nach den beiden Vektoren V_1 und V_2 zu reduzieren.

Die Vektoren V_1 und V_2 wirken beide parallel mit der Ebene $X + X' + X'' = 0$. In der Tat sind ja l_1, l_1', l_1'' Logarithmen von konjugierten Einheiten und daher $l_1 + l_1' + l_1'' = 0$. Daher wird ein Punkt $(\!(Y)\!)$, welcher einer Ebene $e \equiv X + X' + X'' = \text{const.}$ angehört, in einen Punkt $(\!(X)\!)$ derselben Ebene transformiert. Dieser Umstand führt unser Problem auf das im vorigen Abschnitt behandelte zurück: wir haben jede Ebene $e = \text{const.}$ nach den zwei Vektoren V_1 und V_2 zu reduzieren und erhalten als Reduktionsgebilde in der Ebene ein Parallelogramm (I). Denken wir uns nun eine beliebige Gerade, welche nicht zu den Ebenen e parallel ist, so können wir alle unsere Parallelogramme auf dieser Geraden aufreihen, d. h. die Parallelogramme immer um den Schnittpunkt der Geraden mit e als Mittelpunkt konstruieren. Das so entstehende Gebilde ist ein unendliches, vierkantiges, beliebig im Raume orientiertes Prisma, welches mit sämtlichen Ebenen e ein Parallelogramm gemein hat. Auf dieses Prisma ist dann durch die zwei Vektoren der ganze Raum reduziert.

*) Hilbert, Alg. Zahlkörper, pg. 221.

Der Vollständigkeit halber sei hinzugefügt, daß die Konstruktion unseres Prismas noch große Willkürlichkeit in sich birgt, indem wir als Mittellinie an Stelle einer Geraden eine beliebige stetige Kurve hätten benutzen können, welche jede Ebene e einmal schneidet.

Bei der Anwendung dieser Betrachtungsweise auf die Formeln (10) ist nur darauf zu achten, daß die Vektoren (λ) immer mit geraden Koeffizienten auftreten. Dies bedingt einfach eine Verdoppelung der den (λ) entsprechenden Seiten des Parallelogramms.

Analytisch stellen sich diese geometrischen Betrachtungen (für allgemeines n) folgendermaßen dar. Wir wollen für unser Prisma zur Abkürzung die Bezeichnung *Leitprisma* einführen;

$$(X-b):\cdots:(X^{(n-1)}-b^{(n-1)})=a:\cdots:a^{(n-1)}$$

sei die Gleichung seiner Achse; ferner bezeichnen wir durch $B_1,\cdots,B_\varrho$; $\mathsf{B}_{\varrho+1},\cdots,\mathsf{B}_{n-1}$ die Größen

$$B_1=L_1 b+\cdots+L_1^{(n-2)}b^{(n-2)},\quad \mathsf{B}_{\varrho+1}=\Lambda_{\varrho+1}b+\cdots+\Lambda_{\varrho+1}^{(n-2)}b^{(n-2)}.$$
$$\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots$$

Beschränken wir dann bei reellem, beliebig veränderlichem t ein Gebiet des Raumes der $((X))$ durch die Ungleichungen

$$\text{(II)}\quad\left\{\begin{array}{l}
B_1-\frac{R}{2}\leqq L_1(X-at)+\cdots+L_1^{(n-2)}(X^{(n-2)}-a^{(n-2)}t)<B_1+\frac{R}{2},\\
\quad\vdots\\
B_\varrho-\frac{R}{2}\leqq L_\varrho(X-at)+\cdots+L_\varrho^{(n-2)}(X^{(n-2)}-a^{(n-2)}t)<B_\varrho+\frac{R}{2},\\
\mathsf{B}_{\varrho+1}-R\leqq \Lambda_{\varrho+1}(X-at)+\cdots+\Lambda_{\varrho+1}^{(n-2)}(X^{(n-2)}-a^{(n-2)}t)<\mathsf{B}_{\varrho+1}+R,\\
\quad\vdots\\
\mathsf{B}_{n-1}-R\leqq \Lambda_{n-1}(X-at)+\cdots+\Lambda_{n-1}^{(n-2)}(X^{(n-2)}-a^{(n-2)}t)<\mathsf{B}_{n-1}+R,\\
X+\cdots+X^{(n-1)}=b+\cdots+b^{(n-1)}+t(a+\cdots+a^{(n-1)}),
\end{array}\right.$$

so liegt in diesem Gebiet von jeder Reihe nach den Gleichungen (10) *äquivalenter Punkte ein und nur ein Exemplar.*

Gehen wir von den Logarithmen wieder zu den Zahlen über, so ergibt das Abbild des Leitprismas im Raume der $x_2,\cdots,x_2^{(n-1)}$ einen Fundamentalbereich für die Substitutionen (10'), welcher von allen Punkten $((x_2))$ mit nur positiven Koordinaten einen und nur einen äquivalenten enthält. Im Raume T ist also für die allgemeine affine Gruppe zunächst die Reduktion der imaginären Koordinaten geleistet. Wir erhalten einen gewissen Bereich, in welchem die imaginären Koordinaten den Bedingungen (II) unterworfen, die reellen Koordinaten aber noch beliebig sind. Nun reduzieren wir die reellen Koordinaten nach den Ungleichungen (I) und erhalten dann einen *Bereich D_2, welcher Fundamentalbereich für die allgemeine affine Gruppe ist.*

Ist nämlich $((y))$ ein beliebiger Punkt im Innern von T, so kann ich zunächst auf eine und nur eine Weise die Transformation $((z = \eta \varepsilon^2 y))$ so wählen, daß die imaginären Koordinaten von $((z))$ den Ungleichungen (II) genügen. Die reellen Koordinaten mögen die Werte $z_1, \cdots, z_1^{(n-1)}$ erhalten. Dann existiert eine und nur eine Transformation $((x = z + \beta))$, welche die reellen Koordinaten in das durch die Ungleichungen (I) definierte Gebiet wirft. —

Wir haben uns nunmehr mit der geometrischen Gestalt unseres Bereiches D_2 zu beschäftigen. Der Bereich ist zunächst *einfach zusammenhängend.* Diese Eigenschaft gilt in der Tat von dem Leitprisma und daher auch von dessen Abbild in dem Raume der $((x_2))$, und da in D_2 die reellen Koordinaten von den imaginären gänzlich unabhängig sind, bleibt sie auch für D_2 bestehen.

Eine wichtige Frage ist die nach den Punkten, welche D_2 mit dem Rande von T, d. h. mit den Räumen R, gemein hat. D_2 ist als Fundamentalbereich nur für das *Innere* von T definiert, in Bezug auf die Räume R hat D_2 keine charakteristische Eigenschaft. Bei allgemeiner Wahl von D_2, d. h. bei allgemeiner Orientierung des Leitprismas, werden in dem Randteile von D_2 noch unendlich viele nach der affinen Gruppe zu einander äquivalente Punkte liegen. Zwei in Bezug auf das Innere von T gleichberechtigte Fundamentalbereiche D_2 können sich auch in Bezug auf Randstellen gänzlich verschieden verhalten, z. B. Randpunkt-Mengen verschiedener Dimensionen besitzen. Daß diese Ungleichmäßigkeit in der Tat stattfindet, beweist die Betrachtung der verschiedenen Orientierungen des Leitprismas.

Wir werden eine besonders einfache Anordnung der Randpunkte erzielen, wenn wir annehmen, *daß das Leitprisma den Teilraum der positiven $X, X', \cdots, X^{(n-1)}$ durchquert,* so daß alle Koordinaten (X) gleichzeitig beliebig große *positive* Werte annehmen. Die (x_2)-Koordinaten haben dann innerhalb des Fundamentalbereichs die Eigenschaft, alle gleichzeitig unendlich zu werden: *Der Bereich D_2 hat also nur einen einzigen unendlichen Punkt.* Die (x_2) konvergieren aber ferner auch alle gleichzeitig gegen Null, daher sind die übrigen Randpunkte von D_2 sämtlich reell. *Diese Wahl von D_2 wird fernerhin immer vorausgesetzt werden.*

Wir besprechen schließlich noch die zu D_2 äquivalenten Fundamentalbereiche. Die Substitutionen (10') haben die Erzeugenden

$$((y = \eta_1 x)), \cdots, ((y = \eta_\varrho x)), ((y = \varepsilon_{\varrho+1}^2 x)), \cdots, ((y = \varepsilon_{n-1}^2 x)).$$

Jeder dieser erzeugenden Substitutionen entspricht im Raume der $((X))$

die Anlagerung eines kongruenten Prismas an eine der Seitenflächen des Leitprismas. Die Ungleichungen (I) für die reellen Koordinaten gehen bei einer Transformation (10') über in die Ungleichungen (I*). Es gibt nach der affinen Gruppe also unendlich viele, einander inkongruente, äquivalente Bereiche.

e. Der Bereich D_1.

Wir wollen aus dem Fundamentalbereich D_2 der affinen Gruppe, welcher nach der Gesamtgruppe H zu jedem Punkte noch unendlich viele Äquivalente enthalten wird, einen Teil herauspräparieren, in welchem sich zu jedem Punkte höchstens noch eine endliche Anzahl Äquivalenter findet. Zu diesem Zwecke bemerken wir, daß die Fixpunkte der elliptischen Substitutionen und demnach auch die äquivalenten Punkte sich nach den Grenzräumen R häufen. Wir werden also versuchen, unseren Fundamentalbereich von diesen Grenzräumen abzulösen.

Hierzu bedienen wir uns des bekannten *Minkowski*schen Satzes*):

In n homogenen linearen Formen F_i von n Variabelen mit beliebigen reellen Koeffizienten und der Determinante Δ kann man den Variabelen immer solche rationale ganze Werte, die nicht sämtlich Null sind, geben, daß jede Form F_i absolut genommen kleiner wird als eine ihr zugeordnete vorgegebene positive Größe $\varkappa_i$, vorausgesetzt, daß das Produkt

$$\varkappa_1 \varkappa_2 \cdots \varkappa_n = |\Delta|$$

ist.

Mit Hilfe dieses Satzes leiten wir das Resultat ab:

Jeder im Innern des Teilraumes T gelegene Punkt $((y))$ läßt sich durch eine Substitution von H in einen Punkt $((x))$ verwandeln, dessen imaginäre Koordinaten den Ungleichungen

$$x_2 > C, \cdots, x_2^{(n-1)} > C^{(n-1)}$$

genügen, wo die C durch die Beziehung

$$\text{(III)} \qquad C\,C' \cdots C^{(n-1)} = \frac{1}{2^n}\,\frac{1}{d}$$

verbunden sind.

Zum Beweise wollen wir nur die Untergruppe H_1 mit der Determinante 1 betrachten. Für diese ist

$$x_2 = \frac{y_2}{(\gamma y_1 + \delta)^2 + \gamma^2 y_2^2}, \cdots, x_2^{(n-1)} = \frac{y_2^{(n-1)}}{(\gamma^{(n-1)} y_1^{(n-1)} + \delta^{(n-1)})^2 + \gamma^{(n-1)^2} y_2^{(n-1)^2}}.$$

Sollen nun

$$x_2 > C, \cdots, x_2^{(n-1)} > C^{(n-1)}$$

*) Minkowski, Geometrie der Zahlen, pg. 104. Hilbert, Alg. Zahlkörper, pg. 210.

sein, so folgt

$$(11)\quad \begin{cases} (\gamma y_1 \quad + \delta)^2 \quad + \quad \gamma^2 y_2^2 \quad < \frac{1}{C}\, y_2, \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ (\gamma^{(n-1)} y_1^{(n-1)} + \delta^{(n-1)})^2 + \gamma^{(n-1)2} y_2^{(n-1)2} < \frac{1}{C^{(n-1)}}\, y_2^{(n-1)}. \end{cases}$$

Wir setzen zur Abkürzung

$$\Gamma_1 = \gamma y_1 + \delta, \cdots, \Gamma_1^{(n-1)} = \gamma^{(n-1)} y_1^{(n-1)} + \delta^{(n-1)},$$
$$\Gamma_2 = \gamma \qquad\quad , \cdots, \Gamma_2^{(n-1)} = \gamma^{(n-1)}.$$

Führen wir noch die Ausdrücke von γ und δ in den $\omega_1, \cdots, \omega_n$ ein,

$$\gamma = a_1 \omega_1 + \cdots + a_n \omega_n, \qquad \delta = b_1 \omega_1 + \cdots + b_n \omega_n,$$

so sind die Γ_1, Γ_2 $2n$ lineare Formen mit den $2n$ Variabelen $a_1, \cdots, a_n$; $b_1, \cdots b_n$. Die Determinante dieser Formen ist

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1\omega_1 & \cdots & y_1\omega_n; & \omega_1 & \cdots \omega_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}\omega_1^{(n-1)} & \cdots & y_1^{(n-1)}\omega_n^{(n-1)}; & \omega_1^{(n-1)} & \cdots \omega_n^{(n-1)} \\ \omega_1 & \cdots & \omega_n; & 0 & \cdots 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \omega_1^{(n-1)} & \cdots & \omega_n^{(n-1)}; & 0 & \cdots 0 \end{vmatrix} = d.$$

Andererseits leiten wir aus (11) für die Γ die Ungleichungen ab

$$|\Gamma_1| < \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{\sqrt{C}}\sqrt{y_2}, \cdots, |\Gamma_1^{(n-1)}| < \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{\sqrt{C^{(n-1)}}}\sqrt{y_2^{(n-1)}},$$
$$|\Gamma_2| < \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{\sqrt{C}}\,\frac{1}{\sqrt{y_2}}, \cdots, |\Gamma_2^{(n-1)}| < \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{\sqrt{C^{(n-1)}}}\,\frac{1}{\sqrt{y_2^{(n-1)}}}.$$

Das Produkt der rechten Seiten dieser Ungleichungen ist gerade

$$= \frac{1}{2^n}\,\frac{1}{C C' \cdots C^{(n-1)}}.$$

Daher lassen sich die Ungleichungen nach dem Minkowskischen Satz immer befriedigen, wenn

$$C C' \cdots C^{(n-1)} = \frac{1}{2^n}\,\frac{1}{d}$$

ist. Dies ist aber das angekündigte Resultat.

Wir haben somit einen Bereich neu gewonnen, welcher zu allen Punkten im Innern von T Äquivalente enthält: er besteht aus allen Punkten, deren imaginäre Koordinaten gewisse, durch die Gleichung (III) verbundene Werthe übersteigen. Wir wenden auf ihn die Reduktion nach der affinen Gruppe an.

Zu dem Ende suchen wir im Raume der $(\!(X)\!)$ das unserem Bereiche entsprechende Gebiet. Sind $c, \cdots, c^{(n-1)}$ die Hauptwerte der Logarithmen von $C, \cdots C^{(n-1)}$, so besteht das fragliche Gebiet aus dem $\frac{1}{2^n}$-Teilraum

$$X > c, \cdots, X^{(n-1)} > c^{(n-1)}.$$

Wir betrachten nun ein Leitprisma, dessen Achse durch den Punkt

$$X = c, \cdots, X^{(n-1)} = c^{(n-1)}$$

hindurchgeht, und fassen dazu die Schar der Ebenen $X + \cdots + X^{(n-1)} = e$ ins Auge. Wenn $e \geqq c + \cdots + c^{(n-1)}$ ist, so hat jede dieser Ebenen mit unserem $\frac{1}{2^n}$-Teilraum ein Stück gemeinsam, für $e < c + \cdots + c^{(n-1)}$ aber nicht. Daher bilden sich die Punkte des Teilraumes allein auf denjenigen Teil des Leitprismas ab, für welchen e die oben angegebene Größe übersteigt. Von dem Leitprisma wird dadurch ein ins positiv Unendliche gehender Prismenstumpf mit fester, zu der Ebene $X + \cdots + X^{(n-1)} = 0$ paralleler Grundfläche abgetrennt. In ihm liegt von allen nach der affinen Gruppe äquivalenten Punkten des $\frac{1}{2^n}$-Teilraums immer nur einer, dagegen wird ein endliches Gebiet auch Punkte enthalten, welchen in dem $\frac{1}{2^n}$-Teilraume kein Äquivalenter entspricht. Übertragen wir unseren Prismenstumpf in den Raum $(\!(x)\!)$ und reduzieren noch die reellen Koordinaten nach dem Schema (I), so erhalten wir ein Gebiet, welches zu jedem Punkte von T mindestens einen Äquivalenten enthält, einfach zusammenhängend ist, sich nirgends im Endlichen der Berandung von T, d. h. den Räumen R, beliebig nähert und im Unendlichen einen einzigen Punkt hat. *Der unendlich ferne Punkt ist somit der einzige, welchen unser Gebiet mit Randstellen von T gemein hat.*

Bezeichnen wir mit D_1 dies neu konstruierte Gebiet. Wir beweisen*):

Im Innern des Gebietes D_1 existiert zu jedem Punkte höchstens noch eine endliche Anzahl Äquivalenter nach der Gruppe H.

Wir bemerken nämlich zuerst, daß äquivalente Punkte nach der affinen Gruppe in D_1 nach Konstruktion nicht mehr auftreten. Die in Frage kommenden Substitutionen müssen daher von Null verschiedene Werte γ enthalten.

Sei dann, wie gewöhnlich, $(\!(x)\!)$ ein Punkt von D_1, $(\!(y)\!)$ sein Äquivalenter und gleichfalls innerhalb D_1 gelegen. Aus der Gleichung

$$y_2 = \frac{\eta x_2}{(\gamma x_1 + \delta)^2 + \gamma^2 x_2^{\,2}}$$

*) Vergl. Hurwitz, Modulfunktionen und Multiplikatorgleichungen, Math. Ann. 18 (1881), pg. 534.

und deren Konjugierten folgt

$$\gamma^2 x_2^2 < \eta \frac{x_2}{y_2} < \eta \frac{x_2}{C},$$

also

$$\gamma^2 < \frac{1}{C x_2} < \frac{1}{C^2},$$

und ebenso

$$\gamma'^2 < \frac{1}{C' x_2'} < \frac{1}{C'^2}, \cdots, \gamma^{(n-1)2} < \frac{1}{C^{(n-1)} x_2^{(n-1)}} < \frac{1}{C^{(n-1)2}}.$$

In den Substitutionen, welche $((x))$ in einen äquivalenten Punkt von D_1 überführen, kann daher nur eine endliche Zahl von Werten γ auftreten.

Wir haben ferner noch die Ungleichungen

$$(\gamma x_1 + \delta)^2 < \frac{\eta x_2}{C} - \gamma^2 x_2^2$$

und deren Konjugierte. Nun haben innerhalb D_1 die reellen Koordinaten $x_1, \cdots, x_1^{(n-1)}$ endliche Werte und sonach endliche Maxima $M, \cdots, M^{(n-1)}$. Daher ergibt sich für δ die Ungleichung

$$|\delta| < \sqrt{\eta \frac{x_2}{C} - \gamma^2 x_2^2} + |\gamma| M.$$

Die Größe unter der Wurzel hat ein endliches positives Maximum, daher bleibt auch die ganze rechte Seite immer endlich für alle Werte von x_2, d. h. δ nebst allen seinen Konjugierten liegt unterhalb einer endlichen Grenze. Zu allen unseren fraglichen Substitutionen gehört also auch nur eine endliche Anzahl von Werten δ.

Daß schließlich auch die α nur eine endliche Zahl verschiedener Werte annehmen können, schließen wir ohne weitere Rechnung folgendermaßen. Die zu $\left(\left(y = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right)\right)$ inverse Substitution hat gleichfalls die Eigenschaft, zwei Punkte von D_1 in einander überzuführen. Sie hat aber die Form $\left(\left(x = \frac{\delta y - \beta}{-\gamma y + \alpha}\right)\right)$, und daher überträgt sich das von δ gesagte sofort auf α.

Also kann in der Tat die Anzahl der Substitutionen, welchen äquivalente Punkte innerhalb D_1 entsprechen, nur noch eine endliche sein.

Unser Beweis ergibt aber noch mehr. Wenn nämlich alle imaginären Koordinaten $x_2, \cdots, x_2^{(n-1)}$ genügend groß gewählt sind, so gibt es überhaupt keinen von Null verschiedenen Wert γ mehr, welcher die aufgestellten Ungleichungen erfüllt. Es existiert daher oberhalb bestimmter imaginärer Koordinaten ein *unendlicher Teil unseres Bereichs* D_1, *zu dessen Punkten innerhalb* D_1 *überhaupt keine Äquivalenten mehr vorhanden sind.* Um also aus D_1 den tatsächlichen Fundamentalbereich von H auszuschneiden, haben wir nur noch ein gewisses *endliches* Gebiet abzutrennen.

f. Der Fundamentalbereich D.

Bis jetzt haben wir alle zur Aufstellung unseres Fundamentalbereiches erforderlichen Rechnungen noch allgemein vollständig durchführen können. Für den letzten Teil unserer Betrachtungen sind wir auf Angabe eines Schemas angewiesen, nach welchem die Aufstellung des gesuchten Fundamentalbereichs der Gruppe H in jedem speziellen Falle möglich ist, müssen aber auf vollständige Durchführung der Rechnung verzichten. Die einfachsten Beispiele aus dem quadratischen Körper zeigen sogar, daß diese Rechnungen recht mühevoll und langwierig sind.

Unsere Betrachtungen beruhen wesentlich auf der einfachen Eigenschaft jeder Substitution der Gruppe H, daß sie, auf einen Raumteil beliebiger Dimension angewandt, dessen Zusammenhang nicht ändert, daß sie also einen zusammenhängenden Raum wieder in einen zusammenhängenden und speziell einen einfach zusammenhängenden wieder in einen einfach zusammenhängenden u. s. w. überführt.

Wir werden im folgenden dem Begriff „zusammenhängend" einen etwas engeren Sinn beilegen, als es im allgemeinen üblich ist. Wir definieren folgendermaßen:

Ein $(2n)$-dimensionaler Bereich heißt zusammenhängend, wenn zwei beliebige Punkte A und B desselben sich durch eine stetige, ganz innerhalb des Bereichs verlaufende Linie l verbinden lassen, und um jeden Punkt von l eine $(2n)$-dimensionale Kugel von endlichem Radius beschrieben werden kann, welche gleichfalls noch ganz innerhalb des Bereiches liegt*).

Ein $(2n)$-dimensionaler Raum heißt ferner *„einfach zusammenhängend in Bezug auf p-dimensionale Gebilde"*, wenn jedes innerhalb des Raumes gelegene geschlossene p-dimensionale Gebilde sich innerhalb des Raumes auf ein Gebilde geringerer Dimension zusammenziehen läßt**). Wir werden zur Abkürzung einen $(2n)$-dimensionalen Raum „einfach zusammenhängend" schlechtweg nennen, wenn er in Bezug auf $(2n-1)$-dimensionale Gebilde einfach zusammenhängt, wenn sich also jede $(2n-1)$-dimensionale geschlossene Mannigfaltigkeit in seinem Innern auf eine Mannigfaltigkeit geringerer Dimension zusammenziehen läßt***).

Die Reduktion des Bereiches D_1 nehmen wir in folgender Weise vor:

---

*) In unserem Sinne ist z. B. die Fläche einer Lemniskate oder der Raum zwischen einer Kugel und einem Rotationsellipsoid von gleichem Mittelpunkt und gleichem Rotationsradius nicht mehr zusammenhängend.

**) s. Poincaré, Annales de l'Ecole Polytechnique, sér. 2, cah. 1, pg. 19; Picard-Simart, l. c., I, pg. 28. Man betrachtet dabei nur „einfache" Mannigfaltigkeiten, welche ein Inneres und ein Äußeres besitzen.

***) Der Raum im Innern einer Kugel und der Raum im Innern eines Ringes sind in diesem Sinne einfach zusammenhängend.

Wir bilden für jeden Punkt das Produkt $x_2 x_2' \cdots x_2^{(n-1)}$ der imaginären Koordinaten und behalten von jeder in D_1 gelegenen Reihe äquivalenter Punkte immer nur denjenigen bei, für welchen das genannte Produkt den größten Wert hat. Das Verfahren versagt nur dann, wenn es zwei äquivalente Punkte mit gleichem Produkt der imaginären Koordinaten gibt. Alle solchen Punkte aber müssen notwendig auf einer endlichen Anzahl $(2n-1)$-dimensionaler analytischer Mannigfaltigkeiten gelegen sein. In der Tat folgt für sie aus Gleichung (3) die Bedingung

$$g(\gamma, \delta) \equiv \prod [(\gamma x_1 + \delta)^2 + \gamma^2 x_2^2] = 1,$$

wo γ und δ Parameter der in Betracht gezogenen Substitution sind. Da es nur eine endliche Anzahl von Substitutionen gibt, welche Punkte von D_1 in Punkte desselben Gebietes überführen, so gibt es auch nur eine endliche Anzahl von Flächen $g = 1$. Die Reduktion auch dieser Flächen bereitet übrigens keine Schwierigkeiten und soll nicht ausführlicher verfolgt werden.

Unser Reduktionsverfahren schneidet aus D_1 einen Bereich D' aus, welcher von jeder nach der Gruppe H äquivalenten Reihe von Punkten ein und nur ein Exemplar enthält. Wir können über D' die Aussage machen:

Der Bereich D' besteht aus einer endlichen Anzahl zusammenhängender $(2n)$-dimensionaler Gebiete, und es läßt sich ein ihm äquivalenter zusammenhängender Bereich D finden, welcher der gesuchte Fundamentalbereich der Gruppe H ist.

Dem Beweise dieser Tatsache schicken wir eine einfache Bemerkung über die Flächen $g = 1$ voraus. Wir betrachten nämlich eine Substitution

$$\left(\!\left(y = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right)\!\right) \tag{2}$$

und die dazu gehörige Fläche $g(\gamma, \delta) = 1$ und fragen, in welche neue Fläche diese durch die Substitution übergeht. Der Punkt $(\!(x)\!)$ der Fläche werde in den Punkt $(\!(y)\!)$ übergeführt, und man hat

$$y_2 y_2' \cdots y_2^{(n-1)} = x_2 x_2' \cdots x_2^{(n-1)}.$$

Da nun umgekehrt $(\!(x)\!)$ aus $(\!(y)\!)$ hervorgeht durch die zu (2) inverse Substitution

$$\left(\!\left(x = \frac{\delta y - \beta}{-\gamma y + \alpha}\right)\!\right), \tag{2'}$$

so muß nach der obigen Gleichung der Punkt $(\!(y)\!)$ auf der Fläche

$$g(-\gamma, \alpha) = 1$$

liegen. Die Fläche $g(\gamma, \delta) = 1$ wird also durch (2) in die Fläche $g(-\gamma, \alpha) = 1$ übergeführt. Ferner gehen die Gebiete $g(\gamma, \delta) < 1$ über in die Gebiete $g(-\gamma, \alpha) > 1$.

Wir gehen hiernach an die Betrachtung des Bereiches D'. Ist $((y))$ ein Punkt im Inneren des Bereiches D_1, welchem innerhalb dieses Bereiches ein Äquivalenter $((x))$ mit größerem Produkt der imaginären Koordinaten entspricht, so läßt sich um $((y))$ eine gewisse einfach zusammenhängende Umgebung abtrennen, welcher um den Punkt $((x))$ gleichfalls eine Umgebung mit größerem Produkt der imaginären Koordinaten entspricht. Der Bereich D' entsteht daher dadurch, daß man aus D_1 einfach zusammenhängende Gebiete herausschneidet. Also setzt sich D' aus einer Anzahl von getrennten, zusammenhängenden $(2n)$-dimensionalen Gebieten S_k zusammen. Unter diesen Gebieten S_k befindet sich nach den Bemerkungen des vorhergehenden Abschnittes ein einziges unendliches Gebiet S_1. Alle übrigen liegen im Endlichen. Wir beweisen, daß ihre Anzahl eine endliche sein muß.

Zu diesem Zwecke fassen wir die Randflächen eines einzelnen derartigen Gebietes S_k ins Auge. Diese Randflächen zerfallen in zwei Gruppen: 1) solche Flächen, welche gleichzeitig Randflächen von D_1 sind, und 2) solche, welche ganz im Inneren von D_1 verlaufen. Sei r_i eine dieser letzteren Randflächen. Ihr entspricht an einem anderen Gebiet $S_{k'}$ eine Randfläche $r_{i'}$, so daß r_i durch eine Substitution (2) in $r_{i'}$ übergeht. Es sind dann zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem r_i in Bezug auf die Substitution (2) Teil der Fläche $g = 1$ ist oder nicht. Im ersteren Fall ist $r_{i'}$ Teil der Fläche $g(-\gamma, \alpha) = 1$. Im anderen Falle können wir voraussetzen, daß an der Fläche r_i die Ungleichung $g < 1$ besteht*). Dann muß die Fläche $r_{i'}$ Teil der Berandung des Bereiches D_1 sein. Läge in der Tat $r_{i'}$ im Innern des Bereiches D_1, so schlösse sich an die Fläche $r_{i'}$ ein ganz im Innern von D_1 gelegenes Gebiet an, welches äquivalent wäre zu einem Teil des Gebietes S_k und außerdem die Eigenschaft besäße, daß für jeden Punkt dieses Gebietes das Produkt der imaginären Koordinaten größer wäre als an den entsprechenden Punkten von S_k, was nach der Definition des Bereiches D' nicht möglich ist.

Die sämtlichen inneren Randflächen r_i der Gebiete S_k werden daher gebildet: entweder von Flächen $g = 1$, oder von solchen Flächen, welche nach einer der Substitutionen (2) einer Berandungsfläche des Bereiches D_1 äquivalent sind. Die Randflächen r_i gehören also einer *endlichen Anzahl* $(2n-1)$-*dimensionaler analytischer Mannigfaltigkeiten* an. Diese Mannigfaltigkeiten können aber im Endlichen nur eine endliche Anzahl getrennter, zusammenhängender Bereiche begrenzen**). Die Anzahl der Gebiete S_k ist daher eine endliche.

---

*) Die Notwendigkeit dieser Annahme ergibt sich aus dem folgenden Beweise.

**) Man zeigt nämlich, daß ein regulärer Punkt der begrenzenden Mannigfaltigkeiten nicht Häufungspunkt unendlich vieler getrennter Bereiche sein kann.

Hiermit ist der erste Teil unserer Aussage über D' bewiesen. Der Beweis des zweiten Teiles beruht auf einer Hilfsbetrachtung, mit der wir uns zunächst zu beschäftigen haben.

Wir fassen denjenigen Teil des Bereiches D_1 ins Auge, in welchem die sämtlichen Ungleichungen

$$g(\gamma, \delta) > 1$$

gleichzeitig erfüllt sind. Dieser Teil ist unendlich groß und, wie leicht ersichtlich, zusammenhängend. Er soll zur Abkürzung mit F bezeichnet werden. Im Inneren von F liegen dann sicherlich keine äquivalenten Punkte mehr. F fällt also entweder mit dem Gebiet S_1 zusammen oder ist in S_1 enthalten.

Wir behaupten: *Es kann, mit Ausnahme von S_1, kein Gebiet S_k geben, dessen innere Randflächen sämtlich Flächen $g = 1$ sind.*

In der Tat, ist S_k ein derartiges Gebiet, und sind

$$g_1 \equiv g(\gamma_1, \delta_1) = 1, \cdots, g_s \equiv g(\gamma_s, \delta_s) = 1$$

seine inneren Randflächen, so können wir zunächst annehmen, daß im Inneren von S_k die sämtlichen Funktionen $g_1, \cdots, g_s$ Werte größer als 1 haben. Dann aber ist S_k ein unendliches Gebiet, welches den Teil F enthält, also mit S_1 identisch. Wir müssen also annehmen, daß für eine der Funktionen g, beispielsweise für g_1, im Inneren von S_k die Ungleichung besteht

$$g_1 < 1.$$

Eine der zu g_1 gehörigen Substitutionen (2) führt dann das Flächenstück $g_1 = 1$ in ein Flächenstück r über, welches, wie schon oben bewiesen, Berandungsfläche von D_1 sein muß. Andererseits aber ist r Teil einer Fläche $g = 1$. Solche Flächen aber kommen unter den Berandungsflächen von D_1 nicht vor, und daher ist unsere Annahme unmöglich.

Unter den inneren Randflächen r_i eines beliebigen Stückes $S_k (k \neq 1)$ muß sich daher mindestens eine, r', vorfinden, welche einer Berandungsfläche von D_1 entspricht, womit der Hilfssatz bewiesen ist.

Nunmehr können wir zur Aufstellung des zusammenhängenden Bereiches D schreiten, welcher dem Bereich D' äquivalent ist.

Betrachten wir nämlich ein Gebiet S_k und seine Randfläche r'. Dieser entspricht vermittelst einer bestimmten Substitution (2) an einem Gebiete $S_{k'}$ ein Flächenstück, welches zur Berandung des Bereiches D_1 gehört. Üben wir nun auf S_k diese Substitution (2) aus, so geht es über in ein Gebiet S_k', welches sich von außen an das Gebiet $S_{k'}$ ansetzt und mit diesem zusammen ein zusammenhängendes Gebiet bildet. Hierdurch aber ist die Anzahl der getrennten Gebiete von D' um 1 vermindert. Der Prozeß läßt sich so lange fortsetzen, bis alle getrennten Gebiete S_k

an das Gebiet S_1 angesetzt sind. Der so entstandene Bereich enthält von jeder Reihe nach der Gruppe H äquivalenter Punkte ein und nur ein Exemplar. *Er ist also der gesuchte Fundamentalbereich D.*

Wir wollen von ihm beweisen, daß er nicht nur zusammenhängend, sondern auch *einfach zusammenhängend* ist.

Wäre er nämlich nicht einfach zusammenhängend, so gäbe es in ihm eine „einfache" Mannigfaltigkeit M von der $(2n-1)^{\text{ten}}$ Dimension, welche sich innerhalb des Bereiches nicht auf eine Mannigfaltigkeit geringerer Dimension zusammenziehen läßt.

Betrachten wir nun das Innere dieser Mannigfaltigkeit, so muß es eine Substitution geben, welche einen Punkt dieses Innern in einen Punkt von D überführt. Dann muß sich aber umgekehrt der ganze Bereich D als zusammenhängend auf das Innere von M abbilden, und zwar geht er wieder in einen mehrfach zusammenhängenden Bereich δ_1 über.

Wenden wir auf δ_1 die nämliche Betrachtungsweise an, so finden wir, daß in ihm ein mehrfach zusammenhängender äquivalenter Fundamentalbereich δ_2 enthalten sein muß. Dieses Verfahren läßt sich unbegrenzt fortsetzen und ergibt schließlich im Innern von T einen Punkt, gegen welchen sich unendlich viele Äquivalente häufen müssen. Dies ist aber unmöglich und sonach bewiesen, daß D einfach zusammenhängend ist.

Die Gruppe H besitzt innerhalb T einen einfach zusammenhängenden Fundamentalbereich D, welcher mit dem Rande von T allein den unendlich fernen Punkt gemein hat. Die äquivalenten Fundamentalbereiche sind in unendlicher Zahl vorhanden und häufen sich gegen die Räume R.

Die Ränder von D entsprechen einander paarweise; damit auf dem Rande immer nur *ein* Äquivalenter zu jeder Punktreihe auftrete, ist betreffs der Flächenpaare noch eine geeignete Festsetzung zu treffen.

g. Ein zahlentheoretischer Satz über die Einheiten.

Wir wollen anhangsweise einen Satz über die Einheiten eines beliebigen algebraischen Körpers mitteilen, welcher zuerst von Herrn *Hilbert* ohne Beweis aufgestellt wurde, dessen Beweis sich aber mit Hilfe der Raumreduktion einfach erledigen läßt.

Der Satz lautet:

Zu jeder Zahl α mit der Norm $n(\alpha)$ eines beliebigen Zahlkörpers k vom m^{ten} Grade läßt sich eine Einheit ε derart finden, daß die sämtlichen konjugierten Zahlen

$$\varepsilon\alpha,\ \varepsilon'\alpha',\cdots,\ \varepsilon^{(m-1)}\alpha^{(m-1)}$$

den Ungleichungen genügen

$$|\varepsilon\alpha| < c\sqrt[m]{|n(\alpha)|}, \cdots, |\varepsilon^{(m-1)}\alpha^{(m-1)}| < c\sqrt[m]{|n(\alpha)|},$$

wo c eine nur von dem Körper abhängige Konstante bedeutet.

Unter den m konjugierten Körpern $k, k', \cdots, k^{(m-1)}$ sollen r_2 konjugiert imaginäre Körperpaare existieren. Die übrigen r_1 Körper seien reell. Alsdann gibt es in dem Körper $r = r_1 + r_2 - 1$ Fundamentaleinheiten $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_r$. Betrachten wir nun eine ganze Zahl α mit ihren sämtlichen Konjugierten und bilden die absoluten Beträge $|\alpha|, |\alpha'|, \cdots, |\alpha^{(m-1)}|$. Da immer zwei konjugiert imaginäre Zahlen denselben absoluten Betrag haben, so gibt es unter den absoluten Beträgen $r_1 + r_2 = r + 1$ verschiedene. Die Hauptwerte der Logarithmen zu diesen $r+1$ absoluten Beträgen bezeichnen wir mit $X, X', \cdots, X^{(r)}$ und deuten die (X) als cartesische Koordinaten im $(r+1)$-dimensionalen Raume, und zwar seien die Koordinaten $X, \cdots, X^{(r_1-1)}$ den reellen, die Koordinaten $X^{(r_1)}, \cdots, X^{(r)}$ den imaginären Körpern zugeordnet. Jeder ganzen Zahl α des Körpers entspricht dann in diesem Raume ein *„Gitterpunkt“*. — Wir nehmen ferner eine Fundamentaleinheit ε_i und bilden die Logarithmen $l_i^{(k)}$ zu den $r+1$ verschiedenen absoluten Beträgen ihrer Konjugierten. Jedes System (l_i) deuten wir als die Projektionen eines Vektors V_i. Alle diese Vektoren wirken parallel zu der Hyperebene

(12) $$e \equiv X + \cdots + X^{(r_1-1)} + 2X^{(r_1)} + \cdots + 2X^{(r)} = 0.$$

Wir haben also in unserem $(r+1)$-dimensionalen Raume r windschiefe*) Vektoren und können sonach den ganzen Raum reduzieren auf ein Prisma, welches die Gerade

(13) $$X : X' : \cdots : X^{(r)} = 1 : 1 : \cdots : 1$$

zur Achse hat. Dann ist aber insbesondere auch das Punktgitter auf dieses Prisma reduziert.

Nun entsprechen alle Gitterpunkte, welche auf der gleichen Hyperebene e liegen, Zahlen mit der gleichen Norm. Dies ergibt sich in der Tat aus (12) durch den Übergang vom Logarithmus zum Numerus. Betrachten wir nun diejenige Hyperebene e_1, welcher ein bestimmter Gitterpunkt $((X = \lg|\alpha|))$ angehört, und ihren Schnitt mit der Geraden (13). Die Koordinaten des Schnittpunktes haben die Werte

$$X = \cdots = X^{(r)} = \frac{e_1}{m} = \frac{\lg|n(\alpha)|}{m}.$$

---

*) „Windschief“ bedeutet, daß die Vektoren in keinem ebenen Gebilde von geringerer als r^{ter} Dimension gleichzeitig enthalten sind. Es folgt dies daraus, daß die Determinanten r^{ter} Ordnung der Matrix $L = \| l_i^{(k)} \|$ bis auf Potenzen von 2 mit dem Regulator R des Körpers übereinstimmen und daher nicht verschwinden können. Wir haben nämlich z. B., wenn wir die Determinante für die r ersten Körper bilden,

$$L = \frac{1}{2^{r_2-1}} R.$$

Ist dann $(\!(X_1)\!)$ der zu $(\!(X)\!)$ äquivalente Gitterpunkt innerhalb des r-dimensionalen Parallelogramms, welches unser Prisma aus der Hyperebene e_1 ausschneidet, so differieren seine Koordinaten von denen des oben betrachteten Schnittpunktes nur um endliche Größen. Wir können also setzen

$$\left|X_1 - \frac{e_1}{m}\right| < C, \cdots, \left|X_1^{(r)} - \frac{e_1}{m}\right| < C, \tag{14}$$

wo C für die sämtlichen Hyperebenen e_1 den gleichen Wert hat.

Nun ist

$$X_1 = \lg|\alpha_1|, \cdots, X_1^{(r)} = \lg|\alpha_1^{(r)}|,$$

wo

$$\alpha_1 = \varepsilon\alpha, \qquad \cdots, \quad \alpha_1^{(r)} = \varepsilon^{(r)}\alpha^{(r)}$$

und ε eine Einheit ist. Daher ergibt sich aus den Gleichungen (14) durch Übergang von Logarithmus zum Numerus

$$|\varepsilon\alpha| < c\sqrt[m]{|n(\alpha)|}, \cdots, |\varepsilon^{(r)}\alpha^{(r)}| < c\sqrt[m]{|n(\alpha)|},$$

wo $c = e^C$ gesetzt ist.

Dies ist aber genau der zu beweisende Satz.

Durch Anwendung der Ungleichungen (II) läßt sich C genauer bestimmen. Man erhält

$$\left|X^{(i)} - \frac{e_1}{m}\right| \leqq \sum_{1}^{r}{}_k \frac{|l_k^{(i)}|}{2},$$

wo i einen der Indices $0, \cdots, r$ bedeutet.

Teil II.

Nachdem in Teil I die Existenz eines einfach zusammenhängenden Fundamentalbereichs für die Gruppe H nachgewiesen ist, soll es sich in diesem zweiten Teile darum handeln, *Funktionen* aufzustellen, welche sich der Gruppe gegenüber *invariant* verhalten, d. h. durch jede Substitution der Gruppe in sich übergeführt werden. Derartige Funktionen nehmen innerhalb des Fundamentalbereichs ihren gesamten Wertevorrat an: sie haben also den Fundamentalbereich der Gruppe zum (funktionentheoretischen) Fundamentalbereich. Wir werden sie kurz *Funktionen des Fundamentalbereichs* oder *Funktionen von D* nennen. Wir können sofort eine wesentliche Aussage über sie machen: *sie haben die Räume R zu natürlichen Grenzen.* Da nämlich die Fundamentalbereiche sich gegen die Räume R häufen, können wir nach jedem Punkt von R einen analytischen Weg konstruieren, längs dessen sich die Funktionen bei Annäherung an den Punkt keinem bestimmten Werte nähern. Man hat dazu den Weg nur so zu legen, daß er unendlich viele Fundamentalbereiche durchzieht*). Die Räume R sind daher von Singularitäten ganz erfüllt und somit natürliche Grenzen.

Die Aufstellung der Funktionen des Fundamentalbereichs durch Reihen, der Beweis ihrer Konvergenz sowie die daran sich anschließenden Betrachtungen über die Unabhängigkeit der Funktionen von einander und ihr Verhalten im Unendlichen erfolgen nach Methoden, welche von Herrn *Picard***) herrühren. Einige auf den vorliegenden Fall passende Modifikationen gibt auch Herr *Bourget****).

Betreffs der Bezeichnungen schicken wir voraus, daß die zu einer Zahl $\nu = \nu_1 + i\nu_2$ konjugiert imaginäre Zahl durch $\bar{\nu} = \nu_1 - i\nu_2$, das Produkt $\nu\bar{\nu}$ durch $N\{\nu\}$ bezeichnet werden soll.

a. Aufstellung der Picardschen Reihen und Konvergenzbeweis.

Picards Methode†) bezieht sich auf Gruppen mit Fundamentalbereich, *vorausgesetzt, daß die Gesamtheit aller Fundamentalbereiche nur ein endliches Gebiet überdeckt.* Da diese Bedingung bei der Gruppe H nicht erfüllt ist, führen wir zunächst durch eine lineare Transformation jeder Variabeln die positiven Halbebenen in das Innere der Einheitskreise über††). Seien $S, S', \cdots, S^{(n-1)}$ diese Transformationen in den verschiedenen Ebenen, (S) sei ihre Gesamtheit, ihre Determinanten seien $= 1$ vorausgesetzt, $\xi, \xi', \cdots, \xi^{(n-1)}$ seien die transformierten Koordinaten. Dem $\frac{1}{2^n}$-Teilraume $\ddot{T}$ entspricht in dem transformierten Raume das endliche Gebiet τ:

$$|\xi| \leqq 1, \cdots, |\xi^{(n-1)}| \leqq 1.$$

An Stelle der Fundamentalbereiche D treten Bereiche Δ, welche vermittelst der Substitutionen

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} S^{-1}, \cdots, \begin{pmatrix} \alpha_1^{(n-1)} & \beta_1^{(n-1)} \\ \gamma_1^{(n-1)} & \delta_1^{(n-1)} \end{pmatrix} = S^{(n-1)} \begin{pmatrix} \alpha^{(n-1)} & \beta^{(n-1)} \\ \gamma^{(n-1)} & \delta^{(n-1)} \end{pmatrix} S^{(n-1)^{-1}}$$

in einander übergehen. Dabei sind die Symbole $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ in bekannter Weise

*) Daß in der Tat *jeder* Punkt von R Häufungsstelle von Fundamentalbereichen ist, erkennt man daraus, daß die Fixpunkte der hyperbolischen Substitutionen die Räume R überall dicht erfüllen.

**) Picard, fonctions hyperfuchsiennes, Acta 1 (1882), 5 (1884); Soc. Math. de France 15 (1887); fonctions hyperabéliennes, Journal de Liouville, IV, 1 (1885).

***) Bourget, Annales de la Faculté de Toulouse, 12 (1898); Thèses de la Faculté des Sciences de Paris 1898.

†) Siehe besonders Acta 1, pg. 310ff.; Liouville, IV, 1, pg. 109ff.

††) Siehe Picard, Soc. Math. 15 (1887) und Bourget, Thèse, pg. 78.

für die Substitutionen $y = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ gesetzt, und das Produkt SS_1 bedeutet, daß zuerst die Transformation S_1, dann die Transformation S ausgeführt werden soll. Die neue Gruppe ist die Transformierte von H nach (S) und soll mit X bezeichnet werden. Die Determinanten der Substitutionen von X sind die gleichen wie die der entsprechenden Substitutionen von H. Daraus ergibt sich leicht die allgemeine Form der Substitutionen von X. Da sie in jeder Ebene das Innere des Einheitskreises in sich selbst überführen und außerdem positive Determinanten haben, müssen sie alle von der Form sein

$$(1) \qquad v = \frac{\bar{\delta}_1 \xi + \bar{\gamma}_1}{\gamma_1 \xi + \delta_1}, \ldots, v^{(n-1)} = \frac{\bar{\delta}_1^{(n-1)} \xi^{(n-1)} + \bar{\gamma}_1^{(n-1)}}{\gamma_1^{(n-1)} \xi^{(n-1)} + \delta_1^{(n-1)}}.$$

Auf die Gruppe X läßt sich dann die Picardsche Methode anwenden. Bezeichnen wir mit τ' ein ganz in τ enthaltenes Gebiet, welches überall in endlicher Entfernung von dem Rande von τ bleibt, so besteht der Satz:

Ist $F'(\xi, \cdots, \xi^{(n-1)}) = F'((\xi))$ *eine rationale Funktion von* $((\xi))$, *welche im Innern und auf dem Rande von* τ *überall regulär und endlich ist,* p *eine positive ganze Zahl, und erstrecken wir die Summe*

$$(2) \qquad \sigma^{(p)}((\xi)) = \sum \frac{F'\left(\left(\frac{\bar{\delta}_1 \xi + \bar{\gamma}_1}{\gamma_1 \xi + \delta_1}\right)\right)}{\prod (\gamma_1 \xi + \delta_1)^p},$$

wo

$$\prod (\gamma_1 \xi + \delta_1) = (\gamma_1 \xi + \delta_1) \cdots (\gamma_1^{(n-1)} \xi^{(n-1)} + \delta_1^{(n-1)})$$

gesetzt ist, über alle möglichen Substitutionen (1) *der Gruppe* X, *so konvergiert* $\sigma^{(p)}$ *für* $p \geq 4$ *gleichmäßig in* τ' *und stellt dort eine analytische Funktion dar, welche sich bei Substitutionen der Gruppe nur um einen Faktor ändert.*

Der letzte Teil des Satzes ist leicht einzusehen, denn eine Substitution (1) führt das Glied $\frac{F'\left(\left(\frac{\bar{d} \xi + \bar{c}}{c \xi + d}\right)\right)}{\prod (c\xi + d)^p}$ von $\sigma^{(p)}$ über in

$$\frac{F'\left(\left(\frac{\bar{d}_1 \xi + \bar{c}_1}{c_1 \xi + d_1}\right)\right)}{\prod (c_1 \xi + d_1)^p} \prod (\gamma_1 \xi + \delta_1)^p,$$

und $\begin{pmatrix} \bar{d}_1 & \bar{c}_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ ist abermals eine Substitution von X, so daß also die Gesamtheit der Glieder bis auf einen Faktor in sich selbst übergeht.

Der Konvergenzbeweis geht aus von den Gleichungen (1) und beruht auf Betrachtung der Funktionaldeterminante J der $2n$ reellen Funktionen

$$v_1,\ v_2,\ v_1',\ v_2',\cdots,\ v_1^{(n-1)},\ v_2^{(n-1)},$$

nach den $2n$ Veränderlichen

$$\mathfrak{x}_1,\ \mathfrak{x}_2,\ \mathfrak{x}_1',\ \mathfrak{x}_2',\cdots,\ \mathfrak{x}_1^{(n-1)},\ \mathfrak{x}_2^{(n-1)}.$$

Eine leichte Rechnung gibt für J den Wert

$$J = \frac{1}{N\left\{\prod(\gamma_1\mathfrak{x}+\delta_1)^2\right\}} = \frac{1}{\left|\prod(\gamma_1\mathfrak{x}+\delta_1)\right|^4}. \tag{3}$$

Nach den Voraussetzungen über die Funktion F' konvergiert die Reihe (2) gleichzeitig mit der Reihe

$$\varsigma^{(p)} = \sum \frac{1}{\left|\prod(\gamma_1\mathfrak{x}+\delta_1)\right|^p}.$$

Es ist aber leicht zu beweisen, daß die Reihe $\varsigma^{(4)}$ im Innern von τ' gleichmäßig konvergiert. Betrachten wir nämlich das über das endliche Gebiet τ erstreckte Raum-Integral

$$\int\limits_{(\tau)} d\mathfrak{x}_1\, d\mathfrak{x}_2 \cdots d\mathfrak{x}_1^{(n-1)}\, d\mathfrak{x}_2^{(n-1)}.$$

Da der Fundamentalbereich Δ mit seinen Äquivalenten das Gebiet τ eindeutig und lückenlos überdeckt, läßt sich das Integral transformieren in die Form

$$\int\limits_{(\Delta)} d\mathfrak{x}_1\, d\mathfrak{x}_2 \cdots d\mathfrak{x}_1^{(n-1)}\, d\mathfrak{x}_2^{(n-1)} \left(\sum J\right)$$

$$= \int\limits_{(\Delta)} d\mathfrak{x}_1\, d\mathfrak{x}_2 \cdots d\mathfrak{x}_1^{(n-1)}\, d\mathfrak{x}_2^{(n-1)} \left(\sum \frac{1}{\left|\prod(\gamma_1\mathfrak{x}+\delta_1)\right|^4}\right)$$

$$= \int\limits_{(\Delta)} \varsigma^{(4)}\, d\mathfrak{x}_1\, d\mathfrak{x}_2 \cdots d\mathfrak{x}_1^{(n-1)}\, d\mathfrak{x}_2^{(n-1)}.$$

Dieses Integral hat also einen endlichen Wert. Sei ferner Δ' der im Innern von τ' gelegene Teil von Δ und δ ein Gebiet im Inneren von Δ'. Dann bleibt auch der Ausdruck

$$\frac{1}{\delta}\int\limits_{(\delta)} \varsigma^{(4)}\, d\mathfrak{x}_1\, d\mathfrak{x}_2 \cdots d\mathfrak{x}_1^{(n-1)}\, d\mathfrak{x}_2^{(n-1)}$$

unterhalb einer endlichen Größe*). Durch Grenzübergang zu beliebig

---

*) Man vergleiche nämlich Maximum und Minimum von J innerhalb Δ' mit einander: das Verhältnis $\frac{\max}{\min}$ ist kleiner als eine von γ_1, δ_1 unabhängige Zahl C. Daraus ergibt sich mit Hilfe des 1. Mittelwertsatzes

$$\frac{1}{\delta}\int\limits_{(\delta)} < \frac{C}{\Delta'}\int\limits_{(\Delta')}.$$

kleinem δ ergibt sich, daß $g^{(4)}$ innerhalb τ' gleichmäßig konvergieren muß. Sonach konvergiert auch die Reihe $\sigma^{(4)}$ absolut und gleichmäßig innerhalb τ'; und dasselbe gilt für alle Reihen $\sigma^{(p)}((\xi))$ $(p > 4)$. Da endlich die einzelnen Glieder von $\sigma^{(p)}$ innerhalb τ' regulär sind, so ist $\sigma^{(p)}$ eine innerhalb dieses Gebiets reguläre Funktion, und ihre Ableitungen ergeben sich durch gliedweise Differentiation.

Wir haben nunmehr von der Gruppe X zu der Gruppe H zurückzukehren. Die Transformation (S) nehmen wir folgendermaßen vor. Wir wählen in T einen Punkt $((\varkappa))$, der *im Innern* eines Fundamentalbereichs liegt und daher durch keine von der Einheit verschiedene Substitution der Gruppe H in sich übergeht. Dann bestehe die Transformation (S) aus den Substitutionen, die bei passender Kürzung Determinanten 1 erhalten,

$$\xi = \frac{x - \varkappa}{x - \bar{\varkappa}}, \ldots, \xi^{(n-1)} = \frac{x^{(n-1)} - \varkappa^{(n-1)}}{x^{(n-1)} - \bar{\varkappa}^{(n-1)}}.$$

Indem wir für (ξ), γ_1, δ_1 die Werte in den (x), α, β, γ, δ in die Formel (2) einsetzen und beachten, daß $F'((\xi))$ in eine rationale Funktion $F((x))$ übergeht, welche innerhalb und auf dem Rande von T regulär und endlich ist, *erhalten wir dann nach einfacher Rechnung eine Funktion von* $((x))$

$$\Theta^{(p)}((x)) = \sum \frac{F\left(\left(\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}\right)\right)}{\prod [(\alpha - \bar{\varkappa}\gamma)x + (\beta - \bar{\varkappa}\delta)]^p}. \tag{4}$$

Diese ist im Innern von T regulär und multipliziert sich bei einer Substitution $\begin{pmatrix} \mu & \nu \\ \lambda & \varrho \end{pmatrix}$ der Gruppe H mit dem Faktor

$$\prod (\lambda x + \varrho)^p. \tag{5}$$

Lasse ich den Punkt $((x))$ innerhalb T so nach dem Unendlichen wandern, daß mindestens einer der imaginären Bestandteile (x_2) unendlich groß wird, während die anderen nicht gegen Null gehen, so konvergiert Θ gegen Null. Denn die Reihe (4) hört auf dem ganzen Wege nicht auf zu konvergieren, und jedes ihrer Glieder wird beliebig klein, wie folgende einfache Rechnung zeigt. Wir haben unter Benutzung der Formel (3) in Teil I, a

$$\begin{aligned} N\{(\alpha - \bar{\varkappa}\gamma)x + (\beta - \bar{\varkappa}\delta)\} &= N\{\gamma x + \delta\} N\left\{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta} - \bar{\varkappa}\right\} \\ &= \eta \frac{x_2}{y_2} N\{y - \bar{\varkappa}\} \\ &\geq \eta x_2 \frac{(y_2 + \varkappa_2)^2}{y_2} \geq 4\eta x_2 \varkappa_2 \end{aligned} \tag{6}$$

und daher auch

$$\left|\prod[(\alpha-\bar{\varkappa}\gamma)x+(\beta-\bar{\varkappa}\delta)]^2\right|\geqq 4^n x_2 x_2'\cdots x_2^{(n-1)}\prod\varkappa_2.$$

Also konvergiert Θ insbesondere auch bei Fortgang innerhalb des Fundamentalbereichs gegen Null.

b. Unabhängigkeit der Picardschen Reihen von einander. Die Quotienten $\chi((x))$.

Durch geeignete Wahl der rationalen Funktionen F und des Exponenten p lassen sich n Funktionen

$$\Theta_1((x)),\cdots,\Theta_n((x))$$

konstruieren, deren Funktionaldeterminante nach den $x, x', \cdots, x^{(n-1)}$ nicht identisch verschwindet.

Wir weisen nämlich die Existenz von n Funktionen nach, deren Funktionaldeterminante am Punkte $((\varkappa))$ nicht verschwindet. Dies geschieht nach Picardscher*) Methode. Wir zeigen, daß für $((x))=((\varkappa))$ die Reihe Θ sich bis auf eine beliebig kleine Größe bei genügend großem p durch den Term

$$\frac{1}{\prod(\varkappa-\bar{\varkappa})^p}F((\varkappa))=\frac{1}{\prod(2i\varkappa_2)^p}F((\varkappa))$$

darstellen läßt.

Zu dem Zwecke betrachten wir die Ausdrücke

$$\prod N\{(\alpha-\bar{\varkappa}\gamma)\varkappa+(\beta-\bar{\varkappa}\delta)\}.$$

Der der Einheitssubstitution $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ entsprechende Ausdruck hat den Wert $\prod(4\varkappa_2^2)$. Für alle anderen Substitutionen aber ist der Ausdruck größer als $\prod(4\varkappa_2^2)$. Wir haben in der Tat nach (6)

$$N\{(\alpha-\bar{\varkappa}\gamma)\varkappa+(\beta-\bar{\varkappa}\delta)\}=\eta\frac{\varkappa_2}{\varpi_2}N\{\varpi-\bar{\varkappa}\},$$

wo

$$((\varpi))=\left(\left(\frac{\alpha\varkappa+\beta}{\gamma\varkappa+\delta}\right)\right)$$

gesetzt ist. Da $((\varkappa))$ nur durch die Einheitssubstitution in sich selbst übergeht, ist $((\varpi))$ von $((\varkappa))$ verschieden und folglich

$$N\{\varpi-\bar{\varkappa}\}\geqq(\varpi_2+\varkappa_2)^2>4\varpi_2\varkappa_2.$$

Daher ist

$$N\{(\alpha-\bar{\varkappa}\gamma)\varkappa+(\beta-\bar{\varkappa}\delta)\}>4\eta\varkappa_2^2$$

*) Acta 5, pg. 166ff.

und

$$\prod N\{(\alpha-\bar{\pi}\gamma)\pi+(\beta-\bar{\pi}\delta)\}>\prod(4\pi_2^2).$$

Wählen wir also p genügend groß, so werden alle Glieder der Reihe Θ neben dem größten Gliede $\frac{F(\pi)}{\prod(2i\pi_2)^p}$ beliebig klein, und auch ihre Summe rückt unter jeden Bruchteil dieses Gliedes: die Reihe Θ reduziert sich also merklich auf ihr größtes Glied.

Ebenso werden sich alle Ableitungen von Θ nach (x) auf ihre ersten Glieder reduzieren. Nehmen wir also n Funktionen Θ von dem gleichen genügend hohen p an und betrachten ihre Funktionaldeterminante am Punkte $((\pi))$, so haben wir nur die ersten Glieder der einzelnen Ableitungen zu berücksichtigen und können durch geeignete Wahl der Funktionen F erreichen, daß die Funktionaldeterminante noch einen von Null verschiedenen Wert annimmt.

Damit ist also die Existenz von n von einander unabhängigen Funktionen Θ_n von gleichem p sicher gestellt. Wir erkennen dann ebenso die Existenz einer Funktion Θ_{n+1} von demselben p, welche der Bedingung genügt, daß die n Quotienten $\frac{\Theta_1}{\Theta_{n+1}}, \cdots, \frac{\Theta_n}{\Theta_{n+1}}$ eine von Null verschiedene Funktionaldeterminante haben. Denn auch jeder dieser Quotienten reduziert sich in der Umgebung des Punktes $((\pi))$ wesentlich auf den Quotienten der ersten Glieder. Dann sehen wir aber:

Die n Quotienten

$$\chi_1((x))=\frac{\Theta_1}{\Theta_{n+1}}((x)),\cdots,\chi_n((x))=\frac{\Theta_n}{\Theta_{n+1}}((x)) \tag{7}$$

sind von einander unabhängig und stellen Funktionen dar, welche bei jeder Substitution der Gruppe H ungeändert bleiben.

Es gibt n von einander unabhängige Funktionen des Fundamentalbereichs D.

Dieser Satz bildet das Hauptziel dieses Paragraphen. Einer späteren Anwendung wegen (siehe Teil III, f) fügen wir aber noch folgende Bemerkung hinzu:

Wir betrachten m beliebige Punkte $A_1, \cdots, A_m$ des Teilraums T, dann gibt es Funktionen

$$\chi=\frac{\Theta}{\Theta'},$$

welche an allen m Punkten einen von Null verschiedenen Nenner Θ' haben und nie an zwei Punkten A den gleichen Wert annehmen.

Aus der Konvergenz der Reihen Θ folgt nämlich, daß von den Ausdrücken im Nenner $\prod[(\alpha-\bar{\pi}\gamma)x+(\beta-\bar{\pi}\delta)]$ für jeden Punkt $((x))$ immer nur eine endliche Anzahl den gleichen absoluten Betrag haben kann. Bei genügend großem p werden sich daher an allen m Punkten $A_1, \cdots, A_m$ die Reihen Θ und Θ' mit den rationalen Funktionen F, F' merklich auf eine endliche Anzahl von Gliedern reduzieren. Die Forderungen, daß Θ' an keinem dieser Punkte verschwinden, und χ an allen verschiedene Werte haben soll, erlegen dann den Funktionen F und F' nur eine endliche Anzahl von Bedingungen auf, welche immer erfüllbar sind.

Die Picardschen Entwicklungen gestatten übrigens auch für jede Untergruppe von H, beispielsweise für H_1, die Aufstellung der entsprechenden invarianten Funktionen und den Unabhängigkeitsbeweis für n derselben.

c. Die Funktionen des Fundamentalbereichs im Unendlichen.

Der Fundamentalbereich D hat mit der Begrenzung von T den unendlich fernen Punkt

$$x = x' = \cdots = x^{(n-1)} = \infty$$

gemein. In der Umgebung dieses Punktes kommen also die Funktionen Θ und χ jedem Werte beliebig nahe.

Wir haben aber bereits gesehen, daß bei Fortgang innerhalb des Fundamentalbereichs Θ nach dem bestimmten Werte 0 konvergiert. Wir wollen jetzt dieses Resultat vertiefen und insbesondere eine Entwicklung der Θ um den unendlich fernen Punkt herum ableiten.

Die Funktionen Θ sind nämlich im unendlich fernen Gebiete durch eine Fourier-Reihe darstellbar).*

Zum Beweise dieser Tatsache betrachten wir die einfachste (in Teil I, c untersuchte) Untergruppe von H

$$(\!(y = x + \beta)\!),$$

welche die n Erzeugenden hat

$$(\!(y = x + \omega_1)\!), \cdots, (\!(y = x + \omega_n)\!). \tag{8}$$

Jede Substitution dieser Untergruppe führt die Funktionen $\Theta(\!(x)\!)$ in sich über.

Wir definieren neue unabhängige Variabele durch die Gleichungen

$$\begin{cases} u' = \frac{1}{\Omega}(\Omega_1 x + \Omega_1' x' + \cdots + \Omega_1^{(n-1)} x^{(n-1)}), \\ \quad\vdots \\ u^{(n)} = \frac{1}{\Omega}(\Omega_n x + \Omega_n' x' + \cdots + \Omega_n^{(n-1)} x^{(n-1)}), \end{cases} \tag{9}$$

wo Ω, $\Omega_i^{(k)}$ die in I, c erklärte Bedeutung haben. Beschäftigen wir uns zunächst mit der durch die $(\!(u)\!)$ bewirkten Abbildung des Teilraumes T. Man erhält durch Umkehrung von (9) und Isolierung der imaginären Bestandteile die Ungleichungen

*) Picard, Acta 5, pg. 171; Bourget, l. c., pg. 85.

$$
(10) \qquad \begin{cases} x_2 \;\; = \;\; \omega_1 u_2' + \cdots + \;\; \omega_n u_2^{(n)} > 0, \\ \qquad \vdots \\ x_2^{(n-1)} = \omega_1^{(n-1)} u_2' + \cdots + \omega_n^{(n-1)} u_2^{(n)} > 0. \end{cases}
$$

Um diese Beziehungen in einfacher Weise deuten zu können, treffen wir nunmehr über die bis jetzt willkürlich gelassene Basis $\omega_1, \cdots, \omega_n$ spezielle Verabredungen. Wir werden nämlich die Basis dergestalt wählen, daß die *sämtlichen Größen* $\omega_i^{(k)}$ *positiv* werden. Dies ist in der Tat möglich: denn wir können zunächst $\omega_1 = 1$ setzen und im übrigen eine beliebige kanonische Basis $\overline{\omega}_2, \cdots, \overline{\omega}_n$ annehmen. Hat dann beispielweise unter den Größen $\overline{\omega}_2, \overline{\omega}_2', \cdots, \overline{\omega}_2^{(n-1)}$ die Zahl $\overline{\omega}_2^{(k)}$ den größten negativen Wert und ist E eine ganze Zahl $> |\overline{\omega}_2^{(k)}|$, so setzen wir

$$\omega_2 = E + \overline{\omega}_2 = E\omega_1 + \overline{\omega}_2 .$$

Das so entstehende Zahlensystem $\omega_1, \cdots, \omega_n$ ist dann allerdings eine kanonische Basis und hat die verlangte Eigenschaft.

Geben wir hiernach in den Ungleichungen (10) den $u_2', \cdots, u_2^{(n)}$ positive Werte, so nehmen auch die $x_2, \cdots, x_2^{(n-1)}$ positive Werte an. Wir finden also das Resultat:

Das Abbild des Teilraumes T im Raume der (u) ist ein von linearen, durch den Nullpunkt hindurchgehenden Mannigfaltigkeiten (Hyperebenen) begrenzter Bereich T_u, *welcher den Teilraum der positiven imaginären Koordinaten*

$$u_2' > 0, \cdots, u_2^{(n)} > 0$$

gänzlich enthält.

Der Vorteil der Variabelen (u) besteht in ihrem einfachen Verhalten gegenüber der Untergruppe (8); es ist nämlich

$$
(11) \qquad \begin{cases} u'(\!(x+\omega_1)\!) \;= u'(\!(x)\!) + 1, \;\; u^{(i)}(\!(x+\omega_1)\!) = u^{(i)}(\!(x)\!) \qquad (i=2, \cdots, n); \\ \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ u^{(i)}(\!(x+\omega_n)\!) = u^{(i)}(\!(x)\!), \qquad u^{(n)}(\!(x+\omega_n)\!) = u^{(n)}(\!(x)\!) + 1 \;\; (i=1, \cdots, n-1). \end{cases}
$$

Substituieren wir also die (u) in die Funktion $\Theta(\!(x)\!)$, so geht sie über in eine Funktion $t(\!(u)\!)$, welche innerhalb T_u analytisch ist und — nach (11) — ungeändert bleibt, wenn man eine Variable $u^{(i)}$ durch $u^{(i)} + 1$ ersetzt. Das heißt:

$t(\!(u)\!)$ *ist eine innerhalb* T_u *analytische, periodische Funktion sämtlicher Variabelen* $u^{(i)}$ *mit der Periode* 1.

Aus dieser Eigenschaft leiten wir die Fourier-Entwicklung von t ab. Betrachten wir nämlich zuerst t als Funktion von u' allein

$$t(\!(u)\!) = t_1(u').$$

t_1 ist für einen gegebenen in T_u gelegenen Strahl

$$u'' = a'', \cdots, u^{(n)} = a^{(n)}$$

in u' periodisch mit der Periode 1, bleibt bei beliebig zunehmendem u_2' analytisch und konvergiert gegen 0. Daraus folgt für $t_1(u')$ eine nach aufsteigenden Potenzen von $e^{2\pi i u'}$ fortschreitende Entwicklung in eine Fourier-Reihe

$$t_1(u') = \sum B_{m'} e^{2\pi i m' u'},$$

und diese Reihe konvergiert in der ganzen Ausdehnung des betrachteten Strahles, so lange er dem Gebiet T_u angehört. Das konstante Glied fehlt in dieser Entwicklung.

Die Koeffizienten $B_{m'}$ sind Funktionen der Variabelen $u'', \cdots, u^{(n)}$, und zwar sind sie in jeder dieser Variabelen überall analytisch und haben die Periode 1. Sie sind also als Fourier-Reihen in jeder einzelnen Variabeln darstellbar. Diese Fourier-Reihen sind außerdem aufsteigend. Denn halte ich alle Variabelen bis auf eine, $u^{(i)}$, fest und lasse diese gegen Unendlich wachsen, so geht $t((u))$ und also auch jeder einzelne Koeffizient $B_{m'}$ gegen 0.

Wir erhalten also schließlich eine aufsteigende Fourier-Entwicklung nach sämtlichen Variabelen

$$\Theta((x)) = t((u)) = \sum_{m' \cdots m^{(n)}} A_{m' \cdots m^{(n)}} e^{2\pi i (m' u' + \cdots + m^{(n)} u^{(n)})} \tag{12}$$

und diese Entwicklung konvergiert innerhalb des ganzen Teilraumes T_u bezw. T.

Setzt man noch zur Abkürzung

$$e^{2\pi i u'} = U', \cdots, e^{2\pi i u^{(n)}} = U^{(n)},$$

so erhält $\Theta((x))$ die Form einer innerhalb T gleichmäßig konvergenten Potenzreihe*)

$$\Theta((x)) = \sum A_{m' \cdots m^{(n)}} U'^{m'} \cdots U^{(n) m^{(n)}}. \tag{12a}$$

Die Koeffizienten $A_{m', \ldots, m^{(n)}}$ müssen so bestimmt werden, daß Θ den Substitutionen der affinen Untergruppe gegenüber sich invariant verhält und bei Substitutionen von H sich mit dem der Substitution entsprechenden Faktor multipliziert. Da nach der in I a zitierten *Hurwitz*schen Arbeit**) H nur eine endliche Anzahl erzeugender Substitutionen besitzt, so sind die $A_{m', \ldots, m^{(n)}}$ nur einer endlichen Anzahl von Bedingungssystemen unterworfen.

Übergang zu den χ ergibt: *Die Funktionen χ sind Quotienten von Potenzreihen nach den Variabelen $U', \cdots, U^{(n)}$.*

*) Das Resultat ist die Verallgemeinerung bekannter Verhältnisse in der Theorie der Modulfunktionen.

**) Göttinger Nachrichten 1895, pg. 332 ff.

Lassen wir den Punkt $(\!(x)\!)$ auf einem Wege ins Unendliche wandern, der ganz innerhalb des Fundamentalbereiches gelegen ist, so nähern sich die Θ dem Werte 0, dagegen werden sich die χ im allgemeinen keinem bestimmten Werte nähern, denn sie haben am unendlich fernen Punkte die Form $\frac{0}{0}$ und sind daher im allgemeinen völlig unbestimmt*). In speziellen Fällen dagegen können auch bestimmte Werte im Unendlichen angenommen werden.

Demgegenüber ist von Interesse der folgende Satz, der sich als eine teilweise Umkehrung des Bisherigen darstellt:

Wir betrachten eine Funktion $r(\!(x)\!)$ des Fundamentalbereiches, welche die Eigenschaft hat,

1) regulär zu sein an allen Punkten, an welchen sie nicht unendlich wird; 2) im Unendlichen bei Fortgang innerhalb des Fundamentalbereiches sich einem festen Grenzwert zu nähern, von dem wir außerdem annehmen wollen, daß er endlich ist.

Wir beweisen:

Die Funktion r läßt sich um den unendlich fernen Punkt herum in eine aufsteigende Fourier-Reihe nach allen Veränderlichen $u^{(i)}$ entwickeln.

Zum Beweise gebrauchen wir eine Ungleichung für die Lage der Unendlichkeitsstellen im ganzen Raume T. Da bei Fortrücken innerhalb des Fundamentalbereichs die Funktion im Unendlichen sich einem bestimmten endlichen Grenzwert c nähert, so besteht für die imaginären Koordinaten der Unendlichkeitsstellen innerhalb D die Ungleichung

$$x_2 x_2' \cdots x_2^{(n-1)} < S,$$

und diese selbe Ungleichung besteht auch in allen Fundamentalbereichen, welche aus D durch affine Transformation hervorgehen.

Nehmen wir nun eine nicht affine Transformation. Wir haben

$$y_2 = \frac{\eta x_2}{(\gamma x_1 + \delta)^2 + \gamma^2 x_2^2}, \;\ldots,\; y_2^{(n-1)} = \frac{\eta^{(n-1)} x_2^{(n-1)}}{(\gamma^{(n-1)} x_1^{(n-1)} + \delta^{(n-1)})^2 + \gamma^{(n-1)^2} x_2^{(n-1)^2}}$$

$$< \frac{\eta}{x_2 \gamma^2} \qquad ,\ldots, \qquad < \frac{\eta^{(n-1)}}{x_2^{(n-1)} \gamma^{(n-1)^2}}$$

und also

$$y_2 \cdots y_2^{(n-1)} < \frac{1}{x_2 \cdots x_2^{(n-1)} \prod \gamma^2} < \frac{1}{S}.$$

Bezeichnen wir daher mit s die größere der beiden Zahlen S und $\frac{1}{S}$, so ist die Funktion r innerhalb des ganzen Gebietes

*) Näheres in Teil III.

(13) $$x_2 \cdots x_2^{(n-1)} \geqq s$$

regulär.

Die Gleichung $x_2 \cdots x_2^{(n-1)} = s$ stellt im Raume der $((x_2))$ eine Fläche dar, welche reell ist in den 2^{n-1} Teilräumen, in welchen eine gerade Zahl von Koordinaten negativ ist. Sie besteht also aus 2^{n-1} getrennten Flächenstücken, deren jedes überall konvex ist und die begrenzenden Koordinaten-Hyperebenen zu Asymptotenflächen hat.

Gehen wir zu dem Raume der $((u_2))$ über, so transformiert sich nach (10) T in ein Gebiet T_{u_2}, welches den Teilraum der positiven Koordinaten $u_2', \cdots, u_2^{(n)}$ gänzlich enthält. Die Gleichung (13) liefert innerhalb T_{u_2} eine Fläche, welche sich asymptotisch den Begrenzungs-Hyperebenen nähert und ebenfalls überall konvex ist. Wenn also ein Punkt $((u_2))$ dem gemeinsamen Teile der Gebiete T_{u_2} und (13) angehört, so gehört ihm auch jeder Punkt von gleichen $u_2'', \cdots, u_2^{(n)}$, aber größerem u_2' an. Daher ist es möglich, die Funktion r innerhalb des beschriebenen Gebietes zunächst nach u' in eine aufsteigende Fourier-Reihe zu entwickeln.

Alle früheren Schlüsse lassen sich dann wiederholen und man kommt schließlich zu dem gewünschten Resultat, daß r sich in die Form einer Reihe (12) bezw. (12a) setzen läßt.

Wird aber im Unendlichen die Funktion r bestimmt unendlich bei Annäherung innerhalb des Fundamentalbereichs, so hat $\frac{1}{r}$ alle seine Unendlichkeitsstellen im Endlichen und läßt sich in eine aufsteigende Fourier-Reihe entwickeln.

Über reduzible lineare homogene Differentialgleichungen.

Von

ALFRED LOEWY in Freiburg i. Br.

In den folgenden Seiten kommen vorzüglich zwei Fragen der Theorie der linearen homogenen Differentialgleichungen, die auf das Innigste zusammenhängen, nämlich einerseits die Reduzibilität anderseits der Artbegriff bei linearen homogenen Differentialgleichungen, zur Sprache. Eine Voranzeige in den Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen (Jahrg. 1902, Heft 1) hat bereits über einen Teil der im § 3—§ 6 bewiesenen Sätze Mitteilung gemacht; daher kann betreffs des wesentlichen Inhalts dieser Paragraphen auf die dortigen Angaben verwiesen werden. § 1 giebt eine Zusammenstellung bereits bekannter Resultate, § 2 behandelt den Artbegriff bei linearen homogenen Differentialgleichungen, wobei die Differentialgleichungen auch von verschiedener Ordnung sein können, in weitgehenderer Weise als dies bisher geschehen ist.

§ 1.

Einleitende Betrachtungen über Reduzibilität bei linearen homogenen Differentialgleichungen.

Der Begriff der Reduzibilität einer linearen homogenen Differentialgleichung ist zuerst von Herrn G. Frobenius*) eingeführt worden. Um

*) G. Frobenius, Über den Begriff der Irreduzibilität in der Theorie der linearen homogenen Differentialgleichungen. Journ. f. d. r. u. ang. Math., Bd. 76, S. 236. Für die obige Definition der Irreduzibilität vgl. vorzüglich Beke, Die Irreduzibilität der linearen homogenen Differentialgleichungen. Math. Annalen, Bd. 45, S. 278ff. Ferner sehe man die Darstellung in Ludw. Schlesingers Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen, Bd. II_1, S. 104ff. (Leipzig 1897) sowie die Zusammenstellung bei G. Fano, Über lineare homogene Differentialgleichungen mit algebraischen Relationen zwischen den Fundamentallösungen, Math. Annalen, Bd. 53, S. 511.

diesen Begriff in einer für die folgenden Untersuchungen passenden Weise auseinandersetzen zu können, ist die vorherige Fixierung eines Rationalitätsbereiches erforderlich. Ein *Rationalitätsbereich* wird von irgend einem derartig vollständigen oder in sich abgeschlossenen Systeme von Funktionen einer unabhängigen Variablen x gebildet, daß man die Funktionen des Systemes unbeschränkt unter einander addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren, sowie eine jede differentieren kann, ohne hierdurch das vorgelegte Funktionensystem zu verlassen. Der Rationalitätsbereich, welcher den folgenden Untersuchungen zu Grunde liegt, kann, soweit es mit dem Begriffe selbst verträglich ist, ganz willkürlich gewählt werden; nachdem derselbe aber einmal gewählt ist, soll er fest sein und im Laufe der Untersuchung nicht mehr abgeändert werden.

Eine lineare homogene Differentialgleichung mit Koeffizienten aus dem zu Grunde liegenden Rationalitätsbereiche heißt *irreduzibel*, wenn sie mit keiner linearen homogenen Differentialgleichung niedrigerer Ordnung, die auch nur Koeffizienten aus dem Rationalitätsbereiche hat, ein Integral gemeinsam hat.

Hat eine lineare homogene Differentialgleichung mit Koeffizienten aus dem Rationalitätsbereiche mit einer ebenso beschaffenen Differentialgleichung niedrigerer Ordnung ein Integral gemeinsam, so heißt sie *reduzibel*.

Ist eine lineare homogene Differentialgleichung mit Koeffizienten aus dem Rationalitätsbereiche reduzibel, so gibt es eine oder mehrere lineare homogene irreduzible Differentialgleichungen mit Koeffizienten aus dem Bereiche, deren sämtliche Integrale ihr genügen.

Analog wie in der Theorie der algebraischen Gleichungen der Irreduzibilitätsbegriff mit der Galoisschen Gruppe der Gleichung zusammenhängt, so besteht in der Theorie der linearen homogenen Differentialgleichungen eine sehr enge Beziehung zwischen der auf die obige Art definierten Irreduzibilität und der Rationalitätsgruppe der linearen homogenen Differentialgleichungen, welche in natürlicher Ausdehnung Galoisscher Ideen von den Herren Picard*) und Vessiot**) eingeführt wurde. Auch die

---

*) E. Picard, Comptes rendus, April 1883, Oktober 1894, Dezember 1895. Annales de la faculté des sciences de Toulouse, t. 1 (1887). Traité d'analyse, t. 3 (1896), S. 531. Paris.

**) E. Vessiot, Sur l'intégration des équations différentielles linéaires. Annales de l'école normale, 3ᵉ sér., 9, (1892), S. 197. Die französischen Mathematiker und nach ihrem Vorgange auch Herr Ludwig Schlesinger in seinem Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen sprechen von der Transformationsgruppe einer linearen homogenen Differentialgleichung; die Bezeichnung „Rationalitätsgruppe" stammt von Herrn F. Klein.

Rationalitätsgruppe einer linearen homogenen Differentialgleichung erfordert die Fixierung eines Rationalitätsbereiches. Für die gleichzeitige Behandlung von Fragen, welche die Irreduzibilität und die Rationalitätsgruppe einer vorgelegten linearen homogenen Differentialgleichung betreffen, wird man natürlich den gleichen Rationalitätsbereich zu Grunde legen müssen.

Den folgenden Ausführungen soll überhaupt *ausnahmslos* ein und derselbe Rationalitätsbereich zu Grunde liegen, und ferner sollen *ausnahmslos alle Differentialgleichungen und Differentialfunktionen, welche in der vorliegenden Arbeit vorkommen werden, nur Koeffizienten aus diesem Bereiche haben;* dies werde ich im Folgenden nicht stets besonders betonen.

Mit Hilfe des Begriffes der Rationalitätsgruppe kann man folgendes, von Herrn Beke*) gefundenes Kriterium für die Irreduzibilität bezüglich Reduzibilität einer linearen homogenen Differentialgleichung angeben:

Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Irreduzibilität einer linearen homogenen Differentialgleichung ist die Irreduzibilität ihrer Rationalitätsgruppe. Eine jede reduzible lineare homogene Differentialgleichung hat eine reduzible Rationalitätsgruppe.

Es ist noch nötig, den Begriff einer irreduziblen Gruppe linearer Substitutionen, welcher bei dem obigen Satze benützt wurde, zu erklären. Ist $\mathfrak{G}$ irgend eine Gruppe linearer homogener Substitutionen in n Variablen und kann man diese Gruppe durch Einführung von neuen Variablen, welche lineare homogene Kombinationen der alten Variablen mit konstanten Koeffizienten sind, so transformieren, daß sich nach der Transformation bei allen Substitutionen der transformierten Gruppe ν der neuen Variablen, wobei $\nu < n$ ist, nur linear unter einander substituieren, so heißt die Gruppe $\mathfrak{G}$ *reduzibel***). Wir können diese Definition auch so aussprechen: Für eine reduzible Gruppe $\mathfrak{G}$ linearer homogener Substitutionen in n Variablen kann man stets eine solche Substitution N von n Variablen und nicht verschwindender Determinante finden, daß die Matrizes sämtlicher Substitutionen der transformierten Gruppe $N^{-1}\mathfrak{G}N$, welche durch Transformation sämtlicher Substitutionen der Gruppe $\mathfrak{G}$ durch die feste Substitution N erhalten werden, von der Form:

---

*) Vgl. Beke, a. a. O., S. 279 u. S. 289. Man sehe auch Schlesinger, Handbuch, II_1, S. 105. Das von Herrn Beke gefundene Kriterium ist im Anschluß an die Untersuchungen von Herrn C. Jordan, Bulletin de la société math., Bd. 2 gebildet.

**) Die Bezeichnung „reduzibel" ist im Anschluß an Herrn Ludw. Schlesinger, Handbuch II_1, S. 104 gewählt; Herr Beke benützt a. a. O. die Bezeichnung „imprimitiv".

$$
(C)\qquad
\begin{array}{cccccccc}
c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1\nu} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2\nu} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
c_{31} & c_{32} & \cdots & c_{3\nu} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
c_{\nu 1} & c_{\nu 2} & \cdots & c_{\nu\nu} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
c_{\nu+1\,1} & c_{\nu+1\,2} & \cdots & c_{\nu+1\,\nu} & c_{\nu+1\,\nu+1} & c_{\nu+1\,\nu+2} & \cdots & c_{\nu+1\,n} \\
c_{\nu+2\,1} & c_{\nu+2\,2} & \cdots & c_{\nu+2\,\nu} & c_{\nu+2\,\nu+1} & c_{\nu+2\,\nu+2} & \cdots & c_{\nu+2\,n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{n\nu} & c_{n\,\nu+1} & c_{n\,\nu+2} & \cdots & c_{nn}
\end{array}
$$

sind.

Eine jede nicht reduzible Gruppe heißt *irreduzibel*. Eine irreduzible Gruppe linearer homogener Substitutionen von n Variablen läßt sich *niemals* so transformieren, daß nach der Transformation ν der neuen Variablen, welche lineare homogene Kombinationen der alten Variablen mit konstanten Koeffizienten sind, durch alle Substitutionen der Gruppe nur in lineare homogene Kombinationen ihrer selbst übergehen und $\nu < n$ ist.

Ist $\mathfrak{G}$ eine reduzible Gruppe linearer homogener Substitutionen, d. h. gibt es eine Substitution N von nicht verschwindender Determinante, daß alle Substitutionen der transformierten Gruppe $N^{-1}\mathfrak{G}N$ Matrizes der Form (C) besitzen, so drücken wir dies auch kurz auf die folgende Art aus: $\mathfrak{G}$ *läßt sich in die Form:*

$$
\begin{array}{c|c}
\mathfrak{G}_{11} & 0 \\ \hline
\mathfrak{G}_{21} & \mathfrak{G}_{22}
\end{array}
$$

bringen, oder es gibt zu $\mathfrak{G}$ eine *äquivalente**) Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$, welche die Form:

$$
\begin{array}{c|c}
\mathfrak{G}_{11} & 0 \\ \hline
\mathfrak{G}_{21} & \mathfrak{G}_{22}
\end{array}
$$

hat; hierbei bedeutet $\mathfrak{G}_{11}$ einen Inbegriff von Matrizes mit ν Zeilen und ν Kolonnen, $\mathfrak{G}_{21}$ einen Inbegriff von Matrizes mit $n-\nu$ Zeilen und

*) Das Wort „äquivalent“ ist im Anschluß an Herrn Frobenius, Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen, II (Berl. Ber., 1899, S. 482) gebraucht. Ersetzt man die Matrizes $G_1, G_2, G_3, \cdots$ einer Gruppe $\mathfrak{G}$ durch $N^{-1}G_1N$, $N^{-1}G_2N$, $N^{-1}G_3N, \cdots$, wobei N eine Matrix von nicht verschwindender Determinante ist, so bestimmen die neuen Matrizes auch eine Gruppe. Zwei derartige Gruppen sind vom gruppentheoretischen Standpunkte nicht wesentlich verschieden und sollen äquivalent heißen.

ν Kolonnen, $\mathfrak{G}_{22}$ einen Inbegriff von Matrizes mit $n-\nu$ Zeilen und $n-\nu$ Kolonnen. $n > n - \nu > 0$.

Ist eine Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ in n Variablen von der besonderen Form:

$$\begin{array}{c|c} \mathfrak{G}_{11} & 0 \\ \hline \mathfrak{G}_{21} & \mathfrak{G}_{22} \end{array},$$

so bilden offenbar die ersten ν Variablen für sich eine Gruppe; diese Gruppe ist zu der ursprünglichen Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ isomorph; sie wird durch die Gesamtheit aller Matrizes $\mathfrak{G}_{11}$ gegeben. Diese Gruppe in ν Variablen bezeichnen wir mit $\mathfrak{G}_{11}$.

Wegen der besonderen Form der Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$:

$$\begin{array}{c|c} \mathfrak{G}_{11} & 0 \\ \hline \mathfrak{G}_{21} & \mathfrak{G}_{22} \end{array}$$

bilden auch die Substitutionen in $n-\nu$ Variablen, deren Gesamtheit durch den Inbegriff aller Matrizes $\mathfrak{G}_{22}$ bestimmt wird, für sich eine Gruppe. Auch diese Gruppe, die wir mit $\mathfrak{G}_{22}$ bezeichnen wollen, ist zu der Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ isomorph*).

Aus den Untersuchungen von Herrn Beke**) folgt, daß, wenn die Rationalitätsgruppe einer linearen homogenen Differentialgleichung $P=0$ von der Ordnung n reduzibel ist und in die Form:

$$\begin{array}{c|c} \mathfrak{G}_{11} & 0 \\ \hline \mathfrak{G}_{21} & \mathfrak{G}_{22} \end{array}$$

gebracht werden kann, so gibt es stets eine lineare homogene Differentialgleichung $Q=0$ von der Ordnung ν mit Koeffizienten aus dem Rationalitätsbereiche, deren sämtliche Integrale der Differentialgleichung $P=0$ genügen und welche $\mathfrak{G}_{11}$ zur Rationalitätsgruppe hat.

Auch die Gruppe $\mathfrak{G}_{22}$ erscheint, wie ich gezeigt habe***), als Rationalitätsgruppe einer linearen homogenen Differentialgleichung mit Koeffizienten aus dem Rationalitätsbereiche. Um dies darzutun ist es nötig, auf die *Zerlegung eines linearen homogenen Differentialausdruckes in Faktoren* einzugehen.

Herr Frobenius†) hat im Anschluß an die Untersuchungen von Libri (Journ. f. d. r. u. ang. Math., Bd. 10) und Brassinne (Ch. Sturm, Cours

*) Vgl. A. Loewy, Zur Theorie der Gruppen linearer Substitutionen. Math. Ann. Bd. 53, S. 235.

**) Beke, a. a. O. S. 289. Siehe auch Schlesinger, Handbuch, II_1, S. 105.

***) A. Loewy, Berichte der Kgl. Gesellschaft der Wiss. zu Leipzig. Januar 1902.

†) G. Frobenius, an dem auf S. 1 angeführten Orte, S. 258. Vgl. auch Ludw. Schlesinger, Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen, Bd. 1, S. 84. Leipzig 1895.

d'analyse, t. 2, Note 3) die symbolische Zerlegung eines linearen homogenen Differentialausdruckes in Faktoren behandelt. Wird die lineare homogene Differentialgleichung $P = 0$ mit Koeffizienten aus dem Rationalitätsbereiche durch alle Integrale einer ebenfalls linearen homogenen Differentialgleichung $Q = 0$ von niedrigerer Ordnung mit Koeffizienten aus dem Rationalitätsbereiche erfüllt, so kann man den linearen homogenen Differentialausdruck P immer symbolisch zerlegen, dass

$$P = R_1 Q$$

wird. Hierbei bedeutet R_1 einen linearen homogenen Differentialausdruck mit Koeffizienten aus dem Rationalitätsbereiche.

Ist P von der Ordnung n, Q von der Ordnung ν, so ist

$$R_1 = 0$$

eine lineare homogene Differentialgleichung der Ordnung $n - \nu$ mit Koeffizienten aus dem Rationalitätsbereiche; die Rationalitätsgruppe der Differentialgleichung $R_1 = 0$ ist die Gruppe $\mathfrak{G}_{22}$.

Am Schlusse dieses Paragraphen sei nur noch darauf hingewiesen, daß, wenn bei einer linearen homogenen Differentialgleichung die Rationalitätsgruppe in der Form $\mathfrak{G}$ erscheint und man von der Gruppe $\mathfrak{G}$ zu der äquivalenten Gruppe $N^{-1}\mathfrak{G}N$ übergeht, dies offenbar nur bedeutet, man ersetzt ein Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung durch ein anderes und betrachtet für dieses neue Fundamentalsystem die Rationalitätsgruppe der Differentialgleichung*).

§ 2.

Differentialgleichungen derselben Art.

Hat man zwei lineare homogene Differentialgleichungen:

$$(1) \qquad p_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_n(x)y = 0,$$

$$(2) \qquad r_0(x)\frac{d^{n_1} z}{dx^{n_1}} + r_1(x)\frac{d^{n_1-1}z}{dx^{n_1-1}} + \cdots + r_{n_1}(x)z = 0, \quad (n_1 \leqq n),$$

deren Koeffizienten dem Rationalitätsbereiche angehören, so sagt man, die *Gleichung* (2) *gehört mit* (1) *zu derselben Art***) *oder ist mit* (1) *von derselben Art*, wenn man durch die Beziehung:

$$(3) \qquad z = a_0(x)y + a_1(x)\frac{dy}{dx} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}},$$

*) Vgl. etwa Ludw. Schlesinger, Handbuch, II_1, S. 72.

**) Die Bezeichnung von derselben Art stammt für $n = n_1$ von Herrn Poincaré, Mémoire sur les fonctions zétafuchsiennes. Acta mathematica, Bd. 5, S. 212 (1884). Vgl. auch Ludw. Schlesinger, Handbuch, Bd. II_1, S. 120.

wobei $a_0(x)$, $a_1(x)$, $\cdots a_{n-1}(x)$ Funktionen des Rationalitätsbereiches sind, von den Integralen der Differentialgleichung (1) zu denen der Differentialgleichung (2) übergehen kann.

Ist $n > n_1$, so wird man nicht durch eine zu (3) analoge Relation von dem allgemeinen Integral von (2) zu dem der Differentialgleichung (1) übergehen können; ist $n > n_1$ und die Differentialgleichung (2) mit (1) von derselben Art, so ist *nicht* auch (1) mit (2) von derselben Art. Die eingeführte Beziehung ist also *nicht stets wechselseitig*. Ist die Differentialgleichung (2) mit (1) von derselben Art und auch (1) mit (2) von derselben Art, ist die Beziehung also eine gegenseitige, so sage ich: die zwei linearen homogenen Differentialgleichungen *sind gegenseitig von derselben Art oder auch kurz, die zwei linearen homogenen Differentialgleichungen sind von derselben Art.* Es gilt nun für $n = n_1$ der folgende Satz von Herrn L. Fuchs*):

Gehören von zwei linearen homogenen Differentialgleichungen derselben Ordnung die eine mit der anderen zu derselben Art, so sind die zwei linearen homogenen Differentialgleichungen gegenseitig von derselben Art.

Aus unserer Definition folgt unmittelbar:

Ist die Differentialgleichung (2) mit (1) von derselben Art und die Differentialgleichung (1) mit einer anderen linearen homogenen Differentialgleichung n^{ter} oder höherer Ordnung, die auch nur Koeffizienten aus dem Rationalitätsbereiche hat, von derselben Art, so ist auch die Differentialgleichung (2) mit dieser von derselben Art.

Wir bezeichnen für das Folgende die Differentialgleichung (1) mit $P = 0$, die Differentialgleichung (2) mit $R = 0$; ferner bedeute A die rechte Seite von (3).

$A = 0$ ist dann eine lineare homogene Differentialgleichung, deren Koeffizienten dem Rationalitätsbereiche angehören.

Es mögen $y_1, y_2, \cdots y_n$ ein Fundamentalsystem von Integralen von $P = 0$ sein; bezeichnen $\mu_1, \mu_2, \cdots \mu_n$ irgend n Konstanten, so ist, wenn die Differentialgleichung $R = 0$ mit der Differentialgleichung $P = 0$ zu derselben Art gehört und der Übergang von den Integralen von (1) zu denen von (2) durch die Relation (3) vermittelt wird,

$$A\left(\sum_1^n \mu_k y_k\right)$$

stets ein Integral von $R = 0$ und ferner sind in der Form $A\left(\sum_1^n \mu_k y_k\right)$ alle Integrale von $R = 0$ enthalten; denn

*) L. Fuchs, Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen, Sitzungsberichte der Berliner Akademie, Jahrg. 1888, S. 819.

$$\sum_1^n \mu_k y_k$$

ist das allgemeine Integral der Differentialgleichung $P = 0$. Da

$$A\left(\sum_1^n \mu_k y_k\right) = \sum_1^n \mu_k A(y_k)$$

ist, so folgt, daß unter den folgenden n Funktionen:

$$A(y_1),\ A(y_2), \cdots A(y_n)$$

die Elemente eines Fundamentalsystemes von Integralen der linearen homogenen Differentialgleichung $R = 0$ enthalten sein müssen.

Ist $R = 0$ eine lineare homogene Differentialgleichung von der Ordnung $n_1 = n - \nu$, so kann die Differentialgleichung $R = 0$ nur n_1 linear unabhängige Integrale besitzen. Mithin muß ein System von $n \cdot \nu$ Konstanten

$$\lambda_{kl} \quad \begin{pmatrix} k = 1, 2, \cdots \nu \\ l = 1, 2, \cdots n \end{pmatrix}$$

existieren, daß die ν von einander unabhängigen Relationen:

$$\sum_{l=1}^{l=n} \lambda_{1l} A(y_l) = 0,$$

$$\sum_{l=1}^{l=n} \lambda_{2l} A(y_l) = 0,$$

$$\vdots$$

$$\sum_{l=1}^{l=n} \lambda_{\nu l} A(y_l) = 0$$

zwischen den Funktionen $A(y_1),\ A(y_2), \cdots A(y_n)$ bestehen. Das soeben hergeleitete Gleichungssystem sagt aus, daß die ν Funktionen

$$\sum_{l=1}^{l=n} \lambda_{1l} y_l,\ \sum_{l=1}^{l=n} \lambda_{2l} y_l, \cdots \sum_{l=1}^{l=n} \lambda_{\nu l} y_l$$

ν unabhängige Integrale der Differentialgleichung $A = 0$ sind. Die zwei linearen homogenen Differentialgleichungen $P = 0$ und $A = 0$ haben daher ν linear unabhängige Integrale gemeinsam.

Angenommen $\sum_{l=1}^{l=n} \lambda_{\nu+1\,l} y_l$, wobei $\lambda_{\nu+1\,l}$ $(l = 1, 2, \cdots n)$ n Konstanten bedeuten, sei ein $\nu + 1^{\text{tes}}$ gemeinsames partikuläres Integral der zwei Differentialgleichungen $P = 0$ und $A = 0$, und dieses Integral sei keine lineare homogene Kombination mit konstanten Koeffizienten von den schon gefundenen gemeinsamen Integralen, so folgt aus

$$A\left(\sum_{l=1}^{l=n}\lambda_{\nu+1\,l}\,y_l\right)=0$$

eine $\nu+1^{\text{te}}$ von den schon vorhandenen ν Relationen unabhängige Relation:

$$\sum_{l=1}^{l=n}\lambda_{\nu+1\,l}\,A(y_l)=0$$

zwischen den Funktionen $A(y_1)$, $A(y_2)$, $\cdots A(y_n)$. Da die Differentialgleichung $R=0$ von der Ordnung $n-\nu$ ist, so können zwischen den n Funktionen $A(y_1)$, $A(y_2)$, $\cdots A(y_n)$, die unter sich die Elemente eines Fundamentalsystemes von Integralen von $R=0$ enthalten, nur ν unabhängige Relationen bestehen, daher ist unsere Annahme falsch. Mithin haben die zwei linearen homogenen Differentialgleichungen $P=0$ und $A=0$ genau ν linear unabhängige Integrale gemeinsam. Hieraus aber folgt die Existenz einer linearen homogenen Differentialgleichung $Q=0$ von der Ordnung ν mit Koeffizienten aus dem Rationalitätsbereiche, welche die den zwei linearen homogenen Differentialgleichungen $P=0$ und $A=0$ gemeinsamen ν linear unabhängigen Integrale zum Fundamentalsystem besitzt*). Wir gewinnen also den Satz:

*Gehört eine lineare homogene Differentialgleichung $n-\nu^{\text{ter}}$ Ordnung mit einer linearen homogenen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung zu derselben Art, so existiert eine lineare homogene Differentialgleichung ν^{ter} Ordnung mit Koeffizienten aus dem Rationalitätsbereiche, deren sämtliche Integrale der Differentialgleichung n^{ter} Ordnung genügen**).*

Wir halten die obigen Bezeichnungen bei und setzen:

$$t_1=\sum_{l=1}^{l=n}\lambda_{1l}\,y_l,$$

$$t_2=\sum_{l=1}^{l=n}\lambda_{2l}\,y_l,$$

$$\vdots$$

$$t_\nu=\sum_{l=1}^{l=n}\lambda_{\nu l}\,y_l,$$

---

*) Vgl. Brassinne in Ch. Sturms Cours d'analyse, t. 2, Note 3, S. 347 der Ausgabe vom Jahre 1868. Paris.

**) Den speziellen Satz, daß in dem obigen Falle die Differentialgleichung n^{ter} Ordnung reduzibel sein muß, hat schon Herr Fuchs (a. a. O., S. 320) bemerkt.

und ferner:

$$t_{\nu+1} = \sum_{l=1}^{l=n} \lambda_{\nu+1\,l}\, y_l,$$
$$t_{\nu+2} = \sum_{l=1}^{l=n} \lambda_{\nu+2\,l}\, y_l,$$
$$\vdots$$
$$t_n = \sum_{l=1}^{l=n} \lambda_{n\,l}\, y_l;$$

hierbei bedeuten λ_{kl} $\binom{k = \nu+1, \nu+2, \cdots n}{l = 1, 2, \cdots n}$ ein System von $n(n-\nu)$ willkürlichen Konstanten, die nur der Bedingung unterworfen sind, daß die Determinante $|\lambda_{kl}|$ von Null verschieden ist, damit die n Funktionen $t_1, t_2, \cdots t_n$ ein Fundamentalsystem von Integralen der Differentialgleichung $P = 0$ bilden; die ersten ν Functionen $t_1, t_2, \cdots t_\nu$ sind die Elemente eines Fundamentalsystemes von Integralen der Differentialgleichung $Q = 0$.

Bilden wir unter Zugrundelegung des Fundamentalsystemes von Integralen $t_1, t_2, \cdots t_n$ die Rationalitätsgruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ der Differentialgleichung $P = 0$, so erscheint dieselbe in der Form:

$$\begin{array}{c|c} \mathfrak{G}_{11} & 0 \\ \hline \mathfrak{G}_{21} & \mathfrak{G}_{22} \end{array};$$

hierbei bedeutet $\mathfrak{G}_{11}$ die Rationalitätsgruppe von $Q = 0$. Wir beweisen, daß $\mathfrak{G}_{22}$ die Rationalitätsgruppe der Differentialgleichung $R = 0$ ist, die mit $P = 0$ zu derselben Art gehört. Da

$$A(t_1) = A(t_2) = \cdots = A(t_\nu) = 0$$

ist, so folgt, daß die $n - \nu$ Funktionen:

$$A(t_{\nu+1}),\ A(t_{\nu+2}), \cdots A(t_n)$$

die Elemente eines Fundamentalsystemes von Integralen von $R = 0$ bilden. Eine Substitution C der Rationalitätsgruppe von $P = 0$ wird wegen der besonderen Form der Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ die Elemente $t_1, t_2, \cdots t_n$ des Fundamentalsystemes von $P = 0$ überführen in:

$$\begin{array}{l}
c_{11} t_1 + c_{12} t_2 + \cdots + c_{1\nu} t_\nu, \\
c_{21} t_1 + c_{22} t_2 + \cdots + c_{2\nu} t_\nu, \\
\vdots \\
c_{\nu 1} t_1 + c_{\nu 2} t_2 + \cdots + c_{\nu\nu} t_\nu, \\
c_{\nu+1\,1} t_1 + c_{\nu+1\,2} t_2 + \cdots + c_{\nu+1\,\nu} t_\nu + c_{\nu+1\,\nu+1} t_{\nu+1} + \cdots + c_{\nu+1\,n} t_n, \\
\vdots \\
c_{n1} t_1 + c_{n2} t_2 + \cdots + c_{n\nu} t_\nu + c_{n\,\nu+1} t_{\nu+1} + \cdots + c_{nn} t_n.
\end{array}$$

Macht man davon Gebrauch, daß:
$$A(t_1) = A(t_2) = \cdots = A(t_\nu) = 0,$$
so gehen durch die Substitution C die $n-\nu$ Funktionen:
$$A(t_{\nu+1}),\ A(t_{\nu+2}), \cdots A(t_n)$$
über in:
$$\begin{aligned}
&c_{\nu+1\,\nu+1}A(t_{\nu+1}) + c_{\nu+1\,\nu+2}A(t_{\nu+2}) + \cdots + c_{\nu+1\,n}A(t_n),\\
&c_{\nu+2\,\nu+1}A(t_{\nu+1}) + c_{\nu+2\,\nu+2}A(t_{\nu+2}) + \cdots + c_{\nu+2\,n}A(t_n),\\
&\vdots\\
&c_{n\,\nu+1}\ \ A(t_{\nu+1}) + c_{n\,\nu+2}\ \ A(t_{\nu+2}) + \cdots + c_{nn}\ \ A(t_n).
\end{aligned}$$
Bezeichnen wir die soeben hingeschriebene Substitution zwischen den Elementen
$$A(t_{\nu+1}),\ A(t_{\nu+2}), \cdots A(t_n)$$
eines Fundamentalsystemes von Integralen der linearen homogenen Differentialgleichung $R=0$ mit C_{22}, so ergibt sich infolge der besonderen Form der Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$, daß die Gesamtheit aller Transformationen C_{22}, welche allen Transformationen C der Rationalitätsgruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ von $P=0$ entsprechen, ebenfalls eine Gruppe bilden; dies ist die Gruppe $\mathfrak{G}_{22}$.

Betrachtet man irgend eine rationale Differentialfunktion von
$$A(t_{\nu+1}),\ A(t_{\nu+2}), \cdots A(t_n),$$
welche einen dem Rationalitätsbereiche angehörigen Wert hat, so bleibt diese, als Funktion von $t_1, t_2, \cdots t_n$ aufgefaßt, bei einer jeden Transformation C der Rationalitätsgruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ von $P=0$ ihrem Werthe nach ungeändert; einer Substitution C für die n Funktionen $t_1, t_2, \cdots t_n$ entspricht die Substitution C_{22} für die $n-\nu$ Funktionen
$$A(t_{\nu+1}), A(t_{\nu+2}), \cdots A(t_n);$$
daher bleibt eine jede rationale Differentialfunktion von
$$A(t_{\nu+1}), A(t_{\nu+2}), \cdots A(t_n),$$
welche einen dem Rationalitätsbereiche angehörigen Wert hat, bei allen Substitutionen der Gruppe $\mathfrak{G}_{22}$ ihrem Werte nach ungeändert.

Wir können aber auch umgekehrt zeigen: Bleibt eine rationale Differentialfunktion von $A(t_{\nu+1}), A(t_{\nu+2}), \cdots A(t_n)$ bei allen Substitutionen der Gruppe $\mathfrak{G}_{22}$ ihrem Werte nach ungeändert, so ist sie eine dem Rationalitätsbereiche angehörige Funktion. Bleibt nämlich die Funktion, aufgefaßt als Funktion von $A(t_{\nu+1}), A(t_{\nu+2}), \cdots A(t_n)$, bei den Substitutionen C_{22} von $\mathfrak{G}_{22}$ ihrem Werte nach ungeändert, so bleibt sie, als Funktion von $t_1, t_2, \cdots t_n$, bei allen Substitutionen C von $\overline{\mathfrak{G}}$ ihrem Werte nach ungeändert. Da aber $\overline{\mathfrak{G}}$ die Rationalitätsgruppe der linearen homogenen Differentialgleichung $P=0$ für das Fundamentalsystem $t_1, t_2, \cdots t_n$

von Integralen von $P = 0$ ist, so ist die betrachtete Funktion eine Funktion des Rationalitätsbereiches. Nach den Untersuchungen der Herren Picard und Vessiot besteht der folgende Fundamentalsatz: Hat man eine Gruppe linearer homogener Substitutionen in n_1 Variablen mit den folgenden zwei Eigenschaften:

1) eine jede rationale Differentialfunktion eines Fundamentalsystems von Integralen einer linearen homogenen Differentialgleichung n_1^{ter} Ordnung, welche einen dem Rationalitätsbereiche angehörigen Wert hat, ändert bei allen Transformationen der Gruppe ihren Wert nicht,

2) eine jede rationale Differentialfunktion, welche bei allen Transformationen der Gruppe ihren Wert nicht ändert, hat einen dem Rationalitätsbereich angehörigen Wert, so ist die vorgelegte Gruppe die Rationalitätsgruppe der vorgelegten Differentialgleichung. Mithin ist $\mathfrak{G}_{22}$ die Rationalitätsgruppe von $R = 0$. Wir haben also den folgenden Satz:

Gehört die lineare homogene Differentialgleichung $R = 0$ von der Ordnung $n_1 = n - \nu$ mit der linearen homogenen Differentialgleichung $P = 0$ von der Ordnung n zu derselben Art, so kann man die Rationalitätsgruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ von $P = 0$ in die Form:

$$\begin{array}{c|c} \mathfrak{G}_{11} & 0 \\ \hline \mathfrak{G}_{21} & \mathfrak{G}_{22} \end{array}$$

bringen; hierbei ist $\mathfrak{G}_{11}$ die Rationalitätsgruppe einer linearen homogenen Differentialgleichung $Q = 0$ von der ν^{ten} Ordnung, deren sämtliche Integrale $P = 0$ genügen; $\mathfrak{G}_{22}$ ist die Rationalitätsgruppe der Differentialgleichung $R = 0$.

Für $\nu = 0$ hat man den Satz:

Zwei lineare homogene Differentialgleichungen derselben Ordnung, die von derselben Art sind, haben dieselbe Rationalitätsgruppe.

Dieser spezielle, bereits von Herrn Schlesinger*) und unabhängig von Herrn Marotte**) gefundene Satz ist von diesen Autoren mit Hilfe der sogenannten Picard'schen Resolvente bewiesen worden.

Wird die Differentialgleichung $P = 0$ durch sämtliche Integrale von $Q = 0$ erfüllt, so ist:

$$P = R_1 Q \text{ (Vgl. S. 554).}$$

Da von den Elementen $t_1, t_2, \cdots t_n$ eines Fundamentalsystemes von Integralen von $P = 0$ die ersten ν Funktionen ein Fundamentalsystem von Integralen von $Q = 0$ bilden, so hat die lineare homogene Differentialgleichung $R_1 = 0$ die $n - \nu$ Funktionen: $Q(t_{\nu+1}), Q(t_{\nu+2}), \cdots Q(t_n)$ zu

*) Ludw. Schlesinger, Handbuch, II_1, S. 121.

**) Marotte, les équations différentielles linéaires et la théorie des groupes. Annales de la faculté des sciences de Toulouse (1898), H. 37.

einem Fundamentalsystem von Integralen. Mithin folgt: *Läßt sich P zerlegen in $R_1 Q$, so gehört die lineare homogene Differentialgleichung $R_1 = 0$ mit $P = 0$ zu derselben Art.* Hieraus ergibt sich übrigens auch der Satz, auf den schon im § 1 hingewiesen wurde, daß $\mathfrak{G}_{22}$ die Rationalitätsgruppe von $R_1 = 0$ ist.

Man bemerkt zunächst, daß die zwei Funktionensysteme:

$$Q(t_{\nu+1}),\ Q(t_{\nu+2}),\cdots Q(t_n)$$

und

$$A(t_{\nu+1}),\ A(t_{\nu+2}),\cdots A(t_n)$$

bei einer jeden linearen Transformation der Größen $t_1, t_2, \cdots t_n$ sich cogredient transformieren. Wir benützen jetzt einen Hilfssatz:

Sind

$$\eta_1,\ \eta_2,\cdots \eta_m$$

und

$$\zeta_1,\ \zeta_2,\cdots \zeta_m$$

zwei Systeme von je m rationalen Differentialfunktionen von $t_1, t_2, \cdots t_n$, die sich bei allen linearen Substitutionen der $t_1, t_2, \cdots t_n$ cogredient linear mit konstanten Koeffizienten transformieren, so besteht, wenn die Wronskische Determinante der Funktionen $\zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_m$ nicht verschwindet, ein System von Gleichungen:

$$(4) \qquad \eta_i = d_0(x)\zeta_i + d_1(x)\frac{d\zeta_i}{dx} + \cdots + d_{m-1}(x)\frac{d^{m-1}\zeta_i}{dx^{m-1}}, \quad (i = 1, 2, \cdots m);$$

dabei bedeuten $d_0(x), d_1(x), \cdots d_{m-1}(x)$ Funktionen, die dem Rationalitätsbereiche angehören.

Sind $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_m$ und $\zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_m$ gegeben, so kann man, wenn die Wronskische Determinante der m Funktionen ζ_i nicht verschwindet, offenbar die Funktionen $d_0(x), d_1(x), \cdots d_{m-1}(x)$ finden, so daß das System von Gleichungen (4) besteht. Es wird:

$$d_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}, \quad (k = 0, 1, 2, \cdots m-1).$$

Δ bedeutet hierbei die Wronskische Determinante der Funktionen $\zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_m$; Δ_k geht aus Δ hervor, wenn man die η_i für die Ableitungen $\zeta_i^{(k)}$ einführt. Der Quotient $\frac{\Delta_k}{\Delta}$ ist, da die Funktionen η_i, ζ_i rationale Differentialfunktionen der t_i sind, selbst auch eine rationale Differentialfunktion der t_i. Substituieren sich, falls man $t_1, t_2, \cdots t_n$ und ihre Ableitungen cogredienten linearen homogenen Substitutionen mit konstanten Koeffizienten unterwirft, die Funktionen $\zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_m$ linear mit konstanten Koeffizienten, so transformieren sich ihre Ableitungen cogredient mit ihnen; nach Voraussetzung werden auch die Funktionen $\zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_m$ auf dieselbe Weise wie die

Funktionen $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_m$ transformiert. Daher multipliziert sich bei einer jeden linearen Substitution der Funktionen $t_1, t_2, \cdots t_n$ Zähler und Nenner des Determinantenquotienten $\frac{\Delta_k}{\Delta}$ mit der Substitutionsdeterminante der Funktionen η_i; $\frac{\Delta_k}{\Delta}$ selbst bleibt also ungeändert. Da $\frac{\Delta_k}{\Delta}$ sogar für alle linearen homogenen Substitutionen der t formal ungeändert bleibt, so behält $\frac{\Delta_k}{\Delta}$ bei sämtlichen Transformationen der Rationalitätsgruppe von $P=0$ seinen Wert bei; $\frac{\Delta_k}{\Delta}=d_k$ ist daher eine Funktion des Rationalitätsbereiches. Hiermit ist der Hilfssatz bewiesen.

Betrachten wir jetzt die zwei Funktionensysteme:

$$Q(t_{\nu+1}),\ Q(t_{\nu+2}), \cdots Q(t_n)$$

und

$$A(t_{\nu+1}),\ A(t_{\nu+2}), \cdots A(t_n),$$

so verschwindet für keines der zwei Systeme die Wronskische Determinante; denn wir haben hier zwei Fundamentalsysteme von Integralen von zwei linearen homogenen Differentialgleichungen der Ordnung $n_1=n-\nu$ vor uns. Da sich ferner die zwei angegebenen Funktionensysteme bei linearen Substitutionen der $t_1, t_2, \cdots t_n$ cogredient transformieren, so können wir den Hilfssatz in doppelter Weise anwenden. Es besteht nämlich erstens ein System von Gleichungen:

$$(4') \quad Q(t_l)=d_0(x)\,A(t_l)+d_1(x)\,\frac{d}{dx}\,A(t_l)+\cdots+d_{n_1-1}(x)\,\frac{d^{n_1-1}A(t_l)}{dx^{n_1-1}},$$
$$l=\nu+1,\ \nu+2, \cdots n,$$

zweitens ein weiteres Gleichungssystem:

$$(4'') \quad A(t_l)=e_0(x)\ Q(t_l)+e_1(x)\,\frac{d}{dx}\,Q(t_l)+\cdots+e_{n_1-1}(x)\,\frac{d^{n_1-1}Q(t_l)}{dx^{n_1-1}},$$
$$l=\nu+1,\ \nu+2, \cdots n;$$

dabei sind

$$d_0(x),\ d_1(x), \cdots d_{n_1-1}(x)$$

und

$$e_0(x),\ e_1(x), \cdots e_{n_1-1}(x)$$

Funktionen aus dem Rationalitätsbereiche. Bedenkt man, daß die Funktionen $A(t_l)$ ein Fundamentalsystem von Integralen von $R=0$, die Funktionen $Q(t_l)$ ein solches von $R_1=0$ bilden, so sagt das Gleichungssystem (4') aus, daß $R_1=0$ mit $R=0$ zu derselben Art gehört; die Gleichungen (4'') geben an, daß $R=0$ mit $R_1=0$ zu derselben Art gehört.

Wir haben daher den folgenden Satz:

Ist eine lineare homogene Differentialgleichung $R=0$ *von der Ordnung* $n-\nu$ *mit einer linearen homogenen Differentialgleichung* $P=0$ *von der Ordnung* n *von derselben Art, so existiert stets eine lineare homogene Differentialgleichung* ν^{ter} *Ordnung* $Q=0$ *mit Koeffizienten aus dem Rationalitätsbereiche, sodaß* P *zerlegbar wird in* $R_1\,Q$ *und* $R_1=0$ *und* $R=0$ *zwei lineare homogene Differentialgleichungen derselben Ordnung* $n-\nu$ *sind, die gegenseitig von derselben Art sind.*

Aus dem soeben bewiesenen Satze folgt, daß man den Begriff von derselben Art nur für zwei Differentialgleichungen derselben Ordnung einzuführen braucht, für diesen Fall ist der Begriff ein gegenseitiger; dies kann entweder nach Herrn L. Fuchs*) oder auch vermöge des Hilfssatzes bewiesen werden. Als Definition, was es bedeutet, daß eine lineare homogene Differentialgleichung n_1^{ter} Ordnung mit einer ebensolchen von der n^{ten} Ordnung, wobei $n>n_1$ ist, von derselben Art ist, kann dann folgender Satz aufgestellt werden:

Eine lineare homogene Differentialgleichung $R=0$ *von der Ordnung* $n_1=n-\nu$ *heißt mit einer linearen homogenen Differentialgleichung* $P=0$ n^{ter} *Ordnung von derselben Art, wenn es eine lineare homogene Differentialgleichung* $R_1=0$ *von der Ordnung* n_1 *gibt, daß* $P=R_1\,Q$ *wird und die zwei linearen homogenen Differentialgleichungen* $R=0$ *und* $R_1=0$*, welche von gleicher Ordnung sind, gegenseitig von derselben Art sind.*

Wir wenden uns jetzt zum Beweise des folgenden Satzes:

Sind die zwei linearen homogenen Differentialgleichungen $R=0$ *von der Ordnung* $n-\nu$ *und* $S=0$ *von der Ordnung* $n-\nu'$ *mit der linearen homogenen Differentialgleichung* $P=0$ *von der Ordnung* n *von derselben Art, so gibt es stets zwei lineare homogene Differentialgleichungen* $V=0$ *und* $W=0$*, die von derselben Ordnung* $n-\nu-\nu'+s$ *und gegenseitig von derselben Art sind, so daß* R *zerlegbar in* VH_1*, und* S *zerlegbar in* WH_2 *wird;* s *bedeutet eine gewisse positive ganze Zahl, die zwischen* 0 *und der kleineren der Zahlen* ν *und* ν' *einschließlich der Grenzen liegt.*

Der Beweis ergibt sich auf die folgende Weise: Da $R=0$ und $S=0$ mit $P=0$ von derselben Art sind, so gibt es zwei lineare homogene Differentialgleichungen $Q=0$ von der Ordnung ν und $\overline{Q}$ von der Ordnung ν', daß:

$$P=R_1\,Q,$$
$$P=S_1\overline{Q}$$

wird; $R=0$ und $R_1=0$ sind hierbei zwei lineare homogene Differentialgleichungen derselben Ordnung $n-\nu$, die gegenseitig von derselben Art

*) Vgl. die Anmerkung auf S. 619.

sind; ebenso sind $S = 0$ und $S_1 = 0$ zwei lineare homogene Differentialgleichungen der gleichen Ordnung $n - \nu'$, die gegenseitig von derselben Art sind. Mit M bezeichnen wir das kleinste gemeinsame Vielfache der zwei linearen homogenen Differentialausdrücke Q und $\bar{Q}$, d. h. den linearen homogenen Differentialausdruck niedrigster Ordnung, der sowohl durch Q wie durch $\bar{Q}$ teilbar ist. M ist bis auf einen nur von x abhängigen Faktor wohlbestimmt und hat auch nur Koeffizienten aus dem Rationalitätsbereiche*). Es ist

$$M = M_1 Q,$$
$$M = \bar{M}_1 \bar{Q}.$$

Haben die zwei Differentialgleichungen $Q = 0$ und $\bar{Q} = 0$ s unabhängige Integrale gemein, so ist $M = 0$ eine lineare homogene Differentialgleichung der Ordnung $\nu + \nu' - s$. Man sieht, es kann s nur eine der Zahlen $0, 1, 2, \cdots$ bis zu der kleineren der Zahlen ν oder ν' sein. Da alle Integrale von $Q = 0$ wie $\bar{Q} = 0$ die Differentialgleichung $P = 0$ befriedigen, so erfüllen auch alle Integrale von $M = 0$ die Gleichung $P = 0$. Mithin wird:

$$P = UM;$$

dabei bedeutet $U = 0$ eine lineare homogene Differentialgleichung der Ordnung $n - \nu - \nu' + s$. Infolge der bereits für M gefundenen Zerlegungen wird:

$$P = UM_1 Q,$$
$$P = U\bar{M}_1 \bar{Q}.$$

Beachtet man, daß

$$P = R_1 Q,$$
$$P = S_1 \bar{Q}$$

war, so folgt, daß:

$$R_1 = UM_1,$$
$$S_1 = U\bar{M}_1$$

wird. Mithin ist die Differentialgleichung $U = 0$ mit $R_1 = 0$ und mit $S_1 = 0$ von derselben Art. $R_1 = 0$ ist mit $R = 0$, und $S_1 = 0$ ist mit $S = 0$ von derselben Art. Daher ist $U = 0$ sowohl mit $R = 0$ als auch mit $S = 0$ von derselben Art. Hieraus aber folgt mit Hilfe des S. 563 bewiesenen Satzes, daß R zerlegbar ist in $R = VH_1$, dabei sind $U = 0$ und $V = 0$ zwei lineare homogene Differentialgleichungen derselben Ordnung, die von derselben Art sind. Ebenso ist S zerlegbar in $S = WH_2$,

*) Mit der Aufsuchung des kleinsten gemeinsamen Vielfachen hat sich bereits Brassinne beschäftigt. Vgl. auch L. Heffter, Über gemeinsame Vielfache linearer Differentialausdrücke und lineare Differentialgleichungen derselben Klasse. Journ. f. d. r. u. ang. Math. Bd. 116.

wobei $W = 0$ von derselben Ordnung wie $U = 0$ ist und die zwei linearen homogenen Differentialgleichungen $W = 0$ und $U = 0$ von derselben Art sind. Hieraus folgt schließlich, daß $V = 0$ und $W = 0$ zwei lineare homogene Differentialgleichungen von gleicher Ordnung und gegenseitig von derselben Art sind.

Eine besondere Beachtung verdient noch der Fall $n - \nu - \nu' + s = 0$, in dem die zwei linearen homogenen Differentialgleichungen $V = 0$ und $W = 0$ nicht existieren. Dieser Fall findet statt, wenn $\nu + \nu' - s = n$ wird und man also die Differentialgleichung $M = 0$ mit $P = 0$ zusammenfallen lassen kann.

§ 3.

Zerlegung eines linearen homogenen Differentialausdruckes in irreduzible Faktoren.

Ist $P = 0$ eine lineare homogene Differentialgleichung n^{ter} Ordnung mit Koeffizienten aus dem Rationalitätsbereiche, so kann man den linearen homogenen Differentialausdruck P in irreduzible Faktoren zerlegen.

(1) $$P = Q_\lambda Q_{\lambda-1} Q_{\lambda-2} \cdots Q_2 Q_1,$$

so daß die Summe der Ordnungen dieser Faktoren gleich der Ordnung von P wird; $Q_\lambda = 0$, $Q_{\lambda-1} = 0, \cdots Q_2 = 0$, $Q_1 = 0$ sind irreduzible lineare homogene Differentialgleichungen mit Koeffizienten aus dem Rationalitätsbereiche. Eine soeben geschilderte Zerlegung eines linearen homogenen Differentialausdruckes P in irreduzible Faktoren ist durchaus nicht eindeutig bestimmt. Es gilt nun der folgende Fundamentalsatz:

Auf welche Art und Weise auch immer ein linearer homogener Differentialausdruck in irreduzible Faktoren zerlegt wird, so kann man die Faktoren einer jeden Zerlegung den Faktoren einer jeden anderen Zerlegung eineindeutig zuordnen, so daß immer die zwei durch Nullsetzen der zugeordneten Faktoren entstehenden irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen gegenseitig von derselben Art sind.

Wir wollen also den folgenden Satz beweisen:

Ist neben:

(1) $$P = Q_\lambda Q_{\lambda-1} \cdots Q_2 Q_1$$

auch

(2) $$P = K_\mu K_{\mu-1} \cdots K_2 K_1$$

eine zweite Zerlegung von P in irreduzible Faktoren, so kann man einer jeden der linearen homogenen irreduziblen Differentialgleichungen $Q_\sigma = 0$, $(\sigma = 1, 2, \cdots \lambda)$, die bei der Zerlegung (1) resultieren, eine gewisse lineare homogene irreduzible Differentialgleichung $K_\tau = 0$ zuordnen, daß bei dieser

Zuordnung ein jeder Faktor von (2) einmal verwandt wird, hierdurch alle Faktoren K_μ, $K_{\mu-1}$, $\cdots K_1$ (nur nicht eventuell in dieser Reihenfolge) erschöpft werden und die zwei zugeordneten Differentialgleichungen immer gegenseitig von derselben Art sind.

Der angegebene Satz enthält offenbar den von Herrn E. Landau*) zuerst gefundenen Satz:

„Bei allen Zerlegungen eines linearen homogenen Differentialausdruckes in irreduzible Faktoren ist die Anzahl der Faktoren dieselbe, und es sind die Ordnungen der Faktoren, abgesehen von der Reihenfolge, dieselben“

als Spezialfall. Ich beweise auch den allgemeinen Satz in analoger Weise wie Herr Landau und verwende dabei, um eine leichte Vergleichung zu ermöglichen, dieselben Bezeichnungen.

Für lineare homogene Differentialausdrücke P erster Ordnung ist unser Satz offenbar richtig; denn in diesem Falle ist P irreduzibel. Wir können daher das Theorem für alle Differentialausdrücke P von niedrigerer als n^{ter} Ordnung als bewiesen betrachten und brauchen es nur für solche n^{ter} Ordnung zu beweisen.

Beim Beweise sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem die zwei irreduzibeln linearen homogenen Differentialgleichungen $Q_1 = 0$ und $K_1 = 0$ ein Integral oder kein Integral gemeinsam haben.

I. Haben $K_1 = 0$ und $Q_1 = 0$ ein Integral gemeinsam, so haben sie infolge ihrer Irreduzibilität alle Integrale gemeinsam; sie sind daher sicher gegenseitig von derselben Art. In diesem Falle können sich K_1 und Q_1 nur um einen bloß von der Variablen x abhängigen Faktor, der eine Funktion des Rationalitätsbereiches ist, unterscheiden. Es wird also:

$$K_1 = f(x)\, Q_1.$$

(α). Ist $f(x) = 1$, so wird $K_1 = Q_1$; hieraus folgt, daß:

$$K_\mu K_{\mu-1} \cdots K_3 K_2 = Q_\lambda Q_{\lambda-1} \cdots Q_3 Q_2$$

wird. Man hat hiermit die Zerlegung eines linearen homogenen Differentialausdruckes von niedrigerer als n^{ter} Ordnung in irreduzible Faktoren auf zwei Arten gewonnen. Für einen Differentialausdruck niedrigerer als n^{ter} Ordnung ist der Satz als bewiesen zu betrachten. Beachtet man, daß $K_1 = 0$ und $Q_1 = 0$ gewiß von derselben Art sind, denn K_1 ist hier gleich Q_1, so ist in dem betrachteten Fall unser Theorem für die Zerlegungen (1) und (2) erwiesen.

---

*) E Landau, ein Satz über die Zerlegung homogener linearer Differentialausdrücke in irreduzible Faktoren. Journ. f. d. r. u. ang. Math., Bd. 124, S. 115.

(β). Ist $f(x)$ von der Einheit verschieden, so ergibt sich:

$$P = K_\mu \cdots K_3 K_2 K_1 = K_\mu \cdots K_3 K_2 (f Q_1). \tag{3}$$

Man führe die durch das Symbol K_2 ausgedrückte Differentiationsoperation aus und ordne nach Ableitungen von Q_1; auf diese Weise erhält man:

$$K_2(f Q_1) = R Q_1. \tag{4}$$

Betrachtet man die zwei linearen homogenen Differentialgleichungen $K_2 = 0$ und $R = 0$, so findet man durch Multiplikation der Elemente eines Fundamentalsystemes von Integralen von $R = 0$ mit $f(x)$ die Elemente eines Fundamentalsystemes von Integralen von $K_2 = 0$. Hieraus folgt, daß $K_2 = 0$ und $R = 0$ gegenseitig von derselben Art sind, mithin ist auch $R = 0$ wie $K_2 = 0$ irreduzibel. (3) und (4) liefern infolge der Irreduzibilität von $R = 0$ für P die Zerlegung:

$$P = K_\mu \cdots K_3 R Q_1 \tag{5}$$

in irreduzible Faktoren. Aus (5) und (1) folgt:

$$K_\mu \cdots K_3 R = Q_\lambda Q_{\lambda-1} \cdots Q_3 Q_2 .$$

Wir haben jetzt einen linearen homogenen Differentialausdruck von niedrigerer als n^{ter} Ordnung in irreduzible Faktoren zerlegt. Hieraus folgt:

Man kann die Gleichungen:

$$Q_\lambda = 0,\ Q_{\lambda-1} = 0, \cdots Q_3 = 0,\ Q_2 = 0$$

den Gleichungen:

$$K_\mu = 0,\ K_{\mu-1} = 0, \cdots K_3 = 0,\ R = 0$$

in einer gewissen Reihenfolge (die anders als die hingeschriebene sein kann) so eineindeutig zuordnen, daß zwei zugeordnete Differentialgleichungen immer von derselben Art sind. Möge der Differentialgleichung $R = 0$ etwa die Gleichung $Q_\varrho = 0$ zugeordnet sein, so werden, da $R = 0$ und $K_2 = 0$ gegenseitig von derselben Art sind, auch $Q_\varrho = 0$ und $K_2 = 0$ gegenseitig von derselben Art sein müssen. $P_1 = 0$ und $Q_1 = 0$ sind, da sie alle Integrale gemeinsam haben, von derselben Art. Hiermit ist unser Satz im Falle (β) für die zwei Zerlegungen (1) und (2) bewiesen.

II. Haben die zwei linearen homogenen Differentialgleichungen $K_1 = 0$ und $Q_1 = 0$ kein Integral gemeinsam, so gibt es eine lineare homogene Differentialgleichung $U = 0$ mit Koeffizienten aus dem Rationalitätsbereiche, deren Ordnung gleich der Summe der Ordnungen von $K_1 = 0$ und $Q_1 = 0$ ist und welche durch alle Integrale von $K_1 = 0$ und $Q_1 = 0$ erfüllt wird. Der lineare homogene Differentialausdruck U, das kleinste gemeinsame Vielfache von K_1 und Q_1, ist bis auf einen nur von x abhängigen Faktor völlig bestimmt und sowohl durch K_1 als auch durch Q_1 teilbar*). Mithin ergibt sich:

$$U = AQ_1,$$
$$U = BK_1.$$

Bezeichnet man mit $y_1, y_2, \cdots y_{f_1}$ die Elemente eines Fundamentalsystemes von Integralen von $Q_1 = 0$, mit $z_1, z_2, \cdots z_{g_1}$ diejenigen von $K_1 = 0$, so hat die Differentialgleichung $U = 0$ die Funktionen $y_1, y_2, \cdots y_{f_1}, z_1, z_2, \cdots z_{g_1}$ zu einem Fundamentalsysteme von Integralen. Betrachtet man die lineare homogene Differentialgleichung $A = 0$, so bilden die Funktionen

$$Q_1(z_1),\ Q_1(z_2), \cdots Q_1(z_{g_1})$$

ein Fundamentalsystem von Integralen von $A = 0$. Folglich ist $A = 0$ mit $K_1 = 0$ von derselben Art; da aber die zwei Differentialgleichungen offenbar dieselbe Ordnung haben, so sind $A = 0$ und $K_1 = 0$ gegenseitig von derselben Art. Infolge der Irreduzibilität von $K_1 = 0$ muß mithin $A = 0$ auch irreduzibel sein.

Betrachtet man die lineare homogene Differentialgleichung $B = 0$, so bilden für diese die Funktionen $K_1(y_1), K_1(y_2), \cdots K_1(y_{f_1})$ ein Fundamentalsystem von Integralen. Folglich ist $B = 0$ mit $Q_1 = 0$ von derselben Art; denn $y_1, y_2, \cdots y_{f_1}$ sind die Elemente eines Fundamentalsystemes von $Q_1 = 0$. Die zwei Differentialgleichungen $B = 0$ und $Q_1 = 0$ haben dieselbe Ordnung; daher sind sie gegenseitig von derselben Art. Infolge der Irreduzibilität von $Q_1 = 0$ muß folglich auch $B = 0$ irreduzibel sein.

Da P durch K_1 und Q_1 teilbar ist, so muß P auch durch ihr kleinstes gemeinsames Vielfaches U teilbar sein. Es wird daher

$$P = VU.$$

Zerlegt man V in irreduzible Faktoren:

$$V = L_\nu L_{\nu-1} \cdots L_1,$$

und beachtet, daß

$$U = AQ_1,$$
$$U = BK_1$$

zwei Zerlegungen von U in irreduzible Faktoren sind, so findet man für P die zwei weiteren Zerlegungen:

$$P = L_\nu L_{\nu-1} \cdots L_1 A Q_1, \tag{6}$$
$$P = L_\nu L_{\nu-1} \cdots L_1 B K_1 \tag{7}$$

in irreduzible Faktoren.

*) Vgl. die in der Anmerkung auf Seite 564 zitierte Literatur sowie ferner E. Beke, die symmetrischen Funktionen bei den linearen homogenen Differentialgleichungen. Math. Annalen Bd. 45, S. 298.

Ordnet man den bei der Zerlegung (6) entstehenden Differentialgleichungen:

(8) $$L_\nu = 0,\ L_{\nu-1} = 0, \cdots L_1 = 0,\ A = 0,\ Q_1 = 0,$$

die bei der Zerlegung (7) entstehenden Differentialgleichungen in der folgenden Reihenfolge:

(9) $$L_\nu = 0,\ L_{\nu-1} = 0, \cdots L_1 = 0,\ K_1 = 0,\ B = 0$$

zu, so sind immer zwei zugeordnete Differentialgleichungen gegenseitig von derselben Art. Da die Zerlegungen (1) und (6) beide mit Q_1 schließen, so folgt nach (α), daß man den Gleichungen (8) die bei der Zerlegung (1) sich ergebenden Gleichungen in einer gewissen Reihenfolge eineindeutig zuordnen kann, daß zwei zugeordnete Gleichungen immer von derselben Art sind. Hierdurch wird aber eine eineindeutige Zuordnung zwischen den Gleichungen (9) und den bei der Zerlegung (1) resultierenden Gleichungen in einer gewissen Reihenfolge vermittelt, daß zwei zugeordnete Gleichungen immer von derselben Art sind. Beachtet man noch, daß die Zerlegungen (2) und (7) beide mit K_1 schließen, so wird es möglich, die Gleichungen (9) durch die bei der Zerlegung (2) gewonnenen Differentialgleichungen zu ersetzen. Hierdurch hat man schließlich die verlangte Zuordnung zwischen den bei (1) und (2) resultierenden Gleichungen. Diese Zuordnung ist eineindeutig, und zwei zugeordnete Differentialgleichungen sind immer von derselben Art. Hiermit ist der Satz erwiesen.

Da zwei zugeordnete lineare homogene Differentialgleichungen, wie unser Satz angibt, immer gegenseitig von derselben Art sind, so folgt nach dem Schlesinger-Marotteschen Satze (S. 560), daß zwei bei unserem Theoreme zugeordnete Differentialgleichungen immer dieselbe Rationalitätsgruppe haben. Man erhält daher den folgenden Satz:

*Auf welche Art und Weise auch immer ein linearer homogener Differentialausdruck in irreduzible Faktoren zerlegt wird, so kann man die Faktoren einer jeden Zerlegung den Faktoren einer jeden anderen Zerlegung eineindeutig zuordnen, daß immer zwei durch Nullsetzen von zwei zugeordneten Faktoren entstehende irreduzible lineare homogene Differentialgleichungen dieselbe Rationalitätsgruppe haben**).

Vervollständigt man den soeben angegebenen Satz noch dahin, daß man bei den zugeordneten irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen immer den Elementen eines Fundamentalsystemes von Integralen der einen Gleichung die Elemente eines Fundamentalsystemes von Integralen der anderen Gleichung so entsprechen lassen kann, daß die entsprechenden Elemente bei jeder Transformation der Rationalitätsgruppe

*) A. Loewy, Ber. der Kgl. Gesellschaft der Wiss. zu Leipzig, Januar 1902.

der durch Nullsetzen des zu zerlegenden Differentialausdruckes entstehenden Differentialgleichung gleiche Transformationen erleiden, so folgt auch hieraus vermöge des Hilfssatzes auf S. 625 das auf S. 629 angegebene Theorem.

§ 4.

Die irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen, durch deren Integrale eine vorgelegte reduzible lineare homogene Differentialgleichung befriedigt wird.

Bei den algebraischen Gleichungen gibt es stets wenigstens zwei, immer nur eine endliche Anzahl verschiedener irreduzibler algebraischer Gleichungen, mit denen eine reduzible Gleichung Wurzeln gemeinsam hat; ferner ist die Summe der Ordnungen der verschiedenen irreduziblen algebraischen Gleichungen, durch deren Wurzeln die algebraische reduzible Gleichung befriedigt wird, gleich der Ordnung der reduziblen Gleichung. Als nicht verschieden sieht man hierbei nur diejenigen Gleichungen an, deren linke Seiten sich nur durch einen konstanten Faktor unterscheiden oder welche genau dieselben Wurzeln, eine jede in derselben Multiplizität, besitzen.

In der Theorie der linearen homogenen Differentialgleichungen liegt der Sachverhalt anders: Es kann nur eine einzige oder eine endliche Anzahl oder auch unendlich viele verschiedene irreduzible lineare homogene Differentialgleichungen geben, durch deren Integrale die vorgelegte reduzible Differentialgleichung erfüllt wird. Hierbei gelten alle diejenigen linearen homogenen Differentialgleichungen als nicht verschieden, bei denen die linearen homogenen Differentialausdrücke, durch deren Nullsetzen die Differentialgleichung entsteht, sich nur um einen bloß von x abhängigen Faktor, der eine Funktion des Rationalitätsbereiches ist, unterscheiden. Zwei lineare homogene Differentialgleichungen, welche genau dieselben Integrale haben, gelten also nicht als verschieden.

Man kann sich nun die Frage vorlegen, ob zwischen der Ordnung einer vorgelegten reduziblen linearen homogenen Differentialgleichung und den Ordnungen derjenigen irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen, mit denen sie Integrale gemeinsam hat, auch ein gewisser Zusammenhang besteht, hierüber gibt der folgende Satz Aufschluß:

Gibt es für eine reduzible lineare homogene Differentialgleichung eine einzige oder eine endliche Anzahl irreduzibler linearer homogener Differentialgleichungen, durch deren Integrale die vorgelegte reduzible Differentialgleichung befriedigt wird, so ist die Summe der Ordnungen dieser irreduziblen Differentialgleichungen stets kleiner oder höchstens gleich der Ordnung der reduziblen Differentialgleichung.

Sei $P = 0$ die vorgelegte lineare homogene reduzible Differentialgleichung der Ordnung n, welche durch die Integrale der irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen:

$$J_1 = 0,\ J_2 = 0, \cdots J_g = 0$$

erfüllt wird. Die Gleichungen

$$J_1 = 0,\ J_2 = 0, \cdots J_g = 0$$

seien sämtlich von einander verschieden und haben die Ordnungen $i_1, i_2, \cdots i_g$. Wir bilden dann das kleinste gemeinsame Vielfache von J_1 und J_2; dieses sei mit M_2 bezeichnet. Da $J_1 = 0$ und $J_2 = 0$ zwei irreduzible lineare homogene Differentialgleichungen sind, und sich J_1 und J_2 nicht nur um einen bloß von x abhängigen Faktor unterscheiden, so haben sie kein Integral gemeinsam und $M_2 = 0$ wird eine lineare homogene Differentialgleichung von der Ordnung $i_1 + i_2$. Es ist M_2 sowohl durch J_1 wie durch J_2 teilbar; daher existiert ein linearer homogener Differentialausdruck A_2 von der Ordnung i_2, daß:

$$M_2 = A_2 J_1$$

wird; $A_2 = 0$ ist eine lineare homogene Differentialgleichung von der Ordnung i_2, und $A_2 = 0$ und $J_2 = 0$ sind gegenseitig von derselben Art. (Vgl. S. 632.) Es ist im besonderen also auch $A_2 = 0$ eine irreduzible Gleichung.

Von den irreduziblen Gleichungen

$$J_3 = 0,\ J_4 = 0, \cdots J_g = 0$$

könnten mehrere mit $M_2 = 0$ Integrale gemeinsam haben; hat eine dieser irreduziblen Gleichungen mit $M_2 = 0$ ein Integral gemeinsam, so befriedigen wegen der Irreduzibilität alle Integrale dieser Gleichung die Differentialgleichung $M_2 = 0$; wir denken uns diese irreduziblen Differentialgleichungen so angeordnet, daß $J_3 = 0$ mit $M_2 = 0$ kein Integral gemeinsam hat. Wir suchen dann das kleinste gemeinsame Vielfache der zwei linearen homogenen Differentialausdrücke M_2 und J_3; dieses sei M_3; dann wird:

$$M_3 = A_3 M_2.$$

Hierbei ist $M_3 = 0$ eine lineare homogene Differentialgleichung der Ordnung $i_1 + i_2 + i_3$; $A_3 = 0$ ist eine lineare homogene Differentialgleichung der Ordnung i_3. $A_3 = 0$ und $J_3 = 0$ sind gegenseitig von derselben Art; denn M_3 ist das kleinste gemeinsame Vielfache von J_3 und M_2 und $J_3 = 0$ ist eine irreduzible Differentialgleichung, die mit $M_2 = 0$ kein Integral gemeinsam hat.

Mithin ist im besonderen auch $A_3 = 0$ eine irreduzible Differentialgleichung. Fahren wir auf diese Art und Weise fort, bis wir zu einem kleinsten gemeinsamen Vielfachen $M_{\epsilon-1}$ von der Ordnung $i_1 + i_2 + \cdots + i_{\epsilon-1}$ kommen.

Die irreduziblen Differentialgleichungen:

$$J_1 = 0,\ J_2 = 0, \cdots J_{\epsilon-1} = 0,\ J_\epsilon = 0, \cdots J_g = 0$$

mögen so angeordnet sein, daß $J_\epsilon = 0$ mit $M_{\epsilon-1} = 0$ kein Integral gemeinsam hat. Wir bilden dann das kleinste gemeinsame Vielfache von $M_{\epsilon-1}$ und J_ϵ; dieses sei mit M_ϵ bezeichnet. Da M_ϵ durch $M_{\epsilon-1}$ teilbar ist, so ergibt sich eine Gleichung:

$$M_\epsilon = A_\epsilon M_{\epsilon-1};$$

dabei bedeuten $A_\epsilon = 0$ und $J_\epsilon = 0$ zwei lineare homogene Differentialgleichungen derselben Ordnung i_ϵ, die gegenseitig von derselben Art sind. Da $J_\epsilon = 0$ irreduzibel ist, so ist auch die Differentialgleichung $A_\epsilon = 0$ irreduzibel.

Selbst wenn in der Reihe der Differentialgleichungen:

$$J_1 = 0,\ J_2 = 0, \cdots J_g = 0$$

sich unendlich viele befinden, kann unser Prozeß nicht ins Unendliche fortgehen; er möge also bei M_ϵ sein Ende erreichen. Daß unser Prozeß der Bildung von kleinsten gemeinsamen Vielfachen einmal abbrechen muß, kann man auf folgende Art einsehen: Die Integrale aller Differentialgleichungen

$$J_1 = 0,\ J_2 = 0, \cdots J_g = 0$$

genügen der linearen homogenen Differentialgleichung $P = 0$ von der Ordnung n; daher kann die lineare homogene Differentialgleichung $M_\epsilon = 0$, welche die Ordnung $i_1 + i_2 + \cdots + i_\epsilon$ hat und durch alle Integrale von $J_1 = 0,\ J_2 = 0, \cdots J_\epsilon = 0$ befriedigt wird, sicher nicht von höherer als n^{ter} Ordnung sein. Ist im besonderen $M_\epsilon = 0$ eine lineare homogene Differentialgleichung der Ordnung n, so kann für M_ϵ der Differentialausdruck P gesetzt werden; denn $P = 0$ und $M_\epsilon = 0$ müssen, wenn sie gleiche Ordnung haben, alle Integrale gemeinsam haben; daher können sich ihre linken Seiten nur um einen bloß von x abhängigen Faktor unterscheiden, dieser ist aber für die Bestimmung von M_ϵ unwesentlich. Der Differentialausdruck M_ϵ braucht übrigens nicht von der Ordnung n zu sein, er kann vielmehr auch von niedrigerer Ordnung als der Differentialausdruck P sein.

Wir haben also

$$i_1 + i_2 + \cdots + i_\epsilon \leqq n.$$

Durch das Voraufgegangene ergibt sich für den linearen homogenen Differentialausdruck M_ϵ eine Zerlegung in irreduzible Faktoren

$$M_\epsilon = A_\epsilon \cdot A_{\epsilon-1} \cdots A_2 \cdot J_1.$$

Sei $J_f = 0$ irgend eine lineare homogene irreduzible Differentialgleichung, welche nicht zu den zur Bildung von M_e verwandten irreduziblen linearen homogenen Gleichungen

$$J_1 = 0,\ J_2 = 0, \cdots J_e = 0$$

gehört, und möge $J_f = 0$ mit $M_e = 0$ ein Integral gemeinsam haben. Wegen der Irreduzibilität von J_f müssen dann alle Integrale von $J_f = 0$ der Gleichung $M_e = 0$ genügen und M_e durch J_f teilbar sein. Mithin folgt:

$$M_e = L J_f;$$

dabei bedeutet L einen linearen homogenen Differentialausdruck von der Ordnung $i_1 + i_2 + \cdots + i_e - i_f$, wenn J_f die Ordnung i_f hat. $J_f = 0$ ist eine irreduzible lineare homogene Differentialgleichung, hieraus ergibt sich vermöge des Satzes auf S. 565 wegen der schon vorhandenen Zerlegung von M_e in irreduzible Faktoren:

$$M_e = A_e A_{e-1} \cdots A_2 J_1,$$

daß $J_f = 0$ mit einer der Differentialgleichungen

$$A_e = 0,\ A_{e-1} = 0, \cdots A_2 = 0,\ J_1 = 0$$

gegenseitig von derselben Art ist. Nun sind aber die linearen homogenen irreduziblen Differentialgleichungen:

$$\begin{array}{lll} A_e = 0 & \text{und} & J_e = 0, \\ A_{e-1} = 0 & \text{und} & J_{e-1} = 0, \\ \vdots & & \\ A_2 = 0 & \text{und} & J_2 = 0 \end{array}$$

immer gegenseitig von derselben Art. Daher muß $J_f = 0$ auch mit einer der Gleichungen $J_1 = 0$, $J_2 = 0, \cdots J_e = 0$ gegenseitig von derselben Art sein. Es möge etwa $J_f = 0$ mit $J_t = 0$, wobei $J_t = 0$ eine der Gleichungen $J_1 = 0$, $J_2 = 0, \cdots J_e = 0$ bedeutet, von derselben Art sein. Wir bemerken zunächst, daß J_f sicher existieren muß, wenn die Summe der Ordnungen der Differentialausdrücke $J_1, J_2, \cdots J_g$ größer als n ist; denn die Summe der Ordnungen von $J_1, J_2, \cdots J_e$ ist kleiner, höchstens gleich n.

Es seien $z_1, z_2, \cdots z_{i_f}$ die Elemente eines Fundamentalsystemes von Integralen von $J_f = 0$; $J_f = 0$ und $J_t = 0$ sind von derselben Art und auch von derselben Ordnung. Wir können daher die Elemente eines Fundamentalsystemes von Integralen von $J_t = 0$ mit $B(z_1), B(z_2), \cdots B(z_{i_f})$ bezeichnen, dabei bedeutet B einen linearen homogenen Differentialausdruck mit Koeffizienten aus dem Rationalitätsbereiche.

Wir betrachten jetzt die Rationalitätsgruppe der linearen homogenen Differentialgleichung $P = 0$ und verwenden bei ihrer Bildung ein derartiges Fundamentalsystem von Integralen von $P = 0$, welches die Funktionen $z_1, z_2, \cdots z_{i_f}$, $B(z_1)$, $B(z_2), \cdots B(z_{i_f})$ umfaßt; dies ist möglich, denn die sämtlichen Integrale der zwei irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen $J_i = 0$ und $J_f = 0$ befriedigen $P = 0$. Bei einer jeden Transformation der Rationalitätsgruppe von $P = 0$ transformieren sich nach dem Bekeschen Satze $z_1, z_2, \cdots z_{i_f}$ nur linear unter sich. Nach den Untersuchungen des § 2 transformieren sich die i_f Funktionen

$$B(z_1),\ B(z_2), \cdots B(z_{i_f})$$

bei linearen Transformationen der $z_1, z_2, \cdots z_{i_f}$ kogredient zu $z_1, z_2, \cdots z_{i_f}$. Bilden wir uns die i_f neuen Funktionen:

$$\lambda z_1 + \mu B(z_1),\ \lambda z_2 + \mu B(z_2), \cdots \lambda z_{i_f} + \mu B(z_{i_f}),$$

wobei λ und μ willkürliche Konstanten bedeuten. Die angegebenen i_f Funktionen transformieren sich kogredient mit den i_f Funktionen $z_1, z_2, \cdots z_{i_f}$.

Stellt man daher die lineare homogene Differentialgleichung:

$$\begin{vmatrix} u & u_1 & u_2 & \cdots & u_{i_f} \\ \frac{du}{dx} & \frac{du_1}{dx} & \frac{du_2}{dx} & \cdots & \frac{du_{i_f}}{dx} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{d^{i_f-1}u}{dx^{i_f-1}} & \frac{d^{i_f-1}u_1}{dx^{i_f-1}} & \frac{d^{i_f-1}u_2}{dx^{i_f-1}} & \cdots & \frac{d^{i_f-1}u_{i_f}}{dx^{i_f-1}} \\ \frac{d^{i_f}u}{dx^{i_f}} & \frac{d^{i_f}u_1}{dx^{i_f}} & \frac{d^{i_f}u_2}{dx^{i_f}} & \cdots & \frac{d^{i_f}u_{i_f}}{dx^{i_f}} \end{vmatrix} = 0$$

auf, wobei

$$u_k = \lambda z_k + \mu B(z_k), \quad (k = 1, 2, \cdots i_f)$$

ist, so hat diese lineare homogene Differentialgleichung, wenn man durch den Koeffizienten der höchsten Ableitung von u, nämlich diejenigen von $\frac{d^{i_f}u}{dx^{i_f}}$, dividiert, nur Koeffizienten aus dem Rationalitätsbereiche. Die Division durch den Faktor von $\frac{d^{i_f}u}{dx^{i_f}}$ ist gestattet, denn dieser Faktor ist nicht gleich Null, da er für $\lambda = 1$, $\mu = 0$ und $\mu = 1$, $\lambda = 0$ nicht verschwindet. Nach der Division der linken Seite der Differentialgleichung durch den Faktor der höchsten Ableitung hat die lineare homogene Differentialgleichung deswegen Koeffizienten aus dem Rationalitätsbereiche, weil die Faktoren von $u, \frac{du}{dx}, \cdots$ als Determinantenquotienten sich bei Transformationen der Rationalitätsgruppen von $P = 0$ nicht ändern, und rationale Differentialfunktionen der Integrale von $P = 0$ sind. Je nach der Wahl der Konstanten λ und μ kann man aus $J_i = 0$ und $J_f = 0$ unendlich viele lineare homogene Differentialgleichungen derselben Ordnung i_f mit Koeffizienten aus dem Rationalitätsbereiche herleiten. Alle diese Differentialgleichungen gehören, wie aus der Form ihrer Integrale hervorgeht, mit $J_f = 0$ und daher auch mit $J_t = 0$ zu derselben Art. Folglich sind diese unendlich vielen linearen homogenen Differentialgleichungen irreduzibel; da die Integrale einer jeden dieser unendlich vielen irreduziblen Differentialgleichungen lineare Kombinationen der Integrale von $J_t = 0$ und $J_f = 0$ sind, so hat eine jede dieser irreduziblen Gleichungen ihre Integrale mit $P = 0$ gemeinsam. Wir sehen also jedenfalls, wenn $n > i_1 + i_2 + \cdots + i_g$ ist, so gibt es bald unendlich viele irreduzible lineare homogene Differentialgleichungen, durch deren Integrale die vorgelegte lineare homogene Differentialgleichung $P = 0$ n^{ter} Ordnung befriedigt wird. Hiermit ist unser Satz bewiesen.

Aus dem angewandten Beweisverfahren und den für die Gleichungen $J_t = 0$ und $J_f = 0$ angestellten Untersuchungen folgt noch das Theorem:

Notwendig und hinreichend, damit eine lineare homogene Differentialgleichung mit unendlich vielen irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen Integrale gemeinsam hat, ist, daß es wenigstens zwei irreduzible lineare homogene Differentialgleichungen gibt, deren Integrale der vorgelegten Differentialgleichung genügen und die gegenseitig von derselben Art sind.

Wir wenden uns jetzt zu dem Beweise des folgenden Satzes:

Hat eine lineare homogene Differentialgleichung mit unendlich vielen irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen Integrale gemeinsam, so gibt es unter einer jeden beliebigen Anzahl derartiger irreduzibler Gleichungen, bei denen die Summe der Ordnungen gleich oder größer als die Ordnung der vorgelegten Differentialgleichung ist, wenigstens zwei Differentialgleichungen, die von derselben Art sind.

Wenn die Ordnungen der vorgelegten irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen als Summe eine größere Zahl als die Ordnung n der gegebenen reduziblen Differentialgleichung ergeben, so ist das Theorem schon durch das Voraufgegangene bewiesen. Der Satz braucht daher nur noch für den Fall behandelt zu werden, daß die Summe der Ordnungen der vorgelegten irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen gleich der Ordnung n der reduziblen Gleichung ist. Wir machen daher diese Annahme und suchen unter den gegebenen irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen diejenigen heraus, die sich in die Folge:

$$J_1, J_2, \cdots J_e$$

schreiben lassen, so daß das kleinste gemeinsame Vielfache M_e von der Ordnung $i_1 + i_2 + \cdots + i_e$ wird. Ich habe hierbei dieselbe Bezeichnung wie auf S. 572 verwandt. $M_e = 0$ wird dann durch alle Integrale von

$J_1 = 0,\ J_2 = 0, \cdots J_e = 0$ erfüllt. Es sind jetzt zwei Fälle zu unterscheiden, ob nämlich:

$$i_1 + i_2 + \cdots + i_e \leqq n$$

ist.

(α). Ist $i_1 + i_2 + \cdots + i_e < n$, so existiert unter den gegebenen irreduziblen Gleichungen, bei denen die Summe der Ordnungen gleich n sein soll, eine lineare homogene irreduzible Differentialgleichung, die nicht in der Reihe $J_1 = 0,\ J_2 = 0, \cdots J_e = 0$ enthalten ist. Bezeichnen wir diese Differentialgleichung mit $J_f = 0$, so muß M_e durch J_f ohne Rest teilbar sein, denn sonst wäre mit der Bildung von M_e unser Prozeß nicht vollendet. Wie auf S. 573 folgt nun, daß $J_f = 0$ und eine der Gleichungen

$$J_1 = 0,\ J_2 = 0, \cdots J_e = 0$$

von derselben Art sind. Hiermit ist unser Satz im Falle (α) bewiesen.

(β). Ist $i_1 + i_2 + \cdots + i_e = n$, so kann für M_e der Differentialausdruck P genommen werden. Nach Voraussetzung sollen unendlich viele irreduzible lineare homogene Differentialgleichungen existieren, durch deren Integrale $P = 0$ befriedigt wird. Sei eine dieser $J_f = 0$, eine Differentialgleichung, welche von $J_1 = 0,\ J_2 = 0, \cdots J_e = 0$ verschieden sein soll. Es folgt dann zunächst, da P durch J_f teilbar sein muß, wie auf S. 573, daß $J_f = 0$ und eine der irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen:

$$J_1 = 0,\ J_2 = 0, \cdots J_e = 0$$

von derselben Art sind. Möge etwa $J_f = 0$ und $J_1 = 0$ von derselben Art sein, so bilde ich mir das kleinste gemeinsame Vielfache von J_f und J_1; dieses sei mit X bezeichnet. X wird ein linearer homogener Differentialausdruck mit Koeffizienten aus dem Rationalitätsbereiche, dessen Ordnung gleich der Summe der Ordnungen der zwei irreduziblen linearen homogenen Differentialausdrücke J_1 und J_f ist. X wird durch J_1 teilbar sein müssen; hieraus ergibt sich die Zerlegung:

$$X = X_1 J_1,$$

hierbei bedeutet $X_1 = 0$ eine irreduzible lineare homogene Differentialgleichung; diese und $J_f = 0$ sind von derselben Art. Da alle Integrale von $J_1 = 0$ und $J_f = 0$ die Differentialgleichung $P = 0$ befriedigen, so muß P durch X teilbar sein. Es ergibt sich:

$$P = BX = BX_1 J_1.$$

Zerlegt man B in irreduzible Faktoren $B = B_\lambda B_{\lambda-1} \cdots B_1$, so hat man für P zwei Zerlegungen in irreduzible Faktoren, nämlich:

$$P = B_\lambda B_{\lambda-1} \cdots B_1 X_1 J_1$$

und

$$P = M_\varepsilon = A_\varepsilon A_{\varepsilon-1} \cdots A_2 J_1 \quad \text{(Vgl. S. 573).}$$

Hieraus folgt:

$$A_\varepsilon A_{\varepsilon-1} \cdots A_2 = B_\lambda B_{\lambda-1} \cdots B_1 X_1.$$

Mithin müssen $X_1 = 0$ und eine der Differentialgleichungen

$$A_\varepsilon = 0, \; A_{\varepsilon-1} = 0, \cdots A_2 = 0$$

gegenseitig von derselben Art sein. Dann aber werden infolge der S. 573 gefundenen Resultate $X_1 = 0$ und eine der Gleichungen

$$J_\varepsilon = 0, \; J_{\varepsilon-1} = 0, \cdots J_2 = 0$$

von derselben Art sein müssen. Nun waren die Gleichungen $X_1 = 0$ und $J_f = 0$, ferner $J_f = 0$ und $J_1 = 0$ von derselben Art; daher müssen $X_1 = 0$ und $J_1 = 0$ von derselben Art sein. Hieraus folgt schließlich das gewünschte Resultat, daß $J_1 = 0$ und eine der Gleichungen

$$J_2 = 0, \; J_3 = 0, \cdots J_\varepsilon = 0$$

von derselben Art sind. Hierdurch ist unser Satz auch für den Fall (β) bewiesen.

Wir haben schon oben auf S. 575 eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür abgeleitet, daß eine lineare homogene Differentialgleichung durch die Integrale von unendlich vielen irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen erfüllt wird. Man kann diese Bedingung auch noch in die folgende gleichwertige Form kleiden:

Damit eine lineare homogene Differentialgleichung mit unendlich vielen irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen Integrale gemeinsam hat, ist notwendig und hinreichend, daß die vorgelegte Differentialgleichung außer einem Integrale y_1, das auch einer irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichung genügen muß, noch ein zweites Integral der Form:

$$b_0(x)\, y_1 + b_1(x) \frac{dy_1}{dx} + \cdots + b_{s-1}(x) \frac{d^{s-1} y_1}{dx^{s-1}}$$

besitzt; dabei sollen $b_0(x), b_1(x), \cdots b_{s-1}(x)$ Funktionen des Rationalitätsbereiches, und s die Ordnung der irreduziblen Differentialgleichung, der y_1 genügt, bedeuten. Einige der Funktionen $b_0(x), b_1(x), \cdots b_{s-1}(x)$, natürlich nicht alle, können auch verschwinden.

Zu diesem Satze sei zunächst noch bemerkt, daß *nicht* ein jedes Integral einer reduziblen linearen homogenen Differentialgleichung auch einer irreduziblen genügen muß; vielmehr stellt dies für y_1 eine Bedingung dar.

Die Notwendigkeit der aufgestellten Bedingung folgt sofort daraus, daß nach dem früheren Satze für die zu betrachtende reduzible lineare homogene Differentialgleichung zwei irreduzible lineare homogene Differentialgleichungen derselben Art existieren müssen, deren Integrale der reduziblen Gleichung genügen. Daß die Bedingung ausreicht, ersieht man auf die folgende Weise. Es sei $J_1 = 0$ die irreduzible lineare homogene Differentialgleichung, die y_1 zum Integral hat; $y_2, y_3, \cdots y_s$ mögen solche Funktionen sein, daß sie mit y_1 die Elemente eines Fundamentalsystemes von Integralen von $J_1 = 0$ bilden. Setzt man

$$B(y) = b_0(x)y + b_1(x)\frac{dy}{dx} + \cdots + b_{s-1}(x)\frac{d^{s-1}y}{dx^{s-1}},$$

so genügt nach Voraussetzung $B(y_1)$ der vorgelegten linearen homogenen Differentialgleichung $P = 0$; d. h. $PB = 0$ hat y_1 zum Integrale, y_1 ist aber auch ein Integral der linearen homogenen irreduziblen Differentialgleichung $J_1 = 0$; daher müssen alle Integrale von $J_1 = 0$ auch $PB = 0$ genügen, d. h. die Funktionen $B(y_1)$, $B(y_2)$, $\cdots B(y_s)$ sind Integrale von $P = 0$. Die soeben angegebenen Funktionen transformieren sich bei einer jeden linearen Substitution der $y_1, y_2, \cdots y_s$ kogredient mit $y_1, y_2, \cdots y_s$. Bei den Transformationen der Rationalitätsgruppe von $P = 0$ transformieren sich $y_1, y_2, \cdots y_s$ als Integrale einer irreduziblen Differentialgleichung nach dem Bekeschen Satz gesondert für sich, mithin trifft dies auch für $B(y_1), B(y_2), \cdots B(y_s)$ zu. Daher genügen diese Funktionen einer irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichung mit Koeffizienten aus dem Rationalitätsbereiche; diese Gleichung und $J_1 = 0$ sind von derselben Art. Die Differentialgleichung, welche

$$B(y_1),\ B(y_2),\ \cdots\ B(y_s)$$

zu Integralen hat, kann nicht etwa mit $J_1 = 0$ zusammenfallen, denn sonst hätte $J_1 = 0$ sowohl y_1 als auch $B(y_1)$ zu Integralen und wäre nach einem bekannten Frobeniusschen Satze*) reduzibel.

Als Kriterium dafür, daß eine lineare homogene Differentialgleichung mit unendlich vielen verschiedenen irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen Integrale gemeinsam hat, kann auch der folgende Satz dienen:

Notwendig und hinreichend, damit eine lineare homogene Differentialgleichung mit unendlich vielen verschiedenen irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen Integrale gemeinsam hat, ist, daß man die Rationalitätsgruppe der vorgelegten Differentialgleichung derartig darstellen kann, daß eine jede Transformation der Rationalitätsgruppe eine Matrix der Form:

---

*) G. Frobenius, Journ. f. d. r. u. ang. Math., Bd. 76, S. 268. Vgl. auch Beke, Math. Annalen, Bd. 45, S. 291; sowie L. Schlesinger, Handbuch, Bd. 2_I, S. 117.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1f} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & & \cdots 0 \\
c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2f} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & & \cdots 0 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & & \\
c_{f1} & c_{f2} & \cdots & c_{ff} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & & \cdots 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1f} & 0 & & \cdots 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2f} & 0 & & \cdots 0 \\
\vdots & & & & \vdots & & & \vdots & \vdots & & \\
0 & 0 & \cdots & 0 & c_{f1} & c_{f2} & \cdots & c_{ff} & 0 & & \cdots 0 \\
c_{2f+1,1} & c_{2f+1,2} & \cdots & c_{2f+1,f} & c_{2f+1,f+1} & & \cdots & c_{2f+1,2f} & c_{2f+1,2f+1} & & \cdots c_{2f+1,n} \\
\vdots & & & & & & & & & & \\
c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{n,f} & c_{n,f+1} & & \cdots & c_{n,2f} & c_{n,2f+1} & & \cdots c_{nn}
\end{array}$$

hat. $2f \leqq n$.

Die Notwendigkeit der aufgestellten Bedingung folgt unmittelbar daraus, daß unsere vorgelegte Differentialgleichung nach dem Satz auf S. 577 zwei Funktionensysteme $y_1, y_2, \cdots y_f$ und $B(y_1), B(y_2), \cdots B(y_f)$ zu Integralen haben muß; von diesen transformieren sich $y_1, y_2, \cdots y_f$ als Integrale einer irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichung f^{ter} Ordnung gesondert für sich; $B(y_1), B(y_2), \cdots B(y_f)$ müssen sich mit ihnen kogredient transformieren. Umgekehrt, hat die Rationalitätsgruppe von $P = 0$ die oben angegebene Eigenschaft, so existieren nach dem Bekeschen Satz zwei lineare homogene Differentialgleichungen, durch deren Integrale $P = 0$ befriedigt wird. Infolge unseres Hilfssatzes auf Seite 561 sind diese zwei Differentialgleichungen von derselben Art. Hiermit ist aber unser Satz bewiesen.

§ 5.

Zerlegung eines linearen homogenen Differentialausdruckes auf unendlich viele verschiedene Weisen in irreduzible Faktoren.

Hat eine lineare homogene Differentialgleichung mit unendlich vielen verschiedenen irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen Integrale gemeinsam, so läßt sich auch der lineare homogene Differentialausdruck, durch dessen Nullsetzen die Differentialgleichung entsteht, auf unendlich viele verschiedene Arten in irreduzible Faktoren zerlegen. Zwei Zerlegungen:

$$P = Q_\lambda\, Q_{\lambda-1} \cdots Q_2\, Q_1\,,$$
$$P = K_\lambda K_{\lambda-1} \cdots K_2 K_1$$

eines linearen homogenen Differentialausdruckes P in irreduzible Faktoren sollen für das Folgende als verschieden gelten, wenn irgend zwei der irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen:

$$Q_i = 0 \quad \text{und} \quad K_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots \lambda)$$

kein Integral gemeinsam haben. Mit anderen Worten: Zwei Zerlegungen sollen als verschieden gelten, wenn sich Q_λ und K_λ oder $Q_{\lambda-1}$ und $K_{\lambda-1}$ oder $\cdots$ Q_1 und K_1 nicht nur um einen bloß von x abhängigen Faktor, der eine Funktion des Rationalitätsbereiches ist, unterscheiden.

Es gilt nun der folgende Satz:

Notwendig und hinreichend, damit ein linearer homogener Differentialausdruck sich auf unendlich viele verschiedene Arten in irreduzible Faktoren zerlegen läßt, ist, daß entweder die durch Nullsetzen des Differentialausdruckes entstehende reduzible lineare homogene Differentialgleichung oder irgend eine mit ihr zu derselben Art gehörige lineare Differentialgleichung niedrigerer Ordnung mit unendlich vielen verschiedenen irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen Integrale gemeinsam hat.

Hat die Differentialgleichung $P = 0$ mit unendlich vielen verschiedenen linearen homogenen Differentialgleichungen Integrale gemeinsam, so kann man offenbar auf unendlich viele verschiedene Arten einen irreduziblen linearen homogenen Differentialausdruck Q_1 finden, daß sich P in $P = L Q_1$ zerlegen läßt. Zerlegt man L weiter in irreduzible Faktoren, so ist P in diesem Falle auf unendlich viele verschiedene Arten in irreduzible Faktoren zerlegbar. Gibt es nur eine endliche Anzahl irreduzibler linearer homogener Differentialgleichungen $Q_1 = 0$, deren Integrale $P = 0$ befriedigen, und soll sich P auf unendlich viele verschiedene Arten in irreduzible Faktoren zerlegen lassen, so muß bei einer der Zerlegungen $P = L Q_1$ der Differentialausdruck L sich in unendlich viele irreduzible Faktoren zerlegen lassen; entweder hat in diesem Falle $L = 0$ mit unendlich vielen verschiedenen irreduziblen linearen Differentialgleichungen Integrale gemeinsam oder, falls $L = 0$ nur mit einer endlichen Anzahl von derartigen Differentialgleichungen Integrale gemeinsam hat, so muß sich L in $L_1 Q_2$, wobei L_1 in unendlich viele irreduzible Faktoren zerlegbar ist, zerlegen lassen. Fährt man so fort, so kommt man schließlich einmal auf eine lineare homogene Differentialgleichung, die mit unendlich vielen irreduziblen Gleichungen Integrale gemeinsam haben muß; denn die Ordnungen von P, L, L_1, u. s. w. nehmen ab; der Prozeß muß also einmal sein Ende erreichen. Da die Differentialgleichungen $L = 0$, $L_1 = 0, \cdots$ mit $P = 0$ von derselben Art sind, so sieht man die Notwendigkeit der oben aufgestellten Bedingung ein.

Hat umgekehrt irgend eine lineare homogene Differentialgleichung $R = 0$, die mit $P = 0$ von derselben Art ist, mit unendlich vielen verschiedenen irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen Integrale gemeinsam, so kann P stets auf unendlich viele verschiedene Arten in irreduzible Faktoren zerlegt werden. Ist nämlich $R=0$ mit $P=0$ von derselben Art, so existiert nach dem Satze auf Seite 563 ein linearer homogener Differentialausdruck R_1, daß $P=R_1 Q$ wird und die Gleichungen $R=0$ und $R_1=0$ gegenseitig von derselben Art sind. Nach dem Satze auf Seite 560 haben $R=0$ und $R_1=0$ dieselbe Rationalitätsgruppe; hat daher $R=0$ mit unendlich vielen irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichungen Integrale gemeinsam, so trifft dies infolge des Satzes auf Seite 578 auch für $R_1=0$ zu; mithin kann aber P auf unendlich viele verschiedene Arten in irreduzible lineare homogene Differentialausdrücke zerlegt werden.

Man kann auch folgenden Satz beweisen:

Notwendig und hinreichend, damit ein linearer homogener Differentialausdruck P sich auf unendlich viele verschiedene Arten in irreduzible Faktoren zerlegen läßt, ist, daß die Rationalitätsgruppe von $P=0$ die Form:

$$\begin{array}{llllll}
\mathfrak{G}_{11} & 0 & 0 & 0 & \cdots 0 & 0 \\
\mathfrak{G}_{21} & \mathfrak{G}_{22} & 0 & 0 & \cdots 0 & 0 \\
\mathfrak{G}_{31} & \mathfrak{G}_{32} & \mathfrak{G}_{33} & 0 & \cdots 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \\
\mathfrak{G}_{\lambda-1\,1} & \mathfrak{G}_{\lambda-1\,2} & \mathfrak{G}_{\lambda-1\,3} & \mathfrak{G}_{\lambda-1\,4} & \cdots \mathfrak{G}_{\lambda-1\,\lambda-1} & 0 \\
\mathfrak{G}_{\lambda 1} & \mathfrak{G}_{\lambda 2} & \mathfrak{G}_{\lambda 3} & \mathfrak{G}_{\lambda 4} & \cdots \mathfrak{G}_{\lambda\,\lambda-1} & \mathfrak{G}_{\lambda\lambda}
\end{array}$$

hat, $\mathfrak{G}_{\varepsilon\varepsilon}$ und $\mathfrak{G}_{\varepsilon-1\,\varepsilon-1}$ völlig identisch und $\mathfrak{G}_{\varepsilon\,\varepsilon-1}=0$ werden. Dabei ist ε eine der Zahlen $2, 3, \cdots \lambda$, $\mathfrak{G}_{ki}$ $(k>i)$ bedeutet eine Gesamtheit von Matrizes mit f_k Zeilen und f_i Kolonnen, wenn die Matrizes von $\mathfrak{G}_{ii}$ f_i Zeilen und f_i Kolonnen besitzen.

Der Beweis ergibt sich einfach mit Hilfe des voraufgegangenen Satzes sowie des Satzes auf Seite 578*).

§ 6.

Lineare homogene Differentialgleichungen, deren linke Seiten kleinste gemeinsame Vielfache irreduzibler linearer homogener Differentialausdrücke sind.

Bei Zugrundelegung eines Rationalitätsbereiches kann die linke Seite einer jeden algebraischen Gleichung als kleinstes gemeinsames Vielfaches von irreduziblen Polynomen aufgefaßt werden. Man kann nun in analoger

*) Vgl. auch meine schon S. 558 zitierte Arbeit in den Berichten der Kgl. Gesellschaft der Wiss. zu Leipzig, S. 6.

Weise nach denjenigen linearen homogenen Differentialgleichungen fragen, bei denen es eine Reihe unter einander verschiedener irreduzibler linearer homogener Differentialgleichungen $J_1 = 0, J_2 = 0, J_3 = 0, \cdots J_g = 0$ gibt, so daß die Ordnung der vorgelegten linearen homogenen Differentialgleichungen $P = 0$ gleich der Summe der Ordnungen dieser Gleichungen wird und $P = 0$ die Differentialgleichung niedrigster Ordnung ist, welche durch die Integrale aller dieser Gleichungen erfüllt wird. *Bei diesen Differentialgleichungen ist also die linke Seite das kleinste gemeinsame Vielfache von irreduziblen linearen homogenen Differentialausdrücken.* Die zu betrachtenden linearen homogenen Differentialgleichungen können auch auf folgende Art gekennzeichnet werden: man kann für sie wenigstens ein derartiges Fundamentalsystem von Integralen finden, daß ein jedes Element dieses Fundamentalsystemes auch Integral einer irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichung wird.

Für die zu betrachtende Gattung von Differentialgleichungen gilt nun der folgende Satz:

Die notwendige und hinreichende Bedingung, damit eine lineare homogene Differentialgleichung die Eigenschaft hat, daß ihre linke Seite das kleinste gemeinsame Vielfache einer Anzahl irreduzibler linearer homogener Differentialgleichungen ist, besteht in dem Zerfallen der Rationalitätsgruppe der Differentialgleichung in eine Reihe irreduzibler linearer homogener Gruppen.

Die Rationalitätsgruppe der vorgelegten Differentialgleichung muß sich also in die Form:

$$\begin{matrix} \mathfrak{G}_{11} & 0 & 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \mathfrak{G}_{22} & 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 & 0 & \mathfrak{G}_{33} & 0 \cdots 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \cdots \mathfrak{G}_{gg} \end{matrix}$$

bringen lassen, wobei $\mathfrak{G}_{11}, \mathfrak{G}_{22}, \cdots \mathfrak{G}_{gg}$ irreduzible Gruppen bedeuten. Der Beweis des Satzes kann auf folgende Weise geführt werden: Angenommen P sei das kleinste gemeinsame Vielfache der irreduziblen linearen homogenen Differentialausdrücke $J_1, J_2, \cdots J_g$, so mögen $y_1, y_2, \cdots y_{i_1}$ ein Fundamentalsystem von Integralen von $J_1 = 0$, $y_{i_1+1}, y_{i_1+2}, \cdots y_{i_1+i_2}$ ein Fundamentalsystem von Integralen von $J_2 = 0$, u. s. w., schließlich

$$y_{i_1+i_2+\cdots+i_{g-1}+1},\ y_{i_1+i_2+\cdots+i_{g-1}+2}, \cdots y_{i_1+i_2+\cdots+i_g}$$

ein Fundamentalsystem von Integralen von $J_g = 0$ sein; $P = 0$ hat dann die Integrale $y_1, y_2, \cdots y_{i_1}, y_{i_1+1}, y_{i_1+2}, \cdots y_{i_1+i_2}, \cdots y_{i_1+i_2+\cdots+i_{g-1}+1}, y_{i_1+i_2+\cdots+i_{g-1}+2}, \cdots y_{i_1+i_2+\cdots+i_g}$, und diese $i_1 + i_2 + \cdots + i_g$ Funktionen bilden ein Fundamentalsystem von Integralen von $P=0$. Da $y_1, y_2, \cdots y_{i_1}$ ein Fundamentalsystem von Integralen der irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichung $J_1=0$ sind, so transformieren sich diese Funktionen bei allen Transformationen der Rationalitätsgruppe von $P=0$ nur unter sich; ebenso transformieren sich bei allen Transformationen der Rationalitätsgruppe von $P=0$ die Integrale

$$y_{i_1+1}, y_{i_1+2}, \cdots y_{i_1+i_2}$$

nur unter sich; denn diese genügen einer irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichung $J_2=0$; u. s. w. Sind $\mathfrak{G}_{11}, \mathfrak{G}_{22}, \cdots \mathfrak{G}_{gg}$ die Rationalitätsgruppen von $J_1=0$, $J_2=0, \cdots J_g=0$, so wird die Rationalitätsgruppe von $P=0$ die obige Form annehmen; $\mathfrak{G}_{11}, \mathfrak{G}_{22}, \cdots \mathfrak{G}_{gg}$ sind ferner irreduzible Gruppen linearer homogener Substitutionen, denn $J_1=0$, $J_2=0, \cdots J_g=0$ sind irreduzible lineare homogene Differentialgleichungen.

Umgekehrt, besitzt die lineare homogene Differentialgleichung $P=0$

$$y_1, y_2, \cdots y_{i_1}, y_{i_1+1}, y_{i_1+2}, \cdots y_{i_1+i_2}, y_{i_1+i_2+1}, y_{i_1+i_2+2}, \cdots$$
$$y_{i_1+i_2+\cdots+i_{g-1}}, y_{i_1+i_2+\cdots+i_{g-1}+1}, \cdots y_{i_1+i_2+\cdots+i_g}$$

als Elemente eines Fundamentalsystemes und transformieren sich $y_1, y_2, \cdots y_{i_1}$ nur unter sich vermöge der irreduziblen Gruppe $\mathfrak{G}_{11}$, $y_{i_1+1}, y_{i_1+2}, \cdots y_{i_1+i_2}$ nur unter sich vermöge der irreduziblen Gruppe $\mathfrak{G}_{22}$, u. s. w., schließlich $y_{i_1+i_2+\cdots+i_{g-1}+1}, y_{i_1+i_2+\cdots+i_{g-1}+2}, \cdots y_{i_1+i_2+\cdots+i_g}$ nur unter sich vermöge der irreduziblen Gruppe $\mathfrak{G}_{gg}$, besitzt also $P=0$ eine Rationalitätsgruppe der oben angegebenen Form, so kann man nach den im § 1 angeführten Ergebnissen von Herrn Beke eine irreduzible lineare homogene Differentialgleichung $J_1=0$ mit der Rationalitätsgruppe $\mathfrak{G}_{11}$ und den ersten i_1 Integralen, ebenso eine irreduzible lineare homogene Differentialgleichung $J_2=0$ mit der Rationalitätsgruppe $\mathfrak{G}_{22}$ und den Integralen $y_{i_1+1}, y_{i_1+2}, \cdots$ $\cdots y_{i_1+i_2}$, u. s. w., schließlich eine irreduzible lineare homogene Differentialgleichung $J_g=0$ mit der Rationalitätsgruppe $\mathfrak{G}_{gg}$ und den i_g Integralen $y_{i_1+i_2+\cdots+i_{g-1}+1}, y_{i_1+i_2+\cdots+i_{g-1}+2}, \cdots y_{i_1+i_2+\cdots+i_g}$ finden. P ist also kleinstes gemeinsames Vielfaches von $J_1, J_2, \cdots J_g$.

Zu der in diesem Paragraphen charakterisierten Gattung von Differentialgleichungen gehören die *algebraisch integrierbaren*, d. h. diejenigen, deren Integrale algebraische Funktionen der Variablen sind. Es gilt folgender Satz:

Für eine jede algebraisch integrierbare lineare homogene Differentialgleichung kann man stets wenigstens ein derartiges Fundamentalsystem von Integralen finden, daß ein jedes Element dieses Fundamentalsystemes Integral einer irreduziblen linearen homogenen Differentialgleichung ist.

Mit anderen Worten: *Die linke Seite einer jeden reduziblen algebraisch* *integrierbaren linearen homogenen Differentialgleichung ist das kleinste gemeinsame Vielfache irreduzibler linearer homogener Differentialausdrücke.*

Der Beweis beruht auf folgendem: Die Rationalitätsgruppe einer jeden algebraisch integrierbaren linearen homogenen Differentialgleichung ist eine endliche Gruppe; ist die vorgelegte Differentialgleichung reduzibel, so kann nach dem im § 1 zitierten Bekeschen Satze die Rationalitätsgruppe stets in eine solche Form gebracht werden, daß in sämtlichen Substitutionen ein Koeffizient, der nicht in der Hauptdiagonale steht, durchgehend Null ist. Herr Maschke*) hat nun den folgenden Satz bewiesen:

Jede endliche Gruppe, in deren sämtlichen Substitutionen ein nicht in der Hauptdiagonale stehender Koeffizient durchgehend Null ist, läßt sich in eine Anzahl von Systemen derartig zerlegen, daß sich die Variablen eines und desselben Systems nur unter sich substituieren. Mithin hat die Rationalitätsgruppe einer jeden reduziblen algebraisch integrierbaren linearen homogenen Differentialgleichung die Form, wie sie der Satz auf Seite 582 verlangt. Die vorgelegte Differentialgleichung gehört also zu der betrachteten Gattung.

Es braucht wohl nicht besonders betont zu werden, daß nicht jede lineare homogene Differentialgleichung zu der in diesem Paragraphen charakterisierten Gattung von Gleichungen gehört, z. B. gehören die durch Quadraturen lösbaren linearen homogenen Differentialgleichungen, deren Rationalitätsgruppe integrabel ist, im allgemeinen nicht zu den in diesem Paragraphen untersuchten Gleichungen; dies ergibt sich aus der Form der Rationalitätsgruppe.

Freiburg i. Br., März 1902.

*) H. Maschke, Beweis des Satzes, daß diejenigen endlichen linearen Substitutionsgruppen, in welchen einige durchgehend verschwindende Koeffizienten auftreten, intransitiv sind. Math. Annalen, Bd. 52, S. 363.

Zur Integration partieller Differentialgleichungen.

Von

Karl Boehm in Heidelberg.

Einleitung.

In dem von Cauchy begründeten Calcul des limites besitzt die Theorie der Differentialgleichungen diejenige Methode, welche unseren funktionentheoretischen Anschauungen am vollkommensten entspricht; denn Cauchys Theoreme geben nicht nur die Überzeugung von der Existenz der Integrale, sondern liefern auch analytische Ausdrücke für diese, und die moderne Analysis, unter dem Einfluß von Méray und Weierstraß, neigt sich immer mehr der Auffassung zu, welche in dem analytischen Ausdruck nicht eine Eigenschaft, sondern das Wesen des Begriffes „Funktion" erblickt*).

Was nun die Theorie der partiellen Differentialgleichungen im besonderen angeht, so ist dieselbe nach der bezeichneten Richtung hin während eines halben Jahrhunderts kaum über die Anfänge hinausgekommen, welche ihr Cauchy gegeben hatte; wohl haben die Untersuchungen des letzteren in der berühmten Abhandlung der Frau von Kowalevsky diejenige Fassung erhalten, in welcher sie klassisch geworden sind, aber weder diese Abhandlung noch die übrigen, nicht zahlreichen, Arbeiten jener Epoche, welche sich mit dem Calcul des limites befaßten, haben die Theorie dem Inhalte nach wesentlich weiter geführt. Die Ursache dieses Stillstandes darf wohl in dem Umstande erblickt werden, daß in dem gleichen Zeitraum diejenige Behandlungsweise der partiellen Differentialgleichungen, deren Ziel die Reduktion auf gewöhnliche Differentialsysteme bildet, das allgemeine Interesse absorbierte.

Erst um das Jahr 1890 begannen französische Mathematiker, unter Führung des Herrn Méray, das allgemeine Problem der Theorie erfolgreich

*) Daß bei Cauchy selbst die Methode des Calcul des limites keineswegs dieser modernen Anschauung entsprang, zeigen die interessanten Ausführungen des Herrn Méray (Leçons nouvelles sur l'analyse infinitésimale, première partie, préface pp. X (note 3), XXIII).

nach den Prinzipien des Calcul des limites zu behandeln, welcher von Cauchy nur auf besondere Klassen partieller Differentialsysteme angewandt worden war. Im Jahre 1893 gelang es Herrn Riquier, die erste wahrhaft allgemeine Lösung zu liefern.

Aber auch nach diesem großen Fortschritt behalten die Untersuchungen von Cauchy und Frau von Kowalevsky einen nicht bloß historischen Wert; denn einerseits erfordert das in keinem Falle versagende Verfahren nicht nur in seiner allgemeinen Darstellung, sondern auch häufig in der Anwendung auf den einzelnen Fall umständliche Operationen und beseitigt daher nicht das Bedürfnis nach solchen Kriterien, welche für besondere Klassen von partiellen Differentialsystemen die Existenz und den Charakter der Integrale unmittelbar erkennen lassen; andrerseits läßt sich, wie Herr Delassus im Anschluß an Herrn Tresse gezeigt hat, das allgemeinste Differentialsystem selbst in der Weise behandeln, daß man es auf eine Reihe Kowalevskyscher Systeme reduziert.

In der Abhandlung der Frau von Kowalevsky wird die Existenz regulärer Integrale für Differentialsysteme, welche ebensoviele Gleichungen als unbekannte Funktionen enthalten, zunächst unter zwei Voraussetzungen nachgewiesen:

1) es müssen gewisse Differentialquotienten höchster Ordnung in dem System tatsächlich vorkommen,

2) das Differentialsystem muß sich nach jenen Differentialquotienten auflösen lassen.

Die erste Annahme betrifft lediglich die Eigenart der Differentialgleichungen; die zweite beschränkt auch die Wahl der Anfangswerte. Die Gültigkeit der unter diesen Voraussetzungen gewonnenen Resultate wird alsdann auf allgemeinere Klassen von Differentialsystemen ausgedehnt, welchen durch lineare Transformation der unabhängigen Variablen die soeben charakterisierte „normale Form“ erteilt werden kann.

Bei dieser Behandlungsweise erscheinen die in den Integralen auftretenden willkürlichen Funktionen als Funktionen linearer Kombinationen der unabhängigen Variablen; die Frage, welche Bestimmungsstücke der Integrale als Funktionen der unabhängigen Variablen selbst gegeben werden dürfen, bleibt ungelöst; und doch ist gerade ihre Beantwortung interessant und für die Anwendungen von Bedeutung. Ein Verfahren, welches, ohne die Untersuchung zu komplizieren, jene Transformation der unabhängigen Variablen vermeidet, wird also nicht nur methodisch als eine Verbesserung bezeichnet werden dürfen, sondern auch einen tieferen Einblick in die Natur der Integrale gestatten.

Mit dem formalen Teil einer auf dieses Ziel gerichteten Untersuchung hat sich meine im Jahre 1900 bei Teubner gedruckte Schrift „Zur

Integration partieller Differentialsysteme“ beschäftigt. Dieselbe soll nunmehr durch die Beweise für die Konvergenz der in ihr hypothetisch angesetzten Reihen ergänzt und gerechtfertigt werden.

In der vorliegenden ersten Arbeit behandle ich den Fall einer einzigen Differentialgleichung zur Bestimmung einer einzigen unbekannten Funktion; um die genannte Schrift nicht als bekannt voraussetzen zu müssen, habe ich diejenigen Teile derselben, welche sich auf unser Problem beziehen, in etwas veränderter Form dem Konvergenzbeweise vorangestellt.

I. Formulierung des Problems.

Um die Funktion z der unabhängigen komplexen Variablen $x_1, x_2, \cdots, x_n$ als Potenzreihe in der Umgebung der Anfangswerte $x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0$ zu bestimmen, sei uns die partielle Differentialgleichung ν^{ter} Ordnung

$$(1)\quad f\left(x_1 - x_1^0, x_2 - x_2^0, \cdots, x_n - x_n^0; z - z_0; \cdots; p^\beta_{\beta_1, \ldots, \beta_n} - \pi^\beta_{\beta_1, \ldots, \beta_n}, \cdots\right) = 0$$
$$(\beta_1 + \cdots + \beta_n = \beta;\ \beta = 1, 2, \cdots, \nu)$$

vorgelegt. Die linke Seite von (1) sei selbst eine Potenzreihe der durch die Bezeichnung angedeuteten Argumente, ohne konstantes Glied, konvergent in einem System von Kreisen mit den Mittelpunkten

$$(2)\qquad x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0; z_0; \cdots, \pi^\beta_{\beta_1, \ldots, \beta_n}, \cdots;$$

dabei ist allgemein

$$(3)\qquad \frac{\partial^\beta z}{\partial x_1^{\beta_1} \cdots \partial x_n^{\beta_n}} = p^\beta_{\beta_1, \cdots, \beta_n}; \qquad \left(\frac{\partial^\beta z}{\partial x_1^{\beta_1} \cdots \partial x_n^{\beta_n}}\right)_{\substack{x_1 = x_1^0 \\ \cdots\cdots \\ x_n = x_n^0}} = \pi^\beta_{\beta_1, \cdots, \beta_n}$$

gesetzt worden. Für die Differentialquotienten ν^{ter} und höherer Ordnung werden wir vielfach noch eine zweite Art der Bezeichnung verwenden, indem wir setzen

$$(4)\qquad \frac{\partial^\varrho z}{\partial x_1^{\varrho_1} \cdots \partial x_n^{\varrho_n}} = p^\varrho_{\varrho_1, \cdots, \varrho_n} = [\varrho_1, \cdots, \varrho_n].$$

Dadurch daß wir die Potenzreihe f ohne konstantes Glied einführten, haben wir von vornherein unsere Betrachtung von dem algebraischen Problem losgelöst, welches im allgemeinen mit jedem Differentialproblem verknüpft ist und darin besteht, einen der Anfangswerte (2) als Funktion der übrigen so zu bestimmen, daß die vorgelegte Differentialgleichung erfüllt wird, wenn ihren Argumenten eben diese Anfangswerte erteilt werden.

Es sei nun

$$(5)\qquad z = \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n} A_{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n} \frac{(x_1 - x_1^0)^{\alpha_1}}{\alpha_1!} \cdot \frac{(x_2 - x_2^0)^{\alpha_2}}{\alpha_2!} \cdots \frac{(x_n - x_n^0)^{\alpha_n}}{\alpha_n!}$$

eine Potenzreihe, welche in einem System von Kreisen mit den Mittelpunkten $x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0$ konvergiert; in denselben Bereichen wie die Reihe (5) konvergieren ihre sämtlichen Ableitungen. Bilden wir diejenigen Ableitungen, durch welche die in der Funktion f vorkommenden Differentialquotienten dargestellt werden, und setzen sie in diese Funktion ein, so geht dieselbe in eine zusammengesetzte Funktion (fonction composée) von $x_1, x_2, \cdots, x_n$ über, welche als Potenzreihe der Argumente $x_1 - x_1^0, \cdots, x_n - x_n^0$ wieder in einem System von Kreisen mit nicht verschwindenden Radien konvergieren muß*); hat diese Potenzreihe den konstanten Wert Null, was nur möglich ist, wenn ihre Koeffizienten identisch verschwinden, so ist die Reihe (5) ein Integral unserer Differentialgleichung (1) wie wir es suchen. Die Koeffizienten, deren Verschwinden gefordert werden muß, sind — von Zahlenfaktoren abgesehen — die Anfangswerte der Differentialquotienten unserer Funktion f, wenn wir diese als zusammengesetzte Funktion von $x_1, x_2, \cdots, x_n$ betrachten; wir werden also diejenigen Relationen, welche zwischen den Koeffizienten**) $A_{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n}$ der integrierenden Potenzreihe bestehen müssen, erhalten können, indem wir die vorgelegte Differentialgleichung (1) auf alle möglichen Arten nach den unabhängigen Variablen differentiieren und alsdann die Anfangswerte (2) in die so erhaltenen Differentialgleichungen einführen; hierdurch gehen diese über in Relationen zwischen den Anfangswerten der höheren Differentialquotienten von z, welches eben die Koeffizienten**) der Reihe (5) sind.

Die aus (1) abgeleiteten Differentialgleichungen gruppieren wir in eine Reihe von Differentialsystemen

$$(6)\qquad \Sigma', \Sigma'', \cdots, \Sigma^\lambda, \cdots$$

indem wir jeweils diejenigen unter ihnen, welche von gleicher Ordnung $\nu + \lambda$ sind, zu einem System Σ^λ zusammenfassen. Das System Σ^λ besteht aus

$$(7)\qquad n_\lambda = \frac{n \cdot (n+1) \cdots (n + \lambda - 1)}{1 \cdot 2 \cdots \lambda}$$

*) Nach einem Satze aus der Theorie der Potenzreihen, dessen Beweis z. B. bei C. Jordan (Cours d'Analyse, t. I 2e éd. Paris 1893, numéro 359; pages 340) zu finden ist.

**) Wir verstehen hier und im folgenden öfters unter dem „Koeffizienten" eines Gliedes in einer Taylorschen Reihe den Wert des entsprechenden Differentialquotienten für die Anfangswerte der Variablen, also in der Reihe (5) die Größen $A_{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n}$ und nicht etwa $\dfrac{A_{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n}}{\alpha_1! \, \alpha_2! \cdots \alpha_n!}$.

Differentialgleichungen. Die höchsten in diesen auftretenden partiellen Differentialquotienten von z sind von der Ordnung $\nu+\lambda$; ihre Anzahl ist

$$n_{\lambda+\nu} = \frac{n\cdot(n+1)\cdots(n+\lambda+\nu-1)}{1\cdot 2\cdots(\lambda+\nu)}$$

wenn sämtliche Differentialquotienten ν^{ter} Ordnung in der Gleichung (1) tatsächlich vorkommen; in allen anderen Fällen aber kleiner als $n_{\nu+\lambda}$.

Es erheben sich nun zunächst die beiden Fragen:

1) Ist es möglich, die Beziehungen zu befriedigen, welche durch die für die Anfangswerte (2) zu bildenden Gleichungssysteme (6) zwischen den ∞^n Koeffizienten der hypothetisch angenommenen Entwicklung der Funktion z festgelegt sind?

2) Wenn eine solche Bestimmung möglich ist, welches sind die willkürlich bleibenden Elemente?

Die Beantwortung dieser Fragen bildet den formalen Teil der Untersuchung, welchem der folgende Abschnitt gewidmet ist. Da aber unsere ganze Überlegung auf der Voraussetzung beruht, daß die Reihe (5) in gewissen Bereichen konvergiere, so muß diese Eigenschaft nachträglich für die nach den gegebenen Vorschriften konstruierte Reihe nachgewiesen werden. Dieser Konvergenzbeweis, welcher den Gegenstand des dritten Abschnitts ausmacht, gibt dem vorhergehenden allererst seine Berechtigung und bildet somit den Kernpunkt der ganzen Untersuchung.

II. Formaler Teil der Untersuchung: Konstruktion des hypothetischen Integrals.

1. Definition des „ausgezeichneten Differentialquotienten".

Bilden wir die Ableitung der Funktion f nach einem in ihr auftretenden Differentialquotienten höchster, also ν^{ter} Ordnung, so ist es möglich, daß dieselbe für das unserer Untersuchung zum Grunde gelegte System der Anfangswerte (2) verschwindet; alsdann wollen wir sagen, dieses Wertesystem bezeichne *„eine in Beziehung auf den betreffenden Differentialquotienten singuläre Stelle"* der vorgelegten Differentialgleichung; *„schlechthin singulär"* aber heiße eine in Beziehung auf sämtliche Differentialquotienten höchster Ordnung singuläre Stelle. Wir werden solche schlechthin singuläre Stellen von unserer Betrachtung ausschließen, also annehmen, daß unter jenen Ableitungen der Funktion f mindestens eine an der betrachteten Stelle von Null verschieden sei. Die in (1) auftretenden Differentialquotienten ν^{ter} Ordnung teilen wir alsdann in zwei Klassen ein, deren Repräsentanten typisch mit

$$[\sigma_1, \cdots, \sigma_n] \quad \text{oder} \quad [\tau_1, \cdots, \tau_n]$$

bezeichnet werden sollen, jenachdem für das gewählte System der Anfangswerte (2)

$$\frac{\partial f}{\partial[\sigma_1, \cdots, \sigma_n]} \neq 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial f}{\partial[\tau_1, \cdots, \tau_n]} = 0$$

ist. Für einen Differentialquotienten vom Typus $[\sigma_1, \cdots, \sigma_n]$ möge das Zeichen $[\bar{\sigma}_1, \cdots, \bar{\sigma}_n]$ gewählt werden, wenn er gegenüber jedem beliebigen anderen Differentialquotienten $[(\sigma_1), \cdots, (\sigma_n)]$ vom gleichen Typus durch die Eigenschaft sich auszeichnet, daß in der Reihe der Differenzen

$$\bar{\sigma}_1 - (\sigma_1), \; \bar{\sigma}_2 - (\sigma_2), \cdots, \bar{\sigma}_n - (\sigma_n)$$

die erste nicht verschwindende stets eine positive Zahl ist, mit anderen Worten: daß immer

$$\bar{\sigma}_1 = (\sigma_1), \; \bar{\sigma}_2 = (\sigma_2), \cdots, \bar{\sigma}_{h-1} = (\sigma_{h-1}), \; \bar{\sigma}_h > (\sigma_h)$$

ist, wobei h eine der Zahlen $1, 2, \cdots, \nu - 1$ bedeutet.

Daß es unter allen Umständen solche Differentialquotienten, für welche wir die Benennung *„ausgezeichnete Differentialquotienten“* einführen wollen, gibt, ist leicht einzusehen. Man greife unter den unabhängigen Variablen eine heraus, welche x_1 genannt werden möge, und von der nichts weiter verlangt wird, als daß sie bei mindestens einem unter den wirklich vorkommenden Differentialquotienten ν^{ter} Ordnung als Differentiationsvariable figuriert, d. h. daß nicht alle Zahlen σ_1 gleich Null sind. $\bar{\sigma}_1$ sei der größte unter den Werten von σ_1; gehört zu diesem nur eine Ableitung ν^{ter} Ordnung, so genügt dieselbe bereits unseren Ansprüchen; sind aber mehrere solcher Ableitungen vorhanden, so bevorzugen wir wiederum eine unter den unabhängigen Variablen $x_2, \cdots, x_n$, für welche nicht alle σ gleich Null sind, z. B. x_2, und suchen unter den zu $\bar{\sigma}_1$ gehörigen Ableitungen diejenige heraus, für welche σ_2 den größten Wert $\bar{\sigma}_2$ hat. So fahren wir fort, bis wir auf ein $\bar{\sigma}_k$ stoßen, zu welchem nur ein einziger in der vorgelegten Differentialgleichung auftretender Differentialquotient ν^{ter} Ordnung gehört. Dieser Fall muß spätestens bei der vorletzten aus der Reihe der Zahlen σ eintreten, da die Summe aller σ für die verglichenen Ableitungen immer dieselbe, nämlich gleich ν sein muß. Die Zahl k ist offenbar die größte unter den oben mit h bezeichneten Indices und soll *„die den ausgezeichneten Differentialquotienten charakterisirende Zahl“* genannt werden; sie gibt an, wie viele von den unabhängigen Variablen in ihrer Reihenfolge bestimmt werden müssen, um den ausgezeichneten Differentialquotienten zu definieren; diese Reihenfolge ist — einmal gewählt — für die ganze Untersuchung festzuhalten; von vornherein hängt es von unserer Willkür ab, welche Variablen wir als erste, zweite, u. s. f. betrachten. Daher wird das angegebene Verfahren im allgemeinen mehrere ausgezeichnete Differentialquotienten auffinden lassen, deren jeder eine gewisse Reihenfolge der unabhängigen Variablen zur Voraussetzung hat. Unter Umständen kann ein und derselbe Differentialquotient mehrmals gefunden werden und alsdann, den verschiedenen Anordnungen der Variablen entsprechend, durch verschiedene Zahlen k charakterisiert sein.

Gehört einer der n Differentialquotienten $\frac{\partial^\nu z}{\partial x_i^\nu}$ dem Typus $[\sigma_1, \cdots, \sigma_n]$ an, so ist er stets ein ausgezeichneter Differentialquotient mit der charakterisierenden Zahl 1; denn wir haben alsdann nur die betreffende Variable x_i als erste zu betrachten, während die Reihenfolge der übrigen $n-1$ Variablen bedeutungslos ist.

Ich erwähne noch das in meiner Habilitationsschrift (S. 19) ausführlich behandelte Beispiel, für welches $\nu = 3$, $n = 3$ war und der Typus $[\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3]$ die sechs Differentialquotienten

$$[300], [210], [201], [120], [111], [021]$$

umfaßte. Unter diesen fanden sich bei verschiedener Anordnung der Variablen vier ausgezeichnete Differentialquotienten

$$[300], [120], [021], [201];$$

als charakterisierende Zahl k erhielten wir für den ersten unter ihnen die Zahl 1, für die übrigen die Zahl 2. Der Differentialquotient [021] erwies sich sowohl bei der Anordnung x_2, x_3, x_1 als auch bei der Anordnung x_3, x_2, x_1 als ausgezeichnet.

Eine graphische Darstellung, welche für $n = 2$ und $n = 3$ dem Begriff des ausgezeichneten Differentialquotienten eine anschauliche Bedeutung gab, findet man gleichfalls in der erwähnten Arbeit (S. 23—26).

2. Diskussion einer gewissen Funktionaldeterminante.

Es soll nun gezeigt werden, in welcher Weise der soeben definierte und durch Beispiele erläuterte Begriff für die Lösung unseres Differentialproblems nutzbar gemacht werden kann.

Führen wir für die Ableitungen der linken Seite unserer Differentialgleichung die Bezeichnungsweise

$$(8) \qquad f^{\lambda}_{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n} \equiv \frac{\partial^\lambda f}{\partial x_1^{\lambda_1} \partial x_2^{\lambda_2} \cdots \partial x_n^{\lambda_n}} \qquad (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = \lambda)$$

ein, so ist $f^{\lambda}_{\lambda_1, \cdots, \lambda_n}$ eine lineare Funktion der Differentialquotienten

$$[\sigma_1 + \lambda_1, \cdots, \sigma_n + \lambda_n] \quad \text{und} \quad [\tau_1 + \lambda_1, \cdots, \tau_n + \lambda_n],$$

und zwar ist

$$(9) \quad \frac{\partial f^{\lambda}_{\lambda_1, \cdots, \lambda_n}}{\partial [\sigma_1 + \lambda_1, \cdots, \sigma_n + \lambda_n]} = \frac{\partial f}{\partial [\sigma_1, \cdots, \sigma_n]}; \quad \frac{\partial f^{\lambda}_{\lambda_1, \cdots, \lambda_n}}{\partial [\tau_1 + \lambda_1, \cdots, \tau_n + \lambda_n]} = \frac{\partial f}{\partial [\tau_1, \cdots, \tau_n]}.$$

Die Anzahl der Ableitungen λ^{ter} Ordnung ist oben mit n_λ bezeichnet worden. Nun behaupten wir:

Die nach den n_λ Ableitungen λ^{ter} Ordnung eines ausgezeichneten Differentialquotienten genommene Funktionaldeterminante der n_λ Funktionen (8), *welche offenbar keine anderen variablen Größen enthält als die vorgelegte Differentialgleichung, nimmt einen von Null verschiedenen Wert an, wenn jenen Größen die Anfangswerte* (2) *erteilt werden.*

Zum Beweise bringen wir die Kombinationen $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ und dadurch auch die Funktionen $f^\lambda_{\lambda_1, \cdots, \lambda_n}$ in eine gewisse Reihenfolge, indem wir folgendes festsetzen: In der aufzustellenden Reihe soll die Funktion $f^\lambda_{\lambda_1', \cdots, \lambda_n'}$ der Funktion $f^\lambda_{\lambda_1'', \cdots, \lambda_n''}$ vorangehen, wenn entweder

$$\lambda_1' > \lambda_1''$$

oder

$$\lambda_1' = \lambda_1'', \; \lambda_2' > \lambda_2''$$

oder

$$\lambda_1' = \lambda_1'', \; \lambda_2' = \lambda_2'', \; \lambda_3' > \lambda_3''$$

oder schließlich

$$\lambda_1' = \lambda_1'', \; \lambda_2' = \lambda_2'', \cdots, \lambda_{k-1}' = \lambda_{k-1}'', \; \lambda_k' > \lambda_k''$$

ist, während für

$$\lambda_1' = \lambda_1'', \; \lambda_2' = \lambda_2'', \cdots, \lambda_{k-1}' = \lambda_{k-1}'', \; \lambda_k' = \lambda_k''$$

die Reihenfolge der beiden Funktionen (welche sich nur durch die Werte der Zahlen $\lambda_{k+1}, \cdots, \lambda_n$ unterscheiden) willkürlich angenommen werden darf. Alsdann erscheint der Differentialquotient $[\bar\sigma_1 + \lambda_1, \cdots, \bar\sigma_n + \lambda_n]$ als Ableitung eines Differentialquotienten vom Typus $[\sigma_1, \cdots, \sigma_n]$ in der Funktion $f^\lambda_{\lambda_1, \cdots, \lambda_n}$ und eventuell auch in denjenigen Funktionen f^λ, welche ihr vorangehen, niemals aber in einer der nachfolgenden. Dann da zwei Kombinationen $\{\lambda_1', \cdots, \lambda_n'\}$ und $\{\lambda_1'', \cdots, \lambda_n''\}$ stets verschieden sind, so kann der Differentialquotient $[\bar\sigma_1 + \lambda_1, \cdots, \bar\sigma_n + \lambda_n]$ nur dann in einer von $f^\lambda_{\lambda_1, \cdots, \lambda_n}$ verschiedenen Funktion $f^\lambda_{(\lambda_1), \cdots, (\lambda_n)}$ als Ableitung eines Differentialquotienten $[(\sigma_1), \cdots, (\sigma_n)]$ auftreten, wenn

$$\bar\sigma_1 + \lambda_1 = (\sigma_1) + (\lambda_1), \; \bar\sigma_2 + \lambda_2 = (\sigma_2) + (\lambda_2), \cdots, \bar\sigma_n + \lambda_n = (\sigma_n) + (\lambda_n)$$

ist, wo die eingeklammerten σ wieder die auf S. 590 angegebene Bedeutung haben. Nun waren die Zahlen $\bar\sigma_1, \cdots, \bar\sigma_n$ so gewählt, daß jedenfalls

$$\bar\sigma_1 = (\sigma_1), \; \bar\sigma_2 = (\sigma_2), \cdots, \bar\sigma_{h-1} = (\sigma_{h-1}), \; \bar\sigma_h > (\sigma_h)$$

ist, wo h eine der Zahlen $1, 2, \cdots, k$ bezeichnet. Folglich muß

$$(\lambda_1) = \lambda_1, \; (\lambda_2) = \lambda_2, \cdots, (\lambda_{h-1}) = \lambda_{h-1}, \; (\lambda_h) > \lambda_h$$

sein; bei der oben festgesetzten Anordnung der Funktionen f^λ nimmt also $f^\lambda_{(\lambda_1), \cdots, (\lambda_n)}$ eine frühere Stelle ein als $f^\lambda_{\lambda_1, \cdots, \lambda_n}$. Allerdings kann der

Differentialquotient $[\bar{\sigma}_1 + \lambda_1, \cdots, \bar{\sigma}_n + \lambda_n]$ auch in den Funktionen $f^{\lambda}_{\lambda'_1, \cdots, \lambda'_n}$ vorkommen, welche der Funktion $f^{\lambda}_{\lambda_1, \cdots, \lambda_n}$ nachfolgen; in diesen aber tritt er auf als Ableitung eines der Differentialquotienten $[\tau_1, \cdots, \tau_n]$, für welche das Wertesystem (2) eine singuläre Stelle definiert; wir haben daher vermöge (9)

$$\frac{\partial f^{\lambda}_{\lambda'_1, \cdots, \lambda'_n}}{\partial[\bar{\sigma}_1 + \lambda_1, \cdots, \bar{\sigma}_n + \lambda_n]} = \frac{\partial f^{\lambda}_{\lambda'_1, \cdots, \lambda'_n}}{\partial[\tau_1 + \lambda'_1, \cdots, \tau_n + \lambda'_n]} = \frac{\partial f}{\partial[\tau_1, \cdots, \tau_n]};$$

Jetzt werde die Funktionaldeterminante

$$\left|\frac{\partial f^{\lambda}_{\lambda_1, \cdots, \lambda_n}}{\partial[\bar{\sigma}_1 + \lambda_1, \cdots, \bar{\sigma}_n + \lambda_n]}\right| \qquad \begin{matrix}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n = 1, 2, \cdots, \lambda) \\ (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = \lambda)\end{matrix} \tag{10}$$

in der Weise gebildet, daß in einer Zeile die Ableitungen derselben Funktion $f^{\lambda}_{\lambda_1, \cdots, \lambda_n}$ nach den n_λ Differentialquotienten $[\bar{\sigma}_1 + \lambda_1, \cdots, \bar{\sigma}_n + \lambda_n]$, in einer Kolumne aber die Ableitungen sämtlicher Funktionen $f^{\lambda}_{\lambda_1, \cdots, \lambda_n}$ nach einem und demselben Differentialquotienten $[\bar{\sigma}_1 + \lambda_1, \cdots, \bar{\sigma}_n + \lambda_n]$ stehen; und zwar sei für die Anordnung sowohl der Zeilen als der Kolumnen die oben bezeichnete Reihenfolge der Kombinationen $\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ maßgebend. Alsdann tritt in der von links oben nach rechts unten verlaufenden Diagonalreihe vermöge (9) die Ableitung

$$\frac{\partial f}{\partial[\bar{\sigma}_1, \cdots, \bar{\sigma}_n]}$$

n_λ-mal auf. Die über der Diagonalen stehenden Elemente unserer Determinante werden entweder einer Ableitung von f nach einem Differentialquotienten ν^{ter} Ordnung gleich sein oder verschwinden. An allen unterhalb der Diagonalen liegenden Stellen treffen wir entweder Nullen an oder erste Ableitungen der Funktion f nach den Differentialquotienten vom Typus $[\tau_1, \cdots, \tau_n]$; derartige Ableitungen verschwinden aber für die Anfangswerte (2) nach Voraussetzung. Daher sind jedenfalls sämtliche unter der Diagonalen liegenden Stellen mit Nullen auszufüllen, wenn die Funktionaldeterminante (10) für jene Anfangswerte gebildet wird, und ihr Wert ist alsdann gleich dem Produkte der Diagonalglieder, also gleich der Potenz

$$\left(\frac{\partial f}{\partial[\bar{\sigma}_1, \cdots, \bar{\sigma}_n]}\right)^{n_\lambda}.$$

Damit ist unsere Behauptung bewiesen, da die Ableitung $\frac{\partial f}{\partial[\bar{\sigma}_1, \cdots, \bar{\sigma}_n]}$ an der durch (2) definierten Stelle nicht verschwinden darf.

3. Auflösungsschema für die Gleichungssysteme $\Sigma', \Sigma'', \cdots$.

Das System Σ^λ der n_λ Gleichungen

$$f^{(\lambda)}_{\lambda_1, \cdots, \lambda_n} = 0, \qquad (\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = \lambda) \tag{11}$$

welche durch λ-fache Differentiation aus der vorgelegten Differentialgleichung abgeleitet sind, kann, wie das Verhalten der oben betrachteten Funktionaldeterminante zeigt, nach den λ^{ten} Ableitungen jedes ausgezeichneten Differentialquotienten $[\bar{\sigma}_1, \cdots, \bar{\sigma}_n]$ aufgelöst, also durch ein äquivalentes System der Form

$$[\bar{\sigma}_1 + \lambda_1, \cdots, \bar{\sigma}_n + \lambda_n] = \varphi^{\lambda}_{\lambda_1, \cdots, \lambda_n} \qquad (\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = \lambda) \tag{12}$$

ersetzt werden; die Funktionen $\varphi^{\lambda}_{\lambda_1, \cdots, \lambda_n}$ sind in Beziehung auf alle Differentialquotienten, deren Ordnung die Zahl ν übersteigt, ganze Funktionen endlichen Grades, und zwar lineare Funktionen der Differentialquotienten $(\nu + \lambda)^{\text{ter}}$ Ordnung; ihre Koeffizienten aber sind, in Beziehung auf die unabhängigen Variablen, die unbekannte Funktion z und deren Differentialquotienten bis zur ν^{ten} Ordnung, im allgemeinen unendliche Potenzreihen, welche in einer gewissen Umgebung der Anfangswerte (2) konvergieren.

Wir bilden die Differentialsysteme $\Sigma', \Sigma'', \cdots$ deshalb, weil sie uns die Relationen liefern, welche zwischen den Anfangswerten der Differentialquotienten von z, den Koeffizienten des hypothetisch angesetzten Integrals, bestehen müssen. In Hinsicht auf diese folgt nun aus der durch (12) dargestellten Eigenschaft der folgende Satz:

Wenn für die Argumente der Differentialgleichung (1) *die Anfangswerte* (2) *vorgeschrieben sind, so sind die Anfangswerte der höheren Differentialquotienten von z durch die Gleichungssysteme* (11) *nur zum Teil bestimmt. Für alle Differentialquotienten, welche nicht mit einer Ableitung des ausgezeichneten Differentialquotienten zusammenfallen, dürfen jene Werte willkürlich festgesetzt werden; die Anfangswerte $[\bar{\sigma}_1 + \lambda_1, \cdots, \bar{\sigma}_n + \lambda_n]_0$ der Differentialquotienten, welche die linken Seiten der Gleichungssysteme* (12) *bilden (für $\lambda = 1, 2, \cdots$), stellen sich vermöge dieser als bestimmte Funktionen jener willkürlichen Konstanten dar.*

Handelt es sich bloß darum diese Funktionen zu bestimmen, so gestaltet sich die Auflösung des — nunmehr für die Anfangswerte gebildeten — Systems (11) besonders einfach; denn es verschwinden alsdann aus seinen Gleichungen alle diejenigen Posten, welche der λ-fachen Ableitung eines Differentialquotienten vom Typus $[\tau_1, \cdots, \tau_n]$ ihre Entstehung verdanken, weil sie mit einem für die Anfangswerte (2) verschwindenden Koeffizienten $\frac{\partial f}{\partial [\tau_1, \cdots, \tau_n]}$ behaftet sind.

Wir nehmen an, daß die Anfangswerte der Differentialquotienten bis zur $(\nu+\lambda-1)^{\text{ten}}$ Ordnung bereits fixiert seien, und bezeichnen die mit diesen Anfangswerten gebildeten Funktionen $f^{\lambda}_{\lambda_1,\cdots,\lambda_n}$ in einer den Vorschriften auf S. 592 entsprechenden Reihenfolge mit

$$f^0_1,\ f^0_2,\cdots,f^0_{n_\lambda}, \tag{13}$$

die als Unbekannte fungierenden Anfangswerte $[\bar{\sigma}_1+\lambda_1,\cdots,\bar{\sigma}_n+\lambda_n]_0$ in der Reihenfolge, welche durch die soeben benutzte Anordnung der Kombinationen $\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$ gegeben ist, mit

$$s^0_1,\ s^0_2,\cdots,s^0_{n_\lambda}; \tag{14}$$

dann enthält die Funktion $f^0_{n_\lambda}$ die Unbekannte $s^0_{n_\lambda}$ und nur diese,

die Funktion $f^0_{n_\lambda-1}$ die Unbekannte $s^0_{n_\lambda-1}$ und möglicherweise $s^0_{n_\lambda}$,

. . . .

allgemein: die Funktion f_m die Unbekannte s^0_m und möglicherweise $s^0_{m+1},\ s^0_{m+2},\cdots,s^0_{n_\lambda}$.

Es folgt dies aus der Beschaffenheit der oben diskutierten Funktionaldeterminante.

Wir haben also nur jede der Gleichungen

$$f^0_1=0,\ f^0_2=0,\cdots,f^0_{n_\lambda}=0 \tag{15}$$

einzeln nach derjenigen Unbekannten aufzulösen, welche in der Anordnung (14) dieselbe Stelle einnimmt wie die linke Seite der betreffenden Gleichung in der Anordnung (13), und alsdann das Resultat jeder Gleichung, von der letzten anfangend, in die vorhergehenden einzutragen.

4. Die willkürlich bleibenden Stücke der Reihe (5).

In der vorhergehenden Nummer haben wir gezeigt, daß die zwischen den Koeffizienten der Reihe (5) bestehenden Relationen in gewisser Weise befriedigt werden können, und haben damit die erste der beiden die Reihenkonstruktion betreffenden Fragen (S. 589) in bejahendem Sinne beantwortet.

In der zweiten Frage wird uns die Aufgabe gestellt, zu ermitteln, welche von den Koeffizienten willkürlich gegeben werden dürfen. Daß die Antwort auf diese Frage keine völlig bestimmte sein kann, ist von vornherein klar: denn wir haben zwar im vorhergehenden gezeigt, in welcher Weise die Gleichungen zwischen den Differentialquotienten von z und somit auch die Gleichungen zwischen den Koeffizienten stets aufgelöst werden können. Keineswegs aber ist das dort gegebene Schema der Auflösung das einzig mögliche. Und selbst wenn wir die Auflösung in der angegebenen Weise vollziehen, werden wir noch die Wahl haben, welchem von den ausgezeichneten Differentialquotienten, deren im allgemeinen mehrere existieren, wir den Vorzug geben wollen. Jedem dieser ausgezeichneten Differentialquotienten entspricht aber eine andere Gruppierung der willkürlichen Elemente. Wir können demnach allgemein nur sagen, daß jeweils n_λ von den $n_{\lambda+\nu}$ Koeffizienten

$$A_{\alpha_1, \cdots, \alpha_n} \quad (\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = \nu + \lambda)$$

als Funktionen der übrigen $n_{\lambda+\nu} - n_\lambda$ bestimmt sind.

Legen wir aber unser Auflösungsschema zum Grunde, so lassen sich die willkürlich bleibenden Elemente in sehr übersichtlicher Weise zusammenfassen.

Existiert nämlich für die Funktion z eine konvergente Reihenentwicklung, wie wir sie oben angenommen haben, so ist auch jeder Differentialquotient von z in der gleichen Weise in eine Potenzreihe von n Variablen entwickelbar; setzen wir in einer solchen einzelne unter den Variablen ihren Anfangswerten gleich, so resultieren Potenzreihen von weniger als n Variablen, deren Koeffizienten einen Teil der in der ursprünglichen Reihe auftretenden Koeffizienten repräsentieren. Wir behaupten nun, daß wir die willkürlichen unter den Koeffizienten der Entwicklung (5) in der Weise festlegen können, daß wir die Reihen vorschreiben, in welche die Funktion z und eine gewisse Anzahl ihrer Ableitungen entwickelbar sein sollen, wenn einzelne der unabhängigen Variablen ihren Anfangswerten gleich gesetzt werden.

Ist $[\bar\sigma_1, \cdots, \bar\sigma_n]$ für die Stelle (2) ein ausgezeichneter Differentialquotient, so können alle diejenigen Koeffizienten willkürlich angenommen werden, welche nicht mit einem der

$$A_{\bar\sigma_1 + \lambda_1, \cdots, \bar\sigma_n + \lambda_n}$$

(wobei $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ beliebige positive Zahlen oder Null bedeuten) zusammenfallen; diese selbst aber sind durch jene bestimmt. Nun erkennt man leicht, daß die hiernach willkürlich bleibenden Koeffizienten gerade diejenigen sind, welche als Koeffizienten in den nachstehenden aus dem hypothetischen Integral abgeleiteten $\bar\sigma_1 + \cdots + \bar\sigma_n = \nu$ Potenzreihen auftreten, deren jede eine Funktion von $n - 1$ Variablen darstellt, nämlich

$$(z)_{x_1 = x_1^0}, \qquad \left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)_{x_1 = x_1^0}, \cdots, \qquad \left(\frac{\partial^{\bar\sigma_1 - 1} z}{\partial x_1^{\bar\sigma_1 - 1}}\right)_{x_1 = x_1^0};$$

$$\left(\frac{\partial^{\bar\sigma_1} z}{\partial x_1^{\bar\sigma_1}}\right)_{x_2 = x_2^0}, \quad \left(\frac{\partial^{\bar\sigma_1 + 1} z}{\partial x_1^{\bar\sigma_1} \partial x_2}\right)_{x_2 = x_2^0}, \cdots, \left(\frac{\partial^{\bar\sigma_1 + \bar\sigma_2 - 1} z}{\partial x_1^{\bar\sigma_1} \partial x_2^{\bar\sigma_2 - 1}}\right)_{x_2 = x_2^0};$$

allgemein:

$$(16)\qquad \left(\frac{\partial^{\bar\sigma_1+\cdots+\bar\sigma_{i-1}}z}{\partial x_1^{\bar\sigma_1}\cdots\partial x_{i-1}^{\bar\sigma_{i-1}}}\right)_{x_i=x_i^0},\ \left(\frac{\partial^{\bar\sigma_1+\cdots+\bar\sigma_{i-1}+1}z}{\partial x_1^{\bar\sigma_1}\cdots\partial x_{i-1}^{\bar\sigma_{i-1}}\partial x_i}\right)_{x_i=x_i^0},\cdots$$

$$\cdots,\left(\frac{\partial^{\bar\sigma_1+\cdots+\bar\sigma_{i-1}+\bar\sigma_i-1}z}{\partial x_1^{\bar\sigma_1}\cdots\partial x_{i-1}^{\bar\sigma_{i-1}}\partial x_i^{\bar\sigma_i-1}}\right)_{x_i=x_i^0}\ ^{*)}.$$

Wenn allerdings, wie oben (Abschnitt I) geschehen ist, die Anfangswerte (2) von vornherein gegeben sind, so ist hierdurch eine endliche Anzahl von den soeben als willkürlich bezeichneten Koeffizienten bereits festgelegt. Wir lenken die Aufmerksamkeit auf die hieraus sich ergebende leichte Einschränkung, da dieselbe stillschweigend gemacht ist bei der Formulierung des folgenden Satzes, welcher die Resultate nicht nur dieser Nummer sondern des ganzen zweiten Abschnittes zusammenfaßt:

Schreiben wir $\bar\sigma_1+\bar\sigma_2+\cdots+\bar\sigma_n=\nu$ *reguläre Potenzreihen von je* $n-1$ *Variablen, und zwar:*

$\bar\sigma_1$ *Entwicklungen* $\mathfrak{P}_0^{(1)},\mathfrak{P}_1^{(1)},\cdots,\mathfrak{P}_{\bar\sigma_1-1}^{(1)}$ *nach Potenzen von*

$$x_2-x_2^0,\ x_3-x_3^0,\cdots,x_n-x_n^0,$$

$\bar\sigma_2$ *Entwicklungen* $\mathfrak{P}_0^{(2)},\mathfrak{P}_1^{(2)},\cdots,\mathfrak{P}_{\bar\sigma_2-1}^{(2)}$ *nach Potenzen von*

$$x_1-x_1^0,\ x_3-x_3^0,\cdots,x_n-x_n^0,$$

allgemein $\bar\sigma_i$ *Entwicklungen*

$$(17)\qquad \mathfrak{P}_0^{(i)},\mathfrak{P}_1^{(i)},\cdots,\mathfrak{P}_{\bar\sigma_i-1}^{(i)}$$

nach Potenzen von $x_1-x_1^0,\cdots,x_{i-1}-x_{i-1}^0,\ x_{i+1}-x_{i+1}^0,\cdots,x_n-x_n^0$ *willkürlich vor und verlangen, daß für* $i=1,2,\cdots,n$ *die Funktionen* (16) *beziehungsweise den Potenzreihen* (17) *gleich werden, so bestimmt diese Forderung zusammen mit der Differentialgleichung* (1) *eine Entwicklung der Form* (5), *in welcher sämtliche Koeffizienten eindeutig bestimmt sind.*

III. Beweis für die Konvergenz der angesetzten Reihe.

Als Ziel dieses Abschnittes läßt sich, in unmittelbarem Anschluß an den zuletzt ausgesprochenen Satz, der Beweis der folgenden Behauptung bezeichnen:

Wenn die Potenzreihe (5) *nach den Vorschriften des zweiten Abschnittes formaliter konstruiert ist, so wird ihre Konvergenz in gewissen Bereichen zu einer unmittelbaren Konsequenz der Voraussetzung, daß die* ν *als Anfangs-*

---

*) Sind einige der partiellen Ordnungszahlen $\bar\sigma_1,\cdots,\bar\sigma_n$ gleich Null, so sind in dem oben gegebenen Satz von Potenzreihen diejenigen Zeilen wegzulassen, welche mit den verschwindenden Ordnungszahlen gleiche Indices haben.

bedingungen gegebenen Potenzreihen (17) *selbst in der Umgebung der Anfangswerte ihrer Variablen konvergieren.*

Dem zu führenden Beweise voran stellen wir die Definition eines Begriffes, welchen — dem Inhalte nach — Cauchy in die Analysis eingeführt hat, wodurch er eben zum Begründer unserer Theorie wurde:

Wenn die beiden nach ganzen Potenzen von $x_1 - x_1^0, \cdots, x_n - x_n^0$ fortschreitenden Reihen φ und Φ in einem System von Kreisen mit den Mittelpunkten $x_1^0, \cdots, x_n^0$ konvergieren, wenn außerdem die sämtlichen Koeffizienten der Potenzreihe Φ reell, positiv und größer als die absoluten Beträge der entsprechenden Koeffizienten von φ sind, so heiße Φ eine *Majorante*) der Funktion* φ in Beziehung auf die Anfangswerte $x_1^0, \cdots, x_n^0$.

Die n Differentialgleichungen $(\nu+1)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche durch einmalige Ableitung der Gleichung (1) nach $x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n$ erhalten werden und nach der von uns gewählten Bezeichnungsweise das Differentialsystem Σ' bilden, haben die Form

$$(18)\qquad [\bar\sigma_1, \cdots, \bar\sigma_i + 1, \cdots, \bar\sigma_n] = \omega^i + \sum_{\sigma_1+\cdots+\sigma_n=\nu}' \omega_{\sigma_1,\cdots,\sigma_n} \cdot [\sigma_1, \cdots, \sigma_i + 1, \cdots, \sigma_n]$$
$$+ \sum_{\tau_1+\cdots+\tau_n=\nu}' \omega_{\tau_1,\cdots,\tau_n} \cdot [\tau_1, \cdots, \tau_i + 1, \cdots, \tau_n],$$
$$(i = 1, 2, \cdots, n)$$

wenn zur Abkürzung

$$\omega^i = -\left[\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_i} + \sum_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n}' \frac{\partial f}{\partial p^{\alpha}_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n}} \cdot \frac{\partial^{\alpha+1} z}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_i^{\alpha_i+1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}\right] \cdot \left[\frac{\partial f}{\partial[\bar\sigma_1, \cdots, \bar\sigma_n]}\right]^{-1},$$
$$(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = \alpha = 1, 2, \cdots, \nu - 1)$$

$$\omega_{\sigma_1,\cdots,\sigma_n} = -\frac{\partial f}{\partial[\sigma_1, \cdots, \sigma_n]} \cdot \left[\frac{\partial f}{\partial[\bar\sigma_1, \cdots, \bar\sigma_n]}\right]^{-1},$$
$$\omega_{\tau_1,\cdots,\tau_n} = -\frac{\partial f}{\partial[\tau_1, \cdots, \tau_n]} \cdot \left[\frac{\partial f}{\partial[\bar\sigma_1, \cdots, \bar\sigma_n]}\right]^{-1},$$

gesetzt wird. Die beiden Summen in (18) sind über diejenigen Indices $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ beziehungsweise $\tau_1, \cdots, \tau_n$ zu erstrecken, welche einen der in f auftretenden Differentialquotienten ν^{ter} Ordnung von dem einen oder dem anderen Typus repräsentieren, mit Ausnahme des ausgezeichneten

*) Der Name „Majorante" ist die germanisierte Form, in welcher Herr Stäckel die von Herrn Méray sehr glücklich gewählte französische Bezeichnung „fonction majorante" für unsere Terminologie gewonnen hat (Jahrb. üb. d. Fortschr. d. Math. 25, 593).

Differentialquotienten $[\bar{\sigma}_1, \cdots, \bar{\sigma}_n]$. Die Koeffizienten ω^i, $\omega_{\sigma_1,\cdots,\sigma_n}$, $\omega_{\tau_1,\cdots,\tau_n}$ sind Funktionen der unabhängigen Variablen, der unbekannten Funktion z und deren Differentialquotienten bis zur ν^{ten} Ordnung; und zwar reguläre Potenzreihen in der Umgebung eines Systems von Anfangswerten, welches — soweit es sich auf die Argumente der Funktion f bezieht — mit (2) übereinstimmt; die Koeffizienten der dritten Kategorie müssen für die Anfangswerte ihrer Argumente verschwinden, d. h. die Potenzreihen $\omega_{\tau_1,\cdots,\tau_n}$ dürfen keine konstanten Glieder besitzen; denn die Funktion $\omega_{\tau_1,\cdots,\tau_n}$ unterscheidet sich nur durch den Faktor $-\left[\frac{\partial f}{\partial[\bar{\sigma}_1, \cdots, \bar{\sigma}_n]}\right]^{-1}$ von der Funktion $\frac{\partial f}{\partial[\tau_1, \cdots, \tau_n]}$, welche für die Anfangswerte ihrer Argumente nach Voraussetzung verschwindet, während $\frac{\partial f}{\partial[\bar{\sigma}_1, \cdots, \bar{\sigma}_n]}$ für diese Anfangswerte von Null verschieden ist.

Die ursprünglich vorgelegte Differentialgleichung (1) läßt sich nun vollkommen ersetzen*) durch das Differentialsystem (18) in Verbindung mit dem für die Argumente von (1) fixierten System der Anfangswerte (2).

Es ist für uns vorteilhaft und nach dem vorhergehenden erlaubt, die im zweiten Abschnitt konstruierten, der Differentialgleichung (1) formaliter genügenden Reihenentwicklungen als Integrale des Differentialsystems (18) aufzufassen.

Der Beweis für die Konvergenz jener Reihen wird erbracht sein, wenn es uns gelingt, folgendes zu zeigen:

1) Es existiert ein Differentialsystem

$$(19)\qquad [\bar{\sigma}_1, \cdots, \bar{\sigma}_i + 1, \cdots, \bar{\sigma}_n] = \Omega^i + \sum_{\sigma_1 + \cdots + \sigma_n = \nu} \Omega_{\sigma_1,\cdots,\sigma_n} [\sigma_1, \cdots, \sigma_i + 1, \cdots, \sigma_n]$$
$$+ \sum_{\tau_1 + \cdots + \tau_n = \nu} \Omega_{\tau_1,\cdots,\tau_n} [\tau_1, \cdots, \tau_i + 1, \cdots, \tau_n],$$
$$(i = 1, 2, \cdots, n)$$

*) Die Frage, in welchem Sinne die verschiedenen Formen eines Differentialsystems unter einander als äquivalent betrachtet werden dürfen, ist neuerdings (Monatshefte f. Math. u. Phys. XII, S. 290) von Herrn Burkhardt zum Gegenstand einer lichtvollen Untersuchung gemacht worden, in welcher die verschiedenen Auffassungen des Begriffes „Äquivalenz" sorgfältig von einander geschieden werden. Die in der vorliegenden Arbeit durchaus festgehaltene Auffassung ist die „analytisch-funktionentheoretische" und zwar beschränkt auf die Betrachtung von Funktionselementen. Die Gültigkeit der im Texte statuierten Äquivalenz zwischen der Differentialgleichung (1) und dem Differentialsystem (18) kann daher zunächst nur für solche Bereiche in Anspruch genommen werden, in welchen die linke Seite von (1) konvergiert und außerdem die Ableitung $\frac{\partial f}{\partial[\bar{\sigma}_1, \cdots, \bar{\sigma}_n]}$ von Null verschieden ist.

welches sich von dem Differentialsystem (18) nur dadurch unterscheidet, daß die Potenzreihen ω^i, $\omega_{\sigma_1,\ldots,\sigma_n}$, $\omega_{\tau_1,\ldots,\tau_n}$ durch gewisse Majoranten ersetzt sind, und welches ein in der Umgebung der Anfangswerte $x_1^0, \cdots, x_n^0$ durch eine konvergente Potenzreihe darstellbares Integral Z besitzt.

2) Diejenigen Koeffizienten dieser Potenzreihe, welche durch die Differentialgleichungen (19) nicht bestimmt sind, sind positiv und größer als die Moduln der entsprechenden willkürlichen Koeffizienten des Integrals von (18), welche wir uns so gewählt denken, daß die Potenzreihen (17) des zweiten Abschnittes in einer gewissen Umgebung der Anfangswerte konvergieren; mit anderen Worten: Die aus dem Integral Z von (19) abgeleiteten Funktionen

$$(20)\qquad \left(\frac{\partial^{\bar\sigma_1+\cdots+\bar\sigma_{i-1}} Z}{\partial x_1^{\bar\sigma_1}\cdots\partial x_{i-1}^{\bar\sigma_{i-1}}}\right)_{x_i=x_i^0}, \left(\frac{\partial^{\bar\sigma_1+\cdots+\bar\sigma_{i-1}+1} Z}{\partial x_1^{\bar\sigma_1}\cdots\partial x_{i-1}^{\bar\sigma_{i-1}}\partial x_i}\right)_{x_i=x_i^0}, \cdots$$

$$\cdots, \left(\frac{\partial^{\bar\sigma_1+\cdots+\bar\sigma_{i-1}+\bar\sigma_i-1} Z}{\partial x_1^{\bar\sigma_1}\cdots\partial x_{i-1}^{\bar\sigma_{i-1}}\partial x_i^{\bar\sigma_i-1}}\right)_{x_i=x_i^0}$$

$$(i=1,2,\cdots,n)$$

sind Majoranten der entsprechenden für das hypothetische Integral z von (18) willkürlich vorgeschriebenen Potenzreihen (17).

Wenn nämlich diese beiden Bedingungen erfüllt sind, so werden — wie eine einfache Überlegung zeigt — auch die übrigen, mit Hilfe des Differentialsystems (19) zu berechnenden, Koeffizienten der Reihenentwicklung Z, welche also mit den Anfangswerten der Differentialquotienten $[\bar\sigma_1+\lambda_1, \cdots, \bar\sigma_n+\lambda_n]$ zusammenfallen, sämtlich positiv und größer als die absoluten Beträge der entsprechenden, aus (18) zu berechnenden Koeffizienten der hypothetisch für z angesetzten Potenzreihe sein.

Wir wollen dies zunächst für die Anfangswerte der Differentialquotienten

$$(21)\quad [\bar\sigma_1,\cdots,\bar\sigma_{n-1},\bar\sigma_n+1],\ [\bar\sigma_1,\cdots,\bar\sigma_{n-1}+1,\bar\sigma_n],\cdots,[\bar\sigma_1+1,\bar\sigma_2,\cdots,\bar\sigma_n]$$

beweisen und zu diesem Zwecke die Gleichungen (18) einerseits, die Gleichungen (19) andererseits nach den Differentialquotienten (21) auflösen, nachdem wir dieselben für die Anfangswerte gebildet, also an Stelle der Potenzreihen ω^i, $\omega_{\sigma_1,\ldots,\sigma_n}$, $\omega_{\tau_1,\ldots,\tau_n}$ in dem System (18), an Stelle der Potenzreihen Ω^i, $\Omega_{\sigma_1,\ldots,\sigma_n}$, $\Omega_{\tau_1,\ldots,\tau_n}$ in dem System (19) deren konstante Glieder gesetzt, an Stelle der Differentialquotienten $[\sigma_1, \cdots, \sigma_i+1, \cdots, \sigma_n]$ deren — für (18) aus (17), für (19) aus (20) sich ergebende — Anfangswerte eingeführt haben. Die konstanten Glieder der Potenzreihen $\omega_{\tau_1,\ldots,\tau_n}$ sind nach Voraussetzung Null, die konstanten Glieder der Potenzreihen $\Omega_{\tau_1,\ldots,\tau_n}$ sollen von nun an gleich Null angenommen werden, was später in der Wahl der Majoranten seine Bestätigung finden wird. In beiden Gleichungssystemen fallen also für die Anfangswerte diejenigen Posten fort, welche der Ableitung eines Differentialquotienten vom Typus $[\tau_1, \cdots, \tau_n]$ ihre Entstehung verdanken. Die Gleichungssysteme, in welche die Differentialsysteme (18) und (19) durch die angegebene Substitution übergehen, werden wir im folgenden beziehungsweise als ((18)) und ((19)) zitieren. Nun mögen die Gleichungen eines jeden dieser beiden Systeme in solcher Reihenfolge aufgeschrieben werden, daß zuerst die $n-k$ zu den Werten $n, n-1, \cdots, k+1$ des Index i gehörigen Gleichungen in beliebiger Anordnung, alsdann die übrigen k Gleichungen in derjenigen Reihenfolge auftreten, in welcher der Index i nach einander die Werte $k, k-1, \cdots, 2, 1$ durchläuft. Es ist dies für $\lambda = 1$ die Umkehrung derjenigen Anordnung, welche im zweiten Abschnitt (S. 592) für beliebiges λ fixiert wurde. Dieselbe Überlegung, welche wir S. 594, 595 angestellt haben, um die Auflösbarkeit der Gleichungssysteme Σ^λ darzutun, lehrt uns hier, daß auf den rechten Seiten der $n-k$ ersten Gleichungen des Systems ((18)) oder des Systems ((19)) keiner der Differentialquotienten (21) auftritt, daß also diese Gleichungen bereits die aufgelöste Form haben. Jede spätere Gleichung kann in ihrer rechten Seite noch diejenigen Differentialquotienten (21) enthalten, welche auf den linken Seiten der ihr vorhergehenden Gleichungen (also im besonderen der $n-k$ ersten) stehen. Für diese Differentialquotienten sind alsdann successive die durch die vorhergehenden Gleichungen gelieferten Ausdrücke einzusetzen. Da nun unseren Voraussetzungen gemäß die auf den rechten Seiten des Systems ((19)) auftretenden Koeffizienten, sowie auch die Anfangswerte der von (21) verschiedenen Differentialquotienten $(\nu+1)^{\text{ter}}$ Ordnung sämtlich positiv und nicht kleiner sind als die absoluten Beträge der entsprechenden Koeffizienten und Anfangswerte auf den rechten Seiten des Systems ((18)), so zeigt die angegebene Methode der Auflösung unmittelbar, daß auch die durch dieselbe brechneten Anfangswerte der Differentialquotienten (21) mit den Datis des Systems (19) alle positiv und größer ausfallen, als die absoluten Beträge der entsprechenden, mit den Datis des Systems (18) berechneten Anfangswerte.

Nimmt man an, daß dieses Verhältnis zwischen den Anfangswerten der Differentialquotienten beider Systeme bis zur $(\nu+\lambda-1)^{\text{ten}}$ Ordnung einschließlich bewiesen sei, so überzeugt man sich leicht, daß dasselbe auch für die $(\nu+\lambda)^{\text{te}}$ Ordnung bestehen muß. Denn einerseits lassen sich die durch $(\lambda-1)$-fache Differentiation aus (18) bezw. (19) erhaltenen Differentialgleichungen $(\nu+\lambda)^{\text{ter}}$ Ordnung wiederum in solcher Weise anordnen, daß auf der rechten Seite jeder Gleichung nach Substitution der Anfangswerte nur solche Differentialquotienten

$$[\bar{\sigma}_1 + \lambda_1, \cdots, \bar{\sigma}_n + \lambda_n] \qquad (\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = \lambda)$$

auftreten können, welche bereits auf den linken Seiten der ihr vorhergehenden Gleichungen stehen (vgl. S. 595); andrerseits ist jede Ableitung einer Majorante selbst wieder Majorante in Beziehung auf die entsprechende Ableitung der mit jener verglichenen Reihe.

Unsere Aufgabe ist also darauf zurückgeführt, ein Differentialsystem (19) von der angegebenen Beschaffenheit zu konstruieren und für dieses die Existenz eines regulären Integrales Z nachzuweisen, welches den unter 2) geforderten Bedingungen genügt.

Nach einem elementaren Satze aus der Theorie der Potenzreihen mehrerer Variablen gibt es stets eine endliche positive Zahl M von solcher Größe. daß

$$(22)\quad \frac{M}{1-\frac{1}{r}\left\{a_1(x_1-x_1^0)+\cdots+a_n(x_n-x_n^0)+\varepsilon(z-z_0)+\sum\limits_{\beta_1,\cdots,\beta_n}\gamma_{\beta_1,\cdots,\beta_n}\left(p^{\beta}_{\beta_1,\cdots,\beta_n}-\pi^{\beta}_{\beta_1,\cdots,\beta_n}\right)\right\}}\equiv\bar{\Omega}$$

eine Majorante sowohl der Potenzreihen ω^i als der sämtlichen Potenzreihen $\omega_{\sigma_1,\cdots,\sigma_n}$, und

$$(23)\qquad \bar{\Omega} - M$$

eine Majorante sämtlicher Potenzreihen $\omega_{\tau_1,\cdots,\tau_n}$ darstellt. Dabei ist

M eine positive Zahl, größer als der größte Wert, welchen die absoluten Beträge der Potenzreihen ω^i, $\omega_{\sigma_1,\cdots,\sigma_n}$, $\omega_{\tau_1,\cdots,\tau_n}$ innerhalb der Konvergenzkreise annehmen können;

r eine positive Zahl, kleiner als der kleinste Konvergenzradius irgend einer der Funktionen ω^i, $\omega_{\sigma_1,\cdots,\sigma_n}$, $\omega_{\tau_1,\cdots,\tau_n}$ in Beziehung auf irgend eines ihrer Argumente.

$a_1, \cdots, a_n;\ \varepsilon; \cdots, \gamma_{\beta_1,\cdots,\beta_n}, \cdots$ sind positive Konstanten, nicht kleiner als die positive Einheit.

$p^{\beta}_{\beta_1,\cdots,\beta_n}$ und $\pi^{\beta}_{\beta_1,\cdots,\beta_n}$ sind wie früher Bezeichnungen für die Differentialquotienten $\dfrac{\partial^{\beta} z}{\partial x_1^{\beta_1}\cdots\partial x_n^{\beta_n}}$ und deren Anfangswerte.

Die Summe $\sum\limits_{\beta,\cdots,\beta_n}$ ist zu erstrecken über sämtliche Differentialquotienten bis einschließlich zur ν^{ten} Ordnung.

Wählt man nun für sämtliche Koeffizienten $\Omega_{\sigma_1,\cdots,\sigma_n}$ des Differentialsystems (19) die Funktion $\bar{\Omega}$, für sämtliche Koeffizienten $\Omega_{\tau_1,\cdots,\tau_n}$ die Funktion $\bar{\Omega} - M$, für Ω^i aber das Produkt $c_i \cdot \bar{\Omega}$, wo $c_1, c_2, \cdots, c_n$ positive Konstanten und nicht kleiner als die positive Einheit sein mögen, so geht das System (19) über in

$$(24)\qquad [\bar\sigma_1, \cdots, \bar\sigma_i + 1, \cdots, \bar\sigma_n]$$
$$= \bar\Omega \left\{ c_i + \sum_{\sigma_1+\cdots+\sigma_n=\nu} [\sigma_1, \cdots, \sigma_i + 1, \cdots, \sigma_n] + \sum_{\tau_1+\cdots+\tau_n=\nu} [\tau_1, \cdots, \tau_i + 1, \cdots, \tau_n] \right\}$$
$$- M \cdot \sum_{\tau_1+\cdots+\tau_n=\nu} [\tau_1, \cdots, \tau_i + 1, \cdots, \tau_n].$$
$$(i = 1, 2. \cdots, n).$$

Es soll nun gezeigt werden, daß bei geeigneter Wahl der Konstanten

$$(25)\qquad M,\ r,\ c_1, \cdots, c_n;\ a_1, \cdots, a_n;\ \varepsilon; \cdots, \gamma_{\beta_1, \cdots, \beta_n}, \cdots$$

eine in der Umgebung der Stelle $t = 0$ konvergente Potenzreihe $v(t)$ existiert von solcher Art, daß

$$(26)\qquad Z = z_0 + \frac{1}{\varepsilon} \cdot v(a_1(x_1 - x_1^0) + \cdots + a_n(x_n - x_n^0))$$

ein Integral des Differentialsystems (24) darstellt.

Behalten wir die Bezeichnung

$$(27)\qquad a_1(x_1 - x_1^0) + \cdots + a_n(x_n - x_n^0) = t$$

bei, so ergibt sich aus der Annahme (26), daß allgemein

$$(28)\qquad \frac{\partial^\varrho Z}{\partial x_1^{\varrho_1} \cdots \partial x_n^{\varrho_n}} = \frac{a_1^{\varrho_1} \cdots a_n^{\varrho_n}}{\varepsilon} \cdot \frac{d^\varrho v}{dt^\varrho} = \frac{a_1^{\varrho_1} \cdots a_n^{\varrho_n}}{\varepsilon}\, v^{(\varrho)}.$$

Für die Funktion Z gebildet, ist also

$$(29)\qquad p^\beta_{\beta_1, \cdots, \beta_n} = \frac{a_1^{\beta_1} \cdots a_n^{\beta_n}}{\varepsilon} \cdot v^{(\beta)}.$$

Wir setzen, wie schon oben, $n_\beta = \frac{n(n+1)\cdots(n+\beta-1)}{1 \cdot 2 \cdots \beta}$ und wählen die positive Zahl ε größer als das Produkt, dessen einer Faktor die ν^{te} Potenz der größten unter den Zahlen $a_1, \cdots, a_n$, dessen anderer Faktor die größte unter den Zahlen $n_1, n_2, \cdots, n_\nu$ ist. Alsdann wird für alle Posten der in $\bar\Omega$ auftretenden Summe $\sum\limits_{\beta_1, \cdots, \beta_n}$

$$(30)\qquad n_\beta \cdot \frac{a_1^{\beta_1} \cdots a_n^{\beta_n}}{\varepsilon} < 1 \qquad (\beta = \beta_1 + \cdots + \beta_n)$$

sein; folglich dürfen die Konstanten $\gamma_{\beta_1, \cdots, \beta_n}$

$$(31)\qquad \gamma_{\beta_1, \cdots, \beta_n} = \frac{1}{n_\beta} \cdot \frac{\varepsilon}{a_1^{\beta_1} \cdots a_n^{\beta_n}}$$

gesetzt werden. Halten wir dies fest, so verwandeln sich die partiellen

Differentialgleichungen (24) durch die Substitution von (26) in die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$(32)\qquad v^{(\nu+1)} = \frac{M \cdot \frac{c_i}{a_i} \cdot \varepsilon}{P - Q\,\frac{t + v + (v' - v_0') + \cdots + (v^{(\nu)} - v_0^{(\nu)})}{r}}, \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

wenn zur Abkürzung

$$(33)\quad R = \frac{1}{r} \cdot \left[v_0' + \cdots + v_0^{(\nu)} - \varepsilon \cdot \sum_{\beta_1, \cdots, \beta_n} \frac{1}{n_\beta}\,\frac{1}{a_1^{\beta_1} \cdots a_n^{\beta_n}} \cdot \pi^{\beta}_{\beta_1, \cdots, \beta_n}\right],$$

$$(34)\quad P = a_1^{\bar\sigma_1} \cdots a_i^{\bar\sigma_i} \cdots a_n^{\bar\sigma_n} - M \sum_{\sigma_1 + \cdots + \sigma_n = \nu} a_1^{\sigma_1} \cdots a_i^{\sigma_i} \cdots a_n^{\sigma_n} - R\left[a_1^{\bar\sigma_1} \cdots a_i^{\bar\sigma_i} \cdots a_n^{\bar\sigma_n} + M \sum_{\tau_1 + \cdots + \tau_n = \nu} a_1^{\tau_1} \cdots a_i^{\tau_i} \cdots a_n^{\tau_n}\right],$$

$$(35)\quad Q = a_1^{\bar\sigma_1} \cdots a_i^{\bar\sigma_i} \cdots a_n^{\bar\sigma_n} + M \sum_{\tau_1 + \cdots + \tau_n = \nu} a_1^{\tau_1} \cdots a_i^{\tau_i} \cdots a_n^{\tau_n}$$

gesetzt wird.

Wenn eine Funktion $v(t)$ existieren soll, welche unseren Anforderungen genügt, so müssen wir zunächst bewirken, daß die n Differentialgleichungen (32) in eine einzige zusammenfallen, daß also

$$\frac{c_1}{a_1} = \frac{c_2}{a_2} = \cdots = \frac{c_i}{a_i} = \cdots = \frac{c_n}{a_n}.$$

Beschränken wir nun die Wahl der positiven Konstanten a_i durch die Forderung, daß die Zahlen $a_1, a_2, \cdots, a_n$ in dieser Reihenfolge niemals zunehmen sollen, daß also

$$(36)\qquad a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots \geqq a_{n-1} \geqq a_n$$

sern soll, und wählen zugleich

$$(37)\qquad a_n = 1,$$

so dürfen wir

$$(38)\qquad c_n = c > 1, \quad c_i = a_i \cdot c \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

setzen, ohne in Widerspruch mit der früher in Beziehung auf die c_i ausgesprochenen Festsetzung $c_i \geqq 1$ zu geraten.

Die hiernach zur Bestimmung der Funktion $v(t)$ dienende gewöhnliche Differentialgleichung $(\nu + 1)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$(39)\qquad v^{(\nu+1)} = \frac{M \cdot \varepsilon \cdot c}{P - Q\,\frac{t + v + (v' - v_0') + \cdots + (v^{(\nu)} - v_0^{(\nu)})}{r}}$$

besitzt, sofern nur die Konstante P von Null verschieden ist, ein in der Umgebung der Stelle $t = 0$ reguläres Integral, welches für $t = 0$ verschwindet, während in diesem Punkte seine ν ersten Ableitungen $v', \cdots, v^{(\nu)}$

den ν, bisher völlig unbestimmten, Konstanten $v_0', \cdots, v_0^{(\nu)}$ gleich werden. Außer diesen und den übrigen in (39) auftretenden Konstanten enthält unser Integral v keine willkürlichen Elemente mehr. Durch jene Konstanten sind demgemäß die Differentialquotienten beliebig hoher Ordnung von v und folglich nach (28) auch die partiellen Differentialquotienten der mit Hilfe von v in (26) konstruierten Funktion Z in ihren Anfangswerten völlig bestimmt.

Damit nun die Funktion Z den von uns (auf S. 599, 600) gestellten Anforderungen genügt, müssen diejenigen ihrer Ableitungen, welche nicht mit einem der Differentialquotienten

$$[\bar{\sigma}_1 + \lambda_1, \cdots, \bar{\sigma}_n + \lambda_n] \quad (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 0, 1, 2, \cdots)$$

identisch sind, d. h. diejenigen Ableitungen

$$\frac{\partial^\varrho Z}{\partial x_1^{\varrho_1} \cdots \partial x_n^{\varrho_n}},$$

für welche mindestens eine der Partial-Ordnungszahlen $\varrho_1, \cdots, \varrho_n$ kleiner als die ihr entsprechende unter den Zahlen $\bar{\sigma}_1, \cdots, \bar{\sigma}_n$ ist, für $x_1 = x_1^0, \cdots, x_n = x_n^0$ reelle nicht negative Werte annehmen, welche größer sind als die absoluten Beträge der entsprechenden für das hypothetische Integral des Differentialsystems (18) willkürlich vorgeschriebenen Anfangswerte der Differentialquotienten

$$\frac{\partial^\varrho z}{\partial x_1^{\varrho_1} \cdots \partial x_n^{\varrho_n}}.$$

Wenn wir sagen, diese Anfangswerte seien willkürlich vorgeschrieben, so betrachten wir doch stillschweigend die schon früher gemachte Voraussetzung als erfüllt, daß die mit ihnen gebildeten Potenzreihen (17) in einem System von Kreisen um $x_1^0, \cdots, x_{i-1}^0, x_{i+1}^0, \cdots, x_n^0$ konvergieren; und zwar wollen wir im folgenden annehmen, daß der kleinste dieser Kreise einen Radius besitze, welcher größer ist als eine gewisse positive Zahl $\mathfrak{r}$. Diese Annahme setzt uns in den Stand, für die Moduln der betrachteten Anfangswerte eine obere Grenze anzugeben.

Konvergiert die Potenzreihe $\mathfrak{P}_{\varrho_i}^{(i)}$ $(\varrho_i < \bar{\sigma}_i)$, welche als analytischer Ausdruck der Funktion

$$\left(\frac{\partial^{\bar{\sigma}_1 + \cdots + \bar{\sigma}_{i-1} + \varrho_i} z}{\partial x_1^{\bar{\sigma}_1} \cdots \partial x_{i-1}^{\bar{\sigma}_{i-1}} \partial x_i^{\varrho_i}}\right)_{x_i = x_i^0}$$

vorgeschrieben wurde, in einem System von Kreisen um $x_1^0, \cdots, x_{i-1}^0, x_{i+1}^0, \cdots, x_n^0$, so konvergiert in demselben Bereiche auch jede Ableitung der betrachteten Potenzreihe, also z. B. die Potenzreihe

$$(40)\qquad \frac{\partial^{\mu_1-\bar{\sigma}_1+\cdots+\mu_{i-1}-\bar{\sigma}_{i-1}+\mu_{i+1}+\cdots+\mu_n}\mathfrak{P}^{(i)}_{\varrho_i}}{\partial x_1^{\mu_1-\bar{\sigma}_1}\cdots\partial x_{i-1}^{\mu_{i-1}-\bar{\sigma}_{i-1}}\partial x_{i+1}^{\mu_{i+1}}\cdots\partial x_n^{\mu_n}}\qquad (\mu_1\geqq\bar{\sigma}_1,\cdots,\mu_{i-1}\geqq\bar{\sigma}_{i-1})$$

welche den Ausdruck für die Funktion

$$(41)\qquad \left(\frac{\partial^{\mu_1+\cdots+\mu_{i-1}+\varrho_i+\mu_{i+1}+\cdots+\mu_n}z}{\partial x_1^{\mu_1}\cdots\partial x_{i-1}^{\mu_{i-1}}\partial x_i^{\varrho_i}\partial x_{i+1}^{\mu_{i+1}}\cdots\partial x_n^{\mu_n}}\right)_{x_i=x_i^0}$$

liefert. Ist nun $\mathfrak{M}$ eine positive Größe, welche größer ist als der größte absolute Betrag, welchen die Werte dieser Funktion innerhalb jenes Systems von Kreisen erreichen können, so besteht nach einem schon oben (S. 602) benutzten Satz der Funktionentheorie die Relation

$$(42)\qquad \operatorname{mod}\left(\frac{\partial^{\varrho_1+\cdots+\varrho_i+\cdots+\varrho_n}z}{\partial x_1^{\varrho_1}\cdots\partial x_i^{\varrho_i}\cdots\partial x_n^{\varrho_n}}\right)_{x_1=x_1^0\cdots x_i=x_i^0\cdots x_n=x_n^0}$$
$$<\frac{\mathfrak{M}\cdot(\varrho_1-\mu_1)!\cdots(\varrho_{i-1}-\mu_{i-1})!\,(\varrho_{i+1}-\mu_{i+1})!\cdots(\varrho_n-\mu_n)}{\mathfrak{r}^{\varrho_1+\cdots+\varrho_i+\cdots+\varrho_n-(\mu_1+\cdots+\mu_{i-1}+\varrho_i+\mu_{i+1}+\cdots+\mu_n)}}$$

für jedes System der partiellen Ordnungszahlen $\varrho_1,\cdots,\varrho_n$, welches die Bedingung

$$\varrho_1\geqq\mu_1,\cdots,\varrho_{i-1}\geqq\mu_{i-1},\quad \varrho_{i+1}\geqq\mu_{i+1},\cdots,\varrho_n\geqq\mu_n$$

erfüllt. Die Zahlen $\mu_1,\cdots,\mu_{i-1},\mu_{i+1},\cdots,\mu_n$, von deren Wahl die für $\mathfrak{M}$ festzusetzende untere Grenze abhängt, können nun in jedem Fall so bestimmt werden, daß

$$\mu_1+\cdots+\mu_{i-1}+\varrho_i+\mu_{i+1}+\cdots+\mu_n=\nu+1$$

wird, da diese Summe der einzigen Bedingung unterliegt, größer zu sein als die Zahl $\bar{\sigma}+\cdots+\bar{\sigma}_{i-1}+\varrho_i$; diese letztere aber ist kleiner oder höchstens gleich $\nu-1$; und zwar hat sie diesen ihren größten Wert $\nu-1$ dann, wenn die Potenzreihe, von welcher wir ausgegangen sind, die letzte unter den ν Potenzreihen (17), also (sofern $\bar{\sigma}_n\neq 0$ ist) die Potenzreihe $\mathfrak{P}^{(\nu)}_{\bar{\sigma}_n-1}$ ist.

Da bei dieser Bestimmung der μ die Summe der Zahlen, deren Fakultäten im Zähler der rechten Seite von (42) stehen, gleich $\varrho-\nu-1$ ist und das Produkt dieser Fakultäten kleiner (höchstens gleich) der Fakultät ihrer Summe sein muß, so läßt sich die Ungleichung (42) ersetzen durch die folgende

$$(43)\qquad \operatorname{mod}\left(\frac{\partial^{\varrho_1+\cdots+\varrho_n}z}{\partial x_1^{\varrho_1}\cdots\partial x_n^{\varrho_n}}\right)_{\substack{x_1=x_1^0\\ \cdots\\ x_n=x_n^0}}<\frac{\mathfrak{M}\cdot(\varrho-\nu-1)!}{\mathfrak{r}^{\varrho-\nu-1}}\qquad \varrho_1+\cdots+\varrho_n=\varrho\geqq\nu+1.$$

Die soeben durchgeführte Betrachtung, deren Resultat die Ungleichung (43) ist, wird sich für sämtliche ν Potenzreihen (17) anstellen lassen. Je nach der Wahl der Potenzreihe, von welcher wir ausgehen, wird das Zahlensystem $\mu_1, \cdots, \mu_n$ und damit die untere Grenze der Zahl $\mathfrak{M}$ verschieden bestimmt werden müssen. Immer läßt sich die untere Grenze für $\mathfrak{M}$ definieren als der größte absolute Betrag, welchen eine gewisse Ableitung einer der Potenzreihen (17) innerhalb der Konvergenzkreise erreichen kann; diese Ableitung ist, wie ein Blick auf (40) zeigt, höchstens von der $(\nu+1)^{\text{ten}}$ Ordnung und liefert nach (41) den analytischen Ausdruck für die Funktion, in welche eine gewisse Ableitung $(\nu+1)^{\text{ter}}$ Ordnung von z übergehen muß, wenn in derselben eine bestimmte Variable durch ihren Anfangswert ersetzt wird. Da wir für unsere Konstante M bisher nur eine untere, für r nur eine obere Grenze festgesetzt haben, so dürfen wir ohne Widerspruch annehmen, dass $r < \mathfrak{r}$ und M größer als die größte unter den verschiedenen Zahlen $\mathfrak{M}$ sei, so daß nach (43) um so mehr die Ungleichheit

$$(44)\qquad \operatorname{mod}\left(\frac{\partial^{\varrho} z}{\partial x_1^{\varrho_1}\cdots\partial x_n^{\varrho_n}}\right)_{\substack{x_1=x_1^0\\ \cdots\\ x_n=x_n^0}} < \frac{M(\varrho-\nu-1)!}{r^{\varrho-\nu-1}}$$

erfüllt ist.

Nehmen wir nun an, daß es möglich sei, die Konstanten der Differentialgleichung (39) so zu spezialisieren, daß P einen reellen positiven Wert, außerdem die $v_0', \cdots, v_0^{(\nu)}$ reelle nicht negative Werte erhalten, so erkennen wir (da Q an sich positiv ist) ohne Schwierigkeit, daß dann die Differentialquotienten $v^{(\nu+p)}$ aller Ordnungen für $t=0$ positive Werte annehmen und daß allgemein

$$(45)\qquad (v^{(\nu+p)})_{t=0} > (p-1)!\,\frac{M\cdot\varepsilon\cdot c}{r^{p-1}}\cdot\frac{Q^{p-1}}{P^p},$$

also nach (28)

$$(46)\qquad \left(\frac{\partial^{\nu+p} Z}{\partial x_1^{p_1}\cdots\partial x_n^{p_n}}\right)_{\substack{x_1=x_1^0\\ \cdots\\ x_n=x_n^0}} > (p-1)!\,a_1^{p_1}\cdots a_n^{p_n}\cdot\frac{M\cdot c}{r^{p-1}}\cdot\frac{Q^{p-1}}{P^p}.$$

$$(p_1+\cdots+p_n=\nu+p)$$

Andrerseits finden wir für den Modul des Anfangswerthes von $\dfrac{\partial^{\nu+p} z}{\partial x_1^{p_1}\cdots\partial x_n^{p_n}}$ die obere Grenze

$$(47)\qquad \operatorname{mod}\left(\frac{\partial^{\nu+p} z}{\partial x_1^{p_1}\cdots\partial x_n^{p_n}}\right)_{\substack{x_1=x_1^0\\ \cdots\\ x_n=x_n^0}} < \frac{M\cdot(p-1)!}{r^{p-1}},$$

wenn wir in (44) $\varrho = \nu + p$ setzen. Die Ungleichheit

$$(48)\qquad \operatorname{mod}\left(\frac{\partial^{\nu+p} z}{\partial x_1^{p_1}\cdots\partial x_n^{p_n}}\right)_{\substack{x_1=x_1^0\\ \cdots\\ x_n=x_n^0}} < \left(\frac{\partial^{\nu+p} Z}{\partial x_1^{p_1}\cdots\partial x_n^{p_n}}\right)_{\substack{x_1=x_1^0\\ \cdots\\ x_n=x_n^0}}$$

wird also ganz sicher erfüllt sein, wenn es uns gelingt, die Konstanten so zu bestimmen, daß

$$(49)\qquad a_1^{p_1}\cdots a_n^{p_n}\,\frac{Q^{p-1}\cdot c}{P^p} > 1.$$

Da nun die Konstanten $a_1, \cdots, a_n$ bereits reell, positiv und mindestens ebenso groß als die positive Einheit angenommen wurden, so wird durch das Bestehen der Ungleichheit

$$(50)\qquad \frac{Q^{p-1}\cdot c}{P^p} > 1$$

auch die Richtigkeit der Ungleichheit (49) verbürgt sein.

Außer der Bedingung, welche durch (48) dargestellt ist, haben wir nun schließlich noch die ihr entsprechende Forderung

$$(51)\qquad \operatorname{mod}\left(\frac{\partial^{\beta} z}{\partial x_1^{\beta_1}\cdots\partial x_n^{\beta_n}}\right)_{\substack{x_1=x_1^0\\ \cdots\\ x_n=x_n^0}} < \left(\frac{\partial^{\beta} Z}{\partial x_1^{\beta_1}\cdots\partial x_n^{\beta_n}}\right)_{\substack{x_1=x_1^0\\ \cdots\\ x_n=x_n^0}}$$
$$(\beta = 1, 2, \cdots, \nu)$$

zu berücksichtigen, welche sich auf die Anfangswerte der Differentialquotienten erster bis ν^{ter} Ordnung bezieht und in der von uns eingeführten Bezeichnungsweise mit Benutzung von (29) so geschrieben werden kann:

$$(52)\qquad \left|\pi^{\beta}_{\beta_1,\cdots,\beta_n}\right| \leqq \frac{a_1^{\beta_1}\cdots a_n^{\beta_n}}{s}\cdot v_0^{(\beta)}.$$

Wir nehmen nun fürs Erste an, daß allen Differentialquotienten von z bis zur ν^{ten} Ordnung hin der Anfangswert Null vorgeschrieben sei, also

$$\pi^{\beta}_{\beta_1,\cdots,\beta_n} = 0. \qquad (\beta = 1, 2, \cdots, \nu)$$

In diesem Falle genügen wir der Ungleichheit (52), indem wir

$$v_0' = \cdots = v_0^{(\nu)} = 0$$

setzen, so daß die durch (33) definierte Größe R gleich Null und demnach P sicher reell wird. Ein Blick auf die Definitionsgleichungen (34) und (35) lehrt uns, daß alsdann, sofern es überhaupt möglich ist, der Größe P einen positiven Wert zu erteilen, die Ungleichheit

$$(53)\qquad \frac{Q}{P} > 1$$

erfüllt sein muß. Die Relation (50) wird demnach zu einer Konsequenz der Ungleichung

$$0 < P < c, \tag{54}$$

welche wir statt ihrer einführen.

Wir werden also den Konvergenzbeweis, welcher das Ziel dieser Arbeit bildet, vollendet haben, wenn wir gezeigt haben werden, daß die Forderung (54) erfüllt werden kann durch eine Wahl der in (34) und (35) auftretenden Konstanten, welche mit früheren Festsetzungen nicht in Widerspruch tritt. Um dieses letzte Problem in aller Klarheit zu behandeln, wollen wir hier noch einmal alle Bedingungen zusammenstellen, durch welche im Verlaufe unserer Untersuchung die Freiheit in der Wahl jener Konstanten bereits beschränkt worden ist:

Sämtliche Konstanten, um welche es sich handelt, nämlich

$$r,\ M,\ \varepsilon,\ a_1, \cdots, a_n,\ c$$

sind reell und positiv; für $\frac{1}{r}$, M, ε ist jeweils eine untere positive Grenze gegeben; $c \geqq 1$; die Konstanten $a_1, \cdots, a_n$ nehmen, in dieser Reihenfolge geschrieben, nicht zu, d. h. $a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots \geqq a_n$; die kleinste unter ihnen ist nicht kleiner als die positive Einheit; der Einfachheit halber hatten wir (was nicht wesentlich war) bereits $a_n = 1$ gesetzt. Wir fügen dem sogleich die ebenfalls nicht notwendige aber vereinfachende Festsetzung hinzu, daß

$$a_{k+1} = a_{k+2} = \cdots = a_{n-1} = a_n = 1 \tag{55}$$

sein soll; dabei bezeichnet k wieder die den ausgezeichneten Differentialquotienten $[\bar{\sigma}_1, \cdots, \bar{\sigma}_n]$ charakterisierende Zahl k (vgl. S. 590). —

Die Forderung $P > 0$ nimmt für $R = 0$ die Gestalt der folgenden Ungleichung an:

$$a_1^{\bar{\sigma}_1} \cdots a_n^{\bar{\sigma}_n} > M \cdot \sum_{\sigma_1 + \cdots + \sigma_n = \nu} a_1^{\sigma_1} \cdots a_n^{\sigma_n}, \tag{56}$$

welche durch die Annahme (55) übergeht in

$$a_1^{\bar{\sigma}_1} \cdots a_k^{\bar{\sigma}_k} > M \cdot \sum a_1^{\sigma_1} \cdots a_k^{\sigma_k}. \tag{57}$$

Wir erteilen den Konstanten $a_1, \cdots, a_k$ zunächst solche Werte, daß von zwei Monomen

$$A' = a_1^{\sigma_1'} \cdots a_k^{\sigma_k'} \quad \text{und} \quad A'' = a_1^{\sigma_1''} \cdots a_k^{\sigma_k''}$$

jeweils das erste größer ist als das zweite, wenn in der Reihe der Differenzen

$$\sigma_1' - \sigma_1'', \cdots, \sigma_k' - \sigma_k'', \cdots, \sigma_k' - \sigma_k''$$

die erste nicht verschwindende Zahl $\sigma_k' - \sigma_k''$ positiv ist. Um dies zu erreichen, müssen zunächst die Ungleichheiten

(58) $$a_2 > a_2^{\nu},\ a_3 > a_3^{\nu},\ \cdots,\ a_{k-1} > a_k^{\nu},\ a_k > a_{k+1}^{\nu} = 1$$

erfüllt werden; aber diese notwendige Bedingung ist zugleich hinreichend; denn wenn die Beziehungen (58) bestehen, ist

$$\frac{A'}{A''} = a_h^{\sigma_h' - \sigma_h''} \cdot a_{h+1}^{\sigma_{h+1}' - \sigma_{h+1}''} \cdots a_k^{\sigma_k' - \sigma_k''} \geqq a_h \cdot a_{h+1}^{-\nu} > 1.$$

Unter den Posten der auf der rechten Seite von (57) stehenden Summe ist nach dieser Festsetzung $a_1^{\bar{\sigma}_1} \cdots a_{k-1}^{\bar{\sigma}_{k-1}} \cdot a_k^{\bar{\sigma}_k - 1}$ der größte; die Anzahl aller Posten ist $n_\nu - 1$; also wird man der Forderung (57) ganz gewiß genügen durch die Annahme

(59) $$a_k > M(n_\nu - 1).$$

Es bleibt uns noch übrig, die positive Konstante c, für welche ja bisher nur eine untere Grenze angegeben worden ist, größer als P anzunehmen, um die Forderung (54) vollständig zu erfüllen und der mit Hilfe des Differentialsystems (18) konstruierten Reihenentwicklung für z die Konvergenz zu sichern — allerdings zunächst nur unter der besonderen Voraussetzung, daß für sämtliche Differentialquotienten von z bis zur ν^{ten} Ordnung hin die Anfangswerte Null vorgeschrieben seien.

Der allgemeine Fall läßt sich aber leicht auf den soeben erledigten Fall zurückführen. Um dies zu zeigen, führen wir eine neue unbekannte Funktion $\bar{z}$ ein, indem wir setzen

(60) $$\bar{z} = z - \sum_{\substack{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = \alpha \\ \alpha = 1, 2, \cdots, \nu}} \pi^{\alpha}_{\alpha_1, \cdots, \alpha_n} \cdot \frac{(x_1 - x_1^0)^{\alpha_1}}{\alpha_1!} \cdots \frac{(x_n - x_n^0)^{\alpha_n}}{\alpha_n!};$$

woraus sich für die Differentialquotienten der neuen Funktion die Beziehungen ergeben:

(61) $$\bar{p}^{\beta}_{\beta_1, \cdots, \beta_n} = \frac{\partial^{\beta} \bar{z}}{\partial x_1^{\beta_1} \cdots \partial x_n^{\beta_n}} = p^{\beta}_{\beta_1, \cdots, \beta_n} - \pi^{\beta}_{\beta_1, \cdots, \beta_n}$$
$$+ \sum_{\substack{\gamma_1 + \cdots + \gamma_n = \gamma \\ \gamma = 1, 2, \cdots, \nu - \beta}} \pi^{\beta + \gamma}_{\beta_1 + \gamma_1, \cdots, \beta_n + \gamma_n} \cdot \frac{(x_1 - x_1^0)^{\gamma_1}}{\gamma_1!} \cdots \frac{(x_n - x_n^0)^{\gamma_n}}{\gamma_n!},$$
$$(\beta_1 + \cdots + \beta_n = \beta < \nu)$$

(62) $$\bar{p}^{\nu}_{\nu_1, \cdots, \nu_n} = p^{\nu}_{\nu_1, \cdots, \nu_n} - \pi^{\nu}_{\nu_1, \cdots, \nu_n},$$
$$(\nu_1 + \cdots + \nu_n = \nu)$$

(63) $$\bar{p}^{\nu + \lambda}_{\nu_1 + \lambda_1, \cdots, \nu_n + \lambda_n} = p^{\nu + \lambda}_{\nu_1 + \lambda_1, \cdots, \nu_n + \lambda_n}.$$
$$(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = \lambda = 1, 2, \cdots)$$

Vermöge der Relationen (60), (61), (62) läßt sich nun die linke Seite der vorgelegten Differentialgleichung überführen in eine Potenzreihe φ der Argumente

$$(64)\qquad x_1 - x_1^0, \cdots, x_n - x_n^0,\ \bar{z} - z_0, \cdots, \bar{p}^{\beta}_{\beta_1, \cdots, \beta_n}, \cdots$$

welche in einer gewissen Umgebung der Anfangswerte konvergieren muß*). Die Anfangswerte für sämtliche Differentialquotienten von $\bar{z}$ bis zur ν^{ten} Ordnung sind aber nach (61) und (62) gleich Null anzunehmen.

Soll die Funktion z der Differentialgleichung (1) genügen, so muß $\bar{z}$ ein Integral der Differentialgleichung

$$(65)\qquad \varphi\left(x_1 - x_1^0, \cdots, x_n - x_n^0,\ \bar{z} - z_0, \cdots, \bar{p}^{\beta}_{\beta_1, \cdots, \beta_n}, \cdots\right) = 0$$

sein. Jede Ableitung der Funktion φ nach einem Differentialquotienten ν^{ter} Ordnung von $\bar{z}$ kann aber nach (63) nichts anderes sein als diejenige Funktion der Argumente (64), in welche die nach dem entsprechenden Differentialquotienten von z genommene Ableitung der Funktion f durch die Substitution (60), (61), (62) übergeht. Beide Ableitungen werden also für solche Wertesysteme ihrer Argumente, welche sich vermöge dieser Substitution entsprechen, gleichzeitig verschwinden oder einen von Null verschiedenen Wert annehmen. Daraus folgt unmittelbar, daß, wenn

$$\frac{\partial^{\nu} z}{\partial x_1^{\bar{\sigma}_1} \cdots \partial x_n^{\bar{\sigma}_n}} \text{ für die Anfangswerte } x_1^0, \cdots, x_n^0,\ z_0, \cdots, \pi^{\beta}_{\beta_1, \cdots, \beta_n}, \cdots$$

ein ausgezeichneter Differentialquotient der Differentialgleichung (1) ist, stets auch

$$\frac{\partial^{\nu} \bar{z}}{\partial x_1^{\bar{\sigma}_1} \cdots \partial x_n^{\bar{\sigma}_n}} \text{ für die Anfangswerte } x_1^0, \cdots, x_n^0,\ z_0, \cdots, 0, \cdots$$

ein ausgezeichneter Differentialquotient der Differentialgleichung (65) sein wird.

Wir können demnach genau nach den Vorschriften des zweiten Abschnittes ein reguläres Integral der Differentialgleichung (65) konstruieren. Wenn wir hierbei von denselben willkürlichen Elementen ausgehen, welche dort für das Integral z der Differentialgleichung (1) vorgeschrieben waren, nur daß wir jetzt die Anfangswerte der Differentialquotienten bis zur ν^{ten} Ordnung gleich Null annehmen, so wissen wir einerseits, daß dieses Integral konvergieren muß; denn für das neue Differentialproblem sind die Voraussetzungen erfüllt, unter denen wir oben den Konvergenzbeweis geführt haben; andrerseits erkennen wir, daß das so gewonnene Integral

*) Es folgt dies wieder aus jenem Satze der Theorie der Potenzreihen, welchen wir bereits im ersten Abschnitt benutzt haben; vgl. die Fußnote zu S. 588.

der Differentialgleichung (65) identisch sein muß mit der durch (60) definierten Potenzreihe $\bar{z}$, wenn wir dort unter z eben jenes hypothetische Integral z der Differentialgleichung (1) verstehen. Da nun aber die Reihen z und $\bar{z}$ sich nur durch ein endliches Polynom unterscheiden, so zieht die bereits bewiesene Konvergenz der Potenzreihe $\bar{z}$ auch die der Potenzreihe z nach sich, und die Richtigkeit der zu Beginn dieses Abschnittes ausgesprochenen Behauptung ist somit auch unter ganz allgemeinen Voraussetzungen bewiesen.

Unser Konvergenzbeweis, welcher den Inhalt des dritten Abschnittes dieser Arbeit bildet, schließt sich den fundamentalen Untrrsuchungen des Herrn Riquier (Ann. éc. norm. 1893) auf das engste an. Sehen wir von denjenigen Modifikationen ab, welche mehr die Darstellung als den Gedankengang berühren, so läßt sich nur ein Punkt bezeichnen, in welchem die hier durchgeführte Untersuchung sich wesentlich von der des Herrn Riquier unterscheidet: Wären die Differentialquotienten vom Typus $[\tau_2, \cdots, \tau_n]$ in der Differentialgleichung (1) nicht vorhanden, so würde diese nur als das allereinfachste der von Herrn Riquier behandelten Differentialprobleme anzusehen sein; durch die Berücksichtigung jener Differentialquotienten aber ist es möglich geworden, das Existenztheorem etwas weiter zu fassen als bisher geschehen ist*).

Ein Beispiel möge diese Tatsache völlig ans Licht setzen; die vorgelegte Differentialgleichung sei zweiter Ordnung mit zwei unabhängigen Variablen x und y:

$$(66) \qquad f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 0.$$

Wenn einer der beiden Differentialquotienten $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ überhaupt nicht

*) Mit diesen Worten habe ich in einem schon früher (Leipz. Ber., Sitzung vom 3. März 1902) gedruckten Referate über die vorliegende Arbeit das Verhältnis derselben zu den Riquierschen Untersuchungen darzustellen versucht. Inzwischen hat nun Herr Riquier die Freundlichkeit gehabt, mich auf seine, mir bis dahin unbekannte, Arbeit „Sur une question fondamentale du calcul intégral" aufmerksam zu machen, welche im 23. Bande der Acta mathematica erschienen ist und bereits jene Erweiterung der Existenz-Theoreme enthält, von welcher oben die Rede ist. Somit führen die Untersuchungen, welche ich hier zusammenstelle, zu keinen anderen Resultaten, als die auch durch Spezialisierung der Riquierschen Sätze erhalten werden könnten. Trotzdem glaube ich die Arbeit veröffentlichen zu dürfen, da sie den Grundgedanken der Methode an einem Probleme darlegt, dessen Einfachheit und Bestimmtheit einen großen Teil des komplizierten Apparates entbehrlich macht, welcher zur Erledigung des allgemeinen Problems notwendig ist.

vorkommt, und überdies die Differentialgleichung für das gewählte System der Anfangswerte nach $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ auflösbar ist, so wird uns durch die Theoreme des Herrn Riquier die Existenz eines Integrales verbürgt, welches für $x = x^0$ in eine beliebige Funktion von y, für $y = y^0$ in eine beliebige Funktion von x übergeht. Aber erst die oben durchgeführte Untersuchung lehrt, daß ein solches Integral auch dann existiert, wenn unsere Differentialgleichung die beiden Differentialquotienten $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ zwar enthält, aber nach mindestens einem derselben für die gewählten Aufangswerte nicht aufgelöst werden kann. In meiner schon wiederholt zitierten Schrift habe ich die Differentialgleichung

$$(1-xy)x \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - (1-xy)(1+xy)\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + (1-xy)y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + (1-x)\frac{\partial z}{\partial x} + (1-y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

als Beispiel gewählt, deren allgemeines Integral

$$z = \omega_1(x \cdot e^y) + \omega_2(y \cdot e^x)$$

unsere Existenztheoreme in lehrreicher Weise verifiziert. —

Die Untersuchungsmethoden, welche in der vorliegenden Arbeit zur Anwendung gelangt sind, lassen sich auf Differentialsysteme übertragen, für welche die Anzahl der unbekannten Funktionen mit der Anzahl der Differentialgleichungen übereinstimmt. Unter gewissen Voraussetzungen habe ich den formalen Teil der Untersuchung, d. h. die Konstruktion der integrierenden Reihe, für solche Differentialsysteme bereits in meiner Habilitationsschrift erledigt; allein die durch jene Voraussetzungen eingeführten Beschränkungen lassen sich zum größten Teil beseitigen, so daß unser Verfahren für alle Differentialsysteme anwendbar wird, welche durch lineare Transformation der unabhängigen Variablen auf die Kowalevskysche Normalform reduziert werden können. Dies zu zeigen und zugleich die Konvergenzbeweise für die hypothetischen Integrale derartiger Differentialsysteme zu erbringen, wird die Aufgabe einer künftig zu liefernden Arbeit bilden.

Aber noch nach einer anderen Richtung hin sollen die angestellten Betrachtungen fortgeführt werden. Es wurde in dieser Arbeit gezeigt, daß unter gewissen Voraussetzungen die zwischen den Koffizienten des hypothetischen Integrals bestehenden Relationen in bestimmter Weise aufgelöst werden können; aber es ist bereits darauf hingewiesen worden (S. 595, 596), daß das mitgeteilte Schema der Auflösung nicht das einzig mögliche ist. So kann, um bei dem Beispiel zu bleiben, die Differentialgleichung (66) für ein bestimmtes System von Anfangswerten sehr wohl nach allen drei Differentialquotienten zweiter Ordnung auflösbar sein und trotzdem ein reguläres Integral besitzen, welches sich für $x = x^0$ auf eine willkürliche Funktion von y, für $y = y^0$ auf eine willkürliche Funktion von x reduziert. Derartige Möglichkeiten lassen sich aber bis zu einem gewissen Grade der Allgemeinheit diskutieren und stellen uns somit vor neue, für Theorie und Anwendung gleich wichtige Probleme, zu deren Behandlung wir notwendig fortschreiten müssen.

Heidelberg, den 1. April 1902.

Zur Theorie allgemeiner Zetafunctionen.

Von

Paul Epstein in Strassburg i./E.

In seiner berühmten Abhandlung über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grenze hat Riemann die Function $\zeta(s)$ über das Convergenzgebiet der Reihe

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots$$

hinaus analytisch fortgesetzt und damit für allgemeine complexe Werthe von s definirt. Diese analytische Fortsetzung, die durch ein Integral mit geschlossenem Integrationsweg bewirkt wird, findet ihren prägnantesten Ausdruck in dem Satz, dass *das Product*

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$$

bei der Vertauschung von s mit $1-s$ sich nicht ändert, denn dieser Satz führt direct die Function für solche Werthe, für die die Reihe nicht mehr convergirt, auf die Functionswerthe innerhalb des Convergenzgebiets zurück.

An diesen Theil der Riemann'schen Abhandlung haben eine Anzahl von Arbeiten angeknüpft*), in denen für Functionen mit ähnlichen und allgemeineren Bildungsgesetzen entsprechende Functionaltheoreme abgeleitet wurden, und diese Untersuchungen in einer bestimmten Richtung zu einem gewissen Abschluss zu bringen, ist der Zweck der vorliegenden Arbeit. Den Weg dazu hat Riemann selbst durch eine zweite Integraldarstellung der Function $\zeta(s)$ gewiesen, in der eine *einfach unendliche Thetareihe* mit der

*) Vgl. Hurwitz, Einige Eigenschaften der Dirichlet'schen Functionen $F(s)$ Zeitschr. f. Math. u. Phys. XXVII. — Lerch, Sur la fonction $\mathfrak{K}(w, x, s)$, Acta Mathematica XI. — Cahen, Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann, Annales de l'École Normale XI, 1894. — Lipschitz, Eigenschaften einer Gattung unendlicher Reihen, Crelle's Journal Bd. 105. — Mellin, Acta soc. scient. Fenn. Bd. 24.

Charakteristik $\left|\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right|$ auftritt. Dem entsprechend existirt für die von Herrn Lipschitz untersuchte Function — die allgemeinste bisher betrachtete „Zeta"-function — eine Integraldarstellung mit Hülfe einer einfach unendlichen Thetareihe mit *beliebiger* Charakteristik. Diesem Gedankengange folgend definiren wir als *allgemeine Zetafunction p^{ter} Ordnung* eine p-fach unendliche Reihe, welche in gleicher Weise eine Verallgemeinerung der Riemann'schen ζ-function darstellt, wie die allgemeine Thetareihe p^{ter} Ordnung gegenüber der elliptischen Thetareihe. Dass diese Erweiterung der Zetafunctionen naturgemäss ist, zeigt sich vor allem darin, dass sich der oben angeführte Riemann'sche Satz über die Function $\zeta(s)$ in überraschend einfacher Weise auf die allgemeinste Zetafunction übertragen lässt.

In diesem Zusammenhang treten auch die von Dirichlet in die Analysis eingeführten nach negativen Potenzen quadratischer Formen fortschreitenden Reihen als die einfachsten Zetafunctionen zweiter Ordnung auf. Die Bestimmung der Functionswerthe für $s = 2$ spielt bekanntlich eine sehr wichtige Rolle in den Untersuchungen „zur Theorie der elliptischen Functionen", welche die Reihe der Kronecker'schen Publicationen in den Berliner Monatsberichten in so glänzender Weise beschliessen. Die Resultate Kronecker's auf neuem Wege abzuleiten und so weit als möglich auf allgemeine Zetafunctionen auszudehnen ist die Aufgabe des zweiten Theils der vorliegenden Arbeit. Dabei ist der Gang unserer Untersuchung in gewisser Weise demjenigen Kronecker's entgegengesetzt; denn während Kronecker*) einen aus elliptischen Thetafunctionen zusammengesetzten Ausdruck $\Lambda(\sigma, \tau, w_1, w_2)$ construirt und dessen Logarithmus in eine Dirichlet'sche Reihe überführt, gehen wir von der Zetafunction aus und gelangen allein durch Anwendung einer Transformation der zweifach unendlichen Thetareihe zu dem gewünschten Ziel; diese Methode lässt sich dann ihrem Wesen nach unmittelbar auf Zetafunctionen p^{ter} Ordnung übertragen.

§ 1.

Ich bezeichne als *Zetafunction* 1. *Ordnung* mit der Charakteristik $\left|\begin{smallmatrix}g\\h\end{smallmatrix}\right|$ eine einwerthige Function der complexen Variablen s, welche für alle Werthe von s, deren reeller Bestandtheil grösser als 1 ist, durch die Reihe

$$Z\left|\begin{matrix}g\\h\end{matrix}\right|(s) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2\pi i m h}}{[(g+m)^2]^{\frac{s}{2}}} \tag{1}$$

definirt wird.

*) Vgl. Zur Theorie der elliptischen Functionen I. Berliner Monatsberichte 1883.

Darin bedeuten g, h reelle Zahlen, welche wir vorläufig als *nicht ganzzahlig* annehmen, und die Potenzen im Nenner der Reihenglieder mögen durch

$$[(g+m)^2]^{\frac{s}{2}} = e^{s \log|g+m|} \; (\log|g+m| \text{ reell})$$

definirt sein.

Infolge der Relationen

$$(2)\qquad \begin{aligned} &Z\left|\begin{matrix}-g\\ h\end{matrix}\right|(s) = Z\left|\begin{matrix}g\\ -h\end{matrix}\right|(s), && Z\left|\begin{matrix}-g\\ -h\end{matrix}\right|(s) = Z\left|\begin{matrix}g\\ h\end{matrix}\right|(s),\\ &Z\left|\begin{matrix}g+1\\ h\end{matrix}\right|(s) = e^{-2\pi i h} Z\left|\begin{matrix}g\\ h\end{matrix}\right|(s), && Z\left|\begin{matrix}g\\ h+1\end{matrix}\right|(s) = Z\left|\begin{matrix}g\\ h\end{matrix}\right|(s)\end{aligned}$$

dürfen wir die Zahlen g, h auf positive Werthe zwischen 0 und 1 beschränken.

Wir gewinnen eine Darstellung der Z-function durch ein bestimmtes Integral, wenn wir in dem bekannten Integral

$$(3)\qquad \frac{\Gamma(s)}{n^s} = \int_0^\infty z^{s-1} e^{-nz}\, dz$$

$\frac{s}{2}$ an Stelle von s, $\pi(g+m)^2$ an Stelle von n setzen, und nach Multiplication mit $e^{2\pi i m h}$ über alle ganzzahligen Werthe von m summiren. Wir erhalten dann

$$(4)\qquad \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) Z\left|\begin{matrix}g\\ h\end{matrix}\right|(s) = \int_0^\infty dz \cdot z^{\frac{s}{2}-1} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi z (g+m)^2 + 2\pi i m h}.$$

Hier steht unter dem Integralzeichen eine einfach unendliche Thetareihe mit dem Parameter zi, welche wir mit leichter Abänderung der gewöhnlichen Schreibweise durch

$$\vartheta\left\|\begin{matrix}g\\ h\end{matrix}\right|(0, z)$$

bezeichnen, sodass

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) Z\left|\begin{matrix}g\\ h\end{matrix}\right|(s) = \int_0^\infty dz \cdot z^{\frac{s}{2}-1}\, \vartheta\left|\begin{matrix}g\\ h\end{matrix}\right|(0, z).$$

Dieses bestimmte Integral verliert, ebenso wie die der Betrachtung zu Grunde liegende Reihe, seine Gültigkeit, sobald der reelle Theil von s kleiner als 1 wird. Spalten wir es aber — ebenso wie es Riemann bei der Function $\zeta(s)$ gethan hat*) — in die beiden Theile

*) Die Aehnlichkeit dieses Verfahrens mit der bekannten Behandlung der Gammafunction durch Herrn Prym scheint noch nicht ausdrücklich hervorgehoben zu sein.

$$\int_1^\infty dz \cdot z^{\frac{s}{2}-1}\, \vartheta \begin{vmatrix} g \\ h \end{vmatrix} (0, z) + \int_0^1 dz \cdot z^{\frac{s}{2}-1}\, \vartheta \begin{vmatrix} g \\ h \end{vmatrix} (0, z),$$

so existirt das erste Integral für jeden complexen Werth von s und stellt eine ganze transcendente Function dieser Variablen dar.

Im zweiten Integral wenden wir auf die Thetareihe die lineare Transformation $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ an. Wir wollen diese Transformation, von der wir noch wiederholt Gebrauch zu machen haben, aus leicht ersichtlichem Grunde, als *reciproke* Transformation bezeichnen. Es wird dann

$$\vartheta \begin{vmatrix} g \\ h \end{vmatrix} (0, z) = \frac{e^{-2\pi i g h}}{\sqrt{z}}\, \vartheta \begin{vmatrix} h \\ -g \end{vmatrix} \left(0, \frac{1}{z}\right), \tag{5}$$

worin $\sqrt{z}$ mit dem positiven Vorzeichen zu nehmen ist.

Führen wir dies in das obige Integral ein und setzen gleichzeitig $\frac{1}{z}$ an Stelle von z, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \pi^{-\frac{s}{2}}\, \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) Z \begin{vmatrix} g \\ h \end{vmatrix} (s) = & \int_1^\infty dz \cdot z^{\frac{s}{2}-1}\, \vartheta \begin{vmatrix} g \\ h \end{vmatrix} (0, z) \\ & + e^{-2\pi i g h} \int_1^\infty dz \cdot z^{\frac{1-s}{2}-1}\, \vartheta \begin{vmatrix} h \\ -g \end{vmatrix} (0, z), \end{aligned} \tag{6}$$

und diesen Ausdruck betrachten wir für alle nicht ganzzahligen Werthe von g und h als *Definition der Zetafunction* 1. *Ordnung* bei unbeschränkt veränderlichem s.

Setzen wir $1-s$, h, $-g$ an Stelle von s, g, h, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \pi^{-\frac{1-s}{2}}\, \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) Z \begin{vmatrix} h \\ -g \end{vmatrix} (1-s) = & \int_1^\infty dz \cdot z^{\frac{1-s}{2}-1}\, \vartheta \begin{vmatrix} g \\ -h \end{vmatrix} (0, z) \\ & + e^{2\pi i g h} \int_1^\infty dz \cdot z^{\frac{s}{2}-1}\, \vartheta \begin{vmatrix} -g \\ -h \end{vmatrix} (0, z); \end{aligned}$$

da aber

$$\vartheta \begin{vmatrix} -g \\ -h \end{vmatrix} = \vartheta \begin{vmatrix} g \\ h \end{vmatrix}$$

ist, so ergiebt sich die von Herrn Lipschitz gefundene Transformationsgleichung

$$e^{2\pi i g h} \cdot \pi^{-\frac{s}{2}}\, \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) Z \begin{vmatrix} g \\ h \end{vmatrix} (s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}}\, \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) Z \begin{vmatrix} h \\ -g \end{vmatrix} (1-s). \tag{7}$$

§ 2.

Wir betrachten jetzt den Fall, dass eine der beiden Zahlen g, h *ganzzahlig* ist; dabei genügt es, in Folge der Relationen (2) des vorigen Paragraphen sie gleich *Null* anzunehmen.

Sei also zunächst $h=0$ und g nicht ganzzahlig. Dann ist

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)Z\begin{vmatrix}g\\0\end{vmatrix}(s)=\int_0^\infty dz\cdot z^{\frac{s}{2}-1}\sum_{-\infty}^{+\infty}e^{-\pi z(g+m)^2}$$

oder mit Benutzung der Transformationsformel (5)

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)Z\begin{vmatrix}g\\0\end{vmatrix}(s)=\int_1^\infty dz\cdot z^{\frac{s}{2}-1}\sum_{-\infty}^{+\infty}e^{-\pi z(g+m)^2}$$
$$+\int_0^1 dz\frac{z^{\frac{s}{2}-1}}{\sqrt{z}}\left(1+\sum_{-\infty}^{+\infty}{}' e^{-\frac{\pi m^2}{z}-2\pi i m g}\right),$$

worin der Accent beim zweiten Summenzeichen andeuten soll, dass das Glied für $m=0$ aus der Summe wegzulassen ist. Wir erhalten hieraus

$$(1)\qquad \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)Z\begin{vmatrix}g\\0\end{vmatrix}(s)=\frac{2}{s-1}+\int_1^\infty dz\cdot z^{\frac{s}{2}-1}\,\vartheta\begin{vmatrix}g\\0\end{vmatrix}(0,z)$$
$$+\int_1^\infty dz\cdot z^{\frac{1-s}{2}-1}\left(\vartheta\begin{vmatrix}0\\g\end{vmatrix}(0,z)-1\right)$$

als allgemeine Definition der Zetafunction für diesen Fall.

Ist dagegen $g=0$, so haben wir aus der Zetareihe das Glied für $m=0$ fortzulassen, also ist

$$(2)\qquad Z\begin{vmatrix}0\\h\end{vmatrix}(s)=\sum_{-\infty}^{+\infty}{}'\frac{e^{2\pi i m h}}{(m^2)^{\frac{s}{2}}}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi n h}{n^s},$$

und durch eine ähnliche Betrachtung wie oben finden wir

$$(3)\qquad \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)Z\begin{vmatrix}0\\h\end{vmatrix}(s)=-\frac{2}{s}+\int_1^\infty dz\cdot z^{\frac{s}{2}-1}\left(\vartheta\begin{vmatrix}0\\h\end{vmatrix}(z)-1\right)$$
$$+\int_1^\infty dz\cdot z^{\frac{1-s}{2}-1}\,\vartheta\begin{vmatrix}h\\0\end{vmatrix}(z).$$

Jetzt ergiebt sich aber aus den Formeln (1) und (3) die Beziehung

$$(4)\qquad \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)Z\begin{vmatrix} g\\ 0\end{vmatrix}(s)=\pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)Z\begin{vmatrix} 0\\ g\end{vmatrix}(1-s),$$

d. h. die Transformationsgleichung (7) des vorigen Paragraphen gilt auch für ganzzahlige Werthe von g oder h.

Sind endlich beide Zahlen g, h Null, so haben wir die Riemann'sche Function $\zeta(s)$, welche mit unseren Bezeichnungen in wesentlicher Uebereinstimmung mit Riemann durch den Ausdruck

$$2\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)=\frac{2}{s-1}-\frac{2}{s}+\int_1^\infty dz\cdot z^{\frac{s}{2}-1}\left(\vartheta\begin{vmatrix} 0\\ 0\end{vmatrix}(0,z)-1\right)$$
$$+\int_1^\infty dz\cdot z^{\frac{1-s}{2}-1}\left(\vartheta\begin{vmatrix} 0\\ 0\end{vmatrix}(0,z)-1\right)$$

definirt ist.

Die bisherigen Entwicklungen lassen folgende Eigenschaften der Zetafunction erkennen:

Die Zetafunction 1. Ordnung $Z\begin{vmatrix} g\\ h\end{vmatrix}(s)$ ist — solange nicht h ganze Zahl ist — *ganze transcendente Function von s.*

Ist h ganze Zahl, so wird die Zetafunction nur für $s=1$ zur ersten Ordnung unstetig und zwar ist in der Umgebung dieses Punktes

$$Z\begin{vmatrix} g\\ h\end{vmatrix}(s)=\frac{2}{s-1}+c_0+c_1(s-1)+\cdots \qquad h \text{ ganze Zahl.}$$

Die Function verschwindet für jede Charakteristik in den Punkten $s=-2,\ -4,\ -6\cdots$.

Für $s=0$ verschwinden die Zetafunctionen jeder Charakteristik ausser denjenigen mit *ganzzahligem* g. Für diese ist

$$Z\begin{vmatrix} g\\ h\end{vmatrix}(0)=-e^{-2\pi i g h} \qquad g \text{ ganze Zahl.}$$

Das letzte folgt unmittelbar aus der Transformationsformel (7), wenn man beiderseits mit s multiplicirt und zur Grenze $s=0$ übergeht.

§ 3.

Es sei

$$\varphi((x))=\sum_{\mu=1}^{p}\sum_{\nu=1}^{p}c_{\mu\nu}x_\mu x_\nu \qquad (c_{\mu\nu}=c_{\nu\mu})$$

eine quadratische Form von p Veränderlichen, deren *reeller Theil positiv* und deren Determinante von Null verschieden sei.

Ersetzen wir darin die Veränderlichen durch $x_\mu + y_\mu$ $(\mu = 1, 2, \cdots p)$, so schreiben wir symbolisch

$$\begin{aligned}\varphi((x+y)) &= \sum_\mu \sum_\nu c_{\mu\nu}(x_\mu + y_\mu)(x_\nu + y_\nu) \\ &= \varphi((x)) + \varphi((y)) + 2\sum_\mu \sum_\nu c_{\mu\nu} x_\mu y_\nu.\end{aligned}$$

Ferner seien $g_1 g_2 \cdots g_p$, $h_1 h_2 \cdots h_p$ reelle Zahlen, von denen wir vorläufig voraussetzen, dass nicht gleichzeitig alle Zahlen der einen oder der andern Reihe ganzzahlig sind. Wir bilden dann die p-fach unendliche Reihe

$$(1) \qquad \sum_{m_1} \cdots \sum_{m_p} \frac{e^{2\pi i \sum\limits_{\mu=1}^{p} m_\mu h_\mu}}{\varphi((g+m))^{\frac{s}{2}}},$$

worin die Summation über alle ganzzahligen Werthe der Indices m_μ von $-\infty$ bis $+\infty$ zu erstrecken ist. Dabei sind die Potenzen

$$\varphi((g+m))^{\frac{s}{2}} = e^{\frac{s}{2}\log\varphi((g+m))}$$

durch die Festsetzung eindeutig definirt, dass der imaginäre Theil von $\log\varphi((g+m))$ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ liegen soll.

Die *Convergenz* derartiger Reihen lässt sich im Anschluss an die bedeutende Abhandlung von Eisenstein über die elliptischen Doppelproducte (Crelle, Bd. 35) leicht entscheiden*). Eisenstein beweist darin folgenden Satz:

Bildet man mit Hülfe von p^2 *reellen* Constanten $a_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 1, 2, \cdots p)$ die linearen Verbindungen der Indices $m_1 m_2 \cdots m_p$:

$$w_\mu = a_{\mu 1} m_1 + a_{\mu 2} m_2 + \cdots + a_{\mu p} m_p \qquad \mu = 1, 2, \cdots p$$

und sind $c_1 c_2 \cdots c_p$ weitere *reelle* Zahlen, so convergirt die p-fache Reihe

$$\sum_{m_1} \cdots \sum_{m_p} \frac{1}{[(w_1+c_1)^2 + (w_2+c_2)^2 + \cdots + (w_p+c_p)^2]^{\frac{s}{2}}},$$

sobald der reelle Theil von s grösser als p ist.

---

*) Vgl. Kronecker, Zur Theorie der elliptischen Functionen XX. Berl. Sitzungsberichte 1890, S. 104. Picard, Traité d'analyse Bd. I, S. 269.

Wir wenden auf die quadratische Form $\varphi((x)) = \sum\sum c_{\mu\nu} x_\mu x_\nu$ eine lineare Transformation mit reellen Coefficienten an, durch die der reelle Theil derselben in eine Summe von Quadraten verwandelt wird. Sei dieselbe

$$X_\mu = a_{\mu 1} x_1 + a_{\mu 2} x_2 + \cdots + a_{\mu p} x_p, \qquad \mu = 1, 2, \cdots p$$

so ist also

$$\varphi((x)) = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_p^2 + i\psi((X)),$$

folglich

$$\varphi((m+g)) = (w_1+c_1)^2 + (w_2+c_2)^2 + \cdots + (w_p+c_p)^2 + i\psi((w+c)),$$

worin

$$w_\mu = a_{\mu 1} m_1 + a_{\mu 2} m_2 + \cdots + a_{\mu p} m_p,$$
$$c_\mu = a_{\mu 1} g_1 + a_{\mu 2} g_2 + \cdots + a_{\mu p} g_p.$$

Dann ist aber

$$\operatorname{mod} \varphi((m+g)) > (w_1+c_1)^2 + (w_2+c_2)^2 + \cdots + (w_p+c_p)^2$$

und daraus ergiebt sich, dass unsere Reihe unter derselben Bedingung convergirt, wie die Eisenstein'sche, also sobald der *reelle Theil von s grösser als p* ist.

Wir dürfen also in dem so begrenzten Gebiet die Reihe (1) als Definition einer Function von s:

$$\text{(2)} \qquad Z\begin{vmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_p \\ h_1 & h_2 & \cdots & h_p \end{vmatrix}(s)_\varphi = \sum_{m_1} \cdots \sum_{m_p} \frac{e^{2\pi i \sum_{\mu=1}^{p} m_\mu h_\mu}}{\varphi((m+g))^{\frac{s}{2}}}$$

ansehen und bezeichnen sie als *Zetafunction p^{ter} Ordnung mit der „Charakteristik“ $\begin{vmatrix} g \\ h \end{vmatrix}$ und den „Moduln“ $c_{\mu\nu}$.*

Es ergeben sich hieraus sofort die Relationen:

$$Z\begin{vmatrix} -g_1, & -g_2, & \cdots, & -g_p \\ h_1, & h_2, & \cdots, & h_p \end{vmatrix}(s) = Z\begin{vmatrix} g_1, & g_2, & \cdots, & g_p \\ -h_1, & -h_2, & \cdots, & -h_p \end{vmatrix}(s),$$

$$Z\begin{vmatrix} -g_1, & -g_2, & \cdots, & -g_p \\ -h_1, & -h_2, & \cdots, & -h_p \end{vmatrix}(s) = Z\begin{vmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_p \\ h_1 & h_2 & \cdots & h_p \end{vmatrix}(s),$$

$$\text{(3)} \quad \begin{aligned} Z\begin{vmatrix} g_1 & g_2 \cdots & g_\mu & \cdots g_p \\ h_1 & h_2 \cdots & h_\mu + 1, & \cdots h_p \end{vmatrix}(s) &= Z\begin{vmatrix} g_1 & g_2 & \cdots g_\mu & \cdots g_p \\ h_1 & h_2 & \cdots h_\mu & \cdots h_p \end{vmatrix}(s), \\ Z\begin{vmatrix} g_1 & g_2 \cdots g_\mu + 1, & \cdots g_p \\ h_1 & h_2 \cdots \quad h_\mu & \cdots h_p \end{vmatrix}(s) &= e^{-2\pi i h_\mu} Z\begin{vmatrix} g_1 & g_2 \cdots g_\mu \cdots g_p \\ h_1 & h_2 \cdots h_\mu \cdots h_p \end{vmatrix}(s). \end{aligned}$$

Führen wir an Stelle der Indices $m_1\, m_2 \cdots m_p$ neue Summationsbuchstaben $n_1\, n_2 \cdots n_p$ durch die lineare Substitution ein:

$$n_\mu = \alpha_{1\mu} m_1 + \alpha_{2\mu} m_2 + \cdots + \alpha_{p\mu} m_p \qquad (\mu = 1, 2, \cdots p),$$

worin die α ganze Zahlen bedeuten, deren Determinante gleich 1 ist, so erhalten wir folgende Transformationsformel für die Zetafunction:

Es ist

$$(4) \qquad Z\left|\begin{matrix} g \\ h \end{matrix}\right|(s)_\varphi = Z\left|\begin{matrix} g' \\ h' \end{matrix}\right|(s)_{\varphi'},$$

wenn die Charakteristik der neuen Zetafunction durch die Formeln

$$(4a) \qquad g'_\mu = \sum_{x=1}^{p} \alpha_{x\mu} g_x, \qquad h'_\mu = \sum_{x=1}^{p} \alpha'_{x\mu} h_x,$$

und die neuen Moduln durch die Formeln

$$(4b) \qquad c'_{\mu\nu} = \sum_x \sum_\lambda \alpha'_{x\mu} \alpha'_{\lambda\nu} c_{x\lambda}$$

bestimmt werden. Darin bedeutet $\alpha'_{\mu\nu}$ die zu $\alpha_{\mu\nu}$ gehörende Unterdeterminante der Determinante $\sum \pm \alpha_{11} \alpha_{22} \cdots \alpha_{pp} = 1$.

Es bildet also die Zetafunction im Sinne Kronecker's eine Invariante der durch die Gleichungen (4a) und (4b) definirten Aequivalenz.

§ 4.

Um die Zetafunction über den Convergenzbereich der p-fachen Reihe hinaus fortzusetzen, stellen wir sie durch ein bestimmtes Integral dar, und zwar erhalten wir ganz ähnlich wie in § 1 mit Hülfe des dort angeführten Integrals (3) die Formel

$$(1) \qquad \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) Z\left|\begin{matrix} g_1 & g_2 \cdots g_p \\ h_1 & h_2 \cdots h_p \end{matrix}\right|(s)_\varphi$$

$$= \int_0^\infty dz \cdot z^{\frac{s}{2}-1} \sum_{m_1} \cdots \sum_{m_p} e^{-\pi z \varphi((g+m)) + 2\pi i \sum_\mu m_\mu h_\mu}.$$

Hier steht unter dem Integralzeichen eine p-fach unendliche Thetareihe mit den Moduln

$$a_{\mu\nu} = -\pi c_{\mu\nu} \cdot z,$$

welche bei unserer Annahme über die quadratische Form φ innerhalb der Integrationsgrenzen unter allen Umständen convergirt. Sie würde nach der Schreibweise der Herren Krazer und Prym (Neue Grundlagen einer Theorie der allgemeinen Thetafunctionen) mit

$$e^{-2\pi i \sum_\mu g_\mu h_\mu} \vartheta\left|\begin{matrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_p \\ h_1 & h_2 & \cdots & h_p \end{matrix}\right|(0|0\cdots|0)_a$$

zu bezeichnen sein. Um jedoch die Abhängigkeit von der Integrationsvariablen z hervortreten zu lassen, schreiben wir

$$(2)\qquad \sum_{m_1}\cdots\sum_{m_p} e^{-\pi z\varphi((g+m))+2\pi i\sum_\mu m_\mu h_\mu} = \vartheta\begin{vmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_p \\ h_1 & h_2 & \cdots & h_p \end{vmatrix}(0,z)_\varphi$$

und haben dann

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)Z\begin{vmatrix} g_1 \cdots g_p \\ h_1 \cdots h_p \end{vmatrix}(s)_\varphi = \int_1^\infty dz\cdot z^{\frac{s}{2}-1}\,\vartheta\begin{vmatrix} g_1 \cdots g_p \\ h_1 \cdots h_p \end{vmatrix}(0,z)_\varphi$$
$$+\int_0^1 dz\cdot z^{\frac{s}{2}-1}\,\vartheta\begin{vmatrix} g_1 \cdots g_p \\ h_1 \cdots h_p \end{vmatrix}(0,z)_\varphi,$$

worin das erste Integral für jeden complexen Werth von s gültig bleibt.

Auf die Thetareihe im zweiten Integral wenden wir die *reciproke* Transformation

$$\left|\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \hline -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right|$$

an. Die Transformationsformel lautet*):

$$(3)\qquad \vartheta\begin{vmatrix} g_1 & g_2 & \cdots & g_p \\ h_1 & h_2 & \cdots & h_p \end{vmatrix}(0,z)_\varphi = \frac{e^{-2\pi i\sum_\mu g_\mu h_\mu}}{z^{\frac{p}{2}}\sqrt{\Delta}}\,\vartheta\begin{vmatrix} h_1 & h_2 & \cdots & h_p \\ -g_1 & -g_2 & \cdots & -g_p \end{vmatrix}\left(0,\frac{1}{z}\right)_\Phi.$$

Darin bedeutet Δ die Determinante der Form φ:

$$(3\text{a})\qquad \Delta = \sum \pm c_{11}\, c_{22}\cdots c_{pp},$$

deren Quadratwurzel mit positivem reellen Bestandtheil anzunehmen ist, und die Thetareihe auf der rechten Seite ist mit der zu φ *reciproken Form***)

*) Vgl. Krazer und Prym a. a. O. S. 88.

**) Nach der Bezeichnung von Herrn Frobenius.

$$\Phi((x)) = \sum_\mu \sum_\nu c'_{\mu\nu} x_\mu x_\nu$$

zu bilden, worin

(3b) $$c'_{\mu\nu} = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial c_{\mu\nu}}.$$

Mit Hülfe dieser Transformationsformel, welche natürlich die Verallgemeinerung der von **Riemann** benutzten Cauchy'schen Formel

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi z m^2} = \frac{1}{\sqrt{z}} \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\pi}{z} m^2}$$

darstellt, erhalten wir jetzt, wenn wir noch in dem zweiten Integral oben $\frac{1}{z}$ an Stelle von z einführen:

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) Z \begin{vmatrix} g_1 \cdots g_p \\ h_1 \cdots h_p \end{vmatrix} (s)_\varphi = \int_1^\infty dz \cdot z^{\frac{s}{2}-1} \vartheta \begin{vmatrix} g_1 \cdots g_p \\ h_1 \cdots h_p \end{vmatrix} (0, z)_\varphi$$

$$+ \frac{e^{-2\pi i \sum_\mu g_\mu h_\mu}}{\sqrt{\Delta}} \int_1^\infty dz \cdot z^{\frac{p-s}{2}-1} \vartheta \begin{vmatrix} h_1 \cdots h_p \\ -g_1 \cdots -g_p \end{vmatrix} (0, z)_\Phi$$

oder

(4) $$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) Z \begin{vmatrix} g \\ h \end{vmatrix} (s)_\varphi = \int_1^\infty dz \cdot z^{\frac{s}{2}-1} \sum_{m_1} \cdots \sum_{m_p} e^{-\pi z \varphi((g+m)) + 2\pi i \sum_\mu m_\mu h_\mu}$$

$$+ \frac{e^{-2\pi i \sum_\mu g_\mu h_\mu}}{\sqrt{\Delta}} \int_1^\infty dz \cdot z^{\frac{p-s}{2}-1} \sum_{m_1} \cdots \sum_{m_p} e^{-\pi z \Phi((h+m)) - 2\pi i \sum_\mu m_\mu g_\mu}$$

und diesen Ausdruck betrachten wir als *Definition der allgemeinen Zetafunction* bei unbeschränkt veränderlichem s, solange nicht gleichzeitig alle Zahlen g oder h ganzzahlig sind.

Setzen wir $p-s, h_\mu, -g_\mu, c'_{\mu\nu}$ an Stelle von $s, g_\mu, h_\mu, c_{\mu\nu}$ $\begin{pmatrix} \mu = 1, 2, \cdots p \\ \nu = 1, 2, \cdots p \end{pmatrix}$, so erhalten wir mit Benutzung bekannter Determinantensätze die Formel

(5) $$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) Z \begin{vmatrix} g_1 & g_2 \cdots g_p \\ h_1 & h_2 \cdots h_p \end{vmatrix} (s)_\varphi$$

$$= \frac{e^{-2\pi i \sum_\mu g_\mu h_\mu}}{\sqrt{\Delta}} \pi^{-\frac{p-s}{2}} \Gamma\left(\frac{p-s}{2}\right) Z \begin{vmatrix} h_1 & h_2 \cdots & h_p \\ -g_1 & -g_2 \cdots & -g_p \end{vmatrix} (p-s)_\Phi,$$

deren Inhalt man auch durch den folgenden Satz ausdrücken kann:

Der Ausdruck

$$\sqrt[4]{\Delta}\, e^{\pi i \sum_{\mu} g_\mu h_\mu} \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) Z\left|\begin{matrix} g_1 \cdots g_p \\ h_1 \cdots h_p \end{matrix}\right| (s)_\varphi$$

ist eine Invariante der Aequivalenz

$$(s,\, g_\mu,\, h_\mu,\, c_{\mu\nu}) \sim (p-s,\, h_\mu,\, -g_\mu,\, c'_{\mu\nu}). \qquad \begin{matrix} \mu = 1, 2, \cdots p \\ \nu = 1, 2, \cdots p \end{matrix}$$

Es lässt sich jetzt ganz ähnlich wie in § 2 zeigen, dass dieser Satz für *alle* Werthe der reellen Zahlen g und h bestehen bleibt. Wir haben nur wieder, falls alle Zahlen g oder h gleichzeitig ganze Zahlen sind, die obige Integraldarstellung der Zetafunction so zu modificiren, dass die Integrale für alle Werthe von s stetig bleiben. Dabei genügt es, in Folge der Relationen (3) des vorigen Paragraphen, die Zahlen g oder h gleich Null anzunehmen. Wir erhalten dann für diese Fälle folgende Integraldarstellungen der Zetafunction:

1) Alle Zahlen $h_1 \cdots h_p$ gleich Null.

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) Z\left|\begin{matrix} g \\ 0 \end{matrix}\right| (s)_\varphi = \frac{2}{\sqrt{\Delta}(s-p)} + \int_1^\infty dz \cdot z^{\frac{s}{2}-1} \sum_{m_1} \cdots \sum_{m_p} e^{-\pi z \varphi((g+m))}$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \int_1^\infty dz \cdot z^{\frac{p-s}{2}-1} \sum_{m_1} \cdots \sum_{m_p}{}' e^{-\pi z \Phi((m)) - 2\pi i \sum_{\mu} m_\mu g_\mu}.$$

2) Alle Zahlen $g_1 \cdots g_p$ gleich Null.

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) Z\left|\begin{matrix} 0 \\ h \end{matrix}\right| (s)_\varphi = -\frac{2}{s} + \int_1^\infty dz \cdot z^{\frac{s}{2}-1} \sum_{m_1} \cdots \sum_{m_p}{}' e^{-\pi z \varphi((m)) + 2\pi i \sum_{\mu} m_\mu h_\mu}$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \int_1^\infty dz \cdot z^{\frac{p-s}{2}-1} \sum_{m_1} \cdots \sum_{m_p} e^{-\pi z \Phi((m+h))}.$$

3) Alle Zahlen $g_1 \cdots g_p$, $h_1 \cdots h_p$ gleich Null.

$$Z\left|\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right| (s)_\varphi = \sum_{m_1} \cdots \sum_{m_p}{}' \frac{1}{\varphi(m)^{\frac{s}{2}}},$$

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) Z\left|\begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}\right| (s)_\varphi = \frac{2}{\sqrt{\Delta}(s-p)} - \frac{2}{s} + \int_1^\infty dz \cdot z^{\frac{s}{2}-1} \sum_{m_1} \cdots \sum_{m_p}{}' e^{-\pi z \varphi((m))}$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \int_1^\infty dz \cdot z^{\frac{p-s}{2}-1} \sum_{m_1} \cdots \sum_{m_p}{}' e^{-\pi z \Phi((m))}.$$

Dabei deutet der Accent bei den Summenzeichen an, dass die Combination $m_1 = 0,\ m_2 = 0, \cdots m_p = 0$ beim Summiren auszulassen ist.

Nach den vorausgegangenen Entwicklungen können wir jetzt folgende Eigenschaften der allgemeinen Zetafunction p^{ter} Ordnung feststellen:

Die Zetafunction $Z\begin{vmatrix} g_1 \cdots g_p \\ h_1 \cdots h_p \end{vmatrix}(s)$ ist — solange nicht alle Zahlen $h_1 \cdots h_p$ gleichzeitig ganze Zahlen sind — *ganze transcendente Function von* s.

Sind alle Zahlen h ganze Zahlen, so wird die Zetafunction nur für $s = p$ zur ersten Ordnung unstetig und es ist in der Umgebung dieses Punktes:

$$Z\begin{vmatrix} g \\ h \end{vmatrix}(s) = \frac{2\pi^{\frac{p}{2}}}{\sqrt{\Delta}\,\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} \cdot \frac{1}{s-p} + c_0 + c_1(s-p) + \cdots.$$

Alle Zetafunctionen verschwinden in den Punkten $s = -2, -4, -6 \cdots$.

Für $s = 0$ verschwinden die Zetafunctionen jeder Charakteristik, ausser wenn *alle Zahlen* g *ganze Zahlen* sind. In diesem Falle ist

$$Z\begin{vmatrix} g_1 \cdots g_p \\ h_1 \cdots h_p \end{vmatrix}(0) = -e^{-2\pi i \sum\limits_{\mu} g_\mu h_\mu}.$$

Für specielle Charakteristiken kann *identisches Verschwinden* der Zetafunction eintreten, und zwar nicht nur für jeden Werth von s, sondern auch für alle beliebigen Werthe der Moduln $c_{\mu\nu}$.

Wir begnügen uns, folgende Sätze anzuführen:

Seien die Zahlen $g_1 \cdots g_p$, $h_1 \cdots h_p$ entweder Null oder $\frac{1}{2}$ und derart gewählt, dass

$$4 \sum g_\mu h_\mu \equiv 1 \bmod 2,$$

so verschwindet die Zetafunction identisch bezüglich des Argumentes s und der Moduln $c_{\mu\nu}$ und zwar in der Weise, dass *immer zwei Glieder des zur Definition der Zetafunction dienenden Reihenausdrucks sich gegenseitig aufheben.*

Die angegebenen Charakteristiken sind natürlich diejenigen der *ungraden* Thetafunctionen, der obige Satz kann aber leicht ohne Zuhülfenahme der Lehre von den Thetafunctionen abgeleitet werden.

Eine nothwendige Ergänzung dieses Satzes ist der folgende Satz:

Es giebt ausser den angeführten keine anderen aus rationalen Zahlen gebildeten Charakteristiken von der Art, dass immer zwei oder mehr Glieder des Reihenausdrucks einander aufheben.

§ 5.

Wir wenden uns jetzt zu einer eingehenderen Betrachtung der *Zetafunctionen zweiter Ordnung*, die wegen der schönen ihnen gewidmeten Untersuchungen Kronecker's*) ein besonderes Interesse beanspruchen dürfen.

Kronecker beschäftigt sich nur mit Zetafunctionen, bei denen die Zahlen g_1 und g_2 Null sind, und er löst die beiden folgenden Aufgaben:

Erstens bestimmt er den Werth von $Z\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ h_1 & h_2 \end{vmatrix}(s)_\varphi$ für $s = 2$.

Zweitens bestimmt er die Constante c_0 in der Reihenentwicklung

$$Z\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}(s)_\varphi = \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}\,(s-2)} + c_0 + c_1(s-2) + \cdots.$$

Wir nehmen zunächst die zweite, einfachere, Aufgabe in Angriff. Wir legen dabei in etwas veränderter Bezeichnung der Zetafunction die quadratische Form

$$\varphi = ax^2 + 2bxy + cy^2 \tag{1}$$

zu Grunde mit der Determinante

$$\Delta = ac - b^2. \tag{2}$$

Soll der reelle Theil dieser Form (bei reellen Variablen) positiv sein, so muss sein**):

$$\begin{gathered} (a) > 0, \qquad (c) > 0, \\ (a)\,(c) - (b)^2 > 0. \end{gathered} \tag{3}$$

Wir bezeichnen ferner mit ω_1 und ω_2 die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$az^2 + 2bz + c = 0,$$

also

$$\omega_1 = -\frac{b}{a} + \frac{i\sqrt{\Delta}}{a}, \qquad \omega_2 = -\frac{b}{a} - \frac{i\sqrt{\Delta}}{a}. \tag{4}$$

Es lässt sich dann leicht zeigen, dass — bei unserer Voraussetzung über die Form φ — die reellen Theile von $i\omega_1$ und $i\omega_2$ entgegengesetzte Vorzeichen haben. Wir können also *das Vorzeichen von* $\sqrt{\Delta}$ so festsetzen, dass

$$(i\omega_1) < 0, \qquad (i\omega_2) > 0 \tag{5}$$

ist. Es genügt zu diesem Zweck, das Vorzeichen von $\sqrt{\Delta}$ so zu wählen, dass

$$\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{a}\right) > 0$$

---

*) Kronecker, Zur Theorie der elliptischen Functionen. Berliner Sitzungsberichte 1883—1890.

**) Wir bezeichnen mit (a) den *reellen Theil* einer Grösse a.

wird. Dadurch wird dann auch

$$\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{c}\right) > 0.$$

Wir haben jetzt für die einfachste Zetafunction zweiter Ordnung

$$(6)\qquad Z\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}(s)_\varphi = \sum_{m_1}\sum_{m_2}{}' \frac{1}{(am_1^2 + 2bm_1m_2 + cm_2^2)^{\frac{s}{2}}}$$

die Integraldarstellung

$$(7)\ \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)Z\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}(s)_\varphi = \int_0^\infty dz\cdot z^{\frac{s}{2}-1}\left(\sum_{m_1}\sum_{m_2} e^{-\pi z(am_1^2+2bm_1m_2+cm_2^2)} - 1\right).$$

Für die hier vorkommende zweifach unendliche Thetareihe, oder vielmehr für die allgemeinere

$$(8)\qquad \vartheta\begin{vmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{vmatrix}(0, z)_\varphi$$

$$= \sum_{m_1}\sum_{m_2} e^{-\pi z[a(m_1+g_1)^2 + 2b(m_1+g_1)(m_2+g_2) + c(m_2+g_2)^2] + 2\pi i(m_1h_1 + m_2h_2)}$$

leiten wir eine Transformationsformel ab. Schreiben wir nämlich

$$\vartheta\begin{vmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{vmatrix}(0,z)_\varphi = \sum_{m_1}\sum_{m_2} e^{-\pi a z\left[m_1+g_1+\frac{b}{a}(m_2+g_2)\right]^2 - \frac{\pi z\Delta}{a}(m_2+g_2)^2 + 2\pi i m_1h_1 + 2\pi i m_2h_2},$$

so können wir die Summe nach m_1 als Thetareihe erster Ordnung betrachten und haben dann mit Benutzung der in § 1 eingeführten Bezeichnung:

$$\vartheta\begin{vmatrix} g \\ h \end{vmatrix}(0, z) = \sum_m e^{-\pi z(m+g)^2 + 2\pi i m h},$$

$$\vartheta\begin{vmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{vmatrix}(0, z)_\varphi = \sum_{m_2} e^{-\frac{\pi z\Delta}{a}(m_2+g_2)^2 + 2\pi i m_2h_2}\,\vartheta\begin{vmatrix} g_1 + \frac{b}{a}(m_2+g_2) \\ h_1 \end{vmatrix}(0, az).$$

Es ist aber in Folge der in § 1 angegebenen reciproken Transformation

$$\vartheta\begin{vmatrix} g_1 + \frac{b}{a}(m_2+g_2) \\ h_1 \end{vmatrix}(0, az) = \frac{e^{-2\pi i g_1h_1 - 2\pi i\frac{b}{a}h_1(m_2+g_2)}}{\sqrt{az}}\,\vartheta\begin{vmatrix} h_1 \\ -g_1 - \frac{b}{a}(m_2+g_2) \end{vmatrix}\left(0, \frac{1}{az}\right)$$

$$= \frac{e^{-2\pi i g_1h_1}}{\sqrt{az}}\sum_{m_1} e^{-\frac{\pi}{az}(m_1+h_1)^2 - 2\pi i\frac{b}{a}(m_1+h_1)(m_2+g_2) - 2\pi i m_1g_1}$$

und wir haben somit die folgende Transformation der zweifach unendlichen Thetareihe:

$$(9)\qquad \vartheta\begin{vmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{vmatrix}(0, z)_\varphi$$

$$= \frac{e^{-2\pi i g_1h_1}}{\sqrt{az}}\sum_{m_1}\sum_{m_2} e^{-\frac{\pi}{az}(m_1+h_1)^2 - \frac{\pi z\Delta}{a}(m_2+g_2)^2 - 2\pi i\frac{b}{a}(m_1+h_1)(m_2+g_2) - 2\pi i m_1g_1 + 2\pi i m_2h_2}.$$

Diese Thetareihe convergirt, ebenso wie die ursprüngliche Reihe (8) für *alle positiven Werthe von z.*

Auf die in Formel (7) auftretende Thetareihe angewandt ergiebt dies:

$$\sum_{m_1}\sum_{m_2} e^{-\pi z(am_1^2+2bm_1m_2+cm_2^2)} = \frac{1}{\sqrt{az}}\sum_{m_1}\sum_{m_2} e^{-\frac{\pi}{az}m_1^2-\frac{\pi z\Delta}{a}m_2^2-2\pi i\frac{b}{a}m_1m_2}.$$

Spalten wir hier von der Reihe auf der rechten Seite zuerst die Glieder ab, bei welchen $m_2 = 0$, dann die, bei welchen $m_1 = 0$ ist, so erhalten wir

$$\sum_{m_1}\sum_{m_2} e^{-\pi z\varphi((m))} = \frac{1}{\sqrt{az}}\sum_{m_1} e^{-\frac{\pi}{az}m_1^2} + \frac{1}{\sqrt{az}}\sum_{m_2}{}' e^{-\frac{\pi z\Delta}{a}m_2^2}$$
$$+\frac{1}{\sqrt{az}}\sum_{m_1}\sum_{m_2}{}'' e^{-\frac{\pi}{az}m_1^2-\frac{\pi z\Delta}{a}m_2^2-2\pi i\frac{b}{a}m_1m_2}.$$

worin die Accente andeuten, dass die Summationsbuchstaben nicht den Werth Null annehmen dürfen.

Nun ist aber in Folge der in § 1 benutzten Transformationsformel

$$\frac{1}{\sqrt{az}}\sum_{m_1} e^{-\frac{\pi}{az}m_1^2} = \sum_{m_1} e^{-\pi azm_1^2} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi azn^2},$$

folglich ist

$$\sum_{m_1}\sum_{m_2} e^{-\pi z(am_1^2+2bm_1m_2+cm_2^2)} - 1 = 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi azn^2} + \frac{2}{\sqrt{az}}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi z\Delta}{a}n^2}$$
$$+\frac{1}{\sqrt{az}}\sum_{m_1}\sum_{m_2}{}'' e^{-\frac{\pi}{az}m_1^2-\frac{\pi z\Delta}{a}m_2^2-\frac{2\pi ib}{a}m_1m_2}.$$

Dies führen wir in Formel (7) ein und erhalten sogleich den Ausdruck:

$$(10)\quad \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)Z\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix}(s)_\varphi = \frac{2}{a^{\frac{s}{2}}}\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$$
$$+\frac{2}{\sqrt{a}}\left(\frac{a}{\Delta}\right)^{\frac{s-1}{2}}\pi^{-\frac{s-1}{2}}\Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)\zeta(s-1)+R,$$

worin natürlich $\zeta(s)$ die Riemann'sche Zetafunction bezeichnet und

$$(11)\qquad R = \frac{1}{\sqrt{a}}\sum_{m_1}\sum_{m_2}{}'' e^{-\frac{2\pi ib}{a}m_1m_2}\int_0^\infty dz\cdot z^{\frac{s-1}{2}-1}e^{-\frac{\pi\Delta}{a}m_2^2z-\frac{\pi m_1^2}{az}}.$$

Führen wir hier $\frac{\pi\Delta}{a} m_2^2 z$ an Stelle von z als neue Integrationsvariable ein, so wird

$$(12)\quad R = \frac{1}{\sqrt{a}} \pi^{-\frac{s-1}{2}} \left(\frac{a}{\Delta}\right)^{\frac{s-1}{2}} \sum_{m_1} \sum_{m_2}{}'' \frac{e^{-\frac{2\pi i b}{a} m_1 m_2}}{(m_2^2)^{\frac{s-1}{2}}} \int_0^\infty dz \cdot z^{\frac{s-1}{2}-1} e^{-z-\frac{\pi^2 \Delta \cdot m_1^2 m_2^2}{a^2 z}}.$$

Die hier auftretenden Integrale sind von der Form

$$(13)\qquad \int_0^\infty dz \cdot z^{\alpha-1} e^{-z-\frac{t}{z}},$$

es ist aber vielleicht nicht überflüssig zu bemerken, dass der *Integrationsweg* keineswegs die Axe der positiven reellen Zahlen ist, sondern eine Gerade, die den Nullpunkt mit dem Punkt $\frac{\Delta}{a}$ verbindet. Damit die Integrale existiren, muss der reelle Theil von $\frac{\Delta}{a}$ positiv sein, was jederzeit erreichbar ist. Dann behalten aber die Integrale für jeden Werth von s ihre Gültigkeit.

Die Integrale (13) lassen sich durch Bessel'sche Functionen ausdrücken, was wir jedoch hier nicht weiter ausführen wollen. Vielmehr benutzen wir eine schon von Kummer*) angegebene Umformung, nämlich

$$(14)\quad \int_0^\infty dz \cdot z^{\alpha-1} e^{-z-\frac{t}{z}} = \frac{2^{2\alpha+1}\sqrt{\pi}\, t^\alpha e^{-2\sqrt{t}}}{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)} \int_0^\infty dz (z+z^2)^{\alpha-\frac{1}{2}} e^{-4z\sqrt{t}},$$

worin der reelle Theil von $\sqrt{t}$ positiv zu nehmen ist.

Hiermit erhalten wir:

$$R = \frac{2^s \pi^{\frac{s}{2}}}{a^{\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \sum_{m_1} \sum_{m_2}{}'' (m_1^2)^{\frac{s-1}{2}} e^{-\frac{2\pi i b}{a} m_1 m_2 - \frac{2\pi\sqrt{\Delta}}{a} |m_1 m_2|} \int_0^\infty dz \cdot (z+z^2)^{\frac{s}{2}-1} e^{-\frac{4\pi\sqrt{\Delta}}{a} |m_1 m_2| z},$$

worin $|m_1 m_2|$ wie üblich den absoluten Werth bezeichnet. Lässt man hier m_1 und m_2 gesondert die Werthe von 1 bis ∞ und von -1 bis $-\infty$ durchlaufen, so zerfällt R in vier Doppelreihen, die man paarweise zusammenfassen kann. Dabei treten, wie man sofort sieht, in den Exponenten vor den Integralen die oben eingeführten Lösungen ω_1 und ω_2 auf, und wenn wir

*) Kummer, De integralibus quibusdam definitis. Crelle, Journal Bd. 17, S. 232.

(15) $$q_1 = e^{\pi i \omega_1}, \qquad q_2 = e^{-\pi i \omega_2}$$

setzen, so sind nach (5) die *absoluten Werthe von q_1 und q_2 stets kleiner als Eins.*

Gehen wir jetzt auf Formel (10) zurück, so erhalten wir folgenden Ausdruck für unsere Zetafunction zweiter Ordnung:

(16) $$Z\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}(s)_\varphi = \frac{2}{a^{\frac{s}{2}}}\zeta(s) + \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}\left(\frac{a}{\Delta}\right)^{\frac{s-1}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\zeta(s-1)$$
$$+\frac{2^{s+1}\pi^s}{a^{\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^2}\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty} n_1^{s-1}\left(q_1^{2n_1n_2}+q_2^{2n_1n_2}\right)\int_0^{\infty} dz\,(z+z^2)^{\frac{s}{2}-1}e^{-\frac{4\pi\sqrt{\Delta}}{a}n_1n_2 z}.$$

Hiermit können wir aber die im Eingang des Paragraphen gestellte Aufgabe, den Anfang der Reihenentwicklung in der Umgebung des Punktes $s=2$ zu finden, leicht lösen.

Für $s=2$ haben die Integrale den Werth $\frac{a}{4\pi\sqrt{\Delta}}\cdot\frac{1}{n_1n_2}$ und die nach n_2 genommenen Summen lassen sich ausführen.

Ferner ist

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

und es gelten in der Umgebung von $s=2$ die bekannten Reihenentwicklungen:

$$\left(\frac{a}{\Delta}\right)^{\frac{s-1}{2}} = \sqrt{\frac{a}{\Delta}}\left[1+\frac{s-2}{2}\log\left(\frac{a}{\Delta}\right)+\cdots\right],$$

$$\frac{\Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} = \sqrt{\pi}\left[1-(s-2)\log 2+\cdots\right],$$

$$\zeta(s-1) = \frac{1}{s-2}+\gamma+\cdots,$$

worin

$$\gamma = 0{,}57721566\cdots$$

die *Euler'sche Constante* bedeutet.

Damit erhalten wir schliesslich aus (16) übereinstimmend mit Herrn Weber*) in der Umgebung von $s=2$:

---

*) Weber, Math. Annalen Bd. 33, S. 395. Vgl. Franel, Sur une formule fondamentale de Kronecker. Math. Annalen Bd. 48. Bei Kronecker (Berl. Sitzungsberichte, 1889 S. 185) lautet — in unserer Schreibweise — das dritte Glied

$$\frac{\pi}{\sqrt{\Delta}}\log\left(\frac{a}{2\Delta}\right).$$

$$\lim_{s=2}\left(Z\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix}(s)_\varphi - \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}(s-2)}\right) \tag{17}$$

$$= \frac{\pi^2}{3a} + \frac{2\pi\gamma}{\sqrt{\Delta}} + \frac{\pi}{\sqrt{\Delta}}\log\left(\frac{a}{4\Delta}\right) - \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}\log\prod_{n=1}^{\infty}(1-q_1^{2n})(1-q_2^{2n}).$$

oder mit Einführung der Function

$$\eta(\omega) = q^{\frac{1}{12}}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})$$

$$\lim_{s=2}\left(Z\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix}(s)_\varphi - \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}(s-2)}\right) = \frac{2\pi\gamma}{\sqrt{\Delta}} + \frac{\pi}{\sqrt{\Delta}}\log\left(\frac{a}{4\Delta}\right) - \frac{2\pi}{\sqrt{\Delta}}\log\eta(\omega_1)\,\eta(-\omega_2).$$

Die Formel (16) liefert aber auch die Werthe der Zetafunction für $s = 4, 6, \cdots$, denn die Integrale auf der rechten Seite lassen sich für diese Fälle auswerthen. So erhalten wir

$$Z\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix}(4)_\varphi = \frac{\pi^4}{45a^2} + \frac{\pi a}{\Delta^{\frac{3}{2}}}\zeta(3) + \frac{2\pi^2}{\Delta}[\psi(q_1)+\psi(q_2)] + \frac{\pi a}{\Delta^{\frac{3}{2}}}[\chi(q_1)+\chi(q_2)],$$

worin

$$\psi(q) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}}{n^2(1-q^{2n})^2},$$

$$\chi(q) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{q^{2n}}{n^3(1-q^{2n})}.$$

§ 6.

Nach den Entwicklungen des vorigen Paragraphen lässt sich die entsprechende Aufgabe für die Function

$$Z\begin{vmatrix}0 & 0\\ h_1 & h_2\end{vmatrix}(s)_\varphi = \sum_{m_1}\sum_{m_2}{}' \frac{e^{2\pi i(m_1h_1+m_2h_2)}}{(am_1^2+2bm_1m_2+cm_2^2)^{\frac{s}{2}}} \tag{1}$$

unschwer erledigen. Wir dürfen dabei die Zahlen h_1 und h_2 zwischen Null und Eins annehmen.

Auf die in der Integraldarstellung

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)Z\begin{vmatrix}0 & 0\\ h_1 & h_2\end{vmatrix}(s)_\varphi = \int_0^\infty dz\cdot z^{\frac{s}{2}-1}\left(\vartheta\begin{vmatrix}0 & 0\\ h_1 & h_2\end{vmatrix}(0,z)_\varphi - 1\right)$$

auftretende Thetareihe wenden wir die Transformationsformel (9) an und erhalten ganz ähnlich wie oben

$$\vartheta\begin{vmatrix}0 & 0\\ h_1 & h_2\end{vmatrix}(0,z)_\varphi - 1 = \sum_{m_1}{}' e^{-\pi a z m_1^2 + 2\pi i m_1 h_1}$$
$$+\frac{1}{\sqrt{az}}\sum_{m_1}\sum_{m_2}{}' e^{-\frac{\pi}{az}(m_1+h_1)^2 - \frac{\pi z \Delta}{a} m_2^2 - \frac{2\pi i b}{a}(m_1+h_1)m_2 + 2\pi i m_2 h_2},$$

wobei in der ersten Summe der Werth $m_1 = 0$, in der zweiten (Doppelsumme) der Werth $m_2 = 0$ auszulassen ist.

Wir erhalten damit

$$(2)\qquad \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)Z\begin{vmatrix}0 & 0\\ h_1 & h_2\end{vmatrix}(s)_\varphi = \frac{1}{a^{\frac{s}{2}}}\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)Z\begin{vmatrix}0\\ h_1\end{vmatrix}(s) + R,$$

worin die Zetafunction *erster* Ordnung

$$Z\begin{vmatrix}0\\ h_1\end{vmatrix}(s) = \sum_m{}' \frac{e^{2\pi i m h_1}}{(m^2)^{\frac{s}{2}}}$$

auftritt und

$$R = \frac{1}{\sqrt{a}}\sum_{m_1}\sum_{m_2}{}' e^{-\frac{2\pi i b}{a}(m_1+h_1)m_2 + \pi i m_2 h_2}\int_0^\infty dz\cdot z^{\frac{s-1}{2}-1} e^{-\frac{\pi}{az}(m_1+h_1)^2 - \frac{\pi z \Delta}{a} m_2^2}.$$

Hier führen wir wieder $\frac{\pi\Delta}{a} m_2^2 z$ als neue Integrationsvariable ein und wenden dann auf die Integrale die Kummer'sche Umformung (14) an. Dann erhalten wir

$$R = \frac{2^s \pi^{\frac{s}{2}}}{a^{\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\sum_{m_1}\sum_{m_2}{}' [(m_1+h_1)^2]^{\frac{s-1}{2}} e^{-\frac{2\pi i b}{a}(m_1+h_1)m_2 - \frac{2\pi\sqrt{\Delta}}{a}|(m_1+h_1)m_2| + 2\pi i m_2 h_2}$$
$$\cdot\int_0^\infty dz(z+z^2)^{\frac{s}{2}-1} e^{-\frac{4\pi\sqrt{\Delta}}{a}|(m_1+h_1)m_2| z}.$$

R spaltet sich in sechs Summen, wenn wir zuerst die Glieder mit $m_1 = 0$ für positive und negative Werthe von m_2 zusammenfassen und dann m_1 und m_2 gesondert die Werthe von 1 bis ∞ und -1 bis $-\infty$ durchlaufen lassen. Dabei treten wieder die Grössen

$$q_1 = e^{\pi i \omega_1}, \qquad q_2 = e^{-\pi i \omega_2}$$

auf und ferner die Verbindungen

$$(3)\qquad \begin{aligned} h_2 + h_1\omega_1 &= u_1,\\ h_2 + h_1\omega_2 &= u_2 \end{aligned}$$

und wir erhalten den folgenden Ausdruck, der der Formel (16) des vorigen Paragraphen entspricht:

$$\mathsf{Z}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ h_1 & h_2 \end{vmatrix}(s)_\varphi = \frac{1}{a^{\frac{s}{2}}}\mathsf{Z}\begin{vmatrix} 0 \\ h_1 \end{vmatrix}(s)$$

$$+\frac{2^s\pi^s}{a^{\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^2}\Bigg[\sum_{n=1}^{\infty} h_1^{s-1}(e^{2\pi i n u_1}+e^{-2\pi i n u_2})\int_0^\infty dz(z+z^2)^{\frac{s}{2}-1}e^{-\frac{4\pi\sqrt{\Delta}}{a}h_1 n z}$$

$$+\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}(n_1+h_1)^{s-1}(q_1^{2n_1n_2}e^{2\pi i n_2 u_1}+q_2^{2n_1n_2}e^{-2\pi i n_2 u_2})\int_0^\infty dz(z+z^2)^{\frac{s}{2}-1}e^{-\frac{4\pi\sqrt{\Delta}}{a}(n_1+h_1)n_2 z}$$

$$+\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}(n_1-h_1)^{s-1}(q_1^{2n_1n_2}e^{-\pi i n_2 u_1}+q_2^{2n_1n_2}e^{2\pi i n_2 u_2})\int_0^\infty dz(z+z^2)^{\frac{s}{2}-1}e^{-\frac{4\pi\sqrt{\Delta}}{a}(n_1-h_1)n_2 z}\Bigg].$$

Nehmen wir jetzt $s=2$, so ist

$$\mathsf{Z}\begin{vmatrix} 0 \\ h_1 \end{vmatrix}(2) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi n h_1}{n^2} = 2\pi^2\left(h_1^2-h_1+\frac{1}{6}\right);$$

ferner lassen sich die Integrale und die nach n_2 genommenen Summen auswerthen. Wir erhalten dann

$$\mathsf{Z}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ h_1 & h_2 \end{vmatrix}(2)_\varphi = \frac{2\pi^2}{a}\left(h_1^2-h_1+\frac{1}{6}\right)$$

$$-\frac{\pi}{\sqrt{\Delta}}\Bigg[\log(1-e^{2\pi i u_1})(1-e^{-2\pi i u_2})+\sum_{n=1}^{\infty}\log(1-q_1^{2n}e^{2\pi i u_1})(1-q_2^{2n}e^{-2\pi i u_2})$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\log(1-q_1^{2n}e^{-2\pi i u_1})(1-q_2^{2n}e^{2\pi i u_2}\Bigg].$$

Nun ist

$$\log(1-e^{2\pi i u_1})(1-e^{-2\pi i u_2}) = \log(4\sin\pi u_1\sin\pi u_2)+\pi i(u_1-u_2)$$

und

$$u_1-u_2 = h_1(\omega_1-\omega_2) = 2ih_1\frac{\sqrt{\Delta}}{a}$$

also

$$\mathsf{Z}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ h_1 & h_2 \end{vmatrix}(2)_\varphi = \frac{2\pi^2}{a}\left(h_1^2+\frac{1}{6}\right)-\frac{\pi}{\sqrt{\Delta}}\log 2\sin\pi u_1\prod_1^\infty(1-2q_1^{2n}\cos 2\pi u_1+q_1^{4n})$$

$$-\frac{\pi}{\sqrt{\Delta}}\log 2\sin\pi u_2\prod_1^\infty(1-2q_2^{2n}\cos 2\pi u_2+q_2^{4n})$$

und hier können wir durch

$$\vartheta(u, \omega) = 2q^{\frac{1}{4}} \prod_1^\infty (1-q^{2n}) \cdot \sin \pi u \prod_1^\infty (1-2q^{2n} \cos 2\pi u + q^{4n})$$

und

$$\prod_1^\infty (1-q^{2n}) = \frac{q^{-\frac{1}{12}}}{(2\pi)^{\frac{1}{3}}} \vartheta'(0, \omega)^{\frac{1}{3}} = q^{-\frac{1}{12}} \eta(\omega)$$

die *elliptische Thetafunction* einführen und erhalten schliesslich, wenn wir noch berücksichtigen, dass

$$\log q_1 + \log q_2 = \pi i(\omega_1 - \omega_2) = -2\pi \frac{\sqrt{\Delta}}{a}$$

ist, die wichtige *Kronecker'sche Formel:*

$$(4)\quad Z\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ h_1 & h_1 \end{vmatrix}(2)_\varphi = \frac{2\pi^2}{a} h_1^2 - \frac{2\pi}{3\sqrt{\Delta}} \log(2\pi) - \frac{\pi}{\sqrt{\Delta}} \log \frac{\vartheta(u_1, \omega_1)\vartheta(u_2, -\omega_2)}{\vartheta'(0, \omega_1)^{\frac{1}{3}} \vartheta'(0, -\omega_2)^{\frac{1}{3}}},$$

oder in der Bezeichnung Kronecker's*):

$$Z\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ h_1 & h_2 \end{vmatrix}(2)_\varphi = -\frac{\pi}{\sqrt{\Delta}} \log \Lambda(h_1, h_2, \omega_1, -\omega_2).$$

Auch hier führt die Benutzung der Function $\eta(\omega)$ zu einem etwas einfacheren Ausdruck, nämlich

$$Z\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ h_1 & h_2 \end{vmatrix}(2)_\varphi = \frac{2\pi^2}{a} h_1^2 - \frac{\pi}{\sqrt{\Delta}} \log \frac{\vartheta(u_1, \omega_1)\vartheta(u_2, -\omega_2)}{\eta(\omega_1)\eta(-\omega_2)}.$$

§ 7.

Wir können die eben abgeleitete Formel von Kronecker dazu benutzen, um den Werth der allgemeinen Zetafunction zweiter Ordnung $Z\begin{vmatrix} g_1 & g_2 \\ h_1 & h_2 \end{vmatrix}(s)_\varphi$ im Punkte $s = 2$ zu bestimmen, wenn die Zahlen g_1 und g_2 *beliebige rationale Zahlen* sind.

Wollen wir zuerst die entsprechende Aufgabe für die Zetafunction *erster* Ordnung lösen, so handelt es sich hier um die Bestimmung des Functionswerthes für $s = 1$, also um die Reihe

$$(1)\qquad Z\begin{vmatrix} g \\ h \end{vmatrix}(1) = \sum_m \frac{e^{2\pi i h m}}{|m+g|},$$

wenn darin g rationale Zahl, also etwa

$$g = \frac{\gamma}{r} \qquad (\gamma < r)$$

ist. Wir können dabei γ von Null verschieden annehmen.

*) Kronecker, Berliner Sitzungsberichte 1889, S. 53.

Wir gehen aus von

$$(2)\qquad Z\left|\begin{matrix}0\\h\end{matrix}\right|(1)=\sum_m{}' \frac{e^{2\pi i h m}}{|m|}=-2\log(2\sin\pi h),$$

verstehen unter ϱ die r^{te} Einheitswurzel

$$(3)\qquad \varrho=e^{\frac{2\pi i}{r}},$$

unter ν irgend eine ganze Zahl und haben dann offenbar

$$\sum_m{}' \frac{\varrho^{\nu(m-\gamma)}e^{2\pi i h m}}{|m|}=-2\varrho^{-\nu\gamma}\log 2\sin\pi\left(h+\frac{\nu}{r}\right)\cdot$$

Summiren wir hier nach ν über ein vollständiges Restesystem mod r, so sind die Summen $\sum\limits_\nu \varrho^{\nu(m-\gamma)}$ sämmtlich Null, ausser wenn $m-\gamma$ durch r theilbar ist. In diesem Falle haben sie den Werth r. Wir finden also

$$r\sum_m\frac{e^{2\pi i h(mr+\gamma)}}{|mr+\gamma|}=e^{2\pi i h\gamma}Z\left|\begin{matrix}\frac{\gamma}{r}\\hr\end{matrix}\right|(1)=-2\sum_{\nu=0}^{r-1}\varrho^{-\nu\gamma}\log 2\sin\pi\left(h+\frac{\nu}{r}\right),$$

woraus sich leicht ergiebt, weil $\sum\limits_{\nu=0}^{r-1}\varrho^{-\nu\gamma}=0$ ist:

$$(4)\qquad Z\left|\begin{matrix}\frac{\gamma}{r}\\h\end{matrix}\right|(1)=-2\sum_{\nu=0}^{r-1}\varrho^{-(\nu+h)\gamma}\log\sin\frac{\pi(h+\nu)}{r}.$$

In ähnlicher Weise behandeln wir jetzt die Zetafunction zweiter Ordnung für $s=2$. Es seien

$$g_1=\frac{\gamma_1}{r},\qquad g_2=\frac{\gamma_2}{r},$$

worin γ_1 und γ_2 ganze Zahlen sind, die wir kleiner als die ganze Zahl r und wenigstens eine als von Null verschieden voraussetzen dürfen.

Wir setzen in der Formel (4) des vorigen Paragraphen für die Zetafunction auf der linken Seite die Reihe und haben, wenn wieder ν_1 und ν_2 irgend welche ganze Zahlen bedeuten

$$\sum_{m_1}\sum_{m_2}{}' \varrho^{\nu_1(m_1-\gamma_1)+\nu_2(m_2-\gamma_2)}\cdot\frac{e^{2\pi i(m_1h_1+m_2h_2)}}{am_1^2+2bm_1m_2+cm_2^2}$$

$$=\varrho^{-(\nu_1\gamma_1+\nu_2\gamma_2)}\left[\frac{2\pi^2}{a}\left(h_1+\frac{\nu_1}{r}\right)^2-\frac{2\pi}{3\sqrt{\Delta}}\log 2\pi\right.$$

$$\left.-\frac{\pi}{\sqrt{\Delta}}\log\frac{\vartheta\left(u_1+\frac{\nu_2+\nu_1\omega_1}{r},\omega_1\right)\vartheta\left(u_2+\frac{\nu_2+\nu_1\omega_2}{r},-\omega_2\right)}{\vartheta'(0,\omega_1)^{\frac13}\,\vartheta'(0,-\omega_2)^{\frac13}}\right].$$

Hier summiren wir nach ν_1 und ν_2 über vollständige Restesysteme mod r und erhalten für die linke Seite

$$r^2 \sum_{m_1} \sum_{m_2} \frac{e^{2\pi i (r m_1 + \gamma_1) h_1 + 2\pi i (r m_2 + \gamma_2) h_2}}{a(r m_1 + \gamma_1)^2 + 2b(r m_1 + \gamma_1)(r m_2 + \gamma_2) + c(r m_2 + \gamma_2)^2} = e^{2\pi i (\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2)} Z \begin{vmatrix} \frac{\gamma_1}{r} & \frac{\gamma_2}{r} \\ r h_1 & r h_2 \end{vmatrix} (2),$$

und haben somit nach einiger Ueberlegung folgende Ergebnisse:

1) Ist γ_2 *von Null verschieden,* so ist $\sum_{\nu_2} \varrho^{-\nu_2 \gamma_2} = 0$, also

$$(5) \qquad Z \begin{vmatrix} \frac{\gamma_1}{r} & \frac{\gamma_2}{r} \\ h_1 & h_2 \end{vmatrix} (2)_\varphi$$

$$= -\frac{\pi}{\sqrt{\Delta}} \sum_{\nu_1 = 0}^{r-1} \sum_{\nu_2 = 0}^{r-1} \varrho^{-(\nu_1 + h_1)\gamma_1 - (\nu_2 + h_2)\gamma_2} \log \vartheta\left(\frac{u_1 + \nu_2 + \nu_1 \omega_1}{r}, \omega_1\right) \vartheta\left(\frac{u_2 + \nu_2 + \nu_1 \omega_2}{r}, -\omega_2\right).$$

2) Ist $\gamma_2 = 0$, also jedenfalls γ_1 von Null verschieden, so ist $\sum_{\nu_1 = 0}^{r-1} \varrho^{-\nu_1 \gamma_1} = 0$, also

$$\varrho^{\gamma_1 h_1} Z \begin{vmatrix} \frac{\gamma_1}{r} & 0 \\ h_1 & h_2 \end{vmatrix} (2)_\varphi = \frac{2\pi^2}{ar} (2 h_1 c_1 + c_2)$$

$$- \frac{\pi}{\sqrt{\Delta}} \sum_{\nu_1 = 0}^{r-1} \sum_{\nu_2 = 0}^{r-1} \varrho^{-\nu_1 \gamma_1} \log \vartheta\left(\frac{u_1 + \nu_1 \omega_1}{r} + \frac{\nu_2}{r}, \omega_1\right) \vartheta\left(\frac{u_2 + \nu_1 \omega_2}{r} + \frac{\nu_2}{r}, -\omega_2\right),$$

worin

$$c_1 = \sum_{\nu_1 = 1}^{r-1} \nu_1 \varrho^{-\nu_1 \gamma_1} = \frac{r}{\varrho^{-\gamma_1} - 1},$$

$$c_2 = \sum_{\nu_1 = 0}^{r-1} \nu_1^2 \varrho^{-\nu_1 \gamma_1} = \frac{r^2}{\varrho^{-\gamma_1} - 1} - \frac{2 r \varrho^{-\gamma_1}}{(\varrho^{-\gamma_1} - 1)^2}.$$

Diese Formel lässt sich durch Ausführung der nach ν_2 zu nehmenden Summe vereinfachen. Es ist nämlich

$$(6) \qquad \prod_{\nu = 0}^{r-1} \vartheta\left(u + \frac{\nu}{r}, \omega\right) = \frac{\eta(\omega)^r}{\eta(r\omega)} \vartheta(ur, r\omega),$$

folglich

$$\sum_{\nu_1 = 0}^{r-1} \sum_{\nu_2 = 0}^{r-1} \varrho^{-\nu_1 \gamma_1} \log \vartheta\left(\frac{u + \nu_1 \omega_1}{r} + \frac{\nu_2}{r}, \omega\right) = \sum_{\nu_1 = 0}^{r-1} \varrho^{-\nu_1 \gamma_1} \log \vartheta(u + \nu_1 \omega, r\omega),$$

also haben wir schliesslich

$$(7)\qquad \varrho^{\gamma_1 h_1} Z \begin{vmatrix} \frac{\gamma_1}{r} & 0 \\ h_1 & h_2 \end{vmatrix} (2)_\varphi$$

$$= \frac{2\pi^2}{ar}(2h_1 c_1 + c_2) - \frac{\pi}{\sqrt{\Delta}} \sum_{\nu=0}^{r-1} \varrho^{-\nu\gamma_1} \log \vartheta(u_1 + \nu\omega_1, r\omega_1)\, \vartheta(u_2 + \nu\omega_2, -r\omega_2).$$

Die Formeln (5) und (7) lassen sich verificiren, indem man sie in die für jedes s geltende Formel

$$\sum_{\gamma_1=0}^{r-1} \sum_{\gamma_2=0}^{r-1} e^{2\pi i(\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2)} Z \begin{vmatrix} \frac{\gamma_1}{r} & \frac{\gamma_2}{r} \\ h_1 r & h_2 r \end{vmatrix} (s)_\varphi = r^2 Z \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ h_1 & h_2 \end{vmatrix} (s)_\varphi$$

einführt und neben der Gleichung (6) noch die folgende:

$$\prod_{\nu=0}^{r-1} \vartheta\left(u + \frac{\nu\omega}{r}, \omega\right) = i^{r-1} e^{-\pi i u(r-1)} q^{-\frac{(r-1)(2r-1)}{6r}} \frac{\eta(\omega)^r}{\eta\left(\frac{\omega}{r}\right)} \vartheta\left(u, \frac{\omega}{r}\right)$$

benutzt.

Die eben abgeleiteten Formeln sind ebenso wie die Formeln Kronecker's unsymmetrisch in den Constanten g, h, a, b, c der Zetafunction. Es ergiebt sich aber aus der Invariantennatur der Zetafunction ohne Weiteres, dass diese Formeln ungeändert bleiben müssen gegenüber der Aequivalenz:

$$(g_1\, g_2\, h_1\, h_2\, a\, b\, c\, \omega_1\, \omega_2\, u_1\, u_2) \sim (g_2\, g_1\, h_2\, h_1\, c\, b\, a\, \omega_1'\, \omega_2'\, u_1'\, u_2')$$

wo

$$\omega_1' = -\frac{b}{c} + \frac{i\sqrt{\Delta}}{c} = \frac{1}{\omega_2}, \qquad \omega_2' = -\frac{b}{c} - \frac{i\sqrt{\Delta}}{c} = \frac{1}{\omega_1},$$

$$u_1' = h_1 + h_2\omega_1' = \frac{u_2}{\omega_2}, \qquad u_2' = h_1 + h_2\omega_2' = \frac{u_1}{\omega_1}.$$

§ 8.

Die in den letzten Paragraphen gegebene Ableitung der Sätze Kronecker's über die Zetafunctionen zweiter Ordnung beruht auf einer bestimmten Transformation der zweifach unendlichen Thetareihe. Wir können diese Methode ihrem Wesen nach unmittelbar auf Zetafunctionen höherer Ordnung übertragen; es genügt dabei, wenn wir uns auf die einfachste Charakteristik $\begin{vmatrix} 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 & 0 \cdots 0 \end{vmatrix}$ beschränken. Es handelt sich also um die Zetafunction

$$(1)\qquad Z \begin{vmatrix} 0 \cdots 0 \\ 0 \cdots 0 \end{vmatrix} (s)_\varphi = \sum_{m_1} \cdots \sum_{m_p}{}' \frac{1}{\varphi(m)^{\frac{s}{2}}},$$

worin

$$\varphi((m)) = \sum_{\mu=1}^{p} \sum_{\nu=1}^{p} c_{\mu\nu} m_\mu m_\nu .$$

Wir wollen diese Function etwas einfacher durch

$$Z^{(p)}(s)_\varphi$$

bezeichnen und haben also nach § 4:

$$(2) \qquad \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) Z^{(p)}(s)_\varphi = \int_0^\infty dz \cdot z^{\frac{s}{2}-1} \left(\sum_{m_1} \cdots \sum_{m_p} e^{-\pi z \varphi((m))} - 1 \right).$$

Von der hier auftretenden p-fach unendlichen Thetareihe giebt es eine Reihe von p linearen Transformationen, die wir ähnlich wie in § 5 ableiten, indem wir die Summe nach q Summationsbuchstaben $m_1 \cdots m_q$ zu einer Thetareihe q^{ter} Ordnung zusammenfassen und auf sie die reciproke Transformation (§ 4, Formel (3)) anwenden.

Die letzte Transformation in dieser Reihe ist natürlich die reciproke Transformation selbst. Man erhält dann für die q^{te} Transformation*) folgendes System von Formeln:

Es bedeute Δ_q die Determinante

$$(3) \qquad \Delta_q = \sum \pm c_{11} c_{22} \cdots c_{qq}$$

und es sei

$$(4) \qquad c_{\varkappa\lambda}^{(q)} = \frac{1}{\Delta_q} \frac{\partial \Delta_q}{\partial c_{\varkappa\lambda}}, \qquad \varkappa, \lambda = 1, 2, \cdots q$$

dann ist

$$(5) \qquad \sum_{m_1} \cdots \sum_{m_p} e^{-\pi z \varphi((m))} = \frac{1}{\sqrt{\Delta_q} \cdot z^{\frac{q}{2}}} \cdot \sum_{m_1} \cdots \sum_{m_p} e^{2\pi i \psi((m)) - \frac{\pi}{z} \varphi_1((m)) - \pi z \varphi_2((m))},$$

worin $\sqrt{\Delta_q}$ mit *positiv reellem* Theil zu nehmen ist und ferner

$\psi((m))$ bilineare Form von $m_1 m_2 \cdots m_p$,

$\varphi_1((m))$ quadratische Form von $m_1 \cdots m_q$,

$\varphi_2((m))$ quadratische Form von $m_{q+1} \cdots m_p$.

Und zwar ist

$$(6) \qquad \psi((m)) = \sum_{\mu=1}^{q} \sum_{\nu=q+1}^{p} d_{\mu\nu} m_\mu m_\nu, \quad \text{wo} \quad d_{\mu\nu} = \sum_{\varkappa=1}^{q} c_{\varkappa\mu}^{(q)} c_{\varkappa\nu},$$

$$(7) \qquad \varphi_1((m)) = \sum_{\mu=1}^{q} \sum_{\nu=1}^{q} c_{\mu\nu}^{(q)} m_\mu m_\nu,$$

*) Es ist die Transformation $T_{III}(q)$ nach der Terminologie der Herren Krazer und Prym. (Neue Grundlagen . . . S. 86.)

$$(8)\qquad \varphi_2((m)) = \sum_{\mu=q+1}^{p}\sum_{\nu=q+1}^{p} e_{\mu\nu} m_\mu m_\nu, \quad \text{wo} \quad e_{\mu\nu} = c_{\mu\nu} - \sum_{\varkappa=1}^{q}\sum_{\lambda=1}^{q} c_{\varkappa\lambda}^{(q)} c_{\varkappa\mu} c_{\lambda\nu}.$$

Ich spalte jetzt die p-fache Reihe auf der rechten Seite von Formel (5), indem ich zuerst $m_{q+1}, m_{q+2}, \cdots m_p$ und dann $m_1 \cdots m_q$ gleichzeitig Null setze. Dann wird

$$\begin{aligned}\sum_{m_1}\cdots\sum_{m_p} e^{-\pi z\varphi((m))} &= \frac{1}{\sqrt{\Delta_q}\cdot z^{\frac{q}{2}}}\sum_{m_1}\cdots\sum_{m_q} e^{-\frac{\pi}{z}\varphi_1((m))} \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\Delta_q}\cdot z^{\frac{q}{2}}}\sum_{m_{q+1}}\cdots\sum_{m_p}{}' e^{-\pi z\varphi_2((m))} \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\Delta_q}\cdot z^{\frac{q}{2}}}\sum_{m_1}\cdots\sum_{m_p}{}'' e^{2\pi i\psi((m)) - \frac{\pi}{z}\varphi_1((m)) - \pi z\varphi_2((m))},\end{aligned}$$

worin die Accente bei der letzten Reihe andeuten, dass weder gleichzeitig $m_1 \cdots m_q$ noch $m_{q+1} \cdots m_p$ Null sein dürfen.

Hier ist aber offenbar das erste Glied auf der rechten Seite in Folge der in § 4 angewandten Transformationsformel

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta_q}\cdot z^{\frac{q}{2}}}\sum_{m_1}\cdots\sum_{m_q} e^{-\frac{\pi}{z}\varphi_1((m))} = \sum_{m_1}\cdots\sum_{m_q} e^{-\pi z\bar{\varphi}_q((m))},$$

wobei

$$(9)\qquad \bar{\varphi}_q((m)) = \sum_{\mu=1}^{q}\sum_{\nu=1}^{q} c_{\mu\nu} m_\mu m_\nu$$

und wenn wir jetzt auf (2) zurückgehen, so ergiebt sich sofort:

$$(10)\qquad Z^{(p)}(s)_\varphi = Z^{(q)}(s)_{\bar{\varphi}_q} + \frac{\pi^{\frac{q}{2}}}{\sqrt{\Delta_q}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{s-q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} Z^{(p-q)}(s-q)_{\varphi_2} + R_q,$$

wo jetzt

$$R_q = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\sqrt{\Delta_q}}\sum_{m_1}\cdots\sum_{m_p}{}'' e^{2\pi i\psi((m))}\int_0^\infty dz\cdot z^{\frac{s-q}{2}-1}\cdot e^{-\frac{\pi}{z}\varphi_1((m)) - \pi z\varphi_2((m))}.$$

Diese Formel entspricht, wie man sieht, vollkommen der Formel (10) in § 5. Die Function $Z^{(p)}(s)_\varphi$ wird nur unstetig für $s = p$; diese Unstetigkeit steckt in dem zweiten Glied auf der rechten Seite, während die Unstetigkeit des ersten Gliedes im Punkte q durch das gleichzeitige Unstetigwerden von $\Gamma\left(\frac{s-q}{2}\right)$ aufgehoben wird. Es ist also R_q *ganze transcendente Function von* s.

Wir stellen uns, wie im Falle $p = 2$, die Aufgabe, das constante Glied der Reihenentwicklung im Punkte p:

$$(11) \qquad Z\left|{}^{p}_{s}\right|_{\varphi} = \frac{2\pi^{\frac{p}{2}}}{\sqrt{\Delta}\,\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} \cdot \frac{1}{s-p} + c_0 + c_1(s-p) + \cdots$$

zu bestimmen.

Wir nehmen die bisher unbestimmte ganze Zahl q gleich $p-1$ an. Dann ist zunächst Δ_q die zu c_{pp} gehörende Unterdeterminante der Determinante

$$\Delta = \sum \pm c_{11} c_{22} \cdots c_{pp},$$

also in der im § 4 benutzten Bezeichnung

$$\Delta_q = c'_{pp} \cdot \Delta,$$

und aus einem bekannten Determinantensatz folgt

$$c'_{pp} \cdot c'^{(q)}_{\mu\nu} = c'_{pp} c'_{\mu\nu} - c'_{p\mu} \cdot c'_{p\nu}.$$

Wenn wir jetzt mit $f_{p-1}((m))$ die *lineare* Form von $m_1 \cdots m_{p-1}$:

$$(12) \qquad f_{p-1}((m)) = \sum_{1}^{p-1} c'_{p\mu} m_\mu,$$

ferner mit $\Phi_{p-1}((m))$ die *quadratische* Form derselben Grössen:

$$(13) \qquad \Phi_{p-1}((m)) = \sum_{1}^{p-1} \sum_{1}^{p-1} c'_{\mu\nu} m_\mu m_\nu$$

bezeichnen, so ergiebt sich aus (6), (7) und (8):

$$(14) \qquad \psi((m)) = -\frac{m_p}{c'_{pp}} f_{p-1}((m)),$$

$$\varphi_1((m)) = \Phi_{p-1}((m)) - \frac{1}{c'_{pp}} f_{p-1}((m))^2$$

oder auch

$$(15) \qquad \varphi_1((m)) = \frac{\Delta_{p-1}}{c'_{pp}},$$

wo

$$(16) \qquad \Delta_{p-1} = c'_{pp} \Phi_{p-1} - f^2_{p-1},$$

während $\varphi_2((m))$ sich einfach auf

$$(17) \qquad \varphi_2((m)) = \frac{m_p^2}{c'_{pp}}$$

reducirt.

Die Formen f_{p-1} und Φ_{p-1} sind mit der *Reciproken* $\Phi((m))$ der Form φ durch die Beziehung

(18) $$\Phi((m)) = c'_{pp} m_p^2 + 2 f_{p-1} m_p + \Phi_{p-1}$$

verbunden und $\frac{\Delta_{p-1}}{c'_{pp}}$ ist die Reciproke von

(19) $$\bar{\varphi}_{p-1}((m)) = \sum_{\mu=1}^{p-1} \sum_{\nu=1}^{p-1} c_{\mu\nu} m_\mu m_\nu .$$

Die den Zetafunctionen zu Grunde liegende Form φ muss einen *positiv reellen* Bestandtheil haben; dann ist aber auch der reelle Theil der adjungirten Form Φ positiv und es ergiebt sich daraus, dass die reellen Theile von c'_{pp} und Φ_{p-1} positiv sind und auch

$$(c'_{pp}) \cdot (\Phi_{p-1}) - (f_{p-1})^2 > 0$$

ist. Führen wir jetzt noch die Wurzeln der gleich Null gesetzten rechten Seite von (18) ein, nämlich

(20) $$\omega_1^{(p-1)} = -\frac{f_{p-1}}{c'_{pp}} + \frac{i\sqrt{\Delta_{p-1}}}{c'_{pp}}, \quad \omega_2^{(p-1)} = -\frac{f_{p-1}}{c'_{pp}} - \frac{i\sqrt{\Delta_{p-1}}}{c'_{pp}},$$

so haben die reellen Theile von $i\omega_1^{(p-1)}$ und $i\omega_2^{(p-1)}$ entgegengesetzte Vorzeichen und wenn wir das Vorzeichen von $\sqrt{\Delta_{p-1}}$ so wählen, dass der reelle Theil von $\frac{\sqrt{\Delta_{p-1}}}{c'_{pp}}$ positiv ist, so ist stets

$$(i\omega_1^{(p-1)}) < 0, \qquad (i\omega_2^{(p-1)}) > 0.$$

Gehen wir jetzt auf Formel (10) zurück, so ist zunächst im zweiten Glied

$$Z^{(p-q)}(s-q)_{\varphi_2} = 2 c_{pp}'^{\,\frac{s-p+1}{2}} \zeta(s-p+1)$$

und daher

(21) $$Z^{(p)}(s)_\varphi = \frac{2\pi^{\frac{p-1}{2}} c_{pp}'^{\,\frac{s-p}{2}}}{\sqrt{\Delta}} \frac{\Gamma\left(\frac{s-p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \zeta(s-p+1) + Z^{(p-1)}(s)_{\bar{\varphi}_{p-1}} + R_{p-1},$$

und es ist jetzt

$$R_{p-1} = \frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\sqrt{c'_{pp}\Delta}} \sum_{m_1} \cdots \sum_{m_p}{}'' e^{-2\pi i \frac{m_p}{c'_{pp}} f_{p-1}} \int_0^\infty dz \cdot z^{\frac{s-p+1}{2}-1} e^{-\frac{\pi m_p^2}{c'_{pp}} z - \frac{\pi \Delta_{p-1}}{c'_{pp} z}},$$

worin beim Summiren sowohl $m_p = 0$, als auch die Combination

$$m_1 = 0 \cdots m_{p-1} = 0$$

auszuschliessen ist.

R_{p-1} behandeln wir jetzt ganz ähnlich, wie den entsprechenden Ausdruck in § 5 und finden mit Hülfe der dort angegebenen Kummer'schen Umformung

$$R_{p-1} = \frac{2^{s-p+2}\pi^{s-\frac{p}{2}+1}}{c_{pp}'^{\frac{s-p}{2}+1}\sqrt{\Delta}\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s-p}{2}+1\right)}$$

$$\cdot \sum_{m_1} \cdots \sum_{m_p}{}'' \Delta_{p-1}^{\frac{s-p+1}{2}} e^{-\frac{2\pi i m_p}{c_{pp}'} f_{p-1} - \frac{2\pi\sqrt{\Delta_{p-1}}}{c_{pp}'}|m_p|} \int_0^\infty dz\,(z+z^2)^{\frac{s-p}{2}} e^{-\frac{4\pi\sqrt{\Delta_{p-1}}}{c_{pp}'}|m_p| z}.$$

Nunmehr ergiebt sich aber für $s = p$, wenn wir die Reihenglieder mit positiven und negativen Werthen des Summationsbuchstabens m_p gesondert zusammenfassen

$$R_{p-1} = \frac{\pi^{\frac{p}{2}}}{\sqrt{\Delta}\,\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} \sum_{m_1} \cdots \sum_{m_{p-1}}{}' \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(e^{2\pi i n \omega_1^{(p-1)}} + e^{-2\pi i n \omega_2^{(p-1)}}\right)$$

$$= -\frac{\pi^{\frac{p}{2}}}{\sqrt{\Delta}\,\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} \log \prod_{m_1} \cdots \prod_{m_{p-1}}{}' \left(1 - e^{2\pi i \omega_1^{(p-1)}}\right)\left(1 - e^{-2\pi i \omega_2^{(p-1)}}\right).$$

Wir haben somit schliesslich aus (21) mit Benutzung bekannter Reihenentwicklungen, wenn wieder γ die Euler'sche Constante bedeutet

$$\lim_{s=p}\left(Z^{(p)}(s)_\varphi - \frac{2\pi^{\frac{p}{2}}}{\sqrt{\Delta}\,\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} \cdot \frac{1}{s-p}\right)$$

$$= Z^{(p-1)}(p)_{\bar{\varphi}_{p-1}} + A - \frac{\pi^{\frac{p}{2}}}{\sqrt{\Delta}\,\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} \log \prod_{m_1} \cdots \prod_{m_{p-1}}{}' \left(1 - e^{2\pi i \omega_1^{(p-1)}}\right)\left(1 - e^{-2\pi i \omega_2^{(p-1)}}\right),$$

worin

$$A = \frac{\pi^{\frac{p}{2}}}{\sqrt{\Delta}\,\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}\left(\gamma - \frac{\Gamma'\left(\frac{p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} + \log\frac{c_{pp}'}{4}\right).$$

Die Aufgabe ist also zurückgeführt auf eine Zetafunction von niedrigerer Ordnung und auf ein merkwürdiges $(p-1)$ fach unendliches Product, welches eine Verallgemeinerung der Function $q^{-\frac{1}{12}}\eta(\omega) = \prod(1-q^{2n})$ darstellt. Für $p = 2$ erhalten wir unmittelbar das Kronecker'sche Resultat.

Strassburg i. E., Januar 1902.

Neuer Beweis des Primzahlsatzes und Beweis des Primidealsatzes.

Von

EDMUND LANDAU in Berlin.

Erster Teil.

Neuer Beweis des Primzahlsatzes.

Einleitung.

Der „Primzahlsatz"*) lautet: *Wenn $\pi(x)$ die Anzahl der Primzahlen $\leqq x$ bezeichnet, so ist***)

$$\pi(x) \sim Li(x) = \lim_{\delta = 0}\left(\int_0^{1-\delta}\frac{dx}{\log x} + \int_{1+\delta}^{x}\frac{dx}{\log x}\right) \sim \int_2^x \frac{dx}{\log x} \tag{1}$$

oder, was dasselbe besagt,

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}. \tag{2}$$

Er folgt bekanntlich***) unmittelbar aus dem Satze: *Wenn $\vartheta(x)$ die Summe der natürlichen Logarithmen aller Primzahlen $\leqq x$ bezeichnet, so ist*

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leqq x} \log p \sim x. \tag{3}$$

Der Nachweis dieser asymptotischen Gleichung ist zum ersten Male von den Herren Hadamard†) und de la Vallée-Poussin††) unabhängig

---

*) Diese Benennung entnehme ich der Dissertation von Herrn von Schaper: „Über die Theorie der Hadamardschen Funktionen und ihre Anwendung auf das Problem der Primzahlen", Göttingen, 1898, S. 58.

**) $f(x) \sim g(x)$ soll bedeuten, daß $\frac{f(x)}{g(x)}$ für positive unendlich wachsende x sich einem Grenzwerte nähert, und daß dieser Grenzwert gleich 1 ist.

***) Vergl. die Anmerkung Herrn de la Vallée-Poussins am Schlusse der Arbeit Herrn von Mangoldts: „Über eine Anwendung der Riemannschen Formel für die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grenze", Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 119, 1898, S. 70.

†) „Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques", Bulletin de la société mathématique de France, Bd. 24, 1896, S. 199—220.

††) „Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers", Annales de la société scientifique de Bruxelles, Bd. 20, Teil 2, S. 183—256.

geführt worden, unter Benutzung der Hadamardschen Theorie der ganzen transcendenten Funktionen und der Anwendungen, welche vordem Herr Hadamard*) selbst von seinen neuen funktionentheoretischen Sätzen (insbesondere von den Beziehungen zwischen dem Geschlecht einer ganzen transcendenten Funktion und der Größe ihrer Koeffizienten) auf die Riemannsche ζ-Funktion gemacht hatte.

Es ist mir nun gelungen, für den Satz (3) und damit für den Primzahlsatz einen Beweis zu finden, der von der Theorie der Hadamardschen Funktionen vollkommen unabhängig ist; er soll im Folgenden dargelegt werden. Zwar wende ich auch die grundlegenden Sätze aus der Theorie der Funktionen komplexen Argumentes an (z. B. den Integralsatz von Cauchy) und bediene mich auch der Riemannschen ζ-Funktion; von dieser kommen aber nur die elementarsten Eigenschaften zur Anwendung. Insbesondere mache ich nicht Gebrauch davon, daß $(s-1)\zeta(s)$ eine ganze transcendente Funktion ist, die mit einer geraden ganzen Funktion $\xi(z)$ vom Geschlechte 0 in z^2 zusammenhängt; ich gebrauche überhaupt nicht die Tatsache, daß $\zeta(s)$ links von der Achse des Imaginären existiert und ziehe alle Schlüsse aus den für $\Re(s) > 1$ giltigen Gleichungen**)

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \tag{4}$$

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}, \tag{5}$$

(wo p alle Primzahlen durchläuft) und aus der für $\Re(s) > 0$ giltigen Gleichung***)

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s-1}\left(\frac{1}{(n+1)^{s-1}} - \frac{1}{n^{s-1}}\right) + \frac{1}{(n+1)^s}\right); \tag{6}$$

(6) lehrt, daß $\zeta(s)$ rechts von der Achse des Imaginären eine eindeutige analytische Funktion mit dem Pole erster Ordnung $s = 1$ als einziger singulärer Stelle ist, und (5) ergibt, daß rechts von $\Re(s) = 1$ die Funktion $\zeta(s)$ keine Nullstelle besitzt. Außerdem haben die Herren Hadamard†)

*) „Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann", Journal de mathématiques pures et appliquées, Ser. 4, Bd. 9, 1893, S. 210—215.

**) Vergl. Riemann, „Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse", Monatsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1859, S. 671—672; Werke, 2. Aufl., 1892, S. 145.

***) Vergl. z. B. Jensen, „Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann", Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'académie des sciences, Paris, Bd. 104, 1887, S. 1156.

†) „Sur la distribution etc.", S. 200—202.

und de la Vallée-Poussin*) aus (5) bewiesen, daß die ζ-Funktion auf der Geraden $\Re(s) = 1$ keine Nullstelle hat; Herr Mertens**) hat jene Methode dahin weiter ausgebildet, daß sie für $|\zeta(1+ti)|$ eine untere Schranke liefert, in Gestalt einer wesentlich positiven Funktion von t. Ausschließlich auf Grund von (4), (5) und (6) habe ich***) jüngst durch weiteres Verfolgen jenes Gedankens den (durch die neuesten, auf der Theorie der Hadamardschen Funktionen basierenden Untersuchungen Herrn de la Vallée-Poussins†) bereits bekannten) Satz hergeleitet:

Es gibt eine positive Konstante B, so daß rechts von der Kurve

$$(7)\qquad \begin{cases} \sigma = 1 - \dfrac{B}{(\log(3+t))^9} & \text{für} \quad t \geqq 0, \\ \sigma = 1 - \dfrac{B}{(\log(3-t))^9} & \text{für} \quad t \leqq 0 \end{cases}$$

die ζ-Funktion keine Nullstelle $s = \sigma + ti$ besitzt.

Ich will zunächst den Beweis, den ich a. a. O. hierfür angegeben habe, in §§ 1—2 reproduzieren, einerseits um den neuen Beweis des Primzahlsatzes hier vollständig auszuführen, andererseits, weil für den vorliegenden Zweck einige Hilfsbetrachtungen weiter zu verfolgen sind, als a. a. O. nötig war. Es ist nämlich von großer Wichtigkeit für das Folgende, daß sich der Satz vom Nichtverschwinden der Funktion $\zeta(s)$ in dem Teil der Ebene rechts von der Kurve (7) mit elementaren Mitteln dahin verschärfen läßt, daß nachgewiesen††) wird:

Es gibt zwei positive Konstanten b, c, sodaß für

$$s = \sigma + ti, \quad t \geqq 10, \quad 1 - \frac{b}{\log^9 t} \leqq \sigma \leqq 2$$

$$(8)\qquad \left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| < c \log^9 t$$

ist.

*) l. c., S. 220—242 und 395—397.

**) „Über eine Eigenschaft der Riemannschen ζ-Funktion", Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien, Bd. 107, Abth. 2ª, 1898, S. 1431—1436.

***) „Über die zu einem algebraischen Zahlkörper gehörige Zetafunktion und die Ausdehnung der Tschebyschefschen Primzahlentheorie auf das Problem der Verteilung der Primideale", Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 125, 1902, S. 98.

†) „Sur la fonction $\zeta(s)$ de Riemann et le nombre des nombres premiers inférieurs à une limite donnée", Mémoires couronnés et autres mémoires publiés par l'academie royale de Belgique, Bd. 59, 1899, S. 37.

††) Von dem Stück $0 \leqq t \leqq 10$ genügt es für das Folgende, zu wissen, daß $\zeta(1+ti)$ nicht verschwindet, und auf negative t lassen sich zum Schluß wegen

$$|\zeta(\sigma+ti)| = |\zeta(\sigma-ti)|, \quad |\zeta'(\sigma+ti)| = |\zeta'(\sigma-ti)|$$

alle Ungleichungen ohne weiteres übertragen.

(8) ist, wie vorweg erwähnt sei, darum eine wesentliche Stütze meines Beweises des Primzahlsatzes, weil auf der rechten Seite eine Funktion steht, welche für $t = \infty$ so schwach unendlich wird, daß das über die Kurve $\sigma = 1 - \frac{b}{\log^9 t}$ erstreckte Integral

$$\int\limits_{1-\frac{b}{\log^9 10}+10i}^{1+\infty i} \frac{x^s}{s^2} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds \qquad (x > 0)$$

einen Sinn hat.

§ 1.

Aus (5) folgt für $\Re(s) > 1$

$$\log \zeta(s) = \log \prod_p \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} = -\sum_p \log\left(1-\frac{1}{p^s}\right)$$

$$= \sum_p \frac{1}{p^s} + \frac{1}{2}\sum_p \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{3}\sum_p \frac{1}{p^{3s}} + \cdots$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_p \frac{1}{p^{ms}},$$

also für $\varepsilon > 0$, $t \gtreqless 0$

$$2 \log \zeta(1+\varepsilon+ti) = 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_p \frac{1}{p^{m(1+\varepsilon+ti)}},$$

$$2 \log \zeta(1+\varepsilon-ti) = 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_p \frac{1}{p^{m(1+\varepsilon-ti)}},$$

$$4 \log \zeta(1+\varepsilon) \qquad = 4\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_p \frac{1}{p^{m(1+\varepsilon)}},$$

also durch Addition

$$4 \log |\zeta(1+\varepsilon+ti)| + 4 \log \zeta(1+\varepsilon) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_p \frac{4(1+\cos(mt\log p))}{p^{m(1+\varepsilon)}}$$

und daher wegen

$$4(1+\cos\alpha) \geqq 2(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha) = 2 - 2\cos^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$$

$$4\log|\zeta(1+\varepsilon+ti)|+4\log\zeta(1+\varepsilon)\geqq\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\sum_{p}\frac{1-\cos(2mt\log p)}{p^{m(1+\varepsilon)}}$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\sum_{p}\frac{1}{p^{m(1+\varepsilon)}}-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m}\sum_{p}\frac{\cos(2mt\log p)}{p^{m(1+\varepsilon)}}$$

$$=\log\zeta(1+\varepsilon)-\log|\zeta(1+\varepsilon+2ti)|,$$

$$4\log|\zeta(1+\varepsilon+ti)|\geqq-3\log\zeta(1+\varepsilon)-\log|\zeta(1+\varepsilon+2ti)|,$$

$$|\zeta(1+\varepsilon+ti)|\geqq\frac{1}{(\zeta(1+\varepsilon))^{\frac{3}{4}}\,|\zeta(1+\varepsilon+2ti)|^{\frac{1}{4}}}.$$

Da für $0<\varepsilon\leqq 1$

$$\zeta(1+\varepsilon)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}<1+\int_{1}^{\infty}\frac{du}{u^{1+\varepsilon}}=1+\frac{1}{\varepsilon}\leqq\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon}=\frac{2}{\varepsilon}$$

ist, erhält man

$$(9)\qquad |\zeta(1+\varepsilon+ti)|\geqq\frac{\varepsilon^{\frac{3}{4}}}{2^{\frac{3}{4}}\,|\zeta(1+\varepsilon+2ti)|^{\frac{1}{4}}}\,{}^{*)}\quad\left(0<\varepsilon\leqq 1,\ t\gtrless 0\right).$$

§ 2.

Wegen

$$\frac{1}{s-1}\left(\frac{1}{(n+1)^{s-1}}-\frac{1}{n^{s-1}}\right)+\frac{1}{(n+1)^{s}}=-s\int_{0}^{1}\frac{u\,du}{(n+u)^{s+1}}$$

kann (6) auch so geschrieben werden**):

$$\zeta(s)=1+\frac{1}{s-1}-s\sum_{n=1}^{\infty}\int_{0}^{1}\frac{u\,du}{(n+u)^{s+1}}\qquad(\Re(s)>0).$$

Ich werde eine gemischte Schreibweise anwenden:

---

*) Bis hierher folge ich genau den Entwickelungen von Herrn **Mertens**. Übrigens folgt aus (9) das Nichtverschwinden von $\zeta(1+ti)$ für $t\gtrless 0$ darum, weil nach (9) der Quotient $\frac{|\zeta(1+\varepsilon+ti)|}{\varepsilon}$ für $\varepsilon=0$ unendlich wird.

) In dieser Form stellt Herr **de la Vallée-Poussin in seiner Arbeit „Démonstration simplifiée du théorème de **Dirichlet** sur la progression arithmétique" (Mémoires couronnés et autres mémoires publiés par l'académie royale de Belgique, Bd. 53, 1896, S. 7) die ζ-Funktion für $\Re(s)>0$ dar; vergl. auch seine „Recherches etc.", S. 185.

$$\zeta(s)=1+\frac{1}{s-1}+\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{1}{s-1}\left(\frac{1}{(n+1)^{s-1}}-\frac{1}{n^{s-1}}\right)+\frac{1}{(n+1)^{s}}\right)-s\sum_{n=m+1}^{\infty}\int_0^1\frac{u\,du}{(n+u)^{s+1}}$$

$$=1+\frac{1}{s-1}+\frac{1}{s-1}\left(\frac{1}{(m+1)^{s-1}}-1\right)+\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{(n+1)^{s}}-s\sum_{n=m+1}^{\infty}\int_0^1\frac{u\,du}{(n+u)^{s+1}},$$

$$\zeta(s)=\frac{1}{s-1}\,\frac{1}{(m+1)^{s-1}}+\sum_{n=1}^{m+1}\frac{1}{n^{s}}-s\sum_{n=m+1}^{\infty}\int_0^1\frac{u\,du}{(n+u)^{s+1}}, \tag{10}$$

wo die Verfügung über die ganze Zahl m vorbehalten bleibt. Aus (10) ergibt sich durch Differentiation:

$$\left\{\begin{aligned}\zeta'(s)=&-\frac{1}{(s-1)^2}\,\frac{1}{(m+1)^{s-1}}-\frac{1}{s-1}\,\frac{\log(m+1)}{(m+1)^{s-1}}-\sum_{n=1}^{m+1}\frac{\log n}{n^{s}}\\&-\sum_{n=m+1}^{\infty}\int_0^1\frac{u\,du}{(n+u)^{s+1}}+s\sum_{n=m+1}^{\infty}\int_0^1\frac{u\log(n+u)\,du}{(n+u)^{s+1}}.\end{aligned}\right. \tag{11}$$

Aus (10) folgt für $s=1+\varepsilon+2ti,\ 0\leqq\varepsilon\leqq1,\ t>0$:

$$\begin{aligned}|\zeta(1+\varepsilon+2ti)|&\leqq\frac{1}{|\varepsilon+2ti|}\,\frac{1}{|(m+1)^{\varepsilon+2ti}|}+\sum_{n=1}^{m+1}\frac{1}{|n^{1+\varepsilon+2ti}|}\\&\qquad+|1+\varepsilon+2ti|\sum_{n=m+1}^{\infty}\int_0^1\frac{u\,du}{|(n+u)^{2+\varepsilon+2ti}|}\\&<\frac{1}{2t}\,\frac{1}{(m+1)^{\varepsilon}}+\sum_{n=1}^{m+1}\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}+(1+\varepsilon+2t)\sum_{n=m+1}^{\infty}\int_0^1\frac{u\,du}{(n+u)^{2+\varepsilon}}\\&<\frac{1}{2t}+\sum_{n=1}^{m+1}\frac{1}{n}+(2+2t)\sum_{n=m+1}^{\infty}\int_0^1\frac{u\,du}{n^2}\\&=\frac{1}{2t}+\frac{1}{m+1}+\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n}+(1+t)\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\\&<\frac{1}{2t}+\frac{1}{m+1}+\left(\log m+\frac{3}{5}+\frac{1}{2m}\right)+(1+t)\sum_{n=m+1}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\\&<\frac{1}{2t}+\frac{1}{m}+\log m+\frac{3}{5}+\frac{1}{2m}+(1+t)\frac{1}{m}.\end{aligned}$$

Ich nehme nun $t \geqq 10$ an, setze $m = [t]$, d. h. gleich der größten ganzen Zahl $\leqq t$ und erhalte wegen $\frac{t}{m} = \frac{t}{[t]} < \frac{t}{t-1} \leqq \frac{t}{t - \frac{1}{10}t} = \frac{10}{9}$

$$|\zeta(1+\varepsilon+2ti)| < \frac{1}{20} + \frac{1}{10} + \log t + \frac{3}{5} + \frac{1}{20} + \frac{1}{10} + \frac{10}{9} < \log t + \frac{21}{10},$$

$$(12) \qquad |\zeta(1+\varepsilon+2ti)| < 2 \log t^{*)} \qquad (0 \leqq \varepsilon \leqq 1, t \geqq 10).$$

Ferner soll aus (11) für $|\zeta'(1+\varepsilon+ti)|$ eine obere Schranke hergeleitet werden; hierbei lasse ich aber auch gewisse negative ε zu, d. h. gewisse s mit reellem Teil < 1, indem ich t und ε in $s = 1 + \varepsilon + ti$ den Ungleichungen

$$(13) \qquad t \geqq 10, \quad -\frac{1}{\log t} \leqq \varepsilon \leqq 1$$

unterwerfe. Dann liefert (11)

$$|\zeta'(1+\varepsilon+ti)| \leqq \frac{1}{|\varepsilon+ti|^2} \frac{1}{|(m+1)^{\varepsilon+ti}|} + \frac{1}{|\varepsilon+ti|} \frac{\log(m+1)}{|(m+1)^{\varepsilon+ti}|}$$

$$+ \sum_{n=1}^{m+1} \frac{\log n}{|n^{1+\varepsilon+ti}|} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \int_0^1 \frac{u\,du}{|(n+u)^{2+\varepsilon+ti}|} + |1+\varepsilon+ti| \sum_{n=m+1}^{\infty} \int_0^1 \frac{u \log(n+u)\,du}{|(n+u)^{2+\varepsilon+ti}|}$$

$$< \frac{1}{t^2} \frac{1}{(m+1)^{\varepsilon}} + \frac{1}{t} \frac{\log(m+1)}{(m+1)^{\varepsilon}} + \sum_{n=1}^{m+1} \frac{\log n}{n^{1+\varepsilon}} + \sum_{n=m+1}^{\infty} \int_0^1 \frac{u\,du}{n^{2+\varepsilon}}$$

$$+ (1+\varepsilon+t) \sum_{n=m+1}^{\infty} \int_0^1 \frac{u \log(n+1)\,du}{n^{2+\varepsilon}}$$

$$< \frac{1}{t^2} \frac{1}{(m+1)^{-\frac{1}{\log t}}} + \frac{1}{t} \frac{\log(m+1)}{(m+1)^{-\frac{1}{\log t}}} + \sum_{n=1}^{m+1} \frac{\log n}{n^{1-\frac{1}{\log t}}}$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n^{2+\varepsilon}} + (2+t) \frac{1}{2} \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{\log(n+1)}{n^{2-\frac{1}{\log t}}}$$

---

*) Es hat für das Folgende kein Interesse, die in den Ungleichungen auftretenden Konstanten tunlichst klein bezw. groß zu wählen; wesentlich sind nur die Größenordnungen der auftretenden Vergleichsfunktionen. Daß für $\Re(s) = 1$ $\zeta(s)$ nicht stärker als von der Größenordnung $\log t$ unendlich werden kann, ist übrigens schon durch Herrn Mellin bekannt („Eine Formel für den Logarithmus transcendenter Funktionen von endlichem Geschlecht", Acta societatis scientiarum Fennicae, Bd. 29, No. 4, 1900, S. 48—49).

$$(14)\begin{cases} < \frac{1}{t^2}(m+1)^{\frac{1}{\log t}} + \frac{1}{t}\log(m+1)(m+1)^{\frac{1}{\log t}} + \log(m+1)\sum_{n=1}^{m+1}\frac{1}{n^{1-\frac{1}{\log t}}} \\ \qquad + \frac{1}{2}\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} + \left(1+\frac{t}{2}\right)\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{\log(n+1)}{n^{2-\frac{1}{\log t}}}. \end{cases}$$

Hierin ist für jede positive ganze Zahl m

$$\sum_{n=1}^{m+1}\frac{1}{n^{1-\frac{1}{\log t}}} < 1 + \int_1^{m+1}\frac{du}{u^{1-\frac{1}{\log t}}} = 1 + \log t\left((m+1)^{\frac{1}{\log t}} - 1\right),$$

$$\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} < \int_m^{\infty}\frac{du}{u^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{m}} \leqq 2$$

und

$$\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{\log(n+1)}{n^{2-\frac{1}{\log t}}} < \int_m^{\infty}\frac{\log(u+1)}{u^{2-\frac{1}{\log t}}}du \overset{*)}{<} \int_m^{\infty}\frac{\log u + \frac{1}{u}}{u^{2-\frac{1}{\log t}}}du$$

$$= \frac{\log m}{\left(1-\frac{1}{\log t}\right)m^{1-\frac{1}{\log t}}} + \frac{1}{\left(1-\frac{1}{\log t}\right)^2 m^{1-\frac{1}{\log t}}} + \frac{1}{\left(2-\frac{1}{\log t}\right)m^{2-\frac{1}{\log t}}}$$

$$< \frac{\log m\cdot m^{\frac{1}{\log t}}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)m} + \frac{m^{\frac{1}{\log t}}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2 m} + \frac{m^{\frac{1}{\log t}}}{\left(2-\frac{1}{2}\right)m^2}$$

$$= \frac{2\log m\cdot m^{\frac{1}{\log t}}}{m} + \frac{4m^{\frac{1}{\log t}}}{m} + \frac{2m^{\frac{1}{\log t}}}{3m^2}.$$

Aus (14) folgt also, wenn t und ε den Ungleichungen (13) genügen,

---

*) Die Funktion $\frac{\log(u+1)}{u^\nu}$ nimmt tatsächlich $\left(\text{für } \nu = 2 - \frac{1}{\log t} > 1\right)$ monoton mit wachsendem u für $u \geqq 1$ ab, da $\frac{d}{du}\frac{\log(u+1)}{u^\nu} = \frac{1}{u^\nu(u+1)} - \frac{\nu\log(u+1)}{u^{\nu+1}}$ $= \frac{1}{u^{\nu+1}}\left(\frac{u}{u+1} - \nu\log(u+1)\right) < \frac{1}{u^{\nu+1}}\left(\frac{u}{u+1} - \log(u+1)\right)$, also für $1 \leqq u \leqq 2$ kleiner als $\frac{1}{u^{\nu+1}}\left(\frac{2}{3} - \log 2\right) < 0$ und für $u \geqq 2$ kleiner als $\frac{1}{u^{\nu+1}}(1 - \log 3) < 0$ ist.

$$|\zeta'(1+\varepsilon+ti)|<\frac{1}{t^2}(m+1)^{\frac{1}{\log t}}+\frac{1}{t}\log(m+1)(m+1)^{\frac{1}{\log t}}+\log(m+1)$$
$$+\log(m+1)\log t\left((m+1)^{\frac{1}{\log t}}-1\right)+1$$
$$+\left(1+\frac{t}{2}\right)\left(\frac{2\log m\cdot m^{\frac{1}{\log t}}}{m}+\frac{4m^{\frac{1}{\log t}}}{m}+\frac{2m^{\frac{1}{\log t}}}{3m^2}\right).$$

Hierin setze ich $m=[t]-1$ und erhalte wegen $m+1=[t]\leqq t,\ m>t-2 \geqq t-\frac{t}{5}=\frac{4}{5}t$

$$|\zeta'(1+\varepsilon+ti)|<\frac{1}{t^2}t^{\frac{1}{\log t}}+\frac{1}{t}\log t\cdot t^{\frac{1}{\log t}}+\log t+\log^2 t\,(t^{\frac{1}{\log t}}-1)+1$$
$$+\left(1+\frac{t}{2}\right)\left(\frac{2\log t\cdot t^{\frac{1}{\log t}}}{\frac{4}{5}t}+\frac{4t^{\frac{1}{\log t}}}{\frac{4}{5}t}+\frac{2t^{\frac{1}{\log t}}}{3\cdot\frac{16}{25}t^2}\right),$$

also wegen

$$t^{\frac{1}{\log t}}=e^{\log t\cdot\frac{1}{\log t}}=e$$

$$|\zeta'(1+\varepsilon+ti)|<\frac{e}{t^2}+\frac{e\log t}{t}+\log t+(e-1)\log^2 t+1$$
$$+\left(1+\frac{t}{2}\right)\left(\frac{5e\log t}{2t}+\frac{5e}{t}+\frac{25e}{24t^2}\right)$$
$$<\frac{e}{100}+\frac{e}{10}\log t+\log t+1{,}8\log^2 t+1$$
$$+\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{5e}{2}\log t+5e+\frac{5}{48}e\right)$$
$$<0{,}03+0{,}3\log t+\log t+1{,}8\log^2 t+1+0{,}6\,(7\log t+14)$$
$$=9{,}43+5{,}5\log t+1{,}8\log^2 t$$
$$<1{,}8\log^2 t+2{,}4\log^2 t+1{,}8\log^2 t,$$

$$|\zeta'(1+\varepsilon+ti)|<6\log^2 t\qquad\left(t\geqq 10,\,-\frac{1}{\log t}\leqq\varepsilon\leqq 1\right). \tag{15}$$

Für diese Wertepaare ε, t ist also wegen

$$\zeta(1+\varepsilon+ti)-\zeta(1+ti)=\int\limits_{1+ti}^{1+\varepsilon+ti}\zeta'(s)\,ds=\int\limits_{1}^{1+\varepsilon}\zeta'(\sigma+ti)\,d\sigma,$$

da σ während des geradlinigen Integrationsweges jedenfalls zwischen $1-\frac{1}{\log t}$ und 2 gelegen ist, nach (15)

$$|\zeta(1+\varepsilon+ti)-\zeta(1+ti)|\leqq\int\limits_{1}^{1+\varepsilon}|\zeta'(\sigma+ti)|\,|d\sigma|\leqq 6\log^2 t\int\limits_{1}^{1+\varepsilon}|d\sigma|,$$

$$|\zeta(1+\varepsilon+ti)-\zeta(1+ti)|\leqq 6\,|\varepsilon|\log^2 t=6\operatorname{sign}\varepsilon\cdot\varepsilon\log^2 t,$$

also, $t \geqq 10$ angenommen,

$$(16) \qquad \text{für } 0 \leqq \varepsilon \leqq 1 \qquad |\zeta(1+\varepsilon+ti) - \zeta(1+ti)| \leqq 6\varepsilon \log^2 t,$$

$$(17) \qquad \text{für } 0 \leqq \eta \leqq \frac{1}{\log t} \qquad |\zeta(1-\eta+ti) - \zeta(1+ti)| \leqq 6\eta \log^2 t.$$

(9) ergibt in Verbindung mit (12) und (16) für $0 < \varepsilon \leqq 1$, $t \geqq 10$

$$\begin{aligned} |\zeta(1+ti)| &\geqq |\zeta(1+\varepsilon+ti)| - |\zeta(1+\varepsilon+ti) - \zeta(1+ti)| \\ &\geqq \frac{\varepsilon^{\frac{3}{4}}}{2^{\frac{3}{4}} |\zeta(1+\varepsilon+2ti)|^{\frac{1}{4}}} - |\zeta(1+\varepsilon+ti) - \zeta(1+ti)| \\ &> \frac{\varepsilon^{\frac{3}{4}}}{2^{\frac{3}{4}} (2\log t)^{\frac{1}{4}}} - 6\varepsilon \log^2 t, \end{aligned}$$

$$(18) \qquad |\zeta(1+ti)| > \frac{\varepsilon^{\frac{3}{4}}}{2 \log^{\frac{1}{4}} t} \left(1 - 12\varepsilon^{\frac{1}{4}} \log^{\frac{9}{4}} t\right).$$

Wird in (18)

$$\varepsilon = \left(\frac{1}{2 \cdot 12 \log^{\frac{9}{4}} t}\right)^4 = \frac{1}{24^4 \log^9 t}$$

gesetzt, was tatsächlich zwischen 0 und 1 liegt, so ergibt sich für $|\zeta(1+ti)|$ die wesentlich positive untere Schranke

$$|\zeta(1+ti)| > \frac{\varepsilon^{\frac{3}{4}}}{2\log^{\frac{1}{4}} t}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{\varepsilon^{\frac{3}{4}}}{4 \log^{\frac{1}{4}} t} = \frac{1}{4 \cdot 24^3 \log^{\frac{27}{4}} t \cdot \log^{\frac{1}{4}} t},$$

$$(19) \qquad |\zeta(1+ti)| > \frac{1}{10^5 \log^7 t} \qquad (t \geqq 10).$$

Aus (17) und (19) folgt also für $0 \leqq \eta \leqq \frac{1}{10^6 \log^9 t}$

$$|\zeta(1-\eta+ti)| \geqq |\zeta(1+ti)| - |\zeta(1-\eta+ti) - \zeta(1+ti)| > \frac{1}{10^5 \log^7 t} - \frac{6 \log^2 t}{10^6 \log^9 t},$$

$$|\zeta(1-\eta+ti)| > \frac{1}{10^6 \log^7 t},$$

und daraus in Verbindung mit der in (15) enthaltenen Ungleichung

$$|\zeta'(1-\eta+ti)| < 6 \log^2 t$$

ergibt sich

$$\left|\frac{\zeta'(1-\eta+ti)}{\zeta(1-\eta+ti)}\right| < 10^7 \log^9 t,$$

d. h.

$$(20) \qquad \left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| < 10^7 \log^9 t$$

für $t \geqq 10$, $1 - \frac{1}{10^6 \log^9 t} \leqq \Re(s) \leqq 1$.

Ich behaupte, daß (20) auch für $t \geqq 10$, $1 \leqq \Re(s) \leqq 2$ gilt. In der Tat ist zunächst für $s = 1 + \varepsilon + ti$, $0 \leqq \varepsilon \leqq \frac{1}{10^6 \log^9 t}$ analog wie vorhin

$$|\zeta(1+\varepsilon+ti)| \geqq |\zeta(1+ti)| - |\zeta(1+\varepsilon+ti) - \zeta(1+ti)|$$
$$\geqq \frac{1}{10^5 \log^7 t} - \frac{6 \log^2 t}{10^6 \log^9 t} > \frac{1}{10^6 \log^7 t},$$
$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| < 10^7 \log^9 t,$$

und für $\frac{1}{10^6 \log^9 t} \leqq \varepsilon \leqq 1$ ist

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_p \log p \left(\frac{1}{p^{1+\varepsilon+ti}} + \frac{1}{p^{2(1+\varepsilon+ti)}} + \cdots\right),$$

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| \leqq \sum_p \log p \left(\frac{1}{p^{1+\varepsilon}} + \frac{1}{p^{2(1+\varepsilon)}} + \cdots\right)$$
$$= \sum_p \frac{\log p}{p^{1+\varepsilon} - 1} < \sum_p \frac{\log p}{p^{1+\varepsilon} - \frac{1}{2} p^{1+\varepsilon}} = 2 \sum_p \frac{\log p}{p^{1+\varepsilon}}$$
$$= 2 \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{\vartheta(\nu) - \vartheta(\nu-1)}{\nu^{1+\varepsilon}} = 2 \sum_{\nu=2}^{\infty} \vartheta(\nu) \left(\frac{1}{\nu^{1+\varepsilon}} - \frac{1}{(\nu+1)^{1+\varepsilon}}\right)$$
$$< 2 \sum_{\nu=2}^{\infty} 2\nu \left(\frac{1}{\nu^{1+\varepsilon}} - \frac{1}{(\nu+1)^{1+\varepsilon}}\right) {}^{*})$$
$$= 4\left(1 + \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{1}{\nu^{1+\varepsilon}} (\nu - (\nu-1))\right) = 4\left(1 + \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{1}{\nu^{1+\varepsilon}}\right)$$
$$= 4\zeta(1+\varepsilon) < 4 \cdot \frac{2}{\varepsilon} = \frac{8}{\varepsilon} \leqq 8 \cdot 10^6 \log^9 t,$$
$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| < 10^7 \log^9 t.$$

Damit ist, wie in der Einleitung angekündigt wurde, die Existenz zweier positiver Konstanten $b \left(= \frac{1}{10^6}\right)$ und $c \,(= 10^7)$ nachgewiesen, sodaß für

$$s = \sigma + ti, \quad t \geqq 10, \quad 1 - \frac{b}{\log^9 t} \leqq \sigma \leqq 2$$

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| < c \log^9 t \tag{21}$$

ist.

---

*) Wie Herr **Mertens** („Ein Beitrag zur analytischen Zahlentheorie", Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 78, 1874, S. 48) einfach bewiesen hat, ist stets $\vartheta(\nu) < 2\nu$.

Es sei nun a eine positive Zahl, welche erstens kleiner ist als b und zweitens kleiner als der Abstand der Geraden $\Re(s) = 1$ von allen etwa vorhandenen*) Nullstellen von $\zeta(s)$, deren reeller Teil zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 und deren imaginärer Teil zwischen 0 und 10 liegt. Dann verschwindet die ζ-Funktion nicht in dem Teil der Ebene, welcher rechts von der stetigen Kurve

$$\begin{cases} \sigma = 1 - \frac{a}{\log^9 t}, & t \geqq 10 \\ \sigma = 1 - \frac{a}{\log^9 10}, & -10 \leqq t \leqq 10 \\ \sigma = 1 - \frac{a}{\log^9 (-t)}, & t \leqq -10 \end{cases}$$

liegt, auch nicht auf dieser Kurve selbst, und nach (21) ist außerdem für $t \geqq 10$, $1 - \frac{a}{\log^9 t} \leqq \sigma \leqq 2$

$$\left| \frac{\zeta'(\sigma + ti)}{\zeta(\sigma + ti)} \right| < c \log^9 t. \tag{22}$$

§ 3.

Herr Hadamard**) hat gezeigt, daß zum Nachweise des (dem Primzahlsatze äquivalenten) Satzes

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leqq x} \log p \sim x \tag{3}$$

nur erforderlich ist, zu beweisen, dass

$$\sum_{p \leqq x} \log p \log \frac{x}{p} \sim x \tag{23}$$

ist und daß hierzu nur nachgewiesen zu werden braucht***), daß

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{2-\infty i}^{2+\infty i} \frac{x^s}{s^2} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds \sim x \tag{24}$$

ist; zum Nachweise dieser asymptotischen Gleichung war bisher die Theorie

*) Die Kenntnis der Tatsache, daß tatsächlich keine solche Nullstelle existiert, ist für den vorliegenden Zweck unerheblich; da auf der Geraden $\Re(s) = 1$ keine Nullstelle liegt und in dem endlichen Gebiet $\frac{1}{2} \leqq \Re(s) < 1$, $0 \leqq \Im(s) \leqq 10$ nicht unendlich viele Nullstellen liegen können (weil sonst $\zeta(s)$ in jenem Rechteck eine wesentlich singuläre Stelle haben würde), so existiert jedenfalls eine positive Zahl a, die den geforderten Bedingungen entspricht.

**) „Sur la distribution etc.", S. 217—218.

***) l. c., S. 213, 216—217.

der Hadamardschen Funktionen notwendig; Herr Hadamard*) geht von der Produktzerlegung der ganzen transcendenten Funktion $(s-1)\zeta(s)$ aus und integriert die mit $\frac{x^s}{s^2}$ multiplizierten Partialbrüche von $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ auf passender, teilweise die Achse des Imaginären überschreitender Bahn. Ehe ich zeige, wie der Nachweis von (24) allein auf Grund der im Vorangegangenen bewiesenen Sätze möglich ist, will ich in § 4 der Vollständigkeit wegen im Anschlusse an Herrn Hadamard (wenn auch in etwas modifizierter Form) den Zusammenhang zwischen dem Integral auf der linken Seite von (24) und der Funktion $\sum_{p\leq x} \log p \log \frac{x}{p}$ entwickeln. Dann werde ich in § 5 die asymptotische Gleichung (24) beweisen; dabei wird sich sogar zeigen, daß man mit den angewendeten Mitteln eine noch genauere Gleichung als (24) erhält, und daraus wird dann die asymptotische Gleichung (3) in § 6 mit noch schärferer Fassung hergeleitet werden.

§ 4.

Bekanntlich ist

$$(25) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{2-\infty i}^{2+\infty i} \frac{y^s}{s^2}\,ds \begin{cases} = \log y & \text{für } y \geqq 1 \\ = 0 & \text{für } 0 < y \leqq 1. \end{cases}$$

Aus (25) erhält man für das von $2-x^2 i$ bis $2+x^2 i$ (wo x eine positive Zahl bezeichnet) erstreckte Integral wegen

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{2-\infty i}^{2-x^2 i} \frac{y^s}{s^2}\,ds\right| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{2+x^2 i}^{2+\infty i} \frac{y^s}{s^2}\,ds\right| \leqq \frac{1}{2\pi}\int_{x^2}^{\infty} \left|\frac{y^{2+ti}}{(2+ti)^2}\right| dt$$

$$< \frac{y^2}{2\pi}\int_{x^2}^{\infty} \frac{dt}{t^2} = \frac{y^2}{2\pi x^2} < \frac{y^2}{2x^2}$$

die Relation

$$(26) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{2-x^2 i}^{2+x^2 i} \frac{y^s}{s^2}\,ds = \begin{cases} \log y + \Theta_{(x,y)} \frac{y^2}{x^2} & \text{für } y \geqq 1 \\ \Theta_{(x,y)} \frac{y^2}{x^2} & \text{für } 0 < y \leqq 1, \end{cases}$$

wo die von x und y abhängige Grösse $\Theta_{(x,y)}$ dem absoluten Betrage nach < 1 ist.

Die unendliche Doppelreihe

$$\sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\log p}{p^{ms}} = \sum_p \left(\frac{\log p}{p^s} + \frac{\log p}{p^{2s}} + \cdots + \frac{\log p}{p^{ms}} + \cdots\right) = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$$

*) l. c., S. 213—216.

werde nach wachsenden Werten der Primzahlpotenz p^m geordnet:

$$(27)\qquad -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L(n)}{n^s}\,{}^{*}),$$

wo $L(1) = 0$, $L(n) = 0$ für Nichtprimzahlpotenzen n und $L(p^m) = \log p$; (27) ist für $\Re(s) > 1$ konvergent und für $s = 2 + ti$ wegen

$$\left|\frac{1}{n^{2+ti}}\right| = \frac{1}{n^2}$$

gleichmäßig konvergent. Die aus (27) durch Multiplikation jedes Gliedes mit $\frac{x^s}{s^2}$ entstehende Reihe kann also zwischen den Grenzen $2 - x^2 i$ und $2 + x^2 i$ gliedweise integriert werden, und man erhält

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{2-x^2 i}^{2+x^2 i} \frac{x^s}{s^2}\,\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\,ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{2-x^2 i}^{2+x^2 i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^s}{s^2}\,\frac{L(n)}{n^s}\,ds = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^{\infty} L(n)\int_{2-x^2 i}^{2+x^2 i} \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^s}{s^2}\,ds,$$

also nach (26), da für $n \leqq x$ $\frac{x}{n} \geqq 1$, für $n > x$ dagegen $\frac{x}{n} < 1$ ist,

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{2-x^2 i}^{2+x^2 i} \frac{x^s}{s^2}\,\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\,ds = \sum_{n=1}^{x} L(n)\log\frac{x}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} L(n)\,\Theta_{\left(x,\frac{x}{n}\right)}\,\frac{x^2}{n^2 x^2}$$

$$(28)\qquad = \sum_{n=1}^{x} L(n)\log\frac{x}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} L(n)\,\Theta_{\left(x,\frac{x}{n}\right)}\cdot\frac{1}{n^2}.$$

Hierin ist die zweite Summe wegen

$$\left|\Theta_{\left(x,\frac{x}{n}\right)}\right| \leqq 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L(n)}{n^2} = -\frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)}$$

(konvergent und) dem absoluten Werthe nach unterhalb einer von x unabhängigen Konstanten gelegen; (28) ergibt also

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{2-x^2 i}^{2+x^2 i} \frac{x^s}{s^2}\,\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\,ds = \sum_{n=1}^{x} L(n)\log\frac{x}{n} + O(1)^{**})$$

$$(29)\quad = \sum_{p \leqq x} \log p \log\frac{x}{p} + \sum_{p \leq \sqrt{x}} \log p \log\frac{x}{p^2} + \cdots + \sum_{p \leq \sqrt[\nu]{x}} \log p \log\frac{x}{p^\nu} + O(1),$$

*) Vergl. v. Mangoldt, „Zu Riemanns Abhandlung über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse", Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 114, 1895, S. 277—278.

**) $O(f(x))$ bezeichne eine Funktion, deren Quotient durch $f(x)$ für positive unendlich wachsende x dem absoluten Betrage nach nicht beliebig großer Werte wo $\nu = \left[\frac{\log x}{\log 2}\right]$ ist; für $m > \frac{\log x}{\log 2}$ ist ja in der Tat $n = p^m \geqq 2^m > x$. (29) ergibt weiter wegen

$$\sum_{p \leq \sqrt{x}} \log p \log \frac{x}{p^2} + \cdots + \sum_{p \leq \sqrt[\nu]{x}} \log p \log \frac{x}{p^\nu}$$

$$\leqq \sum_{p \leq \sqrt{x}} \log p \log x + \cdots + \sum_{p \leq \sqrt{x}} \log p \log x$$

$$= (\nu - 1) \sum_{p \leq \sqrt{x}} \log p \log x \leqq \frac{\log x}{\log 2} \log x \sum_{p \leq \sqrt{x}} \log p$$

$$= O\left(\log^2 x \, \vartheta(\sqrt{x})\right) = O\left(\sqrt{x} \log^2 x\right) ^{*})$$

die Gleichung

$$(30) \qquad -\frac{1}{2\pi i} \int_{2 - x^2 i}^{2 + x^2 i} \frac{x^s}{s^2} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \, ds = \sum_{p \leq x} \log p \log \frac{x}{p} + O\left(\sqrt{x} \log^2 x\right).$$

§ 5.

Ich wende nun den **Cauchyschen** Satz auf den Integranden $\frac{x^s}{s^2} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ und den geschlossenen Integrationsweg $ABCDEFA$ an, wo ($x > \sqrt{10}$ angenommen)

$$A = 2 - x^2 i, \; B = 2 + x^2 i, \; C = 1 - \frac{a}{\log^9 (x^2)} + x^2 i, \; D = 1 - \frac{a}{\log^9 10} + 10 i,$$

$$E = 1 - \frac{a}{\log^9 10} - 10 i, \quad F = 1 - \frac{a}{\log^9 (x^2)} - x^2 i$$

ist, die Strecken AB, BC, DE, FA geradlinig sind, CD das Kurvenstück

$$s = 1 - \frac{a}{\log^9 t} + t i \qquad (x^2 \geqq t \geqq 10)$$

und EF das Kurvenstück

$$s = 1 - \frac{a}{\log^9 (-t)} + t i \qquad (-10 \geqq t \geqq -x^2)$$

bezeichnet.

Da nach § 2 in diesem geschlossenen Gebiete und auf dem Rande $\zeta(s)$ nirgends verschwindet, hat der Integrand im Innern die Stelle $s = 1$ als einzige Singularität; das Residuum für $s = 1$ ist

$$\lim_{s=1} \frac{x^s}{s^2} (s-1) \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -x;$$

---

fähig ist, also zwischen endlichen Unbestimmtheitsgrenzen oscilliert, mögen dieselben verschieden sein oder in 0 oder einem anderen Werte zusammenfallen. Übrigens ist hier die linke Seite der Gleichung, also auch die als $O(1)$ abgeschätzte Funktion reell.

*) Es ist leicht, diese Relation zu verschärfen; doch ist dies für das Folgende ohne Bedeutung.

der Cauchysche Satz ergibt daher

$$(31)\qquad \int\limits_{2-x^2 i}^{2+x^2 i} \frac{x^s}{s^2}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\,ds = \int\limits_{AB} = -2\pi i x + \int\limits_{AF} + \int\limits_{FE} + \int\limits_{ED} + \int\limits_{DC} + \int\limits_{CB}.$$

Hierin ist zunächst, da auf dem Wege ED $\left|\frac{1}{s^2}\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right|$ unterhalb einer endlichen, von x unabhängigen Konstanten liegt,

$$(32)\qquad \left|\int\limits_{ED}\right| = O\int\limits_{-10}^{10}\left|x^{1-\frac{a}{\log^9 10}+ti}\right|dt = O\left(x^{1-\frac{a}{\log^9 10}}\right).$$

Zweitens ist

$$\left|\int\limits_{CB}\right| = \left|\int\limits_{AF}\right| = \left|\int\limits_{1-\frac{a}{\log^9(x^2)}}^{2} \frac{x^{\sigma+x^2 i}}{(\sigma+x^2 i)^2}\frac{\zeta'(\sigma+x^2 i)}{\zeta(\sigma+x^2 i)}\,d\sigma\right|,$$

also nach (22)

$$(33)\qquad < c\int\limits_{1-\frac{a}{\log^9(x^2)}}^{2}\frac{x^2}{x^4}\log^9(x^2)\,d\sigma < c\,\frac{\log^9(x^2)}{x^2}\cdot 2 = O\left(\frac{\log^9 x}{x^2}\right).$$

Drittens erhält man unter Anwendung von (22)

$$\left|\int\limits_{DC}\right| = \left|\int\limits_{FE}\right| = \left|\int\limits_{10}^{x^2}\frac{x^{1-\frac{a}{\log^9 t}+ti}}{\left(1-\frac{a}{\log^9 t}+ti\right)^2}\frac{\zeta\left(1-\frac{a}{\log^9 t}+ti\right)}{\zeta\left(1-\frac{a}{\log^9 t}+ti\right)}\,d\left(1-\frac{a}{\log^9 t}+ti\right)\right|$$

$$< c\int\limits_{10}^{x^2}\frac{x^{1-\frac{a}{\log^9 t}}}{t^2}\log^9 t\left|\frac{9a}{t\log^{10} t}+i\right|dt$$

$$< c\left(\frac{9a}{10\log^{10}10}+1\right)\int\limits_{10}^{x^2}x^{1-\frac{a}{\log^9 t}}\frac{\log^9 t}{t^2}\,dt$$

$$< 2c\int\limits_{10}^{x^2}x^{1-\frac{a}{\log^9 t}}\frac{\log^9 t}{t^2}\,dt$$

$$= 2c\int\limits_{10}^{e^{\sqrt[10]{\log x}}}x^{1-\frac{a}{\log^9 t}}\frac{\log^9 t}{t^2}\,dt + 2c\int\limits_{e^{\sqrt[10]{\log x}}}^{x^2}x^{1-\frac{a}{\log^9 t}}\frac{\log^9 t}{t^2}\,dt^{*)}$$

---

*) Für alle x von einer gewissen Stelle $\left(e^{\log^{10}10}\right)$ an ist $10 \leqq e^{\sqrt[10]{\log x}} < x^2$.

$$< 2cx^{1-\frac{a}{\log^9\left(e^{\sqrt[10]{\log x}}\right)}} \int_{10}^{e^{\sqrt[10]{\log x}}} \frac{\log^9 t}{t^2}\,dt + 2cx\log^9(x^2)\int_{e^{\sqrt[10]{\log x}}}^{x^2}\frac{dt}{t^2}$$

$$< 2cx^{1-\frac{a}{(\log x)^{\frac{9}{10}}}} \int_{10}^{\infty} \frac{\log^9 t}{t^2}\,dt + 2cx\log^9(x^2)\int_{e^{\sqrt[10]{\log x}}}^{\infty}\frac{dt}{t^2}$$

$$= O\left(x^{1-\frac{a}{(\log x)^{\frac{9}{10}}}}\right) + O\left(x\log^9 x\,\frac{1}{e^{\sqrt[10]{\log x}}}\right)$$

$$= O\left(xe^{-\frac{a\log x}{(\log x)^{\frac{9}{10}}}}\right) + O\left(x\,\frac{1}{e^{\sqrt[11]{\log x}}}\right)^{*)}$$

$$= O\left(xe^{-a\sqrt[10]{\log x}}\right) + O\left(xe^{-\sqrt[11]{\log x}}\right)$$

$$(34)\qquad = O\left(xe^{-\sqrt[11]{\log x}}\right)\,;^{**)}$$

(32), (33) und (34) ergeben, in (31) eingesetzt:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{2-x^2 i}^{2+x^2 i}\frac{x^s}{s^2}\,\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\,ds = -x + O\left(\frac{\log^9 x}{x^2}\right) + O\left(xe^{-\sqrt[11]{\log x}}\right) + O\left(x^{1-\frac{a}{\log^9 10}}\right)$$

$$= -x + O\left(xe^{-\sqrt[11]{\log x}}\right),$$

also nach (30)

$$(35)\qquad \sum_{p\leq x}\log p\log\frac{x}{p} = x + O\left(xe^{-\sqrt[11]{\log x}}\right);$$

insbesondere liegt hierin der **Hadamardsche** Satz

$$\sum_{p\leq x}\log p\log\frac{x}{p}\sim x$$

enthalten.

---

*) In der Tat ist, $\log x = u^{110}$ gesetzt, $\frac{\log^9 x}{e^{\sqrt[10]{\log x}}} = \frac{u^{990}}{e^{(u^{11})}}$ für hinreichend große u kleiner als $\frac{1}{e^{\sqrt[11]{\log x}}} = \frac{1}{e^{(u^{10})}}$.

**) Die im Exponenten auftretende Zahl 11 könnte natürlich noch verkleinert werden, wie ein Blick auf die letzten Entwickelungen lehrt.

§ 6.

Aus (35) folgt, indem statt x $(1+h)x$ geschrieben wird, wo zur Abkürzung

$$e^{-\sqrt[12]{\log x}} = h$$

gesetzt ist,

$$\sum_{p \leqq (1+h)x} \log p \log \frac{(1+h)x}{p} = x + hx + O\left(xe^{-\sqrt[11]{\log x}}\right); \tag{36}$$

die Subtraktion ergibt aus (35) und (36)

$$\log(1+h) \sum_{p \leqq x} \log p + \sum_{x < p \leqq (1+h)x} \log p \log \frac{(1+h)x}{p} = hx + O\left(xe^{-\sqrt[11]{\log x}}\right). \tag{37}$$

Die zweite Summe der linken Seite von (37) ist $\geqq 0$ und

$$\leqq \sum_{x < p \leqq (1+h)x} \log p \log \frac{(1+h)x}{x} = \log(1+h) \sum_{x < p \leqq (1+h)x} \log p.$$

Also liefert (37) einerseits

$$\log(1+h) \sum_{p \leqq x} \log p \leqq hx + O\left(xe^{-\sqrt[11]{\log x}}\right), \tag{38}$$

andererseits

$$\log(1+h) \sum_{p \leqq (1+h)x} \log p \geqq hx + O\left(xe^{-\sqrt[11]{\log x}}\right). \tag{39}$$

In (39) möge statt x $\frac{x}{1+h}$ geschrieben werden:

$$\log(1+h) \sum_{p \leqq x} \log p \geqq \frac{h}{1+h} x + O\left(xe^{-\sqrt[11]{\log x}}\right). \tag{40}$$

(38) und (40) ergeben:

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leqq x} \log p \leqq \frac{h}{\log(1+h)} x + \frac{1}{\log(1+h)} O\left(xe^{-\sqrt[11]{\log x}}\right) \tag{41}$$

und

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leqq x} \log p \geqq \frac{h}{(1+h)\log(1+h)} x + \frac{1}{\log(1+h)} O\left(xe^{-\sqrt[11]{\log x}}\right). \tag{42}$$

$h = e^{-\sqrt[12]{\log x}}$ nimmt für $x = \infty$ zu Null ab, und zwar ist

$$\frac{h}{\log(1+h)} = \frac{h}{h + O(h^2)} = \frac{1}{1 + O(h)} = 1 + O(h) = 1 + O\left(e^{-\sqrt[12]{\log x}}\right) {}^{*)},$$

---

*) Die Abkürzung $O(g(h))$ bedeutet, daß der Quotient der betreffenden Funktion durch $g(h)$ für $x = \infty$, d. h. für $h = 0$ endlich bleibt.

$$\frac{h}{(1+h)\log(1+h)} = (1+O(h))\,\frac{h}{\log(1+h)} = (1+O(h))\,(1+O(h))$$
$$= 1 + O(h) = 1 + O\left(e^{-\sqrt[12]{\log x}}\right),$$

$$\frac{1}{\log(1+h)}\,O\left(xe^{-\sqrt[11]{\log x}}\right) = O\left(\frac{1}{h}\right)O\left(xe^{-\sqrt[11]{\log x}}\right) = O\left(e^{\sqrt[12]{\log x}}\,xe^{-\sqrt[11]{\log x}}\right)$$
$$= O\left(xe^{-\sqrt[12]{\log x}}\right).$$

Aus (41) und (42) folgt also

(43) $$\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log p = x + O\left(xe^{-\sqrt[12]{\log x}}\right).$$

§ 7.

Aus (43) ergibt sich weiter

$$\pi(x) = \sum_{p\leq x} 1 = \sum_{p \leq x}\frac{\log p}{\log p} = \sum_{n=2}^{x}\frac{\vartheta(n)-\vartheta(n-1)}{\log n}$$
$$= \sum_{n=2}^{x}\vartheta(n)\left(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)}\right) + \frac{\vartheta(x)}{\log(x+1)}$$
$$= \sum_{n=2}^{x} n\left(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)}\right) + \frac{x}{\log(x+1)}$$
$$+ O\sum_{n=2}^{x} ne^{-\sqrt[12]{\log n}}\left(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)}\right) + O\left(\frac{xe^{-\sqrt[12]{\log x}}}{\log(x+1)}\right)$$
$$= \sum_{n=2}^{x}\frac{1}{\log n}(n-(n-1)) + O\sum_{n=2}^{x} n\,e^{-\sqrt[12]{\log n}}\,\frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\log^2 n} + O\left(xe^{-\sqrt[12]{\log x}}\right)$$
$$= \sum_{n=2}^{x}\frac{1}{\log n} + O\sum_{n=2}^{x} ne^{-\sqrt[12]{\log n}}\,\frac{1}{n} + O\left(xe^{-\sqrt[12]{\log x}}\right)$$
$$= \int_2^x \frac{dx}{\log x} + O(1) + O\int_1^x e^{-\sqrt[12]{\log u}}\,du + O\left(xe^{-\sqrt[12]{\log x}}\right)$$
$$= Li(x) + O\int_1^{\sqrt{x}} 1\,du + O\int_{\sqrt{x}}^{x} e^{-\sqrt[12]{\log(\sqrt{x})}}\,du + O\left(xe^{-\sqrt[12]{\log x}}\right)$$
$$= Li(x) + O(\sqrt{x}) + O\left(xe^{-\frac{1}{\sqrt[12]{2}}\sqrt[12]{\log x}}\right) + O\left(xe^{-\sqrt[12]{\log x}}\right),$$

(44) $$\pi(x) = Li(x) + O\left(xe^{-\sqrt[13]{\log x}}\right);$$

insbesondere ist hiermit der Primzahlsatz

$$\pi(x) \sim Li(x)$$

bewiesen.

Übrigens ist Herr de la Vallée-Poussin in seiner letzten Arbeit*) sogar bis zu dem Nachweise gelangt, daß für eine passend gewählte Konstante γ

$$\pi(x) = Li(x) + O\left(xe^{-\gamma\sqrt{\log x}}\right) \tag{45}$$

ist; aber er stützt sich auf die Theorie der Hadamardschen Funktionen, während ich die Gleichung (44) allein mit den Hilfsmitteln der vorigen Paragraphen erhalten habe; (44) gestattet auch, die wichtige Folgerung zu ziehen, welche Herr de la Vallée-Poussin an (45) angeknüpft hat und auf deren Tragweite er in der Einleitung zu seiner Arbeit mit Recht hingewiesen**) hat:

Der Integrallogarithmus stellt die Menge der Primzahlen $\leq x$ asymptotisch dar und zwar besser als alle seine Näherungswerte in endlicher Form, welche durch die Summe der m ersten Glieder der (divergenten) Reihenentwickelung

$$\int \frac{dx}{\log x} = \frac{x}{\log x} + \frac{1!\,x}{\log^2 x} + \frac{2!\,x}{\log^3 x} + \frac{3!\,x}{\log^4 x} + \cdots + \frac{(m-1)!\,x}{\log^m x} + \cdots$$

für $m = 1, 2, 3, \cdots$ *dargestellt werden.*

Denn es ist, wenn α und β zwei Konstanten bezeichnen, für $x > 2$

$$Li(x) = \alpha + \int_2^x \frac{du}{\log u} = \beta + \frac{x}{\log x} + \frac{x}{\log^2 x} + \cdots + \frac{(m-1)!\,x}{\log^m x} + m!\int_2^x \frac{du}{\log^{m+1} u},$$

also

$$Li(x) - \beta - \left(\frac{x}{\log x} + \frac{x}{\log^2 x} + \cdots + \frac{(m-1)!\,x}{\log^m x}\right) = m!\int_2^x \frac{du}{\log^{m+1} u} > m!\int_2^x \frac{du}{\log^{m+1} x}$$
$$= \frac{m!\,(x-2)}{\log^{m+1} x};$$

während also nach (44) für jedes ganzzahlige positive m

$$\lim_{x=\infty} \frac{\log^{m+1} x}{x}\left(\pi(x) - Li(x)\right) = 0$$

ist, wird

$$\frac{\log^{m+1} x}{x}\left(\pi(x) - \frac{x}{\log x} - \frac{x}{\log^2 x} - \cdots - \frac{(m-1)!\,x}{\log^m x}\right)$$
$$= \frac{\log^{m+1} x}{x}\left(\pi(x) - Li(x)\right) + \frac{\log^{m+1} x}{x}\left(Li(x) - \frac{x}{\log x} - \frac{x}{\log^2 x} - \cdots - \frac{(m-1)!\,x}{\log^m x}\right)$$
$$> \frac{\log^{m+1} x}{x}\left(\pi(x) - Li(x)\right) + \frac{\beta\log^{m+1} x}{x} + m! - \frac{2\,m!}{x}$$

für $x = \infty$ nicht 0, sondern bleibt für alle hinreichend großen x oberhalb der positiven Zahl $\frac{m!}{2}$ gelegen.

*) „Sur la fonction etc.", S. 68.

**) l. c., S. 5—6.

Zweiter Teil.

Beweis des Primidealsatzes.

Einleitung.

Über die Verteilung der Primideale eines beliebigen algebraischen Zahlkörpers $\varkappa$ ist ein dem Primzahlsatz entsprechender Primidealsatz noch niemals bewiesen worden. Es bezeichne $\pi_\varkappa(x)$ die Anzahl der Primideale des Körpers, deren Norm $\leqq x$ ist; dann läßt sich leicht*) zeigen, daß, falls $\lim\limits_{x=\infty} \frac{\pi_\varkappa(x)}{Li(x)}$ existiert,

$$\lim_{x=\infty} \frac{\pi_\varkappa(x)}{Li(x)} = 1$$

ist. Einem Versuche, die Existenz jenes limes nachzuweisen, mußte naturgemäß ein Studium der zu einem beliebigen algebraischen Zahlkörper $\varkappa$ gehörigen Zetafunktion vorangehen**); Herr Dedekind***) hat diese Funktion $\zeta_\varkappa(s)$ durch jede der drei für $\Re(s) > 1$ giltigen Gleichungen (46), (47) und (48) definiert:

$$\zeta_\varkappa(s) = \sum_{\mathfrak{n}} \frac{1}{N\mathfrak{n}^s}, \tag{46}$$

wo $\mathfrak{n}$ alle Ideale des Körpers durchläuft und $N\mathfrak{n}$ die Norm von $\mathfrak{n}$ bezeichnet,

$$\zeta_\varkappa(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{n^s}, \tag{47}$$

wo $F(n)$ die Anzahl der Darstellungen der ganzen rationalen Zahl n als Norm eines Ideals des Körpers ist, und

$$\zeta_\varkappa(s) = \prod_{\mathfrak{p}} \frac{1}{1 - \frac{1}{N\mathfrak{p}^s}}, \tag{48}$$

wo $\mathfrak{p}$ alle Primideale des Körpers durchläuft.

Von den Sätzen, welche ich a. a. O. über diese Funktion bewiesen habe, gebrauche ich im Folgenden diese vier:

---

*) Vergl. meine auf S. 647, Anm. 3 zitierte Arbeit, S. 142.

**) Vergl. Hilbert, „Mathematische Probleme", Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, 1900, S. 275—276 und Archiv der Mathematik und Physik, Ser. 3, Bd. 1, 1901, S. 215.

***) Vergl. z. B. die von ihm herausgegebenen Vorlesungen Dirichlets über Zahlentheorie, 4. Aufl., 1894, S. 610—611.

1)*) *Wenn k der Grad des Körpers ist, so ist die Funktion $\zeta_\varkappa(s)$ über die Gerade $\Re(s) = 1$ hinaus mindestens bis zur Geraden $\Re(s) = 1 - \frac{1}{k}$ hin fortsetzbar und ist in der Halbebene $\Re(s) > 1 - \frac{1}{k}$ eine eindeutige analytische Funktion mit dem Pole erster Ordnung $s = 1$ als einziger singulärer Stelle.*

2)**) *$\zeta_\varkappa(s)$ verschwindet für kein s mit dem reellen Teil* 1.

3)***) *Es gibt eine positive Konstante γ, sodaß für alle $t \geqq 10$*

$$|\zeta_\varkappa(1+ti)| > \frac{\gamma}{\log^\gamma t} \tag{49}$$

ist.

4)†) *Es gibt zwei Konstanten λ und ϱ, so daß für*

$$s = \sigma + ti, \quad t \geqq 10, \quad 1 - \frac{\lambda}{\log t} \leqq \sigma \leqq 2$$

$$|\zeta_\varkappa'(\sigma+ti)| < \varrho \log^2 t \tag{50}$$

ist.

Da von der $\zeta_\varkappa$-Funktion nichts weiteres bekannt ist als die a. a. O. bewiesenen Sätze, so erschien mir zunächst die Entscheidung über die Richtigkeit des Primidealsatzes noch in einiger Ferne zu liegen. Wenigstens ist bei dem gegenwärtigen Stande der Idealtheorie eine Übertragung der bekannten, beim Beweise des Primzahlsatzes gebräuchlichen analytischen Methoden auf den allgemeinen Fall nicht möglich††).

Aber der im ersten Teile dieser Arbeit angegebene neue Beweis des Primzahlsatzes hat neben seiner elementaren Natur den weiteren Vorteil, daß sich sein Gedankengang in Verbindung mit den angeführten Eigenschaften der $\zeta_\varkappa$-Funktion ohne weiteres auf den Fall eines beliebigen algebraischen Zahlkörpers übertragen läßt. Dies stellt den ersten Beweis des Primidealsatzes dar, und es ergeben sich zugleich für die Größenordnung des Restgliedes dieselben Abschätzungen wie im ersten Teile dieser Arbeit für die Differenz der Primzahlmenge und des Integrallogarithmus.

§ 1.

Aus (50) folgt (analog wie auf S. 653) für $t \geqq 10$, $-\frac{\lambda}{\log t} \leqq \varepsilon \leqq 1$

$$|\zeta_\varkappa(1+\varepsilon+ti) - \zeta_\varkappa(1+ti)| \leqq \varrho |\varepsilon| \log^2 t; \tag{51}$$

---

*) l. c., S. 81.

**) l. c., S. 82.

***) l. c., S. 96.

†) l. c., S. 94.

††) l. c., S. 71 und 143.

für $t \geqq 10$, $-\frac{\gamma}{2\varrho \log^9 t} \leqq \varepsilon \leqq \frac{\gamma}{2\varrho \log^9 t}$ *) ist also nach (49) und (51)

$$|\zeta_\varkappa(1+\varepsilon+ti)| \geqq |\zeta_\varkappa(1+ti)| - |\zeta_\varkappa(1+\varepsilon+ti) - \zeta_\varkappa(1+ti)|$$
$$> \frac{\gamma}{\log^7 t} - \varrho \cdot \frac{\gamma}{2\varrho \log^9 t} \log^2 t = \frac{\gamma}{2\log^7 t},$$

und daher in Verbindung mit (50)

$$(52) \qquad \left| \frac{\zeta'_\varkappa(1+\varepsilon+ti)}{\zeta_\varkappa(1+\varepsilon+ti)} \right| < \frac{2\varrho}{\gamma} \log^9 t.$$

Ferner ist für $t \geqq 10$, $\frac{\gamma}{2\varrho \log^9 t} \leqq \varepsilon \leqq 1$

$$\left| \frac{\zeta'_\varkappa(1+\varepsilon+ti)}{\zeta_\varkappa(1+\varepsilon+ti)} \right| = \left| -\sum_{\mathfrak{p}} \log N\mathfrak{p} \left(\frac{1}{N\mathfrak{p}^{1+\varepsilon+ti}} + \frac{1}{N\mathfrak{p}^{2(1+\varepsilon+ti)}} + \cdots \right) \right|$$
$$(53) \qquad \leqq \sum_{\mathfrak{p}} \log N\mathfrak{p} \left(\frac{1}{N\mathfrak{p}^{1+\varepsilon}} + \frac{1}{N\mathfrak{p}^{2(1+\varepsilon)}} + \cdots \right) = -\frac{\zeta'_\varkappa(1+\varepsilon)}{\zeta_\varkappa(1+\varepsilon)};$$

da $\frac{\zeta'_\varkappa(s)}{\zeta_\varkappa(s)}$ in $s = 1$ einen Pol erster Ordnung hat, ist eine Konstante τ so bestimmbar, daß für $0 < \varepsilon \leqq 1$

$$-\frac{\zeta'_\varkappa(1+\varepsilon)}{\zeta_\varkappa(1+\varepsilon)} = \left| \frac{\zeta'_\varkappa(1+\varepsilon)}{\zeta_\varkappa(1+\varepsilon)} \right| < \frac{\tau}{\varepsilon}$$

ist, was aus (53)

$$(54) \qquad \left| \frac{\zeta'_\varkappa(1+\varepsilon+ti)}{\zeta_\varkappa(1+\varepsilon+ti)} \right| < \frac{\tau}{\varepsilon} \leqq \frac{2\varrho\tau}{\gamma} \log^9 t \qquad \left(t \geqq 10,\ \frac{\gamma}{2\varrho \log^9 t} \leqq \varepsilon \leqq 1 \right)$$

ergibt.

(52) und (54) besagen zusammengenommen: Es gibt zwei Konstanten b und c, sodaß für $s = \sigma + ti$, $t \geqq 10$, $1 - \frac{b}{\log^9 t} \leqq \sigma \leqq 2$

$$\left| \frac{\zeta'_\varkappa(s)}{\zeta_\varkappa(s)} \right| < c \log^9 t$$

ist. Es sei nun a eine positive Zahl, welche kleiner ist als b und als der Abstand der Geraden $\Re(s) = 1$ von allen im Rechteck $1 - \frac{1}{2k} \leqq \Re(s) < 1$, $0 \leqq \Im(s) \leqq 10$ etwa vorhandenen Nullstellen der Funktion $\zeta_\varkappa(s)$; dann verschwindet die $\zeta_\varkappa$-Funktion nicht in dem Teile der Ebene, welcher rechts von der Kurve

*) Die nur nach unten beschränkte Konstante ϱ in (50) kann so groß gewählt werden, daß $\frac{\gamma}{2\varrho} < \lambda$ ist; dann ist $\frac{\gamma}{2\varrho \log^9 t} < \frac{\lambda}{\log t}$ und < 1.

$$\begin{cases} \sigma = 1 - \dfrac{a}{\log^9 t}\,, & t \geqq 10 \\ \sigma = 1 - \dfrac{a}{\log^9 10}\,, & -10 \leqq t \leqq 10 \\ \sigma = 1 - \dfrac{a}{\log^9 (-t)}\,, & t \leqq -10 \end{cases}$$

liegt; $\zeta_\varkappa(s)$ verschwindet auch nicht auf dieser Kurve, und es ist für $t \geqq 10,\ 1 - \frac{a}{\log^9 t} \leqq \sigma \leqq 2$

$$\left|\frac{\zeta_\varkappa'(\sigma + ti)}{\zeta_\varkappa(\sigma + ti)}\right| < c \log^9 t. \tag{55}$$

§ 2.

Wenn die in der Halbebene $\Re(s) > 1$ für $-\frac{\zeta_\varkappa'(s)}{\zeta_\varkappa(s)}$ giltige Doppelreihe

$$\sum_{\mathfrak{p}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}^{ms}} = \sum_{\mathfrak{p}} \log N\mathfrak{p} \left(\frac{1}{N\mathfrak{p}^s} + \frac{1}{N\mathfrak{p}^{2s}} + \cdots\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L_\varkappa(n)}{n^s}$$

nach wachsenden Normen geordnet ist ($L_\varkappa(n)$ ist $= \Sigma \log N\mathfrak{p}$, wo $\mathfrak{p}$ alle Primideale durchläuft, für welche n Norm oder Normpotenz ist), so ist die Reihe für $s = 2 + ti$ wegen $\left|\frac{1}{n^{2+ti}}\right| = \frac{1}{n^2}$ gleichmäßig konvergent.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^s}{s^2} \frac{L_\varkappa(n)}{n^s}$$

kann also zwischen den Grenzen $2 - x^2 i$ und $2 + x^2 i$ gliedweise nach s integriert werden, und man erhält nach (26)

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{2-x^2 i}^{2+x^2 i} \frac{x^s}{s^2} \frac{\zeta_\varkappa'(s)}{\zeta_\varkappa(s)} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{2-x^2 i}^{2+x^2 i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^s}{s^2} \frac{L_\varkappa(n)}{n^s} ds = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} L_\varkappa(n) \int_{2-x^2 i}^{2+x^2 i} \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^s}{s^2} ds$$

$$= \sum_{n=1}^{x} L_\varkappa(n) \log \frac{x}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} L_\varkappa(n)\, \Theta_{\left(x, \frac{x}{n}\right)} \frac{1}{n^2}$$

$$= \sum_{n=1}^{x} L_\varkappa(n) \log \frac{x}{n} + O(1)$$

$$= \sum_{N\mathfrak{p} \leq x} \log N\mathfrak{p} \log \frac{x}{N\mathfrak{p}} + \sum_{N\mathfrak{p} \leq \sqrt{x}} \log N\mathfrak{p} \log \frac{x}{N\mathfrak{p}^2} + \cdots$$

$$+ \sum_{N\mathfrak{p} \leq \sqrt[\nu]{x}} \log N\mathfrak{p} \log \frac{x}{N\mathfrak{p}^\nu} + O(1),$$

wo ν die größte ganze Zahl $\leqq \frac{\log x}{\log 2}$ bezeichnet; wegen

$$\vartheta_\varkappa(x) = \sum_{N\mathfrak{p} \leq x} \log N\mathfrak{p} = O(x)^{*})$$

ist hierin

$$\sum_{N\mathfrak{p} \leq \sqrt{x}} \log N\mathfrak{p} \log \frac{x}{N\mathfrak{p}^2} + \cdots + \sum_{N\mathfrak{p} \leq \sqrt[\nu]{x}} \log N\mathfrak{p} \log \frac{x}{N\mathfrak{p}^\nu} \leqq (\nu - 1) \log x \sum_{N\mathfrak{p} \leq \sqrt{x}} \log N\mathfrak{p}$$

$$= O\left(\log^2 x\, \vartheta_\varkappa(\sqrt{x})\right) = O\left(\sqrt{x} \log^2 x\right),$$

also

$$(56) \qquad \sum_{N\mathfrak{p} \leq x} \log N\mathfrak{p} \log \frac{x}{N\mathfrak{p}} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{2-x^2 i}^{2+x^2 i} \frac{x^s}{s^2} \frac{\zeta_\varkappa'(s)}{\zeta_\varkappa(s)}\, ds + O\left(\sqrt{x} \log^2 x\right).$$

§ 3.

Die Integration über die auf S. 659 angegebene Bahn ergibt, da das Residuum des Integranden für $s = 1$ auch hier $-x$ ist und da der Ungleichung (22) hier die gleichlautende Ungleichung (55) entspricht, wörtlich wie in § 5 des ersten Teiles

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{2-x^2 i}^{2+x^2 i} \frac{x^s}{s^2} \frac{\zeta_\varkappa'(s)}{\zeta_\varkappa(s)}\, ds = -x + O\left(x e^{-\sqrt[11]{\log x}}\right),$$

also wegen (56)

$$\sum_{N\mathfrak{p} \leq x} \log N\mathfrak{p} \log \frac{x}{N\mathfrak{p}} = x + O\left(x e^{-\sqrt[11]{\log x}}\right).$$

§ 4.

Daraus folgt, wenn h zur Abkürzung die Funktion $e^{-\sqrt[12]{\log x}}$ bezeichnet (welche für $x = \infty$ unendlich klein wird), durch Subtraktion von

$$\sum_{N\mathfrak{p} \leq (1+h)x} \log N\mathfrak{p} \log \frac{(1+h)x}{N\mathfrak{p}} = x + hx + O\left(x e^{-\sqrt[11]{\log x}}\right)$$

wie in § 6 des ersten Teiles

$$(57) \qquad \vartheta_\varkappa(x) = \sum_{N\mathfrak{p} \leq x} \log N\mathfrak{p} = x + O\left(x e^{-\sqrt[12]{\log x}}\right).$$

§ 5.

Es sei $G(n)$ die Anzahl**) der Darstellungen der ganzen rationalen Zahl n als Norm eines Primideales; dann ist

---

*) l. c., S. 122.

**) $G(n)$ kann natürlich nur für Primzahlpotenzen von 0 verschieden sein.

$$\vartheta_{\varkappa}(x) = \sum_{n=1}^{x} G(n) \log n;$$

wegen

$$\pi_{\varkappa}(x) = \sum_{N\mathfrak{p} \leq x} 1 = \sum_{n=1}^{x} G(n) = \sum_{n=1}^{x} \frac{G(n) \log n}{\log n} = \sum_{n=1}^{x} \frac{\vartheta_{\varkappa}(n) - \vartheta_{\varkappa}(n-1)}{\log n}$$

ergibt also (57) genau wie (43) auf S. 663, daß

$$\pi_{\varkappa}(x) = Li(x) + O\left(xe^{-\sqrt[13]{\log x}}\right)$$

ist.

A fortiori ist also

$$\pi_{\varkappa}(x) \sim Li(x),$$

$$\pi_{\varkappa}(x) \sim \int_{2}^{x} \frac{dx}{\log x},$$

$$\pi_{\varkappa}(x) \sim \frac{x}{\log x}.$$

Die Anzahl der Primideale eines algebraischen Zahlkörpers, deren Norm $\leqq x$ *ist, ist asymptotisch gleich dem Integrallogarithmus von* x*, und die Differenz* $\frac{\pi_{\varkappa}(x)}{Li(x)} - 1$ *wird für* $x = \infty$ *stärker* 0 *als jede Potenz von* $\log x$ *mit negativem Exponenten.*

Wenn also $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ zwei beliebige algebraische Zahlkörper sind (z. B. $\varkappa_1$ beliebig und $\varkappa_2$ gleich dem natürlichen Rationalitätsbereich), so ist

$$\lim_{x=\infty} \frac{\pi_{\varkappa_1}(x)}{\pi_{\varkappa_2}(x)} = 1.$$

Berlin, den 22. Oktober 1902.

Über die Klassenzahl der binären quadratischen Formen von negativer Discriminante.

Von

Edmund Landau in Berlin.

Im Artikel 303 der disquisitiones arithmeticae spricht Gauß die Vermutung aus, daß die Menge der negativen Discriminanten, für welche die Anzahl der Klassen eigentlich primitiver positiver binärer quadratischer Formen einen bestimmten Wert h hat, eine endliche ist; er hält einen strengen Beweis hiervon für sehr schwierig und begnügt sich damit, durch Abzählung in den ersten Tausenden zu konstatieren, daß die den kleinsten Werten $h = 1, 2, 3, \cdots$ entsprechenden negativen Discriminanten zuerst in geringer Zahl vorhanden sind, aber in dem weiteren Verlaufe des betrachteten Intervalles nicht mehr auftreten; dies berechtigt zu der Vermutung*), daß $h(D) = h(-\Delta)$ mit Δ ins Unendliche wächst.

Das Problem, diese Vermutung zu bestätigen oder zu widerlegen, scheint auch bei dem heutigen Stande der Arithmetik und Analysis in seiner Allgemeinheit noch nicht angreifbar zu sein; dagegen ist es, wie im folgenden ausgeführt werden soll, wohl möglich, für den Fall $h = 1$**) eine Entscheidung herbeizuführen. Gauß hat empirisch konstatiert, daß bis $-D = \Delta = 3000$ die fünf Werte $\Delta = 1, 2, 3, 4, 7$ die einzigen sind, denen die Klassenzahl 1 entspricht, und es läßt sich in der Tat nachweisen, daß (in Übereinstimmung mit der a. a. O. ausgesprochenen Ver-

---

*) In der erwähnten Tabelle zerlegt übrigens Gauß die einem bestimmten Werte von h entsprechenden Discriminanten in Unterabteilungen nach der Anzahl g der Geschlechter, welche ja ein Teiler von h ist:

$$h = gk,$$

und er spricht die Vermutung in der Form aus, daß die jedem Typus (g, k) entsprechenden Discriminanten nur in endlicher Anzahl vorhanden sind; dies ist aber mit der Formulierung des Textes sachlich identisch.

**) In Gaußscher Terminologie ist dies der Typus I. 1, d. h. $g = 1$, $k = 1$, also die erste Zeile der Gaußschen Tabelle.

mutung) überhaupt nur für jene fünf negativen Discriminanten $h = 1$ ist; dieser Nachweis läßt sich sogar mit elementaren Mitteln erbringen, während die Gauß-Dirichletschen Klassenzahlformeln hierfür ungeeignet scheinen.

Es handelt sich also darum, nachzuweisen, daß für jede Discriminante $D < -7$ mindestens zwei nicht äquivalente Formen*) existieren, oder, was dasselbe besagt, daß mindestens eine der Hauptform $(1, 0, \Delta)$ nicht äquivalente Form vorhanden ist. Dazu genügt es, die Existenz einer zweiten reduzierten Form (a, b, c) nachzuweisen, d. h. dreier ganzer Zahlen a, b, c, für welche zugleich

(1) $$\Delta = ac - b^2,$$

(2) $$2|b| \leqq a \leqq c$$

und

(3) $$\{a, 2b, c\} = 1\text{**)}$$

ist, aber nicht zugleich $a = 1$, $b = 0$, $c = \Delta$. Denn es können zwar in gewissen Fällen zwei reduzierte Formen äquivalent sein; dies tritt jedoch nur dann ein, wenn in (2) ein Gleichheitszeichen gilt; dann sind die beiden Formen $\left(a, \frac{1}{2}a, c\right)$ und $\left(a, -\frac{1}{2}a, c\right)$ bezw. (a, b, a) und $(a, -b, a)$ äquivalent; die Hauptform $(1, 0, \Delta)$ ist also keinesfalls einer anderen reduzierten Form äquivalent.

Zunächst darf für $h = 1$ außer $(1, 0, \Delta)$ keine reduzierte Form mit mittlerem Koeffizienten 0 existieren; es darf also kein Zahlenpaar a, c geben, für welches

(4) $$\Delta = ac,$$

(5) $$1 < a \leqq c$$

und

(6) $$\{a, c\} = 1$$

ist. Δ darf also nicht in zwei von $1, \Delta$ verschiedene teilerfremde Faktoren zerlegbar sein, da sonst der kleinere Faktor mit a, der größere mit c bezeichnet werden kann, was den Relationen (4), (5), (6) genügen würde. Δ darf also nicht durch zwei verschiedene Primzahlen teilbar sein, ist also eine Primzahlpotenz:

(7) $$\Delta = p^{\lambda}.\text{***)}$$

*) Es handelt sich durchweg um eigentlich primitive positive Formen.

**) $\{\alpha, \beta, \cdots\}$ soll den größten gemeinsamen Teiler der ganzen Zahlen $\alpha, \beta, \cdots$ bezeichnen.

***) Man könnte versucht sein, für die vorliegende Aufgabe die Theorie der Geschlechter heranzuziehen, da die Existenz mindestens zweier Geschlechter a fortiori

I. Es sei $p = 2$, also

$$\Delta = 2^\lambda.$$

Für $\lambda = 1$ und $\lambda = 2$, d. h. $\Delta = 2$ und $\Delta = 4$ ist in der Tat $h = 1$; für $\lambda = 3$, d. h. $\Delta = 8$ ist $h = 2$. Für $\lambda \geqq 4$ werde mit Rücksicht auf

$$\Delta + 2^2 = \Delta + 4 = 4(2^{\lambda-2}+1)$$

$$a = 4,\ b = 2,\ c = 2^{\lambda-2} + 1$$

gesetzt; dann erfüllen a, b, c die Relationen (1), (2), (3), und es würde gegen die Annahme $h = 1$ eine zweite reduzierte Form existieren.

II. Es sei p, also Δ ungerade. Ich setze $b = 1$; dann darf es (unter der Annahme $h = 1$) kein Zahlenpaar a, c geben, für welches zugleich

(8) $$\Delta + 1 = ac,$$

(9) $$2 \leqq a \leqq c$$

und

(10) $$\{a, 2, c\} = 1$$

ist. Die gerade Zahl $\Delta + 1$ muß also eine Potenz von 2 sein; denn hätte $\Delta + 1$ einen ungeraden Faktor > 1, so wäre es in zwei teilerfremde Faktoren a und $c \geqq a$ zerlegbar, welche beide $\geqq 2$ sind, was (8), (9) und (10) erfüllen würde. Daher ist

$$\Delta + 1 = 2^\nu.$$

Für $\nu = 1, 2, 3$ ergibt sich $\Delta = 1, 3, 7$, wofür in der Tat $h = 1$ ist; für $\nu = 4$ ($\Delta = 15$) ist $h = 2$, für $\nu = 5$ ($\Delta = 31$) ist $h = 3$. Für $\nu \geqq 6$ genügen wegen

$$\Delta + 3^2 = \Delta + 9 = \Delta + 1 + 8 = 2^\nu + 8 = 8(2^{\nu-3}+1)$$

die drei Zahlen

$$a = 8,\ b = 3,\ c = 2^{\nu-3} + 1$$

den Relationen (1), (2), (3), so daß auch hier $h > 1$ wäre.

Damit ist bewiesen:

Es gibt nur endlich viele negative Discriminanten, nämlich $\Delta = -1, -2, -3, -4, -7$, *für welche die Anzahl der eigentlich primitiven positiven Klassen gleich* 1 *ist.*

---

die Existenz mindestens zweier Klassen bedingt. Jedoch kommt man so nicht viel weiter als bis zur Gleichung (7); aus $h = 1$ folgt

$$1 = g = 2^{\varpi+\sigma-1},$$

wo ϖ die Anzahl der ungeraden Primfaktoren von D ist, $\sigma = 0$ für $D \equiv 1 \pmod{4}$, $\sigma = 2$ für $D \equiv 0 \pmod{8}$ und sonst $\sigma = 1$. g ist also dann und nur dann $= 1$, wenn Δ eine ungerade Primzahlpotenz von der Form $4\nu + 3$ ist oder wenn $\Delta = 1, 2, 4$ ist. Der Hauptfall der ungeraden Primzahlpotenz bleibt also hiernach offen und ist wie im Texte zu erledigen.

Ich benutze diese Gelegenheit, um einen analogen Endlichkeitsbeweis bei einer dem Namen, nicht dem Inhalte nach verwandten Frage zu führen. Herr Frobenius*) hat in die Gruppentheorie den Begriff der Klassen konjugierter Elemente einer Gruppe eingeführt, durch folgende Definitionen und Sätze: Es mögen zwei Elemente A und B einer (abstrakten) Gruppe $\mathfrak{G}$ konjugiert oder ähnlich heißen, wenn mindestens ein Element C in der Gruppe gefunden werden kann, für welches

$$C^{-1}AC = B \tag{11}$$

ist. Diese Definition ist in A und B symmetrisch, da aus (11)

$$(C^{-1})^{-1}BC^{-1} = A$$

folgt, wo C^{-1} der Gruppe $\mathfrak{G}$ angehört; man erkennt ferner leicht, daß jedes Element sich selbst konjugiert ist und daß zwei einem dritten konjugierte Elemente einander konjugiert sind; man gelangt so zur Einteilung aller n Elemente der Gruppe $\mathfrak{G}$ in h Klassen; die Anzahlen der Elemente dieser Klassen seien beziehlich $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_h$, und die Klassen seien so geordnet, daß

$$\nu_1 \leqq \nu_2 \leqq \cdots \leqq \nu_h$$

ist. In

$$n = \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_h \tag{12}$$

sind, wie Herr Frobenius gezeigt hat, die Zahlen $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_h$ sämtlich Divisoren von n, und ν_1 ist gleich 1, weil in jeder Gruppe für beliebiges C

$$C^{-1}EC = E$$

ist, falls E das Einheitselement bedeutet, so daß dieses nur sich selbst konjugiert ist und eine Klasse für sich bildet.

Die letztere Bemerkung ergibt ohne weiteres, daß der Klassenzahl $h = 1$ nur die identische Gruppe entspricht, indem jede andere außer dem Einheitselement noch mindestens ein Element, also noch mindestens eine Klasse enthält. Im Falle $h = 2$ würde $\nu_1 = 1$ und $\nu_2 = n - 1$ sein; da $n - 1$ nur für $n = 2$ die Zahl n teilt, gehört hierher nur die Gruppe zweiter Ordnung.

Ich behaupte nun, daß allgemein jeder Klassenzahl h nur endlich viele Gruppen entsprechen; da zu jeder Ordnung n nur endlich viele Gruppen gehören, läßt sich die Behauptung auch so aussprechen: nach Annahme einer Zahl h läßt sich eine Zahl $N(h)$ so bestimmen, daß für alle $n \geqq N$ die Klassenzahl aller Gruppen der Ordnung n größer als h ist.

Da $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_h$ Divisoren von n sind, kann man in (12)

$$1 = \nu_1 = \frac{n}{g_1}, \; \nu_2 = \frac{n}{g_2}, \cdots, \nu_h = \frac{n}{g_h}$$

*) „Neuer Beweis des Sylowschen Satzes", Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 100, 1887, S. 181.

setzen, wo $g_1, g_2, \cdots, g_h$ ganze Zahlen sind, und zwar ist $g_1 = n$ und

(13) $$g_1 \geqq g_2 \geqq \cdots \geqq g_h;$$

aus (12) folgt

$$n = \frac{n}{g_1} + \frac{n}{g_2} + \cdots + \frac{n}{g_h},$$

(14) $$\frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_2} + \cdots + \frac{1}{g_h} = 1.$$

Von der diophantischen Gleichung (14) läßt sich nun nachweisen, daß sie bei gegebenem h nur endlich viele Lösungen in positiven ganzen Zahlen $g_1, g_2, \cdots, g_h$ besitzt, oder, was nicht spezieller ist, daß sie bei gegebenem h nur endliche viele Lösungen in positiven ganzen Zahlen $g_1, g_2, \cdots, g_h$ mit der Nebenbedingung (13) besitzt. Aus (13) und (14) folgt nämlich zunächst

$$1 \leqq \frac{1}{g_h} + \frac{1}{g_h} + \cdots + \frac{1}{g_h} = \frac{h}{g_h},$$

$$g_h \leqq h.$$

g_h ist also nur endlich vieler Werte fähig; für $h \geqq 2$ ist der Wert $g_h = 1$ jedenfalls unbrauchbar, und für jeden der übrigen eventuell brauchbaren $h - 1$ Werte $g_h = 2, 3, \cdots, h$ ergibt sich weiter

$$1 - \frac{1}{g_h} = \frac{1}{g_1} + \frac{1}{g_2} + \cdots + \frac{1}{g_{h-1}} \leqq \frac{1}{g_{h-1}} + \frac{1}{g_{h-1}} + \cdots + \frac{1}{g_{h-1}} = \frac{h-1}{g_{h-1}},$$

$$g_{h-1} \leqq \frac{h-1}{1 - \frac{1}{g_h}} \leqq \frac{h-1}{1 - \frac{1}{2}} = 2(h-1),$$

und so fort. Es sei schon bewiesen, daß in (14) $g_h, g_{h-1}, \cdots, g_\lambda$ $(\lambda \geqq 2)$ beziehlich gewisse Schranken $G_h, G_{h-1}, \cdots, G_\lambda$ nicht übersteigen können. Unter den endlich vielen Möglichkeiten, $g_h, g_{h-1}, \cdots, g_\lambda$ beziehlich $\leqq G_h, G_{h-1}, \cdots, G_\lambda$ zu wählen, gibt es a fortiori nur endlich viele, für welche außerdem*)

(15) $$\frac{1}{g_\lambda} + \cdots + \frac{1}{g_{h-1}} + \frac{1}{g_h} < 1$$

ist, und nur diese kommen zur Bildung von Lösungen von (14) in Frage. Für jedes solche System $g_h, g_{h-1}, \cdots, g_\lambda$ ergibt sich

$$1 - \frac{1}{g_\lambda} - \cdots - \frac{1}{g_{h-1}} - \frac{1}{g_h} = \frac{1}{g_1} + \cdots + \frac{1}{g_{\lambda-1}} \leqq \frac{1}{g_{\lambda-1}} + \cdots + \frac{1}{g_{\lambda-1}} = \frac{\lambda-1}{g_{\lambda-1}},$$

$$g_{\lambda-1} \leqq \frac{\lambda-1}{1 - \frac{1}{g_\lambda} - \cdots - \frac{1}{g_{h-1}} - \frac{1}{g_h}};$$

*) Daß (15), ohne Nebenbedingungen als diophantische Ungleichung aufgefaßt, bei gegebenem h unendlich viele Lösungen hat, ist unerheblich.

also existiert auch für $g_{\lambda-1}$ eine obere Schranke $G_{\lambda-1}$, und man erkennt durch vollständige Induktion, daß (14) nur endlich viele Lösungen besitzt*).

Da nun die größte der Zahlen g gleich n ist, so ergibt sich, daß in (12) bei gegebenem h die Zahl n eine endliche Schranke nicht übersteigen kann; anders ausgedrückt: es gibt nur endlich viele Zahlen, welche als Summe von h ihrer Divisoren, unter denen der Divisor 1 als Summand vorkommt, darstellbar sind. Da zu jedem n nur endlich viele Gruppen gehören, ist damit bewiesen:

Es gibt nur endlich viele Gruppen mit gegebener Klassenzahl.

Berlin, den 4. Oktober 1902.

---

*) Natürlich erkennt man ebenso, daß $\frac{1}{g_1}+\frac{1}{g_2}+\cdots+\frac{1}{g_h}$ bei gegebenem h keinen Wert unendlich oft annehmen kann.

Über die singulären Elemente der algebraischen Kurven.

Von

M. NOETHER in Erlangen.*)

Der Begriff der „Elemente erster Ordnung" der Ebene, nämlich von Punkt und Geraden, die ineinander liegen — der Grundbegriff für die Theorie der Differentialgleichungen erster Ordnung — ist schon seit lange auch für die Theorie der singulären Zweige einer algebraischen Kurve benutzt worden. Bei dieser Anwendung ist die von Lie als „vereinigte Lage" aufgefaßte Bedingung zwischen je zwei konsekutiven Elementen erster Ordnung von selbst erfüllt. Ich selbst habe solche Elemente erster Ordnung, unter dem Namen „Kurvenelemente", von je meinen geometrischen Betrachtungen über singuläre Zweige zu Grunde gelegt. Insbesondere habe ich in einer Note vom Juni 1893: „Consecutive und coincidirende Elemente einer algebraischen Curve" (Mathematical Papers, Chicago Kongreß) bestimmt, wie viele unter sich konsekutive „Kurvenelemente" nach Punkt und Linie koinzidieren, wie viele nächstfolgende solche Elemente wieder unter einander, aber nicht mit den vorhergehenden, koinzidieren, etc.

In neuerer Zeit ist die Theorie der „Elemente zweiter und höherer Ordnung" der Ebene, und ihrer Vereine, nach der Seite der projektiven Koordinatenbestimmung hin — wichtig für die Theorie der Differentialgleichungen höherer Ordnung — von den Herren Engel (Berichte der sächs. Ges. d. Wiss. vom Juli 1893 und Febr. 1902) und Study (ibid. Juli 1901) ausgebaut worden. In der Note von 1902 („Die höheren Differentialquotienten") spricht Engel aus, daß aus diesem allgemeinen Begriffe ein ganz neues Licht auch auf die singulären Stellen der algebraischen Kurven zu fallen scheine, und er deutet die Richtung an, in welcher sich die einschlägigen Definitionen eines solchen Zweiges bewegen sollen.

Ich will hier zeigen, daß sich meine älteren Betrachtungen, welchen wesentlich die Begriffe der eindeutigen Transformation zu Grunde liegen,

*) Im Auszug der physik.-med. Societät zu Erlangen am 7. Juli 1902 vorgelegt.

auch unmittelbar als Definitionen eines singulären Zweiges durch „Elemente höherer Ordnung" aussprechen lassen. Dabei ergeben sich aber Maßzahlen, welche mit den von Engel angedeuteten nicht übereinstimmen.

1.

Zwischen den Koordinaten (x, y) eines Punktes und den Koordinaten (u, w) der zugehörigen, mit (x, y) inzidenten Linie einer algebraischen Kurve nehmen wir die Beziehungen an:

$$ux + y + w = 0,$$

$$u = -\frac{dy}{dx}, \qquad w = x\frac{dy}{dx} - y,$$

$$x = -\frac{dw}{du}, \qquad y = u\frac{dw}{du} - w.$$

Für einen singulären Zweig Z der Kurve habe man in der Nähe des Punktes $(x = y = 0)$ und der Linie $(u = w = 0)$ die Entwicklungen nach einem die Punkte und Linien eindeutig bestimmenden Parameter t:

(1) $\quad x = a_0 t^{\Delta} + a_1 t^{\Delta+1} + \cdots, \qquad y = b_0 t^{\Delta+\Delta'} + b_1 t^{\Delta+\Delta'+1} + \cdots,$

(1′) $\quad u = a_0' t^{\Delta'} + a_1' t^{\Delta'+1} + \cdots, \qquad w = b_0' t^{\Delta+\Delta'} + b_1' t^{\Delta+\Delta'+1} + \cdots,$

wobei

$$a_0,\ b_0,\ a_0',\ b_0' \neq 0, \qquad \Delta \geqq 1, \qquad \Delta' \geqq 1,$$

$$\frac{b_0}{\Delta} = \frac{b_0'}{\Delta'} = -\frac{a_0 a_0'}{\Delta + \Delta'}.$$

„Konsekutive" Elemente von Z, ein und derselben Ordnung, werden durch aufeinanderfolgende Werte von t $(t = 0,\ dt,\ 2dt, \cdots)$ erhalten. Bestimmt ein Größensystem $(p, q, r, \cdots)$ für $t = 0$ ein Element höherer Ordnung, und verschwinden für $t = 0$ alle Differentialquotienten dieser Größen nach t, bis zu den $(h-1)^{\text{ten}}$ inkl., aber nicht alle h^{ten}, so sagen wir, daß h konsekutive dieser Elemente „koinzidieren". Konsekutive Elemente von Z werden, auch wenn sie koinzidieren, als von einander verschieden aufgefaßt.

Da die Punkte des Zweiges Z, als „Punktelemente 0^{ter} Ordnung E_0", durch das Größensystem (x, y) bestimmt sind, so koinzidieren nach (1) in $(x = y = 0)$ $h_0 = \Delta$ konsekutive Punkte E_0; und da die Linien von Z, als „Linienelemente 0^{ter} Ordnung E_0'", durch das System (u, w) bestimmt sind, so koinzidieren nach (1′) in $(u = w = 0)$ $h_0' = \Delta'$ konsekutive Linien E_0'. Da ferner ein „Element erster Ordnung" von Z durch das Größensystem (x, y, u, w) bestimmt wird, so koinzidieren nach (1), (1′) in $(x = y = u = w = 0)$ h_1 konsekutive Elemente erster Ordnung E_1 von Z, wenn h_1 die kleinere der beiden Zahlen Δ und Δ' bedeutet, bezw. $h_1 = \Delta = \Delta'$ wird, im Falle $\Delta' = \Delta$ ist.

2.

Nun betrachte man weiter die Beziehung zwischen x und u aus (1), (1'). Man interpretiere etwa x und u als Punktkoordinaten, so hat man einen Zweig Z_1, dessen Punkte bestimmt sind durch das System (x, u); und dieser Zweig Z_1 hat in $(x = u = 0)$ h_1 konsekutive koinzidierende Punktelemente, wo h_1 mit der obigen Zahl h_1 identisch wird. Wir können also sagen: *der Zweig Z hat in $(x = y = u = w = 0)$ ebensoviele konsekutive koinzidierende Elemente 1ter Ordnung, als der Zweig Z_1 in $(x = u = 0)$ konsekutive koinzidierende Punktelemente 0ter Ordnung hat,* nämlich h_1.

Dies verallgemeinern wir zu folgender Definition von „Elementen höherer Ordnung“:

„Das Element ster Ordnung E_s des Zweiges Z für $t = 0$ entspricht dem Element $(s-1)$ter Ordnung $E_{s-1}^{(1)}$ des Zweiges Z_1 für $t = 0$, ebenso entsprechen die zu E_s konsekutiven Elemente ster Ordnung von Z den zu $E_{s-1}^{(1)}$ konsekutiven Elementen $(s-1)$ter Ordnung von Z_1. Wenn h_s konsekutive dieser Elemente $(s-1)$ter Ordnung von Z_1 unter einander koinzidiren, so koinzidiren auch die h_s entsprechenden konsekutiven Elemente ster Ordnung von Z unter einander.

Da man die Elemente $(s-1)$ter Ordnung von Z_1 analog auf die Elemente $(s-2)$ter Ordnung eines Zweiges Z_2, diese auf die Elemente $(s-3)$ter Ordnung eines Zweiges Z_3, etc., bis herunter zu den Punktelementen 0ter Ordnung eines Zweiges Z_s zurückführt, so erhält man hiermit eine vollständige Definition eines Elementes ster Ordnung E_s von Z für jedes s, und zugleich die Definition eines ein solches Element bestimmenden Größensystems. Zugleich folgt, daß h_s konsekutive der Elemente ster Ordnung von Z (von $t = 0$ an) koinzidieren, wenn h_s entsprechende konsekutive Punkte von Z_s (von $t = 0$ an) koinzidieren.

So geht man z. B. behufs Bestimmung der Elemente 2ter Ordnung von Z über zu den Elementen erster Ordnung eines Zweiges Z_1, mit den Punkten (x_1, y_1), Linien (u_1, w_1), wobei man setze:

a) Für $\Delta' > \Delta$, also $h_1 = \Delta$:

$$(2a)\qquad \begin{cases} x_1 = x = a_0 t^{\Delta} + \cdots, \qquad y_1 = u = a_0' t^{\Delta'} + \cdots, \\ u_1 = -\dfrac{dy_1}{dx_1} = -\dfrac{du}{dx} = -\dfrac{\Delta' a_0'}{\Delta a_0} t^{\Delta'-\Delta} + \cdots, \\ w_1 = -x_1 u_1 - y_1 = x\dfrac{du}{dx} - u = \dfrac{\Delta' - \Delta}{\Delta} a_0' t^{\Delta'} + \cdots. \end{cases}$$

Z_1 hat aber in $(x_1 = y_1 = u_1 = w_1 = 0)$ h_2 koinzidierende konsekutive Elemente erster Ordnung, wo h_2 die kleinere der beiden Zahlen Δ und $\Delta' - \Delta$ vorstellt, bezw. $h_2 = \Delta = \Delta' - \Delta$ wird, wenn $\Delta' = 2\Delta$ ist. Daher bestimmt das Größensystem $\left(x, y, u, w, \frac{du}{dx}\right)$ dann ein Element 2^{ter} Ordnung des Zweiges Z; und in $\left(x = y = u = w = \frac{du}{dx} = 0\right)$ koinzidieren h_2 konsekutive dieser Elemente.

b) Für $\Delta' < \Delta, \qquad h_1 = \Delta'$:

$$(2\text{b})\qquad \begin{cases} x_1 = u = a_0' t^{\Delta'} + \cdots, \qquad y_1 = x = a_0 t^{\Delta} + \cdots, \\ u_1 = -\dfrac{dy_1}{dx_1} = -\dfrac{dx}{du} = -\dfrac{\Delta a_0}{\Delta' a_0'}\, t^{\Delta - \Delta'} + \cdots, \\ w_1 = -x_1 u_1 - y_1 = u\dfrac{dx}{du} - x = \dfrac{\Delta - \Delta'}{\Delta'}\, a_0 t^{\Delta} + \cdots. \end{cases}$$

Z_1 hat in $(x_1 = y_1 = u_1 = w_1 = 0)$ h_2 koinzidierende konsekutive Elemente 1^{ter} Ordnung, wo h_2 die kleinere der beiden Zahlen Δ' und $\Delta - \Delta'$ vorstellt, bezw. $h_2 = \Delta' = \Delta - \Delta'$ wird für $\Delta = 2\Delta'$. Daher bestimmt man hier ein Element 2^{ter} Ordnung von Z durch das Größensystem $\left(x, y, u, w, \frac{dx}{du}\right)$; und in $\left(x = y = u = w = \frac{dx}{du} = 0\right)$ koinzidieren h_2 konsekutive dieser Elemente.

c) Für $\Delta' = \Delta = h_1$:

$$(2\text{c})\qquad \begin{cases} x_1 = x = a_0 t^{\Delta} + \cdots, \\ y_1 = u - \dfrac{a_0'}{a_0}\, x = a_0'' t^{\Delta + \Delta''} + \cdots, \qquad (a_0'' \neq 0,\ \Delta'' > 0) \\ u_1 = -\dfrac{dy_1}{dx_1} = -\dfrac{du}{dx} + \dfrac{a_0'}{a_0} = -\dfrac{(\Delta + \Delta'')a_0''}{\Delta a_0}\, t^{\Delta''} + \cdots, \\ w_1 = -x_1 u_1 - y_1 = x\dfrac{du}{dx} - u = \dfrac{\Delta''}{\Delta}\, a_0'' t^{\Delta + \Delta''} + \cdots. \end{cases}$$

Der Zweig Z_1 hat nun in $(x_1 = y_1 = u_1 = w_1 = 0)$ h_2 koinzidierende konsekutive Elemente 1^{ter} Ordnung, wo h_2 die kleinere der beiden Zahlen Δ und Δ'' vorstellt, bezw. $h_2 = \Delta = \Delta''$ wird für $\Delta'' = \Delta$. Hier bestimmt man ein Element 2^{ter} Ordnung von Z durch das Größensystem

$$\left(x, y, u, w, \frac{du}{dx}\right);$$

und in $\left(x = y = u = w = 0,\ \frac{du}{dx} = \frac{a_0'}{a_0}\right)$ koinzidieren h_2 konsekutive dieser Elemente.

3.

Die für ein Element s^{ter} Ordnung E_s von Z erhaltene Zahl h_s ist dualistisch in sich, sobald $s > 0$ ist. Nur für $s = 0$ stehen sich zwei, im Allgemeinen von einander verschiedene Zahlen dualistisch gegenüber: die Zahlen h_0, h_0' der koinzidierenden konsekutiven Punktelemente E_0, bezw. Linienelemente E_0'. Aus der Definition von E_s, h_s folgt, daß wenn für den Zweig Z, von $t=0$ an gezählt, h_s konsekutive Elemente s^{ter} Ordnung $(s>0)$ koinzidieren, auch *mindestens* ebensoviele konsekutive Elemente jeder Ordnung $s'<s$, die beiden Arten von Elementen 0^{ter} Ordnung eingeschlossen, unter einander koinzidieren. Daher kann man die Singularität eines Zweiges Z dahin aussprechen:

Für einen singulären Zweig Z hat man eine Reihe von Zahlen

$$\left.\begin{matrix} h_0 \\ h_0' \end{matrix}\right\} \geq h_1 \geq h_2 \geq \cdots \geq h_S \quad \begin{pmatrix} h_S > 1 \text{ für } S>0 \\ h_0, h_0' \geq 1 \text{ für } S=0 \end{pmatrix},$$

derart, daß von den (von $t=0$ an gezählt) konsekutiven Elementen der Ordnungen $0, 1, 2, \cdots, S$ *bez. je* $\begin{matrix} h_0 \\ h_0' \end{matrix}$, $h_1, h_2, \cdots, h_S$ *unter sich koinzidieren, aber zwei konsekutive Elemente* $(S+1)^{\text{ter}}$ *Ordnung nicht mehr koinzidieren.*

Man kann diese Definition unmittelbar in Zusammenhang bringen mit der von mir früher gegebenen Zusammensetzung eines singulären Punktes (bezw. Linie) aus einer Folge von gewöhnlichen vielfachen Punkten (Linien). Denn an Stelle des in Nr. 2 ausgeführten Übergangs vom Zweig Z einer Kurve (x, y) auf den Zweig Z_1 einer Kurve (x, u) kann man mit genau demselben Erfolg auch den Übergang von Z zu einem Zweig $Z^{(1)}$ einer Kurve $(x, y^{(1)})$ mittels der quadratischen Cremona-Transformation $y^{(1)} = \frac{y}{x}$ vornehmen; und man erhält wieder die obige Definition mit denselben Zahlen. Zugleich aber erhält man die früher (Math. Ann. IX) gegebene: daß Z besteht aus je einem

h_0-, h_1-, $\cdots$, h_S-fachen Punkte,

die konsekutiv liegen, ohne zu koinzidieren; und analog, daß Z auch besteht aus je einer

h_0'-, h_1-, $\cdots$, h_S-fachen Linie,

die konsekutiv und nicht-koinzidierend liegen. Obige Definition vereinigt also nur diese beiden Aussagen in anderer Fassung.

In meiner in der Einleitung zitierten Note von 1893 wurde der Zweig Z erklärt als bestehend aus

h_0 bez. h_0' konsekutiven, koinzidierenden Punkten, bez. Linien,

h_1 konsekutiven, unter sich koinzidierenden „Kurvenelementen" (Elementen 1^{ter} Ordnung) $E_1^{(1)}$.

h_2 weiteren konsek., unter sich, aber nicht mit den $E_1^{(1)}$ koinzid. Kurvenelementen $E_1^{(2)}$,

h_3 „ „ „ „ „ „ „ „ $E_1^{(2)}$ koinzid. Kurvenelementen $E_1^{(3)}$,

. . . .

h_S „ „ „ „ „ „ „ „ $E_1^{(S-1)}$ koinzid. Kurvenelementen $E_1^{(S)}$.

Auch diese Definition ist also in der obigen nur mittels Einführung des Begriffes der Elemente höherer als erster Ordnung umgestaltet.

Zugleich sieht man, daß die hier vorkommenden Zahlen S, h_0, h_0', h_i, auch wenn sie den angegebenen Ungleichungen genügen, nicht beliebig angenommen werden können, insofern schon die Annahme von $h_0 = \Delta$ und $h_0' = \Delta'$ eine Reihe der folgenden Zahlen h mitbestimmt. Auch in der einen der Zahlenreihen, etwa

$$S; \qquad h_0 \geqq h_1 \geqq \cdots \geqq h_S,$$

sind die Zahlen nicht unabhängig von einander, wenn sie zu einem irreduktibeln Zweig Z führen sollen; vielmehr gelten dann für jedes i, von $i = 0$ an, noch Beziehungen der Art:

$$h_i = h_{i+1} + h_{i+2} + \cdots + h_{i+x},$$

wo x ($\geqq 1$) von i abhängt und $h_{S+l} = 1$ zu setzen ist, wenn $l > 0$.

4.

Wenn einige aufeinanderfolgende der Zahlen h einander gleich sind, so kann man diese, bis auf die letzte, bei der Charakterisierung des singulären Zweiges Z weglassen, da ihre Existenz, wie in Nr. 3 gesagt, von selbst folgt. Daher genügt es, die Definition in Nr. 3 so auszusprechen:

Für einen singulären Zweig Z hat man, wenn $S > 1$, eine Reihe von Zahlen

$$0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_s = S$$

und eine zugehörige Reihe von Zahlen

$$\left.\begin{matrix}\Delta\,(=h_0)\\ \Delta'(=h_0')\end{matrix}\right\} \geqq \beta_1 > \beta_2 > \cdots > \beta_s(=h_S) > 1,$$

mit der Eigenschaft: daß von den (von $t = u$ an gezählt) konsekutiven Elementen der Ordnungen

$$0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s = S$$

bezüglich je

$$\frac{\Delta}{\Delta'}, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_s(=h_S),$$

unter sich koinzidieren, aber zwei konsekutive Elemente $(S+1)^{\text{ter}}$ Ordnung nicht mehr koinzidieren. Wenn $S = 0$, hat man $\frac{\Delta}{\Delta'} \geqq 1$, und zwei konsekutive Elemente erster Ordnung koinzidieren nicht.

Hat man z. B. nach dem Verfahren des Aufsuchens des gemeinsamen Teilers:

$$\Delta' = \varkappa_1 \Delta + \beta_2, \quad \Delta = \varkappa_2 \beta_2 + \beta_3,$$
$$\beta_2 = \varkappa_3 \beta_3 + \beta_4, \cdots, \beta_{q-1} = \varkappa_q \beta_q,$$
$$(\beta_1 = \Delta < \Delta', \ \beta_2 < \Delta, \ \beta_{i+1} < \beta_i),$$

so wird

$$\alpha_1 = \varkappa_1, \ \alpha_2 = \varkappa_1 + \varkappa_2, \ \alpha_3 = \varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3, \cdots, \alpha_q = \varkappa_1 + \varkappa_2 + \cdots + \varkappa_q,$$

während zur Bestimmung der höheren Zahlen α und β dann, wie im Fall c) von Nr. 2, außer Δ' und Δ eine weitere Zahl eintritt. Auch dieses Beispiel zeigt schon, daß die genannten Zahlen Δ, Δ', α, β nicht alle von einander unabhängig sind, daß vielmehr nur gewisse Kombinationen derselben als wirklich „charakteristische" Zahlen der Singularität aufgefaßt werden können. Über diese hier nicht näher zu erörternde Frage vgl. meine Note „Les combinaisons caractéristiques dans la transformation d'un point singulier", Rendiconti del Circ. Matem. di Palermo, t. IV, 1890.

Beispiele.

1) Sei, ohne weitere Singularität der höheren Glieder der Reihen für Z:

$$x = t^4 + \cdots, \qquad y = t^6 + \cdots,$$
$$u = -\frac{3}{2} t^2 + \cdots, \qquad w = \frac{1}{2} t^6 + \cdots,$$

so hat man

$$h_0 = \Delta = 4, \quad h_0' = \Delta' = 2, \quad h_1 = \Delta' = 2,$$
$$h_2 = \Delta' = \Delta - \Delta' = 2 \quad \text{(s. b) Nr. 2)}.$$

Für den Zweig $Z'(x, u)$ wird

$$u_1 = -\frac{dx}{du} = \frac{4}{3} t^2 + \cdots,$$

also für den Zweig $Z''(u, u_1)$: $h_1'' = 1$, daher

$$h_3 = 1, \quad S = 2.$$

Somit hat man für Z:

4 koinzidierende Punkte, 2 koinzidierende Linien,

2 koinzidierende Elemente 1ter Ordnung,

2 „ „ 2ter „ ,

also in dieser Nummer:

$$S = \alpha_1 = 2, \quad \beta_1 = 2.$$

2) Sei für Z, wiederum ohne weitere Singularität der höheren Glieder:

$$x = t^4 + \cdots, \qquad y = t^7 + \cdots,$$
$$u = -\frac{7}{4} t^3 + \cdots, \qquad w = \frac{3}{4} t^7 + \cdots,$$

so wird

$$h_0 = \Delta = 4, \quad h_0' = \Delta' = 3,$$
$$h_1 = \Delta' = 3, \quad h_2 = \Delta - \Delta' = 1, \quad S = 1.$$

Somit hat Z

4 koinzidierende Punkte, 3 koinzidierende Linien,

3 koinzidierende Elemente 1^{ter} Ordnung;

oder

$$S = \alpha_1 = 1, \quad \beta_1 = 3.$$

5.

Herr Engel spricht an der in der Einleitung zitierten Stelle die Charakteristik eines singulären Zweiges einer algebraischen Kurve dahin aus:

„Zu jedem singulären Element n^{ter} Ordnung ($n > 1$) gehört eine vollständig bestimmte Reihe von ganzen Zahlen

$$0 \leqq l_1 < l_2 < \cdots < l_m \leqq n - 2$$

von solcher Beschaffenheit, daß für jedes $\varkappa = 1, 2, \cdots, m$ die zwei unendlich benachbarten, vereinigt liegenden Elemente $(l_\varkappa + 1)^{\text{ter}}$ Ordnung, die das Element $(l_\varkappa + 2)^{\text{ter}}$ Ordnung bestimmen, beide dem Elemente $l_\varkappa^{\text{ter}}$ Ordnung angehören".

Bei dieser Angabe kommt aber weder die Tatsache, daß zwei konsekutive koinzidierende Elemente l_m^{ter} Ordnung *von selbst* das Koinzidieren je zweier konsekutiver Elemente aller Ordnungen $< l_m$ nach sich ziehen — wie in obigem Beispiel 1) —, noch die Tatsache, daß *mehr* als zwei konsekutive Elemente l_m^{ter} Ordnung koinzidieren können — wie in Beispiel 2) —, zum Vorschein.

Erlangen, im September 1902.

Druckfehler.

Seite 269, Zeile 4 von oben,

statt $T = \frac{1}{2}(\lambda^2 - \mu^2)\left\{\frac{\lambda'^2}{\lambda^2 - k^2} + \frac{\mu'^2}{\mu^2 - k^2}\right\}$

lies: $T = \frac{1}{2}(\lambda^2 - \mu^2)\left\{\frac{\lambda'^2}{\lambda^2 - k^2} - \frac{\mu'^2}{\mu^2 - k^2}\right\}$.

S. 563 Note muß es heißen S. 555 statt S. 619.

S. 570 3. Zeile von oben muß es heißen S. 561 statt S. 625 und S. 565 statt S. 629.

S. 571 19. „ „ „ „ „ „ S. 568 „ S. 632.

Ganter, H. u. F. Rudio, die Elemente der analytischen Geometrie. Zum Gebrauche an höheren Lehranstalten sowie zum Selbststudium. Mit zahlreichen Übungsbeispielen und Figuren. gr. 8. In Leinwand geb. jeder Teil n. ℳ 3.—. I. Teil: Die analytische Geometrie der Ebene. 5. Aufl. [IV u. 187 S.] 1903. II. Teil: Die analytische Geometrie des Raumes. 3. Aufl. [X u. 186 S.] 1901.

Gleichen, Dr. A., Oberlehrer am Königl. Kaiser Wilhelms-Realgymnasium zu Berlin, Lehrbuch der geometrischen Optik. Aus Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften mit Einschluſs ihrer Anwendungen). Band VIII. Mit 251 Figuren im Text. [XIV u. 511 S.] gr. 8. 1902. geb. n. ℳ 20.—

Grassmann's, Hermann, gesammelte mathematische und physikalische Werke. Auf Veranlassung der mathematisch-physikalischen Klasse der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften und unter Mitwirkung der Herren Jacob Lüroth, Eduard Study, Justus Grassmann, Hermann Grassmann der Jüngere, Georg Scheffers herausgegeben von Friedrich Engel. II. Band. II. Teil. Die Abhandlungen zur Mechanik und zur mathematischen Physik. Mit 51 Figuren im Text. gr. 8. geh. n. ℳ 14.—

Hamburger, M., Gedächtnisrede auf Immanuel Lazarus Fuchs. Mit dem Bildnis des Verstorbenen sowie einem Verzeichnis seiner Schriften. gr. 8. 1902. geh. n. ℳ 1.—

Hammer, Dr. E., sechsstellige Tafel der Werte ${}^{10}\log\frac{1+x}{1-x}$. Für jeden Wert des Arguments $\log x$ von 3.0—10 bis 9.99000—10. (Vom Argument 9.99000—10 an bis 9.999700—10 sind die $\log\frac{1+x}{1-x}$ nur noch fünfstellig angegeben, von dort an vierstellig). [IV u. 73 S.] gr. 8. 1902. geb. n. ℳ 3.60.

Hensel, K., und G. Landsberg, Theorie der algebraischen Funktionen einer Variabeln und ihre Anwendung auf algebraische Kurven und Abelsche Integrale. Mit zahlreichen Textfiguren. [XVI u. 708 S.] gr. 8. 1902. In Leinwand geb. n. ℳ 28.— (Auch in 2 Hälften zu je n. ℳ 14.—)

Klein, F., Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, eine Revision der Principien. Vorlesung, gehalten während des Sommersemesters 1901. Ausgearbeitet von Conrad Müller. [VIII u. 468 S.] gr. 8. 1902. geh. n. ℳ 10.—

Kübler, J., Baurat in Eßlingen, Die Berechnung der Kessel- und Gefäßwandungen. In zwei Teilen. I. Teil: Aufstellung der allgemeinen Gleichungen. Mit 6 Figuren. Mit einem Anhang: Welches Hindernis versperrt in der Knick-Theorie den Weg zur richtigen Erkenntnis!? [52 S.] gr. 8. 1902. geh. n. ℳ 1.60.

Loria, Dr. Gino, ord. Professor der Geometrie an der Universität Genua, spezielle algebraische und transscendente ebene Kurven. Theorie und Geschichte. Autorisierte, nach dem italienischen Manuskript bearbeitete deutsche Ausgabe von Fritz Schütte, Oberlehrer am Kgl. Gymnasium zu Neuwied. Mit 74 Figuren auf 7 lithographierten Tafeln. [XXI u. 744 S.] gr. 8. 1902. In Leinw. geb. n. ℳ 28.— (Auch in 2 Teilen zu ℳ 16.— u. ℳ 12.—)

Musil, A., o. ö. Professor an der k. k. deutschen technischen Hochschule in Brünn, Grundlagen der Theorie und des Baues der Wärmekraftmaschinen. Zugleich autorisierte, erweiterte deutsche Ausgabe des Werkes The steam-engine and other heat-engines von J. A. Ewing, Prof. an der Universität in Cambridge. Mit 302 Abbildungen im Text. [X u. 794 S.] gr. 8. 1902. In Leinw. geb. n. ℳ 20.—

Netto, E., Lehrbuch der Kombinatorik. A. u. d. T.: B. G. Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluſs ihrer Anwendungen. VII. Band. [VIII u. 260 S.] gr. 8. 1902. In Leinw. geb. n. ℳ 9.—

Riemann's gesammelte mathematische Werke. Nachträge herausgegeben von M. Noether und W. Wirtinger. Mit 9 Figuren im Text. [VIII u. 116 S.] gr. 8. 1902. geh. n. ℳ 6.—

Sapolski, Dr. L., über die Theorie der relativ Abelschen kubischen Zahlkörper. 2 Teile. [XII u. 482 S.] gr. 8. 1902. geh. n. ℳ 6.—

INHALT.

Wir ersuchen unsere geehrten Herren Mitarbeiter, etwaige, den Abhandlungen beizufügende Figuren — gleichviel ob dieselben im Texte selbst oder auf besonderen Tafeln veröffentlicht werden sollen — im Interesse einer raschen und exacten Ausführung stets **auf besonderen Blättern,** wenn möglich in der gewünschten Grösse und in thunlichst präciser Zeichnung dem Manuscripte beilegen zu wollen. Ausserdem wird um möglichst genaue Angabe der Adresse gebeten.

Die Redaction.

Jeder Band der Annalen besteht aus 4 Heften und umfasst ca. 36 Druckbogen. Um jedoch in jedem Heft nur abgeschlossene Artikel zu geben, werden die einzelnen Hefte mitunter von ungleicher Stärke sein.

Der Preis für den Band von 4 Heften beträgt 20 Mark; jährlich erscheinen etwa 4—6 Hefte. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

Verantwortliche Redaction: **F. Klein,** Göttingen, Wilh.-Weber-Str. 3, **W. v. Dyck,** München, Hildegardstr. $1^1/_2$, **David Hilbert,** Göttingen, Wilh.-Weber-Str. 29.

Druck und Verlag von B. G. Teubner in Leipzig, Poststrasse 3.