[illegible]

連江陳文編

中等教科平面三角法

科學會編譯部刊行

目錄

中等教科

平面三角法(亦称八綫法)

第一章

角之計法

1. 三角法之定義

三角法者。講三角函數之性質及應用之學科也。而依其應用之區域。分爲平面球面二部。

2. 常度 (或名六十分法)

實地計算上所通用之計角法如次。

直角之九十等分之一。(即正三角形上一角之六十等分之一)謂之一度。度之六十等分之一。謂之一分。分之六十等分之一。

謂之一秒。以度，分，秒，爲單位所計得之角度。謂之常度。而 d 度 m 分 s 秒。恒記爲 $d^\circ m' s''$

〔注意〕 秒之單位過於細微。故實際上用時甚少。凡小於分之角。均以用分之小數顯之爲常。且甚便宜。(通例用小數一位)教科書所以用秒者。蓋從其習慣。

又以一直角爲單位之角度謂之百分度。(又名直角度)

3. 兩種單位之變換。

凡任意之一角。於百分度及常度二者中。任知其一種。則他種易求得。其方法如次。

〔第一〕 欲將百分度變爲常數。則先以90乘之，得常度之度數。又以60乘度之分數。得分之數。再以60乘分之分數。得秒數。以所得之度分秒連記之。即答。

例.

1. 變百分度 $\frac{45}{64}$ 爲常度.

運算.

$$\frac{45}{64}\text{直角}=\left(\frac{45}{64}\times 90\right)\text{度}=63\frac{9}{32}\text{度}$$

$$\frac{9}{32}\text{度}=\left(\frac{9}{32}\times 60\right)\text{分}=16\frac{7}{8}\text{分}$$

$$\frac{7}{8}\text{分}=\left(\frac{7}{8}\times 60\right)\text{秒}=52\cdot 5\text{秒}$$

答.

63° 16′ 52″·5.

2. 變百分度 1.07875 爲常度.

運算.

$$\begin{array}{r} 1\cdot 07875\ \text{直角} \\ 90 \\ \hline 97\cdot 0875\ 0\text{度} \\ 60 \\ \hline 5\cdot 25\ 00\text{分} \\ 60 \\ \hline 15\ 00\text{秒} \end{array}$$

答.

97° 5′ 15″.

〔第二〕欲化常度爲百分度宜用次式

$$d^{\circ}\ m'\ s''=\left(\frac{d}{90}+\frac{m}{90\times 60}+\frac{s}{90\times 60\times 60}\right)\text{直角}$$

例.

問 $8^\circ\ 15'\ 27''$ 爲幾直角

運算.

$$8^\circ\ 15'\ 27''=\left(\frac{8}{90}+\frac{15}{90\times 60}+\frac{27}{90\times 60\times 60}\right)\text{直角}$$

$$=\left(\frac{8}{90}+\frac{1}{90\times 4}+\frac{3}{90\times 20\times 20}\right)\text{直角}$$

$$=\frac{3200+100+3}{90\times 400}\text{直角}$$

$$=\frac{3303}{36000}\text{直角}$$ 以9約之

$$=\frac{367}{4000}\text{直角}=0{\cdot}09175\text{直角}.$$

設題一.

1. 化次之諸角爲常度 直

$\frac{11}{16}$直角, 0.678直角, 0.0241直角.

答. $61^\circ\ 52'\ 30''$, $61^\circ\ 1'\ 12''$, $2^\circ\ 10'\ 12''$ 8.4

2. 以直角爲單位. 問次之諸角之值幾何 $49'$, $37'8$ 1 2

$32''.4$, $11^\circ 15'$, $8^\circ 0' 36''$, $45' 5''.4$, $61^\circ 52' 30''$
3 4 5 6 7

答　0·54,　0.007,　0·0001,　0·125,　0·089,　0·00835,　0.6875
1　2　3　4　5　6　7

3. 以某角爲單位。其計常度 15° 及百分度 0.2 所得兩值之和爲 0.75° 問某角爲幾度　　答 45°

4. 三角形之第二角之分數，及第三角之秒數。各爲第一角之度數之 10 倍及 120 倍。問三個角各幾度

答 150°, 25°, 5°

5. 二點鐘三十四分五十六秒時。求鐘之長針與短針所夾之角度　　答 132°8′

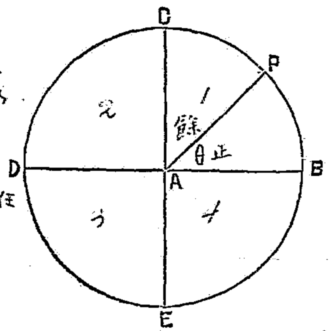
第　二　章

銳角之三角函數

4. 定義

不知度數
時普通以
θ記之

90度內角任
分二角互
為正餘



CAE及BAD二直線相交所生之直角。各名爲一象限。

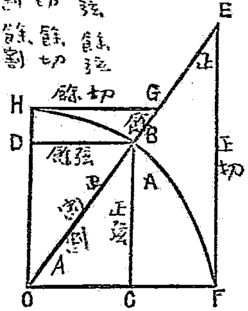
BAC，稱爲第一象限。CAD，稱爲第二象限。DAE，稱爲第三象限。EAB，稱爲第四象限。

今以AB爲本線。由廻線廻轉作任意之角。若AP在第一象限內。則BAP，謂之第一象限之角。若AP在第二象限內。則其角謂之第二象限之角。他倣此。

在一象限內。有任意之角A。則BC，謂之A之正弦。以sinA記之。

正餘之矢欲求之亦甚易 用半徑減餘弦即為正矢
半徑減正弦即為餘矢不必另立法門

正矢 正割 正切 正弦
餘矢 餘割 餘切 餘弦



BD, (=OC) 謂之 A 之餘弦。以 cosA 記之。

EF, 謂之 A 之正切。以 tanA 記之。

GH, 謂之 A 之餘切。以 cotA 記之。

OE, 謂之 A 之正割。以 secA 記之。

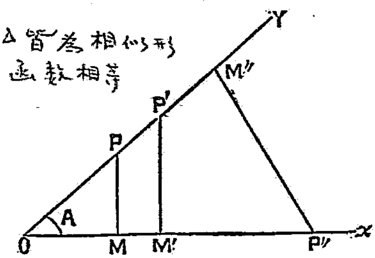
OG, 謂之 A 之餘割。以 cosecA 記之。

(又 CF, 謂之 A 之正矢, DH 謂之 A 之餘矢, 然幾無用。故從略) 故以下專論正餘弦切割六線

以上六項。統稱爲 A 之圓函數。又謂之 A 之三角函數。

又 OB=OF=OH, 謂之半徑。以 r 字顯之。

三△皆為相似形
函數相等



有任意之銳角 A。於其任意之邊 OY 上。除角頂外。任取一點 P。由此點作垂線於他邊 OX 上。其足爲 M。如是則

直正三角形 { 以斜為一則垂為正弦底為餘弦 / 以底為一則垂為正切斜為正割 / 以垂為一則底為餘切斜為餘割 } 宜熟看

關於A角。OP為斜邊。MP為垂線。OM底邊。

依同式形。可得次之六個比。

〔第一〕 $\dfrac{\text{垂線}}{\text{斜邊}}=\dfrac{\sin A}{r}$, 即 $\dfrac{MP}{OP}=\dfrac{\sin A}{r}$, 而 r 通
正弦

常設為1,(以下準此)故 $\dfrac{MP}{OP}=\sin A$

不論何項之三角形皆如此

〔第二〕 $\dfrac{\text{底邊}}{\text{斜邊}}=\cos A$, 即 $\dfrac{OM}{OP}=\cos A$
餘弦

〔第三〕 $\dfrac{\text{垂線}}{\text{底邊}}=\tan A$, 即 $\dfrac{MP}{OM}=\tan A$
正切

〔第四〕 $\dfrac{\text{底邊}}{\text{垂線}}=\cot A$, 即 $\dfrac{OM}{MP}=\cot A$
餘切

〔第五〕 $\dfrac{\text{斜邊}}{\text{底邊}}=\sec A$, 即 $\dfrac{OP}{OM}=\sec A$
正割

〔第六〕 $\dfrac{\text{斜邊}}{\text{垂線}}=\operatorname{cosec} A$, 即 $\dfrac{OP}{MP}=\operatorname{cosec} A$,
餘割

〔注意一〕 正弦與餘弦, 正切與餘切, 正割與餘割。互謂之餘函數。任定一角為正他即為餘

〔注意二〕 由OY上他之任一點P′及OX上之任意一點P″, 作垂線於OX及OY。其足為M′, M″。則OP′M′, 及OP″M″兩三角形俱與OPM相似。故A為定角。則其各三角函數皆為定數。

〔注意三〕 sin,（正弦）cos,（餘弦）tan,（正切）cot,（餘切）sec,（正割）cosec,（餘割）爲三角法中所通用之記號。學生宜熟記。

又欲記憶此六個記號。有一便法。即單記識 sin,（正弦）tan,（正切）sec;（正割）各加 co 於字首。更略去其字末之兩個字母。即得 cos,（餘弦）cot（餘切）cosec（餘割）惟 cosec 因略去字末之兩字母。則與 cos（餘弦）同。故存之。

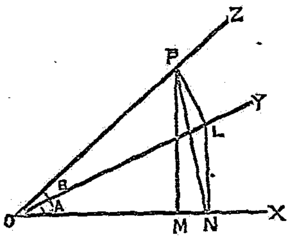
sin, cos, tan, cot, sec, cosec, 原本於臘丁語 sinus,（正弦）cosinus,（餘弦）tangens,（正切）cotangens,（餘切）secans,（正割）cosecans,（餘割）爲各國所通用。惟或以 tg 代 tan, 以 csc 代 cosec, 不無少異。

5. 關於記法之注意

〔第一〕 sinA 等。原爲 A 角中之比之記號。故 sin 與 A。不能分離。如 sinA+sinB, 乃顯 A 之正弦與 B 之正弦之和。原非 A 與 B 之和之正弦 sin(A+B)

今令 $X\hat{O}Y$ 爲 A, $Y\hat{O}Z$ 爲 B。由 OZ 上之一點 P。作垂

線於 OY, OX, 其足爲 L,M, 由 L 作垂線於 OX。其足爲 N。聯 P,N 爲其線。則



$$\sin A=\frac{NL}{OL}>\frac{NL}{OP},$$

$$\sin B=\frac{LP}{OP},$$

$$\therefore\quad \sin A+\sin B>\frac{NL+LP}{OP}>\frac{PN}{OP}>\frac{MP}{OP},$$

卽 $\sin A+\sin B>\sin(A+B)$.

〔第二〕 n 非負數。則欲示三角函數之 n 乘方。常因便宜。以指數 n 附於函數記號之右肩上。

如 $(\sin A)^3$, $(\cos A)^2$ 記爲 $\sin^3A$, $\cos^2A$, 是也。

設題二

1. 直角三角形之三邊爲三寸, 四寸, 五寸, 求其最小角之正弦, 餘弦, 正切　　答 $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{4}$

2. 有一直角三角形其夾直角之二邊爲 28, 45, 求其大銳角之正弦　　答 $\frac{45}{53}$

3. 有三角形其三邊之比爲 33, 56, 65. 求其最小角之餘切,正割,餘割　　答 $\frac{56}{33}$, $\frac{65}{56}$, $\frac{65}{33}$

4. 有於C爲直角之$\hat{ABC}$。其 $\tan A=\frac{11}{3}$, $AC=\frac{27}{11}$, 求AB。　　答$\frac{9\sqrt{130}}{11}$

6. 三角函數之關係

今將同角度之三角函數。揭其重要之關係如次。

〔第一〕 二重關係.

$$\sin A\ \text{cosec}A=\frac{垂}{斜}\cdot\frac{斜}{垂}=1 \qquad (1)$$

$$\cos A\ \sec A=\frac{底}{斜}\cdot\frac{斜}{底}=1 \qquad (2)$$

$$\tan A\ \cot A=\frac{垂}{底}\cdot\frac{底}{垂}=1 \qquad (3)$$

〔第二〕 三重關係.

$$\tan A=\frac{垂}{底}=\frac{垂}{斜}\div\frac{底}{斜}=\frac{\sin A}{\cos A} \qquad (4)$$

$$\cot A=\frac{底}{垂}=\frac{底}{斜}\div\frac{垂}{斜}=\frac{\cos A}{\sin A} \qquad (5)$$

〔第三〕 平方關係.

$$\sin^2A+\cos^2A=\left(\frac{\text{垂}}{\text{斜}}\right)^2+\left(\frac{\text{底}}{\text{斜}}\right)^2=\frac{\text{斜}^2}{\text{斜}^2}=1\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

$$1+\tan^2A=1+\left(\frac{\text{垂}}{\text{底}}\right)^2=\left(\frac{\text{斜}}{\text{底}}\right)^2=\sec^2A\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

$$1+\cot^2A=1+\left(\frac{\text{底}}{\text{垂}}\right)^2=\left(\frac{\text{斜}}{\text{垂}}\right)^2=\operatorname{cosec}^2A\ldots\ldots\ldots\ldots(8)$$

7. 恒等式之證明法

依前條之關係。能證明含三角含數之種種恒等式。

〔第一〕. 由左邊導出右邊之法

例

證 $\tan^2A\cos^2A+\cot^2A\sin^2A=1$

證

$$\text{左邊}=\frac{\sin^2A}{\cos^2A}\cdot\cos^2A+\frac{\cos^2A}{\sin^2A}\cdot\sin^2A$$

$$=\sin^2A+\cos^2A$$

$$=1$$

〔第二〕由已知之關係導出之法

例

證 $\dfrac{\operatorname{cosec}A-\sec A}{\cot A+\tan A}=\dfrac{\cot A-\tan A}{\operatorname{cosec}A+\sec A}$

證.

$$\operatorname{cosec}^2A=1+\cot^2A$$ 二式相減即得
$$\sec^2A=1+\tan^2A$$

$$\therefore \quad \operatorname{cosec}^2A-\sec^2A=\cot^2A-\tan^2A$$

$$(\operatorname{cosec}A-\sec A)(\operatorname{cosec}A+\sec A)=(\cot A-\tan A)(\cot A+\tan A)$$

移右　　　　移左

$$\therefore \quad \frac{\operatorname{cosec}A-\sec A}{\cot A+\tan A}=\frac{\cot A-\tan A}{\operatorname{cosec}A+\sec A}.$$

設題三.

證以下諸式

1. $\tan^2A-\sin^2A=\tan^2A\sin^2A.$ 正切方減正弦方＝兩方相乘
2. $\cot^2A-\cos^2A=\cot^2A\cos^2A.$ 餘切方減弦方＝兩方相乘.
3. $\sec^2A+\operatorname{cosec}^2A=\sec^2A\operatorname{cosec}^2A.$ 兩割方相加＝兩割方相乘

此三個亦爲平方關係

4. $\operatorname{cosec}A-\sin A=\cot A\cos A.$ 餘割減正弦＝餘切X餘弦

5. $\sec A-\cos A=\tan A\sin A.$ 正割減餘弦＝正切乂正

6. $\cot A+\tan A=\sec A\operatorname{cosec} A.$ 兩切相加＝兩割相

此三個謂之四重關係

7. $\sin^4 A+\cos^4 A=1-2\sin^2 A\cos^2 A.$

8. $\sin^6 A+\cos^6 A=1-3\sin^2 A\cos^2 A.$

9. $\dfrac{1}{1+\tan^2 A}+\dfrac{1}{1+\cot^2 A}=1.$

10. $\sin^2 A\tan A+\cos^2 A\cot A+2\sin A\cos A=\tan A+\cot A.$

11. $1+\tan A)^2+(1+\cot A)^2=(\sec A+\operatorname{cosec} A)^2.$

12. $1+\operatorname{cosec}^4 A-\cot^4 A=2\operatorname{cosec}^2 A.$

13. $\sec A+\tan^3 A\operatorname{cosec} A=\sec^3 A.$

14. $\cot A-\sec A\operatorname{cosec} A(1-2\sin^2 A)=\tan A.$

15. $\dfrac{(\sec A+\operatorname{cosec} A)^2}{\sec^2 A+\operatorname{cosec}^2 A}=1+2\sin A\cos A.$

16. $(1-\tan^4 A)\cos^2 A+\tan^2 A=1.$

17. $\dfrac{1-\cos A}{1+\cos A}=(\operatorname{coses} A-\cot A)^2.$

18. $(\tan A+\sec A)^2=\dfrac{1+\sin A}{1-\sin A}.$

19. $\sin^3 A\cos A+\cos^3 A\sin A=\sin A\cos A.$

20. $(\cos^2 A+\cot^2 A)\tan^2 A=\sec^2 A+(\cos^2 A-1)\tan^2 A.$

21. $\sin A(1+\tan A)+\cos A(1+\cot A)=\operatorname{cosec}A+\sec A.$

由以下諸式消去 θ.

22. $\sin\theta=a,\ \cos\theta=b.$ 答. $a^2+b^2=1.$

23. $\sec\theta=a,\ \tan\theta=b.$ 答. $a^2-b^2=1.$

24. $\operatorname{cosec}\theta=a,\ \cot\theta=b.$ 答. $a^2-b^2=1.$

25. $\cos\theta+\sin\theta=a,\ \cos\theta-\sin\theta=b.$ 答. $a^2+b^2=2.$

8. 知三角函數之一種求他種之法

無論何角。任知其三角函數之一種。則於關於此角之斜邊,垂線,底邊三者中。設其用爲分母之邊爲1(即作此函數用者)(即斜邊)則用爲分子之邊。必等於此函數之值。而其餘之一邊。可由彼達哥拉士之定理 (Pythagoras' theorem 即句方股方等於弦方之定理然此法實出於我國。見周髀算經) 知之。從而其他之一切函數。皆能求之。

或設用爲分母之邊。等於值之分母。(即斜邊)則當分子之邊。等於值之分子。而其餘之一邊。由前之定理求之。由是亦能計算他之函數。

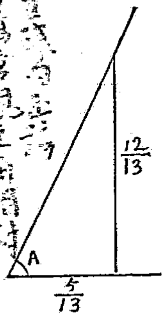
例

設 $\sin A=\frac{12}{13}$，求 A 之他函數.

解

於 $\hat{A}$ 設斜邊=1。則垂線=$\frac{12}{13}$，底線=$\sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2}=\frac{5}{13}$

注意任作一直角三角形常视斜边为半径等于一，其角相连之底边为余弦，相对之垂线为正弦



$\therefore\ \cos A=\frac{5}{13}\div 1=\frac{5}{13}$，即$\frac{底}{斜}$

$\tan A=\frac{12}{13}\div\frac{5}{13}=\frac{12}{5}$，即$\frac{垂}{底}$

$\cot A=\frac{5}{13}\div\frac{12}{13}=\frac{5}{12}$，即$\frac{底}{垂}$

$\sec A=1\div\frac{5}{13}=\frac{13}{5}$，即$\frac{斜}{底}$

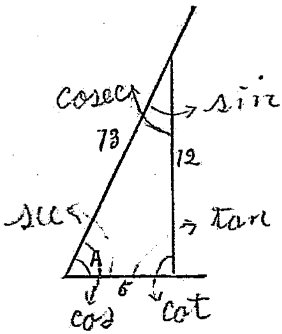
$\text{cocsec}A=1\div\frac{12}{13}=\frac{13}{12}$，即$\frac{斜}{垂}$

或於 $\hat{A}$ 設斜邊=13 則垂線=12,

底邊=$\sqrt{(13)^2-(12)^2}=5$

$\therefore\ \cos A=\frac{5}{13}$,

$$\tan A=\frac{12}{5},$$



$$\cot A=\frac{5}{12},$$

$$\sec A=\frac{13}{5},$$

$$\operatorname{cosec} A=\frac{13}{12},$$

設　題　四.

1. $\sin A=\dfrac{99}{101}$ 求 $\cos A$ 及 $\cot A$.　　答. $\dfrac{20}{101}, \dfrac{20}{99}$.

2. $\sec A=1\cdot0\dot{3}$ 求 $\sin A$ 及 $\tan A$.　　答. $\dfrac{\sqrt{61}}{31}, \dfrac{\sqrt{61}}{30}$.

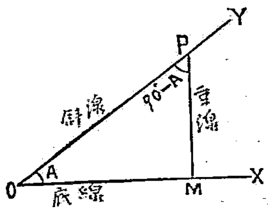
3. $\cot A=\dfrac{q}{p}$ 求 $\dfrac{p\cos A-q\sin A}{p\cos A+q\sin A}$ 之值.　　答. $\dfrac{p^2-q^2}{p^2+q^2}$.

4. $p\cot A=\sqrt{q^2-p^2}$ 求 $\sin A$.　　答. $\dfrac{p}{q}$.

5. $\tan A=\dfrac{2mn}{m^2-n^2}$ 求 $\cos A$ 及 $\operatorname{cosec} A$.

答. $\dfrac{m^2-n^2}{m^2+n^2}, \dfrac{m^2+n^2}{2mn}$.

9. 餘角之三角函數



有任意之銳角A。在其一邊OY上任取一點。由此點作垂線於他邊OX。其足爲M。則由三角函數之定義得次之關係。

$$\sin(90^\circ-A)=\frac{OM}{OP}=\cos A,$$

$$\cos(90^\circ-A)=\frac{MP}{OP}=\sin A,$$

$$\tan(90^\circ-A)=\frac{OM}{MP}=\cot A.$$

$$\cot(90^\circ-A)=\frac{MP}{OM}=\tan A.$$

$$\sec(90^\circ-A)=\frac{OP}{MP}=\operatorname{cosec} A.$$

$$\operatorname{cosec}(90^\circ-A)=\frac{OP}{OM}=\sec A.$$

$(90^\circ-A)$ 謂之A之餘角。

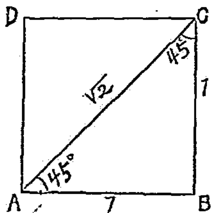
據上式 $90^\circ-A$ 之各三角函數。與A之各三角函數。其同數之項。互爲餘函數。

此六個關係中。後之四個。可由前二個導出。以下準此。

注意 45°先知兩切等于1 30°先知正弦等于½
60°先知餘弦等于½ 其餘各綫皆可推求之

10. 特別角之三角函數 即0°,30°,45°,60°,90°等謂之特別角

〔第一〕 45° 之三角函數



$\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

$\sqrt{2}=1.4142$

於以 1 爲邊之正方形 ABCD。作其對角線 AC。則 BAC=45° AC=$\sqrt{2}$　故

$$\sin 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}=\cos 45^\circ$$

$$\tan 45^\circ=1=\cot 45^\circ$$

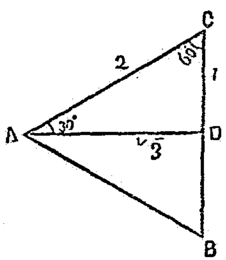
$$\sec 45^\circ=\sqrt{2}=\operatorname{cosec} 45^\circ$$

45°內兩弦兩切兩割皆兩兩相等

〔第二〕 30° 及 60° 之三角函數

於以 2 爲邊之正三角形 ABC。由 A 作垂線於對邊。則其足 D 爲 BC 之中點。而

$D\hat{A}C=30^\circ$　$AD=\sqrt{3}$ 故



$\sqrt{3}=1.732$

$$\sin 30^\circ=\frac{1}{2}=\cos 60^\circ,$$

$$\cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}=\sin 60^\circ,$$

$$\tan 30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}=\cot 60^\circ,$$

$$\cot 30^\circ=\sqrt{3}=\tan 60^\circ,$$

30° 餘割倍半徑 餘切倍餘弦 正弦餘矢半半徑

60° 正割倍半徑 正切倍正弦 餘弦正矢半半徑

$$\sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} = \operatorname{cosec} 60^\circ,$$

$$\operatorname{cosec} 30^\circ = \ 2 \ = \sec 60^\circ.$$

今例表於下

45° 兩弦兩切兩割皆兩々相等

30° 60° 互為正餘

	sin	cos	tan	cosec	sec	cot	Tan
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$

設 題 五.

證以下諸恆等式.

1. $\sec(90^\circ - A) - \cot A \cos(90^\circ - A) \tan(90^\circ - A) = \sin A.$

2. $\dfrac{\cot(90^\circ - A)}{\operatorname{cosec}^2 A} \cdot \dfrac{\operatorname{cosec}(90^\circ - A)\cot^2 A}{\sin^2(90^\circ - A)} = \sec A.$

3. $\dfrac{\cot^2 A \sin^2(90^\circ - A)}{\cot A + \cos A} = \tan(90^\circ - A) - \cos A.$

求以下諸式之值

4. $\sin^3 60^\circ \cot 30^\circ - 2\sec^2 45^\circ + 3\cos 60^\circ \tan 45^\circ - \tan^2 60^\circ.$

答. $-\frac{35}{8}.$

5. $3\tan^2 30^\circ+\frac{1}{4}\sec 60^\circ+5\cot^2 45^\circ-\frac{2}{3}\sin^2 60^\circ$.　答. 6.

6. $\frac{1}{3}\sin^2 60^\circ-\frac{1}{2}\sec 60^\circ\tan^2 30^\circ+\frac{4}{3}\sin^2 45^\circ\tan^2 60^\circ$

答. $\frac{23}{12}$

求合於以下各方程式之角

7. $4\sin^2\theta-2(\sqrt{3}+1)\sin\theta+\sqrt{3}=0$.　答. 30°, 60°

8. $\tan^2\theta-(\sqrt{3}+1)\tan\theta+\sqrt{3}=0$.　答. 45°, 60°

9. $\sin^2\theta+\sqrt{3}\cos\theta-\frac{7}{4}=0$　答. 30°.

此三式謂之三角方程式。其通例詳於後編。

11. 三角函數表

求任何角之三角函數。爲三角法之高等部分。其理論高尚。運算繁雜。本書不具論。然其數值。前人已詳細計算。編列爲表。據本書所載。則由0°至90°。其間每$10'$之諸角。俱能檢其三角函數之四位數。

凡非表中之角。若欲求其三角函數。或求對於三角函數之角。須依次之定理。

角之小變化與其各三角函數應此之變化。殆成比例。

論此定理之由來及界限。不適於本書之程度。故略之。今惟依例示其應用法而已

例.

1. 求 $\sin 32^\circ 16'{\cdot}4$

解.

$$\sin 32^\circ 20' - \sin 32^\circ 10' = 0{\cdot}5348 - 0{\cdot}5324 = 0{\cdot}0024$$

$$10 : 6{\cdot}4 :: 0{\cdot}0024 : x$$

$$x = 0{\cdot}0015$$

$$\sin 32^\circ 16'{\cdot}4 = 0{\cdot}5324 + 0{\cdot}0015 = 0{\cdot}5339.$$

2. $\tan A = 1{\cdot}568$ 求 A.

解.

$$\tan 57^\circ 30' - \tan 57^\circ 20' = 1{\cdot}570 - 1{\cdot}560 = 0{\cdot}010$$

$$\tan A - \tan 57^\circ 25' \qquad = 1{\cdot}568 - 1{\cdot}560 = 0{\cdot}008$$

$$0{\cdot}010 : 0{\cdot}008 :: 10 : x$$

$$x = 8$$

$$A = 57^\circ 20' + 8' = 57^\circ 28'.$$

大小二銳角之函數。其正弦正切正割。則角大亦大。而其餘弦餘切餘割。則角大反小。

3. 求 $\cot 29°43'.6$

解.

$$\cot 29°40' - \cot 29°50' = 1{\cdot}756 - 1{\cdot}744 = 0{\cdot}012$$

$$10 : 3{\cdot}6 : 0{\cdot}012 : x$$

$$x = 0{\cdot}004$$

$$\cot 29°43'.6 = 1{\cdot}756 - 0{\cdot}004 = 1{\cdot}752$$

4. $\cos A = 0{\cdot}4452$ 求 A.

解.

$$\cos 63°30' - \cos 63°40' = 0{\cdot}4462 - 0{\cdot}4436 = 0{\cdot}0026$$

$$\cos 63°30' - \cos A \quad = 0{\cdot}4462 - 0{\cdot}4452 = 0{\cdot}0010$$

$$0{\cdot}0026 : 0{\cdot}0010 :: 10 : x$$

$$x = 3{\cdot}8$$

$$A = 63°30' + 3'{\cdot}8 = 63°33'{\cdot}8.$$

設　題　六。

1. 求 $\tan 25°26'{\cdot}7$　　答. 0·4758.
2. 求 $\sec 38°27'{\cdot}7$　　答. 1·277.
3. 求 $\cos 63°37'{\cdot}3$　　答. 0·4443.

4. 求 cosec$41^\circ 18'{\cdot}2$　　答. 1·515.

5. $\sin A = 0{\cdot}9479$ 求 A　　答. $71^\circ 25'{\cdot}6$.

6. $\tan A = 0{\cdot}1723$ 求 A　　答. $9^\circ 49'{\cdot}7$.

第　三　章

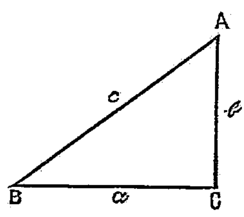
直角三角形

12. 定義

凡平面三角形。皆有六事。其三者爲邊。三者爲角。知其六事中之三。則其餘三事。自能求得。惟所知之三事中。必須有一爲邊。

從三角形內已知之事。求其未知之事。謂之三角算法

13. 直角三角形之性質



三角形之三個角爲A, B, C, 其各對邊爲a,b,c,(以下準此)若C爲直角則有次之關係

$$A+B=90°.$$

$$\sin A=\frac{a}{c}=\cos B.$$

$$\cos A=\frac{b}{c}=\sin B.$$

$$\tan A=\frac{a}{b}=\cot B.$$

$$\cot A=\frac{b}{a}=\tan B.$$

$$\sec A=\frac{c}{b}=\operatorname{cosec} B.$$

$$\operatorname{cosec} A=\frac{c}{a}=\sec B.$$

$$\therefore\begin{cases}a=c\sin A=c\cos B=b\tan A=b\cot B.\\ b=c\cos A=c\sin B=a\cot A=a\tan B.\\ c=b\sec A=b\operatorname{cosec} B=a\operatorname{cosec} A=a\sec B.\end{cases}$$

14. 直角三角形之算法

凡直角三角形。於直角外。知其五事中之兩事則其餘三事。自能求得。惟所知之兩事中。必須有一爲邊。其算法有四種。

〔第一〕 知斜邊C及一銳角(如A)則

由 $B=90^\circ-A$。求B

又由 $\left.\begin{matrix}a=c\sin A\\ b=c\cos A\end{matrix}\right\}$ 或 $\left.\begin{matrix}a=c\cos B\\ b=c\sin B\end{matrix}\right\}$ 求 a.b

〔第二〕 知直角之一邊及一銳角(如 a. A)則

由 $B=90^\circ-A$。求 B

又由 $\left.\begin{array}{l} b=a\cot A. \\ c=a\operatorname{cosec}A. \end{array}\right\}$ 或 $\left.\begin{array}{l} b=a\tan B. \\ c=a\sec B. \end{array}\right\}$ 求 b, c

〔第三.〕 知斜邊 c 及他之一邊(如 a)則

由 $\left.\begin{array}{l} \sin A=\dfrac{a}{c}. \\ b=c\cos A. \\ B=90^\circ-A. \end{array}\right\}$ 或 $\left.\begin{array}{l} \cos B=\dfrac{a}{c}. \\ b=c\sin B. \\ A=90^\circ-B. \end{array}\right\}$ 求 A, B, b

〔第四.〕 知直角之二邊則

由 $\left.\begin{array}{l} \tan A=\dfrac{a}{b}. \\ c=b\sec A \text{ 或 } a\operatorname{cosec}A. \\ B=90^\circ-A. \end{array}\right\}$ 求 A, B, c 又用

$\left.\begin{array}{l} \tan B=\dfrac{b}{a}. \\ c=b\operatorname{cosec}B \text{ 或 } a\sec B. \\ A=90^\circ-B. \end{array}\right\}$ 亦可

〔注意〕 既知兩邊。則依「彼達哥拉士」之定理。可計算

其餘之一邊。又用以上諸方法。均以用代數計算爲便。

設 題 七.

依次之條件計算直角三角形 ABC;

但 $\sqrt{2}=1{\cdot}414$, $\sqrt{3}=1{\cdot}732$.

1. $c=12$, $A=30°$ 答 $B=60°$, $a=6$, $b=10{\cdot}4$.
2. $a=5\sqrt{3}$, $A=60°$. 答 $B=30°$, $b=5$, $c=10$.
3. $c=12$, $a=3$.
答 $A=14°28'{\cdot}2$, $B=75°31'{\cdot}8$, $b=11{\cdot}6$.
4. $a=5$, $b=6$.
答 $A=39°48'{\cdot}2$, $B=50°11'{\cdot}8$, $c=7{\cdot}8$.

15. 實用問題上重要之術語

〔第一〕過一點及地球中心之直線或平面。謂之此點之直立線或直立面

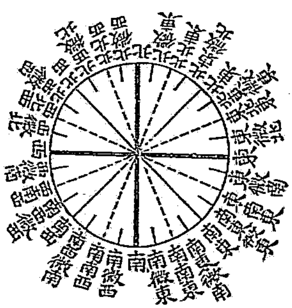
〔第二〕過一點而在此點與直立線成直角之直線或平面。謂之此點之水平線或水平面。

〔第三〕測一點時。其點與鏡測器之中心(卽鏡筒中交線之交點)所聯之中心。必與過鏡測器中心之水平面成角。視其點較水平面之低昇。謂之仰角或俯角。

仰角或稱爲高度(其重者爲天體之例)

〔第四〕二點與鏡測器之中心聯爲直線。其夾角謂之此二點之角距

〔第五〕航海用之羅盤。於東南西北之間。各分爲八等分。得三十二方向。其命名如次。



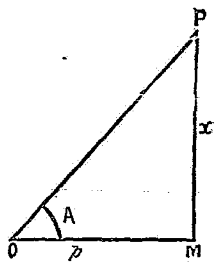
陸地測量用之羅盤於其周圍刻度分秒。其角以距南或距北計之。記爲北幾度東，(或西)又南幾度東(或西)等以示其方向。

16。實用問題

不能直接測得之距離或高。可用三角形之解法計算之。今舉其例於次。

例

〔第一〕有一直立物體。人能行至其基礎下。欲求其高。設MP直立物體之高爲x。若距m基礎。取適當距離p處之O點。測其頂點P。設頂點之仰角爲A則

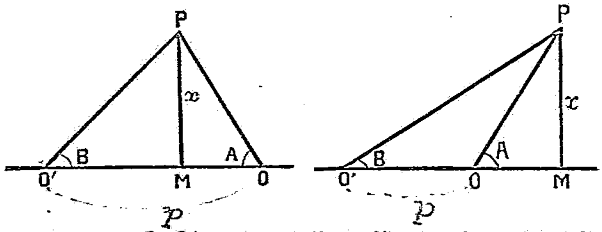


$$MP=OM\tan MOP$$

即　$x=p\tan A$

〔注意〕欲求其精密。則加物體之厚(即基礎處之厚)之半於p計算。又加窺測器中心之高於其結果。以下準此。

〔第二〕有物在人所不能到之處。但能自遠處望之。欲求遠處一點與物之距離。



於直線上。取 O, O′ 二點。測其距離。(設爲 p)。由不能到之點 P, 作此線之垂線 PM。設 PM 之數值爲 x。又 MOP 角, MO′P 角爲 A, B, 則

$$MO' \pm MO = OO',$$

$$MP \cot MO'P \pm MP \cot MOP = OO',$$

即 $$x \cot B \pm x \cot A = p,$$

$$\therefore \quad x = \frac{p}{\cot B \pm \cot A}$$

〔第三〕 有一直立物體。人不能至其基礎下。惟能在與此物體同在一平面上之二點。測其頂之仰角。欲求此物體之高及距離。

於前例之右圖。設 MP 爲物體。OO′ 爲兩窺測點。OM 爲 y。則

$$x=\frac{p}{\cot B-\cot A}$$

$$y=x\cot A=\frac{p\cot A}{\cot B-\cot A}$$

設 題 八.

1. 於距烟筩300尺之地。測其頂之仰角爲30°，問烟筩之高幾何。 答 173.2尺

2. 於高160尺之檣頂。測得一小艇之俯角爲30°，問船與艇之距離幾何。 答 277,12尺

3. 高6尺之竿影爲$2\sqrt{3}$尺，求太陽之高度。

4. 於距塔影86.6尺之地。測得塔頂之仰角爲30°，問塔頂與窺測之距離幾何 答 100尺

5. 有梯長45尺。其一端倚壁頂，他端置於地上。而壁與梯成60度之角。求壁之高。及距梯脚若干。

答 22.5尺 38.97尺

6. 有二檣。高60尺及40尺。而聯其兩頂之直線。與水平面成33° 41′之角。問二檣之距離幾何。 答 30尺

7. 由某處望高66丈。之絕壁。得頂之仰角41 18′。問

絕壁之頂與觀測者之距離幾何。但 $\sin 41°18'=0.66$

答　100丈

8. 有烟筩兩個。其一個較他一個高15丈。而聯兩頂之直線。與水平面成 $27°2'$ 之角。且此直線。在距小烟筩50丈之處與地面相交。問大烟筩之高幾何。

但　$\tan 27°2'=0.51.$　　答　40.5丈

9. 有在塔東相間隔200尺之兩地。各望其頂得仰角45°及30°，問塔之高幾何。　　答　273.2尺

10. 由地上之一點。望塔上長2米突之避雷針。其上端及下端之仰角爲 $44°20'$，$42°10'$ 問塔高幾何

答　25.4　米突

11. 由水平面高30步之燈臺望在其西之二艇。得俯角 $62°30'$，$28°50'$ 問二艇之距離幾何。

12. 於成直線狀之海岸。由相距165.2米突之二點A，B。望海上之船C。知 $CAB=62°30'$，$CBA=76°15'$，問船與海岸之距離幾何。　　答　215.9米突

13. 由燈臺L。於南西及南15°東之方向。有二船A.B. AB之方向爲南東。AL之長爲4哩。問二船之距離幾何。　　答　6.928哩

14. 於東西相距一哩之二地A.B.望輕氣球之方位。爲北西及北東。其仰角爲45°問球之高幾何。

答 3733呎

15. 於地上之一點。知半徑γ之輕氣球之張角爲α，仰角爲β。問球之高幾何， 答 $\gamma\sin\beta\,\mathrm{cosec}\dfrac{\alpha}{2}$

16. 由山之麓望其頂。得仰角45°，又由成30°斜角之直線坂路向頂上一哩。再望其頂。得仰角60°，問山高幾何。

17. 有高h之塔。於距塔a之地。見塔頂與山頂在一直線上。於塔脚得山頂之仰角α。問山高幾何

答$\dfrac{ah}{a-h\cot\alpha}$

18. 於塔南之一地。得其頂之仰角爲α。又由是向西行l。測其仰角得β。問塔之高幾何 答$\dfrac{l}{\sqrt{\cot^2\beta-\cot^2\alpha}}$

第四章

任意角之三角函數

17. 角之定義

就角所研究之事項。欲通於一切。須擴張角之意義。故得普通之定義如次。

由同點引甲乙二直線。則其一線。如乙。由甲之方位起。繞同點廻轉至本方位。此廻轉之量。謂之乙與甲所成之角。又乙稱爲廻線。甲稱爲本線。而廻線之運動。或與時針之運動反對。或與時針之運動同樣。從而其所作之角或爲正，或爲負。

角之本線及迴線謂之邊。二線之公點謂之頂。

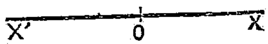
欲示其角。則在本線及迴線上取一點。各附以名稱。而於名稱之間。夾以角頂之名稱。即爲角之名稱。如乙O甲之類

〔注意一〕 角之值無制限

〔注意二〕 又對於本線成 A 角之迴線。與對於本線成 $n\times360^\circ+A$ 角之迴線相合。但 n 顯零或任意之數。以下準此

18. 直線之方向

本編不獨考直線之大。更須考其方向。設定點 O 爲原點。XX′ 爲通過原點 O 之直線。

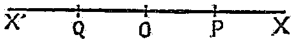


由是。在直線 XX′ 中。求距 O 點 a 距離之點 P 之位置。非知 P 在 O 之何側。不能決定。故欲除此不確之弊。宜設一方向之距離爲正。他方向之距離爲負。

得符號之約規如次。

厚點右方之距離爲正。

原點左方之距離爲負。

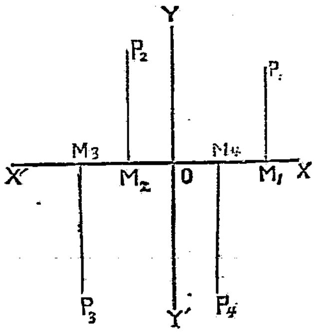


如上圖P,Q各爲在XX′直線內距O點 a 距離之點。然位置則如次。

$$OP=+a,\quad OQ=-a$$

於平面之例亦然。

於平面中任取一點O爲原點,通O作互成直角之XX′及YY′兩直線,YY′名爲縱線XX′名爲横線。



由是此兩直線分平面爲四分面。各爲一直角即第4款所謂象限。是也。

通例有次之規約。

凡沿横線(即XX′)之距離。其在縱線(即YY′)右者爲正。在縱線左者爲負。

凡沿縱線(即YY′)之距離。其在横線(即XX′)上者爲正。在横線下者爲負。

如前圖之 OM, OM_4, 爲正。OM_2, OM_3, 爲負。又, M_1P_1, M_2P_2, 爲正。M_3P_3, M_4P_4, 爲負。是也。

又 OX 可名爲本線。OX′ 可名爲延長線。

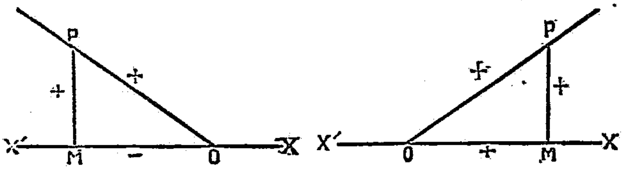
19. 三角函數之方向

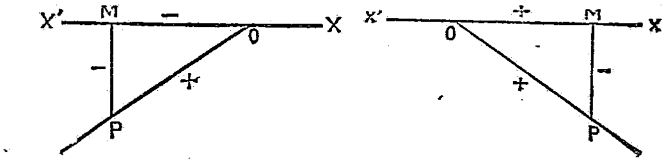
由是將第四款所述之定義。附以次之規則。乃爲三角函數之普通定義。

〔第一〕 斜邊常取於廻線上。其符號恒爲正。

〔第二〕 底邊在本線上者爲正。在本線之延長線上者爲負。

〔第三〕 垂線在本線之上方者爲正。在本線之下方者爲負。





20. $n\times360^\circ+A$ 之三角函數

$n\times360^\circ+A$ 角之二邊與 A 角之二邊相合故有次之關係

$\sin(n\times360^\circ+A,)=\sin A,\qquad \cos(n\times360^\circ+A)=\cos A,$

$\tan(n\times360^\circ+A)=\tan A,\qquad \cot(n\times360^\circ+A=\cot A,$

$\sec(n\times360^\circ+A)=\sec A,\qquad \mathrm{cosec}(n\times360^\circ A)=\mathrm{cosec}A.$

21. 三角函數互相之關係

第六欵所得(1)(2)(3)(4)(5)之關係由定義推之.任何角皆合理。

彼逵哥拉士之定理。無論邊之正負皆合理。故由是誘導之(6)(7)(8)三關係。亦任何角皆合理。故通例

$\sin A\,\mathrm{cosec}A=1,\ \cos A\sec A=1,\ \tan A\cot A=1,$

$$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}.\qquad \cot A=\frac{\cos A}{\sin A}.$$

$\sin^2A+\cos^2A=1,\ 1+\tan^2A=\sec^2A,\ 1+\cot^2A=\mathrm{cosec}^2A$ 從此

諸公式所生之關係。亦皆合理。

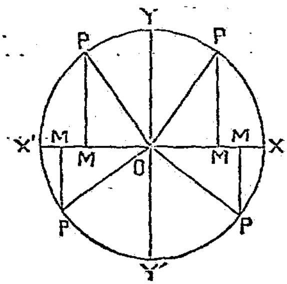
22. 無窮大

a爲非零之常數。則於$\frac{a}{x}$分數、若x之數值漸次減少。則此分數之數值次第增大。故x愈小。而分數之數值愈大。由是x之極限爲無窮小(即O)則$\frac{a}{x}$之值爲無窮大。無窮大之記號爲∞

o無正負之差別。故$\frac{a}{o}$即∞亦無正負之差別。

23. 三角函數之變化

有在O相交成直角之二直線XX′及YY′。其間有r數值廻線OP。以OX爲本線。作由O度至360度之角。於其各位置上。自P作XX′之垂線。其足爲M。從XOP角(名爲A)之變化。研究其三角函數之變化。如次。



〔第一〕 sinA 及 cosecA 之變化

於第一象限。MP爲正。其數值可由O增至r。

故 $\sin A=\frac{MP}{OP}$ 爲正。其數値由 O 增至 1。又 $\operatorname{cosec} A=\frac{OP}{MP}$ 爲正。其數値可由 ∞ 減至 1。($\sin 0^\circ=0$, $\operatorname{cosec} 0^\circ=\infty$. $\sin 90^\circ=1$, $\operatorname{cosec} 90^\circ=1$,)

於第二象限。MP 爲正。其數値由 r 減至 O，故 $\sin A=\frac{MP}{OP}$ 爲正。其數値由 1 減至 O，又 $\operatorname{cosec} A=\frac{OP}{MP}$ 爲正。其數値由 1 增至 ∞。($\sin 180^\circ=0$, $\operatorname{cosec} 180^\circ=\infty$,)

於第三象限。MP 爲負。其數値由 O 增至 r。故 $\sin A=\frac{MP}{OP}$ 爲負。其數値由 O 增至 1。$\operatorname{cosec} A=\frac{OP}{MP}$ 爲負。其數値由 ∞ 減至 1。($\sin 270^\circ=-1$, $\operatorname{cosec} 270^\circ=-1$)

於第四象限 MP 爲負。其數値由 r 減至 O，故 $\sin A=\frac{MP}{OP}$ 爲負。其數値由 1 減至 O，又 $\operatorname{cosec} A=\frac{OP}{MP}$ 爲負。其數値由 1 增至 ∞，($\sin 360^\circ=0$, $\operatorname{cosec} 360^\circ=\infty$)

[第二] cosA 及 sec A 之變化。

於第一象限。OM 爲正。其數値由 r 減至 O。故 $\cos A=\frac{OM}{OP}$ 爲正。其數値由 1 減至 O。又 $\sec A=\frac{OP}{OM}$ 爲正。其數値由 1 增至 ∞。($\cos 0^\circ=1$, $\sec 0^\circ=1$; $\cos 90^\circ=0$, $\sec 90^\circ=\infty$)

於第二象限。OM 爲負。其數值由 O 增至 γ。

故 $\cos A=\frac{OM}{OP}$ 爲負。其數值由 O 增至 1。又 $\sec A=\frac{OP}{OM}$ 爲負。其數值由 ∞ 減至 1。($\cos 180^\circ=-1$, $\sec 180^\circ=-1$,)

於第三象限。OM 爲負。其數值由 γ 減至 O。

故 $\cos A=\frac{OM}{OP}$ 爲負。其數值由 1 減至 O, 又 $\sec A=\frac{OP}{OM}$ 爲負。其數值由 1 增至 ∞。($\cos 270^\circ=0$, $\sec 270^\circ=\infty$)

於第四象限。OM 爲正。其數值由 O 增至 γ。

故 $\cos A=\frac{OM}{OP}$ 爲正。其數值由 O 增至 1。又 $\sec A=\frac{OP}{OM}$ 爲正。其數值由 ∞ 減至 1。($\cos 360^\circ=1$, $\sec 360^\circ=1$)

〔第三〕 tanA 及 cotA 之變化。

於第一象限。MP 爲正。其數值由 O 增至 γ。OM 爲正。其數值由 γ 減至 O。故 $\tan A=\frac{MP}{OM}$ 爲正。其數值由 O 增至 ∞。$\cot A=\frac{OM}{MP}$ 爲正。其數值由 ∞ 減至 O。($\tan 0^\circ=0$, $\cot 0^\circ=\infty$, $\tan 90^\circ=\infty$, $\cot 90^\circ=0$)

於第二象限。MP 爲正。其數值由 γ 減至 O。OM 爲負。其數值由 O 增至 γ。故 $\tan A=\frac{MP}{OM}$ 爲負。其數值由 ∞ 減至 O。又 $\cot A=\frac{OM}{MP}$ 爲負。其數值由 O 增至 ∞。($\tan 180^\circ=0$, $\cot 180^\circ=\infty$)

於第三象限。MP 爲負。其數値由 O 增至 γ。OM 爲負。其數値由 γ 減至 O。故 $\tan A=\dfrac{MP}{OM}$ 爲正。其數値由 O 增至 ∞。$\cot A=\dfrac{OM}{MP}$ 爲正。其數値由 ∞ 減至 O。($\tan 270^\circ=\infty$, $\cot 270^\circ=0$)

於第四象限。MP 爲負。其數値由 γ 減至 O。OM 爲正其數値由 O 增至 γ。故 $\tan A=\dfrac{MP}{OM}$ 爲負。其數値由 ∞ 減至 O。$\cot A=\dfrac{OM}{MP}$ 爲負。其數値由 O 增至 ∞。($\tan 360^\circ=0$, $\cot 360^\circ=\infty$)

各三角函數之變化。用表示之如次。

	0°		90°		180°		270°		360°
sin	0	+	1	+	0	−	−1	−	0
cos	1	+	0	−	−1	−	0	+	1
tan	0	+	∞	−	0	+	∞	−	0
cot	∞	+	0	−	∞	+	0	−	∞
sec	1	+	∞	−	−1	−	∞	+	1
cosec	∞	+	1	+	∞	−	−1	−	∞
	−360	+	−270°		−180°		−90°		0°

[注意一]角由 360° 漸次增大。其三角函數。當依上表之變化。終而復始。廻線由本線起而作負角。其三角函

數。當依上表之變化逆次變之。終而復始。

〔注意二〕正弦及餘弦之數值不能大於1。正割及餘割之數值不能小於1。正切及餘切之數值無制限。

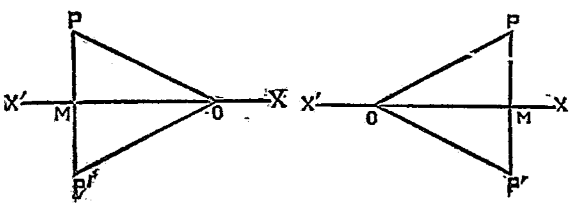
〔注意三〕以一數爲一個三角函數之值。則其角上廻線之方位。恒有一定。

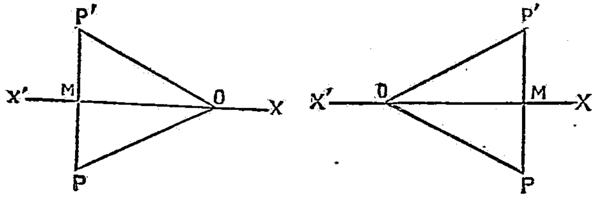
〔注意四〕$0°, 30°, 45°, 60°, 90°$,之正弦。等於$0, 1, 2, 3, 4$,之平方根之半。$\left(\text{即}\frac{\sqrt{0}}{2}, \frac{\sqrt{1}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{4}}{2},\right)$其餘弦等於$4, 3, 2, 1, 0$,之平方根之半。$\left(\text{即}\frac{\sqrt{4}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{1}}{2}, \frac{\sqrt{0}}{2},\right)$

24. 90°整倍數與他角和較之關係

〔第一〕$-A$,與A,兩三角函數之關係,

設XOP角爲A, XOP'爲$-A$。於二角之廻線上。取等長之OP, OP',則聯PP'之直線。與OX(或其延長線)直交。設交點爲M。則$OP'=OP$。$MP'=-MP$,故有次之關係。





$$\sin(-A)=\frac{MP'}{OP'}=\frac{-MP}{PO}=-\sin A.$$

$$\cos(-A)=\frac{OM}{OP'}=\frac{OM}{OP}=\cos A.$$

$$\tan(-A)=\frac{MP'}{OM}=\frac{-MP}{OM}=-\tan A.$$

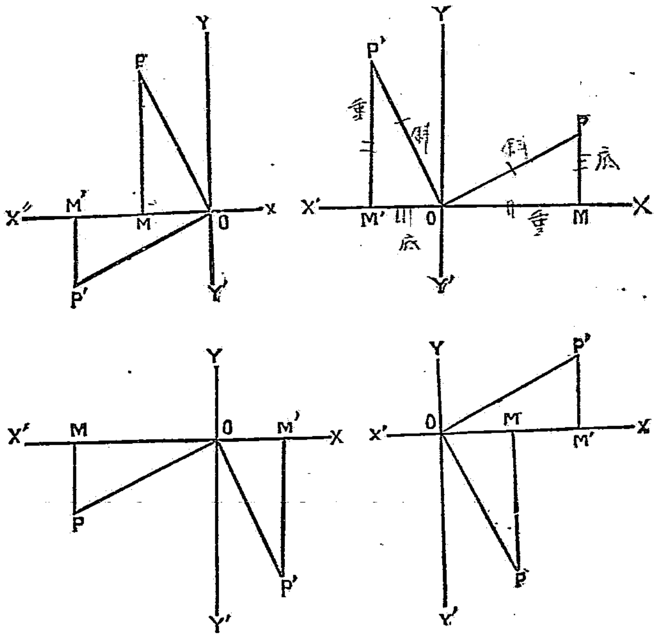
$$\cot(-A)=\frac{OM}{MP'}=\frac{OM}{-MP}=-\cot A.$$

$$\sec(-A)=\frac{OP'}{OM}=\frac{OP}{OM}=\sec A.$$

$$\operatorname{cosec}(-A)=\frac{OP'}{MP'}=\frac{OP}{-MP}=-\operatorname{cosec}A.$$

[第二]　$90°+A$,與 A,兩三角函數之關係。

設 XOP 角爲 A, XOP′ 爲 $90°+A$,於二角之廻線上。取等長之 OP, OP′ 由 PP′ 作垂線於 OX。設其足爲 M,M′。則 $OP'=OP$, $M'P'=OM$, $OM'=-MP$,故有次之關係。



$$\sin(90^\circ+A)=\frac{M'P'}{OP'}=\frac{OM}{OP}=\cos A.$$

$$\cos(90^\circ+A)=\frac{OM'}{OP'}=\frac{-MP}{OP}=-\sin A.$$

$$\tan(90^\circ+A)=\frac{M'P'}{OM'}=\frac{OM}{-MP}=-\cot A.$$

$$\cot(90^\circ+A)=\frac{OM'}{M'P'}=\frac{-MP}{OM}=-\tan A,$$

$$\sec(90^\circ+A)=\frac{OP'}{OM'}=\frac{OP}{-MP}=-\operatorname{cosec}A.$$

$$\operatorname{cosec}(90^\circ+A)=\frac{OP'}{M'P'}=\frac{OP}{OM}=\sec A.$$

[第三.] $90^\circ-A$ 與 A 兩三角函數之關係

$$\sin(90^\circ-A)=\sin\{90^\circ+(-A)\}=\cos(-A)=\cos A.$$

$$\cos(90^\circ-A)=\cos\{90^\circ+(-A)\}=-\sin(-A)=\sin A.$$

$$\tan(90^\circ-A)=\tan\{90^\circ+(-A)\}=-\cot(-A)=\cot A.$$

$$\cot(90^\circ-A)=\cot\{90^\circ+(-A)\}=-\tan(-A)=\tan A.$$

$$\sec(90^\circ-A)=\sec\{90^\circ+(-A)\}=-\operatorname{cosec}(-A)=\operatorname{cosec}A.$$

$$\operatorname{cosec}(90^\circ-A)=\operatorname{cosec}\{90^\circ+(-A)\}=\sec(-A)=\sec A.$$

定義 $90^\circ-A$ 謂之 A 之餘角

第四.] $180^\circ+A$ 與 A 兩三角函數之關係.

$$\sin(180^\circ+A)=\sin\{90^\circ+(90^\circ+A)\}=\cos(90^\circ+A)$$
$$=-\sin A.$$

$$\cos(180^\circ+A)=\cos\{90^\circ+(90^\circ+A)\}=-\sin(90^\circ+A)$$
$$=-\cos A.$$

$$\tan(180^\circ+A)=\tan\{90^\circ+(90^\circ+A)\}=-\cot(90^\circ+A)$$
$$=\tan A.$$

$$\cot(180^\circ+A)=\cot\{90^\circ+(90^\circ+A)\}=-\tan(90^\circ+A)$$
$$=\cot A.$$

$$\sec(180^\circ+A)=\sec\{90^\circ+(90^\circ+A)\}=-\operatorname{cosec}(90^\circ+A)$$
$$=-\sec A.$$

$$\operatorname{cosec}(180^\circ+A)=\operatorname{cosec}\{90^\circ+(90^\circ+A)\}=\sec(90^\circ+A)$$
$$=-\operatorname{cosec}A.$$

〔第五.〕 $180^\circ-A$ 與 A 兩三角函數之關係.

$$\sin(180^\circ-A)=\sin\{180^\circ+(-A)\}=-\sin(-A)$$
$$=\sin A.$$

$$\cos(180^\circ-A)=\cos\{180^\circ+(-A)\}=-\cos(-A)$$
$$=-\cos A.$$

$$\tan(180^\circ-A)=\tan\{180^\circ+(-A)\}=\tan(-A)$$
$$=-\tan A.$$

$$\cot(180^\circ-A)=\cot\{180^\circ+(-A)\}=\cot(-A)$$
$$=-\cot A.$$

$$\sec(180^\circ-A)=\sec\{180^\circ+(-A)\}=-\sec(-A)$$
$$=-\sec A.$$
$$\operatorname{cosec}(180^\circ-A)=\operatorname{cosec}\{180^\circ+(-A)\}=-\operatorname{cosec}(-A)$$
$$=\operatorname{cosec}A.$$

定義 $180^\circ-A$謂之A之補角

系 $180^\circ\pm A$(即$2\times90^\circ\pm A$)之三角函數。與A之各同名函數。其數值相等。又$90^\circ\pm A$之三角函數。與A之各餘函數。其數值亦相等。因得次之通則(證明從略)

〔第一〕 $n\times90^\circ\pm A$之三角函數。恒依下二例。(1)n為偶數。(0,屬於此例)則其數值等於A之各同名函數之數值。(11)n為奇數。則其數值等於A之各餘函數之數值。

〔第二〕 $n\times90^\circ\pm A$之三角函數。苟A為銳角。則其符號依象限定之。

例

〔1〕 以A之函數,顯$270^\circ+A$之三角函數

解

A為銳角。則$270°+A$在第四象限。故其餘弦及正割為正。其他為負。又$270°$為$90°$之奇倍

$\sin(270°+A)=-\cos A$. $\cos(270°+A)=\sin A$.

$\tan(270°+A)=-\cot A$. $\cot(270°+A)=-\tan A$

$\sec(270°+A)=\operatorname{cosec} A$. $\operatorname{cosec}(270°+A=-\sec A$

(2) 以A之函數,顯$270°-A$之三角函數。

解

A為銳角。則$270°-A$在第三象限。故唯正切及餘切為正。其他為負。又$270°$為$90°$之奇倍。

∴ $\sin(270°-A)=-\cos A$. $\cos(270-A)=-\sin A$

$\tan(270°-A)=\cot A$. $\cot(270°-A)=\tan A$

$\sec(270°-A)=-\operatorname{cosec} A$. $\operatorname{cosec}(270°-A)=-\sec A$

(3) 以A之函數顯$\tan(540°-A)$

解

A為銳角,則$540°-A$在第二象限。故其正切為負,又$540°$為$90°$之偶倍。

∴ $\tan(540°-A)=\tan A$

(4) 求$\cos 675°$之值

解

$675^\circ = 7 \times 90^\circ + 45^\circ$

$\therefore\ \cos 675^\circ = \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(5) 求 $\sin(-1050^\circ)$ 之值

解

$-1050^\circ = -12 \times 90^\circ + 30^\circ \quad \therefore\ \sin(-1050^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$.

設　題　九.

(1.) 求次之二角之象限

(i) 2000°. 　　答. 第三.

(ii) -4000°. 　　答. 第四.

(2.) 求次之二式之值

(i) $\cos 0^\circ \sin 270^\circ + 2\cos 180^\circ \tan 45^\circ$. 　　答. -3.

(ii) $3\sin 0^\circ \sec 180^\circ + 2\operatorname{cosec} 90^\circ - \cos 360^\circ$. 　　答. 1.

(3.) 求次之三個角之各三角函數

(i) 120°. 　　答. $\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, -\sqrt{3}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -2, \frac{2}{\sqrt{3}}$

(ii) 135°. 　　答. $\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -1, -1, -\sqrt{2}, \sqrt{2}$.

(iii) $150°$. 答. $\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\sqrt{3}, -\frac{2}{\sqrt{3}}, 2.$

(4.) 求次之諸函數之值

(i) $\sin 210°$. 答. $-\frac{1}{2}$.

(ii) $\cos 240°$. 答. $-\frac{1}{2}$.

(iii) $\tan 225°$. 答. 1.

(5) 將次之諸函數,用最小正角之函數顯之.

(i) $\sin 1005°$. 答. $-\cos 15°$.

(ii) $\tan(-2232°)$. 答. $-\cot 18°$.

(6.) 求適于次之方程式之正角(不得過$360°$)

(i) $2\sin^2\theta+3\cos\theta-3=0$. 答. $0°, 60°, 300°, 360°$,

(ii) $\cos\theta+\tan\theta=\sec\theta$. 答. $0°, 90°, 360°$.

(iii) $\sec^3\theta-2\tan^2\theta=2$. 答. $60°, 300°$.

第　五　章。

關於二角之公式。

25。求任意兩角和所成之角之正弦及餘弦

用任意二角A, B之正弦及餘弦顯此二角和A+B,之正弦與餘弦。其式如次.

$$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B \cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B \cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

證.

〔第一〕 A, B皆爲零之例.

$$\sin(A+B)=\sin(0+0)=\sin 0=0,$$

又 $$\sin A\cos B+\cos A\sin B=\sin 0\cos 0+\cos 0\sin 0$$
$$=0\times 1+1\times 0=0.$$

∴ $$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B.$$

次 $$\cos(A+B)=\cos(0+0)=\cos 0=1,$$

又 $$\cos A\cos B-\sin A\sin B=\cos 0\cos 0-\sin 0\sin 0$$
$$=1\times 1-0\times 0=1.$$

$\therefore\qquad \cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

〔第二.〕 A, B 中有一個(如 A)爲零,其他一個非零,之例

$$\sin(A+B)=\sin(0+B)=\sin B,$$

又 $\qquad \sin A\cos B+\cos A\sin B=\sin 0\cos B+\cos 0\sin B$

$$=0\times\cos B+1\times\sin B=\sin B.$$

$\therefore\qquad \sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B.$

次 $\qquad \cos(A+B)=\cos(0+B)=\cos B,$

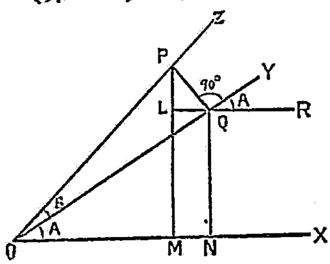
又 $\qquad \cos A\cos B-\sin A\sin B=\cos 0\cos B-\sin 0\sin B$

$$=1\times\cos B-0\times\sin B=\cos B.$$

$\therefore\qquad \cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B.$

同樣於 $A\neq 0$, $B=0$ 之例易知上之關係之合理

〔第三.〕 A, B, A+B 共爲正銳角之例



$X\hat{O}Y$, $Y\hat{O}Z$, $X\hat{O}Z$, 各爲 A, B, A+B, 由 OZ 上之一點 P 作垂線于 OY, OX, 其足爲 Q,M。由 Q 作垂線于 MP, OX 其足爲 L, N, 設 LQ 之

延長爲QR則$R\hat{Q}P$爲$90°+A$故有次之關係

$$\sin(A+B)=\frac{MP}{OP}=\frac{NQ+LP}{PO}=\frac{NQ}{OQ}\cdot\frac{OQ}{OP}+\frac{LP}{QP}\cdot\frac{QP}{OP}$$

$$=\sin A\cos B+\sin(90°+A)\sin B$$

$$=\sin A\cos B+\cos A\sin B.$$

$$\cos(A+B)=\frac{OM}{OP}=\frac{ON+QL}{OP}=\frac{ON}{OQ}\cdot\frac{OQ}{OP}+\frac{QL}{QP}\cdot\frac{QP}{OP}$$

$$=\cos A\cos B+\cos(90°+A)\sin B$$

$$=\cos A\cos B-\sin A\sin B.$$

〔第四.〕 A, B 俱爲正銳角,而 A+B 爲直角,之例

$$\sin(A+B)=\sin 90°=1,$$

又 $\sin A\cos B+\cos A\sin B=\sin A\cos(90°-A)+\cos A\sin(90°-A)$

$$=\sin^2 A+\cos^2 A=1.$$

$\therefore \quad \sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B.$

次 $\quad \cos(A+B)=\cos 90°=0,$

又 $\cos A\cos B-\sin A\sin B=\cos A\cos(90°-A)-\sin A\sin(90°-A)$

$$=\cos A\sin A-\sin A\cos A=0.$$

$\therefore \quad \cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B.$

〔第五.〕 A, B俱爲正銳角而 A+B 爲鈍角之例

$90°-A$, $90°-B$, $(90°-A)+(90°-B)$ 俱爲正銳角故

$$\sin(A+B)=\sin\{180°-(A+B)\}=\sin\{(90°-A)+(90°-B)\}$$
$$=\sin(90°-A)\cos(90°-B)+\cos(90°-A)\sin(90°-B)$$
$$=\cos A\sin B+\sin A\cos B$$
$$=\sin A\cos B+\cos A\sin B.$$

$$\cos(A+B)=-\cos\{180°-(A+B)\}=-\cos\{(90°-A)+(90°-B)\}$$
$$=-\{\cos(90°-A)\cos(90°-B)-\sin(90°-A)\sin(90°-B)\}$$
$$=-\{\sin A\sin B-\cos A\cos B\}$$
$$=\cos A\cos B-\sin A\sin B.$$

〔第六.〕 A, B爲任何正角之例

(9)(10)兩公式無論 A, B 爲或值皆合理。則 A, B 之中有一個(如 A)增至 90°亦合理如次

$$\sin\{(90°+A)+B\}=\sin\{90°+(A+B)\}=\cos(A+B)$$
$$=\cos A\cos B-\sin A\sin B$$
$$=\sin(90°+A)\cos B+\cos(90°+A)\sin B.$$

$$\cos\{(90°+A)+B\}=\cos\{90°+(A+B)\}=-\sin(A+B)$$

$=-\sin A\cos B-\cos A\sin B$

$=\cos(90^\circ+A)\cos B-\sin(90^\circ+A)\sin B.$

然(9)(10)兩公式。其A,B爲任意之正銳角皆合理。已證於前。故此A,B之一個,或二者加至90°整數倍之任何正角。亦能推定其合理

〔第七.〕A,B之一個,或俱爲負角之例

A,B之中。有一個(如A)爲負角.則加360°適當之倍量于是。其和$n\times360^\circ+A$爲正角則

$$\begin{aligned}\sin(A+B)&=\sin(n\times360^\circ+A+B)\\&=\sin(n\times360^\circ+A)\cos B+\cos(n\times360^\circ+A)\sin B\\&=\sin A\cos B+\cos A\sin B.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(A+B)&=\cos(n\times360^\circ+A+B)\\&=\cos(n\times360^\circ+A)\cos B-\sin(n\times360^\circ+A)\sin B\\&=\cos A\cos B-\sin A\sin B\end{aligned}$$

同樣B爲負角。或A,B俱爲負角。可知公式合理

故(9)(10)兩公式。一切合理。此二式爲三角函數論之大本。稱爲加法定理或基礎公式

26. 求任意兩角差所成之角之正弦及餘弦

用任意二角 A, B之正弦及餘弦。顯此二角差A−B之正弦與餘弦。其式如次

$$\sin(A-B)=\sin\{A+(-B)\}$$
$$=\sin A\cos(-B)+\cos A\sin(-B)$$
$$=\sin A\cos B-\cos A\sin B \cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$
$$\cos(A-B)=\cos\{A+(-B)\}$$
$$=\cos A\cos(-B)-\sin A\sin(-B)$$
$$=\cos A\cos B+\sin A\sin B \cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

此二式原含於(9)(10)兩式中。今特揭於是。唯便於參照

27. 求任意二角和差所成之角之正切及餘切。

用任意二角A, B之正切顯此二角和A+B及差A−B之正切。其式如次.

$$\tan(A+B)=\frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)}$$

$$=\frac{(\sin A\cos B+\cos A\sin B)\div\cos A\cos B}{(\sin A\cos B-\sin A\sin B)\div\cos A\cos B}$$

$$=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

同樣 $\tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(14)$

系 $\cot(A+B)=\frac{\cot A\cot B-1}{\cot B+\cot A},$

$$\cot(A-B)=\frac{\cot A\cot B+1}{\cot B-\cot A}.$$

28. 求任意二角之和差所成之角之正弦或餘弦之乘積

將(9) (11) 兩式相乘。則

$$\sin(A+B)\sin(A-B)=\sin^2A\cos^2B-\cos^2A\sin^2B$$

$$=\sin^2A(1-\sin^2B)-(1-\sin^2A)\sin^2B$$

$$=\sin^2A-\sin^2B=\cos^2B-\cos^2A.\cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

將(10)(12)兩式相乘，則

$$\cos(A+B)\cos(A-B)=\cos^2A\cos^2B-\sin^2A\sin^2B$$

$$=\cos^2A(1-\sin^2B)-(1-\cos^2A)\sin^2B$$

$$=\cos^2A\sin^2B=\cos^2B-\sin^2A,\cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$

29. 化 $a\cos A+b\sin A$ 爲一項式之法.

求以$\frac{b}{a}$爲正切之角設之爲α

則 $\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$故

$$a\cos A+b\sin A=a\left(\cos A+\frac{b}{a}\sin A\right)$$

$$=a(\cos A+\tan\alpha\sin A)$$

$$=a\left(\frac{\cos A\cos\alpha+\sin A\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)$$

$$=\frac{a\cos(A-\alpha)}{\cos\alpha}$$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\cos(A-\alpha)\text{.....................}(17)$$

設 題 十.

1. $\sin A=\frac{3}{5}$, $\cos B=\frac{5}{13}$求$\sin(A+B)$ 答. $\frac{63}{65}$.

2. $\sin A=\frac{15}{17}$, $\tan B=\frac{4}{3}$, 求 $\cos(A-B)$ 答. $\frac{84}{85}$.

於上之二問題A,B爲銳角

3. $\tan A=\frac{\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}$, $\tan B=\frac{\sqrt{3}}{4+\sqrt{3}}$求 $\tan(A-B)$ 答 $\frac{3}{8}$.

4. 求 15° ノ三角函數

答. $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}, \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}, 2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}, \sqrt{6}+\sqrt{2}, \sqrt{6}-\sqrt{2}$

5. 化 $\cos^2 A+\cos^2(A+B)-2\cos A\cos B\cos(A+B)$ 爲簡式

答. $\sin^2 B$.

6. 證次之二恒等式

(i) $\sin A\sin B=\sin^2\dfrac{A+B}{2}-\sin^2\dfrac{A-B}{2}$.

(ii) $\cos A\cos B=\cos^2\dfrac{A+B}{2}+\cos\dfrac{A-B}{2}-1$.

7. 化 $\sqrt{3}\cos A+\sin A$ 爲一項式　答. $2\cos(A-30^\circ)$

證次之諸恒等式。(此諸式俱重要)

8. $\cos A+\sin A=\sqrt{2}\sin(45^\circ+A)=\sqrt{2}\cos(45^\circ-A)$.

9. $\cos A-\sin A=\sqrt{2}\cos(45^\circ+A)=\sqrt{2}\sin(45^\circ-A)$.

10. $\tan(45^\circ\pm A)=\dfrac{1\pm\tan A}{1\mp\tan A}$.

11. $\tan(p+q)A-\tan pA-\tan qA$

$=\tan(p+q)A\tan pA\tan qA$.

12. $\tan A\pm\tan B=\dfrac{\sin(A\pm B)}{\cos A\cos B}$.

13. $\cot B\pm\cot A=\dfrac{\sin(A\pm B)}{\sin A\sin B}$.

14. $\cot A \pm \tan B = \dfrac{\cos(A \mp B)}{\sin A \cos B}$.

15. $\sin(A+B+C) = \sin A\cos B\cos C + \cos A\sin B\cos C$
$\qquad\qquad + \cos A\cos B\sin C - \sin A\sin B\sin C$.

16. $\cos(A+B+C) = \cos A\cos B\cos C - \cos A\sin B\sin C$
$\qquad\qquad - \sin A\cos B\sin C - \sin A\sin B\cos C$.

17. $\tan(A+B+C) = \dfrac{\tan A + \tan B + \tan C - \tan A\tan B\tan C}{1 - \tan B\tan C - \tan C\tan A - \tan A\tan B}$

求適於次之方程式，360° 以內之正角

18. $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. 答. 105°, 345°.

19. $\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta = 1$. 答. 0°, 60°, 360°.

20. 由 $\left\{\begin{matrix} \sin\alpha + \sin\beta = a \\ \cos\alpha + \cos\beta = b \\ \cos(\alpha - \beta) = c \end{matrix}\right\}$ 消去 α, β

答. $a^2 + b^2 = 2(c+1)$.

30. 正弦餘弦之乘積與和或差之轉換。

作 (9) (11) 之和及差。并 (12) (10) 之和及差。將各式之左右邊轉換得次式

$$2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B) \qquad (18.)$$

$$2\cos A\sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B) \qquad (19.)$$

$$2\cos A\cos B=\cos(A-B)+\cos(A+B)\quad\cdots\cdots(20)$$

$$2\sin A\sin B=\cos(A-B)-\cos(A+B)\quad\cdots\cdots(21)$$

此四式稱爲(A, B)式。用和或差。變二角之正弦餘弦之乘積。

次爲

$$\sin C+\sin D=\sin\left(\frac{C+D}{2}+\frac{C-D}{2}\right)+\sin\left(\frac{C+D}{2}-\frac{C-D}{2}\right)$$

$$=2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}\quad\cdots\cdots(22)$$

$$\sin C-\sin D=\sin\left(\frac{C+D}{2}+\frac{C-D}{2}\right)-\sin\left(\frac{C+D}{2}-\frac{C-D}{2}\right)$$

$$=2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}\quad\cdots\cdots(23)$$

$$\cos D+\cos C=\cos\left(\frac{C+D}{2}-\frac{C-D}{2}\right)+\cos\left(\frac{C+D}{2}+\frac{C-D}{2}\right)$$

$$=2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}\quad\cdots\cdots(24)$$

$$\cos D-\cos C=\cos\left(\frac{C+D}{2}-\frac{C-D}{2}\right)+\cos\left(\frac{C+D}{2}+\frac{C-D}{2}\right)$$

$$=2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}\quad\cdots\cdots(25)$$

此四式稱(C, D式。用乘積變正弦餘弦之和或差

系一。$\cos C+\sin D=\sin(90^\circ+C)+\sin D$

$$=2\sin\left(45^\circ+\frac{C+D}{2}\right)\cos\left(45^\circ+\frac{C-D}{2}\right)$$

$$\cos C-\sin D=\sin(90^\circ+C)-\sin D$$

$$=2\cos\left(45^\circ+\frac{C+D}{2}\right)\sin\left(45^\circ+\frac{C-D}{2}\right)$$

此二式亦與前四式爲同樣之目的

系二　$\sin(p+1)A=2\sin pA\cos A-\sin(p-1)A.$

$\cos(p+1)A=2\cos pA\cos A-\cos(p-1)A.$

由此二式。可逐次求得倍角之正弦及餘弦

設題十一。

(1.) 化次之諸式爲一次式

(i)　$2\sin 50^\circ\cos 10^\circ$.　答．$\sin 60^\circ+\sin 40^\circ$.

(ii)　$2\cos 60^\circ\sin 10^\circ$.　答．$\sin 70^\circ-\sin 50^\circ$.

(iii)　$2\cos 77^\circ\cos 4^\circ$.　答．$\cos 73^\circ+\cos 81^\circ$.

(iv)　$2\sin 6^\circ\sin 5^\circ$.　答．$\cos 1^\circ-\cos 11^\circ$.

(2.) 化次之諸式爲一項式

(i)　$\sin 70^\circ+\sin 30^\circ$.　答．$2\sin 50^\circ\cos 20^\circ$.

(ii)　$\sin 30^\circ-\sin 16^\circ$.　答．$2\cos 23^\circ\sin 7^\circ$.

(iii)　$\cos 1^\circ+\cos 3^\circ$.　答．$2\cos 2^\circ\cos 1^\circ$.

(iv) $\cos 27^\circ - \cos 77^\circ$. 答. $2\sin 52^\circ \sin 52^\circ$.

(3.) 化次之諸式爲最簡式

(i) $\sin 40^\circ + \sin 20^\circ$. 答. $\cos 10^\circ$.

(ii) $\sin 80^\circ - \sin 40^\circ$. 答. $\sin 20^\circ$.

(iii) $\cos 55^\circ + \cos 65^\circ$. 答. $\cos 5^\circ$.

(iv) $\cos 17^\circ - \cos 77^\circ$. 答. $\sin 47^\circ$.

(4.) 化次之二式爲最簡式

(i) $\cos 10^\circ + \sin 40^\circ$. 答. $\sqrt{3}\cos 20^\circ$

(ii) $\cos 80^\circ - \sin 70^\circ$. 答. $-\sin 50^\circ$.

證次之諸式

(5.) (i) $\cos(60^\circ + A) + \cos(60^\circ - A) = \cos A$.

(ii) $\sin(60^\circ + A) - \sin(60^\circ - A) = \sin A$.

(6.) (i) $\cos A + \cos(120^\circ + A) + \cos(120^\circ - A = 0$.

(ii) $\sin A + \sin(120^\circ + A) - \sin(120^\circ - A) = 0$.

(7.) (i) $4\sin A \sin B \sin C = \sin(B + C - A) + \sin(C + A - B)$
$+ \sin(A + B - C) - \sin(A + B + C)$.

(ii) $4\cos A \cos B \cos C = \cos(B + C - A) + \cos(C + A - B)$
$+ \cos(A + B - C) + \cos(A + B + C)$.

(8.) $\sin 2A+\sin 4A+\sin 6A=\dfrac{\cos A-\cos 7A}{2\sin A}$.

(9.) $\dfrac{\sin A+\sin 3A+\sin 5A}{\cos A+\cos 3A+\cos 5A}=\tan 3A$.

(10.) 求次之諸式之值

(i) $8\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 80^\circ$　答. $\sqrt{3}$

(ii) $\cos 40^\circ\cos 80^\circ\cos 160^\circ$　答. $-\dfrac{1}{8}$

(iii) $\cos 55^\circ+\cos 65^\circ+\cos 175^\circ$　答. 0.

(iv) $\cos 108^\circ\cos 132^\circ+\cos 132^\circ\cos 12^\circ+\cos 12^\circ\cos 108^\circ$.

答. $-\dfrac{3}{4}$.

(11.) 求適於次之方程式在180°以內之正角

(i) $\sin 4\theta+\sin\theta=0$.　答. 60°, 72°, 144°, 180°.

(ii) $\cos\theta-\cos 3\theta=\sin 2\theta$.　答. 0°, 90°, 180°.

(iii) $\cos 3\theta+\cos 2\theta+\cos\theta=0$.　答. 45°, 120°, 135°.

(12.) 由$\left\{\begin{array}{l} x\cos\theta+y\sin\theta=2a \\ x\cos\varphi+y\sin\varphi=2a \\ 2\cos\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\varphi}{2}=1 \end{array}\right\}$消去$\theta,\varphi$.

答. $y^2=4a(x+a)$.

31. 二倍角及半角之三角函數

於(3)(10)(13)設 $B=A$ 則

$$\sin 2A=2\sin A\cos A \tag{26}$$

$$\begin{aligned}\cos 2A&=\cos^2 A-\sin^2 A\\&=2\cos^2 A-1\\&=1-2\sin^2 A\end{aligned} \tag{27}$$

$$\tan 2A=\frac{2\tan A}{1-\tan^2 A} \tag{28}$$

系一. $\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}.$

$\cos A=\cos^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2}=2\cos^2\frac{A}{2}-1=1-2\sin^2\frac{A}{2}.$

$\tan A=\dfrac{2\tan\frac{A}{2}}{1-\tan^2\frac{A}{2}}.$

系二. $\sin^2 A=\dfrac{1-\cos 2A}{2}.$

$\cos^2 A=\dfrac{1+\cos 2A}{2}.$

由此式可化任意角之正弦及餘弦之平方爲一次式,

又於此式以 $\frac{A}{2}$ 代 A. 可得次之結果

$$\sin^2\frac{A}{2}=\frac{1-\cos A}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(29)$$

$$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{1+\cos A}{2}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(30)$$

從而 $$\tan^2\frac{A}{2}=\frac{1-\cos A}{1+\cos A}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(31)$$

次式亦甚緊要。

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}{2\cos^2\frac{A}{2}}=\frac{\sin A}{1+\cos A}.$$

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{2\sin^2\frac{A}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}=\frac{1-\cos A}{\sin A}.$$

$$\therefore\ \tan\frac{A}{2}=\frac{\sin A}{1+\cos A}=\frac{1-\cos A}{\sin A}\cdots\cdots\cdots\cdots(32)$$

設題十二.

證次之諸恆等式

1. $\operatorname{cosec}2A=\dfrac{\cot^2A+1}{2\cot A}.$

2. $\sin 2A=\dfrac{2\tan A}{1+\tan^2A}.$

3. $\cos 2A=\dfrac{1-\tan^2A}{1+\tan^2A}.$

4. $\cot A+\tan A=2\operatorname{cosec}2A.$

5. $\cot A-\tan A=2\cot 2A.$

6. $\operatorname{cosec}A+\cot A=\cot\frac{A}{2}.$

7. $\operatorname{cosec}A-\cot A=\tan\frac{A}{2}.$

8. $1\pm\sin A=\left(\cos\frac{A}{2}\pm\sin\frac{A}{2}\right)^2.$

9. $\frac{1\pm\sin A}{1\pm\sin A}=\tan^2\left(45^\circ\pm\frac{A}{2}\right).$

10. $\sec A\pm\tan=\tan\left(45^\circ\pm\frac{A}{2}\right).$

上之諸式俱甚重要

11. $\cos A=\frac{1}{1+\tan A\tan\frac{A}{2}}.$

12. $\tan\frac{A}{2}=\frac{1+\sin A-\cos A}{1+\sin A+\cos A}.$

13. $2\sin^2A\sin^2B+2\cos^2A\cos^2B=1+\cos2A\cos2B.$

14. $\operatorname{cosec}2A+\cot4A=\cot A-\operatorname{cosec}4A.$

15. $\cos^2A+\cos^2(120^\circ+A)+\cos^2 120^\circ-A)=\frac{3}{2}.$

16. $\cos A=\frac{\cos\alpha-\cos\beta}{1+\cos\alpha\cos\beta}$ 則 $\tan^2\frac{A}{2}=\tan^2\frac{\alpha}{2}=\cot^2\frac{\beta}{2}$

17. 求適於次之方程式在360°以內之正角

(i) $\cos 2\theta + 2\sin^2 2\theta = 1.$

答. $60°, 120°, 180°, 240°, 300°, 360°.$

(ii) $8\cot\theta = \sec^2\dfrac{\theta}{2} + \operatorname{cosec}^2\dfrac{\theta}{2}.$ 答. $45°, 225°,$

(iii) $\tan\theta + \cot\theta = \dfrac{4}{\sqrt{3}}.$ 答. $30°, 60°, 210°, 240°.$

23. 三倍角之三角函數.

$$\sin 3A = \sin(2A + A) = \sin 2A\cos A + \cos 2A\sin A$$

$$= 2\sin A\cos A\cos A + (1 - 2\sin^2 A)\sin A$$

$$= 2\sin A(1 - \sin^2 A) + \sin A - 2\sin^3 A$$

$$= 3\sin A - 4\sin^3 A \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(33)$$

$$\cos 3A = \cos(2A + A) = \cos 2A\cos A - \sin 2A\sin A$$

$$= (2\cos^2 A - 1)\cos A - 2\sin A\cos A\sin A$$

$$= 2\cos^3 A - \cos A - 2\cos A(1 - \cos^2 A)$$

$$= 4\cos^3 A - 3\cos A \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(34)$$

$$\tan 3A = \tan(2A + A) = \frac{\tan 2A + \tan A}{1 - \tan 2A\tan A}$$

$$= \frac{\dfrac{2\tan A}{1 - \tan^2 A} + \tan A}{1 - \dfrac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}\tan A}$$

$$=\frac{3\tan A-\tan^3 A}{1-3\tan^2 A}\text{..................................}(35)$$

系　$\sin^3 A=\dfrac{3\sin A-\sin 3A}{4}$.

$$\cos^3 A=\frac{3\cos A+\cos 3A}{4}$$

由此式,可化任意角之正弦或餘弦之立方爲一次式.

設題十三.

證次之諸恆等式

1. (i) $4\sin A\sin(60°-A)\sin(60°+A)=\sin 3A$.

   (ii) $4\cos A\cos(60°-A)\cos(60°+A)=\cos 3A$.

   (iii) $\tan A\tan(60°+A)\tan(120°+A)=-\tan 3A$.

2. $\dfrac{\cos 3A}{\cos A}-\dfrac{\cos 6A}{\cos 2A}+\dfrac{\cos 9A}{\cos 3A}-\dfrac{\cos 18A}{\cos 6A}$

   $=2(\cos 2A-\cos 4A+\cos 6A-\cos 12A)$

3. (i) $\sec A+\sec(120°+A)+\sec(240°+A)=-3\sec 3A$.

   (ii) $\operatorname{cosec} A+\operatorname{cosec}(120°+A)+\operatorname{cosec}(240°+A)$

   $=3\operatorname{cosec} 3A$.

4. (i) $\cos^3 A\dfrac{\sin 3A}{3}+\sin^3 A\dfrac{\cos 3A}{3}=\dfrac{\sin 4A}{4}$.

   (ii) $\sin 3A\sin^3 A+\cos 3A\cos^3 A=\cos^3 2A$.

5. (i) $\tan A+\tan(60^\circ+A)+\tan(120^\circ+A)=3\tan 3A.$

(ii) $\cot A+\cot(60^\circ+A)+\cot(120^\circ+A)=3\cot 3A.$

9. $\dfrac{\sin 3A+\cos 3A}{\sin 3A-\cos 3A}=\tan(A-45^\circ)\left(\dfrac{1+2\sin 2A}{1-2\sin 2A}\right).$

7. (i) $\sin^3 A+\sin^3(120^\circ+A)-\sin^3(120^\circ-A=-\dfrac{3}{4}\sin 3A.$

(ii) $\cos^3 A+\cos^3(120^\circ+A)+\cos^3(120^\circ-A)=-\dfrac{3}{4}\cos 3A.$

8. (i) $\sin 5A=16\sin^5 A-20\sin^3 A+5\sin A.$

(ii) $\cos 5A=16\cos^5 A-20\cos^3 A+5\cos A.$

9. (i) $\sin 18^\circ=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}.$

(ii) $\cos 36^\circ=\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}.$

10. 求適於次之方程式在 360° 以內之正角.

(i) $\operatorname{cosec}\theta-4\sin\theta=2.$ 答. $18^\circ, 162^\circ, 234^\circ, 306^\circ.$

(ii) $\sin 5\theta=16\sin^5\theta.$

答. $0^\circ, 30^\circ, 150^\circ, 180^\circ, 210^\circ, 330^\circ, 360^\circ.$

第六章。

對數.

對數之定義及記法.

任意一數 a 之 x 乘方爲 y。(但 x 爲任意之數)則 x 爲 y 之 a 底對數。此關係以 $x=\log_a y$ 記之。

〔注意一.〕 此關係或記爲 $y=\log_a{}^{-1}x$.

〔注意二.〕 據定義可推定次之關係.

第一。 $a^0=1$ $\therefore$ $\log_a 1=0$.

第二. $a^1=a$ $\therefore$ $\log_a a=1$.

第三. $a^m=a^m$ $\therefore$ $\log_a a^m=m$.

設題十四.

求次之對數之値

1. $\log_2 1024$. 答. 10.

2. $\log_3\sqrt{27}$. 答. $\frac{3}{2}$.

3. $\log_4 0\cdot125$. 答. $-\frac{3}{2}$.

4. $\log_5\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt{125}}$. 答. $-\frac{7}{6}$.

5. $\log_{\sqrt{3}}81$. 答. 8.

6. $\log_{\cdot01}10$. 答. $-\frac{1}{2}$.

7. $\log_{49}343\sqrt{7}$. 答. $\frac{7}{4}$.

8. $\log_4\sqrt[5]{\frac{1}{2}}$. 答. $-\frac{1}{10}$.

9. $\log_2\sin45^\circ$ 答. $-\frac{1}{2}$.

10. $\log_a x=\log_b y=\log_c z$ 則此對數爲以 $a^p b^q c^r$ 爲底之 $x^p y^q z^r$ 之對數求證.

34. 對數之重要性質.

〔第一.〕 乘積之對數等於其各因數之對數之和.

證.

設 $\log_a m=x$, $\log_a n=y$ 則 $m=a^x$, $n=a^y$

$$\therefore\quad mn=a^x a^y=a^{x+y}$$

$\therefore\ \log_a mn = x + y = \log_a m + \log_a n.$

同樣 $\log_a mnp\ldots\ldots\ldots = \log_a m + \log_a n + \log_a p + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

〔第二.〕 商之對數等於由被除數之對數,減除數之對數之差.

證.

$\log_a m = x$, $\log_a n = y$ 則 $m = a^x$, $n = a^y$

$$\therefore\ \frac{m}{n} = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$\therefore\ \log_a \frac{m}{n} = x - y = \log_a m - \log_a n.$$

〔第三.〕 一數之乘方之對數。等於以指數(任意數)乘原數之對數。

證.

設 $\log_a m = x$ 則 $m = a^x$, 今 r 爲任意之數則

$$m^r = (a^x)^r = a^{rx}$$

$$\therefore\ \log_a (m^r) = rx = r\log_a m.$$

〔第四.〕 以一數之對數除他數之對數。其商等於以第二數爲底之第一數之對數。

證.

設 $\log_c a = x$, $\log_c b = y$ 則 $a = c^x$, $b = c^y$

$$\therefore \quad a^{\frac{1}{x}}=b^{\frac{1}{y}}$$

$$\therefore \quad a=b^{\frac{x}{y}}$$

$$\therefore \quad \log_b a=\frac{x}{y}=\frac{\log_c a}{\log_c b}.$$

設題十五。

(1) 證 $7\log_a\frac{15}{16}-6\log_a\frac{3}{8}+5\log_a\frac{2}{5}-\log_a\frac{25}{32}=\log_a 3$

(2) 知 8, 14, 21 之 10 底對數求由 1 至 10 諸整數之對數。

(3) $\log_8 9=a$, $\log_2 5=b$, $\log_5 7=c$ 問由 1 至 7 諸整數之 10 底對數各幾何

答. $0, \frac{1}{b+1}, \frac{3a}{2b+2}, \frac{2}{b+1}, \frac{b}{b+1}, \frac{3a+2}{2b+2}, \frac{bc}{b+1}.$

(4) 證 $2\log_a x+2\log_a x^2+2\log_a x^3+\ldots\ldots+2\log_a x^n$
$=n(n+1)\log_a x$

(5) 證 $\log_a b\times\log_b c=\log_a c$ 　及 $\log_a b\times\log_b a=1.$

35. 對數之種類.

最有用之對數爲自然對數及常用對數二種(自然對數。又名爲納伯爾對數。)

第一. 自然對數者。以 $e=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots\cdots+\frac{1}{r!}+\cdots\cdots=2{\cdot}71828\cdots\cdots$ 爲底之對數也。理論數學多用之。

本書不用此種對數.

第二. 常用對數者。以 10 爲底之對數也。實地計算多用之.

注意. 據前條第四

$$\frac{\log_{10}m}{\log_{10}e}=\log_e m$$

$$\therefore \quad \log_{10}m=\log_{10}e\times\log_e m$$

而 $\log_{10}e={\cdot}43429\cdots\cdots,\quad \frac{1}{\log_{10}e}=2{\cdot}30258\cdots\cdots$

設此爲 μ 及 $\frac{1}{\mu}$ 則

$$\log_{10}m=\mu\log_e m.$$

$$\log_e m=\frac{1}{\mu}\log_{10}m.$$

由此式。知其一種對數自能求出他種對數

36. 常用對數.

〔規約一.〕 常用對數之記法不須記其底。

〔規約二.〕 常用對數其小數部分常爲正，若整數部分爲負。則以負號記於其數字上。

〔定義一.〕 對數之小數部分。謂之假數其整數之部分。謂之指標.。

〔定義二.〕 變數之對數之符號。謂之餘對數.。

〔注意一.〕 一數之餘對數。以 colog 之記法顯之。

〔注意二.〕 互爲反數之二數之對數。互爲餘對數.

〔定理一.〕 惟單位相異之二數。其對數之假數無異。

證.

$$\log(a\times10^n)=\log a+\log10^n=n+\log a.$$

$$\log(a\div10^n)=\log a-\log10^n=-n+\log a.$$

故 $(a\times10^n)$, a, $(a\div10^n)$ 其對數之假數無異.

〔定理二.〕 有整數 n 位之數。其對數之指標爲 $(n-1)$。小數點以下至有意數字間有 n 個零(即0)之小數。其指標爲 $-(n+1)$.

證.

有整數 n 位之數原在 10^{n-1} 與 10^n 之間。因而其對數在 $(n-1)$ 與 n 之間。故其指標爲 $(n-1)$.

小數點以下至有意數字有 n 個零之數。原在 $10^{-(n+1)}$ 與 10^{-n} 之間。因而其對數在 $-(n+1)$ 與 $-n$ 之間。故其指標爲 $-(n+1)$

〔定理三.〕 以由 1 減對數之假數爲假數，並以變其指標之符號加於 -1 爲指標，則其對數爲原對數之餘對數.

證.

設任意對數之指標爲 a, 假數爲 b, 則

$$-(a+b)=-a-b=(-1-a)+(1-b).$$

37. 對數四則.

〔第一〕 對數之加法.

因對數之假數常爲正.故求和時。宜注意指標之符號而求其代數和。

例一.	例二.	例三.
3·6428	$\bar{2}$·9326	3·5637
2.5364	$\bar{1}$·6785	$\bar{5}$·7456
6·1792	$\bar{2}$·6111	$\bar{1}$·3093

〔第二.〕對數之減法.

對數相減惟加其餘對數可也.

[例] 由 2·6389, $\bar{3}$·5463 之和減 $\bar{2}$·5713, 2·2105 之和.

運算.	按
2·6389	$-(\bar{2}\cdot5713)=1\cdot4287$
$\bar{3}$·5463	$-(2\cdot2105)=\bar{3}\cdot7895$
1·4287	
$\bar{3}$·7895	
$\bar{1}$·4034	

〔第三.〕以整數乘對數之法.

對數爲正則如普通數行乘法。若爲負.則分指標與假數各別用乘法.並加其結果.

例一.

$$\begin{array}{r} 2{\cdot}3576 \\ 3 \\ \hline 7{\cdot}0728 \end{array}$$

例二.

$$\begin{array}{r} \bar{3}{\cdot}6782 \\ 2 \\ \hline \bar{5}{\cdot}3564 \end{array}$$

〔第四.〕以整數除對數之法.

對數爲正。則如普通數行除法。若爲負。則由指標減適當之數。而加此適當之數于假數。使指標能整除。然後行除法。

例一.

$$\begin{array}{l} \underline{2.7539}\ (4 \\ 0.6885 \end{array}$$

例二.

$$\begin{array}{l} \underline{\bar{5}{\cdot}9287}\ (3 \\ \bar{2}{\cdot}6429 \end{array}$$

88. 數之對數表.

數之對數表。原載至若干數止諸整數對數之假數。本書卷尾之表惟列舉假數四位之整數對數至999止。其用法如次。

〔第一.〕求數之對數法.

例.

(1) 求 log83·2

解.

83·2 之對數之假數,撿表知為 9201 又指標據 36 條知為 1.

$$\therefore \quad \log 83{\cdot}2 = 1{\cdot}9201$$

(2) 求 $\log 0{\cdot}000357$

解.

0·000357 之對數之假數.撿表知為 5527 又指標據 36 條知為 -4.

$$\therefore \quad \log 0{\cdot}000357 = \bar{4}{\cdot}5527.$$

(3) 求 $\log 5{\cdot}118$

解.

$$\log 5{\cdot}12 - \log 5{\cdot}11 = 0{\cdot}7093 - 0{\cdot}7084 = 0{\cdot}0009$$

$$0{\cdot}01 : 0{\cdot}008 :: 0{\cdot}0009 : x$$

$$x = 0{\cdot}0007.$$

$$\therefore \quad \log 5{\cdot}118 = 0{\cdot}7084 + 0{\cdot}0007 = 0{\cdot}7091.$$

(4) 求 $\log 0{\cdot}7332$.

解.

$$\log 0{\cdot}734 - \log 0{\cdot}733 = \bar{1}{\cdot}8657 - \bar{1}{\cdot}8651 = 0{\cdot}0006.$$

$$0{\cdot}001 : 0{\cdot}0002 :: 0{\cdot}0006 : x$$

$$x=0{\cdot}0001.$$

$\therefore\ \log 0{\cdot}7332=\bar{1}{\cdot}8651+0{\cdot}0001=\bar{1}{\cdot}8652.$

(5) 求 $\log 456{\cdot}78.$

解.

$$\log 457-\log 456=2{\cdot}6599-2{\cdot}6590=0{\cdot}0009.$$

$$1:0.78::0{\cdot}0009:x$$

$$x=0{\cdot}0007.$$

$\therefore\ \log 456{\cdot}78=2{\cdot}6590+0{\cdot}0007=2{\cdot}6597.$

[第二] 知對數求相當之眞數法。

例.

(1) $\log a=0{\cdot}4579$ 求 a (即 $\log^{-1}0{\cdot}4579$)

解.

以 0·4579 爲對數之眞數。其數字之排列。撿表知爲 287 此數據指標知爲整數一位之數。

$$\therefore\ a=2{\cdot}87.$$

(2) $\log a=\bar{1}{\cdot}3766$ 求 a.

以 $\bar{1}{\cdot}3766$ 爲對數之數。其數字之排列撿表得 238 此數據指標知爲小數點以下至有意數字間無0之小數。

$$\therefore\ a=0{\cdot}238.$$

(3) $\log a=2{\cdot}7516$ 求 a.

解.

$$\log 565-\log 564=2{\cdot}7520-2{\cdot}7513=0{\cdot}0007.$$

$$\log a-\log 564=2{\cdot}7516-2{\cdot}7513=0{\cdot}0003.$$

$$0{\cdot}0007 : 0{\cdot}0003 :: 1 : x$$

$$x=0{\cdot}4$$

$$\therefore\quad a=564+0.4=564{\cdot}4$$

(4) $\log a=\bar{3}{\cdot}8314$ 求 a.

解.

$$\log 0{\cdot}000679-\log 0{\cdot}00678=\bar{3}{\cdot}8319-\bar{3}{\cdot}8312=0{\cdot}0007.$$

$$\log a-\log 0{\cdot}00678=\bar{3}{\cdot}8314-\bar{3}{\cdot}8312=0{\cdot}0002$$

$$0{\cdot}0007 : 0{\cdot}0002 :: 0{\cdot}00001 : x$$

$$x=0{\cdot}000003.$$

$$\therefore\quad a=0{\cdot}00678+0{\cdot}000003=0{\cdot}006783.$$

〔注意一.〕求表中所未載諸數之對數法。及求與對數相當之數法。須依次之定理。

數之小變化。與其相當對數之變化。殆成比例。

但此定理之由來及限界。本書不具論。

〔注意二.〕 用比例部分 (P. P.) 可省比例之運算。(如上諸例)

39. 三角函數之對數表.

三角函數之對數表者。載由 0° 至 90° 諸角之三角函數之對數或加 10 於是者也。(謂之表對數以 L 爲其記號)

〔注意.〕 表對數唯便於排字

本書卷尾之表。列舉由 0° 至 90° 間每 $10'$ 諸角之三角函數之對數。其用法如次

〔第一〕 求角之三角函數之對數法.

例.

(1) 求 $\log\sin 23^\circ\,34'\cdot 6$

解.

$$\log\sin 23^\circ 40' - \log\sin 23^\circ 30' = \bar{1}\cdot 6036 - \bar{1}\cdot 6007 = 0.0029.$$

$$10 : 4\cdot 6 :: 0\cdot 0029 : x$$

$$x = 0\cdot 0013.$$

$$\therefore\ \log\sin 23^\circ\,34'\cdot 6 = \bar{1}\cdot 6007 + 0\cdot 0013 = \bar{1}\cdot 6020.$$

(2) 求 $\log\tan 72^\circ 53'\cdot 3$

解.

$$\log\tan 73^\circ - \log\tan 72^\circ 50' = 0{\cdot}5147 - 0{\cdot}5102 = 0{\cdot}0045$$

$$10 : 3{\cdot}3 :: 0{\cdot}0045 : x$$

$$x = 0{\cdot}0015.$$

$$\therefore\quad \log\tan 72^\circ 53'{\cdot}3 = 0{\cdot}5102 + 0{\cdot}0015 = 0{\cdot}5117.$$

(3) 求 $\log\cos 35^\circ 42'{\cdot}7$.

解.

$$\log\cos 35^\circ 40' - \log\cos 35^\circ 50' = \bar{1}{\cdot}9098 - \bar{1}{\cdot}9089 = 0{\cdot}0009.$$

$$10 : 2{\cdot}7 :: 0{\cdot}0009 : x$$

$$x = 0{\cdot}0002.$$

$$\therefore\quad \log\cos 35^\circ 42'{\cdot}7 = \bar{1}{\cdot}9098 - 0{\cdot}0002 = \bar{1}{\cdot}9096.$$

(4) 求 $\log\cot 64^\circ 18'{\cdot}6$.

解.

$$\log\cot 64^\circ 10' - \log\cot 64^\circ 20' = \bar{1}{\cdot}6850 - \bar{1}{\cdot}6817 = 0{\cdot}0033.$$

$$10 : 8{\cdot}6 :: 0{\cdot}0033 : x$$

$$x = 0{\cdot}0028$$

$$\therefore\quad \log\cot 64^\circ 18'{\cdot}6 = \bar{1}{\cdot}6850 - 0{\cdot}0028 = \bar{1}{\cdot}6822.$$

(5) 求 $\log\sec 21^\circ 37'{\cdot}4$.

解.

$$\log\cos 21^\circ 37'\cdot4=\bar{1}\cdot9683.$$

$\therefore\ \log\sec 21^\circ 37'\cdot4=0\cdot0317.$

(6) 求 $\log\operatorname{cosec}16^\circ 42'\cdot3.$

解.

$$\log\sin 16^\circ 42'\cdot3=\bar{1}\cdot4586.$$

$\therefore\ \log\operatorname{cosec}16^\circ 42'\cdot3=0.5414.$

〔第二〕 知三角函數之對數。求相當之角法。

例.

1. $\log\sin A=\bar{1}\cdot3035$ 求 A.

解.

$$\log\sin 11^\circ 40'-\log\sin 11^\circ 30'=\bar{1}\cdot3058-\bar{1}\cdot2997=0\cdot0061.$$

$$\log\sin A\quad-\log\sin 11^\circ 30'=\bar{1}\cdot3035-\bar{1}\cdot2997=0\cdot0038.$$

$$0\cdot0061 : 0\cdot0038 :: 10 : x$$

$$x=6\cdot2.$$

$$A=11^\circ 30'+6'\cdot2=11^\circ 36'\cdot2.$$

2 $\log\tan A=0\cdot4782$ 求 A.

解.

$$\log\tan 71°40' - \log\tan 71°30' = 0{\cdot}4797 - 0{\cdot}4755 = 0{\cdot}0042.$$

$$\log\tan A - \log\tan 71°30' = 0{\cdot}4782 - 0{\cdot}4755 = 0{\cdot}0027.$$

$$0{\cdot}0042 : 0{\cdot}0027 :: 10 : x$$

$$x = 6{\cdot}4.$$

$$\therefore\quad A = 71°30' + 6'{\cdot}4 = 71°36'{\cdot}4.$$

3. $\log\cos A = \bar{1}{\cdot}9349$ 求 A

解.

$$\log\cos 30°30' - \log\cos 30°40' = \bar{1}.9353 - \bar{1}.9346 = 0{\cdot}0007.$$

$$\log\cos 30°30' - \log\cos A = \bar{1}{\cdot}9353 - \bar{1}{\cdot}9349 = 0{\cdot}0004.$$

$$0{\cdot}0007 : 0{\cdot}0004 :: 10 : x$$

$$x = 5{\cdot}7.$$

$$\therefore\quad A = 30°30' + 5'.7 = 30°35'.7.$$

4. $\log\cot A = \bar{1}{\cdot}8253$ 求 x.

解.

$$\log\cot 56°10' - \log\cot 56°20' = \bar{1}{\cdot}8263 - \bar{1}{\cdot}8235 = 0{\cdot}0028.$$

$$\log\cot 56°10' - \log\cot A \qquad = \bar{1}{\cdot}8263 - \bar{1}{\cdot}8253 = 0{\cdot}0010.$$

$$0{\cdot}0028 : 0{\cdot}0010 :: 10 : x$$

$$x = 3{\cdot}6.$$

$\therefore\quad A=56°10'+3'{\cdot}6=56°13'{\cdot}6.$

5. $\log\sec A=0{\cdot}0560$ 求 A.

解.

$$\log\cos A=\bar{1}{\cdot}9434.$$

$$\therefore\quad A=28°37'{\cdot}1$$

6. $\log\operatorname{cosec} A=0{\cdot}2668$ 求 A.

解.

$$\log\sin A=\bar{1}{\cdot}7332.$$

$$A=32°45'{\cdot}$$

〔注意一.〕 求表中所未載諸銳角之三角函數之對數「及知三角函數之對數」求其角須依次之定理.

不近於 0° 或 90° 諸角之小變化與其三角函數之相當對數之變化。殆成比例。

此定理之由來及限界。本書不具論。

〔注意二.〕 用比例部分表。可省略比例之運算.

40. 諸計算中對數之應用.

例.

(1) 計算 $x=2{\cdot}532\times345{\cdot}7.$

解.

$$\begin{array}{r}\log 2{\cdot}582 = 0{\cdot}4119\\ \log 345{\cdot}7 = 2{\cdot}5387\\ \hline \log x = 2{\cdot}9506\\ x = 892{\cdot}4.\end{array}$$

(2) 計算 $x = \dfrac{0{\cdot}07438}{129{\cdot}5}$

解.

$$\begin{array}{r}\log 0{\cdot}07438 = \bar{2}{\cdot}8715\\ -\log 129{\cdot}5 = \bar{3}{\cdot}8877\\ \hline \log x = \bar{4}{\cdot}7592\\ x = 0{\cdot}0005744.\end{array}$$

(3) 計算 $x = (3{\cdot}072)^3$

解.

$$\begin{array}{r}\log 3{\cdot}072 = 0{\cdot}4874\\ 3\\ \hline \log x = 1{\cdot}4622\\ x = 28{\cdot}99.\end{array}$$

(4) 計算 $x = \sqrt[4]{0{\cdot}007654}$

解.

$$\begin{array}{r}\log 0{\cdot}007654 = \bar{3}{\cdot}8839\ (4\\ \log x = \bar{1}{\cdot}4710\end{array}$$

$$x=0{\cdot}2958.$$

(5) 解 $(1{\cdot}2)^x=1{\cdot}1$

解.

$$x\log 1{\cdot}2=\log 1{\cdot}1$$

$$x=\frac{\log 1.1}{\log 1.2}=\frac{0{\cdot}0414}{0{\cdot}0792}$$

$$\begin{aligned} \log 0{\cdot}0414&=\bar{2}{\cdot}6170 \\ -\log 0{\cdot}0792&=1{\cdot}1013 \\ \hline \log x&=\bar{1}{\cdot}7183 \end{aligned}$$

$$x=0{\cdot}5229.$$

注意. 如本題者謂之指數方程式.

設題十六.

(1) 解 $\left(\frac{203}{200}\right)^{2x}=2$ 答. 23·16.

(2) 解 $8^{5-3x}=12^{4-2x}$ 答. $x=0{\cdot}3607.$

(3) 解 $\begin{cases} 2^x \times 5^y=1 \\ 5^{x+} \times 2=2 \end{cases}$ 答. $\begin{cases} x=-0{\cdot}699. \\ y=\quad 0{\cdot}301. \end{cases}$

(4) 計算 $\frac{(2{\cdot}013)^2\times(0{\cdot}0593)^{\frac{3}{2}}}{(0\ 9123)^4}$ 答. 0·08447.

(5) 計算$\dfrac{(34\cdot73)^{\frac{4}{5}}\times\sqrt[6]{2\cdot539}}{\sqrt[4]{4\cdot397}\times(3\cdot456)^3}$　　答. 0·3338.

第七章。

任意三角形.

41。三角形之性質.

〔第一〕角之關係.

$A+B+C=180°$ 因而 $A+B=180°-C$, $\frac{A+B}{2}=90°-\frac{C}{2}$,

故有次之關係.

$$\left.\begin{aligned}\sin(A+B)&=\sin C\\ \cos(A+B)&=-\cos C\\ \tan(A+B)&=-\tan C\end{aligned}\right\}\qquad\left.\begin{aligned}\sin\frac{A+B}{2}&=\cos\frac{C}{2}\\ \cos\frac{A+B}{2}&=\sin\frac{C}{2}\\ \tan\frac{A+B}{2}&=\cot\frac{C}{2}\end{aligned}\right\}$$

設題十七.

A, B, C 爲一個三角形上之角.證次之諸式。

(1) (i) $\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$.

(ii) $\sin A+\sin B-\sin C=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$.

(2) (i) $\cos A+\cos B+\cos C=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+1.$

(ii) $\cos A+\cos B-\cos C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}-1.$

(3) (i) $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=-2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+1.$

(ii) $\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}=2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}+2$

(4) (i) $\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}+\cos\frac{C}{2}$

$$=4\cos\left(45^\circ-\frac{A}{4}\right)\cos\left(45^\circ-\frac{B}{4}\right)\cos\left(45^\circ-\frac{C}{4}\right).$$

(ii) $\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}-\cos\frac{C}{2}$

$$=4\sin\left(45^\circ-\frac{A}{4}\right)\sin\left(45^\circ-\frac{B}{4}\right)\cos\left(45^\circ-\frac{C}{4}\right).$$

(5) (i) $\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}$

$$=4\sin\left(45^\circ-\frac{A}{4}\right)\sin\left(45^\circ-\frac{B}{4}\right)\sin\left(45^\circ-\frac{C}{4}\right)+1.$$

(ii) $\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}-\sin\frac{C}{2}$

$$=4\cos\left(45^\circ-\frac{A}{4}\right)\cos\left(45^\circ-\frac{B}{4}\right)\sin\left(45^\circ-\frac{C}{4}\right)-2.$$

(6) (i) $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C.$

(ii) $\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=-4\cos A\cos B\cos C-1.$

(7) (i) $\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C=2\cos A\cos B\cos C+2.$

(ii) $\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C=-2\cos A\cos B\cos C+1.$

(8) (i) $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C.$

(ii) $\cot B\cot C+\cot C\cot A+\cot A\cot B=1.$

(9) $\cot A+\cot B+\cot C=\cot A\cot B\cot C+\operatorname{cosce}A\operatorname{cosec}B$
$\operatorname{cosec}C.$

(10) (i) $\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}=1.$

(ii) $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\cot\frac{A}{2}\cot\frac{B}{2}\cot\frac{C}{2}.$

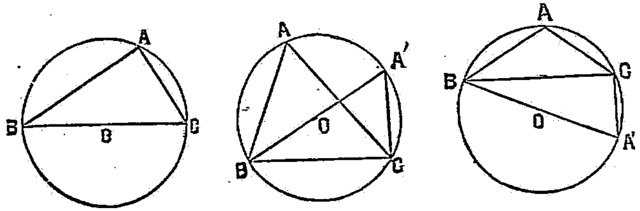
(11) (i) $\sin 3A+\sin 3B+\sin 3C=-4\cos\frac{3A}{2}\cos\frac{3B}{2}\cos\frac{3C}{2}.$

(ii) $\cos 3A+\cos 3B+\cos 3C=-4\sin\frac{3A}{3}\sin\frac{3B}{2}\sin\frac{3C}{2}$
$+1.$

(12) $\cot\frac{A}{2}$, $\cot\frac{B}{2}$, $\cot\frac{C}{2}$ 成等差級數.求證 $\cot\frac{A}{2}\cot\frac{C}{2}$
$=3.$

第二. 外接圓之直徑及正弦比例之式.

設 $A\hat{B}C$ 上 A, B, C 角之對邊為 a, b, c, 外接圓之中心為 O, 直徑為 K.



(i) $A=90°$ 則 $\sin A=1,\ a=K$

$$\therefore\quad \sin A=\frac{a}{K}$$

$$\therefore\quad K=\frac{a}{\sin A}.$$

(ii) $A\neq 90°$ 則延長 BO 與圓周相交於 A′ 點連此於 C。則 $B\hat{C}A'=90°$ 而 A, A′ 相等或互為補角.故

$$\sin A=\sin A'=\frac{CB}{A'B}=\frac{a}{K}$$

$$\therefore\quad K=\frac{a}{\sin A}.$$

故不拘 A 之如何 $K=\dfrac{a}{\sin A}.$

同樣 $K=\dfrac{b}{\sin B},\ K=\dfrac{c}{\sin C}.$

$$\therefore\quad \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}(=K)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(36)$$

是謂正弦比例式

〔第三.〕 兩角之半差及半和之三角函數之關係.

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=K$$

$$\therefore\quad a=K\sin A,\ b=K\sin B,\ c=K\sin C.$$

故有次之關係.

(i) $$\frac{a-b}{a+b}=\frac{K\sin A-K\sin B}{K\sin A+K\sin B}=\frac{\sin A-\sin B}{\sin A+\sin B}.$$

$$=\frac{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}=\frac{\tan\frac{A-B}{2}}{\tan\frac{A+B}{2}}=\frac{\tan\frac{A-B}{2}}{\cot\frac{C}{2}}$$

$$\therefore\quad \tan\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(37)$$

(ii) $$\frac{a+b}{b}=\frac{K\sin A+K\sin B}{K\sin C}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin C}$$

$$=\frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}.$$

(iii) $$\frac{a-b}{c}=\frac{K\sin A-K\sin B}{K\sin C}=\frac{\sin A-\sin B}{\sin C}$$

$$=\frac{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}}.$$

$$\therefore\ c=\frac{(a+b)\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}}=\frac{(a-b)\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{A-B}{2}}\cdots\cdots\cdots\cdots(38)$$

〔第四.〕 以邊顯一角之餘弦及正弦之式.

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{K^2\sin^2B+K^2\sin^2C-K^2\sin^2A}{2K\sin B.\ K\sin C}$$

$$=\frac{\sin^2B+\sin^2C-\sin^2A}{2\sin B\sin C}$$

$$=\frac{\sin^2(C+A)+\sin(C+A)\sin(C-A)}{2\sin(C+A)\sin C}$$

$$=\frac{\sin(C+A)+\sin(C-A)}{2\sin C}$$

$$=\frac{2\sin C\cos A}{2\sin C}=\cos A.$$

$$\therefore \quad \left.\begin{aligned} \cos A &= \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\ \text{同樣} \quad \cos B &= \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} \\ \cos C &= \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (39)$$

此公式又可書爲次之形.

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= b^2+c^2-2bc\cos A \\ b^2 &= c^2+a^2-2ca\cos B \\ c^2 &= a^2+b^2-2ab\cos C \end{aligned}\right\}$$

此關係亦可依三角形邊上諸正方形之幾何學定理作之

次

$$\sin A = \sqrt{(1-\cos^2 A)} = \sqrt{\{(1+\cos A)(1-\cos A)\}}$$

$$= \sqrt{\left\{\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\right\}}$$

$$= \sqrt{\left\{\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc} \cdot \frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}\right\}}$$

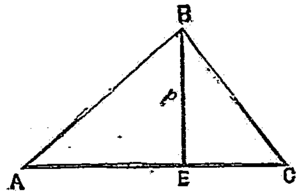
$$= \frac{1}{2bc}\sqrt{\{(b+c+a)(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c)\}}$$

令 $\frac{a+b+c}{2} = p$ 則

$b+c-a=2(p-a), c+a-b=2(p-b), a+b-c=2(p-c).$

$$\left.\begin{aligned}
\therefore\quad \sin A &= \frac{2}{bc}\sqrt{\{p(p-a)(p-b)(p-c)\}} \\
\text{同樣}\quad \sin B &= \frac{2}{ca}\sqrt{\{p(p-a)(p-b)(p-c)\}} \\
\sin C &= \frac{2}{ab}\sqrt{\{p(p-a)(p-b)(p-c)\}}.
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(40)$$

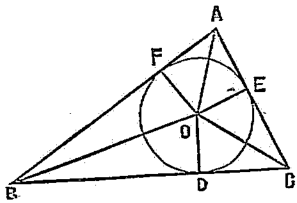
〔第五.〕 三角形面積之式.



於 $A\hat{B}C$, 由一角頂 B 作垂線 BE 于對邊 CA 其數值爲 p, 則 $p=c\sin A$ 故其積 S 之式如積

$$\left.\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}bp \\
&= \frac{1}{2}bc\sin A \\
&= \frac{1}{2}ca\sin B \\
&= \frac{1}{2}ab\sin C \\
&= \sqrt{\{p(p-a)(p-b)(p-c)\}}
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(41)$$

〔第六.〕 內接圓之半徑及半角之正切之式.



設 $\hat{ABC}$ 之面積爲 S, 內接圓之中心爲 O, 半徑爲 r, 與各邊之切點爲 D, E, F 則

$$S=O\hat{B}C+O\hat{C}A+O\hat{A}B=\frac{1}{2}ar+\frac{1}{2}br+\frac{1}{2}cr$$

$$=\frac{a+b+c}{2}\times r=pr$$

$$\therefore\quad r=\frac{S}{p}=\sqrt{\left\{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}\right\}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(42)$$

次　$\tan FAO=\dfrac{FO}{AF}$, 而 $FO=r$, $AF=p-a$

$$\left.\begin{aligned}\therefore\ \tan\frac{A}{2}&=\frac{r}{p-a}=\frac{1}{p-a}\sqrt{\left\{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}\right\}}\\ \text{同樣}\ \tan\frac{B}{2}&=\frac{r}{p-b}=\frac{1}{p-b}\sqrt{\left\{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}\right\}}\\ \tan\frac{C}{2}&=\frac{r}{p-c}=\frac{1}{p-c}\sqrt{\left\{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}\right\}}\end{aligned}\right\}\cdots(43)$$

〔注意〕 此式可以 cosA 之值代入 $\tan^2\dfrac{A}{2}=\dfrac{1-\cos A}{1+\cos A}$ 求得

〔系〕 設在 $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, 內之傍接圓之半徑爲 r', r'', r''' 則.

$$r'=\frac{S}{p-a},\quad r''=\frac{S}{p-b},\quad r'''=\frac{S}{p-c}.$$

設題十八.

A, B, C 爲三角形之角, a, b, c 爲其對邊,證次之諸式

(1) $\begin{cases} a=b\cos C+c\cos B \\ b=c\cos A+a\cos C \\ c=a\cos B+b\cos A \end{cases}$

(2) (i) $\begin{cases} \sin\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{bc}} \\ \sin\dfrac{B}{2}=\sqrt{\dfrac{(p-c)(p-a)}{ca}} \\ \sin\dfrac{C}{2}=\sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)}{ba}} \end{cases}$ (ii) $\begin{cases} \cos\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{p(p-a)}{bc}} \\ \cos\dfrac{B}{2}=\sqrt{\dfrac{p(p-b)}{ca}} \\ \cos\dfrac{C}{2}=\sqrt{\dfrac{p(p-c)}{ab}} \end{cases}$

(3) (i) $b\sin B-c\sin C=a\sin(B-C)$.

(ii) $b\cos B+c\cos C=a\cos(B-C)$.

(4) (i) $a\cos\dfrac{B-C}{2}=(b+c)\sin\dfrac{A}{2}$.

(ii) $a\sin\dfrac{B-C}{2}=(b+c)\cos\dfrac{A}{2}$.

(5) $a\cos A+b\cos B+c\cos C=2a\sin B\sin C$.

(6) $c(a\cos B-b\cos A)=a^2-b^2$.

(7) $\dfrac{\cos A}{a}+\dfrac{\cos B}{b}+\dfrac{\cos C}{c}=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$.

(8) $(b^2-c^2)\cot A+(c^2-a^2)\cot B+(a^2-b^2)\cot C=0$.

(9) (i) $\cot A+\cot B=\dfrac{c}{b\sin A}$.

(ii) $\cot A-\cot B=-\dfrac{a^2-b^2}{ab\sin C}$.

(10) (i) $S=\dfrac{a^2\sin B\sin C}{2\sin(B+C)}$

(ii) $S=\dfrac{a^2-b^2}{2}\cdot\dfrac{\sin A\sin B}{\sin(A-B)}$.

(iii) $S=\dfrac{abc}{p}\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$.

(11) 對於 a, b, c 之垂線為 p_1, p_2, p_3 則

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_3}=\frac{p}{S}.$$

(12) (i) $\dfrac{1}{r'}+\dfrac{1}{r''}+\dfrac{1}{r'''}=\dfrac{1}{r}$.

(ii) $r'+r''+r'''-r=2S$

(13) (i) $1-\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}=\dfrac{2c}{a+b+c}$.

(ii) $(b+c)^2\sin^2\dfrac{A}{2}+(b-c)^2\cos^2\dfrac{A}{2}=a^2$

(14) $C=2B$ 證 $c^2-b^2=ab$.

(15) A, B, C 爲等差級數則

$$2\cos\frac{A-C}{2}=\frac{a+c}{\sqrt{a^2-ac+c^2}}.$$

(16) 對於 a 邊之中線之長爲 $\frac{1}{2}\sqrt{(b^2+c^2+2bc\cos A)}$

(17) 於 A, 其內角及外角之二等分線之長爲

$$\frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c} \text{ 及 } \frac{2bc\sin\frac{A}{2}}{b\sim c}$$

(18) 四邊形之對角線爲 m, n, 而 θ 爲其夾角則其面積 S 等於 $\frac{1}{2}mn\sin\theta$.

(19) 設內接圓之四邊形之各邊爲 a, b, c, d 又 $a+b+c+d=2p$ 則面積 S 等於

$$\sqrt{\{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)\}}$$

若此四邊形又外接于他圓則 S 等於$\sqrt{abcd}$

(20) n 邊之正多角形之一邊爲a, 外接圓之半徑爲 R, 內接圓之半徑爲 r 則其面積 S 之式如次

(i) $\frac{1}{4}na^2\cot\frac{180°}{n}$, (ii) $\frac{1}{2}nR^2\sin\frac{360°}{n}$, (iii) $nr^2\tan\frac{180°}{n}$

42. 三角形之解法

一般三角形之解法有例四種

〔第一〕 知一邊及二角(如 a, B, C)

則由 $A=180^\circ-(B+C)$ 求 A.

又由$\left.\begin{cases} b=\dfrac{a\sin B}{\sin A} \\ c=\dfrac{a\sin C}{\sin A} \end{cases}\right\}$求 b, c.

〔第二〕 知二邊及其夾角。(如 b, c, A)則

由$\dfrac{B+C}{2}=90^\circ-\dfrac{A}{2}$求$\dfrac{B+C}{2}$,

由 $\tan\dfrac{B-C}{2}=\dfrac{b-c}{b+c}\cot\dfrac{A}{2}$ 求 $\dfrac{B-C}{2}$

由 $B=\dfrac{B+C}{2}+\dfrac{B-C}{2}$, $C=\dfrac{B+C}{2}-\dfrac{B-C}{2}$ 求 B, C

由 $a=\dfrac{(b+c)\sin\dfrac{A}{2}}{\cos\dfrac{B-C}{2}}$ 或 $\dfrac{(b-c)\cos\dfrac{A}{2}}{\sin\dfrac{B-C}{2}}$. 求 a

〔注意〕 求B, C後, 由正弦比例式求a亦可

〔第三〕 知二邊及對其一邊之角(如 a, b, A)則

由 $\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}$ 求 B,

由 $C=180^\circ-(A+B)$ 求 C,

由 $c=\dfrac{b\sin C}{\sin B}$ 求 c

然由正弦之值定 B 有下例

(i) $\sin B>1$ 卽 $\log\sin B>0$ 則不能解

(ii) $\sin B=1$ 卽 $\log\sin B=0$ 則 $B=90^\circ$ 故祇有一個解法(見14款第一).

(iii) $\sin B<1$ 卽 $\log\sin B<0$ 而 $a\nless b$ 則 $A\nless B$, 故 $B<90^\circ$ 從而有一種解法。

(iv) $\sin B<1$ 卽 $\log\sin B<0$ 而 $a<b$ 則 $A<B$, 故 B 爲銳角或鈍角故 B 有互爲補角之二值從而有二種解法。是謂有兩意之例

〔第四〕知三邊 a, b, c 則

$$\text{由}\begin{cases}\tan\dfrac{A}{2}=\dfrac{1}{p-a}\sqrt{\left\{\dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}\right\}},\\[2ex] \tan\dfrac{B}{2}=\dfrac{1}{p-b}\sqrt{\left\{\dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}\right\}}\end{cases}$$

求 A, B 由 $C=180^\circ-(A+B)$ 求 C

計算例題.

(1) 於 $\hat{ABC}$, $A=50°58'\cdot7$, $B=32°50'\cdot8$, $c=169\cdot4$ 求 $a, b.$

算 式.

$$\begin{cases} A=180°-(B+C) \\ b=\dfrac{a\sin B}{\sin A} \\ c=\dfrac{a\sin C}{\sin A} \end{cases}$$

運 算.

$$A=50°58'\cdot7$$
$$\underline{B=32°50'\cdot8}$$
$$A+B=83°49'\cdot5$$
$$\underline{180°=179°60'}$$
$$C=96°10'\cdot5$$

$$\log c=2\cdot2289 \qquad \log c=2\cdot2289$$
$$\log\sin A=\bar{1}.8904 \qquad \log\sin B=\bar{1}\cdot7344$$
$$\underline{-\log\sin C=0\cdot0025} \qquad \underline{-\log\sin C=0\cdot0025}$$
$$\log a=2\cdot1218 \qquad \log b=1\cdot9658$$
$$a=132\cdot4. \qquad b=92\cdot43.$$

(2) 於 $\hat{ABC}$, $b=4\cdot567$, $c=3\cdot456$, $A=56°7'\cdot8$ 求 B, C, a

算　式.

$$\left\{\begin{aligned} &\tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}.\\ &a=\frac{(b-c)\cos\frac{A}{2}}{\sin\frac{B-C}{2}}.\\ &B=\frac{B+C}{2}+\frac{B-C}{2},\ C=\frac{B+C}{2}-\frac{B-C}{2}.\end{aligned}\right.$$

$$\begin{array}{rl} b=&4\cdot567\\ c=&3\cdot456\\ \hline b-c=&1\cdot111\\ b+c=&8\cdot023\\ \log(b-c)=&0\cdot0457\\ \log\cot\frac{A}{2}=&0\cdot2731\\ -\log(b+c)=&\bar{1}\cdot0956\\ \hline \log\tan\frac{B-C}{2}=&\bar{1}\cdot4144\\ \frac{B-C}{2}=&14^\circ33'\cdot3\\ \frac{B+C}{2}=&61^\circ56'\cdot1\\ \hline B=&76^\circ29'\cdot4. \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} A=&56^\circ7'8\\ \frac{A}{2}=&28^\circ3'\cdot6\\ 90^\circ=&89^\circ60'\\ \hline \frac{B+C}{2}=&61^\circ56'\cdot1\\ \log(b-c)=&0\cdot0457\\ \log\cos\frac{A}{2}=&\bar{1}\cdot9457\\ -\log\sin\frac{B-C}{2}=&0\cdot5998\\ \hline \log a=&0\cdot5912\\ a=&3\cdot901 \end{array}$$

$C=47°22'\cdot8.$

(3) 於 $\hat{ABC}$, $a=182\cdot5$, $b=236\cdot8$, $A=32°29'\cdot6$ 求 B, C, c.

算 式.

$$\begin{cases} \sin B=\dfrac{b\sin A}{a} \\ C=180°-(A+B) \\ c=\dfrac{b\sin C}{\sin B} \end{cases}$$

運 算.

$$\begin{array}{rl} \log b= & 2\cdot3743 \\ \log\sin A= & \bar{1}\cdot7301 \\ -\log a= & \bar{3}\cdot7397 \\ \hline \log\sin B= & \bar{1}\cdot8441 \end{array}$$

$\log\sin B<0,\quad a<b$

故爲有兩意之例.

$$\begin{array}{rcr} B=44°17'\cdot7 & 或 & 135°42'\cdot3 \\ A=32°29'\cdot6 & & 32°29'\cdot6 \\ \hline A+B=76°47'\cdot3 & 或 & 168°11'\cdot9 \\ 180°=179°60' & & 179°60' \\ \hline C=103°12'\cdot7 & 或 & 11°48'\cdot1 \\ \log\sin C=\bar{1}\cdot9883 & 或 & \bar{1}\cdot3107 \\ \log b=2\cdot3743 & & 2\cdot3743 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} -\log\sin B = 0{\cdot}1559 & & 0{\cdot}1559 \\ \hline \log c = 2{\cdot}5185 & \text{或} & \bar{1}{\cdot}8409 \\ c = 330 & \text{或} & 69{\cdot}33. \end{array}$$

(4) 於 $\overset{\triangle}{ABC}$, $a=273{\cdot}9$, $b=198{\cdot}6$, $c=236{\cdot}8$ 求 A, B, C.

算　式.

$$\begin{cases} \tan\dfrac{A}{2}=\dfrac{1}{p-a}\sqrt{\left\{\dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}\right\}} \\ \tan\dfrac{B}{2}=\dfrac{1}{p-b}\sqrt{\left\{\dfrac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}\right\}} \\ C=180^\circ-(A+B) \end{cases}$$

運　算.

$$\begin{array}{rr} a=273{\cdot}9 & -\log p=\bar{3}{\cdot}4502 \\ b=198{\cdot}6 & \log(p-a)=1{\cdot}9074 \\ c=236{\cdot}8 & \log(p-b)=2{\cdot}1934 \\ \hline 2p=709{\cdot}3 & \log(p-c)=2{\cdot}0715 \\ \cline{2-2} p=354{\cdot}7 & \log r^2=3{\cdot}6225 \\ p-a=80{\cdot}8 & r=1{\cdot}8113 \\ p-b=156{\cdot}1 & \log\tan\dfrac{A}{2}=\bar{1}{\cdot}9039 \\ p-c=117{\cdot}9 & \dfrac{A}{2}=38^\circ42'{\cdot}69 \\ & A=77^\circ25'{\cdot}4. \end{array}$$

$$\log\tan\frac{B}{2}=\bar{1}\cdot6179$$

$$\frac{B}{2}=22°31'\cdot94$$

$$B=45°3'\cdot9.$$

$$A+B=122°29'\cdot3$$

$$\frac{180°=179°60'}{C=57°30'\cdot7.}$$

設題十九.

(1) $A=78°23'\cdot2$, $B=52°16'\cdot3$, $a=796\cdot3$ 求 b, c.

答. 643, $616\cdot9$.

(2) $b=295\cdot6$, $c=999\cdot2$, $A=108°29'\cdot6$ 求 C, a.

答. $57°7'\cdot4$, 1131.

(3) $a=23\cdot46$, $b=35\cdot79$, $A=28°35'\cdot4$ 求 C, c.

答. $\begin{cases}104°30'\cdot4,\\ 47\cdot43\end{cases}$ 或. $\begin{cases}18°18'\cdot8,\\ 12\cdot23\end{cases}$

(4) $a=375\cdot9$, $b=298\cdot7$, $c=400\cdot8$ 求 A, B.

答. $63°2'\cdot2$, $45°5'\cdot4$.

(5) 知 a, b, $A-B$ 問解 $\hat{ABC}$ 之方法.

(6) 知 $a+b$, A, B 問解 $\hat{ABC}$ 之方法.

(7) 知 a, $b+c$, A 問解 $\overset{\triangle}{ABC}$ 之方法.

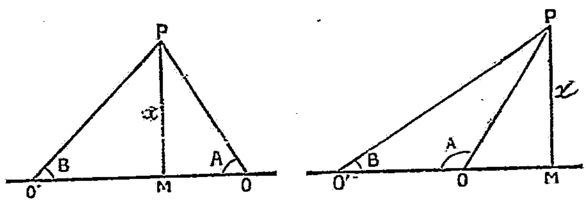
(8) 知 $a+b+c$, A, B 問解 $\overset{\triangle}{ABC}$ 之方法.

(9) 知四邊形之三邊及二對角線求其餘之一邊之方法若何

43. 距離及高之測法。

用直角三角形之算法以測距離及高。既舉其數例矣。而用一般三角形之算法其所得之方法較前尤便.更舉其數例於次。

〔第一.〕有物在人所不能到之處。但能由遠處望之。欲求遠處一點與物之距離



於直線上。取 O, O′ 二點。測其距離, (設爲 p) 由不能到之點 P。作垂線 PM 於此線。設 PM 之數值爲 x, 又設 O′OP 角及 OO′P 角爲 A, B, 則.

於 $\overset{\triangle}{OO'P}$, $OP=\dfrac{OO'\sin OO'P}{\sin OPO'}=\dfrac{p\sin B}{\sin(A+B)}$.

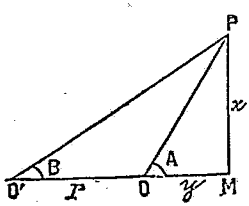
又於 $\overset{\triangle}{OMP}$, $MP=OP\sin MOP=OP\sin A$

$$\therefore\quad x=\frac{p\sin A\sin B}{\sin(A+B)}$$

〔第二〕 有一直立物體。人不能至其基礎下。惟能在地上之二點觀測之。求其高及距離。

如圖。MP 爲物體。O,O′ 爲觀測點。設 OO′, MP, OM 之數值爲 p, x, y, 從 O,O′ 與 MP 同在一平面上與否，而用次之方法。

(i) O,O′ 與 MP 同在一平面上。則測 MOP 角，及 MO′P 角。設之爲 A, B, 則



於 $\overset{\triangle}{OO'P}$, $OP=\dfrac{OO'\sin OO'P}{\sin OPO'}$

$=\dfrac{p\sin B}{\sin(A-B)}$ 次於 $\overset{\triangle}{OMP}$

$MP=OP\sin MOP$

$=OP\sin A$

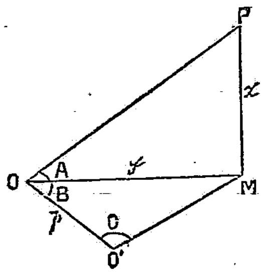
$OM=OP\cos MOP$

$$=OP\cos A$$

$$\therefore\quad x=\frac{p\sin A\sin B}{\sin(A-B)}$$

$$y=\frac{p\cos A\sin B}{\sin(A-B)}$$

次 O,O′ 與 MP 不同在一平面上。則測 MOP 角 MOO′ 角, OO′M 角, 設之爲 A, B, C, 則



於 $O\hat{M}O'$

$$OM=\frac{OO'\sin OO'M}{\sin OMO'}$$

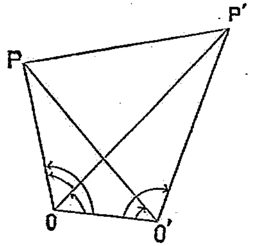
$$\therefore\quad y=\frac{p\sin C}{\sin(B+C)}.$$

次於 $O\hat{M}P$

$$MP=OM\tan MOP.$$

$$\therefore\quad x=\frac{p\tan A\sin C}{\sin(B+C)}.$$

〔第三〕有二物在遠處。皆爲人所不能到。欲求其距離。

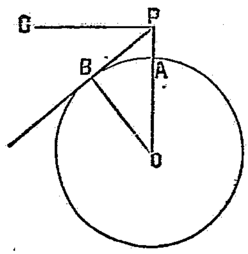


如圖。有人不能到之二點P,P′,惟能於相宜之二點O,O′望之。則測 $O'\hat{O}P'$, $O'\hat{O}P$, $P'\hat{O}P$, $O'\hat{O}P$。$O\hat{O'}P'$ 及 OO'

於 $O\hat{O'}P$ 求 OP, 於 $O\hat{O'}P$ 求 OP′, 於 $P\hat{O}P'$ 求 PP′,

〔注意〕 P, P′, O, O′, 同在一平面上。則可少測一O角。

〔第四.〕 視水平之距離及俯向。



於左圖。O爲地球之中心。P爲若干高之觀測點。PB爲切線。則B之軌跡圖周。謂之視水平。PB及 $B\hat{P}C$ (PC爲水平線)謂之距離及俯向。今設地球之半經爲 r。視測點之高爲 h。視水平之距離及俯向爲 l 及 δ, 則有次之關係

(i)　$\cos\delta=\cos BOP=\dfrac{OB}{OP}=\dfrac{r}{r+h}$.

(ii)　變上式之形則 $h\cos\delta=r(1-\cos\delta)$

$\therefore\ h=\dfrac{r(1-\cos\delta)}{\cos\delta}$.

(iii)　$r=\dfrac{h\cos\delta}{1-\cos\delta}$.

(iv)　$l=r\tan\delta=\dfrac{h\sin\delta}{1-\cos\delta}=h\cot\dfrac{\delta}{2}$.

設題二十.

(1) 於河之一岸。由相距 100 丈之二點 A, B。望對岸之一點 P。知 $P\hat{A}B=60^\circ$, $P\hat{B}A=45^\circ$ 問河寬幾何

答. 63·4 丈

(2) 有人望前面之塔項。測其仰角得 30°, 由是向塔再進 100 尺。測其項之仰角得 75°, 求塔高及至初觀測點之距離。　答. 68·3 尺, 1183 尺

(3) 有人望北及北 30° 西兩方向之二物體。A,B。由是向北西之方向進 10 里。則 A,B 之方向爲北東及東. 問 A,B 之距離幾何 .　答. 8·16 里

(4) 有立於 h 高石臺上之紀念碑. 於距石臺 a 之一地望之。紀念碑上端之仰角, 爲下端仰角之二倍。問臺上碑高幾何。　答. $\left(\dfrac{a^2+h^2}{a^2-h^2}\right)h$

(5) 設地球之半經爲 r。則於 h 高之一點。其視水平之距離等於 $\sqrt{2rh}$，試證之。

(6) 由高 h 尺之塔頂。於其一面。望與塔脚同在一水平面上之二物體。得俯角 $45°-A$，及 $45°+A$，問二物之距離幾何　　答．$2h\tan 2A$ 尺

(7) 於塔南之一地。測其頂之仰角得 $30°$，次由此地向西行 a 距離。再測塔頂之仰角。得 $18°$。求證塔高等於 $\dfrac{a}{\sqrt{(2+2\sqrt{5})}}$

(8) 由湖水面上高 h 尺之處。望停雲之一點。得仰角 α，同時望其在湖水中之影。得俯角 β，問雲之高幾何　　答．$\dfrac{h\sin(\beta+\alpha)}{\sin(\beta-\alpha)}$ 尺

(9) 有人望塔項，及立於塔上高 c 尺之旗竿之上端。得仰角 B 及 A。問塔高幾何

答．$\dfrac{C\cos A\sin B}{\sin(A-B)}$ 尺

(10) 在塔之基礎望樹頂。得仰角 α，次登塔 h 尺。再望其仰角。得仰角 β，問樹高幾何

答．$\dfrac{h\cos\beta\sin\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}$ 尺

(11) 有人測立於丘上之塔頂及塔根。得仰角 A 及 B，

次退後 l 距離。再測塔頂之仰角得 C, 問在丘上之塔高及丘高幾何。

答. $\dfrac{l\sin C\sin(A-B)}{\cos B\sin(A-C)}$, $\dfrac{l\cos A\tan B\sin C}{\sin(A-C)}$

(12) 在山麓。測在山頂之巖之上端。得仰角 47°, 由是向成 32° 傾斜角之直線坂路登 1000 尺。再測巖之仰角得 77°, 問巖較初之測點高幾何. 答. 1034 尺

(13) 由向北走之船。望見兩個燈臺。爲北東及北北東之方向。由是走 20 哩後。再望二燈臺, 俱在東方向。問二燈臺之距離幾何。 塔. 11.3 哩

(14) 距 ALB 塔 48 尺之地。有一高 14 尺之臺 C. 在此臺上望塔。知 $A\hat{C}L=L\hat{C}B$, 而 AL=30 尺。問塔高幾何。

(15) 由向西南走之二船。望碇泊之二船爲北北西及西北西。由是走 5 哩。再望二船。其方向爲北及北西。問二船之距離幾何。 答. 9.239 哩

(16) 有二點 P,Q, 於 P 南之一地 L 望之。知 $P\hat{L}Q=A$, 次由 L 向西走 a 距離。到 M。知 $P\hat{M}Q=A$, 更猶同方向進 b, 達 Q 之地 N, 證 P,Q 之距離爲

$$\sqrt{\{(a+b)^2+b^2\tan^2 A\}}$$

(17) 有立於 ED 塔上之旗竿 DC, 於與塔脚E同在一水平面上之一點 P。知 $E\hat{P}D=B$, $D\hat{P}C=A$, 次由 P 向 E 進 c 距離到 Q。再望之。知 $D\hat{Q}C=A$, 問塔高幾何。

答. $\dfrac{c\sin B\cos(A+B)}{\cos(A+2B)}$

(18) 有立於 BC 塔上之旗竿 CD, 於由 B 距 C 里之地。測得最大角爲 A, 則 $CD=2c\tan A$, $BC=c\tan\left(45°-\dfrac{A}{2}\right)$ 試證之。

第八章

逆三角函數 (或反函數)

44. 定義

正弦爲a之角。謂之a之逆正弦。以$\mathrm{Sin}^{-1}a$表之。(即 sin=a)

逆餘弦，逆正切，逆餘切，逆正割，逆餘割準此。

統此六種。稱爲逆三角函數。或謂之逆圓函數。

一數之逆三角函數。有無數之值。其中最小數值。謂之主值。(有正負相同之數值。則以正爲主) 以$\sin^{-1}a$等顯之。

〔注意一〕 或以$\sin^{-1}a$等顯逆三角函數之一切值。以$\mathrm{Sin}^{-1}a$顯其主值。然逆三角函數之性質。多關於主值。故用小 s 字顯之，較爲便利。本書用$\sin^{-1}a$等顯其主值。

〔注意二〕 逆三角函數之主值。雖不能由觀察求得。

然可由表求之。

45. $\mathrm{Sin}^{-1}a$ ノ值.

正弦相等之角。其迴線之位置。祇有兩種。因 $\sin(180^\circ-A)=\sin A$, $\sin(n\times360^\circ+A)=\sin A$

故 $n\times360^\circ+\sin^{-1}a$ 或 $n\times360^\circ+(180^\circ-\sin^{-1}a)$ 悉有 a 正弦。其他諸角不然

$$\therefore\quad \mathrm{Sin}^{-1}a=n\times360^\circ+\sin^{-1}a$$

$$\text{或}\quad n\times360^\circ+(180^\circ-\sin^{-1}a)$$

$$=2n\times180^\circ+\sin^{-1}a$$

$$\text{或}\quad (2n+1)180^\circ-\sin^{-1}a$$

$$=n\times180^\circ+(-1)^n\sin^{-1}a \quad\text{.....................}(44)$$

但 n 顯零或任意之整數(以下準此)

例.

1. $\mathrm{Sin}^{-1}0=n\times180^\circ+(-1)^n\sin^{-1}0=n\times180^\circ+0^\circ=n\times180^\circ$

2. $\mathrm{Sin}^{-1}1=n\times180^\circ+(-1)^n\sin^{-1}1=n\times180^\circ+(-1)^n90^\circ$.

而 $n\times180^\circ+(-1)^n90^\circ$ 其 n 爲任意之偶數($2m$)則爲 $2m\times180^\circ+90^\circ$ 卽 $(4m+1)90^\circ$ n 爲任意之奇數($2m+1$) 則亦爲 $(2m+1)180^\circ-90^\circ$ 卽 $(4m+1)90^\circ$ 故可記爲

$$\mathrm{Sin}^{-1}1=(4n+1)90^\circ$$

3. $\mathrm{Sin}^{-1}(-1)=n\times180^\circ+(-1)^n\sin^{-1}(-1)$

$$=n\times180^\circ+(-1)^n(-90^\circ).$$

而 $n\times180^\circ+(-1)^n(-90^\circ)$, 其 n 爲任意之偶數 $(2m)$ 則爲 $2m\times180^\circ-90^\circ$ 即 $(4m-1)90^\circ$, n 爲任意之奇數 $(2m-1)$ 則亦爲 $(2m-1)180^\circ+90^\circ$ 即 $(4m-1)90^\circ$.

故可記爲 $\mathrm{Sin}^{-1}(-1)=(4n-1)90^\circ$

系. $\mathrm{Cosec}^{-1}a=n\times180^\circ+(-1)^n\mathrm{cosec}^{-1}a.$

46. $\mathrm{Cos}^{-1}a$ 之值.

餘弦相等之角其迴線之位置祇有兩種.

而因 $\cos(-A)=\cos A$, $\cos(n\times360^\circ+A)=\cos A$

故 $n\times360^\circ+\cos^{-1}a$ 或 $n\times360^\circ+(-\cos^{-1}a)$ 悉有 a 餘弦其他之角不然

$$\therefore\ \mathrm{Cos}^{-1}a=n\times360^\circ+\cos^{-1}a$$

$$\text{或}\quad n\times360^\circ+(-\cos^{-1}a)$$

$$=2n\times180^\circ+\cos^{-1}a$$

$$\text{或}\quad 2n\times180^\circ-\cos^{-1}a$$

$$=2n\times180^\circ\pm\cos^{-1}a\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(45)$$

例.

1. $\mathrm{Cos}^{-1}0=2n\times180^\circ\pm\cos^{-1}0=2n\times180^\circ\pm90^\circ=(4n\pm1)90^\circ$

而以 $4n+1$ 及 $4n-1$ 所表之諸數俱為一切奇數

故可記為 $\mathrm{Cos}^{-1}0=(2n+1)90°$

2. $\mathrm{Cos}^{-1}1=2n\times180°\pm\cos^{-1}1=2n\times180°\pm0°=2n\times180°$.

3. $\mathrm{Cos}^{-1}(-1)=2n\times180°\pm\cos^{-1}(-1)=2n\times180°\pm180°$

$$=(2n\pm1)180°.$$

而 $2n+1, 2n-1$ 俱顯一切奇數

$\therefore$ 可記為 $\mathrm{Cos}^{-1}(-1)=(2n+1)180°$

系. $\mathrm{Sec}^{-1}a=2n\times180°\pm\sec^{-1}a$.

47. $\mathrm{Tan}^{-1}\mathrm{a}$ 之値

正切相等之角。其廻線之位置。祇有兩種。

而因 $\tan(180°+A)=\tan A$, $\tan(n\times360°+A)=\tan A$

故 $n\times360°+\tan^{-1}a$ 或 $n\times360°+(180°+\tan^{-1}a)$ 悉有 a 正切。其他之角不然

$$\therefore\ \mathrm{Tan}^{-1}\mathrm{a}=n\times360°+\tan^{-1}a$$

$$\text{或}\quad n\times360°+(180°+\tan^{-1}a)$$

$$=2n\times180°+\tan^{-1}a$$

$$\text{或}\quad (2n+1)180°+\tan^{-1}a$$

$$=n\times180°+\tan^{-1}a \qquad \text{.....................}(46)$$

例.

1. $\mathrm{Tan}^{-1}0=n\times180^\circ+\tan^{-1}0=n\times180^\circ+0^\circ=n\times180^\circ.$

2. $\mathrm{Tan}^{-1}1=n\times180^\circ+\tan^{-1}1=n\times180^\circ+45^\circ=(4n+1)45^\circ.$

3. $\mathrm{Tan}^{-1}(-1)=n\times180^\circ+\tan^{-1}(-1)=n\times180^\circ+(-45^\circ)$

$$=(4n-1)45^\circ.$$

4. $\mathrm{Tan}^{-1}\infty=n\times180^\circ+\tan^{-1}(\infty)=n\times180^\circ+90^\circ$

$$=(2n+1)90^\circ.$$

系. $\mathrm{Cot}^{-1}a=n\times180^\circ+\cot^{-1}a.$

設題二十一.

證次之諸式

1. (i) $\sin^{-1}a=\cos^{-1}\sqrt{1-a^2}=\tan^{-1}\dfrac{a}{\sqrt{1-a^2}}=\cot^{-1}\dfrac{\sqrt{1-a^2}}{a}$

$$=\sec^{-1}\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}=\operatorname{cosec}^{-1}\frac{1}{a}.$$

(ii) $\cos^{-1}a=\sin^{-1}\sqrt{1-a^2}=\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{1-a^2}}{a}=\cot^{-1}\dfrac{a}{\sqrt{1-a^2}}$

$$=\sec^{-1}\frac{1}{a}=\operatorname{cosec}^{-1}\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}$$

(iii) $\tan^{-1}a=\sin^{-1}\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}=\cos^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}=\cot^{-1}\dfrac{1}{a}$

$$=\sec^{-1}\sqrt{1+a^2}=\operatorname{cosec}^{-1}\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}.$$

(iv) $\cot^{-1}a=\sin^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}=\cos^{-1}\dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}=\tan^{-1}\dfrac{1}{a}$

$$=\sec^{-1}\frac{\sqrt{1+a^2}}{a}=\operatorname{cosec}^{-1}\sqrt{1+a^2}.$$

(v) $\sec^{-1}a=\sin^{-1}\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}=\cos^{-1}\frac{1}{a}=\tan^{-1}\sqrt{a^2-1}$

$$=\cot^{-1}\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}=\operatorname{cosec}^{-1}\frac{a}{\sqrt{a^2-1}}.$$

(vi) $\operatorname{cosec}^{-1}a=\sin^{-1}\frac{1}{a}=\cos^{-1}\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}=\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{a^2-1}}$

$$=\cot^{-1}\sqrt{a^2-1}=\sec^{-1}\frac{a}{\sqrt{a^2-1}}.$$

2. (i) $\sin^{-1}a\pm\sin^{-1}b=\sin^{-1}\{a\sqrt{1-b^2}\pm b\sqrt{1-a^2}\}$

(ii) $\cos^{-1}a\pm\cos^{-1}b=\cos^{-1}\{ab\mp\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}\}$

(iii) $\tan^{-1}a\pm\tan^{-1}b=\tan^{-1}\frac{a\pm b}{1\mp ab}.$

(iv) $\cot^{-1}a\pm\cot^{-1}b=\cot^{-1}\frac{ab\pm 1}{b\pm a}.$

3. (i) $2\sin^{-1}a=\sin^{-1}2a\sqrt{1-a^2}.$

(ii) $2\cos^{-1}a=\cos^{-1}(2a^2-1).$

(iii) $2\tan^{-1}a=\tan^{-1}\frac{2a}{1-a^2}.$

(iv) $2\cot^{-1}a=\cot^{-1}\frac{a^2-1}{2a}.$

上之諸式俱爲重要之式

4. $\sin^{-1}\frac{1}{2}+\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}=90°,$

5. $\cos^{-1}\dfrac{9}{\sqrt{82}}+\cos^{-1}\dfrac{5}{\sqrt{41}}=45°$.

6. $\tan^{-1}\dfrac{1}{2}+\tan^{-1}\dfrac{1}{3}$,　$2\tan^{-1}\dfrac{1}{3}+\tan^{-1}\dfrac{1}{7}$,

$4\tan^{-1}\dfrac{1}{5}-\tan^{-1}\dfrac{1}{239}$,　$\tan^{-1}\dfrac{1}{2}+\tan^{-1}\dfrac{1}{5}+\tan^{-1}\dfrac{1}{8}$,

$4\tan^{-1}\dfrac{1}{5}-\tan^{-1}\dfrac{1}{70}+\tan^{-1}\dfrac{1}{99}$ 俱爲 $45°$

7. $\cot^{-1}\dfrac{3}{4}+\cot^{-1}\dfrac{1}{7}=135°$.

8. $\sin^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{5}}+\cot^{-1}3=45°$.

9. 求適於次之方程式之 x 值

(i) $\sin^{-1}x+\tan^{-1}\dfrac{2x}{\sqrt{1-4x^2}}=60°$.　答. $\pm\dfrac{\sqrt{21}}{14}$.

(ii) $\tan^{-1}x+\dfrac{1}{2}\sec^{-1}5x=45°$.　答. $\pm\dfrac{1}{3}$.

(iii) $\cot^{-1}x+\cot^{-1}(n^2-x+1)=\cot^{-1}(n-1)$.

答. $n,\ n^2-n+1$.

第九章

三角方程式

48. 定義

顯未知角之三角函數與已知數之關係之方程式。謂之**三角方程式**。求其適於此式之角。謂之解.所得之角謂之**所求之解**。

49. 三角方程式之解法

三角方程式可依次之方法解之

〔第一〕 用普通方程式之解法。以求其未知角之三角函數之值。

〔第二〕 應所得之三角函數之值。求其逆三角函數之一切值。 此值即爲所求之解

例. I

(I.) 解 $\sin\theta=a$

解.

$$\theta=\mathrm{Sin}^{-1}a=n\times180^\circ+(-1)^n\sin^{-1}a.$$

或 依次法解之

$$\cos(\theta-90^\circ)=a$$

$$\theta-90^\circ=2n\times180^\circ\pm\cos^{-1}a$$

$$\theta=2n\times180^\circ+90^\circ\pm\cos^{-1}a$$

$$=(4n+1)90^\circ\pm\cos^{-1}a$$

(2.) 解 $\cos\theta=a$

解.

$$\theta=\cos^{-1}a=2n\times180^\circ\pm\cos^{-1}a$$

(3.) 解 $\tan\theta=a$

解.

$$\theta=\mathrm{Tan}^{-1}a=n\times180^\circ+\tan^{-1}a.$$

(4.) 解 $\sin^2\theta=a$

解.

$$\frac{1-\cos2\theta}{2}=a$$

$$\cos2\theta=1-2a$$

$$2\theta=2n\times180^\circ\pm\cos^{-1}(1-2a)$$

$$\therefore\quad\theta=n\times180^\circ\pm\frac{1}{2}\cos^{-1}(1-2a)$$

(5.) 解 $\cos^2\theta = a$

解.

$$\frac{1+\cos 2\theta}{2} = a$$

$$\cos 2\theta = 2a - 1$$

$$2\theta = 2n \times 180^\circ \pm \cos^{-1}(2a-1)$$

$$\theta = n \times 180^\circ \pm \frac{1}{2}\cos^{-1}(2a-1).$$

(6.) 解 $\cos\theta + \sin\theta = a$

解.

$$\sqrt{2}\cos(\theta - 45^\circ) = a$$

$$\cos(\theta - 45^\circ) = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$\theta - 45^\circ = 2n \times 180^\circ \pm \cos^{-1}\frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$\theta = 2n \times 180^\circ + 45^\circ \pm \cos^{-1}\frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$= (8n+1)45^\circ \pm \cos^{-1}\frac{a}{\sqrt{2}}.$$

同樣解 $\cos\theta - \sin\theta = a$

$$x = (8n-1)45^\circ \pm \cos^{-1}\frac{a}{\sqrt{2}}$$

(7.) 解 $a\cos\theta + b\sin\theta = c$

解.

$$\cos\theta+\frac{b}{a}\sin\theta=\frac{c}{a}.$$

今設 $\tan^{-1}\frac{b}{a}=\alpha$ 則 $\tan\alpha=\frac{b}{a}$, $\cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 而

$$\cos\theta+\tan\alpha\sin\theta=\frac{c}{a}$$

$$\frac{\cos(\theta-\alpha)}{\cos\alpha}=\frac{c}{a}.$$

$$\cos(\theta-\alpha)=\frac{c}{a}\cos\alpha=\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

$$\theta-\alpha=2n\times180^\circ\pm\cos^{-1}\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\theta=2n\times180^\circ+\alpha\pm\cos^{-1}\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$=2n\times180^\circ+\tan^{-1}\frac{b}{a}\pm\cos^{-1}\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

$$=2n\times180^\circ+\tan^{-1}\frac{b}{a}\pm\tan^{-1}\frac{\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{c}$$

$$=2n\times180^\circ+\tan^{-1}\frac{bc\pm a\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{ca\mp b\sqrt{a^2+b^2-c^2}}$$

同樣解 $a\cos\theta-b\sin\theta=c$ 則

$$\theta=2n\times180^\circ-\tan^{-1}\frac{bc\pm a\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{ca\mp b\sqrt{a^2+b^2-c^2}}$$

設題二十二.

解次之三角方程式

(1.) $\cot\theta-\tan\theta=\cot\alpha-\tan\alpha.$ 答. $n\times 90^\circ+\alpha.$

(2.) $\cos 2\theta-\cos 120^\circ=\cos\theta-\cos 60^\circ.$

答 $(2n+1)90^\circ$, $(6n\pm 1)60^\circ$.

(3.) $\sec^2\theta+3\operatorname{cosec}^2\theta=8.$ 答 $(2n+1)45^\circ$, $(3n\pm 1)60^\circ$.

(4.) $\tan\theta+\tan 3\theta=2\tan 2\theta.$ 答. $n\times 180^\circ$.

(5.) $2\cot 2\theta-\tan 2\theta=3\cot 3\theta.$ 答. $n\times 180^\circ$.

(6.) $\tan\theta+\tan(\theta-45^\circ)=2.$ 答. $(3n\pm 1)60^\circ$.

(7.) $6\cot^2\theta=1+4\cos^2\theta$ 答. $(3n\pm 1)60^\circ$.

(8.) $3(\sin^4\theta-\cos^4\theta)+4\cos^6\theta=\cos^3 2\theta$ 答. $n\times 180^\circ$.

(9.) $\operatorname{cosec} 3\theta+\operatorname{cosec} 2\theta=\sin 2\theta\operatorname{cosec}\theta\operatorname{cosec} 3\theta.$

答. $(6n\pm 1)60^\circ$.

(10.) $\sin\theta-\cos\theta=4\cos^2\theta\sin\theta.$

答. $(4n-1)45^\circ$, $(4n-1)22^\circ\cdot 5$.

(11.) $\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta=\sqrt{2}.$ 答. $(24n+4\pm 3)15^\circ$.

(12.) $\tan 2\theta=8\cos^2\theta-\cot\theta.$ 答. $(2n+1)90^\circ$, $\{6n+(-1)^n\}7^\circ\cdot 5$.

(13.) $\tan(45^\circ+\theta)=1+\sin 2\theta.$ 答. $n\times 180^\circ$, $(4n-1)45^\circ$.

(14.) $\cot 15^\circ\cos\theta+\sin\theta=1.$ 答. $(4n+1)90^\circ$, $(6n-1)60^\circ$.

(15.) $\sec 4\theta-\sec 2\theta=2.$ 但 $\cos 2\theta\cos 4\theta\neq 0.$

答. $(2n+1)18^\circ$.

(16.) $\tan\theta+\sec 2\theta=1$. 答. $n\times 180^\circ$, $(4n-1)22^\circ\cdot 5$.

(17.) $(1-\tan\theta)(1+\sin 2\theta)=1+\tan\theta$.

答. $n\times 180^\circ$, $(4n-1)45^\circ$.

(18.) $2\sin 2\theta-4\sin(\theta+30^\circ)+\sqrt{3}=0$.

答. $(6n-1)30^\circ$, $(12n+1)30^\circ$.

(19.) $\cos\theta-\sin\theta=\sin\theta\cos\theta$ 答. $(8n-1)45^\circ\pm\cos^{-1}\dfrac{\sqrt{2}-2}{2}$

(20.) $\sin 5\theta+\sin 3\theta+\sqrt{2}(\sin\theta+\cos\theta)\cos\theta=0$.

答. $(2n+1)90^\circ$, $(8n-1)9^\circ$, $(8n+5)15^\circ$.

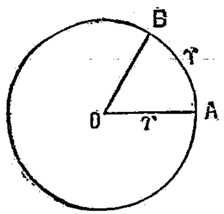
第十章。

眞弧度法

50。定義

於任意之圓。其等於半徑之弧上之中心角。恒有一定之大。此角謂之本位弧。

證.



於中心 O, 半徑 r 之圓。設 $AB=r$.

則

$$\frac{A\hat{O}B}{2\text{直角}}=\frac{\widehat{AB}}{\text{半圓周}}=\frac{r}{\pi r}=\frac{1}{\pi}$$

$\therefore$ 本位弧$=\frac{1}{\pi}(2\text{直角})$

以本位弧爲單位。其計角所得 θ 値。則此角謂之 θ 本位弧或謂其其弧度爲 θ, 此計法謂之眞弧度法。

弧度法於理倫上之講究通用之。

〔注意一〕 於半徑 r 之圓。其 l 弧上之中心角之弧

度爲$\frac{l}{r}$，從而對於θ本位弧之中心角弧爲$r\theta$.

〔注意二〕 二直角之弧度爲π。從而$\frac{\pi}{2}$及2π爲直角及四直角之弧度

〔注意三〕 1本位弧凡$53°13'44''.8$

51. 眞弧度與常度之關係.

設某角之眞弧度及度數爲θ及D，則據前條得次之關係。

$$\frac{\theta}{\pi}=\frac{D}{180}$$

由此式。任意角之眞弧度及度數。俱可轉換。

設題二十三.

(1) 求$35'30''$之眞弧度。　　答. 0·01033

(2) 求$\frac{\pi}{13}$之度數　　答. $13°.846153$

(3) 問n邊正多角形之一內角之弧度幾何。

答. $\frac{(n-2)\pi}{n}$

(4) 於半徑4尺之圓。問其10尺弧上之中心角之常度幾何。　　答 $143°14'20''8$

(5) 地球之直徑爲 3900 哩。此直徑於太陽之張角爲 17″.8 太陽之光以 $8^m13^s.3$ 達地球。問光速度幾何(小文字 ^{m} 及 ^{s} 爲時候之分及秒) 答每秒凡 185600 哩

畢

第一。

數之對數表。

用此表時宜先看
第六章38款

數之對數表

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	043	086	128	170	212	253	294	334	374
11	414	453	492	531	569	607	645	682	719	755
12	792	828	864	899	934	969	004*	038*	072*	106*
13	1139	173	206	239	271	303	335	367	399	430
14	461	492	523	553	584	614	644	673	703	732
15	761	790	818	847	875	903	931	959	987	014*
16	2041	068	095	122	148	175	201	227	253	279
17	304	330	355	380	405	430	455	480	504	529
18	553	577	601	625	648	672	695	718	742	765
19	788	810	833	856	878	900	923	945	967	989
20	3010	032	054	075	096	118	139	160	181	201
21	222	243	263	284	304	324	345	365	385	404
22	424	444	464	483	502	522	541	560	579	598
23	617	636	655	674	692	711	729	747	766	784
24	802	820	838	856	874	892	909	927	945	962
25	979	997	014*	031*	048*	065*	082*	099*	116*	133*
26	4150	166	183	200	216	232	249	265	281	298
27	314	330	346	362	378	393	409	425	440	456
28	472	487	502	518	533	548	564	579	594	609
29	624	639	654	669	683	698	713	728	742	757
30	771	786	800	814	829	843	857	871	886	900
31	914	928	942	955	969	983	997	011*	024*	038*
32	5051	065	079	092	105	119	132	145	159	172
33	185	198	211	224	237	250	263	276	289	302
34	315	328	340	353	366	378	391	403	416	428
35	441	453	465	478	490	502	514	527	539	551
36	563	575	587	599	611	623	635	647	658	670
37	682	694	705	717	729	740	752	763	775	786
38	798	809	821	832	843	855	866	877	888	899
39	911	922	933	944	955	966	977	988	999	010*
40	6021	031	042	053	064	075	085	096	107	117
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

	43	41
1	4·3	4·1
2	8·6	8·2
3	12·9	12·3
4	17·2	16·4
5	21·5	20·5
6	25·8	24·6
7	30·1	28·7
8	34·4	32·8
9	38·7	36·9

	35	33
1	3·5	3·3
2	7·0	6·6
3	10·5	9·9
4	14·0	13·2
5	17·5	16·5
6	21·0	19·8
7	24·5	23·1
8	28·0	26·4
9	31·5	29·7

	27	25
1	2·7	2·5
2	5·4	5·0
3	8·1	7·5
4	10·8	10·0
5	13·5	12·5
6	16·2	15·0
7	18·9	17·5
8	21·6	20·0
9	24·3	22·5

	19	17
1	1·9	1·7
2	3·8	3·4
3	5·7	5·1
4	7·6	6·8
5	9·5	8·5
6	11·4	10·2
7	13·3	11·9
8	15·2	13·6
9	17·1	15·3

	11	9
1	1·1	0·9
2	2·2	1·8
3	3·3	2·7
4	4·4	3·6
5	5·5	4·5
6	6·6	5·4
7	7·7	6·3
8	8·8	7·2
9	9·9	8·1

數之對數表.

P. P.

	39	37
1	3·9	3·7
2	7·8	7·4
	11·7	11·1
4	15·6	14·8
5	19·5	18·5
6	23·4	22·2
7	27·3	25·9
8	31·2	29·6
9	35·1	33·3

	31	29
1	3·1	2·9
2	6·2	5·8
3	9·3	8·7
4	12·4	11·6
5	15·5	14·5
6	18·6	17·4
7	21·7	20·3
8	24·8	23·2
9	27·9	26·1

	23	21
1	2·3	2·1
2	4·6	4·2
3	6·9	6·3
4	9·2	8·4
5	11·5	10·5
6	13·8	12·6
7	16·1	14·7
8	18·4	16·8
9	20·7	18·9

	15	13
1	1·5	1·3
2	3·0	2·6
3	4·5	3·9
4	6·0	5·2
5	7·5	6·5
6	9·0	7·8
7	10·5	9.1
8	12·0	10·4
9	13·5	11·7

	7	6
1	0·7	0·6
2	1·4	1·2
3	2·1	1·8
4	2·8	2·4
5	3·5	3·0
6	4·2	3·6
7	4·9	4·2
8	5·6	4·8
9	6·3	5·4

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
40	6021	031	042	053	064	075	085	096	107	117
41	128	138	149	160	170	180	191	201	212	222
42	232	243	253	263	274	284	294	304	314	325
43	335	345	355	365	375	385	395	405	415	425
44	435	444	454	464	474	484	493	503	513	522
45	532	542	551	561	571	580	590	599	609	618
46	628	637	646	656	665	675	684	693	702	712
47	721	730	739	749	758	767	776	785	794	803
48	812	821	830	839	848	857	866	875	884	893
49	902	911	920	928	937	946	955	964	972	981
50	990	998	007*	016*	024*	033*	042*	050*	059*	067*
51	7076	084	093	101	110	118	126	135	143	152
52	160	168	177	185	193	202	210	218	226	235
53	243	251	259	267	275	284	292	300	308	316
54	324	332	340	348	356	364	372	380	388	396
55	404	412	419	427	435	443	451	459	466	474
56	482	490	497	505	513	520	528	536	543	551
57	559	566	574	582	589	597	604	612	619	627
58	634	642	649	657	664	672	679	686	694	701
59	709	716	723	731	738	745	752	760	767	774
60	782	789	796	803	810	818	825	832	839	846
61	853	860	868	875	882	889	896	903	910	917
62	924	931	938	945	952	959	966	973	980	987
63	993	000*	007*	014*	021*	028*	035*	041*	048*	055*
64	8062	069	075	082	089	096	102	109	116	122
65	129	136	142	149	156	162	169	176	182	189
66	195	202	209	215	222	228	235	241	248	254
67	261	267	274	280	287	293	299	306	312	319
68	325	331	338	344	351	357	363	370	376	382
69	388	395	401	407	414	420	426	432	439	445
70	451	457	463	470	476	482	488	494	500	506
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

數之對數表

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
70	8451	457	463	470	476	482	488	494	500	506
71	513	519	525	531	537	543	549	555	561	567
72	573	579	585	591	597	603	609	615	621	627
73	633	639	645	651	657	663	669	675	681	686
74	692	698	704	710	716	722	727	733	739	745
75	751	756	762	768	774	779	785	791	797	802
76	808	814	820	825	831	837	842	848	854	859
77	865	871	876	882	887	893	899	904	910	915
78	921	927	932	938	943	949	954	960	965	971
79	976	982	987	993	998	004*	009*	015*	020*	025*
80	9031	036	042	047	053	058	063	069	074	079
81	085	090	096	101	106	112	117	122	128	133
82	138	143	149	154	159	165	170	175	180	186
83	191	196	201	206	212	217	222	227	232	238
84	243	248	253	258	263	269	274	279	284	289
85	294	299	304	309	315	320	325	330	335	340
86	345	350	355	360	365	370	375	380	385	390
87	395	400	405	410	415	420	425	430	435	440
88	445	450	455	460	465	469	474	479	484	489
89	494	499	504	509	513	518	523	528	533	538
90	542	547	552	557	562	566	571	576	581	586
91	590	595	600	605	609	614	619	624	628	633
92	638	643	647	652	657	661	666	671	675	680
93	685	689	694	699	703	708	713	717	722	727
94	731	736	741	745	750	754	759	763	768	773
95	777	782	786	791	795	800	805	809	814	818
96	823	827	832	836	841	845	850	854	859	863
97	868	872	877	881	886	890	894	899	903	908
98	912	917	921	926	930	934	939	943	948	952
99	956	961	965	969	974	978	983	987	991	996
100	0000	004	009	013	017	022	026	030	035	039
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

P. P.

	6
1	0·6
2	1·2
3	1·8
4	2·4
5	3·0
6	3·6
7	4·2
8	4·8
9	5·4

	5
1	0·5
2	1·0
3	1·5
4	2·0
5	2·5
6	3·0
7	3·5
8	4·0
9	4·5

	4
1	0·4
2	0·8
3	1·2
4	1·6
5	2·0
6	2·4
7	2·8
8	3·2
9	3·6

第 二。

三角函數之對數表

用此表時宜先看

第 六 章 39 款

三角函數之對數表

角	logsin	logtan	logcot	logcos	
0° 0′	$-\infty$	$-\infty$	∞	0·0000	0′ **90°**
10′	$\bar{3}\cdot4637$	$\bar{3}\cdot4637$	2·5363	0·0000	50′
20′	$\bar{3}\cdot7648$	$\bar{3}\cdot7648$	2·2352	0·0000	40′
30′	$\bar{3}\cdot9408$	$\bar{3}\cdot9409$	2·0591	0·0000	30′
40′	$\bar{2}\cdot0658$	$\bar{2}\cdot0658$	1·9342	0·0000	20′
50′	$\bar{2}\cdot1627$	$\bar{2}\cdot1627$	1·8373	0·0000	10′
1° 0′	$\bar{2}\cdot2419$	$\bar{2}\cdot2419$	1·7581	$\bar{1}\cdot9999$	0′ **89°**
10′	$\bar{2}\cdot3088$	$\bar{2}\cdot3089$	1·6911	$\bar{1}\cdot9999$	50′
20′	$\bar{2}\cdot3668$	$\bar{2}\cdot3669$	1·6331	$\bar{1}\cdot9999$	40′
30′	$\bar{2}\cdot4179$	$\bar{2}\cdot4181$	1·5819	$\bar{1}\cdot9999$	30′
40′	$\bar{2}\cdot4637$	$\bar{2}\cdot4638$	1·5362	$\bar{1}\cdot9998$	20′
50′	$\bar{2}\cdot5050$	$\bar{2}\cdot5053$	1·4947	$\bar{1}\cdot9998$	10′
2° 0′	$\bar{2}\cdot5428$	$\bar{2}\cdot5431$	1·4569	$\bar{1}\cdot9997$	0′ **88°**
10′	$\bar{2}\cdot5776$	$\bar{2}\cdot5779$	1·4221	$\bar{1}\cdot9997$	50′
20′	$\bar{2}\cdot6097$	$\bar{2}\cdot6101$	1·3899	$\bar{1}\cdot9996$	40′
30′	$\bar{2}\cdot6307$	$\bar{2}\cdot6401$	1·3599	$\bar{1}\cdot9996$	30′
40′	$\bar{2}\cdot6677$	$\bar{2}\cdot6682$	1·3318	$\bar{1}\cdot9995$	20′
50′	$\bar{2}\cdot6940$	$\bar{2}\cdot6945$	1·3055	$\bar{1}\cdot9995$	10′
3° 0′	$\bar{2}\cdot7188$	$\bar{2}\cdot7194$	1·2806	$\bar{1}\cdot9994$	0′ **87°**
10′	$\bar{2}\cdot7423$	$\bar{2}\cdot7429$	1·2571	$\bar{1}\cdot9993$	50′
20′	$\bar{2}\cdot7645$	$\bar{2}\cdot7652$	1·2348	$\bar{1}\cdot9993$	40′
30′	$\bar{2}\cdot7857$	$\bar{2}\cdot7865$	1·2135	$\bar{1}\cdot9992$	30′
40′	$\bar{2}\cdot8059$	$\bar{2}\cdot8067$	1·1933	$\bar{1}\cdot9991$	20′
50′	$\bar{2}\cdot8251$	$\bar{2}\cdot8261$	1·1739	$\bar{1}\cdot9990$	10′
4° 0′	$\bar{2}\cdot8436$	$\bar{2}\cdot8446$	1·1554	$\bar{1}\cdot9989$	0′ **86°**
10′	$\bar{2}\cdot8613$	$\bar{2}\cdot8624$	1·1376	$\bar{1}\cdot9989$	50′
20′	$\bar{2}\cdot8783$	$\bar{2}\cdot8795$	1·1205	$\bar{1}\cdot9988$	40′
30′	$\bar{2}\cdot8946$	$\bar{2}\cdot8960$	1·1040	$\bar{1}\cdot9987$	30′
40′	$\bar{2}\cdot9104$	$\bar{2}\cdot9118$	1·0882	$\bar{1}\cdot9986$	20′
50′	$\bar{2}\cdot9256$	$\bar{2}\cdot9272$	1·0728	$\bar{1}\cdot9985$	10′
5° 0′	$\bar{2}\cdot9403$	$\bar{2}\cdot9420$	1·0580	$\bar{1}\cdot9983$	0′ **85°**
	logcos	logcot	logtan	logsin	角

$$\log\sin a' = \log a + \bar{4}\cdot4637 + \tfrac{1}{3}\log\cos a'$$
$$\log\tan a' = \log a + \bar{4}\cdot4637 - \tfrac{2}{3}\log\cos a'$$
$$\log\cot a' = -\log a + 3\cdot5363 + \tfrac{2}{3}\log\cos a'$$

三角函數之對數表

角	*logsin*	*logtan*	*logcot*	*logcos*	
5° 0′	$\bar{2}.9403$	$\bar{2}.9420$	1.0580	$\bar{1}.9983$	0′ 85°
10′	$\bar{2}.9545$	$\bar{2}.9563$	1.0437	$\bar{1}.9982$	50′
20′	$\bar{2}.9682$	$\bar{2}.9701$	1.0299	$\bar{1}.9981$	40′
30′	$\bar{2}.9816$	$\bar{2}.9836$	1.0164	$\bar{1}.9980$	30′
40′	$\bar{2}.9945$	$\bar{2}.9966$	1.0034	$\bar{1}.9979$	20′
50′	$\bar{1}.0070$	$\bar{1}.0093$	0.9907	$\bar{1}.9977$	10′
6° 0′	$\bar{1}.0192$	$\bar{1}.0216$	0.9784	$\bar{1}.9976$	0′ 84°
10′	$\bar{1}.0311$	$\bar{1}.0336$	0.9664	$\bar{1}.9975$	50′
20′	$\bar{1}.0426$	$\bar{1}.0453$	0.9547	$\bar{1}.9973$	40′
30′	$\bar{1}.0539$	$\bar{1}.0567$	0.9433	$\bar{1}.9972$	30′
40′	$\bar{1}.0648$	$\bar{1}.0678$	0.9322	$\bar{1}.9971$	20′
50′	$\bar{1}.0755$	$\bar{1}.0786$	0.9214	$\bar{1}.9969$	10′
7° 0′	$\bar{1}.0859$	$\bar{1}.0891$	0.9109	$\bar{1}.9968$	0′ 83°
10′	$\bar{1}.0961$	$\bar{1}.0995$	0.9005	$\bar{1}.9966$	50′
20′	$\bar{1}.1060$	$\bar{1}.1096$	0.8904	$\bar{1}.9964$	40′
30′	$\bar{1}.1157$	$\bar{1}.1194$	0.8806	$\bar{1}.9963$	30′
40′	$\bar{1}.1252$	$\bar{1}.1291$	0.8709	$\bar{1}.9961$	20′
50′	$\bar{1}.1345$	$\bar{1}.1385$	0.8615	$\bar{1}.9959$	10′
8° 0′	$\bar{1}.1436$	$\bar{1}.1478$	0.8522	$\bar{1}.9958$	0′ 82°
10′	$\bar{1}.1525$	$\bar{1}.1569$	0.8431	$\bar{1}.9956$	50′
20′	$\bar{1}.1612$	$\bar{1}.1658$	0.8342	$\bar{1}.9954$	40′
30′	$\bar{1}.1697$	$\bar{1}.1745$	0.8255	$\bar{1}.9952$	30′
40′	$\bar{1}.1781$	$\bar{1}.1831$	0.8169	$\bar{1}.9950$	20′
50′	$\bar{1}.1863$	$\bar{1}.1915$	0.8085	$\bar{1}.9948$	10′
9° 0′	$\bar{1}.1943$	$\bar{1}.1997$	0.8003	$\bar{1}.9946$	0′ 81°
10′	$\bar{1}.2022$	$\bar{1}.2078$	0.7922	$\bar{1}.9944$	50′
20′	$\bar{1}.2100$	$\bar{1}.2158$	0.7842	$\bar{1}.9942$	40′
30′	$\bar{1}.2176$	$\bar{1}.2236$	0.7764	$\bar{1}.9940$	30′
40′	$\bar{1}.2251$	$\bar{1}.2313$	0.7687	$\bar{1}.9938$	20′
50′	$\bar{1}.2324$	$\bar{1}.2389$	0.7611	$\bar{1}.9936$	10′
10° 0′	$\bar{1}.2397$	$\bar{1}.2463$	0.7537	$\bar{1}.9934$	0′ 80°
	logcos	*logcot*	*logtan*	*logsin*	角

$$\log\sin a' = \log a + \bar{4}.4637 + \tfrac{1}{3}\log\cos a'$$
$$\log\tan a' = \log a + \bar{4}.4637 - \tfrac{2}{3}\log\cos a'$$
$$\log\cot a' = -\log a + 35363 + \tfrac{2}{3}\log\cos a$$

三角函數之對數表

角	logsin	差	logtan	通差	logcot	差	logcos	
10° 0′	$\bar{1}$·2397	71	$\bar{1}$·2463	73	0·7537	3	$\bar{1}$·9934	0′ **80°**
10′	$\bar{1}$·2468	70	$\bar{1}$·2536	73	0·7464	2	$\bar{1}$·9931	50′
20′	$\bar{1}$·2538	68	$\bar{1}$·2609	71	0·7391	2	$\bar{1}$·9929	40′
30′	$\bar{1}$·2606	68	$\bar{1}$·2680	70	0·7320	3	$\bar{1}$·9927	30′
40′	$\bar{1}$·2674	66	$\bar{1}$·2750	69	0·7250	2	$\bar{1}$·9924	20′
50′	$\bar{1}$·2740	66	$\bar{1}$·2819	68	0·7181	3	$\bar{1}$·9922	10′
11° 0′	$\bar{1}$·2806	64	$\bar{1}$·2887	66	0·7113	2	$\bar{1}$·9919	0′ **79°**
10′	$\bar{1}$·2870	64	$\bar{1}$·2953	67	0·7047	3	$\bar{1}$·9917	50′
20′	$\bar{1}$·2934	63	$\bar{1}$·3020	65	0·6980	2	$\bar{1}$·9914	40′
30′	$\bar{1}$·2997	61	$\bar{1}$·3085	64	0·6915	3	$\bar{1}$·9912	30′
40′	$\bar{1}$·3058	61	$\bar{1}$·3149	63	0·6851	2	$\bar{1}$·9909	20′
50′	$\bar{1}$·3119	60	$\bar{1}$·3212	63	0·6788	3	$\bar{1}$·9907	10′
12° 0′	$\bar{1}$·3179	59	$\bar{1}$·3275	61	0·6725	3	$\bar{1}$·9904	0′ **78°**
10′	$\bar{1}$·3238	58	$\bar{1}$·3336	61	0·6664	2	$\bar{1}$·9901	50′
20′	$\bar{1}$·3296	57	$\bar{1}$·3397	61	0·6603	3	$\bar{1}$·9899	40′
30′	$\bar{1}$·3353	57	$\bar{1}$·3458	59	0·6542	3	$\bar{1}$·9896	30′
40′	$\bar{1}$·3410	56	$\bar{1}$·3517	59	0·6483	3	$\bar{1}$·9893	20′
50′	$\bar{1}$·3466	55	$\bar{1}$·3576	58	0·6424	3	$\bar{1}$·9890	10′
13° 0′	$\bar{1}$·3521	54	$\bar{1}$·3634	57	0·6366	3	$\bar{1}$·9887	0′ **77°**
10′	$\bar{1}$·3575	54	$\bar{1}$·3691	57	0·6309	3	$\bar{1}$·9884	50′
20′	$\bar{1}$·3629	53	$\bar{1}$·3748	56	0·6252	3	$\bar{1}$·9881	40′
30′	$\bar{1}$·3682	52	$\bar{1}$·3804	55	0·6196	3	$\bar{1}$·9878	30′
40′	$\bar{1}$·3734	52	$\bar{1}$·3859	55	0·6141	3	$\bar{1}$·9875	20′
50′	$\bar{1}$·3786	51	$\bar{1}$·3914	54	0·6086	3	$\bar{1}$·9872	10′
14° 0′	$\bar{1}$·3837	50	$\bar{1}$·3968	53	0·6032	3	$\bar{1}$·9869	0′ **76°**
10′	$\bar{1}$·3887	50	$\bar{1}$·4021	53	0·5979	3	$\bar{1}$·9866	50′
20′	$\bar{1}$·3937	49	$\bar{1}$·4074	53	0·5926	4	$\bar{1}$·9863	40′
30′	$\bar{1}$·3986	49	$\bar{1}$·4127	51	0·5873	3	$\bar{1}$·9859	30′
40′	$\bar{1}$·4035	48	$\bar{1}$·4178	52	0·5822	3	$\bar{1}$·9856	20′
50′	$\bar{1}$·4083	47	$\bar{1}$·4230	51	0·5770	4	$\bar{1}$·9853	10′
15° 0′	$\bar{1}$·4130		$\bar{1}$·4281		0·5719		$\bar{1}$·9849	0′ **75°**
	logcos	差	logcot	通差	logtan	差	logsin	角

P.P.

	73	71
1	7·3	7·1
2	14·6	14·2
3	21·9	21·3
4	29·2	28·4
5	36·5	35·5
6	43·8	42·6
7	51·1	49·7
8	58·4	56·8
9	65·7	63·9

	65	63
1	6·5	6·3
2	13·0	12·6
3	19·5	18·9
4	26·0	25·2
5	32·5	31·5
6	39·0	37·8
7	45·5	44·1
8	52·0	50·4
9	58·5	56·7

	57	55
1	5·7	5·5
2	11·4	11·0
3	17·1	16·5
4	22·8	22·0
5	28·5	27·5
6	34·2	33·0
7	39·9	38·5
8	45·6	44·0
9	51·3	49·5

	49	47
1	4·9	4·7
2	9·8	9·4
3	14·7	14·1
4	19·6	18·8
5	24·5	23·5
6	29·4	28·2
7	34·3	32·9
8	39·2	37·6
9	44·1	42·3

	41	39
1	4·1	3·9
2	8.2	7·8
3	12·3	11·7
4	16·4	15·6
5	20·5	19·5
6	24·6	23·4
7	28·7	27·3
8	32·8	31·2
9	36·9	35·1

三角函數之對數表

P. P.

	69	67
1	6·9	6·7
2	13·8	13·4
3	20·7	20·1
4	27·6	26·8
5	34·5	33·5
6	41·4	40·2
7	48·3	46·9
8	55·2	53·6
9	62·1	60·3

	61	59
1	6·1	5·9
2	12·2	11·8
3	18·3	17·7
4	24·4	23·6
5	30·5	29·5
6	36·6	35·4
7	42·7	41·3
8	48·8	47·2
9	54·9	53·1

	53	51
1	5·3	5·1
2	10·6	10·2
3	15·9	15·3
4	21·2	20·4
5	26·5	25·5
6	31·8	30·6
7	37·1	35·7
8	42·4	40·8
9	47·7	45·9

	45	43
1	4·5	4·3
2	9·0	8·6
3	13·5	12·9
4	18·0	17·2
5	22·5	21·5
6	27·0	25·
7	31·5	30·1
8	36·0	34·4
9	40·5	38·7

	37	35
1	3·7	3·5
2	7·4	7·0
3	11·1	10·5
4	14·8	14·0
5	18·5	17·5
6	22·2	21·0
7	25·9	24·5
8	29·6	28·0
9	33·3	31·5

角	logsin	差	logtan	通差	logcot	差	logcos	
15° 0′	$\bar{1}$·4130	47	$\bar{1}$·4281	50	0·5719	3	·9849	0′ **75°**
10′	$\bar{1}$·4177	46	$\bar{1}$·4331	50	0·5669	3	$\bar{1}$·9846	50′
20′	$\bar{1}$·4223	46	$\bar{1}$·4381	49	0·5619	4	$\bar{1}$·9843	40′
30′	$\bar{1}$·4269	45	$\bar{1}$·4430	49	0·5570	3	$\bar{1}$·9839	30′
40′	$\bar{1}$·4314	45	$\bar{1}$·4479	48	0·5521	4	$\bar{1}$·9836	20′
50′	$\bar{1}$·4359	44	$\bar{1}$·4527	48	0·5473	4	$\bar{1}$·9832	10′
16° 0′	$\bar{1}$·4403	44	$\bar{1}$·4575	47	0·5425	3	$\bar{1}$·9828	0′ **74°**
10′	$\bar{1}$·4447	44	$\bar{1}$·4622	47	0·5378	4	$\bar{1}$·9825	50′
20′	$\bar{1}$·4491	42	$\bar{1}$·4669	47	0·5331	4	$\bar{1}$·9821	40′
30′	$\bar{1}$·4533	43	$\bar{1}$·4716	46	0·5284	3	$\bar{1}$·9817	30′
40′	$\bar{1}$·4576	42	$\bar{1}$·4762	46	0·5238	4	$\bar{1}$·9814	20′
50′	$\bar{1}$·4618	41	$\bar{1}$·4808	45	0·5192	4	$\bar{1}$·9810	10′
17° 0′	$\bar{1}$·4659	41	$\bar{1}$·4853	45	0·5147	4	$\bar{1}$·9806	0′ **73°**
10′	$\bar{1}$·4700	41	$\bar{1}$·4898	45	0·5102	4	$\bar{1}$·9802	50′
20′	$\bar{1}$·4741	40	$\bar{1}$·4943	44	0·5057	4	$\bar{1}$·9798	40′
30′	$\bar{1}$·4781	40	$\bar{1}$·4987	44	0·5013	4	$\bar{1}$·9794	30′
40′	$\bar{1}$·4821	40	$\bar{1}$·5031	44	0·4969	4	$\bar{1}$·9790	20′
50′	$\bar{1}$·4861	39	$\bar{1}$·5075	43	0·4925	4	$\bar{1}$·9786	10′
18° 0′	$\bar{1}$·4900	39	$\bar{1}$·5118	43	0·4882	4	$\bar{1}$·9782	0′ **72°**
10′	$\bar{1}$·4939	38	$\bar{1}$·5161	42	0·4839	4	$\bar{1}$·9778	50′
20′	$\bar{1}$·4977	38	$\bar{1}$·5203	42	0·4797	4	$\bar{1}$·9774	40′
30′	$\bar{1}$·5015	37	$\bar{1}$·5245	42	0·4755	5	$\bar{1}$·9770	30′
40′	$\bar{1}$·5052	38	$\bar{1}$·5287	42	0·4713	4	$\bar{1}$·9765	20′
50′	$\bar{1}$·5090	36	$\bar{1}$·5329	41	0·4671	4	$\bar{1}$·9761	10′
19° 0′	$\bar{1}$·5126	37	$\bar{1}$·5370	41	0·4630	5	$\bar{1}$·9757	0′ **71°**
10′	$\bar{1}$·5163	36	$\bar{1}$·5411	40	0·4589	4	$\bar{1}$·9752	50′
20′	$\bar{1}$·5199	36	$\bar{1}$·5451	40	0·4549	5	$\bar{1}$·9748	40′
30′	$\bar{1}$·5235	35	$\bar{1}$·5491	40	0·4509	4	$\bar{1}$·9743	30′
40′	$\bar{1}$·5270	36	$\bar{1}$·5531	40	0·4469	5	$\bar{1}$·9739	20′
50′	$\bar{1}$·5306	35	$\bar{1}$·5571	40	0·4429	4	$\bar{1}$·9734	10′
20° 0′	$\bar{1}$·5341		$\bar{1}$·5611		0·4389		$\bar{1}$·9730	0′ **70°**
	logcos	差	logcot	通差	logtan	差	logsin	角

三角函數之對數表

角	logsin	差	logtan	通差	logcot	差	logcos	
20° 0′	$\bar{1}$·5341	34	$\bar{1}$·5611	39	0·4389	5	$\bar{1}$·9730	0′ **70°**
10′	$\bar{1}$·5375	34	$\bar{1}$·5650	39	0·4350	4	$\bar{1}$·9725	50′
20′	$\bar{1}$·5409	34	$\bar{1}$·5689	38	0·4311	5	$\bar{1}$·9721	40′
30′	$\bar{1}$·5443	34	$\bar{1}$·5727	39	0·4273	5	$\bar{1}$·9716	30′
40′	$\bar{1}$·5477	33	$\bar{1}$·5766	38	0·4234	5	$\bar{1}$·9711	20′
50′	$\bar{1}$·5510	33	$\bar{1}$·5804	38	0·4196	4	$\bar{1}$·9706	10′
21° 0′	$\bar{1}$·5543	33	$\bar{1}$·5842	37	0·4158	5	$\bar{1}$·9702	0′ **69°**
10′	$\bar{1}$·5576	33	$\bar{1}$·5879	38	0·4121	5	$\bar{1}$·9697	50′
20′	$\bar{1}$·5609	32	$\bar{1}$·5917	37	0·4083	5	$\bar{1}$·9692	40′
30′	$\bar{1}$·5641	32	$\bar{1}$·5954	37	0·4046	5	$\bar{1}$·9687	30′
40′	$\bar{1}$·5673	31	$\bar{1}$·5991	37	0·4009	5	$\bar{1}$·9682	20′
50′	$\bar{1}$·5704	32	$\bar{1}$·6028	36	0·3972	5	$\bar{1}$·9677	10′
22° 0′	$\bar{1}$·5736	31	$\bar{1}$·6064	36	0·3936	5	$\bar{1}$·9672	0′ **68°**
10′	$\bar{1}$·5767	31	$\bar{1}$·6100	36	0·3900	6	$\bar{1}$·9667	50′
20′	$\bar{1}$·5798	30	$\bar{1}$·6136	36	0·3864	5	$\bar{1}$·9661	40′
30′	$\bar{1}$·5828	31	$\bar{1}$·6172	36	0·3828	5	$\bar{1}$·9656	30′
40′	$\bar{1}$·5859	30	$\bar{1}$·6208	35	0·3792	5	$\bar{1}$·9651	20′
50′	$\bar{1}$·5889	30	$\bar{1}$·6243	36	0·3757	6	$\bar{1}$·9646	10′
23° 0′	$\bar{1}$·5919	29	$\bar{1}$·6279	35	0·3721	5	$\bar{1}$·9640	0′ **67°**
10′	$\bar{1}$·5948	30	$\bar{1}$·6314	34	0·3686	6	$\bar{1}$·9635	50′
20′	$\bar{1}$·5978	29	$\bar{1}$·6348	35	0·3652	5	$\bar{1}$·9629	40′
30′	$\bar{1}$·6007	29	$\bar{1}$·6383	34	0·3617	6	$\bar{1}$·9624	30′
40′	$\bar{1}$·6036	29	$\bar{1}$·6417	35	0·3583	5	$\bar{1}$·9618	20′
50′	$\bar{1}$·6065	28	$\bar{1}$·6452	34	0·3548	6	$\bar{1}$·9613	10′
24° 0′	$\bar{1}$·6093	28	$\bar{1}$·6486	34	0·3514	5	$\bar{1}$·9607	0′ **66°**
10′	$\bar{1}$·6121	28	$\bar{1}$·6520	33	0·3480	6	$\bar{1}$·9602	50′
20′	$\bar{1}$·6149	28	$\bar{1}$·6553	34	0·3447	6	$\bar{1}$·9596	40′
30′	$\bar{1}$·6177	28	$\bar{1}$·6587	33	0·3413	6	$\bar{1}$·9590	30′
40′	$\bar{1}$·6205	27	$\bar{1}$·6620	34	0·3380	5	$\bar{1}$·9584	20′
50′	$\bar{1}$·6232	27	$\bar{1}$·6654	33	0·3346	6	$\bar{1}$·9579	10′
25° 0′	$\bar{1}$·6259		$\bar{1}$·6687		0·3313		$\bar{1}$·9573	0′ **65°**
	logcos	差	logcot	通差	logtan	差	logsin	角

P. P.

	39	38
1	3·9	3·8
2	7·8	7·6
3	11·7	11·4
4	15·6	15·2
5	19·5	19·0
6	23·4	22·8
7	27·3	26·6
8	31·2	30·4
9	35·1	34·2

	35	34
1	3·5	3·4
2	7·0	6·8
3	10·5	10·2
4	14·0	13·6
5	17·5	17·0
6	21·0	20·4
7	24·5	23·8
8	28·0	27·2
9	31·5	30·6

	31	29
1	3·1	2·9
2	6·2	5·8
3	9·3	8·7
4	12·4	11·6
5	15·5	14·5
6	18·6	17·4
7	21·7	20·3
8	24·8	23·2
9	27·9	26·1

	26	25
1	2·6	2·5
2	5·2	5·0
3	7·8	7·5
4	10·4	10·0
5	13·0	12·5
6	15·6	15·0
7	18·2	17·5
8	20·8	20·0
9	23·4	22·5

	22	8
1	2·2	0·8
2	4·4	1·6
3	6·6	2·4
4	8·8	3·2
5	11·0	4·0
6	13·2	4·8
7	15·4	5·6
8	17·6	6·4
9	19·8	7·2

P. P.

	37	36
1	3·7	3·6
2	7·4	7·2
3	11·1	10·8
4	14·8	14·4
5	18·5	18·0
6	22·2	21·6
7	25·9	25·2
8	29·6	28·8
9	33·3	32·4

	33	32
1	3·3	3·2
2	6·6	6·4
3	9·9	9·6
4	13·2	12·8
5	16·5	16·0
6	19·8	19·2
7	23·1	22·4
8	26·4	25·6
9	29·7	28·8

	28	27
1	2·8	2·7
2	5·6	5·4
3	8·4	8·1
4	11·2	10·8
5	14·0	13·5
6	16·8	16·2
7	19·6	18·9
8	22·4	21·6
9	25·2	24·3

	24	23
1	2·4	2·3
2	4·8	4·6
3	7·2	6·9
4	9·6	9·2
5	12·0	11·5
6	14·4	13·8
7	16·8	16·1
8	19·2	18·4
9	21·6	20·7

	6	4
1	0·6	0·4
2	1·2	0·8
3	1·8	1·2
4	2·4	1·6
5	3·0	2·0
6	3·6	2·4
7	4·2	2·8
8	4·8	3·2
9	5·4	3·6

三角函數之對數表

角	*logsin*	差	*logtan*	通差	*logcot*	差	*logcos*	
25° 0′	$\bar{1}$·6259	27	$\bar{1}$·6687	33	0·3313	6	$\bar{1}$·9573	0′ **65°**
10′	$\bar{1}$·6286	27	$\bar{1}$·6720	32	0·3280	6	$\bar{1}$·9567	50′
20′	$\bar{1}$·6313	27	$\bar{1}$·6752	33	0·3248	6	$\bar{1}$·9561	40′
30′	$\bar{1}$·6340	26	$\bar{1}$·6785	32	0·3215	6	$\bar{1}$·9555	30′
40′	$\bar{1}$·6366	26	$\bar{1}$·6817	33	0·3183	6	$\bar{1}$·9549	20′
50′	$\bar{1}$·6392	26	$\bar{1}$·6850	32	0·3150	6	$\bar{1}$·9543	10′
26° 0′	$\bar{1}$·6418	26	$\bar{1}$·6882	32	0·3118	7	$\bar{1}$·9537	0′ **64°**
10	$\bar{1}$·6444	26	$\bar{1}$·6914	32	0·3086	6	$\bar{1}$·9530	50′
20′	$\bar{1}$·6470	25	$\bar{1}$·6946	31	0·3054	6	$\bar{1}$·9524	40′
30′	$\bar{1}$·6495	26	$\bar{1}$·6977	32	0·3023	6	$\bar{1}$·9518	30′
40′	$\bar{1}$·6521	25	$\bar{1}$·7009	31	0·2991	7	$\bar{1}$·9512	20′
50′	$\bar{1}$·6546	24	$\bar{1}$·7040	32	0·2960	6	$\bar{1}$·9505	10′
27° 0′	$\bar{1}$·6570	25	$\bar{1}$·7072	31	0·2928	7	$\bar{1}$·9499	0′ **63°**
10′	$\bar{1}$·6595	25	$\bar{1}$·7103	31	0·2897	6	$\bar{1}$·9492	50′
20′	$\bar{1}$·6620	24	$\bar{1}$·7134	31	0·2866	7	$\bar{1}$·9486	40′
30′	$\bar{1}$·6644	24	$\bar{1}$·7165	31	0·2835	6	$\bar{1}$·9479	30′
40′	$\bar{1}$·6668	24	$\bar{1}$·7196	30	0·2804	7	$\bar{1}$·9473	20′
50′	$\bar{1}$·6692	24	$\bar{1}$·7226	31	0·2774	7	$\bar{1}$·9466	10′
28° 0′	$\bar{1}$·6716	24	$\bar{1}$·7257	30	0·2743	6	$\bar{1}$·9459	0′ **62°**
10′	$\bar{1}$·6740	23	$\bar{1}$·7287	30	0·2713	7	$\bar{1}$·9453	50′
20′	$\bar{1}$·6763	24	$\bar{1}$·7317	31	0·2683	7	$\bar{1}$·9446	40′
30′	$\bar{1}$·6787	23	$\bar{1}$·7348	30	0·2652	7	$\bar{1}$·9439	30′
40′	$\bar{1}$·6810	23	$\bar{1}$·7378	30	0·2622	7	$\bar{1}$·9432	20′
50′	$\bar{1}$·6833	23	$\bar{1}$·7408	30	0·2592	7	$\bar{1}$·9425	10′
29° 0′	$\bar{1}$·6856	22	$\bar{1}$·7438	29	0·2562	7	$\bar{1}$·9418	0′ **61°**
10′	$\bar{1}$·6878	23	$\bar{1}$·7467	30	0·2533	7	$\bar{1}$·9411	50′
20′	$\bar{1}$·6901	22	$\bar{1}$·7497	29	0·2503	7	$\bar{1}$·9404	40′
30′	$\bar{1}$·6923	23	$\bar{1}$·7526	30	0·2474	7	$\bar{1}$·9397	30′
40′	$\bar{1}$·6946	22	$\bar{1}$·7556	29	0·2444	7	$\bar{1}$·9390	20′
50′	$\bar{1}$·6968	22	$\bar{1}$·7585	29	0·2415	8	$\bar{1}$·9383	10′
30° 0′	$\bar{1}$·6990		$\bar{1}$·7614		0·2386		$\bar{1}$·9375	0′ **60°**
	logcos	差	*logcot*	通差	*logtan*	差	*logsin*	角

三角函數之對數表

角	logsin	差	logtan	通差	logcot	差	logcos	
30° 0′	$\bar{1}.6990$	22	$\bar{1}.7614$	30	0.2386	7	$\bar{1}.9375$	0′ **60°**
10′	$\bar{1}.7012$	21	$\bar{1}.7644$	29	0.2356	7	$\bar{1}.9368$	50′
20′	$\bar{1}.7033$	22	$\bar{1}.7673$	28	0.2327	8	$\bar{1}.9361$	40′
30′	$\bar{1}.7055$	21	$\bar{1}.7701$	29	0.2299	7	$\bar{1}.9353$	30′
40′	$\bar{1}.7076$	21	$\bar{1}.7730$	29	0.2270	8	$\bar{1}.9346$	20′
50′	$\bar{1}.7097$	21	$\bar{1}.7759$	29	0.2241	7	$\bar{1}.9338$	10′
31° 0′	$\bar{1}.7118$	21	$\bar{1}.7788$	28	0.2212	8	$\bar{1}.9331$	0′ **59°**
10′	$\bar{1}.7139$	21	$\bar{1}.7816$	29	0.2184	8	$\bar{1}.9323$	50′
20′	$\bar{1}.7160$	21	$\bar{1}.7845$	28	0.2155	7	$\bar{1}.9315$	40′
30′	$\bar{1}.7181$	20	$\bar{1}.7873$	29	0.2127	8	$\bar{1}.9308$	30′
40′	$\bar{1}.7201$	21	$\bar{1}.7902$	28	0.2098	8	$\bar{1}.9300$	20′
50′	$\bar{1}.7222$	20	$\bar{1}.7930$	28	0.2070	8	$\bar{1}.9292$	10′
32° 0′	$\bar{1}.7242$	20	$\bar{1}.7958$	28	0.2042	8	$\bar{1}.9284$	0′ **58°**
10′	$\bar{1}.7262$	20	$\bar{1}.7986$	28	0.2014	8	$\bar{1}.9276$	50′
20′	$\bar{1}.7282$	20	$\bar{1}.8014$	28	0.1986	8	$\bar{1}.9268$	40′
30′	$\bar{1}.7302$	20	$\bar{1}.8042$	28	0.1958	8	$\bar{1}.9260$	30′
40′	$\bar{1}.7322$	20	$\bar{1}.8070$	27	0.1930	8	$\bar{1}.9252$	20′
50′	$\bar{1}.7342$	19	$\bar{1}.8097$	28	0.1903	8	$\bar{1}.9244$	10′
33° 0′	$\bar{1}.7361$	19	$\bar{1}.8125$	28	0.1875	8	$\bar{1}.9236$	0′ **57°**
10′	$\bar{1}.7380$	20	$\bar{1}.8153$	27	0.1847	9	$\bar{1}.9228$	50′
20′	$\bar{1}.7400$	19	$\bar{1}.8180$	28	0.1820	8	$\bar{1}.9219$	40′
30′	$\bar{1}.7419$	19	$\bar{1}.8208$	27	0.1792	8	$\bar{1}.9211$	30′
40′	$\bar{1}.7438$	19	$\bar{1}.8235$	28	0.1765	9	$\bar{1}.9203$	20′
50′	$\bar{1}.7457$	19	$\bar{1}.8263$	27	0.1737	8	$\bar{1}.9194$	10′
34° 0′	$\bar{1}.7476$	18	$\bar{1}.8290$	27	0.1710	9	$\bar{1}.9186$	0′ **56°**
10′	$\bar{1}.7494$	19	$\bar{1}.8317$	27	0.1683	8	$\bar{1}.9177$	50′
20′	$\bar{1}.7513$	18	$\bar{1}.8344$	27	0.1656	9	$\bar{1}.9169$	40′
30′	$\bar{1}.7531$	19	$\bar{1}.8371$	27	0.1629	9	$\bar{1}.9160$	30′
40′	$\bar{1}.7550$	18	$\bar{1}.8398$	27	0.1602	9	$\bar{1}.9151$	20′
50′	$\bar{1}.7568$	18	$\bar{1}.8425$	27	0.1575	8	$\bar{1}.9142$	10′
35° 0′	$\bar{1}.7586$		$\bar{1}.8452$		0.1548		$\bar{1}.9134$	0′ **55°**
	logcos	差	logcot	通差	logtan	差	logsin	角

P. P.

	30	29	26	25	20	19	16	15	9	8
1	3.0	2.9	2.6	2.5	2.0	1.9	1.6	1.5	0.9	0.8
2	6.0	5.8	5.2	5.0	4.0	3.8	3.2	3.0	1.8	1.6
3	9.0	8.7	7.8	7.5	6.0	5.7	4.8	4.5	2.7	2.4
4	12.0	11.6	10.4	10.0	8.0	7.6	6.4	6.0	3.6	3.2
5	15.0	14.5	13.0	12.5	10.0	9.5	8.0	7.5	4.5	4.0
6	18.0	17.4	15.6	15.0	12.0	11.4	9.6	9.0	5.4	4.8
7	21.0	20.3	18.2	17.5	14.0	13.3	11.2	10.5	6.3	5.6
8	24.0	23.2	20.8	20.0	16.0	15.2	12.8	12.0	7.2	6.4
9	27.0	26.1	23.4	22.5	18.0	17.1	14.4	13.5	8.1	7.2

三角函數之對數表

P. P.

	28	27
1	2.8	2.7
2	5.6	5.4
3	8.4	8.1
4	11.2	10.8
5	14.0	13.5
6	16.8	16.2
7	19.6	18.9
8	22.4	21.6
9	25.2	24.3

	22	21
1	2.2	2.1
2	4.4	4.2
3	6.6	6.3
4	8.8	8.4
5	11.0	10.5
6	13.2	12.6
7	15.4	14.7
8	17.6	16.8
9	19.8	18.9

	18	17
1	1.8	1.7
2	3.6	3.4
3	5.4	5.1
4	7.2	6.8
5	9.0	8.5
6	10.8	10.2
7	12.6	11.9
8	14.4	13.6
9	16.2	15.3

	11	10
1	1.1	1.0
2	2.2	2.0
3	3.3	3.0
4	4.4	4.0
5	5.5	5.0
6	6.6	6.0
7	7.7	7.0
8	8.8	8.0
9	9.9	9.0

	7
1	0.7
2	1.4
3	2.1
4	2.8
5	3.5
6	4.2
7	4.9
8	5.6
9	6.3

角	logsin	差	logtan	通差	logcot	差	logcos	
35° 0′	$\bar{1}.7586$	18	$\bar{1}.8542$	27	0.1548	9	$\bar{1}.9134$	0′ **55°**
10′	$\bar{1}.7604$	18	$\bar{1}.8479$	27	0.1521	9	$\bar{1}.9125$	50′
20′	$\bar{1}.7622$	18	$\bar{1}.8506$	27	0.1494	9	$\bar{1}.9116$	40′
30′	$\bar{1}.7640$	17	$\bar{1}.8533$	26	0.1467	9	$\bar{1}.9107$	30′
40′	$\bar{1}.7657$	18	$\bar{1}.8559$	27	0.1441	9	$\bar{1}.9098$	20′
50′	$\bar{1}.7675$	17	$\bar{1}.8586$	27	0.1414	9	$\bar{1}.9089$	10′
36° 0′	$\bar{1}.7692$	18	$\bar{1}.8613$	26	0.1387	10	$\bar{1}.9080$	0′ **54°**
10′	$\bar{1}.7710$	17	$\bar{1}.8639$	27	0.1361	9	$\bar{1}.9070$	50′
20′	$\bar{1}.7727$	17	$\bar{1}.8666$	26	0.1334	9	$\bar{1}.9061$	40′
30′	$\bar{1}.7744$	17	$\bar{1}.8692$	26	9.1308	10	$\bar{1}.9052$	30′
40′	$\bar{1}.7761$	17	$\bar{1}.8718$	27	0.1282	9	$\bar{1}.9042$	20′
50′	$\bar{1}.7778$	17	$\bar{1}.8745$	26	0.1255	10	$\bar{1}.9033$	10′
37° 0′	$\bar{1}.7795$	16	$\bar{1}.8771$	26	0.1229	9	$\bar{1}.9023$	0′ **53°**
10′	$\bar{1}.7811$	17	$\bar{1}.8797$	27	0.1203	10	$\bar{1}.9014$	50′
20′	$\bar{1}.7828$	16	$\bar{1}.8824$	26	0.1176	9	$\bar{1}.9004$	40′
30′	$\bar{1}.7844$	17	$\bar{1}.8850$	26	0.1150	10	$\bar{1}.8995$	30′
40′	$\bar{1}.7861$	16	$\bar{1}.8876$	26	0.1124	10	$\bar{1}.8985$	20′
50′	$\bar{1}.7877$	16	$\bar{1}.8902$	26	0.1098	10	$\bar{1}.8975$	10′
38° 0′	$\bar{1}.7893$	17	$\bar{1}.8928$	26	0.1072	10	$\bar{1}.8965$	0′ **52°**
10′	$\bar{1}.7910$	16	$\bar{1}.8954$	26	0.1046	10	$\bar{1}.8955$	50′
20′	$\bar{1}.7926$	15	$\bar{1}.8980$	26	0.1020	10	$\bar{1}.8945$	40′
30′	$\bar{1}.7941$	16	$\bar{1}.9006$	26	0.0994	10	$\bar{1}.8935$	30′
40′	$\bar{1}.7957$	16	$\bar{1}.9032$	26	0.0968	10	$\bar{1}.8925$	20′
50′	$\bar{1}.7973$	16	$\bar{1}.9058$	26	0.0942	10	$\bar{1}.8915$	10′
39° 0′	$\bar{1}.7989$	15	$\bar{1}.9084$	26	0.0916	10	$\bar{1}.8905$	0′ **51°**
10′	$\bar{1}.8004$	16	$\bar{1}.9110$	25	0.0890	11	$\bar{1}.8895$	50′
20′	$\bar{1}.8020$	15	$\bar{1}.9135$	26	0.0865	10	$\bar{1}.8884$	40′
30′	$\bar{1}.8035$	15	$\bar{1}.9161$	26	0.0839	10	$\bar{1}.8874$	30′
40′	$\bar{1}.8050$	16	$\bar{1}.9187$	25	0.0813	11	$\bar{1}.8864$	20′
50′	$\bar{1}.8066$	15	$\bar{1}.9212$	26	0.0788	10	$\bar{1}.8853$	10′
40° 0′	$\bar{1}.8081$		$\bar{1}.9238$		0.0762		$\bar{1}.8843$	0′ **50°**
	logcos	差	logcot	通差	logtan	差	logsin	角

三角函數之函數表.

角	logsin	差	logtan	通差	logcot	差	logcos	
40° 0′	$\bar{1}$·8081	15	$\bar{1}$·9238	26	0·0762	11	$\bar{1}$·8843	0′ **50°**
10′	$\bar{1}$·8096	15	$\bar{1}$·9264	25	0·0736	11	$\bar{1}$·8832	50′
20′	$\bar{1}$·8111	14	$\bar{1}$·9289	26	0·0711	11	$\bar{1}$·8821	40′
30′	$\bar{1}$·8125	15	$\bar{1}$·5315	26	0·0685	10	$\bar{1}$·8810	30′
40′	$\bar{1}$·8140	15	$\bar{1}$·9341	25	0·0659	11	$\bar{1}$·8800	20′
50′	$\bar{1}$·8155	14	$\bar{1}$·9366	26	0·0634	11	$\bar{1}$·8789	10′
41° 0′	$\bar{1}$·8169	15	$\bar{1}$·9392	25	0·0608	11	$\bar{1}$·8778	0′ **49°**
10′	$\bar{1}$·8184	14	$\bar{1}$·9417	26	0·0583	11	$\bar{1}$·8767	50′
20′	$\bar{1}$·8198	15	$\bar{1}$·9443	25	0·0557	11	$\bar{1}$·8756	40′
30′	$\bar{1}$·8213	14	$\bar{1}$·9468	26	0·0532	12	$\bar{1}$·8745	30′
40′	$\bar{1}$·8227	14	$\bar{1}$·9494	25	0·0506	11	$\bar{1}$·8733	20′
50′	$\bar{1}$·8241	14	$\bar{1}$·9519	25	0·0481	11	$\bar{1}$·8722	10′
42° 0′	$\bar{1}$·8255	14	$\bar{1}$·9544	26	0·0456	12	$\bar{1}$·8711	0′ **48°**
10′	$\bar{1}$·8269	14	$\bar{1}$·9570	25	0·0430	11	$\bar{1}$·8699	50′
20′	$\bar{1}$·8283	14	$\bar{1}$·9595	26	0·0405	12	$\bar{1}$·8688	40′
30′	$\bar{1}$·8297	14	$\bar{1}$·9621	25	0·0379	11	$\bar{1}$·8676	30′
40′	$\bar{1}$·8311	13	$\bar{1}$·9646	25	0·0354	12	$\bar{1}$·8665	20′
50′	$\bar{1}$·8324	14	$\bar{1}$·9671	26	0·0329	12	$\bar{1}$·8653	10′
43° 0′	$\bar{1}$·8338	13	$\bar{1}$·9697	25	0·0303	12	$\bar{1}$·8641	0′ **47°**
10′	$\bar{1}$·8351	14	$\bar{1}$·9722	25	0·0278	11	$\bar{1}$·8629	50′
20′	$\bar{1}$·8365	13	$\bar{1}$·9747	25	0·0253	12	$\bar{1}$·8618	40′
30′	$\bar{1}$·8378	13	$\bar{1}$·9772	26	0·0228	12	$\bar{1}$·8606	30′
40′	$\bar{1}$·8391	14	$\bar{1}$·9798	25	0·0202	12	$\bar{1}$·8594	20′
50′	$\bar{1}$·8405	13	$\bar{1}$·9823	25	0·0177	13	$\bar{1}$·8582	10′
44° 0′	$\bar{1}$·8418	13	$\bar{1}$·9848	26	0·0152	12	$\bar{1}$·8569	0′ **46°**
10′	$\bar{1}$·8431	13	$\bar{1}$·9874	25	0·0126	12	$\bar{1}$·8557	50′
20′	$\bar{1}$·8444	13	$\bar{1}$·9899	25	0·0101	13	$\bar{1}$·8545	40′
30′	$\bar{1}$·8457	12	$\bar{1}$·9924	25	0·0076	12	$\bar{1}$·8532	30′
40′	$\bar{1}$·8469	13	$\bar{1}$·9949	26	0·0051	13	$\bar{1}$·8520	20′
50′	$\bar{1}$·8482	13	$\bar{1}$·9975	25	0·0025	12	$\bar{1}$·8507	10′
45° 0′	$\bar{1}$·8495		0·0000		0·0000		$\bar{1}$·8495	0′ **45°**
	logcos	差	logcot	通差	logtan	差	logsin	角

P. P.

	26	25
1	2·6	2·5
2	5·2	5·0
3	7·8	7·5
4	10·4	10·0
5	13·0	12·5
6	15·6	15·0
7	18·2	17·5
8	20·8	20·0
9	23·4	22·5

	15
1	1·5
2	3·0
3	4·5
4	6·0
5	7·5
6	9·0
7	10·5
8	12·0
9	13·5

	14	13
1	1·4	1·
2	2·8	2·
3	4·2	3·
4	5·6	5·
5	7·0	6·
6	8·4	7·
7	9·8	9·
8	11·2	10·
9	12·6	11·

	12	11
1	1·2	1·
2	2·4	2·
3	3·6	3·
4	4·8	4·
5	6·0	5·
6	7·2	6·
7	8·4	7·
8	9·6	8·
9	10·8	9·

第　三。

三角函數之眞數表。

三角函數之眞數表

角	sin	tan	sec	cosec	cot	cos	
0° 0′	·0000	·0000	1·000	∞	∞	1·000	0′ 90°
10′	·0029	·0029	1·000	343·8	343·8	1·000	50′
20′	·0058	·0058	1·000	171·9	171·9	1·000	40′
30′	·0087	·0087	1·000	114·6	114·6	1·000	30′
40′	·0116	·0116	1·000	85·95	85·94	·9999	20′
50′	·0145	·0145	1·000	68·76	68·75	·9999	10′
1° 0′	·0175	·0175	1·000	57·30	57·29	·9998	0′ 89°
10′	·0204	·0204	1·000	49·11	49·10	·9998	50′
20′	0233	·0233	1·000	42·98	42·96	·9997	46′
30′	·0262	·0262	1·000	38·20	38·19	·9997	30′
40′	·0291	·0291	1·000	34·38	34·37	·9996	20′
50′	·0320	·0320	1·001	31·26	31·24	·9995	10′
2° 0′	·0349	·0349	1·001	28·65	28·64	·9994	0′ 88°
10′	·0378	·0378	1·001	26·45	26·43	·9993	50′
20′	·0407	·0407	1·001	24·56	24·54	·9992	40′
30′	·0436	·0437	1·001	22·93	22·90	·9990	30′
40′	·0465	·0466	1·001	21·49	21·47	·9989	20′
50′	·0494	·0495	1·001	20·23	20·21	·9988	10′
3° 0′	·0523	·0524	1·001	19·11	19·08	·9986	0′ 87°
10′	·0552	·0553	1·002	18·10	18·07	·9985	50′
20′	·0581	·0582	1·002	17·20	17·17	·9983	40′
30′	·0610	·0612	1·002	16·38	16·35	·9981	30′
40′	·0640	·0641	1·002	15·64	15·60	·9980	20′
50′	·0669	·0670	1·002	14·96	14·92	·9978	10′
4° 0′	·0698	·0699	1·002	14·34	14·30	·9976	0′ 86°
10′	·0727	·0729	1·003	13·76	13·73	·9974	50′
20′	·0756	·0758	1·003	13·23	13·20	·9971	40′
30′	·0785	·0787	1·003	12·75	12·71	·9969	30′
40′	·0814	·0816	1·003	12·29	12·25	·9967	20′
50′	·0843	·0846	1·004	11·87	11·83	·9964	10′
5° 0′	·0872	·0875	1·004	11·47	11·43	·9962	0′ 85°
	cos	cot	cosec	sec	tan	sin	角

三角函數之眞數表

角	sin	tan	sec	cosec	cot	cos	
5°0′	·0872	·0875	1·004	11·47	11·43	·9962	0′**85°**
10′	·0901	0904	1·004	11·10	11·06	·9959	50′
20′	·0929	0934	1·004	10·76	10·71	·9957	40′
30′	·0958	·0963	1·005	10·43	10·39	·9954	30′
40′	·0987	·0992	1·005	10·13	10·08	·9951	20′
50′	1016	·1022	1·005	9·839	9·788	·9948	10′
6°0′	·1045	·1051	1·006	9·567	9·514	·9945	0′**84°**
10′	·1074	·1080	1·006	9·309	9·255	·9942	50′
20′	·1103	·1110	1·006	9·065	9·010	·9939	40′
30′	·1132	·1139	1·006	8·834	8·777	·9936	30′
40′	·1161	·1169	1·007	8·614	8·556	·9932	20′
50′	·1190	·1198	1·007	8·405	8·345	·9929	10′
7°0′	·1219	·1228	1·008	8·206	8·144	·9925	0′**83°**
10′	·1248	·1257	1·008	8·016	7·953	·9922	50′
20′	·1276	·1287	1·008	7·834	7·770	·9918	40′
30′	·1305	·1317	1·009	7·661	7·596	·9914	30′
40′	·1334	·1346	1·009	7·496	7·429	·9911	20′
50′	·1363	·1376	1·009	7·337	7·269	·9907	10′
8°0′	·1392	·1405	1·010	7·185	7·115	·9903	0′**82°**
10′	·1421	·1435	1·010	7·040	6·968	·9899	50′
20′	·1449	·1465	1·011	6·900	6·827	·9894	40′
30′	·1478	·1495	1·011	6·765	6·691	·9890	30′
40′	·1507	·1524	1·012	6·636	6·561	·9886	20′
50′	·1536	·1554	1·012	6·512	6·435	·9881	10′
9°0′	·1564	·1584	1·012	6·392	6·314	·9877	0′**81°**
10′	·1593	·1614	1·013	6·277	6·197	·9872	50′
20′	·1622	·1644	1·013	6·166	6·084	·9868	40′
30′	·1650	·1673	1·014	6·059	5·976	·9863	30′
40′	·1679	·1703	1·014	5·955	5·871	·9858	20′
50′	·1708	·1733	1·015	5·855	5·769	·9853	10′
10°0′	·1736	·1763	1·015	5·759	5·671	·9848	0′**80°**
	cos	cot	cosec	sec	tan	sin	角

三角函數之眞數表

角	sin	tan	sec	cosec	cot	cos	
10° 0′	·1736	·1763	1·015	5·759	5·671	·9848	0′ **80°**
10′	·1765	·1793	1·016	5·665	5·576	·9843	50′
20′	·1794	·1823	1·016	5·575	5·485	·9838	40′
30′	·1822	·1853	1·017	5·487	5·396	·9833	30′
40′	·1851	·1883	1·018	5·403	5·309	·9827	20′
50′	·1880	·1914	1·018	5·320	5·226	·9822	10′
11° 0′	·1908	·1944	1·019	5·241	5·145	·9816	0′ **79°**
10′	·1937	·1974	1·019	5·164	5·066	·9811	50′
20′	·1965	·2004	1·020	5·089	4·989	·9805	40′
30′	·1994	·2035	1·020	5·016	4·915	·9799	30′
40′	·2022	·2065	1·021	4·945	4·843	·9793	20′
50′	·2051	·2095	1·022	4·876	4·773	·9787	10′
12° 0′	·2079	·2126	1·022	4·810	4·705	·9781	0′ **78°**
10′	·2108	·2156	1·023	4·745	4·638	·9775	50′
20′	·2136	·2186	1·024	4·682	4·574	·9769	40′
30′	·2164	·2217	1·024	4·620	4·511	·9763	30′
40′	·2193	·2247	1·025	4·560	4·449	·9757	20′
50′	·2221	·2278	1·026	4·502	4·390	·9750	10′
13° 0′	·2250	·2309	1·026	4·445	4·331	·9744	0′ **77°**
10′	·2278	·2339	1·027	4·390	4·275	·9737	50′
20′	·2306	·2370	1·028	4·336	4·219	·9730	40′
30′	·2334	·2401	1·028	4·284	4·165	·9724	30′
40′	·2363	·2432	1·029	4·232	4·113	·9717	20′
50′	·2391	·2462	1·030	4·182	4·061	·9710	10′
14° 0′	·2419	·2493	1·031	4·134	4·011	·9703	0′ **76°**
10′	·2447	·2524	1·031	4·086	3·962	·9696	50′
20′	·2476	·2555	1·032	4·039	3·914	·9689	40′
30′	·2504	·2586	1·033	3·994	3·867	·9681	30′
40′	·2532	·2617	1·034	3·950	3·821	·9674	20′
50′	·2560	·2648	1·034	3·906	3·776	·9667	10′
15° 0′	·2588	·2679	1·035	3·864	3·732	·9659	0′ **75°**
	cos	cot	cosec	sec	tan	sin	角

三角函數之眞數表

角	*sin*	*tan*	*sec*	*cosec*	*cot*	*cos*	
15° 0′	·2588	·2679	1·035	3·864	3·732	·9659	0′ **75°**
10′	·2616	·2711	1·036	3·822	3·689	·9652	50′
20′	·2644	·2742	1·037	3·782	3·647	·9644	40′
30′	·2672	·2773	1·038	3·742	3·606	·9636	30′
40′	·2700	·2805	1·039	3·703	3·566	·9628	20′
50′	·2728	·2836	1·039	3·665	3·526	·9621	10′
16° 0′	·2756	·2867	1·040	3·628	3·487	·9613	0′ **74°**
10′	·2784	·2899	1·041	3·592	3·450	·9605	50′
20′	·2812	·2931	1·042	3·556	3·412	·9596	40′
30′	·2840	·2962	1·043	3·521	3·376	·9588	30′
40′	·2868	·2994	1·044	3·487	3·340	·9580	20′
50′	·2896	·3026	1·045	3·453	3·305	·9572	10′
17° 0′	·2924	·3057	1·046	3·420	3·271	·9563	0′ **73°**
10′	·2952	·3089	1·047	3·388	3·237	·9555	50′
20′	·2979	·3121	1·048	3·356	3·204	·9546	40′
30′	·3007	·3153	1·049	3·326	3·172	·9537	30′
40′	·3035	·3185	1·049	3·295	3·140	·9528	20′
50′	·3062	·3217	1·050	3·265	3·108	·9520	10′
18° 0′	·3090	·3249	1·051	3·236	3·078	·9511	0′ **72°**
10′	·3118	·3281	1·052	3·207	3·047	·9502	50′
20′	·3145	·3314	1·053	3·179	3·018	·9492	40′
30′	·3173	·3346	1·054	3·152	2·989	·9483	30′
40′	·3201	·3378	1·056	3·124	2·960	·9474	20′
50′	·3228	·3411	1·057	3·098	2·932	·9465	10′
19° 0′	·3256	·3443	1·058	3·072	2·904	·9455	0′ **71°**
10′	·3283	·3476	1·059	3·046	2·877	·9446	50′
20′	·3311	·3508	1·060	3·021	2·850	·9436	40′
30′	·3338	·3541	1·061	2·996	2·824	·9426	30′
40′	·3365	·3574	1·062	2·971	2·798	·9417	20′
50′	·3393	·3607	1·063	2·947	2·773	·9407	10′
20° 0′	·3420	·3640	1·064	2·924	2·747	·9397	0′ **70°**
	cos	*cot*	*cosec*	*sec*	*tan*	*sin*	角

三角函數之眞數表

角	*sin*	*tan*	*sec*	*cosec*	*cot*	*cos*	
20° 0′	·3420	·3640	1·064	2·924	2·747	·9397	0′ **70°**
10′	·3448	·3673	1·065	2·901	2·723	·9387	50′
20′	·3475	·3706	1·066	2·878	2·699	·9377	40′
30′	·3502	·3739	1·068	2·855	2·675	·9367	30′
40′	·3529	·3772	1·069	2·833	2·651	·9356	20′
50′	·3557	·3805	1·070	2·812	2·628	·9346	10′
21° 0′	·3584	·3839	1·071	2·790	2·605	·9336	0′ **69°**
10′	·3611	·3872	1·072	2·769	2·583	·9325	50′
20′	·3638	·3906	1·074	2·749	2·560	·9315	40′
30′	·3665	·3939	1·075	2·729	2·539	·9304	30′
40′	·3692	·3973	1·076	2·709	2·517	·9293	20′
50′	·3719	·4006	1·077	2·689	2·496	·9283	10′
22° 0′	·3746	·4040	1·079	2·669	2·475	·9272	0′ **68°**
10′	·3773	·4074	1·080	2.650	2·455	·9261	50′
20′	·3800	·5108	1·081	2·632	2·434	·9250	40′
30′	·3827	·4142	1·082	2·613	2·414	·9239	30′
40′	·3854	·4176	1·084	2·595	2·394	·9228	20′
50′	·3881	·4210	1·085	2·577	2·375	·9216	10′
23° 0′	·3907	·4245	1·086	2·559	2·356	·9205	0′ **67°**
10′	·3934	·4279	1·088	2·542	2·337	·9194	50′
20′	·3961	·4314	1·089	2·525	2·318	·9182	40′
30′	·3987	·4348	1·090	2·508	2·300	·9171	30′
40′	·4014	·4383	1·092	2·491	2·282	·9159	20′
50′	·4041	·4417	1·093	2·475	2·264	·9147	10′
24° 0′	·4067	·4452	1·095	2·459	2·246	·9135	0′ **66°**
10′	·4094	·4487	1·096	2·443	2·229	·9124	50′
20′	·4120	·4522	1·097	2·427	2·211	·9112	40′
30′	·4147	·4557	1·099	2·411	2·194	·9100	30′
40′	·4173	·4592	1·100	2·396	2·177	·9088	20′
50′	·4200	·4628	1·102	2·381	2·161	·9075	10′
25° 0′	·4226	·4663	1·103	2·366	2·145	·9063	0′ **65°**
	cos	*cot*	*cosec*	*sec*	*tan*	*sin*	角

三角函數之眞數表

角	*sin*	*tan*	*sec*	*cosec*	*cot*	*cos*	
25° 0′	·4226	·4663	1·103	2·366	2·145	·9063	0′ **65°**
10′	·4253	·4699	1·105	2·352	2·128	·9051	50′
20′	·4279	·4734	1·106	2·337	2·112	·9038	40′
30′	·4305	·4770	1·108	2·323	2·097	·9026	30′
40′	·4331	·4806	1·109	2·309	2·081	·9013	20′
50′	·4358	·4841	1·111	2·295	2·066	·9001	10′
26° 0′	·4384	·4877	1·113	2·281	2·050	·8988	0′ **64°**
10′	·4410	·4913	1·114	2·268	2·035	·8975	50′
20′	·4436	·4950	1·116	2·254	2·020	·8962	40′
30′	·4462	·4986	1·117	2·241	2·006	·8949	30′
40′	·4488	·5022	1·119	2·228	1·991	·8936	20′
50′	·4514	·5059	1·121	2·215	1·977	·8923	10′
27° 0′	·4540	·5095	1·122	2·203	1·963	·8910	0′ **63**
10′	·4566	·5132	1·124	2·190	1·949	·8897	50′
20′	·4592	·5169	1·126	2·178	1·935	·8884	40′
30′	·4617	·5206	1·127	2·166	1·921	·8870	30′
40′	·4643	·5243	1·129	2·154	1·907	·8857	20′
50′	·4669	·5280	1·131	2·142	1·894	·8843	10′
28° 0′	·4695	·5317	1·133	2·130	1·881	·8829	0′ **62°**
10′	·4720	·5354	1·134	2·118	1·868	·8816	50′
20′	·4746	·5392	1·136	2·107	1·855	·8802	40′
30′	·4772	·5430	1·138	2·096	1·842	·8788	30′
40′	·4797	·5467	1·140	2·085	1·829	·8774	20′
50′	·4823	·5505	1·142	2·074	1·816	·8760	10′
29° 0′	·4848	·5543	1·143	2·063	1·804	·8746	0′ **61°**
10′	·4874	·5581	1·145	2·052	1·792	·8732	50′
20′	·4899	·5619	1·147	2·041	1·780	·8718	40′
30′	·4924	·5658	1·149	2·031	1·767	·8704	30′
40′	·4950	·5696	1·151	2·020	1·756	·8689	20′
50′	·4975	·5735	1·153	2·010	1·744	·8675	10′
30° 0′	·5000	·5774	1·155	2·000	1·732	·8660	0′ **60°**
	cos	*cot*	*cosec*	*sec*	*tan*	*sin*	角

三角函數之眞數表

角	sin	tan	sec	cosec	cot	cos	
30° 0′	·5000	·5774	1·155	2·000	1·732	·8660	0′ **60°**
10′	·5025	·5812	1·157	1·990	1·720	·8646	50′
20′	·5050	·5851	1·159	1·980	1·709	·8631	40′
30′	·5075	·5890	1·161	1·970	1·698	·8616	30′
40′	·5100	·5930	1·163	1·961	1·686	·8601	20′
50′	·5125	·5969	1·165	1·951	1·675	·8587	10′
31° 0′	·5150	·6009	1·167	1·942	1·664	·8572	0′ **59°**
10′	·5175	·6048	1·169	1·932	1·653	·8557	50′
20′	·5200	·6088	1·171	1·923	1·643	·8542	40′
30′	·5225	·6128	1·173	1·914	1·632	·8526	30′
40′	·5250	·6168	1·175	1·905	1·621	·8511	20′
50′	·5275	·6208	1·177	1·896	1·611	·8496	10′
32° 0′	·5299	·6249	1·179	1·887	1·600	·8480	0′ **58°**
10′	·5324	·6289	1·181	1·878	1·590	·8465	50′
20′	·5348	·6330	1·184	1·870	1·580	·8450	40′
30′	·5373	·6371	1·186	1·861	1·570	·8434	30′
40′	·5398	·6412	1·188	1·853	1·560	·8418	20′
50′	·5422	·6453	1·190	1·844	1·550	·8403	10′
33° 0′	·5446	·6494	1·192	1·836	1·540	·8387	0′ **57°**
10′	·5471	·6536	1·195	1·828	1·530	·8371	50′
20′	·5495	·6577	1·197	1·820	1·520	·8355	40′
30′	·5519	·6619	1·199	1·812	1·511	·8339	30′
40′	·5544	·6661	1·202	1·804	1·501	·8323	20′
50′	·5568	·6703	1·204	1·796	1·492	·8307	10′
34° 0′	·5592	·6745	1·206	1·788	1·483	·8290	0′ **56°**
10′	·5616	·6787	1·209	1·781	1·473	·8274	50′
20′	·5640	·6830	1·211	1·773	1·464	·8258	40′
30′	·5664	·6873	1·213	1·766	1·455	·8241	30′
40′	·5688	·6916	1·216	1·758	1·446	·8225	20′
50′	·5712	·6959	1·218	1·751	1·437	·8208	10
35° 0′	·5736	·7002	1·221	1·743	1·428	·8192	0′ **55°**
	cos	cot	cosec	sec	tan	sin	角

三角函數之眞數表

角	sin	tan	sec	cosec	cot	cos	
35° 0′	·5736	·7002	1·221	1·743	1·428	·8192	0′ **55°**
10′	·5760	·7046	1·223	1·736	1·419	·8175	50′
20′	·5783	·7089	1·226	1·729	1·411	·8158	40′
30′	·5807	·7133	1·228	1·722	1·402	·8141	30′
40′	·5831	·7177	1·231	1·715	1·393	·8124	20′
50′	·5854	·7221	1·233	1·708	1·385	·8107	50′
36° 0′	·5878	·7265	1·236	1·701	1·376	·8090	0′ **54°**
10′	·5901	·7310	1·239	1·695	1·368	·8073	50′
20′	·5925	·7355	1·241	1·688	1·360	·8056	40′
30′	·5948	·7400	1·244	1·681	1·351	·8039	30′
40′	·5972	·7445	1·247	1·675	1·343	·8021	20′
50′	·5995	·7490	1·249	1·668	1·335	·8004	10′
37° 0′	·6018	·7536	1·252	1·662	1·327	·7986	0′ **53°**
10′	·6041	·7581	1·255	1·655	1·319	·7969	50′
20′	·6065	·7627	1·258	1·649	1·311	·7951	40′
30′	·6088	·7673	1·260	1·643	1·303	·7934	30′
40′	·6111	·7720	1·263	1·636	1·295	·7916	20′
50′	·6134	·7766	1·266	1·630	1·288	·7898	10′
38° 0′	·6157	·7813	1·269	1·624	1·280	·7880	0′ **52°**
10′	·6180	·7860	1·272	1·618	1·272	·7862	50′
20′	·6202	·7907	1·275	1·612	1·265	·7844	40′
30′	·6225	·7954	1·278	1·606	1·257	·7826	30′
40′	·6248	·8002	1·281	1·601	1·250	·7808	20′
50′	·6271	·8050	1·284	1·595	1·242	·7790	10′
39° 0′	·6293	·8098	1·287	1·589	1·235	·7771	0′ **51°**
10′	·6316	·8116	1·290	1·583	1·228	·7753	50′
20′	·6338	·8195	1·293	1·578	1·220	·7735	40′
30′	·6361	·8243	1·296	1·572	1·213	·7716	30′
40′	·6383	·8292	1·299	1·567	1·206	·7698	20′
50′	·6406	·8342	1·302	1·561	1·199	·7679	10′
40° 0′	·6428	·8391	1·305	1·556	1·192	·7660	0′ **50°**
	cos	cot	cosec	sec	tan	sin	角

三角函數之眞數表

角	sin	tan	sec	cosec	cot	cos	
40° 0′	·6428	·8391	1·305	1·556	1·192	·7660	0′ **50°**
10′	·6450	·8441	1·309	1·550	1·185	·7642	50′
20′	·6472	·8491	1·312	1·545	1·178	·7623	40′
30′	·6494	·8541	1·315	1·540	1·171	·7604	30′
40′	·6517	·8591	1·318	1·535	1·164	·7585	20′
50′	·6539	·8642	1·322	1·529	1·157	·7566	10′
41° 0′	·6561	·8693	1·325	1·524	1·150	·7547	0′ **49°**
10′	·6583	·8744	1·328	1·519	1·144	·7528	50′
20′	·6604	·8796	1·332	1·514	1·137	·7509	40′
30′	·6626	·8847	1·335	1·509	1·130	·7490	30′
40′	·6648	·8899	1·339	1·504	1·124	·7470	20′
50′	·6670	·8952	1·342	1·499	1·117	·7451	10′
42° 0′	·6691	·9004	1·346	1·494	1·111	·7431	0′ **48°**
10′	·6713	·9057	1·349	1·490	1·104	·7412	50′
20′	·6734	·9110	1·353	1·485	1·098	·7392	40′
30′	·6756	·9163	1·356	1·480	1·091	·7373	30′
40′	·6777	·9217	1·360	1·476	1·085	·7353	20′
50′	·6799	·9271	1·364	1·471	1·079	·7333	10′
43° 0′	·6820	·9325	1·367	1·466	1·072	·7314	0′ **47°**
10′	·6841	·9380	1·371	1·462	1·066	·7294	50′
20′	·6862	·9435	1·375	1·457	1·060	·7274	40′
30′	·6884	·9490	1·379	1·453	1·054	·7254	30′
40′	·6905	·9545	1·382	1·448	1·048	·7234	20′
50′	·6926	·9601	1·386	1·444	1·042	·7214	10′
44° 0′	·6947	·9657	1·390	1·440	1·036	·7193	0′ **46°**
10′	·6967	·9713	1·394	1·435	1·030	·7173	50′
20′	·6988	·9770	1·398	1·431	1·024	·7153	40′
30′	·7009	·9827	1·402	1·427	1·018	·7133	30′
40′	·7030	·9884	1·406	1·423	1·012	·7112	20′
50′	·7050	·9942	1·410	1·418	1·006	·7092	10′
45° 0′	·7071	1·000	1·414	1·414	1·000	·7071	0′ **45°**
	cos	cot	cosec	sec	tan	sin	角

第　四。

用　法　之　例。

第一. 求數之對數法.

例.

求 $\log 238{\cdot}4$

$$\begin{array}{ll} \log 238{\cdot}0 = 2{\cdot}3766 & (\text{於 2 頁}) \\ \quad\quad {\cdot}4 \ldots\ldots\ 7{\cdot}2 & (\text{於 P.P. 18}) \\ \hline \log 238{\cdot}4 = 2{\cdot}3773 & \end{array}$$

〔注意〕 因 18 爲 P.P. 欄中所無。故用 19, 17 欄之對於 4 之比例部分之平均數。

第二. 知數之對數求其數之法.

例.

求 $\log^{-1}\bar{2}{\cdot}7054$

$$\begin{array}{lll} \log^{-1}\bar{2}{\cdot}7050 & = 0{\cdot}0507 & (\text{於 3 頁}) \\ \quad 3{\cdot}6 \ldots\ldots\ldots\ldots & 0{\cdot}4 & \\ & & (\text{於 P.P. 9}) \\ \quad 0{\cdot}36 \ldots\ldots\ldots\ldots & 0{\cdot}04 & \\ \hline \log^{-1}\bar{2}{\cdot}7054 & = 0{\cdot}05074 & \end{array}$$

第三. 求角之三角函數之對數法.

例.

1. 求 $\log\tan 28^\circ 43'{\cdot}7$

$$\log\tan 28^\circ 40' \quad = \bar{1}\cdot 7378 \quad (\text{於 } 11 \text{ 頁})$$

$$\begin{array}{r} 3' \ldots\ldots\ldots 9 \\ 0'\cdot 7 \ldots\ldots\ldots 2\cdot 1 \end{array} \quad (\text{於 P.P. } 30)$$

$$\log\tan 28^\circ 43'\cdot 7 = \bar{1}\cdot 7389$$

2\. 求 $\log\sec 76^\circ 18'\cdot 7$

$$\log\cos 76^\circ 10' \quad = \bar{1}\cdot 3786 \quad (\text{於 } 8 \text{ 頁})$$

$$\begin{array}{r} 8' \ldots\ldots -41\cdot 6 \\ 0'\cdot 7 \ldots\ldots -3\cdot 64 \end{array} \quad (\text{於 P.P. } 52)$$

$$\log\cos 76^\circ 18'\cdot 7 = \bar{1}\cdot 3741$$

$$\log\sec 76^\circ 18'\cdot 7 = 0\cdot 6259$$

3\. 求 $\log\sin 2^\circ 34'\cdot 6$

$$2^\circ 34'\cdot 6 = 154'\cdot 6$$

$$\log\sin a' = \log a + \bar{4}\cdot 4637 + \frac{1}{3}\log\cos a' \quad (\text{於 } 6 \text{ 頁})$$

$$\log\cos 154'\cdot 6 = \underline{\bar{1}\cdot 9996}(3$$

$$\left.\begin{array}{r} \bar{1}\cdot 9999 \\ \bar{4}\cdot 4637 \\ \log 154\cdot 6 = 2\cdot 1892 \end{array}\right\} +$$

$$\log\sin 154'\cdot 6 = \bar{2}\cdot 6528$$

第四. 知角之三角函數之對數求其角之法.

例.

1. 求 $(\log\cot)^{-1}\bar{1}\cdot4995$

$(\log\cot)^{-1}\bar{1}\cdot5031 \quad =72^\circ\,20'$ (於 9 頁)

$-35\cdot2\ldots\ldots\ldots8'$ (於 P.P. 44)

$-0\cdot88\ldots\ldots\ldots0'\cdot2$

$(\log\cot)^{-1}\bar{1}\cdot4955 \quad =72^\circ\,28'\cdot2$

2. 求 $(\log\mathrm{cosec})^{-1}0\cdot2811$

$(\log\mathrm{cosec})^{-1}0.2811=(\log\sin)^{-1}\bar{1}\cdot7189$

$(\log\sin)^{-1}\bar{1}7181=31^\circ\,30'$ (於 12 頁)

$8\ldots\ldots\ldots4'$ (於 P.P. 20)

$\log\sin)^{-1}\bar{1}\cdot7189=31^\circ\,34'$

3. 求 $(\log\tan)^{-1}\bar{2}\cdot8882$

$\log a=\log\tan a'-\bar{4}\cdot4637+\frac{2}{3}\log\cos a'$ (於 6 頁)

$$\begin{array}{rl}
\log\cos a'=\bar{1}\cdot9987 & \\
2 & \\
\hline
\bar{1}\cdot9974(3 & \\
\hline
\bar{1}\cdot9991 & \\
=\bar{4}\cdot4637=3\;5363 & + \\
\log\tan a'=\bar{2}\cdot8882 & \\
\hline
\log a=2.4236 &
\end{array}$$

$a'=265'\cdot2=4^\circ25'\cdot2$

第五. 求角之三角函數之法.

例.

求 $\sin 36^\circ\ 32'{\cdot}6$

第一法.

$\log\sin 36^\circ\ 30' \quad = \bar{1}{\cdot}7744$ (於 13 頁)

$2' \ldots\ldots\ldots\ldots\ 3\ 4$ (於 P.P. 17)

$0'{\cdot}6.\ \ldots\ldots\ldots\ 1{\cdot}02$

$\log\sin 36^\circ 32'\ 6 = \bar{1}{\cdot}7748$

$\sin 36^\circ\ 32'{\cdot}6 \ = 0{\cdot}5954$ (於 3 頁)

第二法.

$\sin 36^\circ\ 30' \quad = 0{\cdot}5948$ (於 23 頁)

$2'{\cdot}6 \ldots\ldots\ldots\ 6$ $\left(24 \times \frac{2{\cdot}6}{10} = 6\right)$

$\sin 36^\circ \quad 32{\cdot}6 = 0{\cdot}5954$

第六. 知角之三角函數。求其角之法

例.

求 $\cot^{-1} 0{\cdot}7463$

第一法.

$\log 0{\cdot}7463 = \bar{1}{\cdot}8729$ (於 4 頁)

$\therefore \quad \cot^{-1}0{\cdot}7463 = (\log\cot)^{-1}\bar{1}{\cdot}8729$

$(\log\cot)^{-1}\bar{1}{\cdot}8745 \quad = 53^\circ\,10'$ (於 13 頁)

$\quad -16{\cdot}2\ldots\ldots\ldots 6'$ (於 P.P. 27)

$(\log\cot)^{-1}\bar{1}{\cdot}8729 \quad = 53^\circ\,16'$

第二法.

$\cot^{-1}0{\cdot}7490 = 53^\circ\,10'$ (於 23 頁)

$-27\ldots\ldots 6'$

$\cot^{-1}0.7463 = 53^\circ 16' \quad \left(\frac{27}{45} \times 10 = 6\right)$

VOCABULARY. 語彙

Ambiguous case, 兩意之例.
Angle of depression, 俯角.
Angle of elevation, 仰角,高度.
Base, 底.
Base line, 基線. (底線)
Characteristic, 指標.
Circular measure, 弧度.
Common logarithms, 常用對數.
Compass, 羅針盤.
Complement (of angle), 餘角.
Cosecant, 餘割.
Cosine, 餘弦.
Cotangent, 餘切.
Degree, 度.
Horizontal angle, 水平角.
Horizontal line, 水平線.
Horizontal plane, 水平面.
Logarithms, 對數.
Mantissa, 假數.
Plane Trigonometry, 平面三角法.
Plumb-line, 鉛垂線.
Quadrant, 分面
Radian, 本位弧.
Secant, 正割.
Sexagesimal method, 常度, 六十分法.
Sine, 正弦.
Supplement (of angle), 補角.
Surveyors' chain, 測鎖.
Tangent, 正切.
Theodolite, 經緯儀.
Transit, 紀限儀.
Triangle, 三角形.
Trigonometrical functions, 三角函數.
Vertical angle, 垂直角.
Vertical line, 垂直線.
Vertical plane, 垂直面.

中等數科　平面三角法備用公式

角之測法

常度法

直角　度　分　秒

$1=90=5400=324000$

$1=60=3600$

$1=60$

常度與百分度之比較

$60:10::a:\pi$

三角函數之定義

sin A＝垂線÷斜邊
cos A＝底邊÷斜邊
tan A＝垂線÷底邊
cosec A＝斜邊÷垂線
sec A＝斜邊÷底邊
cot A＝底邊÷垂線

由定義推知之三角函數之關係

$\sin A\times\operatorname{cosec} A=1$

$\cos A\times\sec A=1$

$\tan A\times\cot A=1$

$\sin^2A+\cos^2A=1$

$1+\tan^2A=\sec^2A$

$1+\cot^2A=\operatorname{cosec}^2A$

$\tan A=\dfrac{\sin A}{\cos A}$　$\cot A=\dfrac{\cos A}{\sin A}$

二角之和爲 90° 或 180° 由是兩兩互爲餘角或爲補角

餘角之三角函數

$\sin(90^\circ-A)=\cos A$

$\cos(90^\circ-A)=\sin A$

$\tan(90^\circ-A)=\cot A$

$\cot(90^\circ-A)=\tan A$

$\sec(90^\circ-A)=\operatorname{cosec} A$

$\operatorname{cosec}(90^\circ-A)=\sec A$

補角之三角函數

$\sin(180^\circ-A)=\sin A$

$\cos(180^\circ-A)=-\cos A$

$\tan(180^\circ-A)=-\tan A$

$\operatorname{cosec}(180^\circ-A)=\operatorname{cosec} A$

$\sec(180^\circ-A)=-\sec A$

$\cot(180^\circ-A)=-\cot A$

負角之三角函數

$\sin(-A)=-\sin A$

$\cos(-A)=\cos A$

$\tan(-A)=-\tan A$

$\operatorname{cosec}(-A)=-\operatorname{cosec} A$

$\sec(-A)=\sec A$

$\cot(-A)=-\cot A$

相差 90° 之二角之三角函數

$\sin(90^\circ+A)=\cos A$

$\cos(90^\circ+A)=-\sin A$

$\tan(90^\circ+A)=-\cot A$

$\operatorname{cosec}(90^\circ+A)=\sec A$

$\sec(90^\circ+A)=-\operatorname{cosec} A$

$\cot(90^\circ+A)=-\tan A$

相差 180° 之二角之三角函數

$\sin(180^\circ+A)=-\sin A$

$\cos(180^\circ+A)=-\cos A$

$\tan(180^\circ+A)=\tan A$

$\operatorname{cosec}(180^\circ+A)=-\operatorname{cosec} A$

$\sec(180^\circ+A)=-\sec A$

$\cot(180^\circ+A)=\cot A$

其和或差爲 270° 之二角之三角函數

$\sin(270^\circ-A)=-\cos A$

$\cos(270^\circ-A)=-\sin A$

$\tan(270^\circ-A)=\cot A$

$\operatorname{cosec}(270^\circ-A)=-\sec A$

$\sec(270^\circ-A)=-\operatorname{cosec} A$

$\cot(270^\circ-A)=\tan A$

$\sin(270^\circ+A)=-\cos A$

$\cos(270^\circ+A)=\sin A$

$\tan(270^\circ+A)=-\cot A$

$\operatorname{cosec}(270^\circ+A)=-\sec A$

$\sec(270^\circ+A)=\operatorname{cosec} A$

$\cot(270^\circ+A)=-\tan A$

其和爲 360° 之二角之三角函數

$\sin(360^\circ-A)=-\sin A$

$\cos(360^\circ-A)=\cos A$

$\tan(360^\circ-A)=-\tan A$

$\operatorname{cosec}(360^\circ-A)=-\operatorname{cosec} A$

$\sec(360^\circ-A)=\sec A$

$\cot(360^\circ-A)=-\cot A$

二角之三角函數

$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

$\sin(A-B)=\sin A\cos B-\cos A\sin B$

$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

$\cos(A-B)=\cos A\cos B+\sin A\sin B$

$$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$$

$$\tan(A-B)=\frac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$$

$$\cot(A+B)=\frac{\cot A\cot B-1}{\cot A+\cot B}$$

$$\cot(A-B)=\frac{\cot A\cot B+1}{\cot B-\cot A}$$

$\sin(A+B)+\sin(A-B)=2\sin A\cos B$

$\sin(A+B)-\sin(A-B)=2\cos A\sin B$

$\cos(A+B)+\cos(A-B)=2\cos A\cos B$

$\cos(A-B)-\cos(A+B)=2\sin A\sin B$

$$\sin S+\sin T=2\sin\frac{S+T}{2}\cos\frac{S-T}{2}$$

$$\sin S-\sin T=2\cos\frac{S+T}{2}\sin\frac{S-T}{2}$$

$$\cos S+\cos T=2\cos\frac{S+T}{2}\cos\frac{S-T}{2}$$

$$\cos T-\cos S=2\sin\frac{S+T}{2}\sin\frac{S-T}{2}$$

倍角之三角函數

$\sin 2A=2\sin A\cos A$

$\cos 2A=\cos^2A-\sin^2A$

$=2\cos^2A-1=1-2\sin^2A$

$$\tan 2A=\frac{2\tan A}{1-\tan^2A}$$

$$\cot 2A=\frac{\cot^2A-A}{2\cot A}$$

$\sin 3A=3\sin A-4\sin^3A$

$\cos 3A=4\cos^3A-3\cos A$

$$\tan 3A=\frac{3\tan A-\tan^3A}{1-3\tan^2A}$$

$$\cot 3A=\frac{\cot^3A-3\cot A}{3\cot^2A-1}$$

分角之三角函數

$$\cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$$

$$\sin\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$$

$$2\cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{1+\sin A}\pm\sqrt{1-\sin A}$$

$$2\sin\frac{A}{2}=\pm\sqrt{1+\sin A}\mp\sqrt{1-\sin A}$$

$$\sqrt{2}\sin\left(\frac{A}{2}+45^\circ\right)=\pm\sqrt{1+\sin A}$$

$$\sqrt{2}\cos\left(\frac{A}{2}+45^\circ\right)=\pm\sqrt{1+\sin A}$$

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+\tan^2A}}{\tan A}$$

$$=(-1\pm\sec A)\cot A$$

與所設之角 A 同之一切三角函數

$\cos(n\,.\,360^\circ\pm A)=\cos A$

$\sin[m\,.\,180^\circ+(-1)^mA]=\sin A$

$\tan(m\,.\,180^\circ+A)=\tan A$

75° 及 15° 之三角函數

$$\sin 75^\circ=\cos 15^\circ=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$$\cos 75^\circ=\sin 15^\circ=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

$$\tan 75^\circ=\cot 15^\circ=2+\sqrt{3}.$$

三角形上邊與角之關係

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

$$\left.\begin{aligned}a&=b\cos C+c\cos B\\ b&=c\cos A+a\cos C\\ c&=a\cos B+b\cos A\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}a^2&=b^2+c^2-2bc\cos A\\ b^2&=c^2+a^2-2ca\cos B\\ c^2&=a^2+b^2-2ab\cos C\end{aligned}\right\}$$

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

$$\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}$$

$$\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

$$\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}$$

$$\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$$

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

$$\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}$$

$$\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$$

$$(b+c)\sin\tfrac{1}{2}A=a\cos\tfrac{1}{2}(B-C)$$

$$\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}=\tan\frac{B-C}{2}$$

$$\frac{c-a}{c+a}\cot\frac{B}{2}=\tan\frac{C-A}{2}$$

$$\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}=\tan\frac{A-B}{2}$$

三角形之面積

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C$$

$$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

但　$s=\dfrac{1}{2}(a+b+c).$

18° 及 72° 之三角函數

$$\sin 18^\circ=\cos 72^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

$$\cos 18^\circ=\sin 72^\circ=\frac{\sqrt{(10+2\sqrt{5})}}{4}$$

三角函數之正負

函數＼分面	I.	II.	III.	VI.
sin. 及 cosec.	+	+	−	−
cos. 及 sec	+	−	−	+
tan. 及 cot.	+	−	+	−

三角函數之大之變化

sin. 及 cos. 於絕對值常在 0 及 1 之間

tan. 及 cot. 於絕對值常在 0 及 ∞ 之間

sec. 及 cosec. 於絕對值常在 1 及 ∞ 之間

以任意之三角函數表其他諸式

	sin.	cos.	tan.	cosec.	sec.	cot.
$\sin\theta=$	$\sin\theta$	$\sqrt{(1-\cos^2\theta)}$	$\dfrac{\tan\theta}{\sqrt{(1+\tan^2\theta)}}$	$\dfrac{1}{\operatorname{cosec}\theta}$	$\dfrac{\sqrt{(\sec^2\theta-1)}}{\sec\theta}$	$\dfrac{1}{\sqrt{(\cot^2\theta+1)}}$
$\cos\theta=$	$\sqrt{(1-\sin^2\theta)}$	$\cos\theta$	$\dfrac{1}{\sqrt{(1+\tan^2\theta)}}$	$\dfrac{\sqrt{(\operatorname{cosec}^2\theta-1)}}{\operatorname{cosec}\theta}$	$\dfrac{1}{\sec\theta}$	$\dfrac{\cot\theta}{\sqrt{(\cot^2\theta+1)}}$
$\tan\theta=$	$\dfrac{\sin\theta}{\sqrt{(1-\sin^2\theta)}}$	$\dfrac{\sqrt{(1-\cos^2\theta)}}{\cos\theta}$	$\tan\theta$	$\dfrac{1}{\sqrt{(\operatorname{cosec}^2\theta-1)}}$	$\sqrt{(\sec^2\theta-1)}$	$\dfrac{1}{\cot\theta}$
$\operatorname{cosec}\theta=$	$\dfrac{1}{\sin\theta}$	$\dfrac{1}{\sqrt{(1-\cos^2\theta)}}$	$\dfrac{\sqrt{(1+\tan^2\theta)}}{\tan\theta}$	$\operatorname{cosec}\theta$	$\dfrac{\sec\theta}{\sqrt{(\sec^2\theta-1)}}$	$\sqrt{(\cot^2\theta+1)}$
$\sec\theta=$	$\dfrac{1}{\sqrt{(1-\sin^2\theta)}}$	$\dfrac{1}{\cos\theta}$	$\sqrt{1+\tan^2\theta}$	$\dfrac{\operatorname{cosec}\theta}{\sqrt{(\operatorname{cosec}^2\theta-1)}}$	$\sec\theta$	$\dfrac{\sqrt{(\cot^2\theta+1)}}{\cot\theta}$
$\cot\theta=$	$\dfrac{\sqrt{(1-\sin^2\theta)}}{\sin\theta}$	$\dfrac{\cos\theta}{\sqrt{(1-\cos^2\theta)}}$	$\dfrac{1}{\tan\theta}$	$\sqrt{(\operatorname{cosec}^2\theta-1)}$	$\dfrac{1}{\sqrt{(\sec^2\theta-1)}}$	$\cot\theta$

三角函數之大

函數＼度	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	度／函數
sin.	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	正弦
cos.	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	−1	餘弦
tan.	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	−1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	正切
cosec.	∞	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞	餘割
sec.	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	∞	−2	$-\sqrt{2}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	−1	正割
cot.	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	−1	$-\sqrt{3}$	∞	餘切

◎本會出版書目

◎修身書

教育普通 修身教科書 全五册（編輯中）

◎名學書

教育中等 名學教科書 定價一元 連江陳文編

名學釋例 定價一元 連江陳文編

◎數學書

（一）算術

小學高等 算術教科書 全四册 每册二角 陳文 河崇證 合著

小學高等 算術教授法 全四册 每册四角 陳文 阿崇證 合著

適用中學 算術教科書 定價一元三角 連江陳文編

文陳 中學算術解法（印刷中）

（二）代數學

斯密查理 小代數學 定價一元五角 連江陳文譯

斯密查理 小代數學解式 定價八角 歸順曾彥譯

兼用教科 初等自修代數學 定價一元二角 歸順曾彥編

斯密查理 大代數學 卷上 定價一元 陳文 河崇證 合譯

中等教育 幾何學教科書 立體之部 定價五角 南海何崇禮編

中等教育 幾何學教科書 平面之部 定價一元 南海何崇禮編

溫特渥斯 立體幾何學解法 定價六角 武康魏鏡譯

溫特渥斯 平面幾何學解法 定價八角 武康魏鏡譯

溫特渥斯 立體幾何學 定價一元 桂林馬君武譯

溫特渥斯 平面幾何學 定價壹元二角 桂林馬君武譯

（三）幾何學

査理斯密 大代數學解式 歸願曾彥譯

査理斯密 大代數學 卷下 定價一元二角 連江陳文譯

査理斯密 大代數學 卷中 定價一元 陳文 河崇禮 合譯

溫特渥斯 平面三角法 寧河周永碁譯 （譯述中）

高等數學 平面三角法 定價一元五角 義烏龔文凱譯

陳文 平面三角設題解法 石印 定價三角 長沙黃隆演

葛藍蔚爾 球面三角法 定價六角 餘姚史青譯

中等教科 平面三角法 定價六角 連江陳文編

（四）三角法

圖學教科 平面幾何畫法 定價九角 桂林何錫齡編

幾何學初等教科書 定價五角 歸願曾彥譯

何崇禮 立體幾何問題解法（演述中）

何崇禮 平面幾何問題解法 定價八角 長沙王辟六演

賓氏奧斯 積分學解法 定價參角

賓氏奧斯 微分學解法 石印 定價四角 禹航王燕演

賓氏奧斯 積分學 定價一元 香山鄭家斌譯

賓氏奧斯 微分學 定價一元五角 李德晉 鄭家斌合譯

(六) 微分積分學

美國斯密氏及改勒 解析幾何學原理 (印刷中) 義烏龔文凱譯

溫特渥斯 解析幾何學解法 二冊石印 定價六角 禹航王燕演

溫特渥斯 解析幾何學 定價一元五角 香山鄭家斌譯

(五) 解析幾何學

球面三角法講義 (印刷中) 虎南鍾撝靈譯

倫孫氏 中等化學教科書 定價一元二角 桂林馬君武譯

高等 物理學教科書 (譯述中)

司坦原著 德國勞恩 實用力學 定價一元 桂林馬君武譯

新編 初等重學 定價一元 崑山朱文熊譯

中等教科 新式物理學 定價二元 連江陳文綱

理化書

數學遊戲 甯河周永蓉著

數學辭書 南海何崇禮譯

(七) 數學總記

德國培特季著 微分方程式 (印刷中) 桂林馬君武譯

普通教育 生理衛生學 定價六角 歸順曾彥編

普通教育 動物學教科書 定價六角 歸順曾彥編

普通教育 植物學教科書 定價五角 歸順曾彥編

中等博物教科 生理衛生學 定價九角 桂林陳用光編

中等博物教科 鑛物學 定價六角 桂林陳用光編

中等博物教科 動物學 定價一元 靈川秦嗣宗編

中等博物教科 植物學 定價一元五角 桂林李天佐編

德國胡沙克博士著 鑛物學 定價一元 桂林馬君武譯

◎博物書

韓德生 馬福生 最新實驗化學 定價七角 餘姚史青譯

漢譯 斐德烈斯 第三英文典 定價一元五角 南海何崇禮譯

◎外國語書

中等教科 國文讀本（編輯中）

中等教科 國文典（編輯中）

說文今釋（編輯中）

◎國文書

普通教育 地質學教科書（譯述中）

普通教育 天文學教科書（譯述中）

植物學講本 江陰陳以益 金華邵錫濂 合譯

米國呂特奇的翰著 生理衛生學 印刷中 山東羅慶堂

發行所　上海四馬路巡捕房東首　科學會編譯部總發行所

◎歷史書

中等歷史教科書　東西洋之部　定價八角　臨桂趙懿年編

中等歷史教科書　本國之部　定價八角　臨桂趙懿年編

漢譯世界語　定價六角　常德林振翰譯

會話作文　英文法規詳解　（印刷中）　古栝樊崧駿編

英文典圖解　（印刷中）　古栝樊崧駿編

英文正字　（印刷中）　常德林振幹譯

中學英文典教科書　定價一元　南海何崇礎編

◎心理書

叢書之一　實用心理學　記憶學　定價一角五分　吳江張詢編

普通教育　地文學教科書　定價一元　歸安顧曾彥編

◎地理書

中學教科　外國地理　（編輯中）

中學教科　中國地理　定價壹元二角　順德梁成章編

中學　中國歷史　仁和馬叙倫著

發行所　上海　四馬路巡捕房東首　科學會編譯部總發行所

發行者　科學會編譯部

印刷所　株式會社秀英舍第一工場

印刷者　藤本兼吉

編輯者　連江陳文

中華民國二年八月十五日十一版

定價大洋六角

平面三角法奧付