中 華 文 庫

初中第一集

幾何學問題解法研究

郁樹錕編

中 華 書 局 印 行

幾何學問題解法研究

目次

第二編 軌跡

第三編　作圖

幾何學問題解法研究

緒　論

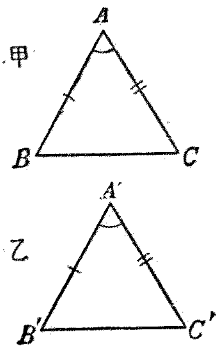
平面幾何學的研究範圍

初等平面幾何學的研究,可分作三方面:

1. 定理的證明
2. 軌跡的決定
3. 作圖

1. 定理的證明　如討論兩個圖形的大小關係,即相等或不相等的問題,那末根本的證明法是把兩個圖形重合,或用計算的方法。

例如比較二邊及夾角相等的甲、乙兩個三角形時,可把二個圖形中任意一個圖形(如甲)重合在另一圖形(如乙)上。如AB重合在和它相等的$A'B'$邊上,因$\angle BAC=\angle B'A'C'$,AC邊又可重合在和它相等的$A'C'$邊上。這樣,兩個圖形就完全密合了。



又例如證明"半徑相等的圓相等,半徑大的圓比半徑小的圓大"的命題時,先把兩圓的中心重合,觀察這兩個

圓能不能重合,就可知道兩圓是否相等。

但是有種圖形用這方法比較是非常困難,甚至完全不可能,例如(a)比較底邊和高都不相等的兩三角形的面積,(b)決定已知半徑的圓周,或面積。關於這種問題的決定,必須把上面所述的方法作基礎,而加以精密的計算。

故定理的證明法,可表示之如下:

- 定理證明法
  - 重合法
    - 令圖形的一端重合,而由他端的重合或不重合以判別大小之法……(1)
    - 令中心重合,而由兩端或其外側的重合或不重合以判別大小之法…(2)
  - 計算法……(3)

2. 軌跡的決定 軌跡問題乃是研究點的移動。當點移動時如不加以任何條件,那就無從決定軌跡了。在初等幾何學中關於點的移動所加的條件大約如次:

- 決定軌跡的條件
  - 關於某基準的方向……(1)
  - 由某基準的距離……(2)
  - 和某基準所作的角……(3)
  - 由某基準的距離之比……(4)
  - 由某基準的距離的平方或某倍數之和或差……(5)
  - 由某基準的距離的積……(6)

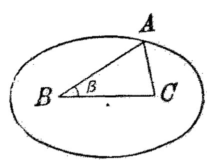
這裏所說的基準,有的是點、直線、圓等的任一種,有的是包括二種或二種以上。

決定軌跡的條件雖然是有好多種,但是所決定的軌跡不是直線便是圓,例如對於定直線,向一定方向移動的點的軌跡;距二定點的距離的平方差爲一定的點的軌跡,都是直線。距二定點的距離有一定比例的點的軌跡,和已知直線成一定角度的點的軌跡,都是圓周。

以上所述的結果,可表示之如下(註):

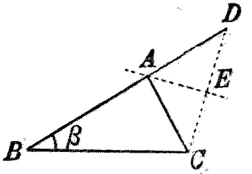
點的軌跡 $\begin{cases} \text{直線}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1) \\ \text{圓周}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$

3. 作圖 作圖的方法隨提出作圖的要素而異,通常雖由圖形所具有的條件以決定軌跡而作圖,但是稍涉高深的作圖題,必須活用已知定理。例如已知底邊和一底角及其他二邊的和而作三角形時,在較高程度的作圖法中,由底邊兩端 B、C 的距離之和爲一定的點的軌跡,乃是一個橢圓;然後由一端 B 引一直線,和底邊所作的角爲 β(已知),而求這直線和橢圓的交點,以作成三角形 ABC。但在初



等作圖法中,則先在底邊 BC 上,引 BD 線,其長等於他二邊的和,BD 和 BC 所作的角爲 β 這樣作成三角形

BDC;然後求CD的垂直二等分線EA和BD的交點A,以作成三角形ABC。



這樣所作成的圖,乃是初步學習作圖時,並未由已知的條件BC、$\angle\beta$、$AB+AC$等直接地探究A的軌跡;而由已知定理的補助,間接地求出A點。

若欲充分研究作圖,必先對於定理和軌跡要有充分的研究。以下各章當次第討論之。

〔註〕 系統地研究軌跡問題是非常困難,對於多數問題僅能就其所有的共通性質加以分類。軌跡的結果除直線、圓外尚有面,例如由正三角形內一點至三邊的距離之和等於正三角形高的點的軌跡,乃是這三角形內部的面。

第一編 證明問題

第一章 由重合法證明的問題

第一節 定理證明法的研究

1. 定理的構成 無論甚麼定理,都是由假設和終結兩部分所成的,例如"兩三角形 ABC、$A'B'C$ 的三邊各個相等,則兩三角形重合"的一定理中,"$\triangle ABC$、$\triangle A'B'C'$內, $AB=A'B'$, $BC=B'C'$, $CA=C'A'$"是假設;而"$\triangle ABC=\triangle A'B'C'$"是終結。

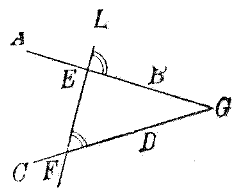
故定理的一般形式是

假設(如 $A=B$)+終結(則 $C=D$)。

2. 定理的證明法 證明每一個定理,必須把假設部分和終結部分分別清楚,而明白地論證由假設所得的終結之正確。在緒論(1)中,已經說過根本的證明法,不過一切定理都這樣根本地證明,未免過於煩雜,並且亦屬不必要。通常由補助的作圖,把定理變爲其他更簡單的已知定理,或由其他論理方法證明之,卽可。

例如證明"直角三角形的斜邊比其他任何一邊大"時,由"直角在三角形三內角中爲最大"的關係,而知它所對的一邊也是最大,因爲我們已經知道三角形內兩角不等時,大角的對邊比小角的對邊爲大。

但證明"二直線和一直線相交,如所作的同位角或錯角相等,則二直線平行"時,若以二直線AB和CD相交於G點,那末三角形EFG的一外角(如$\angle LEG$),等於和它不相隣的二內角(如$\angle EFG$和$\angle EGF$)之和(註)即



$$\angle LEG = \angle EFG + \angle EGF,$$

$$\therefore \angle LEG > \angle EFG。$$

這樣證明AB和CD平行是不可以的;因爲"三角形的一外角等於和它不相隣的二內角之和"是在平行線各定理證明後纔能成立的;當證明關於三角形的定理時,把關於平行線的定理當作已知定理來使用,固然是可以,但是不能拿來逆用。這種本末倒置的錯誤是應該注意避免。

[註]　和外角不相隣的二內角,稱爲該外角的內對角。

3. 定理的逆關係　定理的一般形式

$A=B$(假設)時,則$C=D$(終結)……………………(1)

如把上式所表示的定理的假設和終結互相交換,卽得

$C=D$(假設)時,則$A=B$(終結)……………………(2)

這稱爲逆定理。

(1)式的定理能成立時,(2)式未必卽能成立;換句

話說,(1)式眞時,(2)式或眞或不眞;現在拿“三角形的三內角的二等分線會於一點”爲例,這條定理固能成立,但是由三角形的三頂點所作的直線能够會合於一點的,不一定是三內角的二等分線。所以一條定理雖能成立,但是不能以爲它的逆定理也能成立,而拿來應用;故必須先證實其是否能同時成立。

第二節　直線形的研究

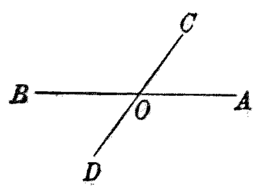
I　關於對頂角的研究

定　理

1. 對頂角相等。

本定理可由兩角的頂點和一邊的重合,而求出其他一邊的重合以證明之。

2. 直線 AB 兩側的直線 CO、OD 會合於 AB 上一點 O,所成的角 COA 和 BOD 相等時,則 C、O、D 三點同在一直線上。



本定理可如下證明:

$\angle COA+\angle AOD$

$=\angle BOD+\angle AOD=180$。

【注意】 定理2的證明法常應用於“三點同在一直線上”和“二直線會於一點而成一直線”的證明。

問　題　一

(1)二直線相交所成的四個角中,有一角爲 α,求

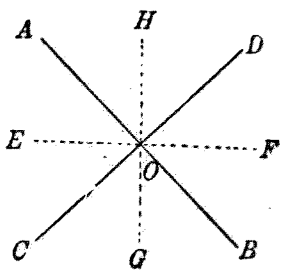
其他各角的大小。

【註】 注意對頂角相等,和相隣二角所成的補角。

答　二角 α,二角 $2R-\alpha$。

(2)四直線交於一點,所成的四個角均爲直角,試證此四直線爲二直線。

(3)二直線相交所成的四個角中,任意相鄰二角的二等分線,也等分其對頂角,且互相垂直,試證之。



【略解】 設 EO、GO 爲相隣二角 AOC、BOC 的二等分線,延長 EO 至 F,GO 至 H。故

$$\left.\begin{array}{l}\angle AOE=\angle BOF\\ \angle COE=\angle DOF\end{array}\right\}\text{(對頂角)}$$

但由假設　$\angle AOE=\angle COE$,

$$\therefore\ \angle BOF=\angle DOF;$$

同理,得　$\angle AOH=\angle DOH$。

即 EO、GO 二等分 $\angle AOC$、$\angle BOC$ 的對頂角。

次由假設　$\angle COE=\frac{1}{2}\angle AOC$,

$$\angle COG=\frac{1}{2}\angle BOC。$$

但　$\angle AOC+\angle BOC=2\angle R$,

$$\therefore\ \angle COE+\angle COG=\frac{1}{2}(\angle AOC+\angle BOC)=\angle R,$$

$$\therefore\ \angle EOG\ \ \angle R。$$

II 關於平行線的研究

定 理

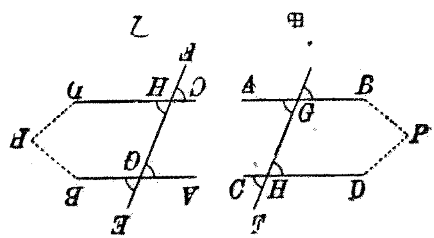
1. 二直線和另一直線相交時,如能成立下列關係之一,則此二直線平行。

(A)一組的錯角相等;

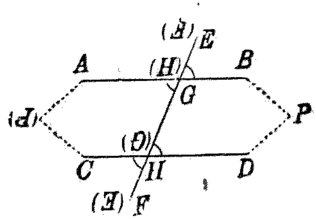
(B)一組的同位角相等;

(C)同側的內角互爲補角。

本定理爲幾何學的基本定理,非常重要,如能將(A)證明,其他卽可推得。



設AB、CD爲二直線,而與另一直線相交,如甲圖。將甲圖迴轉至乙圖的位置;這兩個圖形可完全密合(如丙圖),因G、H處EF交AB和CD所成的錯角相等。



設AB、CD二直線不平行,則此二直線必相交於一點P(甲圖),但甲圖和乙圖既可完全重合,那末AB和CD在他端的延長線上又必相交於另一點P(丙圖)。這

樣，AB、CD二直線有二公用點了(兩直線只能相交於一點)，這當然是不合理的，所以AB平行於CD。

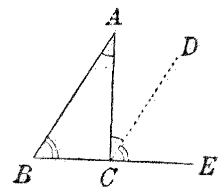
2. 定理 1 的逆定理亦眞。

【注意】 以後證明二直線平行時，只須證明其是否具有定理 1 所示的條件，而不必作如上一樣的根本證明。又作一直線 CD 和已知直線 AB 平行時，可先作一任意直線 EF 和 AB 相交，而後作一具備定理 1 所示各條件之一的直線 CD 即可。

問題二

(1)三角形的三內角之和等於二直角。

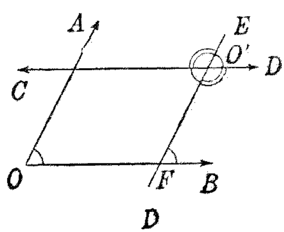
(2)三角形的外角等於其內對角。



【提示】 過 $\triangle ABC$ 的任意一頂點 C 作一直線平行於其對邊，且將 BC 延長至 E。

(3)試證二等邊三角形頂點的外角二等分線平行於底邊。

(4)一角的二邊各和他角的二邊平行，則此二角或相等，或互爲補角。



【略解】

第一 二角的二邊均在

同一方向 ($\angle AOB$ 和 $\angle EO'D'$), 或均在反對方向 ($\angle AOB$ 和 $\angle CO'D$),

$$\angle AOB = \angle EFB, \text{(同位角)}$$

$$\angle EFB = \angle CO'D = \angle EO'D' \text{(錯角,同位角)}$$

$$\therefore \quad \angle AOB = \angle CO'D = \angle EO'D'。$$

第二　二角的一邊在同一方向,其他一邊則在反對方向 ($\angle AOB$ 和 $\angle CO'E$ 或 $\angle DO'D'$), 由前證明

$$\angle AOB = \angle CO'D,$$

但 $$\angle CO'E + \angle CO'D = 2\angle R,$$

及 $$\angle DO'D' = \angle CO'E \text{(對頂角)};$$

$$\therefore \quad \angle CO'E + \angle AOB = 2\angle R,$$

$$\angle DO'D' + \angle AOB = 2\angle R。$$

(5) 設二直線相交,而和此平行的二直線亦相交。

III　關於三角形的研究

定　理

第一類　內角和外角

1. 三角形的外角等於其內對角。

2. 三角形的三內角之和等於兩直角。

以上二定理爲關於三角形所常用的重要定理(本節II,問題1、2參照)。

第二類　全等形

3. 兩三角形有如次的關係存在,則兩形相等。

(*A*)二邊和其夾角相等;

(*B*)二角和其夾邊相等;

(*C*)三邊分別相等。

本定理均可由重合法證明之。

第三類　邊和角

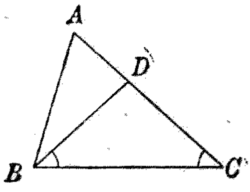
4. 三角形的二邊之和,比他一邊大。

因二點間的最短距離,爲連此二點的直線。

5. 三角形的二邊不相等,則大邊的對角比小邊的對角大。

【提示】 設 $AB>AC$, 由補助的作圖,在 AB 上取 D 點,令 $AD=AC$, 作 CD, 而得二等邊三角形 ACD。

6. 三角形的二角不相等,則大角的對邊比小角的對邊大。



設 $\angle ABC>\angle ACB$; 作 BD, 令 $\angle DBC=\angle BCD$。因 BD 在 $\angle ABC$ 之內,和 AC 相交於 D。故 $\triangle BDC$ 爲二等邊三角形,

$$BD=CD。$$

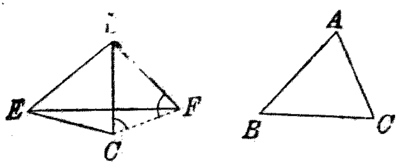
但 $BD+AD>AB$, $\therefore CD+AD>AB$,

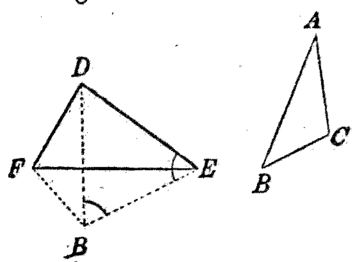
即 $AC>AB$。

第四類　兩三角形不相等

7. 兩三角形的兩邊彼此相等,若其所夾的角不等,則夾角大的三角形的第三邊,比另一三角形的第三邊大。

令兩三角形的夾角的頂點及相等的一邊重合,如兩三角形在同側,則當見相等的另一邊不能重合,而第三邊也不一致。





由此可引用其他定理,把這命題證明,其法如下:

在 $\triangle ABC$、$\triangle DEF$ 內,設

$$\left.\begin{array}{l} AB=DE \\ AC=DF \\ \angle BAC<\angle EDF \end{array}\right\}$$

如圖所示,AB 重合於 DE,且置兩三角形於同側,則得二等邊三角形 CDF。

$$\therefore \quad \angle DCF = \angle DFC,$$

在甲圖中　　$\angle CFE = \angle DFC - \angle DFE$。

在乙圖中,為 AC 和 DF 重合;若將 DE 和 AB 重合,那末 C 點就在 $\triangle DEF$ 內。證明時比較麻煩些。

在甲圖中:	在乙圖中:
$\angle ECF > \angle CFE$,	$\angle EBF > \angle BEF$,
$\therefore \quad EF > EC = BC$;	$\therefore \quad EF > FB = BC$;

即　　$EF > BC$。

8. 兩三角形的兩邊彼此相等,若第三邊不相等,則大的第三邊所對的角,比小的第三邊所對的角大。

例如在 $\triangle ABC$、$\triangle DEF$ 內,$AB = DE$, $AC = DF$, $BC < EF$,則 $\angle A$ 和 $\angle D$ 的關係必為下列三種之一:

$$\angle A > \angle D \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\angle A = \angle D \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$\angle A < \angle D \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

若有 (1)、(2) 的關係,那末

$$\left.\begin{array}{l} BC > EF \\ \text{或} \quad BC = EF \end{array}\right\} \text{(定理 7)},$$

但這和假設矛盾,故 $\angle A$ 和 $\angle D$ 的關係必定暴如(3)所示,即 $\angle A$ 小於 $\angle D$。

【注意】 有四邊以上的直線形如能分成為三角形,則可應用一切三角形定理,故三角形的定理在平面幾何學

上實關重要。

問題三

(1)兩直角三角形如成立下列關係之一,則這兩直角三角形相等。

(A)斜邊和另一邊分別相等;

(B)夾直角的二邊分別相等;

(C)斜邊和一銳角相等;

(D)一腰和其相隣的銳角分別相等。

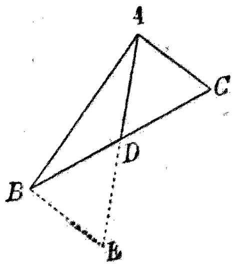
(2)由三角形底的兩端引至對邊的兩垂線相等,則此三角形等腰。

【提示】 前題的(A)參照。

(3)試比較由三角形一頂點所引的垂線、中線和分角線的大小。

【提示】 由一點到一直線的最短距離為垂線;而由同一點所作斜邊的足離垂線足愈遠的,斜邊愈長。

(4)三角形的中線和小隣邊所作的角,比和大隣邊所作的角大。



【略解】 設 AD 為 $\triangle ABC$ 的中線,延長之,令 $AD=DE$; 聯 BE,

$$\triangle ACD \equiv \triangle EBD,$$

$$\therefore \angle CAD = \angle BED,$$

及

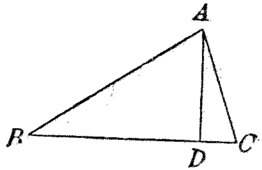
$$AC = EB.$$

故若 $AB>AC$，即 $AB>EB$；而在 $\triangle ABE$ 內，$\angle BED>\angle BAD$，

$$\therefore\ AB>AC,$$

則
$$\angle CAD>\angle BAD。$$

(5)三角形的二邊不等,則由其夾角頂點到對邊的垂線和這二邊所作的兩角也不等,垂線和大邊所成的角大。



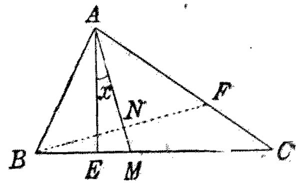
【提示】 注意由垂線所分的內角,如 $AB>AC$，

則
$$\angle ABC<\angle ACB。$$

但 $\angle BAD$ 和 $\angle CAD$ 分別爲其餘角,所以知道

$$\angle BAD>\angle CAD,$$

(6)三角形一內角的分角線 AM 和由這角到對邊的垂線 AE 所成的 x 角,等於兩底角差的一半。



【略解】 設 $AB<AC$；在 AC 上取 $AF=AB$，BF 和 AM 的交點爲 N。

$$\angle ABF=\angle AFB=\angle C+\frac{1}{2}(\angle B-\angle C),$$

$$\angle BAN=\angle R-\angle ABF=\angle R-\left\{\angle C+\frac{1}{2}(\angle B-\angle C)\right\},$$

$$\angle BAE=\angle R-\angle B,$$

$$\therefore\ \angle BAN-\angle BAE=\angle B-\left\{\angle C+\frac{1}{2}(\angle B-\angle C)\right\}=\frac{1}{2}(\angle B-\angle C)。$$

(7) $\triangle ABC$ 內,$AB>AC$,由 A 所作的中線、二等分線、

垂線爲 AD、AE、AF，則這些線的足，在 BC 上的順序爲 D、E、F。

【提示】 參照問題 4、5。

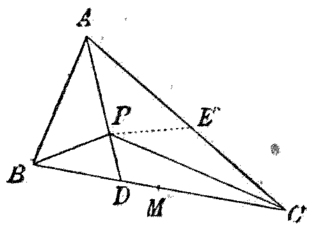
(8)垂直於三角形頂角分角線的直線和底邊所作的角等於兩底角差的一半；和二邊所作的角等於兩底角和的一半。

【提示】 參照問題 6 的略解。

(9) $\triangle ABC$ 內，$AC>AB$，頂角 A 的二等分線 AD 和底邊 BC 相交於 D，證明

$$CD>BD。$$

又設 P 爲 AD 上一點，試證 $PB\sim PC>AB\sim AC$。



【略解】 由問題 7，D 在 BC 的中點 M 和 B 的中間故得

$$CD>BD。$$

次在 AC 上取 E 點，令 $AB=AE$，則

$$EC=AC-AB \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

而 $PB=PE(\triangle ABP\equiv\triangle AEP)$。

但在 $\triangle PCE$ 中，$PC-PE<EC \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

由 (1) 及 (2)，得 $PC-PB<AC-AB$。

(10) $\triangle ABC$ 內角 B、C 的分角線所成的角等於 $\angle A+\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)$，試加證明。

(11)三角形兩底角的外角分角線所成的角,等於頂角的外角的一半。

(12)三角形三內角的分角線會於一點。

【提示】 先證兩分角線會於一點,次連此點和第三頂點,而證明這直線爲其角的二等分線。

(13)三角形的一內角和其他兩頂點的外角,其分角線會於一點。

(14)三角形三邊的垂直二等分線會於一點。

(1)三角形的三個高會於一點。

(16)設 AD 爲三角形 ABC 的中線,

(A)若 $AD>\frac{1}{2}BC$,則 $\angle A<\angle R$;

(B)若 $AD=\frac{1}{2}BC$,則 $\angle A=\angle R$;

(C)若 $AD<\frac{1}{2}BC$,則 $\angle A>\angle R$。

【略解】 $\angle A+\angle B+\angle C=2\angle R$。

若 $AD>\frac{1}{2}BC$,則由 $\triangle ABD$,

$AD>BD$, $\therefore\ \angle B>\angle BAD$ ……(1)

由 $\triangle ACD$, $AD>CD$, $\therefore\ \angle C>\angle CAD$ ……(2)

由(1)及(2)得 $\angle A<\angle B+\angle C$,

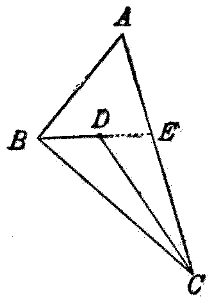
即 $2\angle A<\angle A+\angle B+\angle C=2\angle R$;

$\therefore\ \angle A<\angle R$

其他證明同。

(17) 設 D 爲 $\triangle ABC$ 內的一點,則 $\angle BDC > \angle BAC$。

(18) 設 D 爲 $\triangle ABC$ 內的一點,則 $AB+AC>DB+DC$。



【提示】 延長 BD,和 AC 相交於 E。

故得 $AB+AE>BE=BD+DE$,

又 $DE+CE>DC$;

將上兩式相加卽得。

(19) 設 D 爲 $\triangle ABC$ 內的一點,

則 $\frac{1}{2}(AB+BC+CA)<DB+DC+DA<AB+BC+CA$。

【提示】 $AB+CA>DB+DC$,

$AB+BC>DC+DA$,

$BC+CA>DB+DA$,

$\therefore\ AB+BC+CA>DB+DC+DA \cdots\cdots(1)$

又 $DB+DC>BC$,

$DC+DA>CA$,

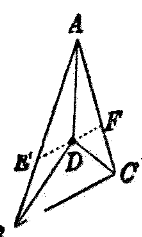
$DA+DB>AB$,

$\therefore\ 2(DB+DC+DA)>AB+BC+CA \cdots\cdots(2)$

由(1)及(2),得所求的不等式。

(20) 設 D 爲 $\triangle ABC$ 內的一點,若 $AB>AC>BC$;證明

$$AB+AC>DB+DC+DA。$$



【略解】 過 D 引平行於 BC 的直

線，和兩邊相交於 E 及 F，故

$$\angle E=\angle B, \qquad \angle F=\angle C.$$

因 $$AB>AC>BC,$$

$$\therefore \quad \angle C>\angle B>\angle A,$$

亦即 $$\angle F>\angle E>\angle A;$$

$$\therefore \quad AE>AF>EF \cdots\cdots(1)$$

但

$$\left.\begin{aligned} BE+ED&>DB\\ AE&>DA\\ DF+CF&>DC\\ AF&>EF \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(2)$$

由 (1) (2)的各邊相加，並簡單之，得

$$AB+AC>DB+DC+DA。$$

IV 多角形的研究

定 理

第一類 平行四邊形

1. 在平行四邊形中：

(A) 二組的對邊各相等；

(B) 二組的對角各相等；

(C) 對角線互相平分。

本定理可由全等三角形定理證明之

2. 四邊形如能成立下列關係之一，則為平行四

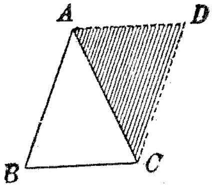
邊形。

(A)二組對邊或對角各相等;

(B)一組對邊相等且平行;

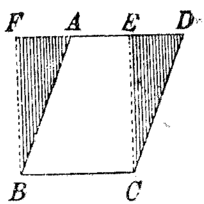
(C)對角線互相平分。

3. 平行四邊形的面積二倍於同底同高的三角形面積。



【提示】 以 $\triangle ABC$ 的兩邊 AB、BC 爲隣邊,作平行四邊形 $ABCD$, $\triangle ABC$ 和 $\triangle CAD$ 相等。

4. 平行四邊形的面積等於同底同高的矩形面積。

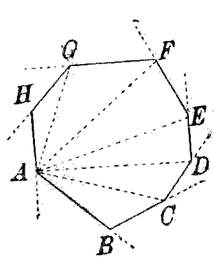


【提示】 作和 $\square ABCD$ 同底同高的矩形 $BCEF$, 由此知

$$\triangle ABF \equiv \triangle DCE.$$

第二類 多角形

5. n 邊多角形的內角和爲 $(2n-4)\angle R$。



【略證】 由 n 邊形 $ABCDEFGH$ 的任意一頂點 A 所作對角線計 $n-3$ 根,由此而成的三角形爲 $n-2$ 個;但各三角形的內角和爲 $2\angle R$, 故 $n-2$ 個三角形的內角總和爲 $2(n-2)\angle R=(2n-4)\angle R$。

6. 延長多角形各邊所作各外角和等於$4\angle R$。

【略證】 各頂點的內外角和等於$2\angle R$，但n邊形有n個頂點，各頂點的內外角總和等於$2n\angle R$。由前定理知內角的總和為$(2n-4)\angle R$，故外角的總和為

$$2n\angle R-(2n-4)\angle R=4\angle R,$$

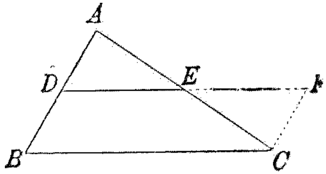
與邊數n無關。

【注意】 這定理本來屬於計算法，因它容易由前定理推出來，所以在這裏提出。

正n角形可看作任意n角形的特殊形式去研究。

問　題　四

(1) 連三角形兩邊中點的直線，和第三邊平行。且等於它的一半。



【略解】 設D、E為AB、AC的中點，延長DE至F，令$DE=EF$，

則 $$\triangle ADE\cong\triangle CFE,$$

$$\therefore\ \angle DAE=\angle ECF,$$

即 $$AB/\!/CF。$$

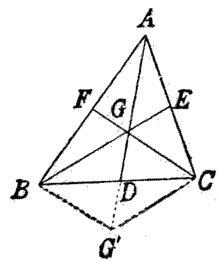
又 $$CF=AD=DB,\qquad\therefore\ BC/\!/DF,$$

且 $$BC=DF=2DE,$$

$$\therefore\ DE=\frac{1}{2}BC。$$

(2) 由三角形ABC的一邊AB的中點D作一直線和BC平行，交AC於E，E為AC的中點。

(3)三角形的三中線會於一點。



【略解】 設 AD、BE 二中線的交點為 G,延長 AD,令 $GD=DG'$ 作 $GBG'C$,這四邊形為平行四邊形(對角線互相平分),故得

$$BG=CG'。$$

但 E 為 AC 的中點,由問題 1、2,得

$$GE=\frac{1}{2}CG'=\frac{1}{2}BG,$$

即 G 在 BE 線上距 B 的距離為 $\frac{2}{3}BE$。

同樣,可以證明 $AG=\frac{2}{3}AD$。

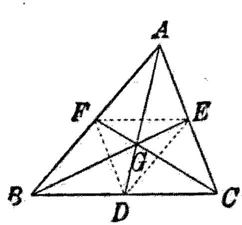
用同樣的方法,可證明 BE 和 CF 的交點距 B、C 點的距離為 $\frac{2}{3}BE$、$\frac{2}{3}CF$,故知這交點即 G 點。

(4)設 AD、BE、CF 為 $\triangle ABC$ 的三中線,證明

$$AD+BE+CF<AB+BC+CA<2(AD+BE+CF)$$

【略解】

$$\left.\begin{aligned}DE&=\frac{1}{2}AB\\EF&=\frac{1}{2}BC\\DF&=\frac{1}{2}AC\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$



及

$$\left.\begin{aligned}BD+DE&>BE\\CE+EF&>CF\\AF+FD&>AD\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(2)$$

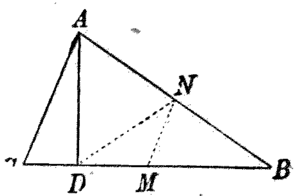
(2) 式各邊相加,並利用 (1) 式的關係,得

$$AB+BC+CA>AD+BE+CF \cdots\cdots\cdots(A)$$

又
$$DG+GC>DC$$
$$EG+GA>EA$$
$$+)\quad FG+GB>BF$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$
$$AD+BE+CF>\frac{1}{2}(AB+BC+CA)\cdots\cdots\cdots(B)$$

由 (A) 及 (B) 得所求的結果。

(5) $\triangle ABC$ 內,一底角 C 爲他底角 B 的二倍,則底邊中點 M 到由 A 所作垂線 AD 下端 D 的距離 DM,爲 AC 的一半。



【略解】 設 N 爲 AB 的中點,則因 $\triangle ABD$ 爲直角三角形,故 $\triangle BDN$ 爲二等邊三角形(直角三角形斜邊的中點到三頂點的距離相等)。

$$\angle BDN=\angle DBN=\frac{1}{2}\angle ACB.$$

但 N、M 是 AB、BC 的中點,$AC /\!/ MN$,

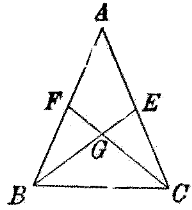
$$\therefore \angle NMB=\angle ACB=2\angle ABC=2\angle BDN,$$
$$=\angle BDN+\angle DNM \text{ (內對角)}.$$

即 $\triangle DNM$ 是二等邊三角形, $DM=MN$,

但
$$MN=\frac{1}{2}AC,$$
$$\therefore\ DM=\frac{1}{2}AC。$$

(6)兩中線相等的三角形,便是二等邊三角形。

【提示】 若兩中線 BE 和 CF 相等，其 $\frac{2}{3}$ 長的 BG 和 CG 也相等，故 $\triangle BGC$ 是二等邊三角形，故



$$\angle GBC=\angle GCB \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

但 $FG=EG$，$BG=CG$，且 $\angle FGB=\angle EGC$，

故 $$\triangle FGB\equiv\triangle EGC, \angle FBG=\angle ECG \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

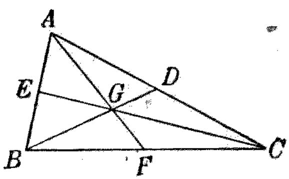
由 (1) 及 (2)，得

$$\angle GBC+\angle FBG=\angle GCB+\angle ECG,$$

$$\therefore \quad \angle ABC=\angle ACB.$$

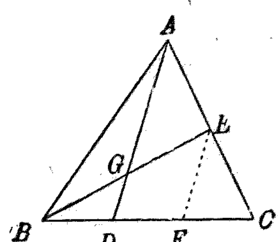
即 $\triangle ABC$ 爲等腰三角形。

(7) 三角形的大邊上的中線比小邊上的小。



【提示】 設 $AC>AB$，則$\angle AFC>\angle AFB$；$\triangle GBF$ 和 $\triangle GFC$ 內，GF 爲公用邊，$BF=FC$，故大角 GFC 所對的邊 GC 比 GB 大。

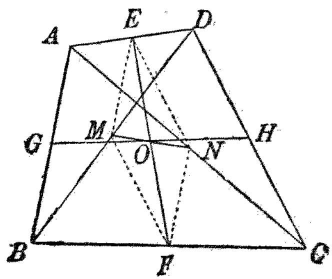
(8) D、E 分別爲 $\triangle ABC$ 的 BC、CA 邊上的一點，若 $BD=\frac{1}{2}DC$，$CE=EA$，則 AD 平分 BE。



【提示】 設 F 爲 DC 的中點，則 $AD/\!/EF$，但 D 是 BF 的中點，故 AD 和 BE 的交點 G 是 BE 的中點。

(9) 連四邊形兩組對邊中點的直線和連對角線

中點的直線會於一點。



【提示】 連一組對邊的中點和對角線的中點可作一平行四邊形。

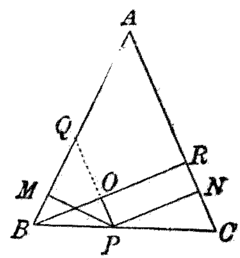
(10) 平行四邊形的內角分角線所成的四邊形是矩形;若平行四邊形換作矩形,其結果怎樣?

(11) 設 E、F 爲平行四邊形 $ABCD$ 兩對邊 AD、BC 的中點,BE、DF 分對角線 AC 爲三等分。

(12) 若各角均是鈍角,則正多角形的邊數在 5 以上。

【提示】 各外角等於 $\frac{4}{n}\angle R$。

(13) 由二等邊三角形底邊上一點,作到兩邊的垂線,試證其和爲一定。



【略解】 由 P 作平行於 AC 的直線 PQ,則 $\triangle QPB$ 爲二等邊三角形;若 BR 爲由 B 到 AC 的垂線,那末 BR 也垂直 QP,由問題 3、2,$PM=BO$,

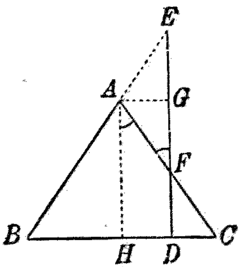
但 $OR=PN$,

$$\therefore\quad PM+PN=BO+OR=BR\ (一定)。$$

若 P 點在延長線上,則 PM、PN 的差一定。

(14) 由二等邊三角形 ABC 的底邊 BC 上一點 D 作

垂線,和其他兩邊相交於E、F,試證$ED+FD=$一定。



【略解】 由A作兩直線AH和AG分別垂直於BC和ED,

$$AH=DG,$$

且 $\angle AEF=\angle BAH=\frac{1}{2}\angle A$(同位角)

及 $\angle AFE=\angle HAF=\frac{1}{2}A$(錯角)

$$\therefore\ \angle AEF=\frac{1}{2}\angle A=\angle AFE,$$

故$\triangle AEF$是二等邊三角形,$GE=GF$,

$$\therefore\ ED+FD=2GD=2AH\ (\text{一定})。$$

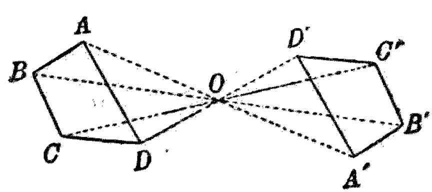
(15)由正三角形內一點作到各邊的垂線,其和爲一定。

【提示】 證明和13同。

V 對稱形的研究

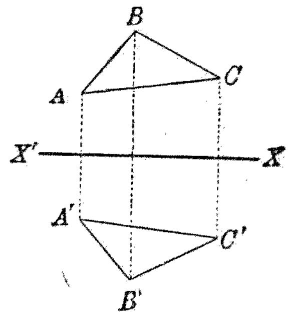
第一類 對稱點

若連結兩圖形$ABCD$、$A'B'C'D'$頂點的線分AA'、BB'、CC'、DD'會於一點O,並互相平分,則兩圖形對於O點爲對稱;將一圖形折轉重合於他圖形上,當完全密合。



第二類 對稱線

若連結兩圖形 ABC 和 $A'B'C'$ 的對應點的線分 AA'、BB'、CC' 均垂直平分於直線 XX'，則兩圖形對於直線 XX' 爲對稱;將一圖形折轉重合於他圖形上,當完全密合。

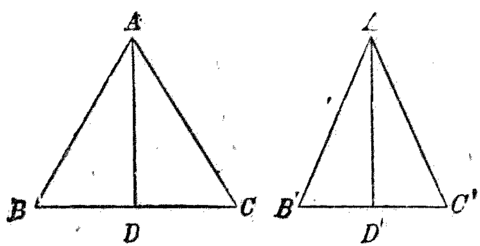


【注意】 對稱形理論應用於定理的證明甚爲便利。

問　題　五

(1) 由二等邊三角形頂點到底邊的垂線,分三角形爲對稱圖形。

(2) 試求等高兩二等邊三角形底邊的大小。

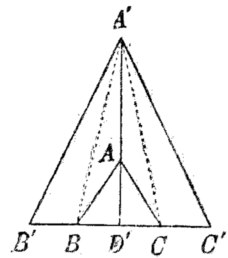


【提示】 以 AD、$A'D'$ 高作軸,可分兩三角形作對稱圖形;故由 AD 和 $A'D'$ 相重合,若 $\angle A>\angle A'$,則 $BC>B'C'$;或 $BC>B'C'$,則 $\angle A>A'$。

(3) 底邊一定,二等邊三角形的高度隨頂角的增

大而減少,或高度增加而頂角減少。

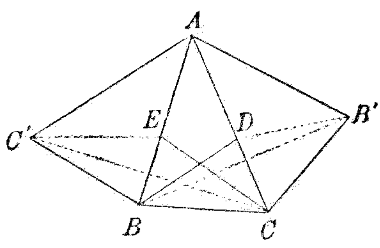
(4)兩二等邊三角形 ABC、$A'B'C'$ 的頂點為 A、A',若 $\angle A>\angle A'$, 且 $BC<B'C'$, 那末 $AB<A'B'$。



【略解】 設 $A'D'$ 為 $\triangle A'B'C'$ 頂角 A' 的分角線; AD 為 $\triangle ABC$ 頂角 A 的分角線。若兩三角形的底邊和分角線重合,則 A 在 A' 和 D' 的中間。

但
$$\left.\begin{array}{l} A'B<A'B' \\ AB<A'B \end{array}\right\} \quad \therefore\ AB<A'B'。$$

(5) $\triangle ABC$ 內, $\angle B$ 和 $\angle C$ 的分角線分別交於對邊的 D、E 點,若 $\angle B>\angle C$, 則 $BD<CE$。



【略解】 設 BC 最小, AC 最大,作關於 AB 和 AC 的本形的對稱圖形 $AC'B$ 和 ACB'。在 $\triangle BCC'$ 和 $\triangle BCB'$ 內

$$\angle C'BC>\angle BCB',$$

且
$$BC'=BC=B'C,$$

$$\therefore\ CC'>BB'。$$

又
$$\angle CEC'=2\left\{\angle A+\frac{1}{2}\angle C\right\}=2\angle A+\angle C<2\angle R,$$

$$\angle BDB'=2\left\{\angle A+\frac{1}{2}\angle B\right\}=2\angle A+\angle B<2\angle R,$$

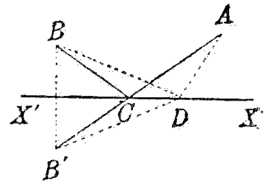
$$\therefore\ \angle BDB' > \angle CEC'。$$

即兩二等邊三角形 CEC' 和 BDB' 內，

$$\angle E < \angle D,\quad CC' > BB',\quad \therefore\ CE > BD\ (問題4)。$$

(6) 三角形 ABC 的兩角分角線相等，便是二等邊三角形。

(7) 設 A、B 爲在直線 XX' 同側的兩點，B' 爲 B 點關於 XX' 的對稱點，AB' 和 XX' 的交點爲 C，試證 $BC+AC$ 爲最短。



【提示】 在 XX' 直線上取 C 以外的一點 D，

$$AD+BD=AD+B'D>AB',$$

$$AC+BC=AC+B'C=AB'。$$

第三節　圓的研究

第一類　圓周和圓的面積

1. 半徑大的圓周和面積比半徑小的大，其逆定理亦眞。

【提示】 將兩圓心重合，小的圓形完全在大的裏面。

2. 半徑相等的兩圓周和面積完全相等，其逆亦眞。

3. 直徑平分圓周和圓的面積。

第二類　圓心角和弧

4.同圓或等圓內,大弧所對的圓心角比小弧所對的圓心角大;其逆亦眞。

5.圓心角的分角線亦等分所對的弧。

6.同圓或等圓內相等的弧所對的圓心角相等,其逆亦眞。

第三類 弦

7.由圓心作到弦的垂線,必平分弦。

【提示】 弦的兩端和圓心聯結,得二等邊三角形,由二等邊三角形頂點作到底邊的垂線,必平分底邊。

8.弦的垂直二等分線必通過圓心。

9.同圓或等圓內,近圓心的弦比遠的大,其逆亦眞。

【提示】 圓心和弦的兩端聯結所成的二等邊三角形,其高(圓心和弦的距離)和底邊(弦的大小)的大小關係常相反。

10.弦的垂直二等分線必平分所對的弧。

11.同圓或等圓內,大的劣弧所對的弦,比小的劣弧所對的弦大。

第四類 圓周角

12.圓周角等於同弧所對圓心角的一半。

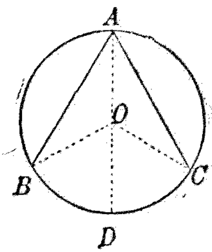
【略解】 聯結圓周角頂點 A 和圓心,得兩個二等邊三角形 ABO、ACO。

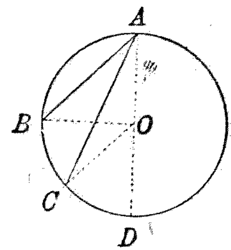
$$\therefore\ \angle BOD=2\angle BAO,$$

$$\angle COD=2\angle CAO,$$

$$\therefore\ \angle BOD\pm\angle COD=2(\angle BAO\pm\angle CAO),$$

$$=2\angle BAC。$$





13. 同圓或等圓內,等弧所對的圓周角相等;其逆亦眞。

半圓周所對的圓周角爲直角。

14. 內接四邊形的對角互爲補角,其逆亦眞。

15. 比半圓大、等於半圓或小於半圓的弓形,其角分別爲鈍角、直角或爲銳角;其逆亦眞。

16. 弓形 ABC 的弦 AC 的兩端和任意一點 P 聯結。所得的 $\angle APC$,隨 P 點在弓形內、弓形的弧上或弓形外,而分別大於、等於或小於弓形角 ABC;其逆亦眞。

17. 同底且同側的各三角形頂角相等,則各頂角在以底邊作弦的同一弧上。

【提示】 假定各頂點不在同一弧上,那末,有的在弧內,

有的在弧外;這樣,則頂角的大小不致相等,但這和'頂角相等'的假設矛盾,故不合理。

【注意】 此爲決定軌跡的重要定理。

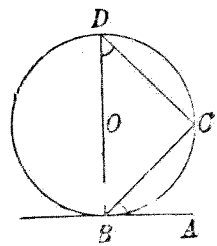
第五類 切線

18. 由圓外一點所作的二切線相等;且和聯結點與圓心的直線成等角。

【提示】 聯結圓心、切點和圓外的點,得兩直角三角形,斜邊爲公用邊,其他一邊爲半徑,故兩三角形相等。

19. 切線和通過切點的弦所作的角,以這弦所對弧的一半度之。

【略解】 通過 AB 切線的切點 B 作直徑 BD,



$$\angle ABC = \angle R - \angle CBD,$$

$$\angle BDC = \angle R - \angle CBD,$$

$$\therefore \quad \angle ABC = \angle BDC.$$

第六類 內接外接和旁接

20. 三角形三內角的分角線會於一點,以這點爲圓心,可作三角形的內接圓;這點稱爲三角形的內心。

【提示】 參照問題三, 12。

21. 三角形三邊的垂直二等分線會於一點,以這點爲圓心,可作三角形的外接圓;這點稱爲三角形的外心。

【提示】 參照問題三，14。

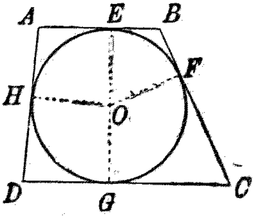
22. 三角形的一內角和二外角的分角線會於一點，以這點爲圓心可作和三邊相切的圓；這點稱爲旁心。

【提示】 參照問題三，13；一三角形有三個旁心，可作三個旁接圓。

23. 內接四邊形的對角互補，外角等於鄰角的對角。其逆亦眞。

本定理常用以證明四點在一圓周上。

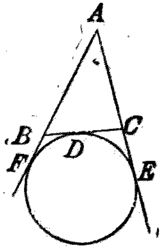
24. 外接四邊形的兩組對邊相等；其逆亦眞。



【略解】 設 $E、F、G、H$ 爲切點，因由圓外一點所作的二切線相等：

$$AE=AH$$
$$BE=BF$$
$$DG=DH$$
$$+)\quad CG=CF$$
$$\therefore\quad AB+CD=AD+CB$$

25. 由含旁接圓的三角形頂點到切點的距離，等於三角形的周的一半。



【略解】 設切點爲 $D、E、F$，

$$CD=CE,$$

$$BD=BF,$$

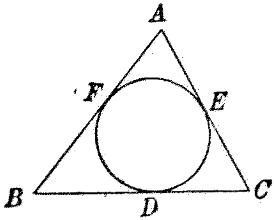
$$\therefore\quad AE+AF=AB+BC+AC。$$

但 $$AE=AF,$$

$$\therefore\quad AE=\frac{1}{2}(AB+BC+AC)。$$

26. 設三角形的內接圓切三邊於D、E、F,則

$AE=AF=\frac{1}{2}(AB+AC-BC)$



【略解】 $BD=BF$,

$CD=CE$,

$\therefore\quad AE=AF=\frac{1}{2}(AB+AC-BC)$。

第七類 圓的相切和相交

27. 兩圓相切,切點在聯兩圓心的直線上;圓心間的距離等於兩圓的半徑和(外切)或差(內切)。

28. 兩圓相交,交點不在聯兩圓心的直線上;圓心間的距離,比兩圓的半徑和小,而比其差大。

29. 兩圓周無公用點,則其圓心間的距離或比兩圓的半徑大,或比其差小。

問題六

(1)三角形ABC頂角A的分角線和外接圓的交點D至B、C二點的距離相等。

【提示】 D為$\overset{\frown}{BC}$的中點。

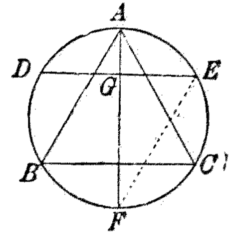
(2)延長$\triangle ABC$的一邊BA,作和頂角相隣的外角CAD,這角的分角線和外接圓的交點到三角形兩底端的距離相等。

(3)設$\triangle ABC$頂角A和其外角的分角線分別交

外接圓於D、E,直線DE便是圓的直徑。

【提示】 由第一、第二題知D、E分別爲$\overparen{BAC}$、$\overparen{BC}$的中點。

(4)聯結$\triangle ABC$外接圓$\overparen{AB}$、$\overparen{AC}$中點的直線,垂直於$\angle A$的分角線。



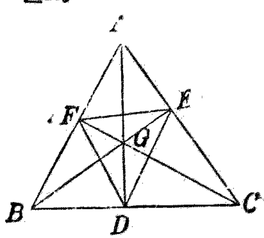
【略解】 設D、E、F分別爲$\overparen{AB}$、$\overparen{AC}$、$\overparen{BC}$的中點,則$\angle A$的分角線當通過F點。以G爲AF和DE的交點,在$\triangle EFG$內,$\angle EFG$爲$\frac{1}{2}\overparen{AC}$弧上的圓周角,$\angle FEG$爲$\frac{1}{2}(\overparen{AB}+\overparen{BC})$弧上的圓周角,

$$\angle EFG+\angle FEG=\angle R,$$

$$\therefore\quad \angle EGF=\angle R。$$

(5)設$\triangle ABC$各頂角的分角線和外接圓相交於D、E、F,$\triangle ABC$的內心和$\triangle DEF$的垂心一致。

(6)聯接$\triangle ABC$三頂點到對邊的垂線足D、E、F,則$\triangle DEF$各邊和原形各邊成等角。



【提示】 $\triangle BAD$內,$\angle BAD+\angle ABD=\angle R$。但$A$、$F$、$G$、$E$四點在一圓周上,故

$$\angle BAD=\angle FEB,$$

而

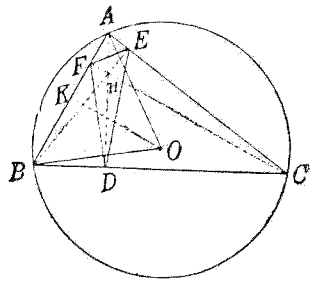
$$\angle FEB+\angle AEF=\angle R,$$

$$\therefore\quad \angle AEF=\angle ABD。$$

同樣可證明$\angle AFE=\angle ACB$等。

(7)三角形外接圓的圓心和各頂點聯結的直線,

分別垂直於垂足三角形各邊。



【略解】 設垂足三角形爲 DEF,垂心爲 H,由外心 O 到 AB 邊的垂線爲 OK,因 $A、F、H、E$ 四點在一圓周上,

$$\angle AFE=\angle AHE=\angle ACB;$$

但 $$\angle AOK=\angle\frac{1}{2}AOB=\angle ACB,$$

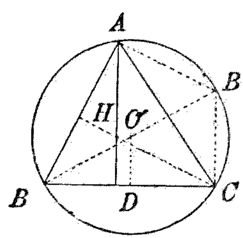
$$\therefore\ \angle AFE=\angle AOK。$$

即 $\angle AFE$ 爲 $\angle FAO$ 的餘角,AO 垂直於 EF。

(8) 內接三角形 ABC 的各角爲 $30°、50°、100°$,各角的分角線交圓於 $D、E、F$;問 $\triangle DEF$ 各角的大小如何?

答 $40°、65°、75°$。

(9) 設 $H、O$ 分別爲 $\triangle ABC$ 的垂心、外心,試證 AH 爲由 O 到 BC 的垂線 OD 的二倍。



【略解】 延長 BO,交圓周於 B',

$$OD=\frac{1}{2}B'C。$$

但 $AB'/\!/CH$, $AH/\!/B'C$,

$\therefore\ AH=B'C$(平行四邊形對邊)

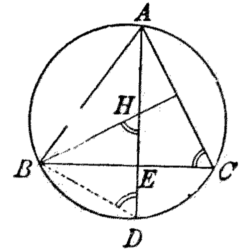
$$\therefore\ OD=\frac{1}{2}AH。$$

(10) 由三角形一頂點到對邊的垂線足在垂心和這垂線與外接圓周的交點的中間。

【略解】 設 H 爲垂心,$E、D$ 爲 AH 和 BC、外接圓的交點。

$$\left.\begin{aligned}\angle BHD=\angle ACB\\ \angle ADB=\angle ACB\end{aligned}\right\}$$

$\therefore\ \angle BDH=\angle BHD$。

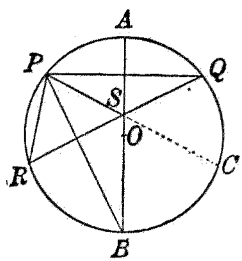


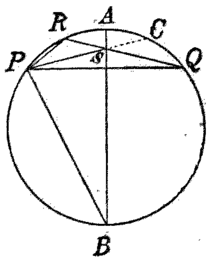
即 BE 爲由二等邊三角形頂點 B 到底邊 HD 的垂線,故 E 爲 HD 的中點。

(11) 設 ABC 爲內接於圓的等邊三角形,P 爲劣弧 BC 上任意一點,試證 AP 弦等於 BP 弦 $+CP$ 弦。

(12) 由圓周一點 P 作 PQ 弦,垂直於直徑 AB,由 Q 作任意弦 QR 交 AB 於 S,聯 R、S、B 於 P,則 PB 平分 $\angle SPR$ 或其外角。

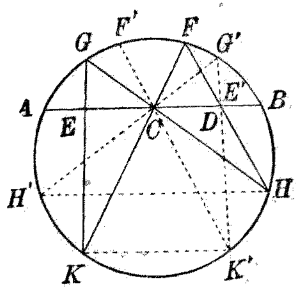
【提示】 設 PS 和圓周的交點爲 C,P 和 Q,R 和 C 都是對稱點。





(13) 任意二弦 FK、GH 通過另一弦 AB 的中點 C,聯 F 和 H,G 和 K 的直線分別交 AB 於 D、E,試證

$$CD=CE。$$



【略解】 引平行於 AB 的直線 KK' 和 HH'；$K'C$、$H'C$ 分別交圓周於 F'、G'，設 G'、K' 交 AB 於 E'，由對稱性質：

$$CE'=CE,$$

故能證 CE' 和 CD 相等即可。

$\angle CFG'$ 和 $KK'G'$ 互補，

而 $$\angle CE'G'=\angle KK'G',$$

$$\therefore\ \angle CFG'+CE'G'=2\angle R,$$

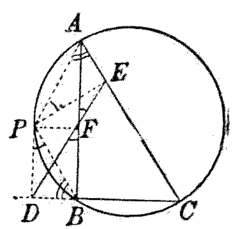
即 F、C、E'、G' 四點在一圓周上。

又 $$\angle CDF=\angle H'HF=\angle CG'F,$$

故 F、C、D、G' 四點亦在一圓周上，即 D 點和 E' 點必相重合，

$$\therefore\ CD=CE'=CE。$$

(14) 由外接圓上一點 P 到 $\triangle ABC$ 三邊的垂線足在一直線上。



【提示】 設 D、E、F 為三垂線的足，由直角三角形 AEP、BDP 得

$$\angle DBP=\angle EAP,$$

$$\therefore\ \angle BPD=\angle APE。$$

但四邊形 $DBFP$ 和 $AEFP$ 分別和圓內接，

$$\angle BFD=\angle BPD=\angle APE=\angle AFE,$$

故 D、E、F 在一直線上。

(15) 正三角形外一點 P 和三頂點聯結,若

$$PA=PB+PC$$

則 A、P、B、C 在一圓周上。

【提示】 這問題是問題 11 的逆。在 BP 上作等邊三角形 BPQ (在 $\triangle ABC$ 反側),

$$PC+PQ=PC+PB=AP,$$

$$\angle QBC=\angle ABP,$$

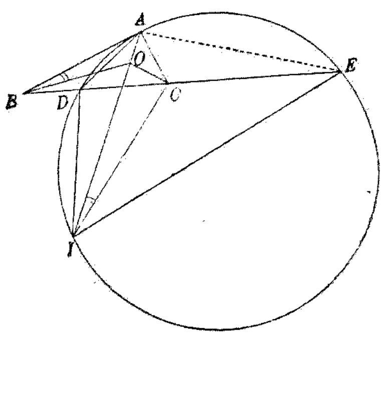
故
$$\triangle ABP\equiv\triangle CBQ;$$

而注意 C、P、Q 在一直線上。

(16) 以直角三角形的一邊作直徑的圓和斜邊的交點上,作一切線必平分其他一邊。

(17) 設二弦 AB、CD 交於 P, 過 A、P、C 三點作一圓,求證 PT 切線平行於 BD。

(18) 切 $\triangle ABC$ 的 AB 邊於 A 點,且過 $\angle A$ 內的旁心 I 的圓周交底邊 BC 及其延長線於 D 及 E, 試證直線 IC 平分 $\angle DIE$。



【略解】 設 O 為 $\triangle ABC$ 的內心,

$$\angle CIO=\angle ABO=\frac{1}{2}\angle B,$$

$$\angle DIO=\angle AED。$$

$$\therefore \quad \angle DIC=\angle AED+\frac{1}{2}\angle B \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又 $\angle BCI=\frac{1}{2}(\angle A+\angle B)$,

但 $\angle BCI=\angle CIE+\angle CEI$,

$\angle CEI=\angle DAI$,

$$\therefore \quad \angle CIE=\frac{1}{2}(\angle A+\angle B)-\angle DAI=\frac{1}{2}\angle B+\angle BAD \cdots\cdots(2)$$

而 $\angle AED=\angle BAD \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$

由 (1)、(2)、(3) 得 $\angle DIC=\angle CIE$。

(19) $\angle C$ 為直角的 $\triangle ABC$ 的內接圓半徑

$$r=\frac{1}{2}(BC+CA-AB)。$$

(20) 設 $\angle C$ 為直角的 $\triangle ABC$,其內接圓切 AB、BC 於 D、E,延長 DE 交 AC 的延長線於 F,則 $BD=CF$。

【提示】 設 O 為圓心,$\triangle OBD\equiv\triangle EFO$。

(21) 三角形各邊的中點,各頂點到對邊的垂線足,及由垂心到各頂點距離的中點,同在一圓周上(九點圓)。

【提示】 設 A'、B'、C' 為垂線足,D、E、F 為各邊中點,L、M、N 為垂心和頂點間的中點,均在以 LD 為直徑的圓上。

(22) 內接於圓的四邊形,對角線直交,則過交點且垂直於一邊的直線平分其對邊。

【提示】 由直角三角形到斜邊的中線,等於斜邊的一半。

(23) 延長內接四邊形的二組對邊,令各相交,則平

分兩交角的直線互相垂直。

(24) 設 E 爲內接於圓的 $ABCD$ 四邊形對角線的交點,過 A、B、E 三點的圓的切線爲 EF,則 EF 平行 CD。

(25) 內接於圓的四邊形 $ABCD$ 的對角線 CA、BD 直交,由圓心 O 到 AB 的距離 OM,等於 CD 的一半。

【略解】 延長 BO 交圓周於 E,在 $\triangle ACD$ 和 $\triangle ACE$ 內

$$\angle ADC=\angle AEC,$$

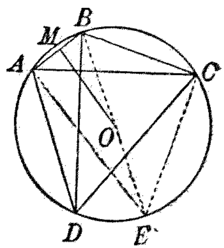
$$\angle CAD=\angle R-\angle ADB$$

$$=\angle R-\angle AEB$$

$$=\angle ABE=\angle ACE,$$

即 $$\angle CAD=\angle ACE,$$

且 AC 爲公用邊,故 $\triangle ACD$ 等於 $\triangle ACE$。

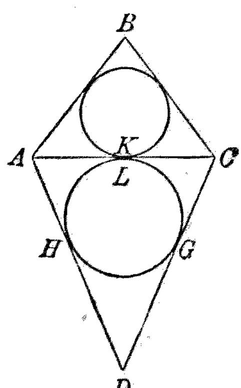


$$\therefore\ CD=AE=2OM。$$

(26) 設三角形三邊爲已知,試說明內接圓和旁接圓切各邊的位置。

【提示】 參照圓的定理 25、26。

(27) 圓的外接四邊形被一對角線分爲兩個三角形,試證兩三角形的內接圓互相外切。



【提示】 $AK=\frac{1}{2}(AB+AC-BC)$,

$AL=\frac{1}{2}(AC+AD-CD)$,

但 $AB+CD=AD+BC$(圓的外接四邊形)

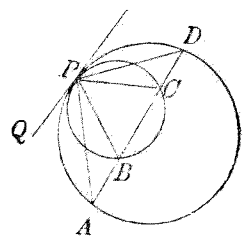
故 $AK-AL=\frac{1}{2}\Big\{(AB+AC-BC)-(AC+AD-CD)\Big\}$

$=\frac{1}{2}\Big\{(AB+CD)-(AD+BC)\Big\}=0,$

$\therefore\ AK=AL;$

即 AC 上二圓的切點一致。

(28) 設兩圓內切於 P,一割線交兩圓於 A、B、C、D,試證 $\angle APB=\angle CPD$。



【提示】 $\angle QPA=\angle PDA,$

$\angle QPB=\angle PCA,$

$\therefore\ \angle APB=\angle QPB-\angle QPA$

$=\angle PCA-\angle PDA$

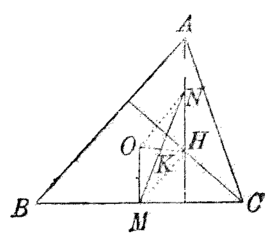
$=\angle CPD$。

(29) 過兩圓交點 A、B 的直線 PAQ、RBS,交圓周於 P、Q 和 R、S,試證弦 PR 平行 QS。

【提示】 證明 $\angle RPQ+\angle PQS=2\angle R$。

(30) 相切兩圓的平行直徑 AB、CD 和切點 E,試證 A、E、C 和 B、E、D 各在一直線上。

(31) 三角形的九點圓的直徑等於外接圓的半徑,其圓心爲外心和垂心的聯線中點。



【提示】 $\because$ H、O 分別爲垂心、外心,由 O 到 BC 的垂線爲 OM,則

$$OM=\frac{1}{2}AH_{\circ}$$

但九點圓的直徑為聯 AH 中點 N 和 M 的直線,故 $ONHM$ 為平行四邊形。

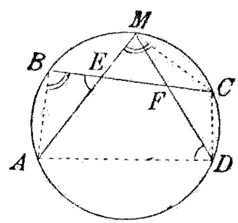
(32) 兩定點和同平面上一點相聯,如所成的角一定,那末角的分角線通過定點。

【提示】 通過這三點作一圓,而注意定弧的對角一定。

(33) 由三角形頂點 A 到對邊引垂線 AD,由 D 到 AB 及 AC 的垂線為 DE 及 DF,試證四邊形 $BEFC$ 內接於圓。

(34) 由弧 BC 的中點 M 引 MA、MD 二弦,和弦 BC 交於 E、F,四點 A、E、F、D 在一圓周上。

【提示】 在內接四邊形內 $\angle AMC+\angle ADC=2\angle R$,又在 $\triangle ABE$ 內 $\angle ABE+\angle BAE+\angle BEA=2\angle R$,

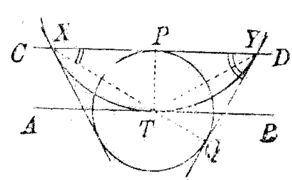


但 $\angle ABE=\angle AMC$,

$\angle BAE=\angle MDC$。

$\therefore\ \angle ADM=\angle BEA$。

(35) 二平行線 AB、CD,作任意圓切 AB 於定點 T,交 CD 於 X 和 Y。由 X、Y 所作的切線均切定圓。



【提示】 由 T 作二直線 TP、TQ 垂直於 CD 和切線,則

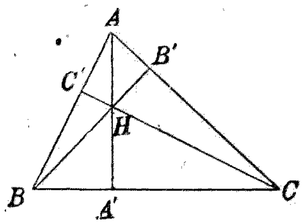
$$\angle TYQ=\angle TXY=\angle TYX,$$

故 TY 平分 $\angle CYQ$,

$$\therefore\quad TP=TQ。$$

但 TP 定長,故 QY 切於以 T 作中心,TP 作半徑的圓。

(36)設由 $\triangle ABC$ 三頂點到對邊的垂線爲 AA'、BB'、CC'。H 爲垂心,則三個圓 $AB'C'$、$BC'A'$、$CA'B'$ 交於一點 H。



【提示】 $\angle CC'A=\angle BB'A=\angle R$,故過 A、C'、B' 三點作的圓必過 H 點;其他證法同。

(37)在三角形各邊外側作正三角形,則這三個三角形的外接圓會於一點。

(38)完全四邊形的各邊所成四個三角形,其外接圓會於一點。

第二章 由計算法證明的問題

第一節 直線形的研究

I 計算法的重要性

關於證明同種類二量相等或不相等的關係,有非前章所說的方法能够解決的,尤其關於一個量爲他量的幾倍或幾分之幾的問題;或把這些量換算爲某種單位,然後加以比較。在這些情形下,則非用計算法不可。例如圓周比較直徑大,是大家容易知道的;但是直徑究竟比圓周大幾倍呢?那就非得經過計算後,是不能決定的。其他如"兩三角形有一角相等,則兩形的面積比例於兩夾邊的積",也非明瞭計算定理後方能了解。

II 三角形和矩形的研究

定理

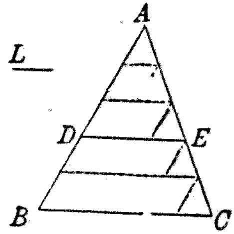
第一類 線分

(1) 平行於三角形一邊的直線,必分他二邊成比例線段。

【解】 設 AB 被分成的兩線段 AD、BD 有公度 L,例如

$$AD=3L, \qquad DB=2L,$$

以公度分 AB,由各分點引平行線和 AC 相交,從這些交點



引平行於AB的直線。這樣所成的三角形互相等,因知這些平行線亦等分AC;故本定理得以證明。

若AD和DB間沒有公度,則不能如上處理。今以AD的$\frac{1}{n}$爲P,BD比它的m倍大,而比$(m+1)$倍小。

$$mP<BD<(m+1)P,$$

$$\therefore\ \frac{BD}{m+1}<P<\frac{BD}{m},$$

故 $$0<\frac{BD}{m}-P<\frac{BD}{m}-\frac{BD}{m+1}=\frac{BD}{m(m+1)}.$$

但n增大時,m隨之增大,而P則從而減小;若使n爲非常大,則$\frac{BD}{m}$和P相差非常小,到了極限$\frac{BD}{m}=P$,在這種情形之下,AD和BD之比,就可視爲$n:m$整數之比。故AD、BD間無論有否公度存在,本定理皆眞。

(2) 分三角形的兩邊爲比例線分(內分及外分)的直線,和第三邊平行。

(3) 三角形頂角的分角線,內分底邊所成的比,等於他二邊的比;頂角的外角分角線外分底邊所成的比,等於他二邊的比。

【提示】 由C作CE線平行於$\angle A$的分角線AD,交BA於E。而知$AE=AC$。

第二類　相似

(4) 平行於三角形一邊的直線和他二邊所成的

三角形和原形相似。

【提示】 注意各角相等，各邊成比例。

(5) 各角分別相等的兩三角形相似。

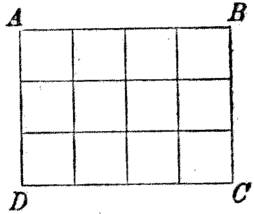
(6) 兩三角形的一角互等，夾這個角的邊成比例，則為相似三角形。

(7) 兩三角形的相當邊成比例，則為相似形。

第三類 面積

(8) 三角形面積為等底等高的矩形(一般為平行四邊形)面積的 $\frac{1}{2}$。

(9) 矩形(一般為平行四邊形)面積等於底和高的相乘積。



詳言之，表矩形面積的單位面積數等於高、底所含的單位數的乘積。

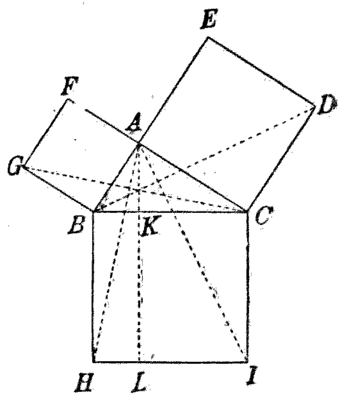
若鄰邊 AB、AD 有公度，則本定理可一目了然，若無公度，則不能即刻斷定其為真。然由證明定理 1 所用的方法，可知無論在何種情形下，本定理皆真。

(10) 三角形面積等於底、高相乘積的一半。

此為定理 7 及 8 的自然結論。

(11) 直角三角形斜邊上的正方形等於他二邊上正方形的和。(畢氏定理)

【證明】 設 AKL 爲直角頂點 A 到斜邊上正方形 BC 邊的垂線。



$$\triangle BAH=\frac{1}{2}BKLH,$$

$$\triangle ACI=\frac{1}{2}CKLI;$$

又 $$\triangle BCG=\frac{1}{2}ABGF,$$

$$\triangle BCD=\frac{1}{2}ACDE。$$

注意兩邊及夾角相等,得

$$\triangle BHA=\triangle BCG$$

$$+)\quad \triangle ACI=\triangle BCD$$

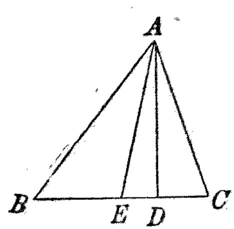
$$\therefore\quad \frac{1}{2}BCIH=\frac{1}{2}(ABGF+ACDE),$$

即 $$ABGF+AGDE=BCIH。$$

本定理在面積計算上非常重要。

(12)三角形二邊上正方形的和,等於底邊一半上的正方形及底邊中線上的正方形的和的二倍。

【證明】 設 AD、AE 分別爲 $\triangle ABC$ 內由頂點 A 到底邊的垂線、中線,



$$\overline{AB}^2=\overline{BE}^2+\overline{AE}^2+2BE\cdot DE,$$

$$\overline{AC}^2=\overline{CE}^2+\overline{AE}^2-2CE\cdot DE。$$

BE、CE 都等於 BC 的一半,故將上兩式相加,得 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AE}^2+\overline{BE}^2)$。

本定理應用甚廣,宜加注意。

(13)矩形及三角形的面積,比例於底和高的乘積。

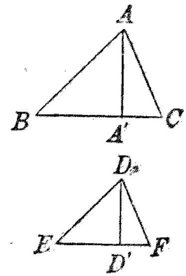
本定理爲定理 8 及 9 的自然結果。

(14)等底或等高的矩形或三角形的面積,和高或底成比例。

(15)四線分成比例,則內項的矩形等於外項的矩形。

(16)兩相似三角形面積的比,等於相似比的平方的比。

【略解】　設 ABC、DEF 兩三角形相似,



$$\triangle ABC=\frac{1}{2}BC\cdot AA',$$

$$\triangle DEF=\frac{1}{2}EF\cdot DD',$$

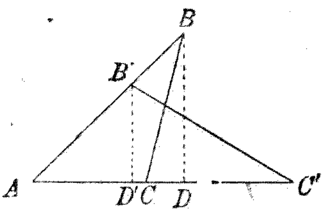
$$\therefore\quad \frac{\triangle ABC}{\triangle DEF}=\frac{BC\cdot AA'}{EF\cdot DD'},$$

但

$$\frac{BC}{EF}=\frac{AA'}{DD'},$$

$$\therefore\quad \frac{\triangle ABC}{\triangle DEF}=\frac{BC}{EF}\cdot\frac{AA'}{DD'}=\frac{\overline{BC}^2}{\overline{EF}^2}。$$

(17)一角相等的兩三角形面積的比,等於夾這角的兩邊相乘積的比。



設兩三角形 ABC、$AB'C'$ 的高爲 BD、$B'D'$,

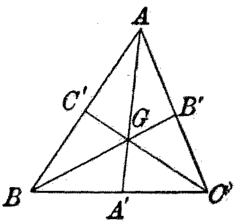
$$\frac{\triangle ABC}{\triangle AB'C'}=\frac{AC\cdot BD}{AC'\cdot B'D'}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

但 $\triangle ABD\backsim\triangle AB'D'$,

$$\therefore \quad \frac{BD}{B'D'}=\frac{AB}{AB'} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

由 (1)、(2) 得 $\dfrac{\triangle ABC}{\triangle AB'C'}=\dfrac{AC\cdot AB}{AC'\cdot AB'}$。

問 題 七



(1) 三角形的中線平分其面積。

(2) 三角形三頂點和重心聯結所成的三個三角形等積。

【提示】
$$\begin{array}{rl} & \triangle ABA'=\triangle ACA' \\ -) & \triangle BGA'=\triangle CGA' \\ \hline & \triangle AGB=\triangle AGC \end{array}$$

(3) 四邊形 $ABCD$ 的對角線 AC 平分 BD, 則 AC 平分這四邊形。

(4) 三角形三邊上的正方形和,等於三中線上的正方形和的 $\frac{4}{3}$ 倍。

【提示】 參照本節定理 12。

(5) 設 G 為 $\triangle ABC$ 的重心,試證

$$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CA}^2=3(\overline{GA}^2+\overline{GB}^2+\overline{GC}^2)。$$

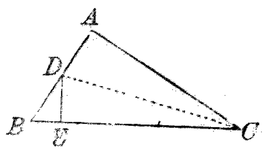
(6) 設 G 為 $\triangle ABC$ 的重心,試證

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BG}^2+\overline{CG}^2+4\overline{AG}^2。$$

(7) 設直角三角形內夾直角的兩邊為 a、b, 試以 a、b 表這三角形的內切圓半徑。

(8) 由直角三角形 ABC 的 AB 邊中點 D 作到斜邊

BC 的垂線 DE,試證



$$\overline{AC}^2=\overline{CE}^2-\overline{BE}^2。$$

【略解】 $\overline{AC}^2=\overline{DC}^2-\overline{AD}^2,$

但 $AD=BD,$

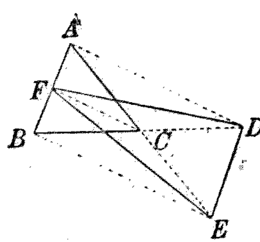
$$\therefore\ \overline{AC}^2=\overline{DC}^2-\overline{BD}^2 \cdots\cdots(1)$$

但 $$\left.\begin{aligned}\overline{DC}^2&=\overline{DE}^2+\overline{CE}^2\\ \overline{BD}^2&=\overline{DE}^2+\overline{BE}^2\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(2)$$

由 (1)、(2) 兩式得

$$\overline{AC}^2=\overline{CE}^2-\overline{BE}^2。$$

(9) 由 $\triangle ABC$ 各頂點引三平行線 AD、BE、CF,分別和其對邊相交於 D、E、F,試證 $\triangle DEF$ 的面積等於原形的二倍。



【略解】 $\triangle CEF=\triangle BCF$

$+)\ \triangle CDF=\triangle CAF$

$\therefore\ \triangle CEF+\triangle CDF=\triangle ABC$ (1)

又 $\triangle AED=\triangle ABD$

$-)\ \triangle ACD=\triangle ACD$

$\therefore\ \triangle DCE=\triangle ABC$ ⋯⋯⋯⋯(2)

(1)、(2) 兩邊相加,得

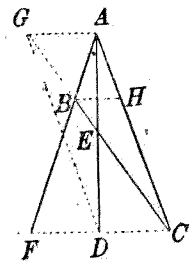
$$\triangle DEF=2\triangle ABC。$$

(10) 設 $\triangle ABC$ 底邊 BC 三等分於 D、E 二點,則

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{AD}^2+\overline{AE}^2+4\overline{DE}^2$$

【提示】 定理 2 參照。

(11)設$\triangle ABC$內,$AB=\frac{1}{3}AC$,由C到$\angle BAC$的分角線上的垂線爲CD,則BC平分AD。



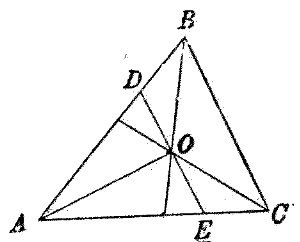
【略解】 延長AB到F,令AF等於AC,聯F和C,作成二等邊三角形AFC。由A作平行於CD的直線,交BC於G。次由B作平行於AG的直線BH,

$$AG=\frac{3}{2}BH\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$CD=\frac{1}{2}CF=\frac{3}{2}BH\cdots\cdots(2)$$

由(1)、(2) $AG=CD$,$ACDG$爲平行四邊形,故BC平分AD。

(12)過$\triangle ABC$的角A和角B的分角線交點O,且和AO垂直的直線分別交AB、AC於D、E,試證OD或OE爲BD、CE的比例中項。

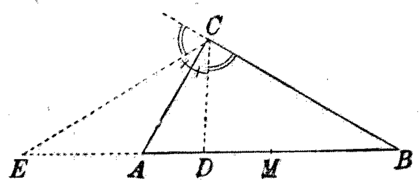


如$BC /\!/ DE$,則

$$DE=BD+CE。$$

【提示】 注意三頂角的分角線會於一點O,而$\angle ADO$或$\angle AEO$等於$\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)$。再由$\angle ADO$、$\angle AEO$分別爲$\triangle BDO$、$\triangle CEO$的外角,故可證$\angle BOD=\angle OCE$,及$\angle OBD=\angle COE$,而兩三角形相似。

(13)由直角三角形ABC的直角頂點C,引二直線CD、CE,和BC邊所作的角相等,而分別和AB或其延長線相交於D、E。設M爲AB的中點,試證MB爲MD及



ME的比例中項。

【略解】　CA、CB分別爲$\triangle DCE$的頂角C及其外角的分角線，

$$\therefore\quad EA:AD=EB:DB,$$

$$\therefore\quad \frac{EA}{EB}=\frac{AD}{BD},$$

由上式得
$$\frac{EA+EB}{EB-EA}=\frac{AD+BD}{BD-AD},$$

即
$$\frac{2ME}{2MB}=\frac{2MB}{2MD},$$

$$\therefore\quad \overline{MB}^2=ME\cdot MD。$$

(14)設四邊形$ABCD$的$\angle B$、$\angle D$分角線會於對角線AC上一點E，則$\angle A$、$\angle C$的分角線亦會於對角線BD上一點F。

【提示】　注意$AB:BC=AD:CD$。

(15)設I爲$\triangle ABC$的內心直線AI交BC於D，試證

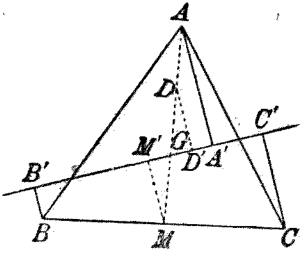
$$AI:ID=(AB+AC):BC。$$

(16)設$\triangle ABC$的內心爲I，切BC邊外側的旁接圓心爲O，試證　　$AI:AO=AB:AC$。

【提示】　注意$\triangle ABI$和$\triangle AOC$相似。

(17)$\triangle ABC$內，$AC=2AB$，由頂角A的分角線和BC邊的交點爲D，由D引平行於AB、AC的直線分別交AC、AB於F、E，設FE的延長線和CB的延長線交於G，則　(1) $EF=EG$，　(2) $\triangle BGE:\triangle ABC=1:9$。

(18) 過三角形的重心引任意直線,在直線一側的二頂點到這直線上的垂線的和,等於在另側的頂點到這直線上的垂線。



【提示】 設 $B'C'$ 爲過重心的任意直線,AA、BB'、CC' 垂直 $B'C'$。由 BC 中點 M 作 MM' 線垂直 $B'C'$,則

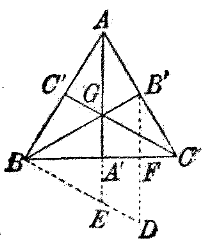
$$MM'=\frac{1}{2}(BB'+CC')。$$

設 DD' 亦垂直 $B'C'$,且 D 爲 AG 中點,可知 $\triangle MM'G=\triangle DD'G$。

(19) 設由 $\triangle ABC$ 各頂點和重心 G 引四平行線 AA'、BB'、CC'、GG' 和三角形外一直線 XY 相交,試證

$$AA'+BB'+CC'=3GG'。$$

(20) 一三角形的面積和由三中線所成的三角形面積的比爲何。



【略解】 由 B 引 CC' 的平行線 BD,由 B' 引 AA' 的平行線 $B'D$,若這兩直線相交於 D,則 $\triangle BB'D$ 便是由三中線所成的三角形。(兩三角形的三邊彼此平行)。

因 A' 爲 GE 的中點,F 亦爲 $L'D$ 的中點。故

$$\triangle BB'F=\frac{1}{2}\triangle BL'D;$$

但

$$\triangle BB'C=\frac{1}{2}\triangle ABC,$$

$$\triangle BB'F=\frac{3}{4}\triangle BB'C,$$

$$\therefore\quad \triangle BB'F=\frac{3}{8}\triangle ABC,$$

亦即 $$\triangle BB'D=\frac{3}{4}\triangle ABC。$$

(21) 設由直角三角形的直角頂 A 到斜邊 BC 的垂線足爲 D，則 $\overline{AB}^2=BD.BC$。

【提示】 注意兩三角形 ABD 和 ACD 相似，其相當邊成比例。

(22) 設 AD 爲由直角三角形直角頂 A 到斜邊 BC 的垂線，則 $BD:CD=\overline{AB}^2:\overline{AC}^2$。

【提示】 $$\triangle ABD\backsim\triangle ACD,$$

$$\therefore\quad \triangle ABD:\triangle ACD=\overline{AB}^2:\overline{AC}^2 \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

但這兩三角形的高相等，故兩形面積的比等於其底邊的比，即

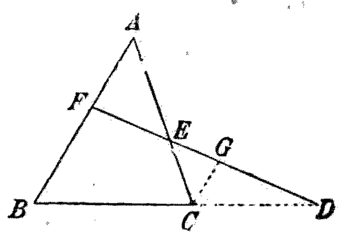
$$\triangle ABD:\triangle ACD=BD:CD \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

由 (1)、(2) 得 $$BD:CD=\overline{AB}^2:\overline{AC}^2。$$

分割三角形的面積時，本定理應用最多。

(23) 設一直線分別交 $\triangle ABC$ 三邊 BC、CA、AB 於 D、E、F，試證

$$\frac{BD}{CD}\cdot\frac{CE}{AE}\cdot\frac{AF}{BF}=1。$$



【略解】 由 C 引平行 AB 的直線 CG，交 DEF 線於 G。故

$$\frac{BD}{CD}=\frac{BF}{CG} \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

同樣　$\frac{CE}{AE}=\frac{CG}{AF}$……………………(2)

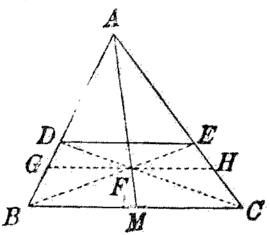
(1)(2)相乘,得　$\frac{BD}{CD}\cdot\frac{CE}{AE}=\frac{BF}{AF}$,

$\therefore\ \frac{BD}{CD}\cdot\frac{CE}{AE}\cdot\frac{AF}{BF}=1$。

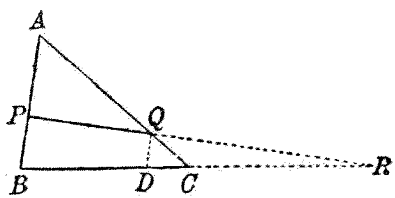
(24)前題的逆定理亦眞。

(25)引一直線平行於$\triangle ABC$的一邊BC,而分別和AB、AC相交於D、E。設CD、BE的交點爲F,則AF平分BC。

【提示】過F點作GH線平行於DE和BC,由證明$GF:DE=BG:BD$等關係,知$GF=FH$,即F爲GH的中點。



(26)於$\triangle ABC$的二邊AB、AC上分別取P、Q點,且令$PB=QC$,設直線PQ延長後交BC於R,則$RP:RQ=AC:AB$。



【略解】由Q作QD平行AB,

$\triangle RQD\backsim\triangle RPB$,

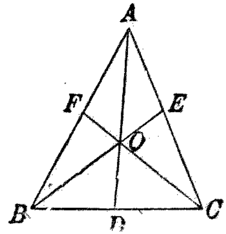
$\therefore\ \frac{RP}{RQ}=\frac{PB}{QD}$……………………(1)

又　$\triangle ABC\backsim\triangle QDC$,

$\therefore\ \frac{AC}{AB}=\frac{QC}{QD}$……………………(2)

因 $PB=QC$，故由 (1) 和 (2) 得

$$RP:RQ=AC:AB。$$



(27) 設由 $\triangle ABC$ 三頂點到對邊的三直線 AD、BE、CF 會於一點，則

$$\frac{BD}{CD}\times\frac{CE}{AE}\times\frac{AF}{BF}=1。$$

【略解】 由本節定理 17，得

$$\frac{BD}{CD}\times\frac{CE}{AE}\times\frac{AF}{BF}=\frac{\triangle DOB}{\triangle DOC}\times\frac{\triangle COE}{\triangle AOE}\times\frac{\triangle AOF}{\triangle BOF}$$

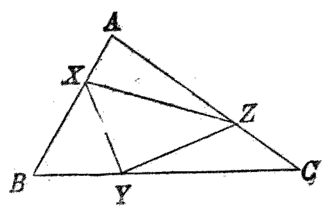
$$=\frac{\triangle AOF}{\triangle DOC}\times\frac{\triangle DOB}{\triangle AOE}\times\frac{\triangle COE}{\triangle BOF}=\frac{AO\times OF}{OD\times OC}\times\frac{OD\times OB}{OE\times OA}\times\frac{OC\times OE}{OB\times OF}$$

$$=1。$$

(28) 在 $\triangle ABC$ 三邊上取 AX、BY、CZ 分別等於 AB、BC、CA 的 $\frac{1}{3}$，試證：

$$\triangle XYZ=\frac{1}{3}\triangle ABC。$$

【提示】 參照本節的定理 17，而注意



$$\triangle XBY=\frac{2}{9}\triangle ABC,$$

$$\triangle ZYC=\frac{2}{9}\triangle ABC,$$

$$\triangle AXZ=\frac{2}{9}\triangle ABC。$$

III、多角形的研究

第一類 相似

1. 從一點到多角形各頂點引線分，而以所設比

分之,順次連結諸分點所成的多角形和原形相似。

2. 同邊數的正多角形互相似。

第二類　面積

多角形可分成三角形,所以多角形的求積法,可用三角形的求積法。

3. 相似多角形面積的比,等於相當邊的平方比。

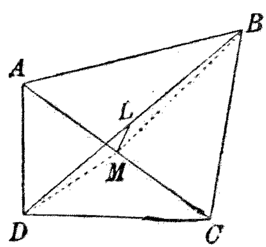
問題八

(1) 設梯形的兩底為 a、b,高為 h,則面積等於

$$\frac{1}{2}h(a+b)。$$

(2) 四邊形各邊上的正方形的和,等於對角線上正方形的和,加聯其中點的直線上正方形的四倍。

【略解】 設 L、M 為四邊形 $ABCD$ 的對角線的中點,則由本節定理 12,



$$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$$

$$+)\quad \overline{DA}^2+\overline{CD}^2=2(\overline{DM}^2+\overline{AM}^2)$$

$$\therefore\quad \overline{AB}^2+\overline{BC}^2\overline{CD}^2+\overline{DA}^2$$

$$=4\overline{AM}^2+2(\overline{BM}^2+\overline{DM}^2)$$

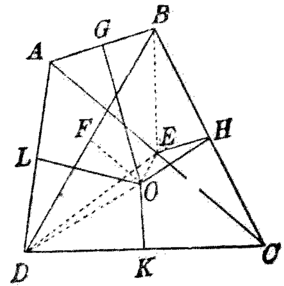
$$=4\overline{AM}^2+4(\overline{BL}^2+\overline{LM}^2)$$

$$=4\overline{AM}^2+4\overline{BL}^2+4\overline{LM}^2,$$

即 $$\overline{AB}^2\ \overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DA}^2=\overline{AC}^2+\overline{BD}^2+4\overline{LM}^2。$$

(3) 設四邊形 $ABCD$ 的對角線 AC、BD 的中點為 E、F;過 E 點且平行於 BD 的直線,和過 F 點且平行於 AC 的直線的交點為 O。聯 O 和各邊的中點,試證這四

直線分 $ABCD$ 爲四等分。



【略解】 $\triangle ABE=\frac{1}{2}\triangle ABC$,

$\triangle ADE=\frac{1}{2}\triangle ADC$,

$\therefore\ ABED=\frac{1}{2}ABCD$。

因 $EO \parallel BD$, $\triangle BED=\triangle BOD$,

即 $ABOD=ABED$;

$\therefore\ ABOD=\frac{1}{2}ABCD$,

$\therefore\ BCDO=\frac{1}{2}ABCD$。

但 K 爲 DC 中點, $\triangle COK=\frac{1}{2}\triangle COD$,

同樣 $\triangle COH=\frac{1}{2}\triangle BOC$,

$\therefore\ CKOH=\frac{1}{2}BCDO=\frac{1}{4}ABCD$。

(4)由正多角形一點到各邊的距離的和爲一定。

【提示】 設正 n 邊形的一邊長爲 a,由其中心到邊的距離爲 h。若由形內任意一點到各邊的距離爲 h_1、h_2、h_3、$\cdots\cdots h_n$,這正多角形的面積爲

$$\frac{1}{2}nah=\frac{1}{2}a(h_1+h_2+h_3+\cdots\cdots+h_n),$$

$$\therefore\ nh=h_1+h_2+h_3+\cdots\cdots+h_n。$$

(5)在直角三角形各邊上作相似多角形,則斜邊上的多角形等於他二邊上的多角形的和。

這是畢氏定理,可參照定理 3。

第二節　圓的研究

定　理

第一類　周和面積

1. 圓周爲直徑的 π 倍,故圓周和直徑成比例.

2. 圓的面積等於半徑平方的 π 倍,故圓的面積和半徑平方成比例。

3. 扇形的面積等於弧乘半徑的積的一半。

求圓周和直徑的比,可先求內接及外接於圓的正多角形的周和中心到邊的距離的比,正多角形的邊數增至無限時,則正多角形的周,和圓周的值相近.

圓面積的求法和這相同。先求內接及外接於圓的正多角形面積,如正多角形的邊數增到無限,則正多角形的面積和圓面積相近。

以下研究圓的內接及外接正多角形定理。

第二類　圓內接及外接正多角形

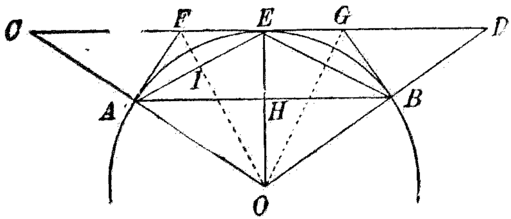
4. 設圓的內接正 n 邊形的周爲 p,而和它相似的外接正 n 邊形的周爲 P,則同圓的內接及外接正 $2n$ 邊的周 p'、P' 如下:

$$(1)\quad P'=\frac{2Pp}{P+p},$$

$$(2)\quad p'=\sqrt{P'p}。$$

【解】 設 AB 爲圓的內接正 n 邊形的一邊,則 CD 當爲外接正 n 邊形的一邊。

如圖，AE、EB 爲內接正 $2n$ 邊形的一邊，則 FG 爲外接正 $2n$ 邊形的一邊，



$$\therefore\quad nAB=p,\qquad nCD=P,$$

$$2nAE=p',\qquad 2nFG=P'。$$

因 OF 爲 $\angle COE$ 的分角線，

$$\frac{CF}{EF}=\frac{OC}{OE}=\frac{OC}{OA}=\frac{CD}{AB};$$

故
$$\frac{CE}{EF}=\frac{AB+CD}{AB},$$

$$\therefore\quad \frac{2nCE}{4nEF}=\frac{n(AB+CD)}{2nAB},$$

即
$$\frac{P}{P'}=\frac{p+P}{2p},$$

$$\therefore\quad 2Pp=pP'+P'P,$$

$$P'=\frac{2Pp}{P+p}。$$

次設 I 爲 AE 和 OF 的交點，$\angle EIF=\angle AHE=\angle R$，$\angle FEA=\angle EAH(\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{EB})$，

$$\triangle EIF\backsim\triangle AHE,$$

$$\frac{EI}{AH}=\frac{EF}{AE},$$

因 $AE=2EI$，　　$\therefore\quad AE^2=2AH.EF$，

故 $$4n^2\overline{AE}^2=8n^2AH.EF=(2nAH)(4nEF),$$

即 $$p'^2=pP'。$$

$$\therefore\quad p'=\sqrt{pP'}。$$

5. 設圓的內接正 n 邊形的面積 A,和外接正 n 邊形的面積 B 爲已知,則這個圓的內接及外接正 $2n$ 邊形的面積 A' 及 B' 爲

$$(1)\quad A'=\sqrt{A\cdot B},$$
$$B'=\frac{2A\cdot B}{A+A'}。$$

【解】 由前題的圖,知

$$A=2n\triangle AOH,$$

$$B=2n\triangle COE,$$

$$A'=2n\triangle AOE,$$

$$B'=4n\triangle EOF,$$

而 $$\frac{\triangle AOH}{\triangle AOE}=\frac{OH}{OE},\qquad \frac{\triangle AOE}{\triangle COE}=\frac{OA}{OC},$$

但 CE 和 AH 平行, $$\frac{OH}{OE}=\frac{OA}{OC},$$

$$\therefore\quad \frac{\triangle AOH}{\triangle AOE}=\frac{\triangle AOE}{\triangle COE},$$

即 $$\frac{A}{A'}=\frac{A'}{B}。$$

$$\therefore\quad A'=\sqrt{A\cdot B}。$$

次因 OF 爲 $\angle COE$ 的分角線,

$$\frac{\triangle COE}{\triangle EOF}=\frac{EC}{EF}=\frac{OE+OC}{OE}=\frac{OA+OC}{OA},$$

而 $$\frac{OA+OC}{OA}=\frac{OH+OE}{OH}=\frac{\triangle AOH+\triangle AOE}{\triangle AOH},$$

$$\therefore\quad \frac{\triangle COE}{\triangle EOF}=\frac{\triangle AOH+\triangle AOE}{\triangle AOH},$$

由此得

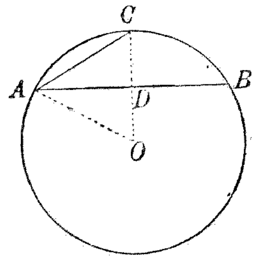
$$\frac{4n\triangle COE}{4n\triangle EOF}=\frac{2n\triangle AOH+2n\triangle AOE}{2n\triangle AOH},$$

$$\therefore\quad \frac{2B}{B'}=\frac{A+A'}{A},$$

$$\therefore\quad B'=\frac{2A\cdot B}{A+A}。$$

6. 圓的半徑 r,和其內接正 n 邊形的一邊 a 爲已知,試求內接於同圓的正 $2n$ 邊形的一邊 a'。

【解】 設 AB 邊爲 a,AC 邊爲 a',OD 垂直等分 AB 於 D。而



$$AD=\frac{1}{2}a,$$

$$AO=r,$$

$$\therefore\quad OD=\sqrt{r^2-\frac{1}{4}a^2},$$

由此得

$$CD=r-\sqrt{r^2-\frac{1}{4}a^2}。$$

而

$$a'=AC=\sqrt{AD^2+CD^2}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{4}a^2+\left(r-\sqrt{r^2-\frac{1}{4}a^2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{2r\left(r-\sqrt{r^2-\frac{1}{4}a^2}\right)}$$

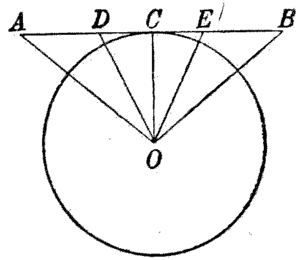
7. 圓的半徑 r,和其外接正 n 邊形的一邊 b 爲已知,試求同圓的外接正 $2n$ 邊形的一邊 b'。

【解】 設 AB 爲 b DE 爲 b',這兩邊和圓的切點爲 C,

則

$$AC=\frac{1}{2}b,$$

$$CD=\frac{1}{2}b'$$



OD 為 $\angle AOC$ 的分角線，而

$$AO=\sqrt{r^2+\frac{1}{4}b^2};$$

又 $$CD:AD=OC:AO,$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}b':\frac{1}{2}(b-b')=r:\sqrt{r^2+\frac{1}{4}b^2}。$$

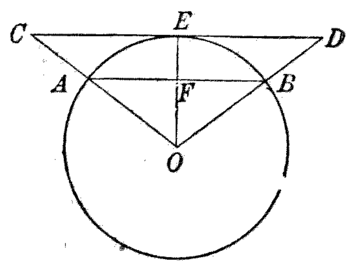
由此得 $$r(b-b')=b'\sqrt{r^2+\frac{1}{4}b^2},$$

$$\therefore \quad br=\left\{r+\sqrt{r^2+\frac{1}{4}b^2}\right\}b',$$

即 $$b'=\frac{br}{r+\sqrt{r^2+\frac{1}{4}b^2}};$$

或 $$b'=\frac{4r}{p}\left\{\sqrt{r^2+\frac{1}{4}b^2}-r\right\}。$$

8. 設 a、b 分別為半徑等於 r 的圓的內接及外接正 n 邊形的一邊，試證



(1) $$b=\frac{ar}{\sqrt{r^2-\frac{1}{4}a^2}},$$

(2) $$a=\frac{br}{\sqrt{r^2+\frac{1}{4}b^2}}.$$

【解】 設 AB 為 a，CD 為 b，E 為切點，

$$OF=\sqrt{r^2-\frac{1}{4}a^2},$$

而 $$\frac{CE}{AF}=\frac{OE}{OF},$$

$$\therefore \quad \frac{\frac{1}{2}b}{\frac{1}{2}a}=\frac{r}{\sqrt{r^2-\frac{1}{4}a^2}},$$

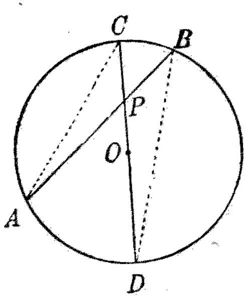
由此得
$$b=\frac{ar}{\sqrt{r^2-\frac{1}{4}a^2}}.$$

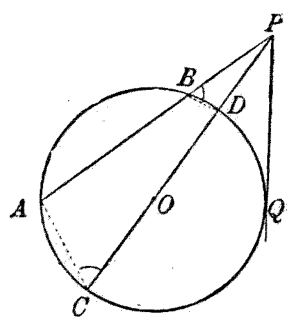
將上式兩邊自乘,得
$$b^2(r^2-\frac{1}{4}a^2)=a^2r^2,$$
$$\therefore\quad a^2(r^2+\frac{1}{4}b^2)=b^2r^2,$$

由此得
$$a=\frac{br}{\sqrt{r^2+\frac{1}{4}b^2}}。$$

第三類　圓的切線和割線

9. 由任意點 P 作一弦,則弦被這點分作二部分,其所包的矩形面積一定。





【解】 設 P 爲圓內任意一點,由這點作一弦 APB 及通過圓心的弦 CPD,

因
$$\angle\angle ACD=\angle ABD,$$
$$\angle APC=\angle BPD,$$
$$\triangle PBD\backsim\triangle PCA,$$
$$\therefore\quad PC\cdot PD=PA\cdot PB,$$

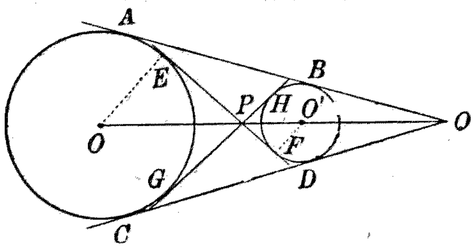
但 PC 和 PD 所包的矩形面積一定，故 PA 和 PB 所包的矩形面積也一定。

若 P 在圓外，則由 P 引切線 PQ，可證明

$$\overline{PQ}^2=PC\cdot PD。$$

【注意】 本定理應用甚廣，非常重要。

10. 兩圓的公用切線在聯兩圓心的直線上相交，且內分或外分兩圓心間的線分為兩圓的半徑的比。



【提示】 先證 OO'、EF、GH 可交於一點，聯 OE 及 $O'F$，因這二直線均垂直於 EF，

$$\therefore \quad \triangle OEP \backsim \triangle O'FP,$$

由此可證 $$OP:O'P=R:r。$$

但 R、r 為圓 O、圓 O' 的半徑。

問題九

(1) 以直角三角形的斜邊作直徑的圓的面積，等於以他二邊作直徑的圓的面積和。

(2) 設圓的半徑為 r，試求其內接及外接正三角形的一邊及面積。

$$
答\begin{cases}內接\begin{cases}一邊 & \sqrt{3}\,r\\ 面積 & \dfrac{3\sqrt{3}\,r^2}{4}\end{cases}\\[2ex] 外接\begin{cases}一邊 & 2\sqrt{3}\,r\\ 面積 & 3\sqrt{3}\,r^2\end{cases}\end{cases}
$$

(3)設圓的半徑爲 r,試求其內接及外接正六角形的周及面積。

$$
答\begin{cases}內接\begin{cases}周 & 6r\\ 面積 & \dfrac{3\sqrt{3}\,r^2}{2}\end{cases}\\[2ex] 外接\begin{cases}周 & \dfrac{12}{\sqrt{3}}r\\ 面積 & 2\sqrt{3}\,r^2\end{cases}\end{cases}
$$

(4)設圓的半徑爲 r,試求其內接及外接正八角形的一邊及面積。

$$
答\begin{cases}內接\begin{cases}一邊 & \sqrt{2\quad\sqrt{2}}\,r\\ 面積 & 2\sqrt{2}\,r^2\end{cases}\\[2ex] 外接\begin{cases}一邊 & 2(\sqrt{2}-1)r\\ 面積 & 8(\sqrt{2}-1)r^2\end{cases}\end{cases}
$$

【提示】 參照本節定理5、6、7、8。

(5)試求一圓的內接正六角形的周,和外接正八角形的周;由此而證明圓周率(π)的值在3和3.325之間。

(6)試求圓的內接正十角形的一邊(圓的半徑爲 r)。

答 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}r$

(7)試求圓的內接正十二角形的一邊及面積,但圓的半徑為已知。

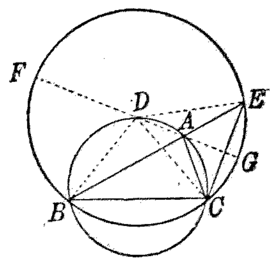
【提示】 參照本節定理4、5、6、7。

(8)試比較一圓內接正方形和正六角形的面積。

答 16:27

(9)圓內接三角形 ABC, D 為弧 BAC 的中點試證

$$AB\times AC=\overline{BD}^2-\overline{AD}^2。$$



【略解】 設 D 為圓心, DB 為半徑,作一圓,和 BA 的交點為 E, 注意

$$\angle BAC=\angle AEC+\angle ACE,$$

而 $$\angle AEC=\frac{1}{2}\angle BDC,$$

$$AC=AE,$$

$$\therefore\quad AB\times AC=AB\times AE。$$

設 AD 和外接圓的交點為 F、G, 則

$$AB\times AE=AF\times AG$$

$$=\overline{FD}^2-\overline{AD}^2。$$

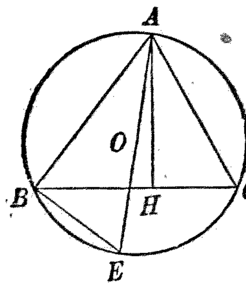
但 $$FD=BD,$$

$$\therefore\quad AB\times AE=\overline{BD}^2-\overline{AD}^2。$$

由此得 $$AB\times AC=\overline{BD}^2-\overline{AD}^2。$$

(10)設由 $\triangle ABC$ 的 A 點到 BC 的垂線為 AH, 這三角形的外接圓半徑為 R, 則

$AB\times AC=2R.AH$。



【提示】設 AE 爲直徑,聯 BE,

$\angle ABE=\angle R=\angle AHC$,

且　$\angle AEB=\angle ACB$,

故　$AB:AH=AE:AC$,

$\therefore\ AB\cdot AC=2R\cdot AH$。

(11)設三角形的兩邊爲 4 釐米、5 釐米,高爲 3 釐米,試求內接、外接圓的半徑。

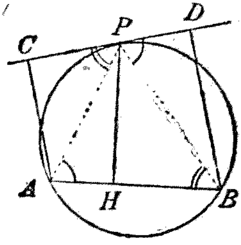
答 $\begin{cases} 外接\ \dfrac{10}{3}\ 釐米 \\ 內接\ \dfrac{5+\sqrt{7}}{3}\ 釐米 \end{cases}$

(12)設 CD 爲平行於直徑 AB 的弦,P 爲 AB 上一點,試證　(1)　$\overline{PC}^2+\overline{PD}^2=2(\overline{OB}^2+\overline{OP}^2)$,

(2)　$\overline{PC}^2+\overline{PD}^2=\overline{PA}^2+\overline{PB}^2$。

【提示】設 M 爲 CD 的中點,利用中線的定理。

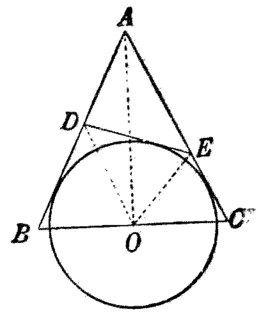
(13)由圓周上一點 P 到弦 AB 的垂線,爲由 A、B 到 P 點上切線的垂線的比例中項。



【提示】注意 $\triangle PCA\backsim\triangle PHB$ 和 $\triangle PAH\backsim\triangle PBD$。

(14)設圓心 O 在二等邊三角形 ABC 的底邊 BC 上,二等邊 AB、AC 和圓相切,任意切綫 DE 交 AB、AC 於 D、E,

試證 $BD.CE=OB^2$。

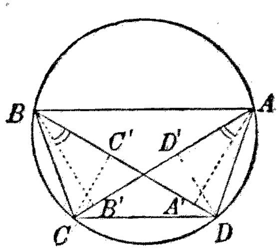


【提示】 注意 AO 為 $\angle A$ 的分角線且垂直於 BC；O 為旁心，故 $\angle ODE=\angle ODB$，$\angle DOE=\angle R-\angle A=\angle B=\angle C$。

由 $\triangle ODE\backsim\triangle OBD$ 及 $\triangle ODE\backsim\triangle OEC$，即可證明。

(15) 圓內接任意四邊形 $ABCD$ 內，試證

$$\frac{AB\cdot AD+CB\cdot CD}{BA\cdot BC+DA\cdot DC}=\frac{AC}{BD}。$$



【略解】 參照第 10 問題，設由 A、B、C、D 到對角線的垂線分別為 AA'、BB'、CC'、DD'。

由第 10 題

$$\begin{array}{rl} & BA\cdot BC=BB'\times 2R \\ +) & DA\cdot DC=DD'\times 2R \\ \hline & BA\cdot BC+DA\cdot DC=2R(BB'+DD')； \end{array}$$

同樣得

$$\begin{array}{rl} & AB\cdot AD=AA'\times 2R \\ +) & CB\cdot CD=CC'\times 2R \\ \hline & AB\cdot AD+CB\cdot CD=2R(AA'+CC')； \end{array}$$

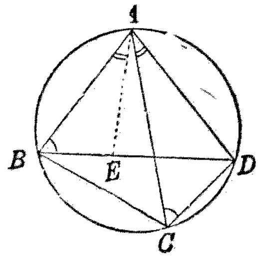
$$\therefore\ \frac{AB\cdot AD+CB\cdot CD}{BA\cdot BC+DA\cdot DC}=\frac{AA'+CC'}{BB'+DD'}=\frac{AC}{BD}。$$

(16) 圓內切四邊形的二對角線相乘積，等於每組對邊相乘積的和。

【略解】 作 AE，令 $\angle BAE=\angle CAD$，

$$\triangle ABE\backsim\triangle ACD,$$

$\therefore\quad AB:BE=AC:CD;$



由此得 $AB\cdot CD=BE\cdot AC$…………(1)

又因 $\angle BAC=\angle DAE,$

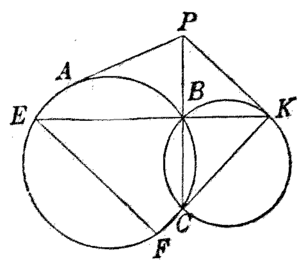
$\therefore\quad \triangle ABC\backsim\triangle ADE,$

$\therefore\quad BC:AC=DE:AD;$

由此得 $BC\cdot AD=AC\cdot DE$…………(2)

由(1)和(2)得 $AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC\cdot BD$。

(17) 由圓外一點作 PA 切線和 PBC 割線;作任意直線 PK,其長等於 PA。設 KB、KC 的延長線交圓周於 E、F,則直線 EF 平行於 PK。



【提示】 注意 PK 爲過 K、B、C 三點所作的圓的切線,

$\angle PKE=\angle BCK=\angle BEF,$

$\therefore\quad EF /\!/ PK.$

(18) 一動點關於兩定圓的點羃相等,則此點在垂直於兩圓心聯線的直線上。

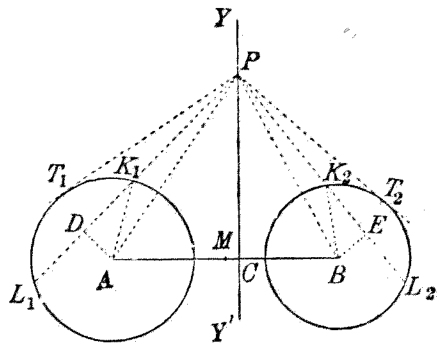
【略解】 設 A、B 爲定圓,P 爲動點。P 點爲對 A、B 二圓的點羃,則割線 PK_1L_1 和割線 PK_2L_2 有如次的關係:

$$PK_1\cdot KL_1=PK_2\cdot K_2L_2.$$

D、E 爲 K_1L_1、K_2L_2 的中點,則

$$PK_1\cdot PL_1=(PD-K_1D)(PD+K_1D)=\overline{PD}^2-\overline{K_1D}^2$$

$$=(\overline{PD}^2+\overline{DA}^2)-(\overline{K_1D}^2+\overline{DA}^2)=\overline{PA}^2-\overline{K_1A}^2.$$



同理得 $PK_2 \cdot PL_2 = \overline{PB}^2 - \overline{K_2B}^2$,

$$\therefore \quad \overline{PA}^2 - \overline{K_1A}^2 = \overline{PB}^2 - \overline{K_2B}^2.$$

設兩圓的半徑各為 R_1、R_2, 則

$$\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = \overline{K_1A}^2 - \overline{K_2B}^2 = R_1^2 - R_2^2.$$

過 P 引垂線 YY' 交 AB 於 C, 則

$$\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = (\overline{PA}^2 - \overline{PC}^2) - (\overline{PB}^2 - \overline{PC}^2)$$

$$= \overline{AC}^2 - \overline{CB}^2 = (AC + CB)(AC - CB),$$

若 M 為 AB 的中點,則

$$\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = 2AB \cdot MC,$$

而得 $2AB \cdot MC = R_1^2 - R_2^2$。

由上式, C 的位置可以決定,而合於動點 P 在 YY' 直線上。

次在 YY' 上任取一點,而可證明 P 點合於所設條件。

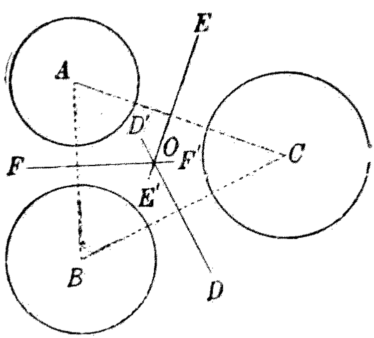
此 YY' 直線稱為這兩圓的根軸。

(19) 從根軸上圓外的一點,所引二圓的切線,互相

等。

【提示】 用前題圖,注意割線上$PK_1 \cdot PL_1 = \overline{PT}^2_1$,$T_1$為切點。

(20)三圓的圓心不在一直線,則每兩圓所有的根軸相會於一點。



【提示】 參照第18題。

(註) 三根軸相交的一點O稱為根心。

(21)在完全四邊形內:

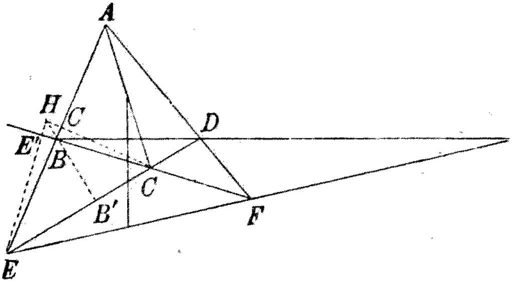
(a)以三對角線作直徑的圓,共有一根軸,

(b)故三圓心在一直線上,

(c)四邊形每三邊所成三角形(共四個三角形)的垂心在垂直於等分對角線的一直線上。

【略解】 設AC、BD、EF為完全四邊形$ABCD$的對角線,把這些對角線作直徑所畫的圓,必定過$\triangle CBE$各頂點C、B、E

到對邊垂線的足C'、B'、E'。由此知道H點爲關於三圓有等冪的一點。



同樣可以證明$\triangle CDF$的垂心也是對於三圓有等冪的點。

一般言之,關於三圓有等冪的點,僅爲一個根心,今既有二點以上,那末這三個圓必須有公用的根軸。

但根軸垂直於聯心線,故公用根軸的三個圓的圓心,必須同在垂直於根軸的一直線上。即三對角線的中點必同在一直線上。

由以上的論證,知道每次取四邊形的三邊共作成的四個三角形的垂心,在三圓公用的根軸上,而這根軸又明明地垂直於連結對角線中點的一直線。

(22)兩相似三角形ABC、$A'B'C'$在相似的位置,若$\triangle abc$內接$\triangle ABC$,且外接$\triangle A'B'C'$,則$\triangle abc$的面積爲$\triangle ABC$、$\triangle A'B'C'$面積的比例中項。

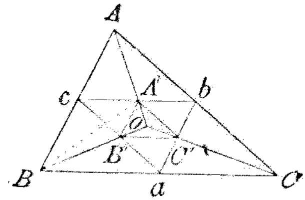
【略解】 設O爲$\triangle ABC$、$\triangle A'B'C'$的相似中心,$AB /\!/ A'B'$,故

$\triangle A'B'c' = \triangle A'BB'$,

$\therefore \quad OA'cB' = \triangle A'BO$,

$\therefore \quad \frac{\triangle ABO}{OA'cB'} = \frac{\triangle ABO}{\triangle A'BO}$

$= \frac{AO}{A'O}$ …………(1)



但 $\frac{AO}{A'O} = \frac{BO}{B'O} = \frac{\triangle A'BO}{\triangle A'B'O} = \frac{OA'cB'}{\triangle A'B'O}$ …………………(2)

故由(1)和(2),得

$$\frac{\triangle ABO}{OA'cB'} = \frac{OA'cB'}{\triangle A'B'O}。$$

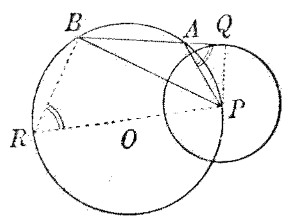
同樣可證明 $OA'bC'$,為 $\triangle ACO$ 和 $\triangle A'C'O$ 的比例中項;$OB'aC'$ 為 $\triangle BCO$ 和 $\triangle B'C'O$ 的比例中項。

(23) 以圓周上一點 P 為圓心作一圓,設 P 圓的切線和原圓相交於 A、B,線分 PA、PB 相乘的積為一定。

【提示】 設 O 為原圓的圓心,PR 為直徑;Q 為 P 圓切線的切點,則　$\triangle APQ \backsim \triangle RPB$,

$\therefore \quad PA:PQ = PR:PB$,

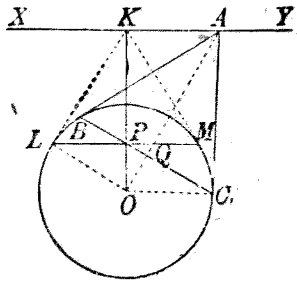
即　$PA \cdot PB = PQ \cdot PR$。



但 PQ、PR 是兩圓的直徑,故無論切點在何處。PA 和 PB 的相乘積為一定。

(24) 由定圓 O 外一已知線 XY 上任意一點引二切線,則連二切點的直線和過圓心到 XY 的垂線 OK 的交點為定點。

【略解】 設由XY上一任意點A引二切線AB、AC，BC和AO的交點Q，BC和OK的交點P，因$\angle AKP=\angle AQB=\angle R$，故$PQAK$爲圓內接四邊形，而割線$OK$和$OA$有如下的關係：



$$OP\cdot OK=OQ\cdot OA,$$

但在直角三角形AOC內，

$$OQ\cdot OA=\overline{OC}^2,$$

$$\therefore\quad OP\cdot OK=\overline{OC}^2.$$

因OK一定，OC也是一定，故OP亦必爲一定。

即
$$OP=\frac{\overline{OC}^2}{OK}。$$

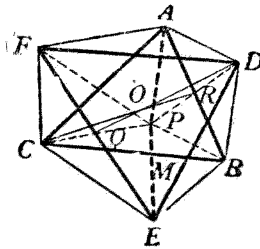
故BC通過定點P。

今由K引兩切線KL、KM，因$\triangle KLO$爲直角三角形，故LM和KO相交的一點，必有$\overline{LO}^2\div OK$的關係，由此知道P點也是OK和LM的交點。

這P點稱爲直線XY關於O圓的對極點，XY稱爲P點的對極線。

(25) 在$\triangle ABC$的各邊上作相似三角形ABD、BCE、CAF(各對應邊的順序相同)，試證$\triangle ABC$的重心和$\triangle DEF$的重心一致。

【略解】 由B作BP線平行DA且和它相等，連結E、P，則由假設
$$BP:BE=AB:BC,$$



$$\angle EBP=\angle ABC,$$

$$\therefore\quad \triangle BPE\backsim\triangle ABC。$$

又因 $BP=DA$，$EB=EB$，從而

$$EP=CF,$$

且

$$\angle CBE=\angle ACF,$$

$$\angle PEB=\angle ACB。$$

但

$$\angle CME=\angle CBE+\angle PEB=\angle ACF+\angle ACB,$$

$$\therefore\quad CF /\!/ EP。$$

即 $EPFC$ 爲平行四邊形，EF 和 CP 的交點 Q 爲 EF、CP 的中點。

又因 $ADBP$ 爲平行四邊形，AB 和 DP 的交點 R 爲 AB、DP 的中點。

故在 $\triangle CDP$ 內中線 CR 和 DQ 交於 O 點，且各被 O 點分成爲 $2:1$ 的兩線分。即 O 爲 $\triangle ABC$、$\triangle DEF$ 的重心。

第三章　特殊圖形的研究

第一節　諸直線通過一點的研究

定　理

1. 在$\triangle ABC$各邊上分別取D、E、F點(三點均不在延長線上;或兩點在延長線上),如成立下式的關係,則AD、BE、CF相會於一點,

$$\frac{BD}{CD}\times\frac{CE}{AE}\times\frac{AF}{BF}=1。$$

這定理的逆業已論及(參照問題7第23題),其他如"三角形三中線會於一點","三角形各角的分角線會於一點"等均屬於本定理。

2. 同圓各弦的垂直二等分線會於圓心。

"三角形各邊的垂直二等分線會於一點"爲本定理的一種情形。

3. 圓外接多角形各角的分角線會於圓心。

"正多角形各角的分角線會於一點"爲本定理的一種情形。

4. 在相似位置的兩相似多角形,其對應頂點的連線會於一點。

兩圓可看做邊數極多的相似多角形,其公用切線交於聯心線上的定點,這可包括於本定理之內。

5. 從三圓中每次取二圓,所得的三根軸會於一

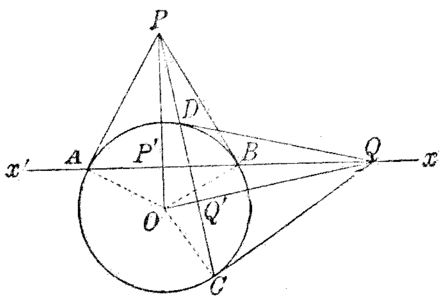
點。

"三角形的三垂線會於一點"乃屬於本定理,因在以三角形的三邊作直徑的三個圓中,每次取二圓,所得的根軸便是各垂線。

6. 圓周一點的對極線上各點關於此圓的對極線,通過同點。

本定理已在問題9的第24題述及,今更證明如下:

【證明】 設 xx' 爲 P 點關於 O 圓的對極線,這直線上一點 Q 的對極線爲 CD。命 PO 和 xx' 的交點爲 P', QO 和 CD 的交點爲 Q'。則



$$OP \cdot OP' = \overline{OA}^2,$$

$$OQ \cdot OQ' = \overline{OC}^2,$$

$$\therefore\ OP \cdot OP' = OQ \cdot OQ'。$$

由此知 P、Q、Q'、P' 四點在一圓周上。

但 P' 在以 PQ 作直徑的圓周上,Q' 也如此,故 PQ' 和 OQ 垂直相交。故 CD 通過 P 點。

xx' 上其他各點的對極線,也相同,故這些直線均通過定點 P。

【注意】 以上所述,僅限於初中程度,其他高深定理從略。

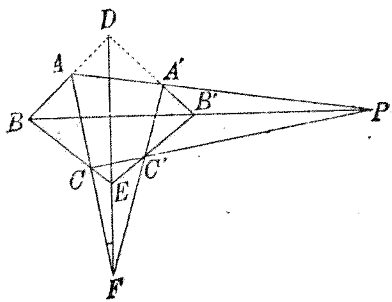
問　題　十

屬於定理 1 的問題。

(1) 設三角形 ABC 的內接圓切各邊的點為 D、E、F，則 AD、BE、CF 會於一點。

(2) 設 $\triangle ABC$ 的旁接圓切各邊於 D、E、F，試論 AD、BE、CF 會於一點。

(3) 兩三角形 ABC、$A'B'C'$ 的三對相當邊的交點在一直線上，則三直線 AA'、BB'、CC' 會於一點。



【略解】 設 D、E、F 為兩三角形三組邊的交點，這三點在一直線上。因 AF 為 $\triangle BDE$ 的截線，故

$$\frac{AD}{AB} \times \frac{BC}{EC} \times \frac{EF}{DF} = 1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

$A'F$ 為 $\triangle B'DE$ 的截線，故

$$\frac{A'B}{A'D} \times \frac{EC'}{B'C'} \times \frac{DF}{EF} = 1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

由 (1) 及 (2) 得

$$\frac{EF}{DF} = \frac{AB}{AD} \times \frac{EC'}{BC} = \frac{A'B'}{A'D} \times \frac{EC'}{B'C'} \quad \cdots\cdots (3)$$

設 $\triangle DBB'$ 的截線 AA' 和 BB' 的交點為 P，

$$\frac{AB}{AD} \times \frac{A'D}{A'B'} \times \frac{B'P}{BP} = 1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

由 (3)

$$\frac{AB}{AD} \times \frac{A'D}{A'B'} = \frac{EC'}{B'C'} \times \frac{BC}{EC} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (5)$$

由 (4) 及 (5) 得 $\frac{EC'}{B'C'}\times\frac{BC}{EC}\times\frac{B'P}{BP}=1$;

故 C、C'、P 同在一直線上,由此知 AA'、BB'、CC' 會於一點。

屬於定理 2 的問題

(4) 圓內接四邊形各邊的垂直二等分線和對角線的垂直二等分線會於一點,試加證明。

(5) 一點 M 在 $\triangle ABC$ 的 BC、CA、AB 邊上的射影為 A'、B'、C',則由 AM、BM、CM 的中點到 $B'C'$、$C'A'$、$A'B'$ 的各垂線會於一點。

(6) 在前題中由 A、B、C 到 $B'C'$、$C'A'$、$A'B'$ 的各垂線會於一點 M',且 M' 為 M 關於 $\triangle A'B'C'$ 外接圓心的對稱點。

(7) 設 AO、BO、CO 為 $\triangle ABC$ 三內角的分角線,a、b、c 為定點 M 關於這些線的對稱點,則直線 Aa、Bb、Cc 相交於 M',且 M' 為 M 點關於通過 M 點在 $\triangle ABO$ 各邊上的射影 A'、B'、C' 所作圓的中心的對稱點。

【提示】 注意 AM 和 AM', BM 和 BM', CM 和 CM' 分別和 A、B、C 的分角線作成等角。

屬於定理 3 的問題

(8) 二等邊三角形的旁接圓心,和連旁接圓切各邊各點所成三角形的外心一致。

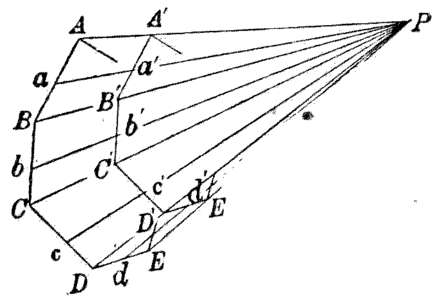
(9) 由圓外接多角形各頂點到連切點所成多角形各相當邊的垂線會於一點。

(10) 四邊形二組對邊的和彼此相等,則各內角的分角線會於一點。

屬於定理 4 的問題

(11) 連結在相似位置的兩相似三角形各相當邊中點的直線會於一點。

(12) 在相似位置的兩相似多角形各邊,順次分成同一比例,則連結相當邊上各點的直線會於一點。



【提示】 $ABCDE \backsim A'B'C'D'E'$, a、b、c、d 及 a'、b'、c'、d' 分各邊成如下的比:

$$\frac{Aa}{aB}=\frac{Bb}{bC}=\cdots\cdots\cdots=\frac{A'a'}{a'B'}=\frac{B'b'}{b'C'}=\cdots\cdots.$$

由上式得
$$\frac{a'B'}{aB}=\frac{A'a'}{Aa}=\frac{A'B'}{AB},$$
$$\frac{b'C'}{bC}=\frac{B'b'}{Bb}=\frac{B'C'}{BC},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

故這些線分會於 AA' 直線上有 $AP:A'P=AB:A'B'$ 關係的一點 P。

屬於定理 5 的問題

(13) 設兩圓相切於一點,而和另一圓交於 A、B 和

C、D，則兩圓的公用切線和 AB、CD 會於一點。

(14) 互相外切的三圓內側三公用切線會於一點，且此點到以三圓心作頂點的三角形各邊的距離相等。

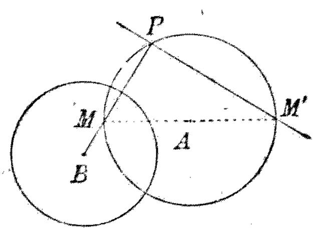
屬於定理 6 的問題

(15) 兩圓互相直交，則第一圓周上一點 M 關於第二圓的對極線，通過由 M 所引第一圓直徑的他端 M'。

【提示】 設第二圓(B)的半徑爲 R，BM 交第一圓於 P，

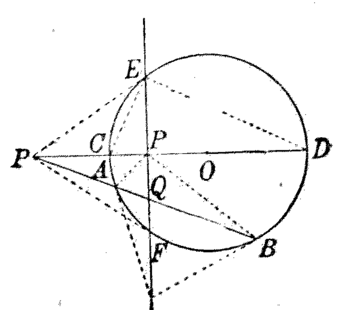
$$R^2=BM\cdot BP。$$

故 P 爲 M 關於 B 圓的對極線上一點。由此知 M 的對極線通過 P 點，且垂直 BM，即通過 MA 的他端 M'。



(16) 由圓外一點 P，引割線 PAB 交圓於 A、B，且和 P 點關於這圓的對極線相交於 Q，則 Q 和 P 分 BA 爲調和比。

【略解】 設 PO 交 O 圓和對極線於 C、D、P'，EC、ED 分別爲 $\angle PEP'$ 及其隣接角的分角線，故



$$\frac{P'C}{PC}=\frac{P'D}{PD}=\frac{P'E}{PE},$$

即 P、P' 爲分 CD 的調和分點。但 E、F 爲切點，故得

$$\frac{P'A}{PA}=\frac{P'B}{PB}=\frac{P'C}{PC}=\frac{P'D}{PD},$$

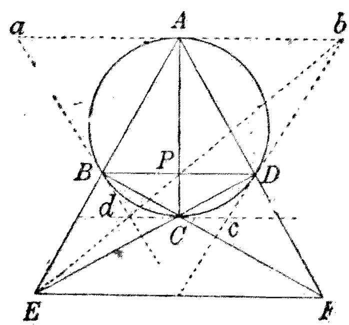
$$\therefore\ \frac{P'A}{P'B}=\frac{PA}{PB}。$$

即 PP' 爲 $\triangle P'AB$ 外角 P' 的分角線。由此知 P 的對極線 $P'Q$ 爲 $\triangle P'AB$ 的 $\angle P'$ 分角線，

$$\therefore\ \frac{P'A}{P'B}=\frac{AQ}{BQ}=\frac{AP}{BP},$$

即 PAB 被對極線 EF 分爲調和比。

(17) 圓內接完全四邊形的兩對角線交點爲另一對角線的對極點。



【略解】 設 $ABCD$ 爲圓內接完全四邊形；過各頂點引切線所成的四邊形爲 $abcd$。因 DC 爲 $\triangle bcd$ 的截線，交 bd 於 E，注意 $Cc=cD$，得

$$\frac{Eb}{Ed}=\frac{Db}{Cd}=\frac{Ab}{Bd}$$

又因 $Aa=Ba$，故 $\triangle abd$ 的截線 AB 也和 bd 相交於 E，即 AB、CD、bd 會於一點。

次因 AD 爲 b 的對極線，BC 爲 d 的對極線，故兩直線的交點 F 爲 bdE 的對極點。由此知 F 及 bdE 分 BC 爲調和比。

設 AC、BD 的交點爲 P，則 $CFDP$ 爲完全四邊形，對角線 FP 當被其他兩對角線 AB、CD 分爲調和比。

但 bdE 和 F 分 BC 爲調和比，故被 AB 和 CD 所截的部分亦爲 FP 和 F 分爲調和比。然 bd 通過 P，即 EP 爲 F 的對極線。

同樣可證 FP 爲 E 的對極線，由此知 P 爲 EF 的對極點。

(18) 圓外接四邊形的兩對角線和連二對邊切點的直線會於一點。

【提示】 設前題中 $abcd$ 爲圓外接四邊形，則由同題的證明，知 AC、BD、ac、bd 四直線會於一點 P。

【注意】 由本定理可證明"圓外接六角形的相對頂點的連線(三直線)會於一點"。

第二節　諸點在一直線上的研究

三點以上諸點通常不在一直線上，但在特殊情形下則在一直線上。其重要定理如次：

定　理

1. 諸相似三角形共有一相當角，則分此角對邊成比例的諸點，在同一直線上。

2. 在 $\triangle ABC$ 各邊上取 D、E、F（一邊延長，或三邊延長時），如成立下式的關係，則 D、E、F 在一直線上

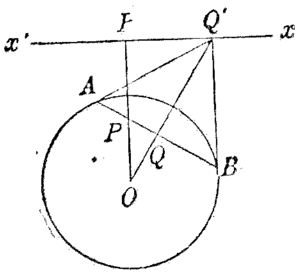
$$\frac{BD}{CD}\times\frac{CE}{AE}\times\frac{AF}{BF}=1。$$

3. 同一圓內，以通過某定點的直線爲對極線的

各點(極),在關於這定點的對極線上。

本定理爲前節定理 6 的逆,其證明大要如次:

設定點 P 的對極線爲 xx', OP 交 xx' 於 P', R 爲 O 圓的半徑,則



$$R^2=OP\cdot OP'\cdots\cdots(1)$$

過定點 P 作任意直線 AB, 其對極點 Q' 和圓心的連線交 AB 於 Q, 則

$$R^2=OQ\cdot OQ'\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

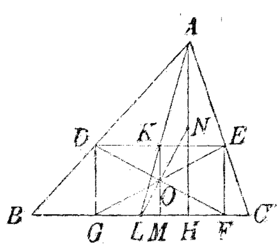
由 (1) 和 (2) 知 P、P'、Q、Q' 四點在同一圓周上。

但 $\angle PQQ'=\angle R$, 故 $\angle PP'Q'$ 必須等於直角,由此知 Q' 在垂直於 OP' 的直線上,即 P 的對極線 xx' 上。

問題十一

屬於定理 1 的問題

(1) 三角形內接矩形對角線的交點,在連結兩形公用邊中點,和由所對頂點到公用邊垂線的中點,所成的直線上。



【略解】 設 $DEFG$ 爲三角形內接矩形,由圖可知對角線交點 O 在連 DE 中點 K, 和 FG 中點 M 的

直線上，且 O 爲 KM 的中點，K 又在 $\angle A$ 的中線 AL 上。

設由 A 到 BC 的垂線爲 AH，因 KM 和 AH 平行 KM 的中點即 DF 和 EG 的交點 O，在 L 和 AH 的中點 N 的連線上。

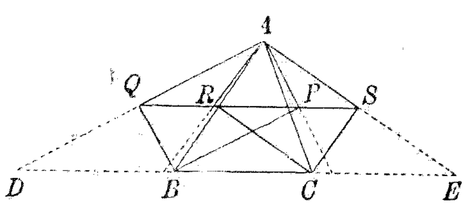
(2) 在 $\triangle ABC$ 的底邊 BC 上作一任意三角形 BCD，引平行於 BC 的 $B'C'$ 線，交 AB、AC 於 B'、C'，在這直線上作一三角形 $\triangle B'C'D'$ 和 $\triangle BCD$ 相似 A、D、D' 且在相似位置，試證 A、D、D' 在同一直線上。

屬於定理 2 的問題

(3) 三角形兩內角分角線交對邊的點和其他一角的外角分角線交對邊的點，在同一直線上。

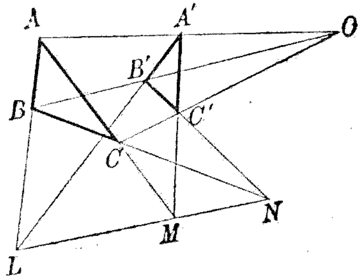
(4) 三角形三外角的分角線交對邊的點在同一直線上。

(5) 由 $\triangle ABC$ 的頂點 A 到 $\angle B$、$\angle C$ 分角線的垂線足在同一直線上。



【提示】 延長由 A 到各分角線的垂線，使之和 BC 相交，則知各垂線均被分角線等分，故各垂線足在通過 AB、AC 線中點的一直線上。

(6)連結兩三角形的相當頂點的直線會於一點，則各相當邊的交點在同一直線上。



【略解】 設 AA'、BB'、CC' 交於 O，而 AB 和 $A'B'$，AC 和 $A'C'$，BC 和 $B'C'$ 的交點分別爲 L、M、N.

由 $\triangle ABO$ 和截線 $A'B'$，得

$$\frac{AA'}{OA'}\times\frac{BL}{AL}\times\frac{OB'}{BB'}=1,$$

$$\therefore\quad \frac{BL}{AL}=\frac{OA'}{AA'}\times\frac{BB'}{OB'}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

由 $\triangle ACO$ 和截線 $A'C'$，得

$$\frac{AA'}{OA'}\times\frac{CM}{AM}\times\frac{OC'}{CC'}=1,$$

$$\therefore\quad \frac{AM}{CM}=\frac{AA'}{OA'}\times\frac{OC'}{CC'}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

由 $\triangle BCO$ 和截線 $B'C'$，得

$$\frac{BB'}{OB'}\times\frac{CN}{BN}\times\frac{OC'}{CC'}=1,$$

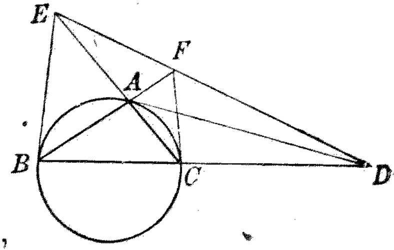
$$\therefore\quad \frac{CN}{BN}=\frac{OB'}{BB'}\times\frac{CC'}{OC'}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

由 (1)×(2)×(3) 得

$$\frac{BL}{AL}\times\frac{AM}{CM}\times\frac{CN}{BN}=1;$$

故 L、M、N 在一直線上。

(7)過 $\triangle ABC$ 三頂點引外接圓的切線和對邊的延長線相交的三點在一直線上。



【略解】 設過 A 點的切線和 BC 相交於 D，則

$$\triangle ABD \backsim \triangle CAD,$$

$$\therefore \quad \frac{AB}{AC}=\frac{BD}{AB}=\frac{AD}{CD},$$

由此得

$$\left(\frac{AB}{AC}\right)^{a}=\frac{BD}{AD}\times\frac{AD}{CD}=\frac{BD}{CD},$$

$$\therefore \quad \frac{BD}{CD}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2} \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

同樣，得

$$\frac{CE}{AE}=\frac{\overline{BC}^2}{\overline{AB}^2} \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

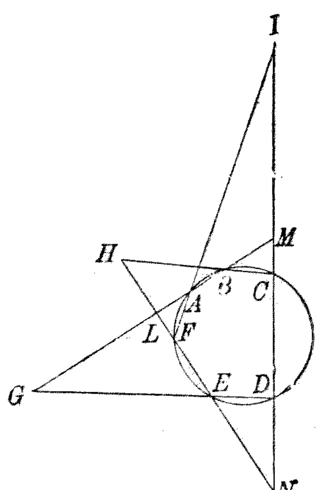
$$\frac{AF}{BF}=\frac{\overline{AC}^2}{\overline{BC}^2} \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

(1)×(2)×(3) 得

$$\frac{BD}{CD}\times\frac{CE}{AF}\times\frac{AF}{BF}=1;$$

故 D、E、F 在同一直線上。

(8) 圓內接六邊形 $ABCDEF$ 的對邊 AB 和 DE，BC 和 EF，CD 和 FA 分別延長相交於 G、H、I，這三交點在同一直線上。



【略解】、如圖所示，由 $\triangle LMN$ 和截線的關係，得

$$\frac{BL}{BM}\times\frac{HN}{HL}\times\frac{CM}{CN}=1 \cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{DM}{DN}\times\frac{GL}{GM}\times\frac{EN}{EL}=1 \cdots\cdots\cdots(2)$$

$$\frac{AL}{AM}\times\frac{FN}{FL}\times\frac{MI}{NI}=1\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

又
$$AL\times BL=FL\times EL\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

$$AM\times BM=CM\times DM\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

$$CN\times DN=EN\times FN\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

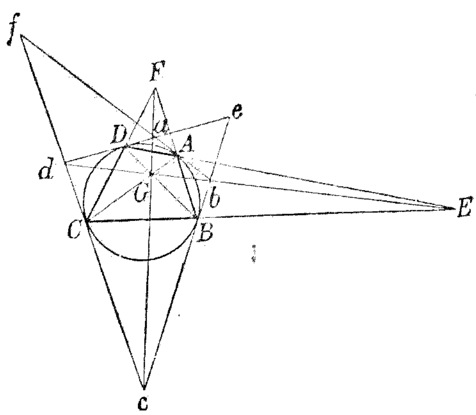
由(1)、(2)、(3)、(4)、(5)、(6)，得

$$\frac{GL}{GM}\times\frac{HN}{HL}\times\frac{MI}{NI}=1,$$

故 G、H、I 在一直線上。

屬於定理 3 的問題

(9)圓內接四邊形兩組對邊的交點，和相對頂點上切線的交點(四點)在一直線上。



【略解】 由前第 17、18 題，知 AC、BD、ac、bd 會於 G 點，EF 為 G 點的對極線。但 BD 為 e 的對極線，AC 為 f 的對極線，故 G

又爲 ef 的極點。即 EF 和 ef 必須一致，所以 E、F、e、f 四點在一直線上。

第二編 軌跡

第一章 對基準的方向爲已知的軌跡問題

第一節 軌跡問題證明法的研究

I 定理關係的研究

(1) $A=B$, 則 $C=D$;

(2) $C=D$, 則 $A=B$; (1)的逆;

(3) $C\neq D$, 則 $A\neq B$; (1)的對偶;

(4) $A\neq B$, 則 $C\neq D$; (1)的反面。

上列四定理中,(3)將(1)的終結否定,同時也否定(1)的假設,而將否定的終結作假設,將否定的假設作終結。(4)則否定(1)的假設和終結,而把否定的假設、終結當作假設、終結。

(1)和(3)眞僞相同,而(2)與(4)也眞僞相同。但其他二者相互間則不一定成立眞僞相同的關係。今舉實例如下:

(1)三角形的三中線會於一點。

(2)由三角形各頂點到對邊的三線分會於一點,則三線各爲中線。

(3)由三角形各頂點到對邊的三線分不會於一點,則三線分不是中線。

(4)由三角形各頂點到對邊的三線分不是中線

則不會於一點。

上述的(1)和(3)均真,但(2)和(4)則不真,因三角形各角的分角線和三角形各頂點到對邊的三垂線均會於一點。

(3)為(1)的對偶,而(4)為(1)的的反面。

軌跡問題可分為兩類:(a)問題中已將軌跡明白說出,只要加以證明;(b)先發見軌跡而後加以證明,故解決軌跡問題必須對於軌跡的證明和軌跡的發見法加以充分研究。

II 證明法的研究

如上所述,一定理就有四個關係定理存在,證明軌跡問題時必須證明互有逆關係的二定理。由此知必須證明下列四組中之一定理組。

定理組
- (1)和(3)……………………(I)
- (1)和(4)……………………(II)
- (2)和(3)……………………(III)
- (3)和(4)……………………(IV)

至於究竟應證明那一組,則視問題證明上的便利為轉移。

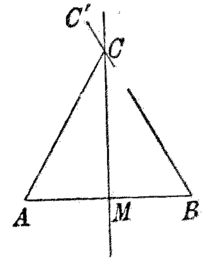
例如求"由兩定點有等距離的一點的軌跡"時,先證明:

(1)由兩點A、B有等距離的一點C,在AB的垂直

二等分線CM上;

而後證明:

(2) AB的垂直二等分線CM上一點和A、B的距離相等。



這是取(I)組的證明法。若在證明(1)後,而證明"和A、B不等距的點C'不在CM上"亦可,這是取(II)組的證法。若證明(2)後,即證明"不在CM上的點C'和A、B不等距"則爲(III)組的證明。至於依着(IV)組的證法,必須證明下列定理:

(3) 不在CM上的點C'和A、B不等距。

(4) 和A、B不等距的點不在CM上。

軌跡或單爲一根有限或無限的直線,或二直線以上;或爲一個圓弧;或一個圓周,或二個以上;也有爲平面的。爲決定這樣的問題,所以軌跡的證明當分如下的步驟:

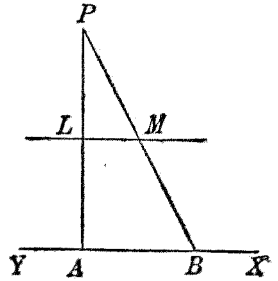
第一　證明有互逆或互反關係的二定理;

第二　軌跡的討論。

III 軌跡的發見

軌跡問題雖有將基準明白顯示的,但因構成複雜,有不能即刻知道基準的。若遇着這樣的問題,則軌跡解法的先決問題,須用適當的方法將基準決定。

例如半徑爲已知,求通過所設一點的圓的中心軌跡。將已知點作基準,則知和這點的距離等於已知半徑的點爲合於條件。



由定點到定直線的線分中點的軌跡,基準不明,但知由定點 P 到定直線 XY 的垂線 PA 的中點 L 爲軌跡中的一點;取它作基準,而知點的移動方向爲和 XY 平行,故即可求得軌跡。

當解問題時,充分觀察,以發見基準,而考察點對於基準的移動條件。

決定基準時,如未爲問題所明示,則多取點在軌跡中所佔的特殊位置以作成圖形(例如垂直於 XY 的直線 PA 的中點 L),而以這爲基準。

第二節　對基準的方向爲已知的軌跡

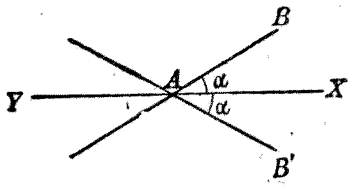
此場合的基準必爲定直線的定點,由此點取定方向而移動的點的軌跡必爲直線,因得如下的定理。

定　理

由定直線上一定點,取一定方向移動的點的軌跡,爲和過定點的定直線成一定方向的直線。

因由定直線 XY 上的定點 A 且和 XY 成 α 方向

的動點,當在通過 A 且和 XY 成 α 方向的直線 AB 及 AB' 上。其逆,這直線上一點和 XY 直線於 A 點成 α 方向。



問題十二

(1)於定直線上一定點,求此直線所切圓的圓心軌跡。

【提示】 試就半徑非常小時論之,這定點當爲所求軌跡中一點。故所求的軌跡爲過這點而垂直於定直線的直線。

(2)於定圓周上一定點,求切於此點的圓的圓心軌跡。

【提示】 注意這點的圓切線,和直角方向的移動。

(3)求過二定點的圓的圓心軌跡。

【提示】 注意和二定點有等距的點的軌跡。

(4)設二直線 OA、OB 互相垂直,引互相直交於定點 P 的二直線 PQ、PR,和 OA、OB 相交於 Q、R,求 QR 中點 M 的軌跡。

【提示】 即等於由 O、P 有等距的點的軌跡。

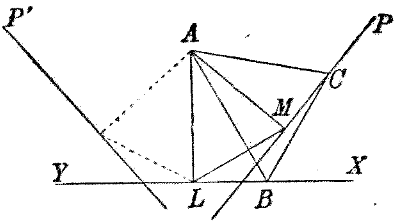
(5)一三角形和定三角形相似,且其頂點在定點 A 及定直線 XY 上,求第三頂點的軌跡。

【提示】 題中基準不明，故就移動三角形的特殊位置 ALM 研究，但 AL 垂直於 XY。

$\triangle AMC \backsim \triangle ALB$,

$\therefore \angle AMC = \angle R$;

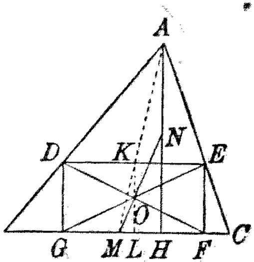
故求過 M 且和 AM 成直角方向移動的點的軌跡即可。



(6) 求定三角形內接矩形的對角線交點的軌跡。

【提示】 注意 $\triangle ABC$ 內接矩形 $DEFG$ 的對角線交點 O 在 BC 的中點 M 到高 AH 中點 N 的方向，軌跡的限界爲由 M 到 N。

其他二邊上的內接矩形的關係，也和此相同，故所求的軌跡爲三根直線。



(7) 由定銳角內一點到二邊的垂線和爲一定，求這點的軌跡。

【提示】 設已知角爲 $\angle AOB$，在 OA 上求得軌跡上一點，作到 OB 的垂線 AC，使等於已知二線分的和。

任意求軌跡中的一點 D，過 D 作 GF 和 AC 平行且相等，

$$DG = DE,$$

DE 爲由 D 到 OA 的垂線，故 AD 爲 $\angle OAG$ 分角線，方向已定。

由此知所求的軌跡為由 A 且和 OA 有一定方向的線分。

(8) 求到定銳角兩邊的垂線差為一定的一點的軌跡。

【提示】 利用"二等邊三角形底邊延長線上一點到兩邊的距離差為一定"。

(9) 求到二相交直線的距離和為一定的一點的軌跡。

【提示】 參照第7題而得所求的軌跡為一矩形。

(10) 求到二相交直線的距離差為一定的一點的軌跡。

【提示】 參照第8題和第9題，所求的軌跡為第9題的矩形四邊延長部分。

第二章 由基準的距離爲已知的軌跡

第一節 基準爲一點的軌跡研究

和一定點有等距離的點的移動軌跡必爲圓。

定理

和一定點有一定距離的點的軌跡,是以此點作中心,定距離作半徑的圓。

問題千三

(1)求定圓內定長弦的中點的軌跡。

【提示】 注意由圓心到這些弦的中點的距離爲一定,故知所求的軌跡爲同心圓。

(2)求兩端在直交兩直線上的定長直線中點的軌跡。

【提示】 軌跡爲以交點作中心,定長直線的$\frac{1}{2}$作半徑的圓周。

(3)求定點A和圓周一點的連線中點的軌跡。

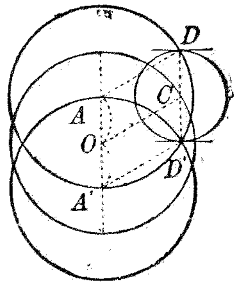
【提示】 以定點和定圓的圓心的連線中點作基準。

(4)由一點到定圓引兩切線,所夾的角等於$60°$,求點的軌跡。

【提示】 在以定圓的圓心作中心,定圓的直徑作半徑的圓周上。

(5)在一定方向引切線到半徑一定,圓心在定圓圓周的一圓上,求切點的軌跡。

【提示】 引定方向的切線到以O圓圓周上一點C作圓心,半徑爲一定的圓周上。由切點D作平行於OC的直線DA,和垂直於切線方向的O圓直徑相交於A,A爲定點,AD等於O圓的半徑,故以A爲基準,而求有一定距離的點的軌跡。



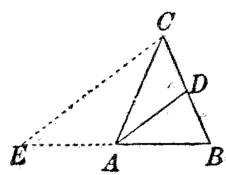
所求的軌跡爲由兩個等於O圓的圓。

(6)三角形的底邊AB的位置、長,和由A到對邊中線AD的長n爲已知,求頂點C的軌跡。

【提示】 延長BA到E,且令$BA=AE$,注意

$$EC=2AD,$$

故軌跡爲以E爲中心,$2n$爲半徑的圓周。



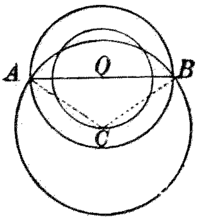
(7)由定圓周上二定點P和Q引平行弦,其他端和圓周相交於A、B,求AB弦中點的軌跡。

【提示】 注意AB弦的長爲一定。

(8)求半徑一定,二等分定圓圓周的圓的圓心軌跡。

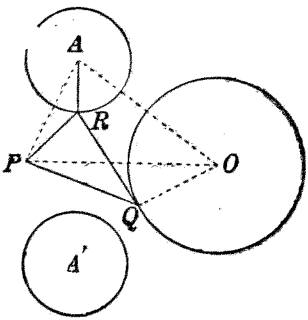
【提示】 設C圓交定圓O於A、B,而二等分其圓周,則AB爲O圓的直徑。但AC、BC一定,故OC亦是一定。由此知所

求軌跡爲和 O 圓同心的圓周。



(9)求以定點 P 和定圓圓周上一點爲二頂點的定形三角形的第三頂點軌跡。

【提示】 作定形三角形 POA，而和在軌跡中任意位置的$\triangle PQR$比較，



則因 $\angle APR=\angle OPQ$,

$AP:OP=RP:QP$,

故 $\triangle APR\backsim\triangle OPQ$,

$\therefore\ AR:OQ=AP:OP=$一定；

故所求的軌跡爲以 A 爲中心，AR(和 OQ 的比爲一定)爲半徑的圓周上。

第二節 基準爲一直線的軌跡研究

距定直線有一定距離的點的軌跡,當爲和定直線平行的直線,故得次定理。

定 理

距定直線有一定距離的點的軌跡爲和定直線平行的一對直線。

問 題 十 四

(1)求底邊相同,等積三角形的頂點軌跡。

【提示】 注意高爲一定。

(2)求底邊相同,等積三角形重心的軌跡。

【提示】 由底邊到重心的距離爲高的$\frac{1}{3}$。

(3)求一邊和面積一定的平行四邊形對角線交點的軌跡。

【提示】 高爲一定,由定邊到對角線交點的距離爲高的$\frac{1}{2}$。

第三節　基準爲一圓周的軌跡研究

距定圓圓周有一定距離的點的軌跡當爲定圓的同心圓周,故得如次定理。

定　理

由定圓周有一定距離的點的軌跡,在以定圓半徑和所設的距離的和或差作半徑,與定圓同心的一對圓周上。

問　題　十　五

(1)求切於定圓且半徑一定的圓的圓心軌跡。

【提示】 在以兩圓半徑的和或差作半徑,而和定圓同心的一對圓周上。

(2)求定圓內接直角三角形重心的軌跡。

【提示】 注意直角三角形的斜邊(底邊)中點,常爲定圓的圓心,故所求的軌跡在以定圓半徑的$\frac{1}{3}$爲半徑,且和定

圓同心的圓周上。

【注意】屬於本節各軌跡題可歸併於本章的第一節，因和定圓周有一定距離的點，距定圓圓心為有一定距離。

第三章 對基準所張的角爲已知的軌跡

在這場合中的基準或爲二定點,或爲一定直線,但二定點可以改作一直線,故以下僅就基準爲一定直線研究之。

在第一篇中曾經述及定直線上的對角爲一定時,角頂的軌跡爲圓弧,故得次定理:

定理

對定直線所張的角爲一定的點的軌跡,爲以那直線作弦的圓弧。

問題十六

(1)三角形底邊的位置大小和頂角爲已知,求頂點的軌跡。

【提示】此頂點的軌跡是以底邊爲對弦的圓弧。

(2)三角形底邊的位置、大小和頂角爲已知,求內心的軌跡。

【提示】由內心到底兩端所張的角一定。

(3)三角形底邊的位置、大小和頂角爲已知,求垂心的軌跡。

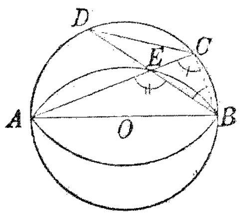
【提示】三角形的垂心和底兩端所張的角爲頂角的補角。

(4)底邊位置大小及頂角一定的三角形內,求對

於頂角的旁接圓圓心的軌跡。

【提示】 注意旁心對底邊所張的角等於兩底角的半和。

(5) 定圓內,以定直徑和定長的動弦,爲一組對邊的四邊形,求對角線交點的軌跡。



【略解】 設 AB 爲直徑, CD 爲定長的動弦,對角線 AC、BD 的交點爲 E, 則

$$\angle AEB=\angle ACB+\angle CBD=\text{一定},$$

故 E 的軌跡爲以 AB 作弦,而對此定角的二圓弧。

(6) 設 AB 爲 O 圓的定弦, CD 爲定長的動弦,求連此二弦兩端線分的交點軌跡。

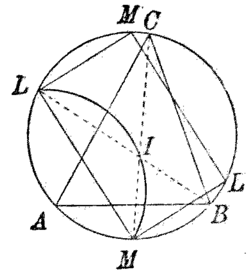
【提示】 解法同前題,但因兩端的連結方法不同,軌跡有在定圓內及定圓外的,故共得兩圓周。

(7) 過定三角形 ABC 的 BC 邊上一點 D, 引任意截線 EDF, 交 AC 於 E, 交 AB 的延長線於 F, 求圓周 CDE、BDF 的第二交點的軌跡。

【提示】 設第二交點爲 P, 因 $\angle BPC$ 和 $\angle BAC$ 互爲補角,故 P 在 ΔABC 的外接圓上。

(8) 三角形的二邊 AB、AC 分別和定方向平行,求所成內接於定圓 O 的三角形的內心軌跡。

【略解】 設垂直於AC及AB的直徑分別交圓周於L、L'，M、M'，這些點當有一定的位置，但BL、CM為$\angle B$、$\angle C$的分角線，其交點I為三角形ABC的內心，故IM所張的角為一定。由此知I在以LM為弦的定圓弧上。同樣就$L'M$、$L'M'$、LM'證之，故所求的軌跡為分別以LM、$L'M$、$L'M'$、LM'作弦的四圓弧。

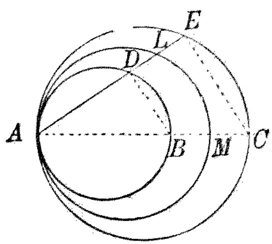


(9) 求過定點的弦中點的軌跡。

【提示】 圓心和弦中點的連線垂直於弦。

(10) 兩圓內切，求過切點的弦在兩圓周間部分的中點軌跡。

【提示】 設兩圓相切於A，其連心線為ABC，弦為ADE，L為DE的中點，M為BC的中點。注意LM平行DB。



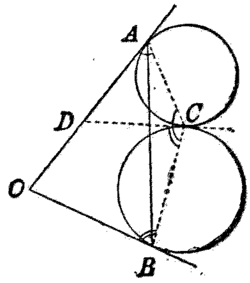
(11) 兩圓相交，求過交點的弦在兩圓周間部分的中點軌跡。

【提示】 參照前題。

(12) 兩圓相交，過交點的弦在兩圓周間的部分被分成定比，求分點的軌跡。

【提示】 此為前題的一般情形。

(13) $\angle AOB$內,切 OA 於定點 A 的圓和切 OB 於定點 B 的圓互相外切,求兩圓的切點的軌跡。



【略解】 設 C 爲兩圓的切點,則

$$\angle CBO=\angle BCD,$$

$$\angle CAO=\angle ACD,$$

但四邊形 $ACBO$ 內角的和等於四直角,故

$$\angle ACB=\frac{1}{2}(4\angle R-\angle AOB)=一定。$$

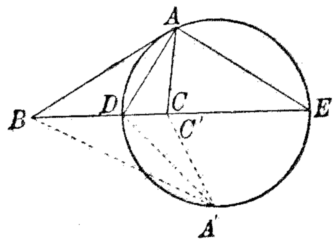
由此知所求的軌跡爲以 AB 作弦,而含定角的圓弧。

第四章　由基準的距離比爲已知的軌跡

第一節　基準爲兩點的軌跡研究

定　理

由兩定點有一定比例距離的一點軌跡,爲以所設的比內分及外分二點間作直徑的圓周。



【證明】 設B、C爲兩定點,A爲適合所設條件的一點,AD、AE分別爲$\angle BAC$的內角和外角的分角線,

$$\frac{CD}{BD}=\frac{AC}{AB}=\frac{CE}{BE}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

且 $$\angle DAE=\angle R,$$

卽A爲對DE所張的角等於直角的一點,故所求的軌跡爲以DE作直徑的圓周。

次設A'爲圓周上一點,和B、D、E相連。在DE間取C'點,令

$$\angle BA'D=\angle DA'C',$$

則$A'D$爲$\angle BA'C'$的分角線,因$\angle DA'E=\angle R$,故$A'E$爲$\angle BA'C'$($\triangle BA'C'$)的外角分角線,由此得

$$\frac{C'D}{BD}=\frac{A'C'}{A'B}=\frac{C'E}{BE}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

由(1)得 $$\frac{BE}{BD}=\frac{CE}{CD},$$

由(2)得 $$\frac{BE}{BD}=\frac{C'E}{C'D},$$

$$\therefore\ \frac{CE}{CD}=\frac{C'E}{C'D}\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

D、E爲兩定點，若C、C'均在D、E兩點間，則滿足(3)的關係，C和C'非重合不可。

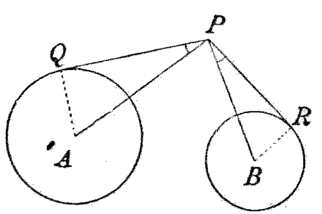
即圓周上之點適合於所設條件，由此知所求的軌跡爲以DE作直徑的圓周。

問題十七

(1)一點距二定點A、B的距離比等於$m:n$，試求其軌跡。

(2)對兩定圓有相等張角的點的軌跡。

【提示】設A、B爲定圓，P爲軌跡上的一點；由P引兩定圓的切線PQ、PR，則

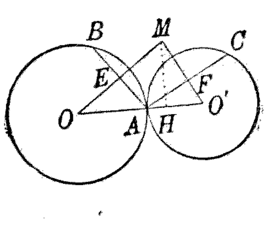


$$\triangle APQ \backsim \triangle BPR,$$

$\therefore AP:BP=AQ:BR=$一定。

(3)過外切兩圓O、O'的切點A，各引一弦AB和AC，令弦長的比等於定比$m:n$；由圓心O、O'分別作各弦的垂線，求其交點M的軌跡。

【提示】設MH爲由M到OO'的垂線，則



$$\triangle MOH \backsim \triangle AOE,$$

$$\triangle MO'H \backsim \triangle AO'F,$$

$$\therefore\ \frac{OM}{OA}=\frac{MH}{AE}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{O'M}{O'A}=\frac{MH}{AF}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

由(1)和(2)得

$$\frac{OM}{O'M}=\frac{OA}{O'A}\cdot\frac{AF}{AE}=\frac{OA}{O'A}\cdot\frac{n}{m},$$

但 OA、$O'A$ 是半徑,等於一定,故$\frac{OM}{O'M}$亦是一定。由此知:

若 $$\frac{OA}{O'A'}\cdot\frac{n}{m}=1,$$

即 $$\frac{OA}{O'A}=\frac{m}{n},$$

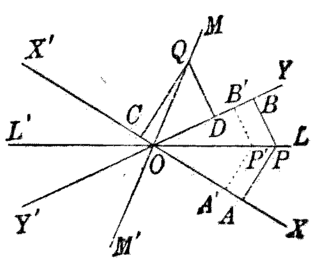
則 M 的軌跡爲 OO' 的垂直二等分線,其他則爲圓。

第二節 基準爲兩直線的軌跡研究

定理

距相交兩直線的距離比爲一定的點的軌跡,爲通過交點的直線.

【略解】 設由 P 點到定直線 XOX'、YOY' 的距離比爲 $m:n$,在 OP 上取任意一點 P',作到定直線的垂線 $P'A'$、$P'B'$,則有 $P'A':P'B'=PA:PB=m:n$ (Q 點亦用同法證之),但在此直線外的一點,則不能適合這條件,故所求的軌跡爲 LL' 和 MM' 兩直線。



【注意】 若兩定直線平行,則所求的軌跡爲與定直線平行的直線。

問題十八

(1)求到相交兩直線有等距的點的軌跡。

(2)求到直交兩直線的距離比爲 $1:\sqrt{3}$ 的點的軌跡。

第五章　由基準的距離平方和或差爲已知的軌跡

第一節　由基準的距離平方和爲已知的軌跡研究

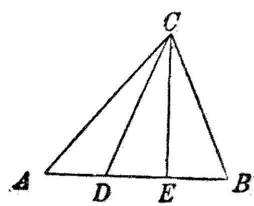
屬於此種的基準,普通爲兩定點(或爲直線的兩端)。但距兩定點的距離平方和爲已知的點的軌跡,爲以二定點間直線作直徑的圓周。故得次定理:

定　理

P 爲一定線分,由兩定點 A、B 到動點 C 的距離滿足

$$m\overline{AC}^2+n\overline{BC}^2=P^2,$$

則 C 點的軌跡爲以內分 AB 等於 $n:m$ 的 D 點作圓心的圓周。



【證明】 設由軌跡上一點 C 到 AB 作垂線 CE,則

$$m\overline{AC}^2=m(\overline{AD}^2+\overline{CD}^2+2AD.DE),$$

$$n\overline{BC}^2=n(\overline{BD}^2+\overline{CD}^2-2BD.DE),$$

$$\therefore\ m\overline{AC}^2+n\overline{BC}^2=m\overline{AD}^2+n\overline{BD}^2+(m+n)\overline{CD}^2+2DE(m.AD-n.BD),$$

若 $m.AD=n.BD$, 則

$$m\overline{AC}^2+n\overline{BC}^2=m\overline{AD}^2+n\overline{BD}^2+(m+n)\overline{CD}^2,$$

即 $$P^2=m\overline{AC}^2+n\overline{BC}^2=\frac{mn^2}{(m+n)^2}\overline{AB}^2+\frac{m^2n}{(m+n)^2}\overline{AB}^2+(m+n)\overline{CD}^2,$$

$$\therefore\quad \overline{CD}^2=\frac{mn}{(m+n)^3}\left\{\frac{(m+n)^2}{mn}P^2-(m+n)\overline{AB}^2\right\}$$
$$=\frac{mn}{(m+n)^2}\left\{\frac{m+n}{mn}P^2-\overline{AB}^2\right\},$$

卽 CD 爲一定。故以 D 作圓心,定長作半徑的圓爲所求的軌跡。

若 $m=n$,則 $AB=2AD$,由最後一式,得

$$\overline{CD}^2=\frac{1}{4}\left\{\frac{2}{m}P^2-4\overline{AD}^2\right\}。$$

設 $m=1$,則 $\overline{CD}^2=\frac{1}{2}P^2-\overline{AD}^2$,

$$\therefore\quad P^2=2(\overline{CD}^2+\overline{AD}^2)\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

由題意,$m=n=1$ 時,

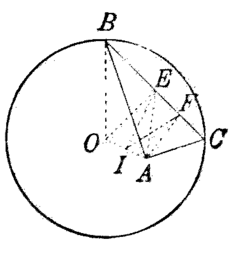
$$P^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

故由 (1) 和 (2),得

$$\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=2(\overline{AD}^2+\overline{CD}^2),$$

問題十九

(1) 以圓 O 內一定點 A 作直角頂點,其二邊和圓周相交於 B、C,求 BC 中點的軌跡。



【略解】 由圓心 O 到 BC 的垂線,交 BC於中點 E,因 $\triangle ABC$是直角三角形,

$$AE=\frac{1}{2}BC,$$

但 $\overline{OE}^2+\overline{BE}^2=\overline{OB}^2$,

$$\therefore\quad \overline{OE}^2+\overline{AE}^2=\overline{OB}^2\ (一定)。$$

命 OA 的中點爲 I,則

$$2(\overline{OI}^2+\overline{IE}^2)=\overline{OE}^2+\overline{AE}^2=\overline{OB}^2,$$

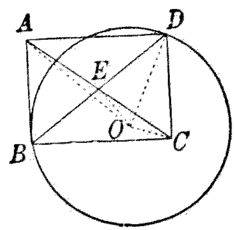
$$\therefore\ \overline{IE} = \frac{1}{2}\overline{OB}^2 - \overline{OI}\ (\text{一定})。$$

故 E 的軌跡爲以定點 I 作中心,而以滿足上式的 IE 作半徑,所作的圓周在 O 圓內的部分。

(2) 前題中,求由 A 到 BC 的垂線足 F 的軌跡。

【提示】 設 I 爲 OA 的中點,因 OE、AF 均垂直於 BC,且注意 $IE=IF$,則得同前題一樣的軌跡。

(3) 矩形的一頂點是定點,其相隣頂點在定圓周上,求第四頂點的軌跡。



【略解】 設矩形爲 $ABCD$,A 是定點,對角線交點爲 E,將 A、E、C 點和圓心連結,則

$$\overline{OA}^2 + \overline{OC}^2 = 2(\overline{AE}^2 + \overline{OE}^2),$$

但

$$AE = DE,$$

$$\therefore\ \overline{AE}^2 + \overline{OE}^2 = \overline{OD}^2\ (\text{一定}),$$

故

$$\overline{OA}^2 + \overline{OC}^2 = 2\overline{OD}^2,$$

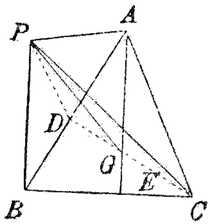
即

$$\overline{OC}^2 = 2\overline{OD}^2 - \overline{OA}^2\ (\text{一定})。$$

故所求的軌跡爲以 O 作圓心,而以滿足上式關係的 OC 作半徑,所作的圓周。

(4) 到 $\triangle ABC$ 三頂點的距離平方和等於一定的點的軌跡,爲以 $\triangle ABC$ 的重心 G 作圓心的圓周。

【略解】 設 CG 交 AB 於 D，P 爲軌跡上的一點，



$$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2=2(\overline{AD}^2+\overline{DP}^2)\cdots\cdots\cdots(1)$$

設 CG 的中點爲 E，則

$$\overline{CP}^2+\overline{GP}^2=2(\overline{CE}^2+\overline{EP}^2),$$

$$\therefore\quad \overline{CP}^2=2(\overline{CE}^2+\overline{EP}^2)-\overline{GP}^2\cdots\cdots\cdots(2)$$

又 $$\overline{EP}^2+\overline{DP}^2=2(\overline{DG}^2+\overline{GP}^2)\cdots\cdots\cdots(3)$$

因 $$CE=EG=GD,$$

故由 (1) (2) 和 (3) 得

$$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2=2(\overline{AD}^2+\overline{DP}^2+\overline{CE}^2+\overline{EP}^2)-\overline{GP}^2.$$

$$=2\{\overline{AD}^2+\overline{CE}^2+2(\overline{CE}^2+\overline{GP}^2)\}-\overline{GP}^2$$

$$=2\overline{AD}^2+6\overline{CE}^2+3\overline{GP}^2,$$

$$\therefore\quad GP^2=\frac{1}{3}\{\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2-2\overline{AD}^2-6\overline{CE}^2\}(\text{一定}).$$

故所求的軌跡是以 G 作中心的圓周。

【注意】 一般言之，以 G 表 $\triangle ABC$ 的重心，P 爲任意點，則有如下式的關係：

$$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2+\overline{CP}^2=\overline{AG}^2+\overline{BG}^2+\overline{CG}^2+3\overline{GP}^2.$$

第二節 由基準的距離平方差爲已知的軌跡研究

定 理

P 爲一定線分，由兩定點 A、B 到動點 C 的距離滿足 $$m\overline{AC}^2-n\overline{BC}^2=P^2,$$

則 C 點的軌跡爲以外分 AB 等於 $n:m$ 的 D 點作圓心的圓周。

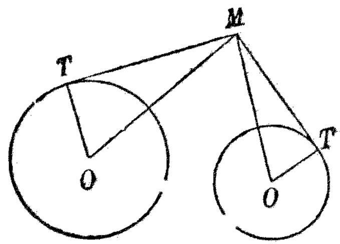
證法同前節定理,得

$$\overline{CD}^2=\frac{mn}{(m-n)^2}\left\{\frac{m-n}{mn}P^2+\overline{AB}^2\right\},$$

故知所求的軌跡是以 D 作圓心的圓周上。

問題二十

(1) 求到兩定圓 O、O' 的切線 MT、MT' 長的比爲 $m:n$ 的點的軌跡。



【略解】 $\overline{MT}^2=\overline{OM}^2-\overline{OT}^2$,

$$\overline{MT'}^2=\overline{O'M}^2-\overline{O'T'}^2,$$

$$\therefore\ \frac{\overline{MT}^2}{\overline{MT'}^2}=\frac{\overline{OM}^2-\overline{OT}^2}{\overline{O'M}^2-\overline{O'T'}^2}=\frac{m^2}{n^2},$$

$$n^2\overline{OM}^2-m^2\overline{O'M}^2=n^2\overline{OT}^2-m^2\overline{O'T'}^2;$$

但 OT、OT' 爲兩圓的半徑,等於一定,故上式左方也等於一定,由此知所求的軌跡爲一圓周。

(2) 到兩定圓的切線相等的點的軌跡。

【提示】 所求的軌跡爲兩圓的根軸。

由本節定理的關係式知 $m=n=1$ 時,D 距 A、B 爲無限遠,半徑 CD 也爲無限大,故在此特別場合所得的軌跡圓,成爲根軸的直線。

(3)兩定圓周爲一圓平分,求這圓的圓心軌跡。

【提示】 與前題同樣,所求的軌跡是一直線。

第六章 由基準的線分積爲已知的軌跡

本章專研究由一點到定直線或定圓周上的線分,和到此線分上某一點線分所包的矩形爲一定時,此等點的軌跡。

第一節 已知一點和一直線的軌跡研究

定理

由一定點A到定直線XX'上任意點B的線分AB,和到此線分上一點C的線分AC,所包的矩形爲一定且等於r^2時,C的軌跡是通過A的一圓周。

【略解】 今由A作到XX'的垂線AP,在此線上取Q點,令適合下式關係:

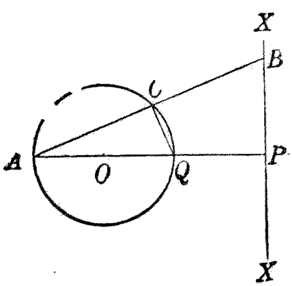
$$AP \cdot AQ = AC \cdot AB = r^2,$$

則Q爲定點,

$$\triangle ABP \backsim \triangle AQC,$$

$$\therefore \angle ACQ = \angle R。$$

由此知C點在以AQ作直徑的圓周上。



【注意】 O圓周稱爲直線XX'的反形,AB叫做動徑,A稱爲原點,$AB \cdot AC = r^2$稱爲反率。

關於反形的理論,應在高中幾何學中討論,本章

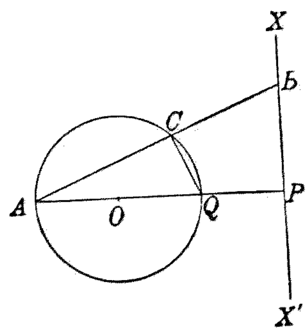
僅研究其極簡單的。

第二節　已知一點和一圓周的軌跡研究

定　理

1. 以圓周上一定點作原點時,則此圓的反形爲一直線,垂直於過原點的直徑。

【略解】 設 A 爲 O 圓周上的定點,反率爲 r^2,直徑爲 AQ,任意弦爲 AC。在 AQ、AC 線上分別取 P、B,令適合下式關係:



$$AP \cdot AQ = AB \cdot AC = r^2,$$

則 $$\triangle ACQ \backsim \triangle APB,$$

$$\therefore \angle APB = \angle ACQ = \angle R。$$

即所求的反形爲 XX'。

2. 原點在定圓外時,則此圓的反形爲一圓周。

【證明】 設 A 爲 O 圓外的原點,反率爲 r^2; 過 A 作 O 圓的直徑交圓周於 P、P',又過 A 引任意弦 BB'。若

$$AP \cdot AQ = AB \cdot AC = r^2,$$

則 $$\triangle ABP \backsim \triangle AQC;$$

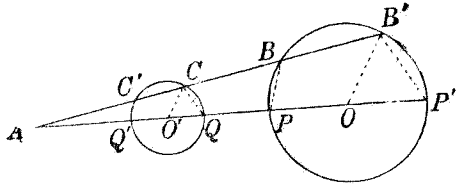
$$\therefore \angle AQC = \angle ABP = \angle AP'B',$$

$$\therefore CQ \parallel B'P'。$$

作 CO' 平行於 $B'O$,

$$B'O:CO' = B'P':CQ = P'O:QO',$$

$$\therefore \quad P'O:QO' = AP':AQ。$$



故 O' 為定點、CO' 為定長。由此知 C 點軌跡為以 O' 作中心，且通過 Q 的圓周。即 O 的反形為 O' 圓周。

第三編 作圖

第一章 用軌跡的方法

第一節 作圖題解法的階段

解作圖題時通常分作如如下的四階段:

(1) 解析(極簡單的題可略)

(2) 作圖

(3) 證明

(4) 討論

假定所求的圖形為能作圖的,而考察構成此圖形所須的條件,稱為解析。

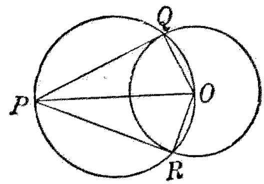
依着由解析所知的條件而構成圖形,稱為作圖。

明示這樣所得的圖形充分適合所求的圖形,稱為證明。

探究問題的能解或不能解;和能解時,可得幾個解答等,稱為討論。

例如引切線於定圓O,(解析)由一定點P到定圓O如能作切線PQ,則$\angle PQO$必定是直角。由此知Q點必在以PO作直徑的圓和O圓的交點上。

【作圖】 以PO為直徑作圓,而求其和O圓的交點,連此交點和P,即得所求的切線。



【證明】 這樣所成的圓形內，圓周上的點對直徑PO所張的角均是直角。故$\angle PQO$當然是直角，而PQ是切線。

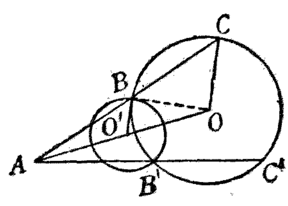
【討論】 若P點在O圓內，則不能引切線，即此問題爲不可能；若P點在O圓周上，則P點即爲切點，而僅有一個解；若P點在O圓外，則以PO作直徑的圓和O圓有兩個交點，即得兩切線。

第二節 用軌跡作圖的研究

此爲普通使用最廣的方法，依照所設的條件作兩軌跡，求得其交點，以確定所要圖形的主要部分的位置。

【例】 由圓外一點引割線，令圓外部分和圓內部分相等。

【解析】 設A爲圓外一定點，O爲定圓，ABC爲所求的割線，O'爲OA中點，則$O'B \parallel OC$，且$O'B=\frac{1}{2}OC$。故B點必爲以O'爲中心，O圓半徑的$\frac{1}{2}$爲半徑的圓周和O圓周的交點。由此得作圖法如下：



【作圖】 (1) 決定OA的中點O'；(2)以O'作中心，O圓

半徑的$\frac{1}{2}$作半徑畫一圓周，得此圓和定圓 O 的交點 B、B'；(3)連 A、B 和 A、B'。

【證明】　設 AB 交 O 圓周於另一點 C，由作圖

$$O'B=\frac{1}{2}OC,$$

故 $\angle ABO'$ 和 $\angle ACO$ 或相等，或為補角，但 $\angle ACO$ 等於 $\angle CBO$，而 $\angle CBO$ 和 $\angle ABO'$ 不為補角，

$$\therefore\ \angle ABO'=\angle ACO,$$

由此知 B 是 AC 的中點，故 ABC 為所求的割線。

【討論】　若 O' 圓不和 O 圓相交，則作圖為不可能，即 AO 比 O 圓半徑大三倍以上，作圖不可能。等於三倍時，O' 圓和 O 圓互相外切，A 和 O 圓心的連線為所求的割線。若比三倍為小，則 O' 圓和 O 圓恆相交於兩點，而有兩個解。

問題二十一

(1) 已知底邊、一底角和底邊上的高，求作這三角形。

【提示】　作決定頂點的二軌跡。

(2) 已知底邊、頂角和底邊上的高，求作這三角形。

(3) 已知底邊、頂角和底邊上中線，求作這三角形。

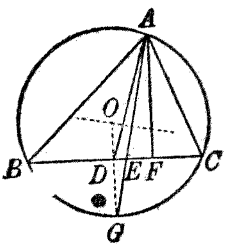
(4) 已知底邊、頂角和頂角分角線與底邊的交點，作這三角形。

【提示】 頂角的分角線通過三角形底邊對外接圓的弧的中點。

(5) 已知由一頂角到對邊的垂線、中線和分角線，求作這三角形。

【略解】 設 AD 爲中線，AE 爲 $\angle A$ 的分角線，AF 爲高，作三角形 ADF，且決定 AE 的位置。

外接圓 $\overset{\frown}{BC}$ 中點 G 的軌跡，爲 AE 的延長線和由 D 所作 DF 的垂線的交點。外接圓圓心的 O 軌跡爲 DG 的延長和 AG 的垂直二等分線的交點。O 圓的半徑等於爲 OG。此 O 圓和 DF 的交點 B、C 爲所求三角形的兩底端。



作圖可能所須的條件爲

$AD>AE>AF$ 不等邊三角形，

或 $AD=AE=AF$ 二等邊三角形。

(6) 已知一邊和兩中線，求作這三角形。

【提示】 先決定重心的位置。

(7) 已知底邊、高和他二邊的比，作這三角形。

(8) 已知底邊、他兩邊的比和底邊上的中線，作這三角形。

(9) 已知一邊、一角的分角線分對邊的兩部分，作這三角形。

【提示】 分角線分對邊的比等於他兩邊的比。

(10)已知一角的分角線、這角的對邊的長和對邊與分角線交點的位置,作這三角形。

(11)已知底邊、頂角和兩邊的比,作這三角形。

(12)已知一邊、面積和他兩邊的比,作這三角形。

(13)已知底邊、高和外接圓的半徑,作這三角形。

【提示】 參照第2題。

(14)引定長線 AB,和定圓 C 相切,其非切點的一端 B 在另一定圓上。

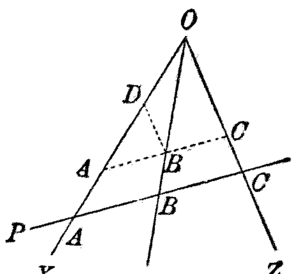
【提示】 B 點的軌跡爲 C 圓的同心圓周。

(15)過定點的直線被定圓截取的一段(弦)等於定長。

【提示】 求這定長弦的中點軌跡。

(16)過定圓 O 的圓周上一定點 M 引弦 MN,被定弦 AB 等分。

(17)三直線 OX、OY、OZ 相交於一點 O,由一定點 P 引直線,交三直線於 A、B、C,令 $AB=BC$。



【提示】 於 OY 上任意一點 B',作平行於 OZ 的直線 $B'D$ 交 OX 於 D。在 OD 延長線上取 A' 點,令 $OD=DA'$,連 A'、B' 且延長之,

交 OZ 於 C'。

由 P 引直線平行於 $A'B'$，此即所求的直線。

(18)定弦 AB 的兩端和定圓上一點 P 相連的直線 PA、PB 的比等於定比 $m:n$，求 P 的位置。

【提示】 內分及外分直線 AB 爲 $m:n$，以兩分點間的直線作直徑的圓周，爲 P 點的軌跡。

(19)一點距三定點 A、B、C 的距離等於 $a:b:c$，求此點。

【提示】 以內分、外分 AB 等於 $a:b$ 的兩分點間的直線作直徑的圓周，和以內分、外分 BC 等於 $b:c$ 的兩分點間的直線作直徑的圓周，均爲所求點的軌跡。

(20)引三定圓的切線相等。

【提示】 由三定圓的根心引三定圓的切線互相等。

(21)定直線上或定圓周上一點引二定圓的切線相等，求這點。

【提示】 兩定圓的根軸和此定直線或定圓的交點，即所求的點。

(22)一點對三定圓所張的角相等，求這點。

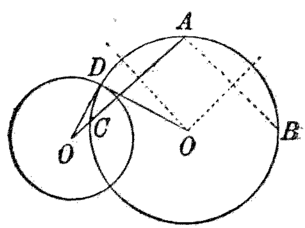
【提示】 此與第19題解法相類。

(23)定直線或定圓上一點對兩定圓所張的角相等，求這點。

【提示】 內分、外分兩定圓的連心線等於兩半徑的比，

以兩分點間線分作直徑的圓周通過所求的點。

(24) 過兩定點(A、B)作一圓 O' 和定圓 O 直交。



【提示】　設圓 O' 和定圓 O 相交於 D，OA 交 O 圓於 C，則

$$OC\cdot OA=\overline{OD}^2;$$

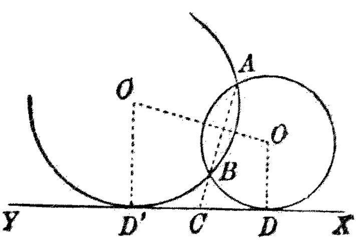
故 C 點爲定點，卽 O' 圓過 A、B、C 三點。

(25) 過兩定點 A、B 作一圓和定直線相切。

【提示】　設 AB 延長線交定直線 XY 於 C，由

$$AC\cdot BC=\overline{CD}^2,$$

在定直線上取得 D 點，過 D 作垂直於 XY 的直線，此線和 AB 的垂直二等分線的交點，卽是所求圓的圓心。



(26) 由定點 A 引直線交兩定長線 XX'、YY' 於 B、C，且令 $AB\cdot AC=P^2$ (P 爲一定)。

【提示】　以 A 作原點，求反率爲 P^2 的 YY' 的反形，求得此與 XX' 的交點 B，作 AB。

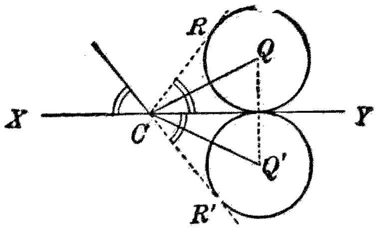
(27) 由定點 A 引直線分別交定直線 XX' 和圓周 O 於 B、C，且令 $AB\cdot AC=P^2$ (P 爲一定)。

第二章 用對稱圖形的方法

應用一點或一直線的對稱性質以解某類作圖題非常便利。

【例】 定直線XY的一側有兩定點P、Q，今於XY上求一點C，令

$$\angle PCX=2\angle QCY。$$



【解析】 假定所求的圖形爲可能，以Q爲中心作圓切於XY，由C引切線CR，

$$\angle PCX=\angle RCY。$$

由此知由C引切線CR'到Q'圓（Q圓關於XY的對稱圓），則CR'和PC必爲一直線。

【作圖】 (1)求Q（關於XY）的對稱點Q'，以之作中心，畫一圓和XY相切；(2)由Q'圓的切線PR'（但不和QQ'相交），得XY的交點C，此即所求的一點。

【證明】 由C引切線CR到Q'的對稱圓Q，則

$$2QCY=\angle RCY=\angle R'CY=2\angle Q'CY,$$

$$\therefore\ \angle Q'CY=\angle QCY,$$

但

$$\angle R'CY=\angle PCX,$$

$$\therefore\ \angle PCX=2\angle QCY,$$

即 C 為所求的點。

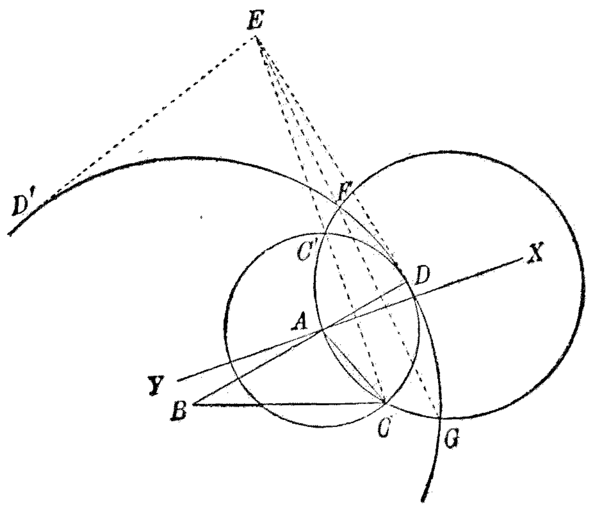
【討論】 由 P 可作兩切線到 Q' 圓,但另一切線和 XY 的交點在 P、Q 兩點外,不合所設條件。

問題二十二

(1) 由在定直線上一點 C 到直線同側兩定圓的切線和直線成等角,求這點。

(2) $\triangle ABC$ 的底邊 BC 的位置和大小一定,他二邊的和等於定長 l,頂角 A 在定直線 XY 上,作這三角形。

【略解】 設 $BD=AB+AC=l$,且 C' 為 C 點關於 XY 的對稱點,則 C、C'、D 在以 A 作圓心,AC 作半徑的圓周上。且此圓和



以 B 作圓心，BD 作半徑的定圓相切；命 E 為 D 點的切線和 CC' 的交點，則

$$\overline{ED}^2=EC\cdot EC',$$

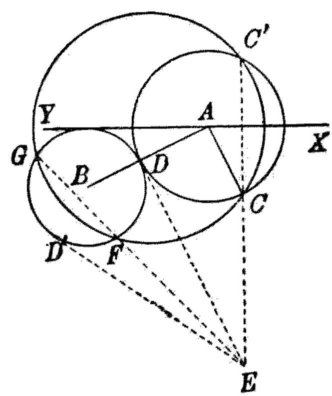
$$\therefore\quad ED=\sqrt{EC\cdot EC'}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

設過 C、C' 的任意圓和 B 圓相交於 F、G，因 E 是這些圓的根心，故 FG 也通過 E。

由此知先求通過 C、C' 的任意圓與 B 圓的交點 F、G 的連線 FG，和 CC' 延長線的交點 E；次取適合 (1) 式的 ED 作半徑，E 作圓心畫 E 圓，而求得和 B 圓的交點 D，最後求 BD 和 XY 的交點 A，即決定 $\triangle ABC$。

(3) 由已知點 B、C，到定直線 XY 上的一點的距離差等於一定 (l)，求這點。

【提示】 解法同前題。

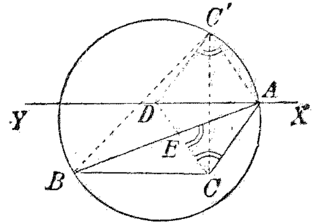


即以 l 作半徑畫 B 圓，通過 C、C' 的任意圓和 B 圓相交於 F、G。由 FG 直線和 CC' 線的交點 E，作 B 圓的切線 DE，BD 和 XY 的交點，即所求的 A 點。

這題和前題通常有二個解。

(4) $\triangle ABC$ 底邊 BC 的位置和大小一定，兩底角

B、C 的差等於定角 α，且頂點 A 在定直線 XY 上，求這三角形。



【略解】 設 C' 為 C 點關於 XY 線的對稱點，而

$$\angle BCD=\frac{1}{2}\alpha,$$

CD 的位置當可決定。

因 C' 是 C 的對稱點，故

$$\angle AC'D=\angle ACD,$$

但

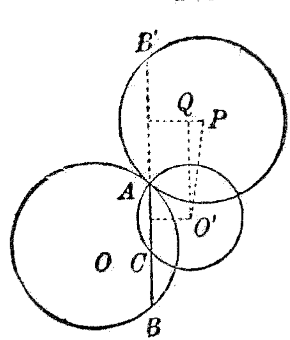
$$\angle ACE=\angle C-\frac{\angle C-\angle B}{2}=\frac{\angle B+\angle C}{2},\ (\alpha=\angle C-\angle B)$$

$$\angle AEC=\angle B+\frac{\angle C-\angle B}{2}=\frac{\angle B+\angle C}{2},$$

$$\therefore\ \angle ACE=\angle AEC=\angle AC'D,$$

由此知四邊形 $AEDC'$ 內接於圓，即 $\angle EAC'$ 是定角 CDC' 的補角。故以 BC' 作弦，而對這角的圓弧和 XY 的交點，便是所求的 A 點。

(5) 過相交兩圓 O、O' 的一交點 A 引一弦，在 A 的一側和兩圓相交於 B、C，令 AC、AB 的和等於定長 l。



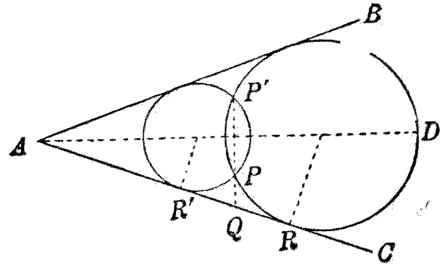
【略解】 作 O 圓關於 A 點的對稱圓 P，延長 BA，交 P 圓於 B'，因 $AB=AB'$，故令 $B'C$ 等於定長 l 即可。

由此知，取 $O'Q=\dfrac{l}{2}$，而作直

角三角形 $O'PQ$；過 A 作平行於 $O'Q$ 的弦。

(6) 作通過定點 P，且和交於 A 的 AB、AC 線相切的圓。

【提示】 所求的圓，其圓心在 $\angle BAC$ 的分角線 AD 上，且通過 P 的對稱點 P'（關於 AD）。



設 $P'P$ 交 AC 於 Q，則 AC 上的切點 R（或 R'）必滿足

$$QP \cdot QP' = \overline{QR}^2。$$

(7) 平行四邊形對角線的交點和四邊上的 P、Q、R、S 點均為已知，作這平行四邊形。

(8) 設 AB 為定弦，M 為弦上的定點，在弦的一側有兩定點 C、D（均在圓周上）。

弦 AB 的他側圓周上一點 P，使 CP、DP 截取 AB 的 EF 部分被 M 等分，求 P 點。

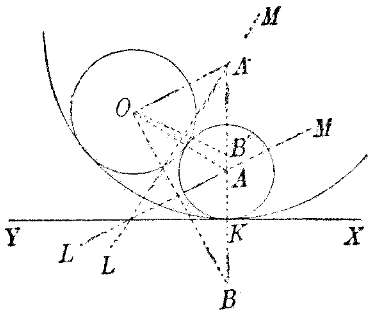
【提示】 求 C 關於 M 的對稱點 C'，而注意 $\angle C'ED$ 和 $\angle CPD$ 互補。

第三章　用補助點的方法

作圖時常利用不屬於圖形的點(補助點),而得到非常的便利,問題22中的第五題利用補助點Q,即其一例。

【例】一圓切於定直線XY上的K點,且和定圓O相切,作這圓。

假定XY在O圓外,則所求圓周有內切和外切兩種。



今設求得的圓爲外切,延長XY上的垂線AK到B,且令BK等於O圓的半徑。

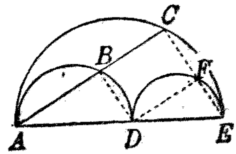
因$\triangle ABO$爲二等邊三角形,所求的圓心A當爲OB的垂直二等分線和AK的交點,由此知以A爲圓心,AK爲半徑的圓,即所求的圓周。

若圓內KB'等於O圓的半徑,以OB'的垂直二等分線和AK的交點作圓心,$A'K$作半徑的圓周,爲和O圓相內切的一圓,亦爲所求的圓周。

【注意】如XY和O圓相切,則所作的圖形怎樣?

問題二十三

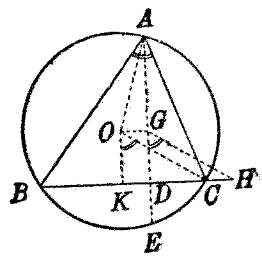
(1)過兩內切定圓的切點,作大圓的弦,令兩圓周間部分弦的長等於 l。



【略解】 設 A 爲兩圓的切點,過 A 點的連心線交兩圓於 D、E。

作第三圓切兩定圓於 D、E,引等於 l 的 DF,得補助點 F,由 A 引平行於 DF 的弦 ABC 即所求的弦。

(2)由 $\triangle ABC$ 的 A 到 BC 的垂線 AD 分底邊爲兩部分 BD、CD,其所包的矩形 $BD\cdot CD=m^2$ 爲已知,作這三角形。但頂角和高均爲已知。



【提示】 先求得外接圓,以這圓的圓心作補助點,

$$BD\cdot CD=AD\cdot DE=m^2,$$

$$\therefore\quad DE=\frac{m^2}{AD},$$

但 $$AE=AD+\frac{m^2}{AD},$$

故 AE、DG 爲已知。

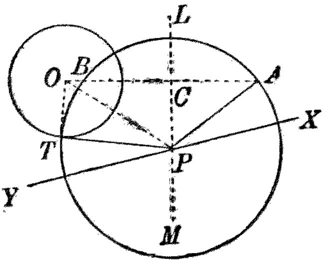
$$\triangle GDH\equiv\triangle OKC,$$

$$\angle DGH=\angle KOC=\angle A,$$

故可作 $\triangle GDH$。由此得知等於外接圓半徑的 GH。

故以 AE 的垂直二等分線 OG,和以 A 作圓心,GH 爲半徑畫一圓弧,可決定 O 點位置(G 是 AE 的中點)。

(3)由定線上一點 P 到定點 A 的距離 PA,和由 P



到定圓 O 的切線 PT 相等,求 P 點。

【提示】 注意以 PT 作半徑的 P 圓和 O 圓直交,設 OA 和 P 圓的交點為 B,則

$$OA\cdot OB=\overline{OT}^2.$$

故 B 點可以決定。以 AB 中點 C 為決定 P 點位置的補助點,作 AB 的垂線 LM,則 LM 和 XY 的交點即所求的 P 點。

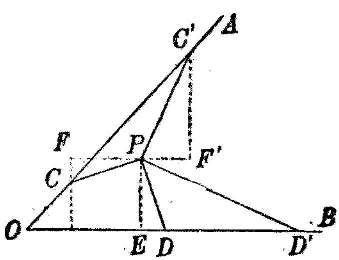
(4) 求 $\triangle ABC$ 的 BC 邊或其延長線上一點 D,使適合

$$\overline{AD}^2=BD\cdot DC.$$

【提示】 求出外接圓的圓心 O 作補助點,注意

$$BD\cdot CD=\overline{AO}^2-\overline{OD}^2.$$

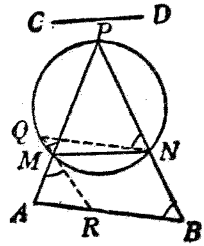
(5) 由定點 P 引兩直線 PC、PD 到兩定線 OA、OB,令其夾角為直角,且長相等。



【提示】 由 P 作垂直 OB 的直線 PE,和平行於 OB 的直線 PF,令 $PF=PE$;以 F 點作補助點。由 F 作垂直於 OB 的直線,和 OA 交於 C。C 點即所求直線的位置。

(6) 三角形的兩邊過定點 A、B,第三邊和定線 CD 平行,且內接於定圓 O,作這三角形 MNP。

【略解】 假定作圖可能。引平行於 AB 的直線 NQ，QM 和 AB 的交點爲 R，則



$$\angle PNQ=\angle PMQ=\angle AMR。$$

又因 $NQ /\!/ AB$，

$$\therefore\ \angle PNQ=\angle ABP。$$

$$\therefore\ \angle AMR=\angle ABP。$$

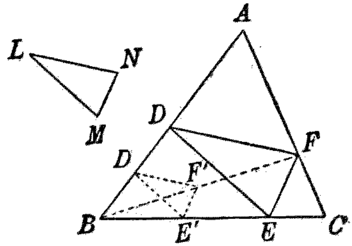
由此得四邊形 $PBRM$ 內接於圓。因 $AR\cdot AB=AM\cdot AP$，故 R 爲定點。但 NQ、NM 的方向各爲一定，所以 $\angle MNQ$ 也是一定。故由 MQ 爲定長，而 RMQ 直線有一定位置。由此知決定補助點 R，即以決定 M。如此可作 $\triangle MNP$。

(7) A、B、C 爲三定點，設 A 點爲正方形的一頂點，B、C 則分別在 A 頂點的對邊或其延長線上，作這正方形。

【提示】 和 A 頂點相鄰的頂點必在以 AB、AC 作直徑的圓周上，而連這兩頂點的對角線必平分頂點所對的圓弧。用這兩中點作補助點，以決定兩對角線的位置。

第四章 用相似形的方法

畫所求圖形的相似形於相似位置,用相似中心以解作圖題,稱爲相似法。



【例】 在$\triangle ABC$內作內接$\triangle DEF$,和已知$\triangle LMN$相似,且DE邊的方向爲已知,作三角形DEF

AB上取任意一點D',在已知方向作$D'E'$交BC於E'。在$D'E'$上作$\triangle D'E'F'$和$\triangle LMN$相似。延長BF'交AC於F,由F作FD、FE,分別平行於$F'D'$、$F'E'$,交AB、BC於D、E,連DE,則$\triangle DEF$爲所求的三角形。

因 $$\frac{D'E'}{DE}=\frac{E'F'}{EF}=\frac{BF'}{BF},$$

但 $$DF /\!/ D'F', \quad EF /\!/ E'F',$$

$$\therefore \frac{D'E'}{DE}=\frac{E'F'}{EF}=\frac{BD'}{BD}=\frac{BF'}{BF},$$

而 $$DE /\!/ D'E',$$

故DE和定方向一致,且$\triangle DEF \backsim \triangle D'E'F'$。

問 題 二 十 四

(1) 作內接於已知三角形的正方形。

(2) 已知三角形的三個角和周邊,作這三角形。

【提示】 先作已知三角形的相似三角形,而求其周邊和已知周邊的比。注意相當邊的比等於周邊的比,即可求

出一邊的大小。

(3)已知三角形的三個高,作這三角形。

【提示】　邊乘高等於二倍三角形的面積,故三邊和高成反比。

(4)正三角形的一頂點在一銳角內的定圓周上,其他兩頂點在角的兩邊上,作這正三角形。

(5)在三個同心圓周上各有一頂點,且和定三角形相似,作這三角形。

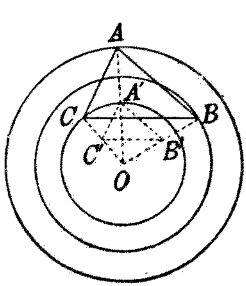
【略解】　假定作圖可能。由 OA 上任意一點 A' 引平行於兩邊的直線,交 OB、OC 於 B'、C',則 $\triangle A'B'C' \backsim \triangle ABC$。

且 $$OA':OB':OC'=OA:OB:OC,$$

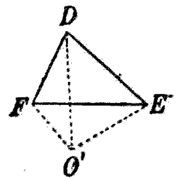
等於定比。

任意作 $\triangle DEF$ 和 $\triangle ABC$,相似,求得和三頂點有定比的 O' 點(問題 21 第 19 題參照),則

甲



乙



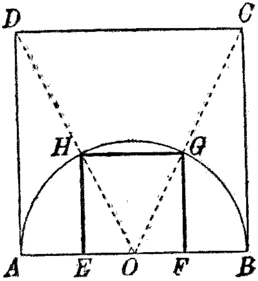
$$\angle DO'E=\angle A'OB',$$

$$\angle DO'F=\angle A'OC',$$

由此而作$\triangle ABC$時,將乙圖的O'移到甲圖的圓心;作OA、OB、OC,令有乙圖$O'D$、$O'E$、$O'F$的關係,和三個圓周的交點即爲$\triangle ABC$的三頂點。

(6)在定半圓內,作內接正方形。

【提示】 在直徑AB上作正方形$ABCD$,C、D和圓心的連線分別交圓周於G、H。所求的圖形即爲$EFGH$。



(7)作內接於已知菱形的正方形。

又菱形的兩對角線的長爲$2a$、$2b$,試計算內接正方形的面積。

答 $\dfrac{4a^2b^2}{(a+b)^2}$。

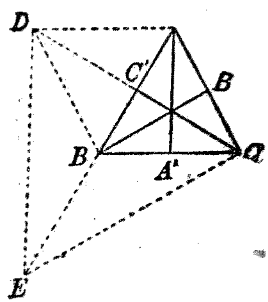
第五章　平行移動法

將圖形主要部分的要素平行移動,因而使作圖法變成非常容易,此稱平行移動法。

【例】　已知三角形的三中線,作這三角形。

設 AA'、BB'、CC' 爲中線,由 C 作平行於 BB' 的直線 CE,交 AB 於 E,又作 AD 平行且相等於 BC,則 D 在 CC' 上。且

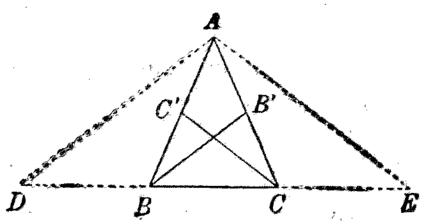
$$\left.\begin{aligned} CE&=2BB'\\ CD&=2CC'\\ DE&=2AA'\end{aligned}\right\}$$



由此很易作 $\triangle CDE$。且因容易決定 B、C'、A 的位置,故可決定 $\triangle ABC$。

問題二十五

(1)二等邊三角形的底邊和由一底角所引的中線爲已知,作這三角形。



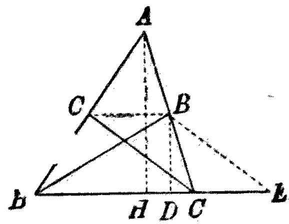
【略解】　由二等邊三角形兩底角所引的兩中線相等。由 A 引平行於此兩中線的直線,分別交 BC 於 D、E,則

$$\left.\begin{aligned}AD&=2BB'\\AE&=2CC'\\DE&=3BC'\end{aligned}\right\}$$

故容易作成$\triangle ADE$，因而容易作成$\triangle ABC$。

(2) 已知高和兩底端所引的中線,作這三角形。

【提示】 平行移動二中線和高到B'點，

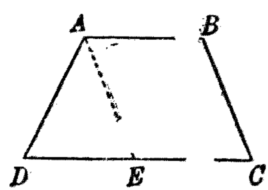


$$\left.\begin{aligned}B'E&=C'C\\B'D&=\frac{1}{2}AH\\BE&=\frac{3}{2}BC\end{aligned}\right\}$$

故容易決定$\triangle B'BE$。因$\triangle B'BE$的兩邊$B'B$、$B'E$和高$B'D$爲已知,其外接圓半徑$R=\dfrac{B'B\cdot B'E}{2B'D}$。

(3) 已知三角形的一邊a,一中線m和一個高h,作這三角形(計有五個解)。

(4) 已知四邊,作梯形。

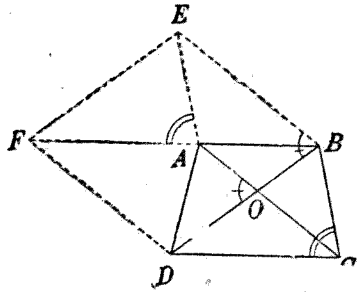


【提示】 平行移動BC到AE，$\triangle ADE$三邊均爲一定。

(5) 已知四邊形的兩對角線,其所成的角和相對的兩角,作這四邊形。

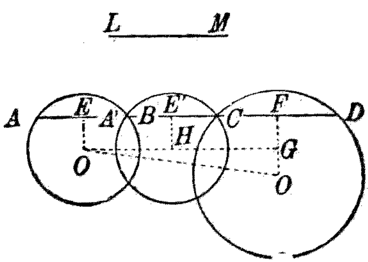
【略解】 設四邊形$ABCD$的對角線AC、BD和其所作的角AOD，及$\angle BAD$、$\angle BCD$爲已知。平行移動AC到B、D，$\angle EAF=\angle BCD$，因平行四邊形$BEFD$爲定形，故容易決定A點的

位置。(作兩圓周以決定A的位置)。



(6) 已知一邊、兩對角線和其夾角,作梯形。

(7) 引定方向的直線和不相交的兩圓(在外部)相交,使兩圓截取的各弦,其和爲一定。



【略解】 設O、O'爲兩定圓,$ABCD$爲所求的弦,LM爲定向,l爲定長,

$$AB+CD=l.$$

由各圓心作垂線到各弦,其方向一定,即可決定其位置,且

$$EB+CF=\frac{1}{2}l,$$

設在定方向平行移動O圓,圓心到達H位置時,適和O'圓相交於C,

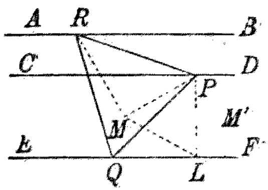
$$HG=E'C+CF=\frac{1}{2}l.$$

故可決定H和G的位置。由此知以H爲圓心,以O圓的半徑作一圓,和O'圓的交點C,即所求的直線必須通過的一點。

第六章 迴轉圖形法

解作圖題時有因圖形的迴轉,得到有用的補助點,因而使作圖爲可能者,如問題22第2題卽其一例.

【例】 求作一正三角形在三平行線上各有一頂點。



設所求的三角形爲 PQR, P 爲 CD 上任意選定的點,由 P 作垂線 PL 到 EF, 在 PL 上作一正三角形 PLM,則因 PQ、PR 爲 PL、PM 在同一方向迴轉所得的直線,

故 $$\angle LPQ=\angle MPR,$$

而 $$PL=PM,\quad PQ=PR,$$

故 $$\angle PLQ=\angle PMQ=\angle R。$$

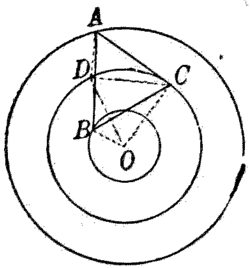
由此得 R 爲由定點 M 所作定直線 PM 的垂線和 AB 的交點,故可決定其位置。卽 $\triangle PQR$ 可以作出。

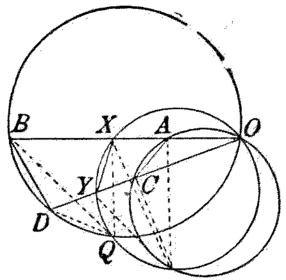
但 P 點的位置是任意在平行線定的,每一位置有兩個解。

問題二十六

(1) 求作一正三角形,在三同心圓上各有一頂點.

【提示】 設所求的三角形爲 ABC, 在 CO 上作一正三角形 COD, $\triangle ABC$ 爲以 C 作迴轉中心迴轉所成的,故 A 點係以 D 爲圓心, OB 爲半徑,所作圓周和一已知圓的交點。





(2)過已知兩直線 AB、CD 的交點作圓周,交 AB 於 X,CD 於 Y,使 AX 和 CY 的比,XB 和 YD 的比分別等於 m 和 n,p 和 q 的比。作這圓。

【略解】 設所求的圓周爲 OXY,這圓和通過三定點所作的兩圓 OAC、OBD 相交於 P、Q,則因

$$\angle DBQ=\angle DOQ=\angle YXQ,\ \angle DQB=\angle DOB=\angle XQY,$$

$$\triangle BQD\backsim\triangle XQY;$$

同樣,$\angle XPY=\angle XOY=\angle APC$,$\angle YXP=\angle YOP=CAP$,

$$\triangle CAP\backsim\triangle YXP。$$

故 $$AP:CP=XP:YP,$$

$$\therefore\ AP:XP=CP:YP.$$

然 $$\angle APX=\angle CPY,$$

$$\therefore\ \triangle APX\backsim\triangle CPY;$$

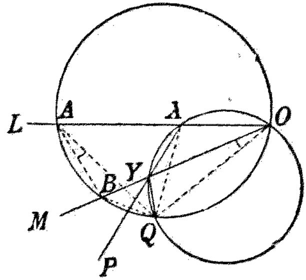
同樣 $$\triangle BQX\backsim\triangle DQY.$$

故 $$AX:CY=AP:CP=m:n,$$

$$BX:DY=BQ:DQ=p:q.$$

但 A、C、B、D 爲已知,故 P、Q 的軌跡可以決定。通過這三定點 O、P、Q 所作的圓即爲所求的圓。

(3) 在相交兩直線 OL、OM 上各有一定點 A、B,由直線外一定點 P 作直線,交兩定直線於 X、Y,令 AX 和 BY 的比等於 $m:n$。



【略解】 設 PXY 爲所求的直線,圓 OAB 和圓 OXY 的交點爲 Q,因 $\angle BAQ=\angle BOQ=\angle YXQ$,

$\angle AQB=\angle AOB=\angle XQY$,

$$\triangle ABQ \backsim \triangle XYQ,$$

$$\therefore\ \angle AQX=\angle BQY.$$

但 $$\angle QAX=\angle QBY,$$

$$\therefore\ \triangle AQX \backsim \triangle BQY,$$

$$\therefore\ AQ:BQ=AX:BY=m:n,$$

即 Q 點到 A、B 距離的比等於定比,且同在一圓周上,Q 點位置因以決定;由是可以決定 $\angle PXQ=\angle BOQ$。故以 PQ 爲弦,對這弦的角等於 BOQ,所作的圓交 OA 的點,即所求的 X 點。

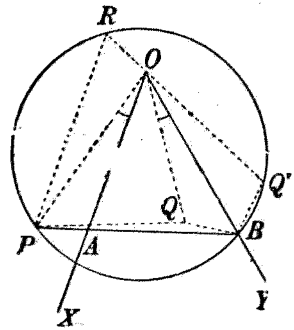
(4) 由任意一點引一直線和相交的兩定線 OX、OY 相遇,令所成的三角形的面積和已知面積等。

【略解】 設 P 爲任意點,所引直線交 OX、OY 於 A、B,所成

$\triangle OAB$的面積等於l^2。令$\triangle OPQ$面積等於l^2(但$\angle POQ=\angle AOB$)，Q點可以決定，而

$$OP\cdot OQ=OA\cdot OB,$$

$$\therefore\quad OP:OA=OB:OQ。$$



設OQ'爲OQ關於OY的對稱線，

上$OQ'=OQ$，則

$$\triangle OQB\equiv\triangle OQ'B,$$

故 $$\triangle OPA\backsim\triangle OBQ',$$

$$\therefore\quad \angle OQ'B=\angle OAP。$$

引PR平行於AO，和OQ'相交於R，因PR和OQ'位置一定故R亦一定。而因$\angle OAP=\angle OQ'B$，

$$\angle RPB=\angle OAB=2\angle R-\angle OQ'B,$$

$$\therefore\quad \angle RPB+\angle OQ'B=2\angle R。$$

由此知$PRQ'B$四邊形內接於圓。但P、R、Q'爲定點，故這外接圓亦是定圓，於是可決定OY和此圓的交點B，連P、B，卽得所求的直線。

(5)由任意一點引一直線等分已知三角形的面積。

【提示】參考前題。

第七章　關於面積的作圖法

關於面積作圖的基本定理,第一編中業經述及茲再錄之於下:

定　理

1. 底高的乘積相等的兩三角形,面積相等。

由這定理可知三角形的中線等分三角形的面積。

2. 兩相似多角形面積的比,等於其相當邊自乘的比。

3. 一角相等的兩三角形面積的比等於夾這角的兩邊相乘積的比。

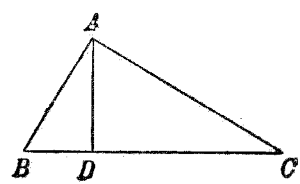
4. 直角三角形夾直角的兩邊上正方形的比,等於由直角頂到斜邊垂線所分底邊兩部分的比。

因　$\triangle ABD \backsim \triangle CAD$,

∴　$\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{AD}{BD}=\dfrac{DC}{AD}$,

$\left(\dfrac{AC}{AB}\right)^2=\dfrac{AD}{BD}\times\dfrac{DC}{AD}$,

即　$\dfrac{\overline{AC}^2}{\overline{AB}^2}=\dfrac{DC}{BD}$。



【注意】　本定理在面積分割上甚爲重要。

5. 定圓 O 上的切線 AB 和直徑等長,切線一端 A 和圓心的連線交圓周於 D、D',又在 AB 或其延長線

上取 C、C'，令 $AC=AD$，$AC'=AL'$，則

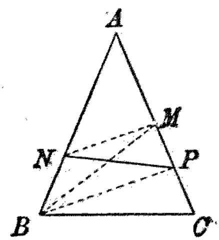
$$\overline{AC}^2=AB\cdot BC,\ \overline{AC'}^2=AB\cdot BC'。$$

問題二十七

(1)在三角形 ABC 內取一點，分這三角形爲三等分。

【提示】 所求的點爲重心。

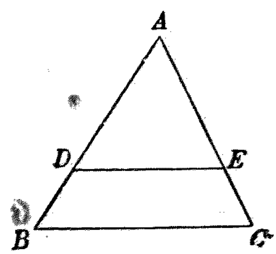
(2)一直線過三角形一邊上的定點，二等分這三角形，作這直線。



【提示】 設 P 爲已知點，M 爲 AC 的中點；則 MB 二等分三角形的面積。

今引 MN 平行於 PB，則 PN 爲所求的直線。

(3)引一直線平行於已知三角形一邊，而等分其面積。



【提示】 此爲定理 2 的應用。

設 DE 爲所求的直線，

則 $\triangle ADE:\triangle ABC=1:2$，

而 $\triangle ADE\backsim\triangle ABC$，

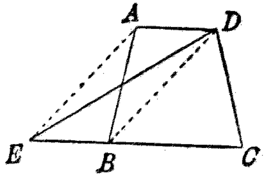
$\therefore\ \triangle ADE:\triangle ABC=\overline{AD}^2:\overline{AB}^2$；

即 $\overline{AD}^2:\overline{AB}^2=1:2$。

(4)作三角形，和已知四邊形等積。

【提示】 引 AE 線平行於對角線 BD，和 BC 延長線相交

於 E，則 $\triangle CDE$ 即所求的三角形。



(5)試述作三角形和已知多角形等積的方法。

(6)作正三角形和定三角形或定多角形等積。

(7)作正方形和已知矩形等積。

【提示】 以矩形兩隣邊的和作直徑畫半圓，在分點上作垂直於直徑的半弦，這半弦即正方形的一邊。

(8)定直線 AB 內分於 C 點，令 AC 上的正方形等於 AB 和 BC 所包的矩形。

【提示】 定理 5 參照。

(9)內分已知線分 AB 於 C，令

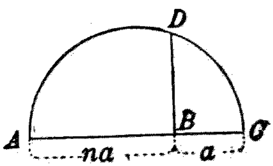
$$\overline{CA}^2 : \overline{CB}^2 = 3:1。$$

【提示】 $CA:CB=\sqrt{3}:1$，便是正三角形的高和一邊的 $\frac{1}{2}$ 的比。

(10)作一正方形，比已知正方形大 n 倍

【略解】 設已知正方形的面積爲 a^2，令 $AB=na$，$BC=a$，而以 $AC\{=(n+1)a\}$ 作直徑畫半圓，由 B 所作垂線 BD，交圓周於 D，因

$$\overline{BD}^2=AB\cdot BC=n\cdot a^2,$$



BD 即所求的邊。

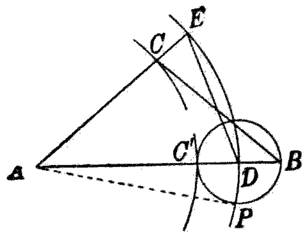
(11)作一正方形，爲已知正方形的 $\frac{1}{n}$ 倍。

【提示】 在前圖中,取 $AB=a$; $BC=\frac{1}{n}a$, 則 BD 卽所求正方形的一邊(但已知正方形的面積爲 a^2)。

(12) 引平行於底邊的直線,三等分已知三角形。

【提示】 參照定理 2,和第 3 題。

(13) 作二等邊三角形,其一角和已知等積三角形的一角相等。

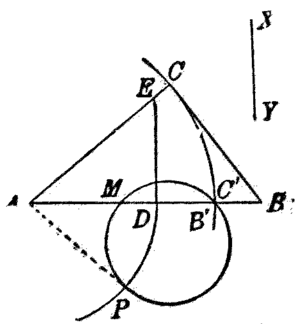


【提示】 設△ABC 爲已知,其∠A 和所求的二等邊三角形 ADE 一角相等。注意下式的關係,

$$AB\cdot AC=\overline{AD}^2。$$

在 AB 上取一點 C',令 $AC'=AC$,過 BC' 作任意圓,引切線 AP,在 AB、AC 上取 AD、AE 等於 AP,所成的三角形卽和已知三角形等積。

(14) 作定方向的直線 DE,等分已知三角形 ABC。



【略解】 $AD\cdot AE=\frac{1}{2}AB\cdot AC$,

故 AE 和 AD 的比一定,設和 n 相等,則

$$nAD=AE,$$

$$\therefore\ n\overline{AD}^2=\frac{1}{2}AB\cdot AC。$$

命

$$\frac{1}{n}AB=AB',$$

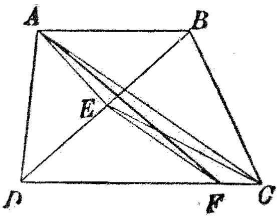
而 M 爲 AB' 的中點,

$$\overline{AD}^2=AM\cdot AC。$$

由此知以$AC'=AC$，過M、C'作一圓；由A引圓的切線AP，在AB取AD等於AP。則由D作平行於定方向XY的直線DE，等分已知三角形。

(15) 作一直線過四邊形的一頂點，且等分此形。

【提示】 設AF為所求的等分線，由對角線BD的中點E引平行於對角線AC的直線EF，交CD於F，則因



$$ABCE=\frac{1}{2}ABCD,$$

$$\triangle AFC=\triangle AEC,$$

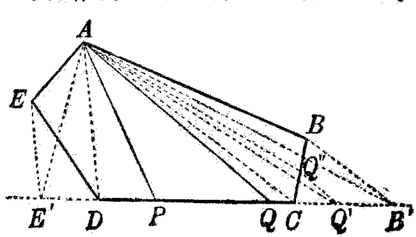
故AF即所求的直線。

(16) 作一直線過四邊形$ABCD$一邊AB上的定點K，且等分此形。

【提示】 同前題的方法作AF等分四邊形，作AM平行於KF，則KM即所求的直線。

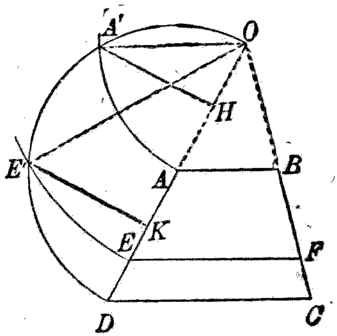
(17) 過五角形的一頂點引兩直線，三等分此形。

【略解】 作$\triangle AB'E'$和五角形$ABCDE$等積，在$B'E'$上求兩點P、Q三等分$B'E'$。若這兩點在DC線上，則AP、AQ即為所求的直線。



若 Q 點在 DC 延長線上如 Q'，引 $Q'Q''$ 平行 AC，交 BC 於 Q''，則所求的直線爲 AQ''。

(18) 引直線平行梯形的底邊，且分此形爲 $m:n$。



【略解】 設 EF 分梯形 $ABCD$ 爲 $m:n$。延長 DA 和 CB 交於 O，由 $\triangle OAB$ 和 $\triangle ODC$，

得 $$\frac{\triangle OAB}{\triangle ODC}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{CD}^2}\text{……定比，}$$

而 $$\frac{\triangle OEF-\triangle OAB}{\triangle ODC-\triangle OEF}=\frac{n}{m}。$$

故用相當邊的比表上式，

得 $$\frac{\overline{EF}^2-\overline{AB}^2}{\overline{DC}^2-\overline{EF}^2}=\frac{n}{m}=\frac{\overline{OE}^2-\overline{OA}^2}{\overline{OD}^2-\overline{OE}^2}\text{……………(1)}$$

在以 OD 作直徑的圓周上，取 A'、E'，令 $OA=OA'$，$OE=OE'$。OA'、OE' 在 OD 上的射影爲 OH、OK。

$$\overline{OD}^2:\overline{OE}^2:\overline{OA}^2=OD:OK:OH.$$

由 (1) $$\frac{OK-OH}{OD-OK}=\frac{n}{m},$$

即 $$\frac{KH}{DK}=\frac{n}{m}。$$

由此知於 K 點分定線 DH 爲定比 $\frac{n}{m}$ 即可。若 EF 爲二等分時，則取 DH 中點 E 即可。

（完）

(9446)