Grafos

Los grafos son estructuras que constan de vértices o nodos y de aristas o arcos que conectan los vértices entre sí.

Un grafo G consiste en dos cosas:

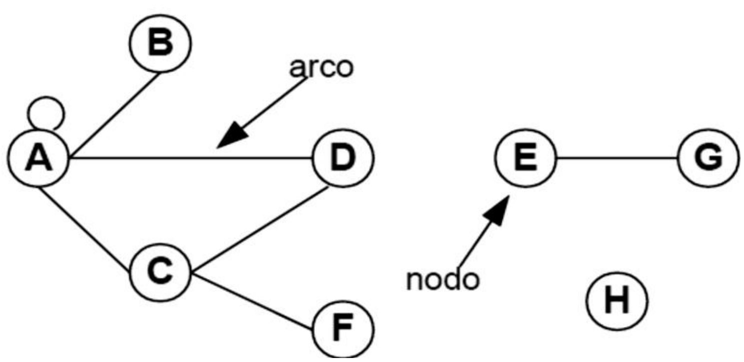
1. Un conjunto V de elementos llamados nodos (o puntos o vértices)
2. Un conjunto E de aristas tales que cada arista *e* de E está identificada por un único (desordenado) par de [*u, v*] de nodos de V, denotado por *e* = [*u, v*].

A veces denotamos un grafo G por G (V, E).

Suponiendo que *e* = [*u, v*]. Entonces los nodos *u* y *v* se llaman extremos de *e* y *u* y *v* se dice que son nodos adyacentes o vecinos.

El grado de un nodo *u*, escrito grad (*u*) es el número de aristas que contienen a *u*. Si grad (*u*)=0 es decir si u no pertenece a ninguna arista decimos que es un nodo aislado.

Por ejemplo, para el siguiente grafo el conjunto de nodos (o vértices) es {A, B, C, D, E, F, G, H} y el conjunto de arcos (o aristas) es {(A, B), (A, C), (A, D), (C, D), (C, F), (E, G), (A, A)}



Tipos de grafos

- Grafo simple

  Un grafo simple G = (V, A) costa de un conjunto no vacío de vértices V y de un conjunto A de pares no ordenados de elementos distintos de V, a estos pares se les llama aristas. En otras palabras un grafo simple es un grafo en los que existe a lo más una arista que une dos vértices distintos.

- ## Multigrafos

  Un multigrafo $G = (V, A)$ consta de un conjunto V de vértices, un conjunto A de aristas y una función f de A hacia $\{\{u, v\} \mid u, v \in V, u \neq v\}$. Se dice que las aristas a_1 y a_2 son aristas múltiples o paralelas si $f(a_1) = f(a_2)$.

- ## Pseudografos

  Un pseudografo $G = (V, A)$ consta de un conjunto V de vértices, un conjunto A de aristas y una función f de A hacia $\{\{u, v\} \mid u, v \in V\}$. Una arista $\boldsymbol{a}$ es un bucle o lazo, si $f(a) = \{u; u\} = \{u\}$ para algún $u \in V$.

- ## Grafo dirigido

  Un grafo dirigido G, también llamado digrafo, es lo mismo que un multigrafo, solo que cada arista *e* de G tiene una dirección asignada o, en otras palabras, cada arista *e* está identificada por un par ordenado (u, v) de nodos G en vez del par desordenado [u. v].

  Un grafo dirigido (V, A) consta de un conjunto V de vértices y de un conjunto A de aristas, que son pares ordenados de elementos de V. Utilizamos el par ordenado $\langle u, v \rangle$ para indicar que es una arista dirigida del vértice u al vértice v.

- ## Multigrafo dirigido

  Un multigrafo dirigido $G = (V, A)$ consta de un conjunto V de vértices, un conjunto A de aristas y una función f de A hacia $\{\langle u, v \rangle \mid u, v \in V\}$. Se dice que las aristas a_1 y a_2 son aristas múltiples o paralelas si $f(a_1) = f(a_2)$.

- ## Grafo completo

  Un grafo completo es un grafo simple que tiene una arista entre cada par de vértices distintos. Es decir es aquel en el que cada par de sus vértices está interconectado entre sí.

Caminos

Un camino P de longitud *n* desde un nodo *u* se define como la secuencia de *n*+1 nodos.

$$P = (V_{0i}, V_i, V_{2i}, \dots, V_m)$$

Tal que *u*=V_{0i}, V_ies adyacente a V_{i-1} para *i*=1,2,..., *n*; y $V_n = V$. El camino P se dice que es cerrado si $V_0 = V_n$. El camino P se dice que es simple se todos los nodos son distintos a excepción de V_0que puede ser igual a V_n; es decir, P es simple si los nodos $V_0, V_1, \dots, V_{n-1}$ ... son distintos y los nodos $V_1, V_2, \dots, V_n$son también distintos. De acuerdo a lo anterior, definimos un **ciclo** como un camino simple cerrado de longitud 3 o más. Un ciclo de longitud *k* se llama *k*-ciclo.

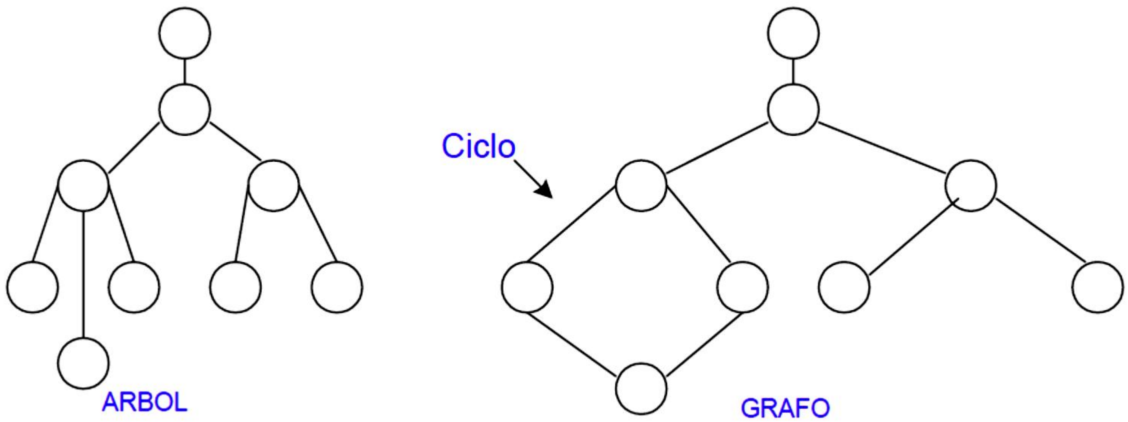
Grafo conexo

Un grafo G es conexo si y solo si existe un camino simple para cualesquiera dos de sus nodos.

Se dice que un grafo G es completo si cada nodo *u* de G es adyacente a todos los demás nodos de G claramente, un grafo así es conexo, un grafo completo de *n* nodos tendrá n (n-1)/2 aristas.

Árbol

Un grafo conexo T sin ciclos se llama grafo árbol, árbol libre o simplemente árbol. Esto significa en particular, que existe un único camino simple P entre cada par de nodos *u* y *v* de T. Más aún, si T es un árbol finito de *m* nodos, entonces T tendrá *m*-1 aristas.



Grafo etiquetado

Un grafo G se dice que esta etiquetado si sus aristas tienen datos asignados. En particular, se dice que G tiene peso si cada arista *e* de G tiene asignado un valor numérico no negativo *w (e)* llamado peso o longitud de *e*. En este caso, a cada camino P de G se le asigna un peso o una longitud que es la suma de los pesos de las aristas que constituyen el camino P. Si no se da información cobre pesos, asumiremos que el grafo G tiene peso pero de forma tal que los pesos *w (e)* de cada arista *e* de G es igual a 1.

De acuerdo a la información anterior, se puede generalizar la definición de grafo si consideramos lo siguiente:

- **Aristas múltiples**.- Dos aristas *e0 y e1* distintas se llaman aristas múltiples si ambas conectan los mismos extremos, o sea, si *e0=* [*u, v*] y *e1=* [*u, v*].
- **Bucles**.- Una arista *e* se llama bucle si tiene extremos idénticos, o sea, si *e1=* [*u, u*].

La generalización anterior M se llama ***multigrafo***. En otras palabras la definición de un grafo normalmente no permite ni aristas múltiples ni bucles. Un multigrafo es finito si contiene un número finito de nodos y de aristas.

Un grafo G con un número finito de nodos debe automáticamente un numero finito de aristas y por lo tanto debe ser finito. Sin embargo, esto no es necesariamente aplicable a los multigrafos pues estos pueden contener múltiples aristas.

Matriz de adyacencia

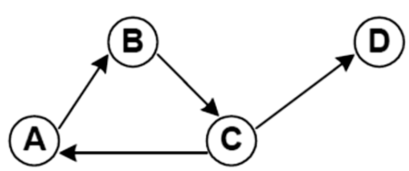
Existen dos formas estándar de mantener un grafo G en la memoria de una computadora. Una forma llamada presentación secuencial de G, se basa en la matriz de adyacencia de A. La otra forma, llamada representación enlazada de G, se basa en las listas enlazadas de vecinos.

Suponga que G es un grafo dirigido simple de m nodos y suponga que los nodos de G han sido ordenados y llamados $v_1, v_2, \ldots, v_m$ .Así la matriz de adyacencia $A = (a_{i,j})$ del grafo G es la matriz de m x m elementos definida como sigue:

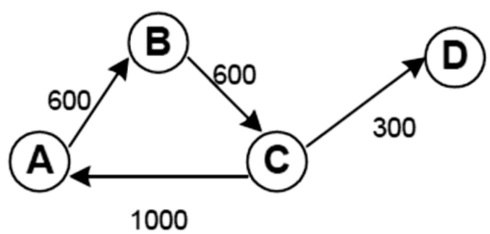
$$a_{i,j} \begin{cases} \mathbf{1} \text{ si } v_i \text{ es adyacente a } v_j \text{, o sea, si hay una arista } (v_i, v_j) \\ \\ \mathbf{0} \text{ en caso contrario.} \end{cases}$$

Una matriz A así, que contiene entradas de 0 y 1, se llama matriz de bits o matriz booleana.

La matriz de adyacencia de A del grafo G depende de la ordenación de los nodos de G; esto es, diferentes ordenaciones de los nodos pueden resultar en diferentes matrices de adyacencia. Sin embargo las matrices obtenidas por dos ordenaciones diferentes están fuertemente relacionadas en cuanto que a una puede ser obtenida de la otra simplemente cambiando filas y columnas.



	A	B	C	D
A	0	1	0	0
B	0	0	1	0
C	1	0	0	1
D	0	0	0	0



	A	B	C	D
A	0	600	1000	0
B	600	0	600	0
C	1000	600	0	300
D	0	0	300	0

Con base en lo anterior podemos dar las siguientes aseveraciones:

- Al número de nodos del grafo se le llama orden del grafo.
- Un grafo nulo es un grafo de orden 0 (cero).
- Dos nodos son adyacentes si hay un arco que los une.
- En un grafo dirigido, si A es adyacente de B, no necesariamente B es adyacente de A
- Camino es una secuencia de uno o más arcos que conectan dos nodos.
- Un grafo se denomina conectado cuando existe siempre un camino que une dos nodos cualesquiera y desconectado en caso contrario.
- Un grafo es completo cuando cada nodo está conectado con todos y cada uno de los nodos restantes.
- El camino de un nodo así mismo se llama ciclo.
- Un grafo sin ciclos es un árbol.
- El entregrado de un nodo indica el número de arcos que llegan a ese nodo.
- El fuera de grado de un nodo indica el número de arcos que salen de él.
- Un grafo de N vértices o nodos es un árbol si cumple las siguientes condiciones:
    - Tiene N-1 arcos
    - Existe una trayectoria entre cada par de nodos.
    - Esta mínimamente conectado.