

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Vorlesung 30

Wer Schmetterlinge träumen
hört, der weiß, wie Wolken
riechen

Novalis

Affine Erzeugendensysteme

LEMMA 30.1. *Es sei E ein affiner Raum über dem K -Vektorraum V . Dann ist der Durchschnitt von einer Familie $F_i \subseteq E$, $i \in I$, von affinen Unterräumen wieder affin.*

Beweis. Wenn der Durchschnitt leer ist, so gilt die Aussage nach Definition. Sei $P \in \bigcap_{i \in I} F_i$. Wir können die affinen Räume als

$$F_i = P + U_i$$

mit Untervektorräumen

$$U_i \subseteq V$$

schreiben. Sei

$$U = \bigcap_{i \in I} U_i,$$

was nach Lemma 6.16 (1) ein Untervektorraum ist. Wir behaupten

$$\bigcap_{i \in I} F_i = P + U.$$

Aus $Q \in \bigcap_{i \in I} F_i$ folgt

$$Q = P + u$$

mit $u \in \bigcap_{i \in I} U_i$, so dass $Q \in P + U$ liegt. Umgekehrt folgt aus $Q \in P + U$ direkt $Q \in P + U_i = F_i$. \square

Insbesondere gibt es zu jeder Teilmenge $T \subseteq E$ in einem affinen Raum einen kleinsten affinen Unterraum, der T umfasst.

LEMMA 30.2. *Es sei E ein affiner Raum über dem K -Vektorraum V und $T \subseteq E$ eine Teilmenge. Dann besteht der kleinste affine Unterraum $F \subseteq E$ von E , der T umfasst, aus allen baryzentrischen Kombinationen*

$$\sum_{i=1}^n a_i P_i \text{ mit } P_i \in T \text{ und } \sum_{i=1}^n a_i = 1.$$

Beweis. Die angegebene Menge enthält die einzelnen Punkte aus T , da man als baryzentrisches Koordinatentupel insbesondere die Standardtupel nehmen kann. Daher ergibt sich die Behauptung aus Lemma 29.14 und Aufgabe 29.15. \square

DEFINITION 30.3. Es sei E ein affiner Raum über dem K -Vektorraum V und sei $F \subseteq E$ ein affiner Unterraum. Eine Familie von Punkten $P_i \in F$, $i \in I$, heißt *affines Erzeugendensystem* von F , wenn F der kleinste affine Unterraum von E ist, der alle Punkte P_i umfasst.

Ein Punkt erzeugt als affinen Punkt den Punkt selbst, zwei Punkte erzeugen die Verbindungsgerade.

Affine Unabhängigkeit

DEFINITION 30.4. Es sei E ein affiner Raum über einem K -Vektorraum V und es sei

$$P_1, \dots, P_n$$

eine endliche Familie von Punkten aus E . Man nennt die Punktfamilie *affin-unabhängig*, wenn eine Gleichheit

$$\sum_{i=1}^n a_i P_i = \sum_{i=1}^n b_i P_i$$

mit

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i = 1$$

nur bei

$$a_i = b_i$$

für alle $i = 1, \dots, n$ möglich ist.

LEMMA 30.5. *Es sei E ein affiner Raum über einem K -Vektorraum V und es sei*

$$P_1, \dots, P_n$$

eine endliche Familie von Punkten aus E . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent

- (1) *Die Punkte P_1, \dots, P_n sind affin unabhängig.*
- (2) *Für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ ist die Vektorfamilie*

$$\overrightarrow{P_i P_1}, \dots, \overrightarrow{P_i P_{i-1}}, \overrightarrow{P_i P_{i+1}}, \dots, \overrightarrow{P_i P_n}$$

linear unabhängig.

- (3) *Es gibt ein $i \in \{1, \dots, n\}$ derart, dass die Vektorfamilie*

$$\overrightarrow{P_i P_1}, \dots, \overrightarrow{P_i P_{i-1}}, \overrightarrow{P_i P_{i+1}}, \dots, \overrightarrow{P_i P_n}$$

linear unabhängig ist.

- (4) Die Punkte P_1, \dots, P_n bilden in dem von ihnen erzeugten affinen Unterraum eine affine Basis.

Beweis. Siehe Aufgabe 30.2. □

Affine Abbildungen

DEFINITION 30.6. Es sei K ein Körper und seien E und F affine Räume über den Vektorräumen V bzw. W . Eine Abbildung

$$\psi: E \longrightarrow F$$

heißt *affin* (oder *affin-lineare Abbildung*), wenn es eine lineare Abbildung

$$\varphi: V \longrightarrow W$$

mit

$$\psi(P + v) = \psi(P) + \varphi(v)$$

für alle $P \in E$ und $v \in V$ gibt.

BEMERKUNG 30.7. Eine Abbildung

$$\psi: E \longrightarrow F$$

ist genau dann affin-linear mit linearem Anteil φ , wenn das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V \times E & \xrightarrow{+} & E \\ \varphi \times \psi \downarrow & & \downarrow \psi \\ W \times F & \xrightarrow{+} & F \end{array}$$

kommutiert. Zu einer affin-linearen Abbildung

$$\psi: E \longrightarrow F$$

ist der lineare Anteil

$$\varphi: V \longrightarrow W$$

eindeutig bestimmt. Es ist nämlich notwendigerweise

$$\varphi(v) = \overrightarrow{\psi(P)\psi(P+v)}$$

für einen beliebigen Punkt $P \in E$. Daher bezeichnen wir den linearen Anteil mit ψ_0 . Für zwei Punkte $P, Q \in E$ gilt insbesondere

$$\psi_0(\overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{\psi(P)\psi(Q)}.$$

LEMMA 30.8. *Es sei K ein Körper und seien E, F und G affine Räume über den Vektorräumen U, V bzw. W . Dann gelten folgende Aussagen.*

- (1) *Die Identität*

$$\text{Id}_E: E \longrightarrow E$$

ist affin-linear.

(2) Die Verknüpfung von affin-linearen Abbildungen

$$E \longrightarrow F$$

und

$$F \longrightarrow G$$

ist wieder affin-linear.

(3) Zu einer bijektiven affin-linearen Abbildung

$$\psi: E \longrightarrow F$$

ist auch die Umkehrabbildung affin-linear.

(4) Zu $v \in V$ ist die Verschiebung

$$E \longrightarrow E, P \longmapsto P + v,$$

affin-linear.

(5) Eine lineare Abbildung ist affin-linear.

Beweis. Diese Eigenschaften folgen unmittelbar aus der Definition. \square

LEMMA 30.9. Es seien E und F affine Räume über einem Körper K und sei

$$\psi: E \longrightarrow F$$

eine Abbildung. Dann ist ψ genau dann affin-linear, wenn für jede baryzentrische Kombination $\sum_{i \in I} a_i P_i$ mit $P_i \in E$ die Gleichheit

$$\psi \left(\sum_{i \in I} a_i P_i \right) = \sum_{i \in I} a_i \psi(P_i)$$

gilt.

Beweis. Seien V und W die Vektorräume zu E bzw. zu F . Sei zunächst ψ affin-linear mit linearem Anteil

$$\psi_0: V \longrightarrow W$$

und eine baryzentrische Kombination $\sum_{i \in I} a_i P_i$ mit $P_i \in E$ und $\sum_{i \in I} a_i = 1$ gegeben. Dann ist

$$\begin{aligned} \psi \left(\sum_{i \in I} a_i P_i \right) &= \psi \left(Q + \sum_{i \in I} a_i \overrightarrow{QP_i} \right) \\ &= \psi(Q) + \psi_0 \left(\sum_{i \in I} a_i \overrightarrow{QP_i} \right) \\ &= \psi(Q) + \sum_{i \in I} a_i \psi_0 \left(\overrightarrow{QP_i} \right) \\ &= \psi(Q) + \sum_{i \in I} a_i \overrightarrow{\psi(Q)\psi(P_i)} \\ &= \sum_{i \in I} a_i \psi(P_i) \end{aligned}$$

Sei nun umgekehrt die Abbildung ψ mit den baryzentrischen Kombinationen verträglich. Wir setzen

$$\varphi(v) = \psi(P + v) - \psi(P)$$

für $v \in V$. Wir zeigen zunächst, dass dies unabhängig von dem gewählten Punkt P ist. Es ist

$$(P + v) - (Q + v) + Q$$

eine baryzentrische Kombination für den Punkt P . Daher ist in F

$$\psi(P + v) - \psi(Q + v) + \psi(Q) = \psi(P)$$

und somit ist in V

$$\psi(P + v) - \psi(P) = \psi(Q + v) - \psi(Q).$$

Es gilt also

$$\psi(P + v) = \psi(P) + \varphi(v)$$

für jeden Punkt $P \in E$ und jeden Vektor $v \in V$. Es bleibt zu zeigen, dass φ linear ist. Für $u = \overrightarrow{PQ}$ und $v = \overrightarrow{PR}$ ist

$$\begin{aligned} \psi(P) + \varphi(au + bv) &= \psi(P + au + bv) \\ &= \psi(P + a\overrightarrow{PQ} + b\overrightarrow{PR}) \\ &= \psi((1 - a - b)P + aQ + bR) \\ &= (1 - a - b)\psi(P) + a\psi(Q) + b\psi(R) \\ &= \psi(P) + a\overrightarrow{\psi(P)\psi(Q)} + b\overrightarrow{\psi(P)\psi(R)} \\ &= \psi(P) + a\varphi(\overrightarrow{PQ}) + b\varphi(\overrightarrow{PR}) \\ &= \psi(P) + a\varphi(u) + b\varphi(v). \end{aligned}$$

Also ist

$$\varphi(au + bv) = a\varphi(u) + b\varphi(v).$$

□

DEFINITION 30.10. Es sei K ein Körper und seien E und F affine Räume über den K -Vektorräumen V bzw. W . Eine bijektive affine Abbildung

$$\psi: E \longrightarrow F$$

heißt *affiner Isomorphismus*.

In einem gewissen Sinne setzen sich affin-lineare Abbildungen aus Verschiebungen und aus linearen Abbildungen zusammen.

LEMMA 30.11. *Es sei K ein Körper und sei E ein affiner Raum über dem Vektorraum V . Es sei $P \in E$. Dann entsprechen sich die affin-linearen Abbildungen*

$$\psi: E \longrightarrow E$$

mit P als Fixpunkt und die linearen Abbildungen

$$\varphi: V \longrightarrow V.$$

Beweis. Die Zuordnung ist durch $\psi \mapsto \psi_0$ gegeben. Wir müssen zeigen, dass es zu jeder linearen Abbildung $\varphi: V \rightarrow V$ eine eindeutige affin-lineare Abbildung

$$\psi: E \longrightarrow E$$

mit diesem linearen Anteil gibt. Wegen

$$\psi(Q) = \psi(P) + \varphi(\overrightarrow{PQ}) = P + \varphi(\overrightarrow{PQ})$$

kann es nur eine affin-lineare Abbildung geben, und durch diese Vorschrift kann man die Abbildung auch definieren. \square

Der folgende Satz heißt *Festlegungssatz für affine Abbildungen* und ist analog zu Satz 10.9.

SATZ 30.12. *Es sei K ein Körper und seien E und F affine Räume über den Vektorräumen V bzw. W . Es sei $P_i, i \in I$, eine affine Basis von E und $Q_i, i \in I$, eine Familie von Punkten in F . Dann gibt es eine eindeutig bestimmte affin-lineare Abbildung*

$$\psi: E \longrightarrow F$$

mit

$$\psi(P_i) = Q_i$$

für alle $i \in I$.

Beweis. Es sei $i_0 \in I$. Es gibt nach Satz 10.9 eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung

$$\varphi: V \longrightarrow W$$

mit

$$\varphi(\overrightarrow{P_{i_0}P_i}) = \overrightarrow{Q_{i_0}Q_i},$$

für alle $i \in I \setminus \{i_0\}$. Dann ist

$$\psi(R) = Q_{i_0} + \varphi(\overrightarrow{P_{i_0}R})$$

eine affin-lineare Abbildung mit der gewünschten Eigenschaft. Umgekehrt ist eine solche affine Abbildung ψ durch den linearen Anteil und das Verhalten auf einem einzigen Punkt eindeutig festgelegt, so dass

$$\psi_0 = \varphi$$

sein muss. \square

KOROLLAR 30.13. *Es sei K ein Körper und sei E ein affiner Raum mit einer affinen Basis P_1, \dots, P_n, P_{n+1} . Dann ist die Abbildung*

$$E \longrightarrow K^{n+1}, P \longmapsto (a_1, \dots, a_n, a_{n+1}),$$

wobei a_i die baryzentrischen Koordinaten von P sind, eine affin-lineare Abbildung, die eine affine Isomorphie zwischen E und dem affinen Unterraum $F \subset K^{n+1}$ stiftet, der durch

$$F = \left\{ x \in K^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1 \right\}$$

gegeben ist. Der Vektorraum zu F ist

$$W = \left\{ x \in K^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 0 \right\}.$$

Beweis. Nach Satz 30.12 gibt es eine eindeutig bestimmte affin-lineare Abbildung

$$E \longrightarrow K^{n+1},$$

die P_i auf den i -ten Standardvektor e_i abbildet. Dabei wird nach Lemma 30.9

$$P = \sum_{i=1}^{n+1} a_i P_i$$

auf

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i e_i$$

abgebildet. Wegen

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i = 1$$

gehört dieser Punkt zu F . Die Bijektivität ist klar. □