現代初中教科書

幾何

下冊

周宣德編
段育華 榮方舟校

教育部圖書館
藏書

民國二十四年訂正

商務印書館發行

513.0211
周9
下
1-2

MG
G634.63
48

現代初中教科書

幾　何

下　册

周宣德編
段育華　欒方舟校

教育部圖書館
藏書

3 1773 7300 2

商務印書館發行

下 册 目 錄

教育部圖書館藏書 18689

現代初中教科書

幾　何

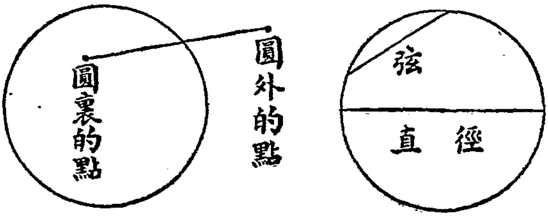
下　册

第五編　直線同圓

§138. 圓的記法.* 圓可以用表圓心同表圓周上一點的兩個字母去稱呼他.

如⊙OA就表示圓心是O,半徑是OA的圓. 在字義不致於誤會的時候,就單用表圓心的一個字母去記圓,如⊙OA也可記做⊙O.

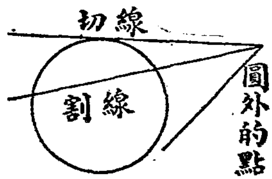
§139. 圓裏同圓外. 圓分平面成兩部分,所以隨便什麼點,不是在圓周上,便是在圓裏或圓外.



*圓的定義已經講過,但有時圓周也略稱圓.

§140. **弦同直徑.** 聯結圓周上兩點的線份叫做**弦**(Chord). 穿過圓心的弦叫直徑(Diameter).

§141. **割線同切線.** 延長弦的一端或兩端,就把圓割開,這線叫做**割線**(Secant). 從圓外一點,所畫的直線,無論引長到多遠,同圓周單在一點相遇,這線叫做切線(Tangent). 相遇的一點,叫做切點(Point of Tangency).



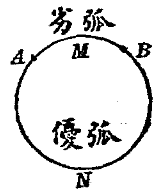
所以從圓外一點,可以畫割線,切線,和不同圓周相遇的線.

§142. **半圓**(Semicircle). 圓周上隨便兩

點,可以分一圓周成兩弧. 倘這兩弧恰等,就叫半圓.

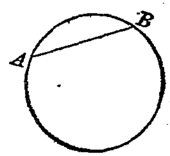
若兩弧不等,大的叫做**優弧**(Major Arc);小的便叫**劣弧**(Minor Arc).

弧的記號是⌒,如AB弧記作$\overset{\frown}{AB}$. 通常用兩個字母記弧,專指劣弧,所以$\overset{\frown}{AB}$表示劣弧.



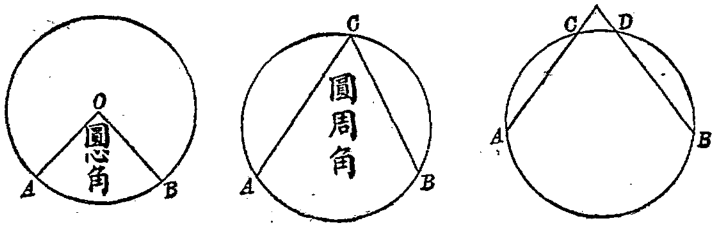
有時爲分別優劣起見,就在中間再加一字母,如$\overset{\frown}{AMB}$就表示劣弧,$\overset{\frown}{ANB}$就表示優弧.

§143. **弦所對的弧**(Arc Subtended by Chord). 弦的兩端間的弧,就是這弦所對的弧,如圖$\overset{\frown}{AB}$是AB弦所對的弧. 平常沒有特別標記,弦所對的弧,都是指劣弧.



§144. **圓心角同圓周角**. 兩條半徑做成的角,叫做**圓心角**(Central Angle). 從圓周上一點畫兩弦所成的角,叫做**圓周角**(Inscribed

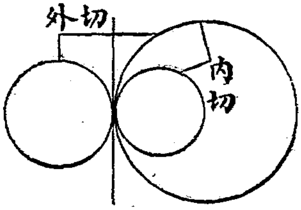
Angle).

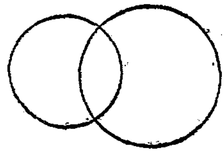


§145. **角所含的弧** (Arc Intercepted by Angle). 一隻角的兩邊,和圓周相遇,那角裏的弧就稱被這角所含.

如§144 左邊同中間的兩個圖裏面,兩角的頂點,一在圓周上,一在圓裏,所以都只含一條弧,如$\widehat{AB}$. 右邊那個圖裏,角的頂點在圓外,便含有$\widehat{AB}$, $\widehat{CD}$兩條弧了.

§146. **切圓同交圓**. 兩圓同一直線在公共的一點相切,這兩圓叫做**切圓** (Tangent Circles). 一圓切在別圓的外面叫外切; 這圓切在那圓的裏邊叫做內切. 若一圓有一部分在別圓的裏邊,其餘一部分在圓外,這兩圓便是**交圓**(Intersecting Circles).





§147. **關於圓的簡單定理.** (1)圓的直徑是半徑的二倍.

(2)兩圓的半徑或直徑相等,這兩圓必相等也可以相合.

(3)同圓或等圓的半徑相等.

(4)一點到圓心的距離比半徑小,這點就在圓裏;等於半徑,就在圓上;大於半徑,就在圓外.

(5)兩圓相合,兩圓心必合.

(6)若一無限直線有一點在圓裏,這線必分割這圓於兩點.

(7)兩圓若在一點相交,必再在別點相交.

(8)同圓或等圓的兩劣弧,或優弧,倘若可以使他們的端點和圓心都相合,那兩弧便處

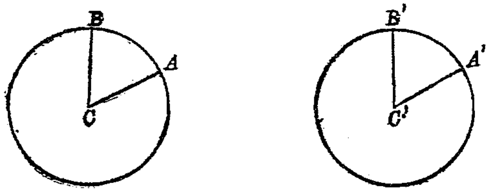
處相合且相等.

(9)若這圓的一弧,同那圓的一弧相合且相等,那麽兩個全圓也可以相合.

以上幾條定理,一讀就可了然,所以不用證明.

§148.　**定理一.**　同圓或等圓裏面,(1)相等圓心角所含的弧必相等.

(2)調過來說,若兩弧相等,他們所對的圓心角也相等.



(1)　設$\odot C=\odot C'$, $\angle C=\angle C'$.

求證　$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A'B'}$.

〔證〕 把$\odot C$疊在$\odot C'$上,令$\angle C$同$\angle C'$恰合,就可使A落到A',B落到B'.　　§147(3)

(同圓或等圓的半徑相等.)

所以　$\widehat{AB}=\widehat{A'B'}$.　§147(8)

(同圓或等圓的兩劣弧,倘若可以使他們的端點和圓心都相合,那兩弧便處處相合且相等.)

(2)設　$\odot C=\odot C'$, $\widehat{AB}=\widehat{A'B'}$

求證　$\angle C=\angle C'$.

〔證〕把$\odot C$疊在$\odot C'$上,$\widehat{AB}$合於$\widehat{A'B'}$.

§147(9)

(若這圓的一弧,同那圓的一弧,相合且相等,那麼兩個全圓也可以相合.)

於是　C落到C'.　§147(5)

(兩圓相合,兩圓心必合.)

因A落到A',B落到B',C落到C'.

$\therefore \angle C=\angle C'$.　§80(4)

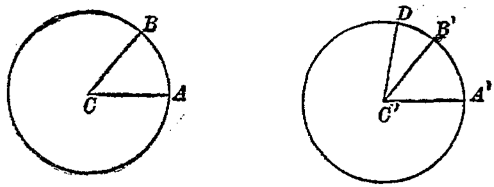
〔推論〕直徑平分一圓.

提示:這裏的相等圓心角,都是平角.

§149. **定理二.** 同圓或等圓裏面,(1)若是圓心角不等,大角所含的弧必較大;

(2)調過來說,若兩弧不等,含大弧的圓心

角必較大.



(1) 設$\odot C=\odot C'$, $\angle A'C'D>\angle ACB$.

求證 $\overset{\frown}{A'D}>\overset{\frown}{AB}$.

〔證〕 把$\odot C$放到$\odot C'$上面,使AC與$A'C'$合.

於是CB落到$\angle A'C'D$裏邊,B點落到$A'D$弧上面的B'點.

(所給$\angle A'C'D$大於$\angle ACB$).

$\therefore \overset{\frown}{A'D}>\overset{\frown}{A'B'}$,就是$\overset{\frown}{A'D}>\overset{\frown}{AB}$. 爲什麼?

(2) 設$\odot C=\odot C'$, $\overset{\frown}{A'D}>\overset{\frown}{AB}$.

求證 $\angle A'C'D>\angle ACB$.

〔證〕 把$\odot C$放到$\odot C'$上面,使CA同他的相等半徑$C'A'$相合,並$\overset{\frown}{AB}$落到$\overset{\frown}{A'D}$.

於是B落到$\overset{\frown}{A'D}$上的B',

(所給$\widehat{A'D}$大於$\widehat{AB}$)

且CB落到$\angle A'C'D$裏面.

$$\therefore \angle A'C'D > \angle A'C'B',$$

就是　$\angle A'C'D > \angle ACB$.　　爲什麼?

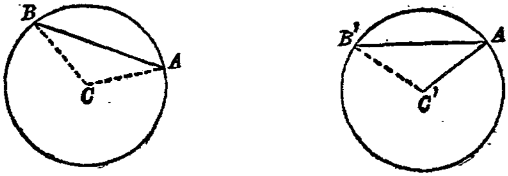
§150. 用弧量角. 在圓心的周角,若用半徑分他做360等分,每一份就是一度.那麼照§126的定理,這許多半徑把圓周也分做360等分. 若把每份當做單位弧,也叫一度,那麼2°,3°等的圓心角,就含有2°,3°等的弧. 換句話說,圓心角所含的單位角數,等於他所含的單位弧數. 所以從圓心角所含的弧數也可以把那角的度數量得出來. 量角器便是根據這個理由做成的.

90°的弧叫象限(Quardrant); 180°的弧就是半圓. 所以象限可量直角,半圓可量平角.

§151. 定理三. 同圓或等圓裏面,(1)等弦所對的弧相等.

(2)調轉來說,兩弧相等,對他們的弦也必

相等.



(1)　設$\odot C=\odot C'$, $AB=A'B'$.

求證　　$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A'B'}$.

分析:　畫半徑$CA, CB, C'A', C'B'$.

因爲求證$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A'B'}$, 須要$\angle C=\angle C'$. 因此須先證$\triangle ABC\equiv\triangle A'B'C'$.

〔證〕　因$AB=A'B', CB=C'B', CA=C'A'$;

$\therefore\ \triangle ABC\equiv\triangle A'B'C'$, $\angle C=\angle C'$.

爲什麽?

$\therefore\quad \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A'B'}$.　　§148(1)

(同圓或等圓裏面,相等圓心角所含的弧必相等.)

(2)　設$\odot C=\odot C'$, $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A'B'}$.

求證　　$AB=A'B'$.

分析:　若證得$\triangle ABC\equiv\triangle A'B'C'$,便能證得$AB=A'B'$.

〔證〕　$\angle C=\angle C'$.　§148(2)

(同圓或等圓裏面,若兩弧相等,他們所對的圓心角也相等.)

同樣　$CB=C'B'$, $CA=C'A'$.　爲什麼?

$\therefore \triangle ABC\equiv\triangle A'B'C'$, $AB=A'B'$.

爲什麼?

目解題

下面陳述定義的時候,最要注意的是在把你的意思十分確切的說出來. 陳述精確,是算學,文字的第一個要素.

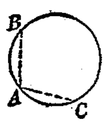
1. 述圓的定義.

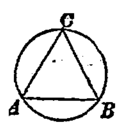
2. 述圓周圓心的定義.

3. 述弦,半徑,直徑,割線同切線的定義.

4. 述半圓,圓心角同圓周角的定義、

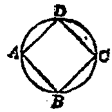
5. 把 A 做圓心,相等的半徑畫弧截圓於 B,C 兩點. 比較 $\overset{\frown}{AB}$ 同 $\overset{\frown}{AC}$.





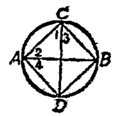
6. 上邊右圖裏面，AB, BC, CA 各弦，都把他量一下，再比較他們所對的弧.

7. 在右圖裏面，該比較 AB, BC, CD, DA 四條弦，再比較他們所對的弧.



8. 平分一條弧應當怎樣分法? 〔用 § 148(1)〕

9. 右圖裏面，AB, CD 兩直徑互做垂線，試證明他們分圓周做四等分.

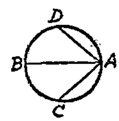


10. 用前題的圖，證明 AC, CB, BD 同 DA 四弦都相等，且 $\angle 1=\angle 2=\angle 3=\angle 4$.

11. 表明怎樣分一圓做六等弧.

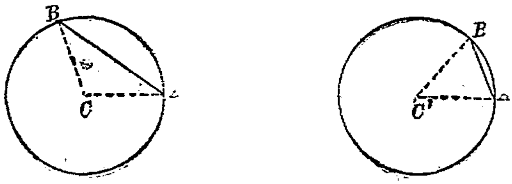
12. 表明怎樣分一圓做八等弧.

13. 在右面的圖裏邊，AB 是直徑，$AD=AC$. 比較 $\widehat{DB}$ 同 $\widehat{BC}$.



§152. 定理四. 在同圓或等圓裏面，(1)兩弦若不相等，大弦所對的弧必較大;

(2)調過來說，兩弧不等，對大弧的弦也必較大.



1.　設$\odot C=\odot C'$, $AB>A'B'$.

求證　　$\widehat{AB}>\widehat{A'B'}$.

分析:　畫半徑$CA,CB,C'A',C'B'$.

若$\angle C>\angle C'$,就有$\widehat{AB}>\widehat{A'B'}$.　為什麼?

〔證〕　ⓈABC同$A'B'C'$裏面,$AB>A'B'$,
$CA=C'A',CB=C'B'$.

$$\therefore\quad \angle C>\angle C'. \qquad \S 104$$

(兩個Ⓢ裏面,有兩邊對應相等,但這個的第三邊比那個的第三邊大,那麼這個的夾角必定比那個的夾角大.)

$$\therefore\quad \widehat{AB}>\widehat{A'B'}. \qquad \S 149(1)$$

(同⊙或等Ⓢ裏面,若圓心角不等……)

2.　設$\odot C=\odot C'$, $\widehat{AB}>\widehat{A'B'}$.

求證　　$AB>A'B'$.

〔證〕 因$\widehat{AB}>\widehat{A'B'}$,所以知道$\angle C>\angle C'$.

§149(2)

(同圓或等圓裏面,若兩弧不等……)

$\triangle$ ABC同$A'B'C'$裏面,$CA=C'A'$,$CB=C'B'$,$\angle C>\angle C'$.

$\therefore \quad AB>A'B'$. §103

(兩個$\triangle$裏面,有兩邊對應相等,但是這個$\triangle$的夾角比那個$\triangle$的夾角大,那麼這個的第三邊也比那個的第三邊大.)

〔推論〕 同圓或等圓裏面:

(1)若兩弦不等,大弦所對的優弧較小.

(2)調轉來說,若兩優弧不等,對大弧的弦較小.

理解題

1. 試證兩直徑分一圓成兩對等弧

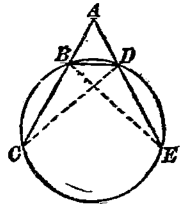
2. 畫一個三頂點都在圓周上的等腰三角形同他底邊上的中垂線　試證這兩腰同中垂線的夾角所含的兩弧相等

3. 聯結圓內兩等弦不相接近的兩端的線份必

相等

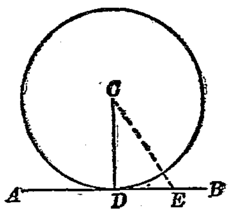
4. 從直徑AB的A點,引隨便的一弦AD;又從圓心畫和AD同側並且平行的半徑CE. 試證$\overparen{DE}=\overparen{EB}$.

5. 倘右圖裏面,$\overparen{BC}=\overparen{DE}$;證$\triangle ABD$是等腰三角形.



(提示) 證(1)$\triangle CBD\equiv\triangle EDB$, (2) $\angle CBD=\angle EDB$, (3) $\angle ABD=\angle ADB$.

§153. **定理五.** 一個圓的半徑端點的垂線,是這個圓的切線.



設AB與$\odot C$的半徑CD在D點正交.

求證　AB與$\odot C$相切.

〔證〕 令E是AB線上除D點外的隨便一點.

畫CE.

於是 $CE > CD$. §117

(從一點到一直線的各線中,垂線最短.)

所以E在圓外. §147(4)

(一點到圓心的距離比半徑大,這點就在圓外.)

這便是AB上除D外,隨便什麼點都在圓外了.

$\therefore$ AB是$\odot C$的切線. §141

(從圓外一點,所畫的直線,無論引長到多遠,同圓周單在一點相遇叫切線.)

〔推論一〕 倘一線同圓相切,那麼過切點的半徑,必是這切線的垂線.

〔提示〕 如CD不是AB的垂線,就當有穿過C點如CE線之類是AB的垂線. 這樣一來,$CE < CD$,所以E當在圓裏,並且AB也不成爲切線了.

〔推論二〕 從圓外一點,到這圓的兩切線相等;並且同連結這點和圓心的線所成的兩角也相等.

〔提示〕 用§116的定理.

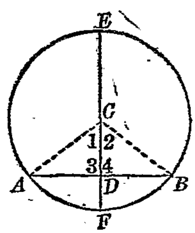
〔推論三〕 從切點所引切線的垂線,必穿過圓心.

〔推論四〕 從圓心所引切線的垂線,必經過切點.

§154. 定理六. 同弦正交的直徑,必平分這弦同這弦所對的兩弧.

設EF直徑同AB弦在D點正交.

求證 $AD=DB, \widehat{AF}=\widehat{FB}, \widehat{AE}=\widehat{EB}.$



分析: 畫半徑CA同CB.

祇要證明$\triangle ADC \equiv \triangle BDC$,就能證明

$(a)AD=DB$,$(b)\angle ACE=\angle BCE$,$(c)\widehat{AF}=\widehat{FB}$,$(d)\widehat{AE}=\widehat{EB}$.

〔證〕 在$\triangle\!\!\!\!\!\triangle ADC, BDC$裏面,$CA=CB$,

$$CD=CD.$$

$\therefore$ $\triangle ADC \equiv \triangle BDC$. §116

(一個$rt\triangle$的斜邊和一股同別個$\triangle$的斜邊和一股對應相等,這兩個$rt\triangle\!\!\!\!\!\triangle$全等.)

現在試把下面各步成立的理由說出來:

(a)$AD=DB$,(b) $\angle ACE=\angle BCE$,(c)$\widehat{AF}=\widehat{FB}$,(d) $\widehat{AE}=\widehat{EB}$.

〔推論〕 平分弦的直徑,必是這弦的垂線.

〔提示〕 倘要證明 $\angle 3=\angle 4$,祇要先證明 $\triangle ADC\equiv\angle BDC$.

§155. 同心圓(Concentric Circles). 圓心相合的圓叫做**同心圓**.

自解題

1. 定理五的推論一,是用的什麼證法?

2. 若從一圓的直徑兩端引這圓的兩切線(圖 1.)證明這兩切線相平行.

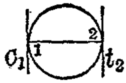


圖 1.

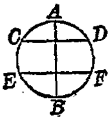


圖 2.

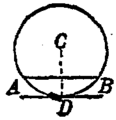


圖 3.

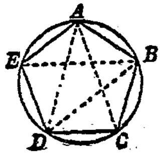


圖 4.

3. 證明如直徑平分平行兩弦的一弦,也必平分其他一弦. (圖 2.)

4. 同直徑尖端的切線平行的各弦,都被直徑所平分 (圖 3.)

5. 證明凡切線切於弧的中點,必同這弧所對的弦相平行. (圖 3.)

6. 在圖 4 裏面,$AB=BC=CD=DE=EA$. 證明那些對角線都相等

7. 將一圓隨便分作幾等分,倘順序把那些分點聯結起來,所成的多邊形總是等邊的麼?

理解題

1. 從一弦的兩端作弦的垂線,他們在圓內的部分相等

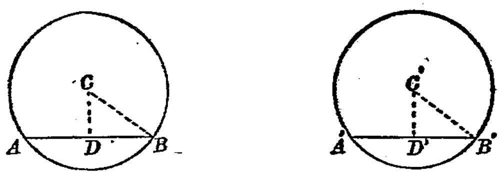
2. 倘從直徑的兩端點引隨便一切線的垂線,這垂線的和就等於這圓的直徑

3. 兩同心圓被一線所割,那夾在兩圓中間的線

份相等

§156.　定理七.　在同圓或等圓裏面,(1)若兩弦相等,他們到圓心的距離相等.

(2)　調過來說,若兩弦到圓心的距離相等,這兩弦也相等.



(1)　設 $\odot C=\odot C'$, $AB=A'B'$, $CD\perp AB$, $C'D'\perp A'B'$.

求證　　　$CD=C'D'$.

〔證〕　畫 CB 同 $C'B'$.

於是　$DB=\frac{1}{2}AB$ 同 $D'B'=\frac{1}{2}A'B'$　§154

(同弦正交的直徑必平分這弦所對的兩弧.)

但　$AB=A'B'$,　　$\therefore DB=D'B'$.　§82(4)

(等量除同數商相等.)

以下各步的證明,試把理由說出來:

(a)$BC=B'C'$,

(b) $\triangle BCD \equiv \triangle B'C'D'$　(c) $CD = C'D'$.

(2)　設 $CD = C'D'$, $CD \perp AB$, $C'D' \perp A'B'$.

求證　$AB = A'B'$.

〔證〕　把⊙C放在⊙C'上，使C同C'合，CD同$C'D'$合，

於是　D' 同 D 相合　　為什麼?

$D'B'$ 同 DB 相合　　為什麼?

B' 同 B 相合　　§147(4)

$\therefore$　$D'B' = DB$,　$AB = A'B'$.

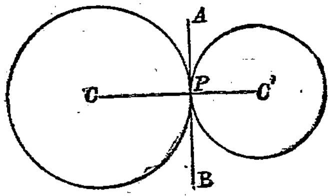
理解題

1. 在兩個同心圓裏面，所有同內圓相切的外圓的弦，都必等長.

2. 如兩弦同直徑相交在一點，同直徑成功等角，這兩弦便相等.

§157.　定理八.　(1)若兩圓相遇在兩圓心的連線上，兩圓必相切；

(2)調轉來說，若兩圓相切，連兩圓心的線，必穿過切點.



(1)　設ⓈC同C'在CC'線上的P點相遇.

求證　ⓈC同C'在P點相切.

〔證〕　過P點畫$AB\perp CC'$.

那麼AB同⊙C在P點相切,又同⊙C'在P點相切.　§153

(一個圓的半徑端點的垂線,是這個圓的切線.)

$\therefore$　⊙C同⊙C'在P點相切.　§146

(2)　設⊙C同⊙C'在P點相切.

求證　聯結圓心的線CC',必穿過P點.

〔證〕　令AB是ⓈC同C'在P點的公切線.　§146

於是穿過P點AB的垂線也穿過C點同C'點.　§153(推論三)

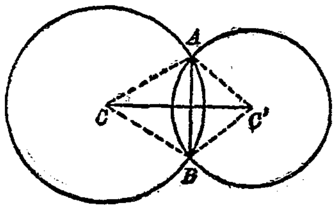
$\therefore$　P在連兩圓心的線上.

就是連兩圓心的線穿過切點.

§158. **定理九.** 兩交圓圓心的連結線必平分這兩圓公有的弦,並且是他的垂線.

設交圓 C 同 C' 有公共的弦 AB.

求證 CC' 平分 AB,並且垂直於 AB.



〔證〕　$CA=CB, C'A=C'B.$　為什麼?

∴　$\triangle ACC' \equiv \triangle BCC'.$　為什麼?

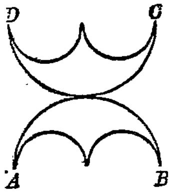
$\angle ACC' = \angle BCC',$　為什麼?

於是 CC' 平分 AB,並且垂直於 AB.

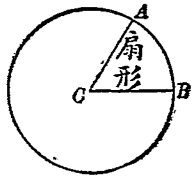
§91(推論二)

目　解　題

1. 如下圖 A,B,C,D 是一個正方形的頂點. 表明這圓的作法怎樣　那幾個半圓是相切的?

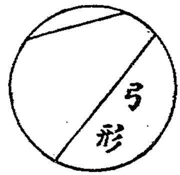


§159. **扇形**(Sector). 兩半徑同他所含的弧成功的圖形叫做扇形.



右面扇形ACB,就是BC,AC兩半徑同$\widehat{AB}$所圍成的.

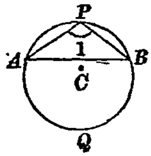
§160. **弓形**(Segment of a Circle). 圓裏的弦同他所對的弧所成的形叫弓形. 弦所對的弧有優劣兩條,所以對於一條弦有大小兩弓形.



若弦是直徑,兩弓形就相等.

§161. **弓形裏的圓周角.** 圓周角的頂點在弓形的弧上,他的兩邊的端點在弓形的弦的端點上,這圓周角就叫這弓形裏的圓周

角. 如圖∠1是弓形APB裏的圓周角. 有時我們也叫∠1是$\widehat{AQB}$上的圓周角.



§162. **定理十.** 圓周角等於他所含的弧所對圓心角的一半.

設∠ABD是⊙C的圓周角, $\widehat{AD}$是他所含的弧.

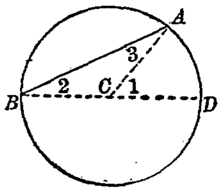


圖 1.

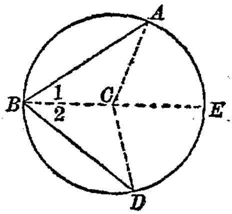


圖 2.

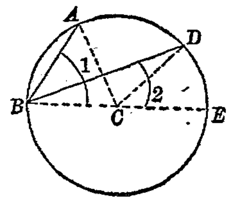


圖 3.

求證　$\angle ABD=\frac{1}{2}\angle ACD.$

第一種: 一邊BD是直徑.　(圖1)

〔證〕 畫CA半徑. 於是$\angle 1=\angle 2+\angle 3.$

§113(推論四)

(一個三角形的外角等於他的兩個內對角的和.)

但因　$CA=CB$,　$\therefore \angle 3=\angle 2.$　為什麼?

$$\therefore \angle 1 = \angle 2\text{的二倍.}$$

$$\text{就是}\angle 2 = \frac{1}{2}\angle 1.$$

第二種: 圓心在角的裏面. (圖2)

〔證〕 畫直徑BE,那麼 $\angle ABD = \angle 1 + \angle 2.$

因 $\angle 1 = \frac{1}{2}\angle ACE,\quad \angle 2 = \frac{1}{2}\angle ECD.$

(第一種)

$\therefore \angle 1 + \angle 2 = \frac{1}{2}\angle ACE + \frac{1}{2}\angle ECD.$

爲什麼?

就是 $\angle ABD = \frac{1}{2}\angle ACD.$

第三種: 圓心在角的外面. (圖3)

〔證〕 畫直徑BE,那麼$\angle ABD = \angle 1 - \angle 2.$

爲什麼?

因 $\angle 1 = \frac{1}{2}\angle ACE,\ \angle 2 = \frac{1}{2}\angle DCE.$

(第一種)

$\therefore \angle 1 - \angle 2 = \frac{1}{2}\angle ACE - \frac{1}{2}\angle DCE.$

爲什麼?

就是　　$\angle ABD=\frac{1}{2}\angle ACD.$

〔推論一〕 同圓或等圓裏的圓周角若等,他們所含的弧也等.

〔推論二〕 同弓形裏或同弧上的圓周角相等.

〔推論三〕 半圓裏的圓周角是直角.

理解題

1. 任意四邊形的各頂角若都在圓周上,那兩對相對的角必互為補角.

2. 兩圓相交於 C, D. CA, CB 是兩圓的兩直徑,試證 A,D,B 在一直線上.

§163. 定理十一. 兩平行線同一圓相遇,兩平行線裏所截的弧必相等.

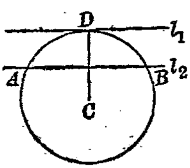


圖 1.

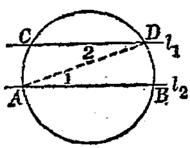


圖 2.

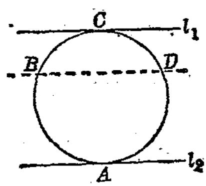


圖 3.

設l_1,l_2,兩平行線同一圓相遇.

求證l_1,l_2所截的兩弧相等.

第一種:　l_1是切線;l_2是割線.　(圖1)

〔證〕　過切點畫CD半徑.

於是　$CD \perp l_1$.　§153(推論一)

(倘一線同圓相切,那麼過切點的半徑,必是這切線的垂線.)

$\therefore$　$CD \perp l_2$.　§111(推論一)

(若一線同兩平行線的一條正交,也必同其餘一條正交.)

$\therefore$　$\widehat{AD}=\widehat{BD}$.　§154

(同弦正交的直徑必平分這弦同所對的兩弧.)

第二種:　l_1,l_2都是割線.　(圖2)

〔證〕　畫AD弦.

於是$\angle 1=\angle 2$.　所以$\widehat{AC}=\widehat{BD}$.　為什麼?

第三種:　l_1,l_2都是切線.　(圖3)

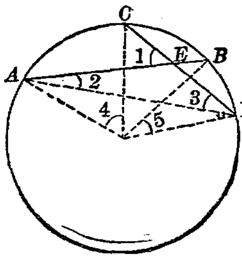
〔證〕　畫BD割線平行於l_1,　$\therefore BD \parallel l_2$.

於是$\widehat{AB}=\widehat{AD}$,　$\widehat{BC}=\widehat{DC}$.　(第一種)

$\therefore\quad \widehat{AB}+\widehat{BC}=\widehat{AD}+\widehat{DC},$

就是 $\widehat{ABC}=\widehat{ADC}.$　　為什麼?

§164. **定理十二.** 相交兩弦成功的角,等於這角同對頂角所含的兩弧所對圓心角的半和.



設 $\angle 1$ 是 AB,CD 兩弦相交成功的角, $\angle 4$ 是 $\angle 1$ 所含弧所對的圓心角, $\angle 5$ 是 $\angle 1$ 的對頂角所含弧所對的圓心角.

求證　$\angle 1=\frac{1}{2}(\angle 4+\angle 5).$

〔證〕 畫 AD.

於是　$\angle 1=\angle 2+\angle 3.$　§113(推論四)

因　$\angle 2=\frac{1}{2}\angle 5,\ \angle 3=\frac{1}{2}\angle 4;$　§162

$\therefore \quad \angle 2+\angle 3=\frac{1}{2}\angle 5+\frac{1}{2}\angle 4.$　　為什麼?

就是　$\angle 1=\frac{1}{2}(\angle 4+\angle 5).$

自解題

1. 若對$\overparen{BD}$的圓心角是30°,對$\overparen{AC}$的圓心角是40°;又若對$\overparen{BD}$的圓心角是12°,對$\overparen{AC}$的圓心角是18°,如上圖找出$\angle 1$.

2. 若對$\overparen{CB}$的圓心角是110°,對$\overparen{ACD}$的圓心角是170°;又若對$\overparen{CB}$的圓心角是150°,對$\overparen{ACD}$的圓心角是200°,如上圖找出$\angle 1$.

3. 同圖裏面,若$\angle 1=20°$,對$\overparen{BD}$的圓心角是30°.找出對$\overparen{AC}$的圓心角.又若$\angle 1=50°$,對$\overparen{BD}$的圓心角是60°.也找對$\overparen{AC}$的圓心角.

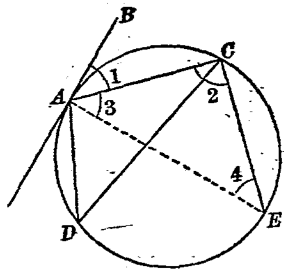
4. 如§163的圖1裏面,對$\overparen{AD}$的圓心角是55°,找對其他各弧的圓心角.如對$\overparen{BD}$的圓心角是110°,也找對其他諸弧的圓心角.

5. 如§163的圖2裏面,對$\overparen{AC}$的圓心角是40°,對$\overparen{CD}$的圓心角是150°,找對$\overparen{DB}$同$\overparen{AB}$的圓心角.

6. 如§163的圖3裏面,對$\overparen{BC}$的圓心角是30°,找對$\overparen{CD}$,$\overparen{DA}$同$\overparen{AB}$的圓心角.又若對$\overparen{AD}$的圓心角是95°,

也找對其餘諸弧的圓心角.

§165. **定理十三.** 一切線同過切點的弦所成的角,等於這角所含的弧上的圓周角.



設 $\angle 1$ 是切線 AB 同 AC 弦成功的角.
$\angle ADC$ 是 $\overset{\frown}{AC}$ 上的圓周角.

求證　　$\angle 1 = \angle ADC$.

〔證〕　畫 AE 直徑,連結 CE.

於是	$\angle 2 = 90°$.	為什麼?
∴	$\angle 3 + \angle 4 = 90°$.	為什麼?
但	$\angle 3 + \angle 1 = 90°$,	§153(推論一)
∴	$\angle 1 = \angle 4$.	為什麼?
因	$\angle 4 = \angle ADC$,	§162(推論二)

$\therefore \angle 1 = \angle ADC$.

目解題

1. 在上面的圖內,(a)若 $\angle ADC=60°$;(b)若 $\angle ADC=47°$;(c)若 $\angle ADC=35°30'$,試求 $\angle 1$.

2. (a)若 $\angle 1=40°$;(b)若 $\angle 1=35°$;(c)若 $\angle 1=23°15'$,問 $\overset{\frown}{AC}$ 所對的圓心角是多少度?

理解題

1. 在一圓上畫兩切線同連結兩切點的弦. 證所成的兩角相等.

2. 互相垂直的兩弦,所含相對兩弧的和等於半圓.

3. 畫通過兩圓交點的二線,到圓周為止. 證明聯結相當諸端點的弦必相平行.

§166. 定理十四. 兩割線,或兩切線或一割線同一切線遇於圓外所成的一角,等於在這角所含的兩弧上的圓周角的差.

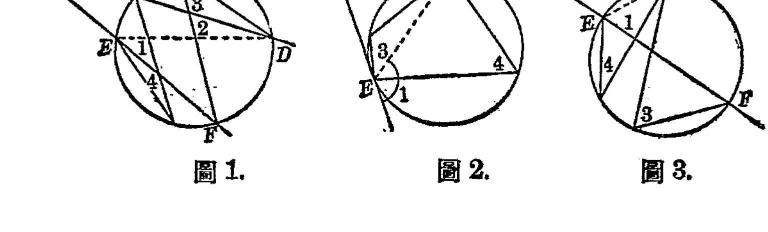


圖 1.　　圖 2.　　圖 3.

第一種：設$\angle A$是兩割線AD同AF所成的角.　(圖1)

求證　$\angle A=\angle 3-\angle 4.$

〔證〕畫ED弦.

於是　$\angle 1=\angle A+\angle 2$,或$\angle A=\angle 1-\angle 2.$

爲什麼?

但　$\angle 1=\angle 3, \angle 2=\angle 4.$　§162(推論二)

$\therefore$　$\angle A=\angle 3-\angle 4.$

第二種：設$\angle A$是兩切線AB同AE作成的角.　(圖2)

求證　$\angle A=\angle 3-\angle 4.$

〔證〕畫BE弦.

於是　$\angle A=\angle 1-\angle 2.$　爲什麼?

但　$\angle 1=\angle 3,\ \angle 2=\angle 4,$　§165

$\therefore$　$\angle 1-\angle 2=\angle 3-\angle 4.$　爲什麼?

就是　$\angle A=\angle 3-\angle 4.$

第三種：設$\angle A$是切線AB同割線AF作成的角.　(圖3)

求證 $\angle A=\angle 3-\angle 4$.

〔證〕 你們試自己證一證.

§167. **內接形和外接形.** 一個多角形的各頂點都在一圓周上,則此多角形叫做圓的內接多角形,此圓叫做多角形的外接圓;也說此多角形內接於圓,圓外接於多角形. 一個多角形的各邊都是一圓的切線,則此多角形叫做圓的外接多角形,此圓叫做多角形的內接圓;也說此多角形外接於圓,圓內接於多角形.

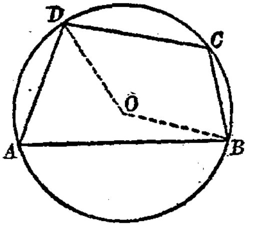
§168. **四角形外角的內對角.** 四角形相對兩角的一角叫做其他一角的外角的內對角.

§169. **定理十五.** 圓內接四角形的對角互爲補角.

$ABCD$ 是$\odot O$的內接四邊形.

求證 $\angle A+\angle C=2\underset{s}{\angle}R$.

$\angle B+\angle D=2\underset{s}{\angle}R$.



〔證〕 畫半徑OB,OD.

於是　$\angle A=\frac{1}{2}\angle BOD$, $\angle C=\frac{1}{2}$優$\angle BOD$.　§162

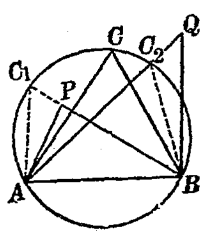
但　$\angle BOD+$優$\angle BOD=4\measuredangle R$.　§83(5)

∴　$\angle A+\angle C=2\measuredangle R$.　§82(4)

同樣　$\angle B+\angle D=2\measuredangle R$.

〔推論〕 圓內接四角形的外角等於他的內對角.

§170. **定理十六.** 從弓形弧內一點至其弦的兩端點所聯線份的夾角大於弓形角; 從弓形弧外一點至其弦的兩端點所聯線份的夾角小於弓形角.



P為弓形ACB內任意一點; Q為弓形ACB外任意一點.

求證　$\angle APB > \angle ACB$; $\angle AQB < \angle ACB$.

〔證〕　(1)延長 BP 交弓形弧於 C_1. 聯 C_1A.

則　$\angle APB > \angle AC_1B$.　§97

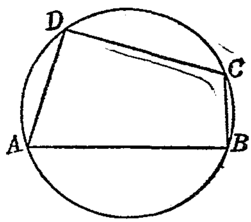
∴　$\angle APB > \angle ACB$.

(2) QA 交弓形弧於 C_2.

則　$\angle AQB < \angle AC_2B$.　§97

∴　$\angle AQB < \angle ACB$.

§171. **定理十七.** 四角形的對角互為補角,則此四角形內接於圓.



設　$ABCD$ 四角形內, $\angle A + \angle C = 2R\angle$.

求證　$ABCD$ 內接於圓.

〔證〕　過 B, C, D 三點作一圓.

若 A 在⊙BCD 內,

則　$\angle A + \angle C > 2R\angle$.　§169, §170

若A在$\odot BCD$外,

則　$\angle A+\angle C<2R\angle$.　§169, §170

今　$\angle A+\angle C=2R\angle$,　故$A$在$\odot BCD$上.

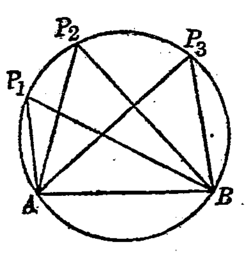
即　$ABCD$內接於圓.

〔推論〕 四角形的外角等於他的內對角,則此四角形內接於圓.

§172. 定理十八. 諸三角形的底邊合一,頂角相等,且其角頂在共有底邊的同旁,則此諸三角形的頂點共圓.

$\triangle P_1AB$, $\triangle P_2AB$, $\triangle P_3AB$……共有底邊AB. P_1, P_2, P_3…皆在AB之同旁. $\angle AP_1B=\angle AP_2B=\angle AP_3B=$……

求證　A, P_1, P_2, P_3,……B共圓.



〔證〕 作$\odot AP_1B$.　若P_2在$\odot AP_1B$之外,

則　　$\angle AP_2B < \angle AP_1B$.　　§170

若　　P_2 在$\odot AP_1B$之內,

則　　$\angle AP_2B > \angle AP_1B$.　　§172

今　　$\angle AP_2B = \angle AP_1B$,

故　　P_2在$\odot AP_1B$上.

同理可證P_3,……皆在$\odot AP_1B$上.

故　　$A, P_1, P_2, P_3, \cdots\cdots, B$共圓.

習　解　題

1. 若 §166 的圖 1 裏面, $\widehat{BF}$ 所對的圓心角是 50°, $\widehat{BE}$ 所對的圓心角是 20°, 求 $\angle A$.

2. 若 §166 的圖 2 裏面, $\widehat{BDE}$ 所對的圓心角是 280°, 求$\angle A$.

3. 若 §166 的圖 3 裏面, $\angle A=20°$, $\angle 3=100°$, 求 $\angle 4$ 的度數.

4. 從下面圖1, 比較同弓形裏的圓周角. 設頂點 P 沿着弧上移動,但兩邊都穿過 A 點同 B 點. 問那些角的大小是不是不變呢? 證一證.

5. 若一弧比半圓小, 那麼裏面的圓周角比直角大還是小呢? 看圖 2.

圖 1.

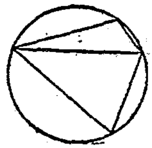


圖 2.

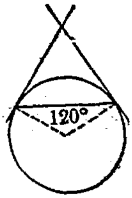


圖 3.

6. 若一弧比半圓大. 那麼裏面的圓周角比直角小還是大呢? 看圖 2.

7. 畫含有120°,圓心角的弧,在這弧的兩端作兩切線這兩切線組成的角是多少度? 看圖 3.

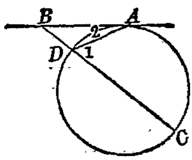


圖 4.

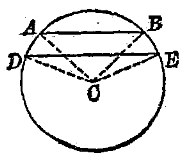


圖 5.

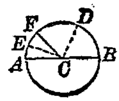


圖 6.

8. 如圖 4, AB 切於圓. $\angle 1=65°$, $\angle 2=25°$, 求 $\angle B$. BC 是不是這圓的直徑?

9. 如圖 5, AB 同 DE 兩弦平行,聯結各弦的兩端於圓心　證明 $\angle ACD=\angle BCE$.

10. 如圖 6, AB 爲直徑. 若 $\overset{\frown}{AE}=\overset{\frown}{EF}$, $\overset{\frown}{FD}=\overset{\frown}{DB}$. 證明 $\angle ECD$ 是直角.

理解題

1. 若一個六角形 $ABCDEF$ 內接於圓. 試證 $\angle A+\angle C+\angle E=4$ 直角.

2. 若一梯形的諸頂點都在圓周上,他的對角線相等;且梯形的兩腰也相等.

3. 聯結相交二弦的端點. 證明這樣所成功的兩個三角形裏的各角都對應相等.

4. 用所給線份做對角線作正方形.

5. l 線與圓相切於 A(圖 1). 畫 AB, AC 弦,令 $\angle 1=\angle 2$. 證明 $AB=AC$.

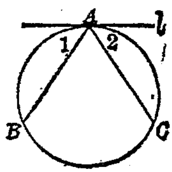


圖 1.

6. 把等腰三角形的一邊做直徑作圓. 證明圓周必平分這三角形的底(圖 2).

7. 隨便相等的或不等的兩外切圓相切於 D. 畫他們的公切線 AB. 試證 $\angle ADB$ 一定是直角(圖 3).

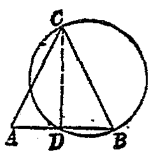


圖 2.

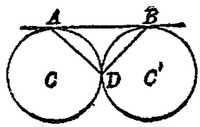


圖 3.

8. 兩圓相交於 D, E, 有公共的切線 AB. 試證 $\measuredangle ADB$ 同 AEB 互爲補角(圖4.)

9. 過正方形對角線上的隨便一點 E, 畫與正方形邊平行的諸線,遇邊於 F,G,H 同 K. 若 $AO=OC$, 表明用 O 做圓心, OG 做半徑所畫的圓, 必經過 F,H,K 各點(圖5.)

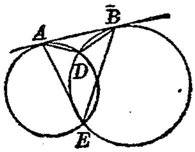


圖 4.

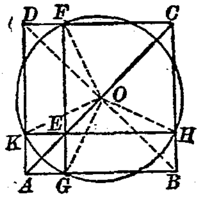
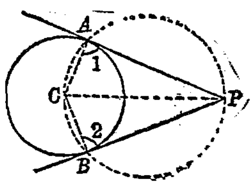


圖 5.

§173. 作圖題一. 從圓外所給一點作這圓的切線.



設 P 是 $\odot C$ 外的所給一點.

從 P 點作 $\odot C$ 的切線.

作法. 畫 CP. 用 CP 做直徑作一圓,同所給圓在 A,B 兩點相交.

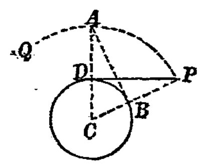
於是PA,PB都是切線.

〔證〕　畫半徑CA,CB.

於是　$\angle 1=\angle 2=\angle R$.　§162(推論三)

$\therefore$　PA同PB都是$\odot C$的切線.　§153.

歐几里得的作法.　用C做圓心,CP做半徑畫PQ弧.　畫PC交$\odot C$於B.　畫$BA\perp CP$遇$\overparen{PQ}$於A.　聯結AC交$\odot C$於D,作PD,則$PD\perp AC$.　於是PD切於圓.



〔提示〕　證$\triangle PDC\cong\triangle ABC$.　所以

$$\angle CDP=\angle CBA=\angle R.$$

§174.　**作圖題二.**　畫相離兩圓的公共切線.

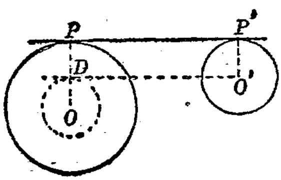


圖 1.

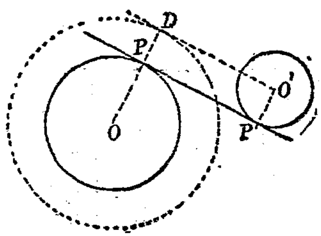


圖 2.

給了ⓈO同O',⊙O比⊙O'大.

求畫公切於兩圓的線.

作法．把O做圓心,如圖1,所給兩半徑的差做半徑;又如圖2,用兩半徑的和做半徑;各畫一虛線圓．在兩圖內,各從O'點畫切於虛線圓的切線$O'D$.

聯結OD交⊙O於P

從O'畫DP的平行線交⊙O'於P'

聯結PP'就是所求的切線.

證的略記：在兩圖裏面,證$PP'O'D$是長方形,所以PP'垂直於OP同$O'P'$,便是同各圓相切.

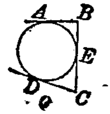
§175．外公切線與內公切線． 不穿過圓心聯結線的公切線,叫外公切線．穿過圓心聯結線的,就叫內公切線.

所以PP'在圖1裏面是外公切線;在圖2裏面就是內公切線.

理解題

1. 在三角形裏面,作一線份令等於所給線份的長,他的兩端點在二邊上,並且同第三邊平行.

2. 如圖 AB, BC, CD 同圓相切於 A, E, D 三點證明 $BC=BA+CD$.



3. 過圓裏面的所給點作弦,令等於所給線份的長.

4. 作1圓,令在平行兩線上截取等於所設定長的相等二弦.

〔提示〕 圓心必須在同這兩線平行,並且在這兩線中間的一線上.

5. 圖1裏有兩個不相交的線份AB同CD. 不許延長AB, CD,求作EF線,要令這線平分延長AB, CD所成的角.

〔提示〕 過CD上的H點畫HG,平行於AB,並作等腰三角形HCG. 畫$KL \parallel CG$,於是EF就是KL的中垂線. 證明他.

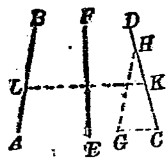


圖1.

6. 兩圓C, C'外切於D. 過D畫一線段,一端到$\odot C$為A點;又一端到$\odot C'$為B點. 試證$AC \parallel BC'$.

7. 大小兩圓內切於A,從A畫大圓的一弦AB割小圓於D;又一弦AC割小圓於E. 試證$BC \parallel DE$.

〔提示〕 在A點畫公切線.

8. 證圖2內$CE \parallel FD$. 圖3內D處的切線平行於CE.

〔提示〕 每圖內畫AB弦.

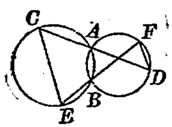


圖2.

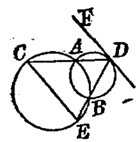


圖3.

9. 兩圓內切或外切於A,過A的割線,遇兩圓於B,C. 證明在B,C的切線相平行.

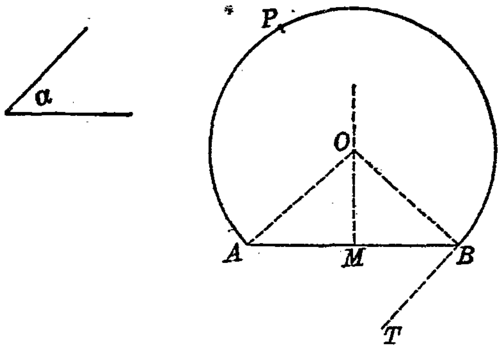
10. 兩圓相交於A,B,過A作割線交兩圓於C同B.證明$\angle CBD$的大小一定.

§176. 作圖題三. 以一所設線份爲弦,作一弓形,令弓形裏的圓周角等於一所設角.

給了線份AB和$\angle\alpha$.

求作一弓形,以AB爲弓形的弦,且令弓形

裏的圓周角等於$\angle\alpha$.



作法. 作AB的中垂線MO. 過B作BT令$\angle ABT=\angle\alpha$. 過B再作BO令$BO\perp BT$. BO交MO於O. 以O做圓心,OB作半徑畫弧$\widehat{APB}$,則弓形APB卽所求.

〔證〕 $\because$ OM是AB的中垂線,

$\therefore$ $OA=OB$, $\therefore \frown APB$必過A,

$\therefore$ AB是弓形弦.

$\because$ $BT\perp BO$, $\therefore BT$是切線.

$\therefore$ $\angle ABT=$弓形裏的圓周角.

但 $\angle ABT=\angle\alpha$, $\therefore$此弓形裏的圓周角等於$\angle\alpha$.

∴　　弓形APB卽所求.

〔討論〕 本題有兩個解答,卽AB的兩側,都可作一弓形.

若$\angle\alpha=\angle R$, 則此弓形是兩個半圓.

若$\angle\alpha<\angle R$, 則此弓形大於半圓如上圖.

若$\angle\alpha>\angle R$, 則此弓形小於半圓.

目解題

試說明下面各題裏適合條件的平面軌迹,但不須去證明他.(看§§ 123,124)

1. 和兩定點等遠的點.
2. 和一定點有一定距離的點.
3. 同一定線有一定距離的點.
4. 同兩平行線等遠的點.
5. 同相交兩線等遠的點.

§177. 解決軌跡題的要義.

(1) 直接觀察什麼是所求的軌跡.

(2) 必要時畫合於所給性質的許多點,這樣可使軌跡格外顯著.

(3) 看準假定軌跡上的所有點有沒有所給性質.

(4) 看準所有合於所給性質的點是不是在假定軌跡上.

(5) 最後正式證明成立這軌跡所需要的兩個定理:

(*a*) 所有這軌跡上的點都有所給性質.

(*b*) 所有有所給性質的點都在這軌跡上.

理 解 題

1. 一條一定長的線段的兩端,按着一隻直角的兩邊上移動,找出這條動線中點的軌跡.

2. 過圓上一定點畫所有的弦. 試求那些弦上中點的軌跡.

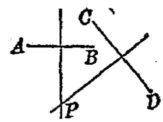
〔提示〕 先用§154;次用§176.

3. 過一定點A畫若干線. 求出另過一點B對於這許多線上所畫垂線正交的點的軌跡.

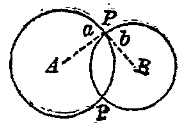
§178. 用交軌解作圖題法. 一個平面

裏點的軌跡，通常都是受一個條件所約束，如果要合兩個條件，那麼要找合於兩軌跡的各點，便是他們的交點，或叫**交軌** (Intersection of Loci).

舉例如下:



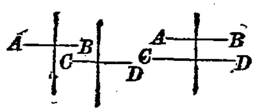
例一　要找和A同B等遠同時也和C同D等遠的的點，就作AB, CD的中垂線，這兩中垂線的交點便是所求.



例二　若要找離開A是a長，離開B是b長的一點，那麼用A做圓心，a長做半徑；又B做圓心，b長做半徑各畫一圓，他們的交點便是所求.

例三　要找離兩交線等遠，又同一定點的距離爲定長的點，就當先作兩交線的夾角的平分線；然後再用定點做圓心，定長做半徑作一個圓，於是那平分線和這圓相遇的點，便是所求.

§179. 作圖題的討論. 討論作圖題,是要在指定條件的下面,找出所有各種不同的情形來. 譬如討論上面例一的時候,我們當找出AB,CD兩中垂線若相平行,便沒有P點能合兩個條件,又如AB, CD的兩中垂線同在一直線上,那麼所有這中垂線上的點,都合兩個條件,就是所求了.



§180. 解作圖題的注意. 關於解決作圖題的方法,我們在§§135,137裏面已經講過一個解析法. 現在又增加了一個交軌法. 這兩種方法都是很重要的.

目解題

怎樣求出下面各題裏適合條件的諸點,每題都加討論,但不必去證明他.

1. 離開P三吋Q三吋的點.
2. 離開P四吋,並且和Q同R等遠的點.
3. 同P,Q等遠也同兩平行線等遠的點.

4. 同P,Q等遠也同兩交線等遠的點.

5. 離開一線有一定的長,又同兩點等遠的點.

6. 離開一線有一定的長,又同兩線等遠的點.

理解題

1. 作圓心在△一邊上,並切於這△其餘兩邊的一個圓（那△兩邊在必要時可以延長）

2. 作圓心在一定線上並經過兩定點的一個圓.

3. 作圓心在所給線l_1上用r做半徑同所給線l相切的一個圓.

4. 作圓心在所給線上並和兩平行線相切的一個圓.

5. 作圓心在所給圓周上並和已定相交兩線相切的一個圓.

6. 作一個一定半徑並切於所給相交兩線的一個圓.

第六編　比例,相似形

§181.　幾何學的理想的特性.　從幾何學上所論如點,線,面的各種性質,可以顯出他們的純粹理想的特性.　譬如點單有位置,沒有長短,闊狹,同厚薄;就沒有什麼實質的存在.

不但這樣,就是處理他們的方法,也都一樣是理想的.　求出來的結果,無非是些命辭;要用作圖法同量法去證明,就祇能得一些概略的情形.

學的人對於這理想的性質,必須時時緊記在心,才可以了解處理量的方法.　下面所講就是理想的量法.

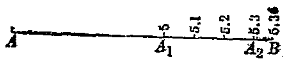
§182.　線份的敼數(Number of Units).　要量AB線份的長,須選一個固定的長做單位,再用這單位沿着線段一下一下的量去.　若最後單位的那端同B相合,那麼AB就含這單

位的整倍數.

這個倍數就叫做AB的戲數. 譬如AB含有6個單位,他的戲數就是6.

§183. 單位的整倍量和非整倍量. 取一個單位長,量所給的一線份,若那線份含這單位的整倍數時,就叫這線份,是這單位的整倍量若那線份不含這單位的整倍數時,就叫這線份是這單位的非整倍量.

例如用**公尺**(Meter)量一線AB,從A端起量到第五次的時候,公尺的末端,落於AB的A_1,剩下的A_1B是比公尺還短.



所以用**公寸**(Decimeter)做單位去量A_1B.量了三回,又餘A_2B比公寸還短.

末後再用**公分**(Centimeter)去量A_2B. 設量了六次恰盡.

那麼 AB 的長就是五公尺三公寸六公分，寫作5.36公尺或536公分．那麼 AB 是公尺的非整倍量．卻是公分的整倍量．

§184. **可通約同不可通約的線份．** 兩線份如有可以量盡的公共單位，就叫可通約，不然就叫不可通約．

§185. **實際的量法是不精確的．** 量一個距離，量了兩回的結果，決不會完全恰合．例如量一四千尺長的距離，量了兩回，結果終不免要相差幾寸，精密一些，也要相差幾分．再不然；一分以內的差，總是難免的．所以實際量法原來是用來求一個**近似值**(Approximate Value)．那近似的程度又全靠所用的儀器同量時的小心．

§186. **實際的量法總可通約．** 用實際量法量出來的量總可通約．若是量得差不多恰盡的同類諸量，實際上應用起來，總當他們是可通約的．

不可通約量的存在,只有論理學上的根據. 不過爲了完備論理學的證辯,才討論到這不可通約的量.

本編所講的定理,都是就可通約的量去證明的. 至於不可通約量,因爲現在程度的關係,還不能講到.

§187. **幾何量的比.** 兩個可通約量的比,就是用同樣單位量出來的次數的商. 例如兩線份的長,一個是3呎,一個是4呎,那麼第一線份對於第二線份的比就是$\frac{3}{4}$

無論用什麼單位,兩個通約量的比,總是一樣. 例如兩線份用呎去量是3呎同4呎,若用吋去量,就是一個是36吋,一個是48吋. 結果兩比仍然一樣. $\frac{36}{48}=\frac{3}{4}$.

§188. **比**(Ratio). 一個分數可以叫做比,所以$\frac{a}{b}$可以稱他是a對於b的比,或簡稱a比b,寫作$a:b$.

§189. **比的項**(Terms of a Ratio). 分數的分子叫**前率**(Antecedent). 分母就叫**後率**(Consequent).

前率和後率都叫比的項.

§190. **比例**(Proportion). 兩比中間用等號聯起來,所成的方程式叫比例.

例如$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$就是一個比例. 比例也可以寫做$a:b=c:d$,或$a:b::c:d$. 他的讀法就是a對於b的比等於c對於d的比. 簡單說;a比b等於c比d.

§191. **比例數**(Proportional Numbers). a,b,c,同d四個數寫做$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$或$a:b=c:d$的時候,可以說他們是成比例.

§192. **內項同外項**(Means and Extremes). 在這比例$a:b=c:d$的裏面,那兩端的項,如a和d,我們喚他做外項. 那中間的兩項b和c,就叫做內項.

§193. 比例第三項. 比例中項. 若$a:b=b:x$,那麼x稱爲對於a同b的**比例第三項**(Third Proportional),b就叫做a同x間的**比例中項**(Mean Proportional).

§194. 比例第四項. 若$a:b=c:x$,那麼x叫做對於a,b和c的**比例第四項**(Fourth Proportional).

§195. 連比例(Continued Proportion). 若$a:b=b:c=c:d=d:e$,那a,b,c,d,e叫做成連比例.

§196. 關於比例的普通定理. 若a,b,c,d四個數,已知$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,

那麼　(1) $ad=bc$.　　(2) $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$.

(3) $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$.　　(4) $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{c}$.

(5) $\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$.　　(6) $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$.

(7) $\frac{a^n}{b^n}=\frac{c^n}{d^n}$.

〔證〕 (1)把 bd 乘方程式 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 的兩端,就得

$$ad=bc$$

這便是"若四數成比例,兩內項相乘的積等於外項的積."

(2) 把方程式 $bc=ad$ 的兩端,都用 ac 來除,就得

$$\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$$

這叫做比例的**倒轉定理**(Invertendo).

(3) 用 cd 除方程式 $ad=bc$ 的兩端,就得

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$$

這叫做比例的**互換定理**(Alternando).

(4) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ 這方程式的兩端都加1,就得

$$\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1 \text{ 或 } \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$$

這叫做**合比定理**(Componendo).

(5)　從方程式$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$的兩端各減去1,就得

$$\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1\text{ 或 }\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$$

這叫做**分比定理**(Dividendo).

(6)　把分比例去除合比例,就得

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$$

這個方法名叫做**合分比定理**(Componendo and dividendo).

(7)　自乘這方程式$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$的兩端,就得

$$\frac{a^2}{b^2}=\frac{c^2}{d^2},\quad \frac{a^3}{b^3}=\frac{c^3}{d^3},\quad \frac{a^4}{b^4}=\frac{c^4}{d^4},\cdots\cdots\frac{a^n}{b^n}=\frac{c^n}{d^n}.$$

比例各項的冪數若是同樣的增加,他的結果還是一個比例.

〔推論一〕　若這兩數的積等於那兩數的積,那麼這兩數可做比例的外項,那兩數可做比例的內項.

〔證〕　若$ad=bc$,把bd除他的兩端,就得

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},\text{或 } a:b=c:d.$$

〔推論二〕 若$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$於是$\frac{a+b}{a}=\frac{c+d}{c}$;並且$\frac{a-b}{a}=\frac{c-d}{c}$.

〔證〕 先用已知比例倒轉,再照上面(4)和(5)的方法進行.

〔推論三〕 若在一個比例裏面,兩前率相等,兩後率也相等,調轉來說也是對的.

〔推論四〕 兩數的比例中項,就是這兩數積的平方根.

(8) 在一串的等比裏面,兩個或兩個以上的前率的和,對於他的相當後率的和的比,和隨便那個前率對於相當後率的比都相等.

設 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$,

求證 $\frac{a+c+e}{b+d+f}=\frac{a}{b}$.

〔證〕 令 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=r$.

於是　$a=br, c=dr, e=fr.$　　　　為什麼?

加起來，$a+c+e=br+dr+fr=r(b+d+f).$

$\therefore$　　$\dfrac{a+c+e}{b+d+f}=r.$　　　　為什麼?

但　　$r+\dfrac{a}{b}.$

$\therefore$　　$\dfrac{a+c+e}{b+d+f}=\dfrac{a}{b}.$　　　　為什麼?

目解題

1. 若　$x:4=7:8,$　求 $x.$
2. 若　$3:x=2:3,$　求 $x.$
3. 若　$4:5=x:10,$　求 $x.$

理解題

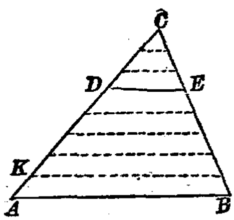
1. 從　$a:b=c:d, m:n=r:s,$ 證明 $am:bn=cr:ds.$
2. 若　$a:b=c:d,$ 證明　$ma-b:mc-d=a:c.$
3. 若　$a:b=c:d,$ 證明　$c+d:a+b=d:b.$
4. 求17,19和187的比例第四項.
5. 求6和54的比例中項.
6. 求27和189的比例第三項.
7. 求以下各比例的未知項:

$x:4::27:126$; $78:x::13:3$; $99:117::x:39$;

$171:27::57:x$.

§197. 比例線份. 兩線份的比,恰等於另外兩線份的比,這樣的四線份叫做成比例.

§198. 定理一. 若一線平行於三角形的一邊,並割其他兩邊,那麼那兩邊被割成的四線份成比例.



已知$\triangle ABC$裏面,$DE \parallel AB$.

求證　$\frac{CD}{DA}=\frac{CE}{EB}$

〔證〕 (1)假定AK是CD同DA的公約單位,並且假定CD含AK的m倍,DA含AK的n倍.

$$\frac{CD}{DA}=\frac{m}{n}\cdots\cdots\cdots\cdots(A)$$

過CD同DA上的分點,引諸線,平行於AB,

同CE,EB相交．這些線便分CB爲$m+n$等分：$CE\ m$等分；$EB\ n$等分．　§121

所以　$\frac{CE}{EB}=\frac{m}{n}$ ……………………………… (B)

從(A)和(B)　$\frac{CD}{DA}=\frac{CE}{EB}$．　爲什麼？

§199. 對應線份(Corresponding Segments). 若一線割開三角形的兩邊，那成功的線份，在幾方面都算是相當的，叫做對應線份．

例如上面定理的圖裏面：

(1)　CD,DA同CE,EB相當．

(2)　CA,DA同CB,EB相當．

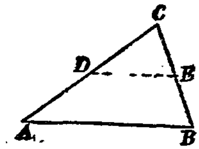
(3)　CD,CE同DA,EB相當．

(4)　CA,CD同CB,CE相當．

(5)　CA,CB同CD,CE相當．

(6)　CA,CB同DA,EB相當．

§200. 定理二． 若一線平行於三角形的一邊，並割其他的二邊，那麼隨便那兩對對應線份都成比例．



設$\triangle ABC$內,DE同AB平行.

求證　(1) $\frac{CD}{DA}=\frac{CE}{EB}$,　(2) $\frac{CA}{DA}=\frac{CB}{EB}$,

(3) $\frac{CD}{CE}=\frac{DA}{EB}$,　(4) $\frac{CA}{CD}=\frac{CB}{CE}$,

(5) $\frac{CA}{CB}=\frac{DA}{EB}$,　(6) $\frac{CA}{CB}=\frac{CD}{CE}$.

〔證〕 (1) $CD:DA::CE:EB$.　§198

(2) 從(1)得

$\frac{CD+DA}{DA}=\frac{CE+EB}{EB}$ 或 $\frac{CA}{DA}=\frac{CB}{EB}$

§196,(4)

(3) 從(1)得 $\frac{CD}{CE}=\frac{DA}{EB}$, §196,(3)

(4) 從(1)得 $\frac{CD+DA}{CD}=\frac{CE+EB}{CE}$

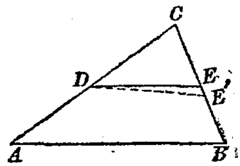
或 $\frac{CA}{CD}=\frac{CB}{CE}$. §193(推論二)

(5)　從(2)得　$\frac{CA}{CB}=\frac{DA}{EB}$,　為什麼?

(6)　從(4),　$\frac{CA}{CB}=\frac{CD}{CE}$.　怎見得?

〔推論〕 若一線割三角形的兩邊,所成的兩對對應線份成比例,那麼隨便別兩對對應線份也成比例.

§201. **定理三.** 設一線分一個三角形的兩邊成比例,這線必同第三邊平行.



設DE線遇$\triangle ABC$的AC於D,BC於E,並且

$$\frac{CD}{DA}=\frac{CE}{EB}.$$

求證　$DE \parallel AB$.

〔證〕 作　$DE' \parallel AB$.

我們祇要證明E'同E相合.

現在　$\frac{CA}{DA}=\frac{CB}{EB}$　§196,(4)

$$\left(設\frac{a}{b}=\frac{c}{d},那麼\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}\right)$$

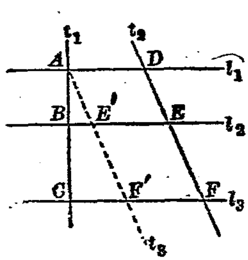
又　　$\dfrac{CA}{DA}=\dfrac{CE}{E'B}.$　　§198

∴　　$\dfrac{CB}{EB}=\dfrac{CB}{E'B}.$　　爲什麼?

∴　　$EB=E'B.$

就是　　E'同E相合.

§202. **定理四.** 過三條或三條以上的平行線,畫任意兩條截線,這線必被截做成比例的線份.



設平行線l_1,l_2,l_3被截線t_1同t_2所割.

求證　　$\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{DE}{EF}.$

〔證〕 過A作截線$t_3 \parallel t_2$,

於是　$AE'=DE, E'F'=EF.$　為什麼?

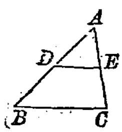
但　$\frac{AB}{BC}=\frac{AE}{E'F'}.$　§198

(若一線平行於三角形的一邊並割其他兩邊,那麼那兩邊被割成的四線份成比例.)

$\therefore \quad \frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}.$

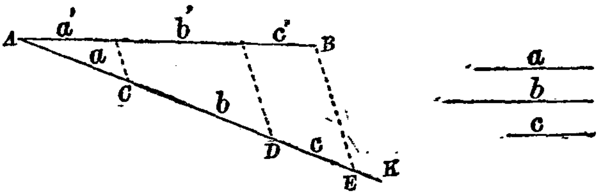
理解題

若在$\triangle ABC$內,$DE \parallel BC$,由下表裏面的已知數算出空格內線份之長.



AD	DB	AE	EC	AB	AC
20	24	15			
4	56		42		
	102	12	408		
25		18	342		

§203. **作圖題一.** 分一已知線份做幾部分,令對於所給諸線份成比例.



設AB是已知線份,並給諸線份如a,b,c.

求分AB做幾部分,對於a,b,c都成比例.

〔作法〕 過A引任一直線AK. 在AK上取線份$AC=a, CD=b, DE=c$. 畫EB. 並過D同C作線平行於EB,這樣分線份AB做a',b',c'幾部分.

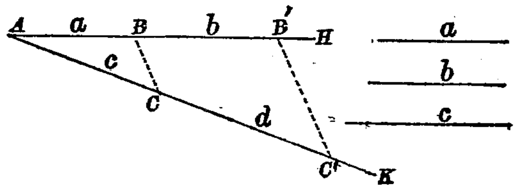
於是 $\frac{a'}{b'}=\frac{a}{b}$; $\frac{b'}{c'}=\frac{b}{c}$ $\therefore$ $\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}$.

什麼緣故?

§204. 作圖題二. 分已知線份做n等分.

〔作法〕 這作法只要$a=b=c$,就可直接應用上節的法子.

§205. 作圖題三. 求作已知三線份的比例第四項.



給三線份a, b, c.

求作線份d要令$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

〔作法〕　在AH線上取線份AB同BB'和a同b相等.

過A引直線AK, 並在這線上取線份$AC=c$.

畫BC並過B'引$B'C' \parallel BC$.

那麼CC'就是所求的線份.

〔證〕　$\because BC \parallel B'C'$

$\therefore \qquad \frac{AB}{BB'}=\frac{AC}{CC'},$ 　　　　怎見得?

即 $\qquad \frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$

§206.　**作圖題四.**　求作已知二線份的比例第三項.

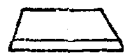
〔作法〕 這作法只要$b=c$,就可以直接應用上節的法子去求他.

目解題

1. 若$a=6$, $b=10$, $c=18$, 求 a,b 同 c 的比例第四項的長.

2. 若$a=6$, $b=10$, 求a同b的比例第三項的長.

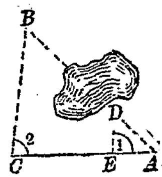
3. 一線與梯形的底平行,求證他分這梯形的不平行邊成比例.



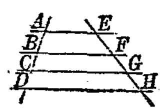
理解題

1. 從A到B中間被某物遮蔽,不能接近.求測AB的距離.

〔提示〕 選一個適當的兩點與A同B可以連通,過AC線上與A旁近的E點,作$ED \parallel CB$,並遇AB於D. 這樣就可以量出AE,EC同AD來. 從§198,DB和AB當然也可算得出來了,

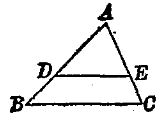


2. 在圖裏面,諸水平線互相平行. 若$AB=8$吋,$BC=7$吋,$CD=6\frac{1}{2}$吋,並$EF=10$吋,求FG同GH的長.



3. 在三角形 ABC 裏面,從 AB 邊上任一點 D,作 $DE \parallel AC, DF \parallel BC$;證明 $AF:FC=CE:EB$.

4. 若如右圖 $DE \parallel BC$,試用下表裏面已知線份,算出沒有填入的諸線份來.

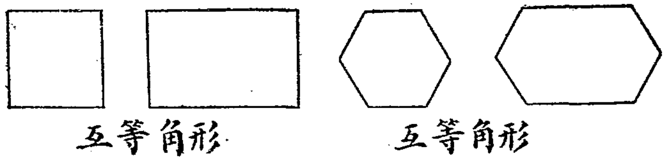


AD	AB	DB	AE	AC	EC
8	12		6		
6	9				7
10		8		18	
240			200	300	
120				100	50
	40	15		30	
	90		40	70	
	800			366	300
		30	20		50

實驗題

§207. 互等角多角形. 兩多角形裏面,這一形的各角,對應的等於那一形的各角,就

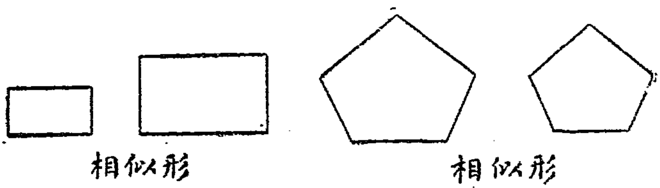
叫做**互等角**(Mutually Equiangular).



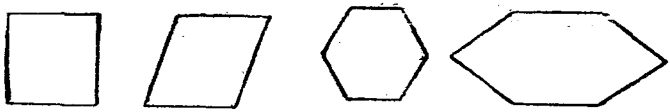
§208. **多角形對應部分.** 互等角形的等角叫做**對應角**(Corresponding Angles).

所夾相當角的邊就叫做**對應邊**(Corresponding Sides).

§209. **相似多角形**(Similar Polygons). 兩多角形若是(1)互等角,(2)對應邊都成比例,這兩多角形叫做相似形.



兩多角形有時具(1)的性質,而沒有(2)的性質(看§204的圖). 有時或單有(2)的性質,沒有(1)的性質(如下圖).

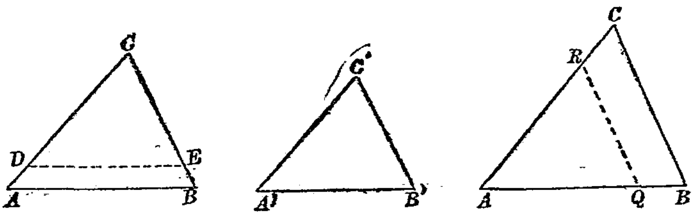


邊成比例　　　　邊成比例

所以證明兩多角形相似,必須指出兼具(1)同(2)的性質.

§210. **相似比**(Ratio of Similitude). 相似形兩個對應邊的比,叫做相似比.

§211. **定理五.** 若兩三角形是互等角形,這兩三角形就相似.



所給$\triangle s$ ABC 同 $A'B'C'$ 裏面,$\angle A=\angle A'$, $\angle B=\angle B'$, $\angle C=\angle C'$.

求證　$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$.

〔證〕 把$\triangle A'B'C'$疊在$\triangle ABC$上,$\angle C'$疊到與他相等的$\angle C$上,$C'B'$沿着CB,$C'A'$沿着

CA放下,於是$A'B'$就落於DE的位置.

$$\triangle CDE \equiv \triangle C'A'B' \qquad \text{(何故)?}$$

$$\therefore \quad \angle CDE = \angle A' = \angle A.$$

$$\therefore \quad DE \parallel AB.$$

$$\therefore \quad \frac{CD}{CA} = \frac{CE}{CB} \qquad \text{為什麼?}$$

$$\therefore \quad \frac{C'A'}{CA} = \frac{C'B'}{CB} \qquad \text{怎見得?}$$

同法把$\angle A'$疊到$\angle A$上,證明

$$\frac{C'A'}{CA} = \frac{A'B'}{AB}$$

$$\therefore \quad \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC} \qquad \text{怎見得?}$$

$$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'.$$

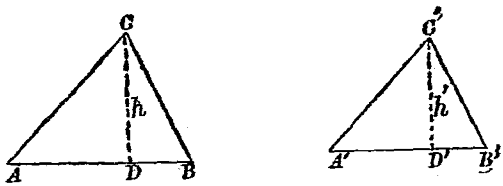
〔推論一〕 這三角形的兩角等於他三角形的兩角,兩形便相似.

〔推論二〕 若兩直角三角形有一銳角相等,兩形便相似.

〔推論三〕 若兩三角形各與第三個三角形相似,那麼他們彼此相似.

〔推論四〕 若一線割三角形的兩邊,並且同第三邊平行,那所成的三角形,便與原三角形相似.

§212. **定理六.** 兩相似三角形裏面,對應的高同隨便對應邊必成比例.



設$\triangle ABC$同$A'B'C'$相似,h同h'是對應的高.

求證　$\frac{h}{h'}=\frac{AC}{A'C'}$.

〔證〕 因$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$, $\angle A=\angle A'$.

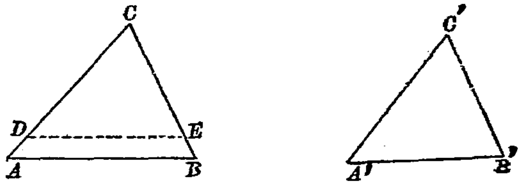
§209

$\therefore$　$\triangle ADC \backsim \triangle A'D'C'$.　§208(推論二)

$\therefore$　$\frac{h}{h'}=\frac{AC}{A'C'}$.　為什麼?

§213. **定理七.** 設一個三角形的兩邊

同別個三角形的兩邊成比例,這兩邊的夾角相等,那麼這兩三角形相似.



設在$\triangle$s ABC和$A'B'C'$裏,$\angle C=\angle C'$,並且

$$\frac{C'A'}{CA}=\frac{C'B'}{CB}.$$

求證　$\triangle$s ABC和$A'B'C'$相似.

〔證〕　把$\triangle A'B'C'$放在$\triangle ABC$上面,使$\angle C'$落在和他相等的$\angle C$上,並使$C'B'$沿CB落下,$C'A'$沿CA落下.　於是$A'B'$就落在DE的位置.

於是　$$\frac{CD}{CA}=\frac{CE}{CB},$$　為什麼?

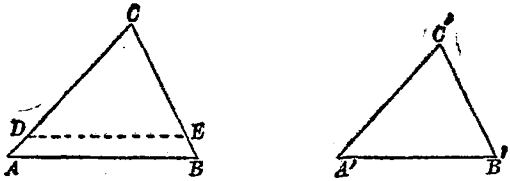
$$\therefore\quad DE \parallel AB.$$

$\therefore$　$\triangle DEC$和$\triangle ABC$相似.

§211(推論四)

$\therefore$　$\triangle A'B'C'$和$\triangle ABC$相似.

§214. 定理八. 設兩三角形的對應邊成比例,那麼這兩三角形相似.



已知$\triangle$s ABC和$A'B'C'$內,$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}$,

求證$\triangle$s ABC和$A'B'C'$相似.

〔證〕 在AC和BC上取$CD=A'C'$和$CE=C'B'$,並作DE.

於是 $\frac{AC}{DC}=\frac{BC}{EC}$. $\left(\because 已知\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}\right)$

$\therefore$ $\triangle DEC$和$\triangle ABC$相似.

$$\therefore \quad \frac{AC}{AB}=\frac{DC}{DE}.$$

但$DC=A'C'$ $\therefore$ $\frac{CA}{AB}=\frac{C'A'}{DE}$.……………(1)

已給 $\frac{AC}{A'C'}=\frac{AB}{A'B'}$.

便知 $\frac{CA}{AB}=\frac{C'A'}{A'B'}$.……………(2)

從(1)同(2) $\frac{C'A'}{DE}=\frac{C'A'}{A'B'}$. 爲什麽?

$\therefore$ $DE=A'B'$.

$\therefore$ $\triangle DEC\equiv\triangle A'B'C'$.

($\because$ $CD=C'A'$, $CE=C'B'$ 同 $DE=A'B'$.)

$\therefore$ $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.

($\because$ $\triangle A'B'C'\equiv\triangle DEC$, 且 $\triangle DEC$ 同 $\triangle ABC$ 相似.)

目解題

1. 說出相似形的定義來.

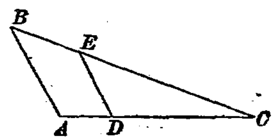
2. 互等角多角形必相似麽? 三角形呢?

3. 多角形的對應邊成比例,那形就相似麽? 若是三角形便怎樣?

4. 相等三角形都相似麽? 什麽緣故?

理解題

1. 試用相似三角形,證明聯結三角形兩邊中點的線份,必等於第三邊的一半.



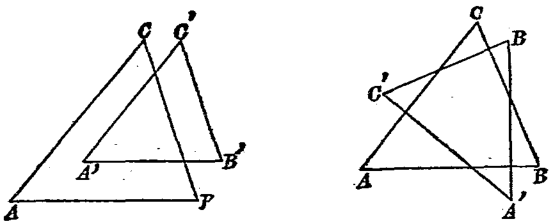
2. 如圖 $DE\parallel AB$,且 $\frac{CD}{DA}=\frac{5}{2}$. 若 $DE=4$ 時,求 AB.

3. 如上圖,若 $AC=14$ 吋, $CD=10$ 吋, $BE=6$ 吋, $CE=15$ 吋, DE 與 AB 平行嗎? 什麽緣故?

4. 在兩個相似三角形裏面,對應角的平分線的比等於兩三角形的相似比.

5. 兩個相似三角形裏面,對應邊上諸中線的比等於兩三角形的相似比.

§215. 定理九. 若兩三角形的各對應邊彼此平行或垂直,那麼兩三角形就相似.



(1)已知 $\triangle$s ABC 和 $A'B'C'$ 裏面, $AB \parallel A'B'$; $AC \parallel A'C'$ 同 $BC \parallel B'C'$.

求證　$\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 相似.

〔證〕　$\angle A$ 和 $\angle A'$ 相等或互爲補角, $\angle$s B 同 B', C 同 C', 也是這樣.　§114

倘 $\angle A$, $\angle A'$ 同 $\angle B$, $\angle B'$ 兩對角都互爲補

角,餘下一對角相等.

那麼$\angle A+\angle A'+\angle B+\angle B'=4\angle R$.

為什麼?

但這是不可能的,因$\triangle$s ABC同$A'B'C'$的內角的總和祇有$4\angle R$.

$\therefore$　最少要有兩對角相等.

$\therefore$　$\triangle ABC$同$\triangle A'B'C'$相似.

§211(推論一)

(這三角形的兩角,等於他三角形的兩角,兩形就相似.)

(2)已知$\triangle$s ABC同$A'B'C'$裏面,$AB\perp A'B'$, $BC\perp B'C'$, $CA\perp C'A'$.

求證　$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$相似.

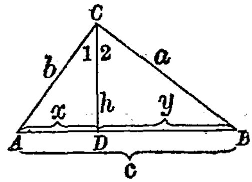
〔證〕　把§115去代§114,照上面(1)的證法去求就得了.

§216.　定理十.　在直角三角形裏面,畫他的高到斜邊上面,那麼.

(1)這高就是斜邊被高所分的線份的比

例中項;

(2)這三角形的每邊就是整斜邊同鄰近線份的比例中項.



所給直角三角形ABC的高是h,邊是a,b,c,斜邊被高所分的線份是x,y.

求證　(1)　$\frac{x}{h}=\frac{h}{y}$ (2) $\frac{x}{b}=\frac{b}{c}$ 同 $\frac{y}{a}=\frac{a}{c}$.

〔證〕　(1)　$\triangle ADC \backsim \triangle ABC$,並且$\triangle BDC \backsim \triangle ABC$.　§211(推論二)

$\therefore$　$\triangle ADC$同$\triangle BDC$相似.

§211(推論三)

$\therefore$　$x:h::h:y$.

(2)　因$\triangle ABC$同$\triangle ADC$相似.

$\therefore$　$x:b::b:c$.　什麼緣故?

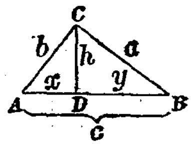
又因$\triangle ABC$同$\triangle BDC$相似.

$\therefore \quad y:a::a:c.$　　　怎見得!

〔推論一〕 在直角三角形的斜邊上畫他的高,那麼

(1)高的度數的平方等於斜邊上線份度數的相乘積.

(2)隨便一邊度數的平方等於全斜邊和他的鄰近線份度數的相乘積.



從 $\frac{x}{h}=\frac{h}{y}$,就得 $h^2=xy$;又從 $\frac{x}{b}=\frac{b}{c}$,就得 $b^2=cx$.同樣從 $\frac{y}{a}=\frac{a}{c}$,就得 $a^2=cy$.

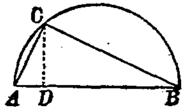
〔推論二〕 直角三角形裏面,在斜邊上畫高,那麼兩邊度數平方的比,等於斜邊被分成的兩線份度數的比.

$\because \quad a^2=cy$,同 $c^2=cx$, $\quad \therefore \quad \frac{a^2}{b^2}=\frac{y}{x}$.

〔推論三〕 若從圓周上一點畫對於直徑的一垂線,那麼

(1)垂線就是直徑被垂線所分兩線份的比例中項.

(2)每弦都是直徑同他的鄰近線份的比例中項.



〔提示〕 因$\angle ACB$內接於半圓,所以是直角.

目解題

1. 若上面推論一的圖裏面,$x=8$同$y=18$,找h.

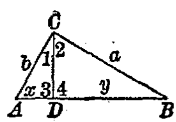
〔提示〕 $h^2=xy=8\times18=144$.

2. 若同圖裏,$a=3$同$b=4$,找x對於y的比.

3. 又同圖裏$c=5, b=3$,找x. 若$c=5, a=4$,再找y.

4. 又同圖裏,$c=10, y=8$,找a.

5. 上面推論三的圖裏面,若$AD=4, CD=6$,求DB.



6. 在右圖裏,$\triangle ABC$的$\angle C$是直角,$CD\perp AB$. 指出三對相似三角形來.

7. 在上圖裏$\triangle ACD$同ACB裏,那幾對角相等? 那幾對邊是對應邊?

8. 指出$\triangle ACD$同CDB裏的等角同對應邊.

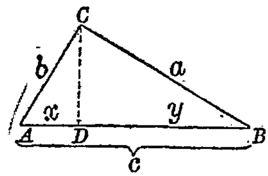
9. 有兩三角形ABC同$A'B'C'$, $\angle A=\angle A'$, $AB=12$,

$AC=14$, $A'B'=16$, $A'C'=18\frac{2}{3}$. 這兩三角形相似麼? 倘若相似,爲什麼相似?

10. 兩個等腰三角形的頂角若相等,證明這兩個三角形相似.

11. 有兩三角形 ABC 同 $A'B'C'$, $AB=10$, $BC=14$, $CA=16$, $A'B'=15$, $B'C'=21$, $C'A'=24$. 這兩三角形相似麼? 申明理由.

§217. 定理十一. 直角三角形斜邊長數的平方等於其他兩邊長數的平方的和.



設直角三角形 ABC, 三邊是 a,b,c.

求證　　$a^2+b^2=c^2$.

〔證〕 知道 $a^2=cy$, $b^2=cx$.

§216〔推論一,(2)〕

(在直角三角形的斜邊上,畫他的高,那麼隨便一邊的平方….)

把他們相加,

$$a^2+b^2=cx+cy=c(x+y)=c\cdot c=c^2.$$

就是　$$a^2+b^2=c^2.$$

附註——這個定理是畢達哥拉所發明,通常叫做**畢氏定理**(Pythagorean Theorem).

〔推論一〕 直角三角形一邊長數的平方,等於斜邊長數的平方減去另一邊長數的平方.

目解題

1. 若一個直角三角形的兩邊,一是 3 吋,一是 4 吋,試求他的斜邊.

2. 一直角三角形的邊各為 4 吋同 5 吋,試求斜邊的平方. 又用平方根號表斜邊的長.

3. 一個直角三角形的邊是 5 吋同 8 吋,又一個直角三角形的邊是 6 吋同 7 吋,那一個的斜邊較長呢?

理解題

1. 在直徑 1 尺的圓裏面,6 寸的弦到圓心的距離是多少寸?

2. 在半徑 1 尺的圓裏面,有條弦到中心的距離

是 6 寸　問這弦有多少長?

3. 一個正方形的邊是 5 求出他的對角線來,若他的邊是 a,他的對角線是什麼?

4. 一個正方形的對角線是 8,他的邊是什麼?若他的對角線是 d,他的邊是什麼?

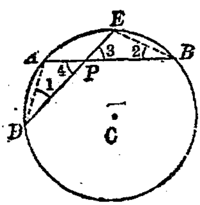
5. 一個直角等腰三角形的斜邊是12吋,試求其餘邊的長.

6. 一個斜方形的兩條對角線各是14寸同10寸,求這斜方形各邊的長.

〔提示〕 先證兩對角線互爲垂線,並且互相平分.

7. 在一個圓裏面,12寸長的弦到圓心的距離是 9 寸,求這圓半徑的長.

§218. 定理十二. 若圓內兩弦相交,一弦所分成二線份底數的相乘積等於他弦所分成二線份底數的相乘積.



設$\odot c$內,AB同DE兩弦相交於P.

求證$PA \times PB = PD \times PE$.

〔證〕 畫弦AD同BE.

在 $\triangle s$ DPA同BPE內.

$\angle 4 = \angle 3$, 又$\angle 1 = \angle 2$. 怎見得?

$\therefore$ $\triangle DPA$同$\triangle DPE$相似.

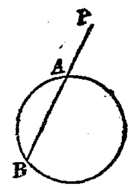
§211(推論一)

$\therefore$ $\frac{PA}{PD} = \frac{PE}{PB}$. 爲什麼?

$\therefore$ $PA \times PB = PD \times PE$. §196(1)

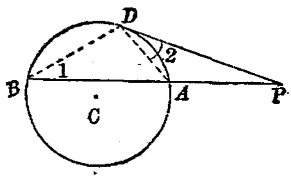
〔推論一〕 若兩弦在圓裏邊相交,他們互分成的線份必成比例. 一弦的線份爲內項,他弦的線份便成外項.

§219. 割線同圓外線份.



若從圓外一點P畫割線遇圓於A,B兩點. A在B同P的中間. 那麼PB叫做**全割線**(Whole Secant). PA就叫**圓外線份**(External Segment).

§220. **定理十三.** 若一圓的割線同切線相遇於一點,那麼這切線尌數的平方等於這全割線同圓外線份尌數的相乘積.



設$\odot C$的割線是BAP,切線是PD.

求證　　$PB \times PA = \overline{PD}^2$.

〔證〕 畫BD同AD.

在$\triangle PAD$同PBD裏面,$\angle P = \angle P$,$\angle 1 = \angle 2$,　§165

$\therefore$ $\triangle PAD$和$\triangle PBD$相似.　　為什麼?

$$\therefore \quad \frac{PB}{PD} = \frac{PD}{PA},$$

$$\therefore \quad PB \times PA = \overline{PD}^2. \qquad \text{怎見得?}$$

〔推論一〕 若從圓外一點畫兩割線,一全割線和他的圓外線份尌數的相乘積,必等

於他全割線和他的圓外線份度數的相乘積.

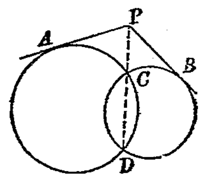
〔推論二〕 若從一個定圓外的一定點P，隨便畫一割線PAB，那麼$PA \times PB$的值，終歸不變.

目解題

1. 一弦長12吋，離圓心8吋，求直徑.

2. 一弦AB長6吋，延長從B到P，令PB為18吋，試求從P所畫到這圓的切線的長.

理解題



1. 從兩交圓的公共弦的延長線上的一點，所畫兩圓的切線的長必相等.

2. 兩交圓的公共弦(延長)必平分他們的公切線.

3. 若三個圓裏面，每一圓割開其他的二圓，那麼所有公共的三弦必相遇於一點.

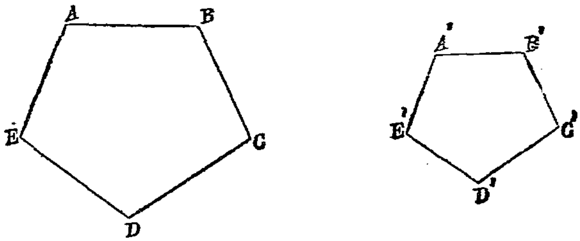
4. 一個圓的圓心離P為8吋，他的半徑長4吋，從P隨便畫割線PAB. 試求$PA \times PB$的值.

5. 一個圓的圓心離P點為10吋，他的半徑是6

吋．求從P點所畫切線的長．

6．一切線從P到圓周爲7吋,又一割線PAB, PA長4吋．求PB.

§221．定理十四． 兩相似多角形周界的比,等於任便兩相當邊的比．



設$ABCDE$同$A'B'C'D'E'$是相似多角形,他的周界各爲P同P'.

求證　$\frac{P}{P'}=\frac{AB}{A'B'}$.

〔證〕由相似多角形的定義．　§206

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DE}{D'E'}=\frac{EA}{E'A'}$$

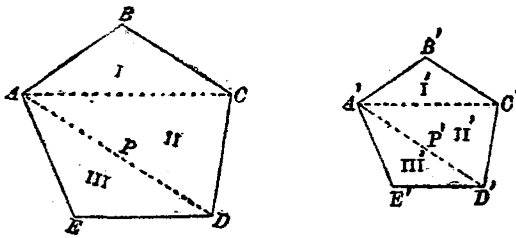
$$\therefore\quad \frac{AB+BC+CD+DE+EA}{A'B'+B'C'+C'D'+D'E'+E'A'}=\frac{AB}{A'B'}$$

§196(8)

(一個等比裏面,前率的和,對於他的相當後率的和的比,和隨便那個前率對於相當後率的比都相等.)

這便是　$\frac{P}{P'}=\frac{AB}{A'B'}$.

§222. **定理十五.** 設兩多角形可分做同數的三角形,彼此相似,並且在相似的位置,那麼這兩多角形相似.



設多角形P可分做$\triangle$s I, II, III; 多角形P'可分做$\triangle$s I', II', III'; 並且$\triangle$I$\backsim\triangle$I'; $\triangle$II$\backsim\triangle$II', $\triangle$III$\backsim\triangle$III'.

求證　$P\backsim P'$.

〔證〕　$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CA}{C'A'}$.　($\triangle$I$\backsim\triangle$I')

$$\frac{CA}{C'A'}=\frac{CD}{C'D'}. \qquad (\triangle\text{II}\backsim\triangle\text{II}')$$

$$\therefore\quad \frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}. \qquad \S 82(6)$$

繼續這樣做下去,我們可以證明

$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DE}{D'E'}=\frac{EA}{E'A'}.\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

又　$\angle BCA=\angle B'C'A'$, $\angle ACD=\angle A'C'D'$.

為什麼?

$\therefore$　$\angle BCA+\angle ACD=\angle B'C'A'+\angle A'C'D'$.　　為什麼?

就是　　$\angle C=\angle C'$.

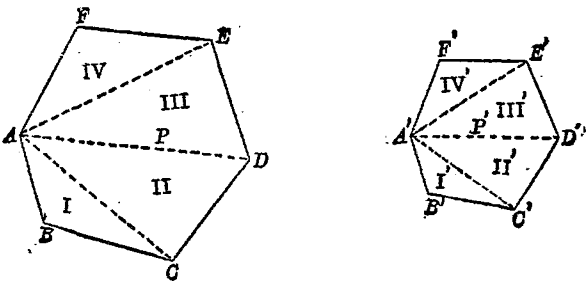
繼續這樣做下去,我們又可證明

$\angle A=\angle A'$, $\angle B=\angle B'$, $\angle C=\angle C'$, $\angle D=\angle D'$, $\angle E=\angle E'$. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$

從(1)和(2),

$$ABCDE\backsim A'B'C'D'E'. \qquad \S 209$$

§223.　定理十六. 兩個相似多角形可分做同數的三角形,彼此相似,並且在相似位置.



設在相似多角形P同P'裏,從A同A'畫所有對角線.

求證 $\triangle\mathrm{I}\backsim\triangle\mathrm{I}'$, $\triangle\mathrm{II}\backsim\triangle\mathrm{II}'$, $\triangle\mathrm{III}\backsim\triangle\mathrm{III}'$, $\triangle\mathrm{IV}\backsim\triangle\mathrm{IV}'$.

〔證〕　$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}$, 而 $\angle B=\angle B'$ $(P\backsim P')$.

$\therefore$　$\triangle\mathrm{I}$是相似於$\triangle\mathrm{I}'$.　§213

於是　$\frac{BC}{B'C'}=\frac{CA}{C'A'}$.　$(\triangle\mathrm{I}\backsim\triangle\mathrm{I}')$

而　$\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}$.　$(P\backsim P')$

$\therefore$　$\frac{CA}{C'A'}=\frac{CD}{C'D'}$.　爲什麼?

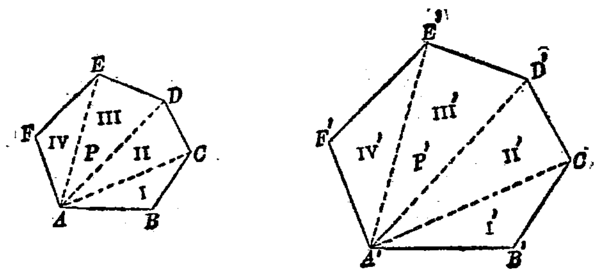
又$\angle BCD=\angle B'C'D'$,而$\angle BCA=\angle B'C'A'$.　爲什麼?

$\therefore \quad \angle ACD = \angle A'C'D'$. §82(2)

$\therefore \quad \triangle$II是相似於$\triangle$II$'$. 爲什麼?

同樣可證明$\triangle$III$\backsim\triangle$III$'$,$\triangle$IV$\backsim\triangle$IV$'$.

§224. **作圖題五.** 用一條所給的線份做邊,作一個多角形相似於一個所給的多角形.



設P是所給的多角形,$A'B'$是所給線份.

求作多角形$P'\backsim P$,把$A'B'$當作AB的對應邊.

〔作法〕 在多角形P裏從A點畫所有對角線.

在A'作$\angle C'A'B' = \angle CAB$.

在B'作 $\angle B' = \angle B$,

於是　$\triangle \mathrm{I}' \backsim \triangle \mathrm{I}$.　為什麼?

在 A' 作 $\angle D'A'C' = \angle DAC$,

在 C' 作 $\angle D'C'A' = \angle DCA$,

於是　$\triangle \mathrm{II}' \backsim \triangle \mathrm{II}$.　為什麼?

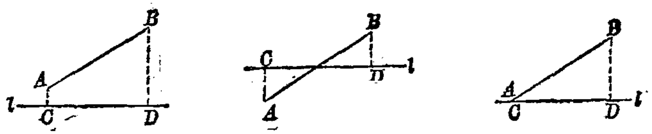
繼續這樣我們可作

$$\triangle \mathrm{III}' \backsim \triangle \mathrm{III},\ \triangle \mathrm{IV}' \backsim \triangle \mathrm{IV}.$$

$\therefore\quad ABCDEF \backsim A'B'C'D'E'F'$　§222

§225. 一線份在別一線上的正射影.

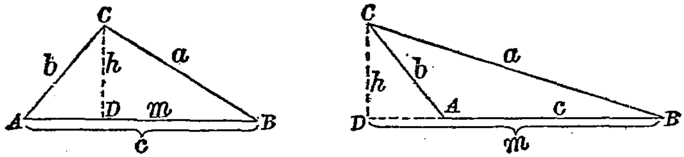
從一線份 AB 的兩端點到別一線 l 作兩垂線,交 l 於 C,D, 我們就叫 CD 是 AB 在 l 上的**正射影**(Projection).



若 AB 的一端點,譬如 A, 是在 l 上,那麼 A 點同 C 點相合.

§226. 定理十七. 三角形裏對銳角的一邊邊數的平方,等於餘兩邊邊數的平方和,

減他們裏面的一邊同他邊在這邊上正射影餒數的相乘積的二倍.



證法述略: 在$\triangle ABC$內令$\angle B$爲已知銳角,BC,AC,AB的餒數爲a,b,c,BD爲在AB上BC的正射影. 他的餒數爲m.

我們要證明　$b^2=a^2+c^2-2cm.$

在左邊的圖內$\angle A<\angle R$時

$$b^2=h^2+(c-m)^2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

在右邊的圖內$\angle A>\angle R$時

$$b^2=h^2+(m-c)^2\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

每圖內　$h^2=a^2-m^2.$

代到(1)裏面　$b^2=a^2-m^2+c-2cm+m^2$

$$=a^2+c^2-2cm.$$

代入(2), $b^2=a^2-m^2+m^2-2cm+c^2$

$$=a^2+c^2-2cm.$$

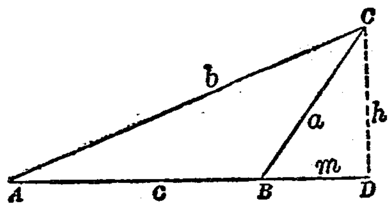
目解題

1. 若線份 AB 垂直於一直線 l，那麼 AB 在 l 上正射影的長是什麼？若 $AB \parallel l$ 又怎樣？

2. 若上節 $\angle B$ 是直角，那方程式 $b^2=a^2+c^2=2cm$ 該變到怎麼樣？

3. 若上面右圖內，$a=10, c=8, m=9$，求 b.

§227. 定理十八. 三角形裏對鈍角的一邊靫數的平方，等於餘兩邊靫數的平方和，加他們裏面的一邊同他邊在這邊上正射影靫數的相乘積的二倍.



證法述略：設 B 是已知鈍角，BD 是在 AB 上 BC 的正射影，各線份的靫數如圖中所表示.

我們要證明　$b^2=a^2+c^2+2cm$.

在圖內　$b^2=h^2+(c+m)^2, h^2=a^2-m^2$.

$$\therefore \quad b^2 = a^2 - m^2 + c^2 + 2cm + m^2.$$
$$= a^2 + c^2 + 2cm.$$

理 解 題

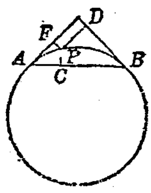
1. 在 § 224 的圖裏面,已知 a, b, c, 求 m 的長. 若 $AC=15$, $AB=8$, $BC=9$, 找出 m 來.

2. 聯結三角形兩邊的中點的線份,必與第三邊平行.

應用本編的定理去證他.

3. 平分梯形兩底的線份,必平分界於他兩邊面且平行於底邊的隨便什麼線份.

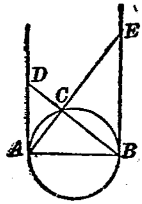
4. 在 AB 弦的兩端畫切線,從 $\overset{\frown}{AB}$ 上一點,畫對於切線同弦的垂線,如 PD, PF 同 PC. 求證 PC 爲 PD, PF 的比例中項.



〔提示〕 畫 AP, BP 兩弦, 並證 $\triangle APF \backsim \triangle BCP$ 同 $\triangle APC \backsim \triangle BPD$.

5. 下圖裏面, AD, BE 切於直徑的兩端,若 BD,

AE 與圓相遇於 C, 證明 AB 是 AD, BE 的比例中項.



6. 聯結三角形各邊中點所成的內接三角形必與原三角形相似.

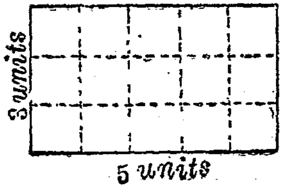
7. 梯形兩底的平分線,必經過他的兩對角線的交點.

第七編　多角形的面積

§228. **平面形的大小. 面積.** 線份的大小叫長,平面形的大小叫面積. 面積的量法,沒有線份那樣簡單. 因爲平面形有種種不同的形象,所以量法也複雜了. 我們先討量多角形的面積.

§229. **面積的度數.** 要量多角形的面積,須選一個固定的面積做單位. 我們把長的單位做邊所成的正方形做面積的單位. 例如長的單位是公分,那面積的單位就是平方公分. 一個多角形含有這單位正方形的倍數,叫做此多角形的度數.

例如一個長方形的底是五個單位,高是三個單位,這長方形就含有十五個平方單位.



換句話說,這長方形底的度數是5,高的度數是3,他的面積的度數是15,爲便利起見,以後面積的度數簡稱曰面積,線份的度數簡稱曰線份.

§230. **定理一.** 長方形的面積,等於他的底和高相乘的積.

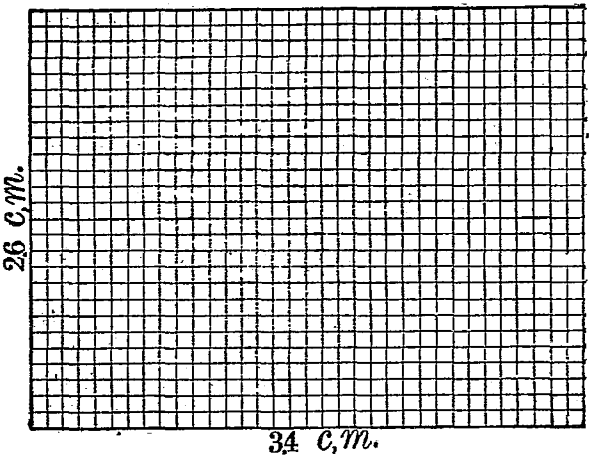
第一類. 若所給長方形的各邊都是單位平方邊的整倍量.

假如底有m個單位,高有n個單位. 那麼這形必可分做m行的單位平方,每行含n個平方. 他的面積便是$m \times n$個單位平方,即是

$$面積 = 底 \times 高.$$

第二類. 若長方形的邊不是所選單位平方邊的整倍量,但是這單位平方的邊可以分做幾個相等部分,能使長方形的邊是這些部分中一部分的整倍量. 那麼這長方形的面積,仍可用較小的單位平方的整數同原單位的分數去表他.

例如下圖的底是3.4公分,高是2.6公分,那麼這長方形用平方公分做單位便不能量盡,



但用平方公釐去量他,就能恰盡. 每行含34平方公釐,共有26行. 所以他的面積就是$34\times26=884$個小平方或作8.84平方公分.

但$3.4\times2.6=8.84$. 所以他的面積$=$底$\times$高.

第三類. 若長方形的底同高,沒有公約量,那麼就不能用平方單位去恰切表示他的面積. 但是選擇很小的單位,仍舊可以用來

決定長方形的面積,和所給原長方形的面積,相差得很少.

這樣所得的面積,叫做長方形的**近似面積** (Approximate Area of a Rectangle).

因長方形的長和闊不可通約,那麽或長,或闊,或長闊,都祇能概略的去量他.所得

近似面積＝近似底×近似高.

〔推論〕 兩個等底長方形的面積相比,等於他們的高相比;兩個等高長方形的面積相比,等於他們的底相比.

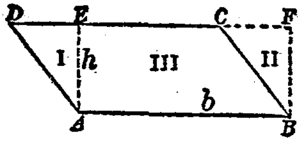
若兩個長方形的底和高各爲b,h同b',h',他的面積是A同A'.

於是 $\frac{A}{A'}=\frac{bh}{b'h'}$.

所以 $\frac{A}{A'}=\frac{h}{h'}$(若$b=b'$),

又 $\frac{A}{A'}=\frac{b}{b'}$(若$h=h'$).

§231. **定理二.** 平行四邊形的面積,等於他的底和高相乘的積.



設▱$ABCD$的底是b,高是$AE=h$.

求證　面積▱$ABCD=bh$.

〔證〕　畫$BF\perp DC$（在延長線上),就得▱$ABFE$,他的底是AB,高是AE.

在兩個直角三角形I和II裏面,$AD=BC$,

$\angle EDA=\angle FCB$,$\angle EAD=\angle FBC$;　　為什麼?

$$\therefore\quad \triangle I\equiv\triangle II.$$　為什麼?

但是▱$ABCD$是$\triangle I$和梯形III所配成,同時▱$ABFE$是$\triangle II$和梯形III所配成.

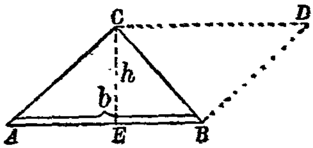
$\therefore$　　▱$ABCD=$▱$ABFE$.

但是　　▱$ABFE=AB\times AE=bh$,　　§ 230

$\therefore$　　▱$ABCD=bh$.

〔推論〕　兩個等底平行四邊形的面積相比等於他的高相比;兩個等高平行四邊形的面積相比,等於他的底相比.

§232. **定理三.** 三角形的面積,等於他的底高相乘積的一半.



令$\triangle ABC$的底$AB=b$,高$CE=h$.

求證　$\triangle ABC=\frac{1}{2}bh$.

〔證〕 作$CD \parallel AB$,和$BD \parallel AC$. 畫成$\square ABDC$,

那麼　$\triangle ABC \equiv BDC$.　§119(1)

(對角線分成▭爲兩個全等$\triangle$s)

$\therefore$　$\triangle ABC=\frac{1}{2}\square ABDC$.

但　$\square ABDC=bh$.　§231

$\therefore$　$\triangle ABC=\frac{1}{2}bh$.

〔推論一〕 兩個等底三角形的面積相比,等於他們的高相比;兩個等高三角形的面積

相比,等於他們的底相比.

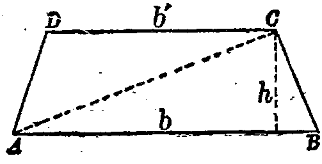
〔推論二〕 直角三角形兩股相乘的積,等於他的斜邊和斜邊上的高相乘的積.

〔推論三〕 若一個平行四邊形和一個三角形有等底等高,那麼三角形的面積等於平行四邊的面積的一半.

〔推論四〕 若兩個三角形的底相同,並且頂點都落在和底平行的直線上,那麼這兩個三角形的面積相等.

〔推論五〕 若a_1, a_2, a_3是一個三角形的三邊,h_1, h_2, h_3是他對應邊上的高,那麼$a_1 \times h_1 = a_2 \times h_2 = a_3 \times h_3$.

§233. **定理四.** 梯形的面積,等於他的高同上底下底的和相乘積的一半.



設所給梯形$ABCD$的上底下底各爲b', b,

高爲h.

求證　　$ABCD=\frac{1}{2}h(b+b')$.

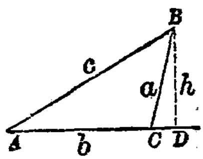
〔證〕 作AC對角線,就得兩個三角形ABC和ACD,並公共高h. 於是

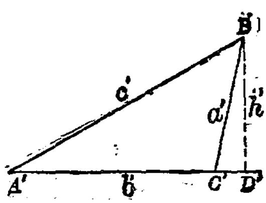
$$\triangle ABC+\triangle ACD=\frac{1}{2}bh+\frac{1}{2}b'h. \qquad \S232$$

$$\therefore \quad \text{面積}ABCD=\frac{1}{2}bh+\frac{1}{2}b'h=\frac{1}{2}h(b+b').$$

〔推論〕 梯形的面積等於他的高同中線相乘的積.

§234. **定理五.** 兩個相似三角形面積的比,等於任兩對應邊平方的比或任兩對應高平方的比.





設相似三角形ABC和$A'B'C'$的高爲h和h'.

求證 $$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\frac{a^2}{a'^2}=\frac{b^2}{b'^2}=\frac{c^2}{c'^2}=\frac{h^2}{h'^2}.$$

〔證〕 $$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\frac{\frac{1}{2}bh}{\frac{1}{2}b'h'}=\frac{b}{b'}\times\frac{h}{h'}.\qquad \S 232$$

但 $$\frac{h}{h'}=\frac{b}{b'}.\qquad \S 212$$

(相似三角形裏面,對應的高同兩對應邊必成比例.)

$\therefore$ $$\frac{b}{b'}\times\frac{h}{h'}=\frac{b^2}{b'^2}=\frac{h^2}{h'^2}.\qquad 爲什麼?$$

$\therefore$ $$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\frac{b^2}{b'^2}=\frac{h^2}{h'^2}.\qquad 爲什麼?$$

但 $$\frac{b}{b'}=\frac{a}{a^2}=\frac{c}{c^2}.\qquad \S 209$$

(相似多角形的對應邊成比例.)

$\therefore$ $$\frac{b^2}{b'^2}=\frac{a'}{a'^2}=\frac{c'^2}{c'^2}.\qquad \S 196(7)$$

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\frac{a^2}{b'^2}=\frac{b^2}{b'^2}=\frac{c^2}{c'^2}=\frac{h^2}{h'^2}.\qquad 爲什麼?$$

習解題

1. 平行四邊形的底爲 8 高是 7;試求他的面積.

2. 平行四邊形的面積是63,底邊是9;試求他的高.

3. 平行四邊形面積是48,高是6;試求他的底.

4. 有一三角形底是10,高是6;試求他的面積.

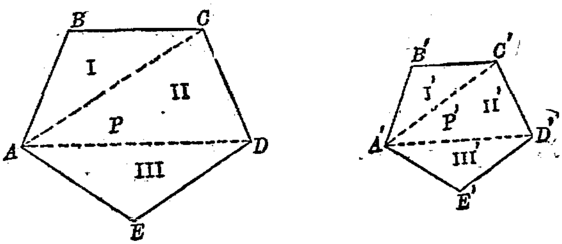
5. 有一梯形兩底是8同6,高是5;試求他的面積.

6. 兩個相似三角形的對應邊是3同5,找出他們面積的比來.

7. 兩個相似三角形的相似比是1:3. 知道小三角形的面積是25,試求大三角形的面積.

8. 兩個相似三角形的面積是25和144. 找出他們的相似比來.

§235. **定理六.** 兩個相似多角形面積的比,等於他們任意兩對應邊平方的比.



設兩相似多角形的面積是P同P'.

求證　$\frac{P}{P'}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}=\frac{\overline{BC}^2}{\overline{B'C'}^2}=\frac{\overline{CD}^2}{\overline{C'D'}^2}=\cdots\cdots.$

〔證〕 從A同A'作諸對角線,那麼$I,I';II,II';III,III'$;都是相似三角形. §223

於是　$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}=\frac{I}{I'}=\frac{\overline{AC}^2}{\overline{A'C'}^2}=\frac{II}{II'}=\frac{\overline{AD}^2}{\overline{A'D'}^2}=\frac{III}{III'}.$

§234

(兩個相似三角形面積的比,等於任兩對應邊平方的比或任兩對應高的平方的比.)

就是　$\frac{I}{I'}=\frac{II}{II'}=\frac{III}{III'}.$

$\therefore$　$\frac{P}{P'}=\frac{I+II+III}{I'+II'+III'}=\frac{I}{I'}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}.$　§196(8)

但　$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\cdots\cdots$　爲什麼?

$\therefore$　$\frac{P}{P'}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}=\frac{\overline{BC}^2}{\overline{B'C'}^2}=\frac{\overline{CD}^2}{\overline{C'D'}^2}=\cdots\cdot$　§196(7)

〔推論〕 兩個相似多角形面積的比,等於他們任意兩對應線份平方的比.

目解題

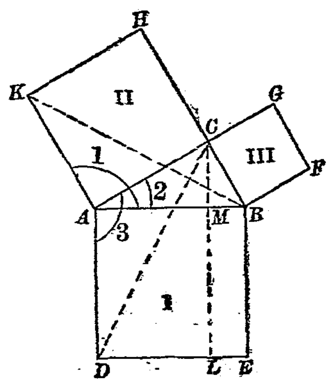
1. 兩個相似多角形面積的比是3:8. 若小多角形一邊的長是3英寸問大形對應一邊的長是多少?

2. 兩個相似多角形的相似比是1:4. 若小形的面積是9,問大形的面積是多少?

3. 兩個相似多角形周界的比是3:11. 若小多角形的面積是74,問大形的面積是多少?

4. 設1,2,3,4,5,6代表一組相似多角形的對應邊. 若第一個多角形的面積是1,問其餘各個多角形的面積是什麼?

§236. 定理七. 直角三角形斜邊上所畫的正方,等於兩股上正方的和.



設I, II, III,為直角三角形ABC斜邊同兩股上所畫的正方.

求證 $\square I=\square II+\square III$.

〔證〕 畫CD, BK,並作$CL\perp DE$.

在$\triangle ABK$和ACD裏面,$\angle 1=\angle 3$.

(因為他們都等於$\angle R+\angle 2$.)

又 $AC=AK$, $AB=AD$. 已知

$\therefore$ $\triangle ABK\cong\triangle ACD$. 為什麼?

現在 $\triangle ACD=\frac{1}{2}\square ADLM$.

§232(推論三)

(因為他們有等底AD和等高DL.)

又$\triangle ABK$和$\square II$有同底AK和等高AC.

(因$\angle ACH=\angle ACB=\angle R$,所以$HCB$是一直線.)

所以 $\triangle ABK=\frac{1}{2}\square II$. 為什麼?

$\therefore$ $\square II=\square ADLM$. 為什麼?

同樣聯結CE和AF我們可以證明

$\square III=\square LEBM$.

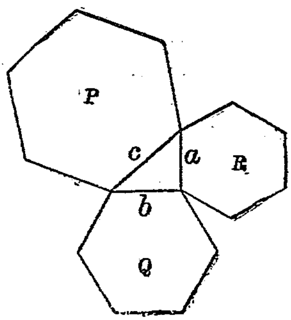
但 $\square ADLM + \square LEBM = \square I.$

$\therefore$ $\square I = \square II + \square III.$

〔推論一〕 直角三角形隨便一股上的正方,等於斜邊上的正方減去其餘一股上的正方.

〔推論二〕 正方形的面積,等於他的對角線上正方的一半.

〔推論三〕 在直角三角形各邊作相似多角形,那麼斜邊上的多角形,等於他兩邊上的多角形的和.



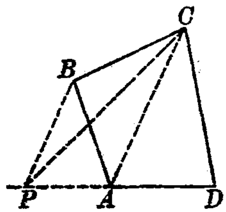
〔提示〕 $\frac{R}{P} = \frac{a^2}{c^2}$ 同 $\frac{Q}{P} = \frac{b^2}{c^2}$. §235

(兩個相似多角形面積的比,等於他們任意……….)

$$\therefore\quad \frac{R}{P}+\frac{Q}{P}=\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}=\frac{a^2+b^2}{c^2}=\frac{c^2}{c^2}=1,$$

就是　$\dfrac{R+Q}{P}=1$,或 $R+Q=P$.

§237. 作圖題一. 作一三角形,要同一個所給四角形面積相等.



設所給四角形是$ABCD$.

求作　一三角形同$ABCD$面積相等.

〔作法同證〕　畫AC.　畫$BP \parallel AC$,交DA的延長線於P.　畫CP.

那麼　$\triangle APC=\triangle ABC$.　　§232(推論四)

(兩三角形有同底,並且頂點都落在和底平行的一條直線上.)

於是　　PCD同$ABCD$等積.

因爲　$PCD = ACD + APC.$

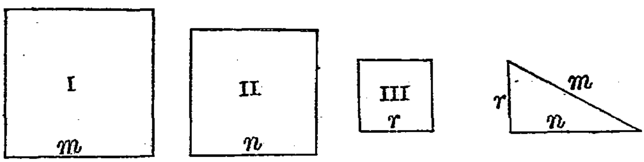
$ABCD = ACD + ABC.$

因此　$\triangle PCQ$同$ABCD$等積.

〔推論一〕 作一四角形要同一個所給五角形等積.

〔推論二〕 作一三角形要同一個所給多角形等積.

§238. **作圖題二.** 作一個正方形,等於所給兩個正方形的和或較.



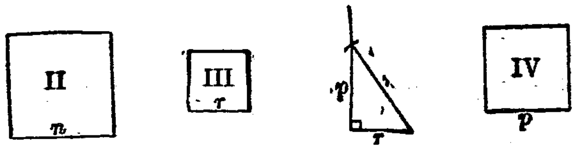
給了正方形II同III,他們每邊的長各爲n同r.

(1)求作正方形I,使他的面積等於II同III兩正方的面積的和.

〔作法〕 以n和r做兩股作一直角三角形,

用等於這三角形斜邊m的線份做邊所作的正方形I，便是所求的正方.

(2) 求作正方形IV使他的面積等於II同III兩正方形面積的差.

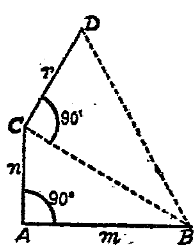


〔作法〕 以n為斜邊，r為一股作直角三角形.

用等於這直角三角形的又一股p的線份做邊所作的正方形IV，便是所求的正方.

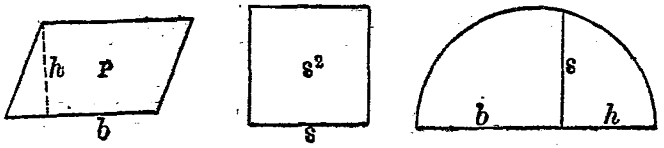
〔推論〕 作一個正方形，等於所給三個正方形的和. 那三個正方形的邊是m, n, r.

BC上的正方等於m^2+n^2；BD上的正方等



於$(m^2+n^2)+r^2=m^2+n^2+r^2$.

§239. 作圖題三. 作一個正方形和所給平行四邊形等積.



設P爲所給平行四邊形.

求作正方形s^2等於P.

〔作法〕 令P的底同高等於b, h. 在$b+h$一直徑上面畫半圓.

又在b同h中間的分點上作s線垂直於直徑.

那麼用s做邊所作的正方形,就是所求的正方形. §216(推論三)

——(若從圓上一點,向直徑上所畫的垂線……….)

試補出這個證法.

〔推論一〕 作一正方形同所給三角形等積.

〔提示〕 用$h+\frac{1}{2}b$做直徑.

〔推論二〕 作一正方形同所給多角形等積.

〔提示〕 先化多角形成三角形.

§237(推論二)

理解題

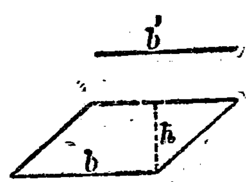
1. 作一個正方形,令他的面積等於所給正方形面積的二倍.

2. 作一平行四邊形,令他的面積等於所給正方形.

〔提示〕 用隨便一個大於$2s$的直徑畫圓. 從圓周上找一點,可從這點作直徑上的垂線等於s.

§240. 作圖題四. 以所給線份做底作一個和所給平行四邊形等積的長方形.

設所給平行四邊形的底是b高是h,所求長方形的底是b'. 找出他的高x.



〔作法〕 我們決定x,便要$b'x=bh$,就是

$b':b=h:x.$

所以x是b',b同h的比例第四項. 作這個比例第四項,並表明他的完全解法.

〔推論〕 以所給線份做底作同所給三角形等積的長方形.

〔提示〕 求b',$\frac{b}{2}$,h的比例第四項.

理解題

1. 以所給份做底,作同所給四角形等積的長方形.

2. 以所給線份做底,作同所給五角形等積的長方形.

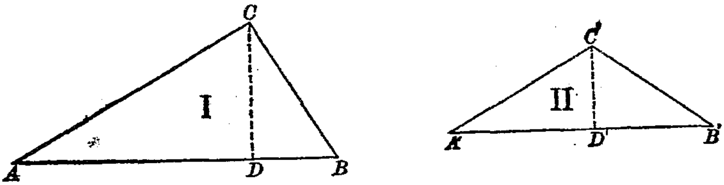
3. 用五角形的一邊做底,作一同他等積的長方形

4. 作正方形,使他的面積等於所給正方形的四倍;五倍;二分之一,同五分之一.

5. 用所給的高h,作同所給三角形等積的等腰三角形.

§241. 定理八. 若三角形的一角等於

別一三角形的一角,那麼他們兩個面積的比等於夾等角的兩邊相乘積的比.



設$\triangle_s ABC$和$A'B'C'$裏有$\angle A=\angle A'$.

求證 $\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\frac{AB\cdot AC}{A'B'\cdot A'C'}$.

〔證〕 令I表$\triangle ABC$的面積,II表$\triangle A'B'C'$的面積.

作 $CD\perp AB,\ C'D'\perp A'B'$

於是 $I=\frac{1}{2}CD\cdot AB,\ II=\frac{1}{2}C'D'\cdot A'B'$.

爲什麼?

∴ $\frac{I}{II}=\frac{\frac{1}{2}CD\cdot AB}{\frac{1}{2}C'D'\cdot A'B'}=\frac{CD}{C'D'}\cdot\frac{AB}{A'B'}$. 爲什麼?

但 $\triangle A'C'D'\sim\triangle ACD$,

§211(推論二)

故 $\frac{CD}{C'D'}=\frac{AC}{A'C'}$. §209

$$\therefore \quad \frac{I}{II}=\frac{AC}{A'C'}\cdot\frac{AB}{A'B'}=\frac{AB\cdot AC}{A'B'\cdot A'C'}.$$ 爲什麼?

理解題

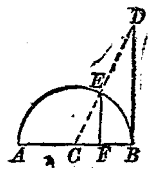
1. 所給同心圓的半徑,一是 r;一是 r'. 求切於小圓並且是大圓的弦的長.

2. 說明每邊爲 s 的等邊三角形的高是 $\frac{s}{2}\sqrt{3}$.

3. 兩等圓的半徑都是 r, 這兩圓相交,互過圓心. 求公共弦的長.

4. 在半圓裏面,作正方形,頂點在圓周同直徑上.

〔作法〕 令 AB 是所給半圓的直徑. 在 B 處作 AB 的垂線, BD, 取 $BD=AB$. 聯結圓心 C 同 D,遇圓於 E, 畫 EF 垂直於 AB, 於是 EF 便是所求正方的一邊. 完成這個圖形, 並表明 $EF=2CF$ 去造出證明來.



5. 有兩個等邊三角形,一個的邊是 a, 一個的邊是 b. 找出等於這兩三角形面積和的另一等邊三角形的邊長.

6. 令一個三角形的三邊,是 6, 8, 9. 畫二條平行於長邊的線,分這三角形成一個梯形同一個三角形,互相等積. 找出那分開兩邊的線份的比.

7. 斜方形的面積等於他的兩對角線相乘積的一半.

8. 在所給線份AB上,求D點要令$\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AD}^2}=\frac{2}{1}$

9. 設一個三角形的三角,是$30°, 60°, 90°$. 又設對着$60°$角的邊是a,試求其他兩邊.

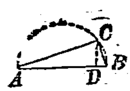
10. 若在平行四邊形$ABCD$裏面的對角線BD上,從隨便一點E畫AE, CE,那麼$\triangle BEA$同BEC必是等積;$\triangle DEA$同DEC便也等積.

11. 在半圓同象限裏面,各作一正方形,頂點在圓周同圓徑上,比較他們的面積.

12. 若E是平行四邊形$ABCD$裏面的隨便一點,那麼$\triangle ABE+\triangle CDE$等於$\square ABCD$面積的一半.

13. 聯結三角形的各邊中點,所成的平行四邊形同原三角形的一半等積.

14. 用已知線份AB做斜邊,求作一直角三角形,要令這三角形在斜邊上的高,恰遇於D點.



15. 一長方形對角線上的正方,等於這長方形的兩鄰邊上所作正方的對角線上的正方和的一半

16. 畫梯形裏面的兩對角線,在不相平行的兩邊

上所成兩三角形是等積.

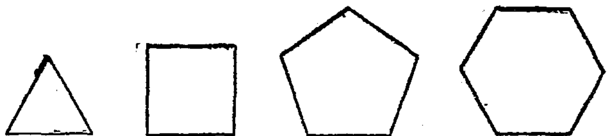
17. 分所給一線為兩線份,要使每線份上所作正方同所設的比相等.

18. AD同BE是$\triangle ABC$的中線, AD遇BE於F,求證三角形ABF與四角形$CDFE$等積.

19. 若聯結一個隨便的平行四邊形隣邊的中點,所成四個三角形必都等積.

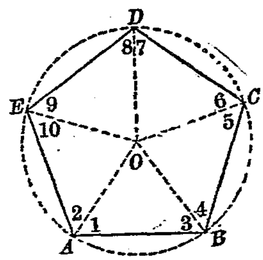
第八編 正多角形同圓

§242. **正多角形**(Regular Polygon). 等邊又等角的多角形叫正多角形. 如下圖的各形都是正多角形.



正三角形 正四角形 正五角形 正六角形

§243. **定理一.** 在一個正多角形的外面總可作一個外接圓.



設$ABCDE$是正多角形.

求證可以找一點O,恰使

$$AO=BO=CO=DO=EO.$$

〔證法述略〕 平分$\angle A$同$\angle B$，平分線相交於O點. O就是外接圓的圓心.

試說出下面各條的理由:

(1)$\angle 1=\angle 3$,　　(2)$AO=BO$,

(3)$\triangle ABO\equiv\triangle CBO$,

(4)$AO=OC$. 且$\angle 1=\angle 5$.

(5)因$\angle A=\angle C$,又$\angle 1=\angle 5$; $\therefore \angle 2=\angle 6$.

(6)$\angle 5=\angle 6$.　　(7)$\triangle BCO\equiv\triangle DCO$.

繼續這個方法,證明$\triangle OCD\equiv\triangle EDO$,……

$\therefore\quad AO=BO=CO=DO=EO.$

〔推論一〕 一個正多角形裏面,用他的外接圓的圓心可以作一內接圓.

因爲他的邊,就是外接圓的等弦,所以同那圓的圓心等距. 所以內接圓和外接圓的圓心便同在一點.

〔推論二〕 多角形的內接圓,切在各邊的中點.

〔推論三〕 內接於圓的等邊多角形,必是正多角形.

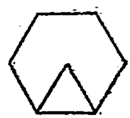
§244. **中心,頂心距**(Center Radius),**邊心距**(Apothem). 正多角形的內接圓同外接圓的公心,叫做正多角形的中心.

正多角形的中心到他的任一頂點的距離就叫頂心距.

從正多角形的中心到他任一邊上垂直的距離,叫做邊心距.

邊心距就是內接圓的半徑.

§245. **中心角**(Central Angle). 聯結正多角形相隣兩頂點,到中心所成的角,叫做這正多角形的中心角



目 解 題

1. 正三角形的中心角是幾度? 正四角形,五角形,六角形的,各是幾度?

2. 正多角形的中心角應該怎樣求法?

3. 把六個相等正三角形聚攏在一點,表明怎樣能成功一個正六邊形.

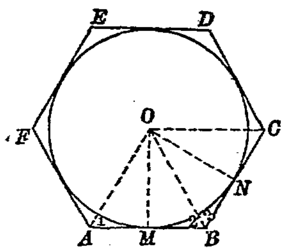
4. 一個正三角形的各角是多少度? 正四角形呢? 五角形呢? 又六角形呢?

5. 無論什麼正多角形各角的度數,應當怎樣求出來?

§246. 定理二. 圓的外接等角多角形必是正多角形.

設多角形$ABCDEF$外接於$\odot O$,並且 $\angle A=\angle B=\angle C=\cdots\cdots$,

求證　　$AB=BC=CD=\cdots\cdots$.



〔證〕 畫OA,OB,OC等頂心距,又OM,ON等到切點.

於是　　$\angle 2=\angle 3$.　　§153(推論二)

(從圓外一點所畫的兩切線相等……)

$\therefore$ $\angle 1 = \angle 2$,各為$\angle$s A同B的一半.

現在 $\triangle AMO \equiv \triangle BMO$. §90

$\therefore$ $AM = BM$,同樣$BN = CN$.

但 $BM = BN$. §153(推論二)

$\therefore$ $AB = BC$. 為什麼?

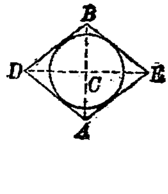
聯結中心到各頂點同切點,就能同樣證明 $BC = CD = DE = EF = FA$.

$\therefore$ $ABCDEF$ 是正多角形. §242

〔推論〕 從內接正多角形的頂點畫諸切線,便成外接正多角形.

理解題

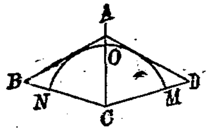
1. 在$\odot C$直徑的延長線上取A點同B點,令$AC = BC$. AD, BD, AE, BE 諸切線,相遇於 D, E 兩點. 證明 $AD = BD = BE = AE$.

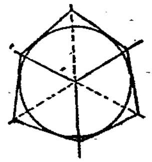


〔註〕 AC須要等於DC,外接多角形的各角方才相等. 因為AC不必定要等於DC,所以外接等多角

形就未必等角. 試同 §246 的定理比較.

2. 如圖 C 爲 MON 弧的圓心,且 $\angle DCA=\angle BCA$. AB 同 AD 是從 CO 延長線上的隨便一點 A 所畫 OM 同





ON 兩弧的切線,證明 $AB=AD$.

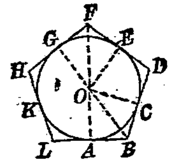
〔提示〕 在 $\triangle ACD$ 同 ACB 裏面, $\angle CAB=\angle CAD$.

3. 求作等邊外接六角形,但不等角.

〔提示〕 在圓心處做 120° 的角把圓分成三等分. 如題 2,聯結每弧作一圖形便得所求的六角形. 注意這作法常常成功雙邊數的多角形.

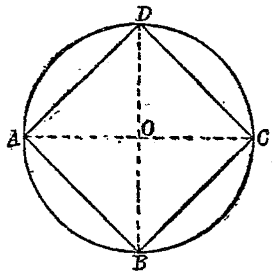
4. 若外接於圓的等邊多角形,他的邊數是單數,必是等角.

〔提示〕 $BC+CD=DE+EF$. 因 $CD=DE$. $\therefore BC=EF$. 同樣證得 $AB=GF$. 再則 $\triangle OBC, OEF$ 同 §153 的推論二證明 $\angle B=\angle F$. 這樣又證明和他同樣的諸角也相等.



若角數是單數,就能證明所有的角都相等. 假使他的角是1,2,3,4,5,6,7. 那麼照上面的證法,可以表明$\angle 1=\angle 3=\angle 5=\angle 7=\angle 2=\angle 4=\angle 6$. 若角的數目是雙數,裏面自然就有兩組相等的角,那時我們便不能決定這組是不是和那組相等.

§247. 作圖題一. 求作圓的內接正方形.



〔作法〕 過圓心O,畫正交兩直徑,遇圓於$A,B,C\ D$四點.

於是 $ABCD$就是所求正方形.

〔證〕 證明$ABCD$既等邊又等角.

〔推論一〕 求作外接正方形.

應用 §246〔推論〕

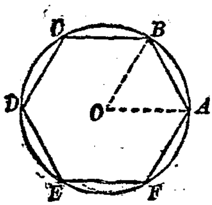
〔推論二〕 作內接正八角形,正十六角形.

先作正方形,再把各邊所對的弧平分.

〔推論三〕 作外切正八角形,正十六角形.

仿照推論一.

§248. **作圖題二.** 作圓內接正六角形.



〔作法同證〕 畫AB弦等於半徑OA,畫OB.

於是$\triangle AOB$就等邊,所以也等角

$\therefore \quad \angle AOB = 60° = 360°$的$\frac{1}{6}$.

就是 $\overparen{AB}$是全圓的$\frac{1}{6}$.

那麼若用圓規,可用AB弦為半徑,順截AB,BC,CD,DE,EF,FA諸弦. 這些弦所截的弧,都是圓周的$\frac{1}{6}$而且最後的分點,必落到A上面.

∴ $ABCDEF$是正六角形. §243(推論三)

(內接於圓的等邊形……)

〔推論一〕 作外接正六角形.

〔提示〕 先求內接正六角形的頂點,再畫切於這頂點的切線.

〔推論二〕 作內接和外接正十二角形,二十四角形,四十八角形.

〔提示〕 作外接多邊形,可用推論一所提示的方法.

〔推論三〕 作內接正三角形.

〔提示〕 聯結正六角形A, C, E畫弦.

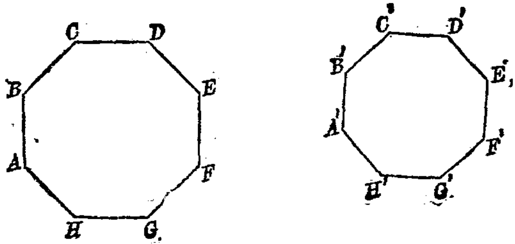
〔推論四〕 作外接正三角形.

〔提示〕 作內接正三角形頂點的切線.

§249. **定理三.** 兩個正多角形的邊數相同就相似.

設 $ABCDEFGH$ 同 $A'B'C'D'E'F'G'H'$ 都是正多角形,並各有n邊.

求證兩形相似.



〔證〕 $\angle A=\angle A'$, $\angle B=B'$……，因每角都是$\frac{2n+4}{n}\measuredangle R$. §127

(n邊的多邊形裏面各角的和……)

$AB=BC=CD,\cdots$, 又$A'B'=B'C'=C'D',\cdots$.

$\therefore\quad \frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CD}{C'D'}=\frac{DE}{D'E'}=\frac{EF}{E'F'}\cdots\cdots$

為什麼?

所以兩多角形相似.

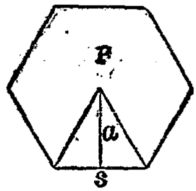
〔推論一〕 同邊數兩正多角形的頂心距相比,邊心距相比,都等於這兩形的相似比.

〔推論二〕 同邊數兩正多角形的周界相比,等於他們頂心距或邊心距相比.

〔推論三〕 同邊數兩正多角形的面積相

比，等於他們頂心距的平方或邊心距的平方相比.

§250. **定理四.** 正多角形的面積等於他的周界和邊心距相乘積的一半.



設P是正多角形，a是邊心距，p是周界，s是邊.

求證　　面積$P=\frac{1}{2}ap$.

〔證〕 這多角形被頂心距分成a做高，s做底的相等的等腰三角形.

每一個三角形的面積$=\frac{1}{2}as$.　　爲什麼?

$\therefore$　面積$P=\frac{1}{2}a(s+s+s+\cdots)=\frac{1}{2}ap$.

〔推論〕 任一圓的外接多角形的面積，等於他的周界同圓的半徑相乘積的一半.

理解題

1. 一個多角形的周界是48吋,外接於半徑4吋的圓. 求那多角形的面積.

2. 同邊數兩個正多角形的頂心距,各是3吋同7吋. 找出兩形周界的比,並兩形面積的比.

3. 同邊數兩正多角形,他們的邊心距各是2吋同6吋. 求出兩形的周界並面積的比.

§251. **圓周的長度.** "長度"這名詞在前面只用於線份,所以多角形的周界,就可以說是他的邊的長度的和.

我們現在假定圓周是有長度的,並且可以使內接或外接多角形的周界,逐漸令他同圓周差不多相近,概略的去算他出來.

關於圓周的長,祇可概略的去量他,那是不用說的. 因為無論度量直線的單位怎樣變小,總不能使他和一個圓上的弧互相恰合的.

§252. **定理五.** 兩圓周長度的比,等於

兩半徑的比.

設 $\odot C,\odot C'$的圓周是c同c'. 在每圓裏面作內接正多角形,邊數是6,12,24,48,96,192,…,稱$\odot C$裏面多角形的周界,做$p_6,p_{12},p_{24},p_{48},\cdots,\odot C'$裏面的叫做$p'_6,p'_{12},p'_{24},p'_{48},\cdots$. 令兩圓的半徑是$r$同$r'$.

那麼照§249推論二,就得

$$\frac{r}{r'}=\frac{p_6}{p'_6}=\frac{p_{12}}{p'_{12}}=\frac{p_{24}}{p'_{24}}=\cdots\cdots.$$

這式不管內接正多角形的邊數,雖然很多,也能適用. 不但這樣,就是外接正多角形若叫他們的周界做$P_6,P_{12},P_{24},\cdots$, 同$P'_6,P'_{12},P'_{24},\cdots$. 同樣

$$\frac{r}{r'}=\frac{P_6}{P'_6}=\frac{P_{12}}{P'_{12}}=\frac{P_{24}}{P'_{24}}=\cdots\cdots$$

但是多角形邊數儘管加倍下去,p,P同p',P'就差不多等於c同c'了. 所以

$$\frac{c}{c'}=\frac{r}{r'}.$$

§253. 定理六. 隨便一個圓, 他的圓周

對於直徑的比是一定的. 設 c 同 c' 爲兩圓的圓周, r 同 r', 是他們的半徑, d 同 d' 是直徑,於是

$$\frac{c}{c'}=\frac{r}{r'}=\frac{d}{d'}, \qquad \S 252$$

$$\text{所以}\frac{c}{d}=\frac{c'}{d'}. \qquad \S 170(3)$$

所以一圓裏面圓周對於直徑的比,等於其他隨便一圓的圓周對於直徑的比. 所以圓周對於直徑的比一定.

這個**定比**(Constant Ratio)常用一個希臘字 π 去表他(π 讀作 pi). 無論一個什麼圓,用字母去表他,就寫成

$$\frac{c}{d}=\pi \text{卽是} c=\pi d \text{或} c=2\pi r.$$

π 的近似值爲3.1416. 下面證明.

理解題

1. 凡內接於圓的等角多角形都是正多角形嗎? 是不是要看邊數是雙數或是單數呢?

比較 § 246 後面的理解題.

2. 證明正多角形的頂心距平分他的兩相鄰邊心距所成的角.

〔提示〕 作這正多角形的內接圓.

3. 在同圓內,證明 n 邊內接多角形的周界,必比 $2n$ 邊內接多角形的周界小.

4. 在同圓內,證明 n 邊外接多角形的周界,必比 $2n$ 邊外接多角形的周界大.

5. 比較題 3 裏面的兩個多角形的面積.

6. 比較題 4 裏面的兩個多角形的面積.

7. 表明內接於圓的正方形,若是他的頂心距為 r,他的面積就是 $2r^2$. 這同外接正方形的面積比較,有什麼關係?

8. 若一個圓的半徑是 r,那麼內接於這圓的正六角形的邊心距同面積,該怎樣計算?

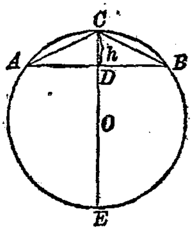
9. 一個正三角形內接於半徑是10的一個圓內.求這三角形的邊心距同邊.

10. 找出外接於同圓所有邊數相同的正多角形的頂點的軌跡.

11. 找出內接於同圓所有邊數相同的正多角形各邊中點的軌跡.

§254. 定理七. 設圓內接正n角形的一邊,爲Sn內接正$2n$角形的一邊,爲S_{2n},圓的半徑爲r.

求證$S_{2n}=\sqrt{2r^2-r\sqrt{4r^2-S_n^2}}$.



〔證〕 設⊙O裏面,AB是內接正n角形的一邊$=S_n$. $AC=BC=S_{2n}$.

從C畫直徑CE,交AB於D點.

$\because\quad \widehat{AC}=\widehat{BC}$.　　　爲什麼?

$\therefore\quad \widehat{AE}=\widehat{BE}$.　　　爲什麼?

$\therefore\quad \angle ACD=\angle BCD,\ \angle CAD=\angle CBD$.

$\therefore\quad \angle ADC=\angle BDC=\angle R$.　　　爲什麼?

於是　　　$AD=DB$.

記CD爲h.

那麼 $(S_{2n})^2=\overline{AC}^2=\overline{AD}^2-h^2.$ 爲什麼?

$$=\left(\frac{1}{2}S_n\right)^2+h^2.\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

但 $h\times DE=h(2r-h)=AD\times DB=\overline{AD}^2.$

爲什麼?

就是 $\overline{AD}^2=\left(\frac{1}{2}S_n\right)^2=h(2r-h)$。$\cdots\cdots\cdots(2)$

解方程(2),便得

$$h=\frac{2r\pm\sqrt{4r^2-S_n^2}}{2}$$

因$h<r$,取負號把他平方起來,再移項,

$$h^2+\left(\frac{1}{2}S_n\right)^2=2r^2-r\sqrt{4r^2-S_n^2}.$$

所以從(1),$(S_{2n})^2=2r^2-r\sqrt{2r^2-S_n^2}.$

又 $S_{2n}=\sqrt{2r^2-r\sqrt{4r^2-S_n^2}}.\cdots\cdots\cdots(3)$

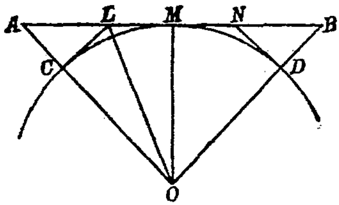
〔推論〕 若圓的半徑是單位,

那麼 $S_{2n}=\sqrt{2-\sqrt{4-S_n^2}}.$

§255. 定理八. 設圓外接正n角形的一邊爲S'_n,外接正$2n$角形的一邊爲S'_{2n},圓的半

徑為r. 求證

$$S'_{2n}=\frac{2r}{S'_n}(\sqrt{4r^2+S'^2_n}-2r).$$



〔證〕 設AB是外接於⊙O正n角形的一邊$=S'_n$. M是切點. OA,OB交圓周於C,D. 從C,D各引圓的切線交AB於L,N. 則LN是外接正$2n$角形的一邊$=S'_{2n}$. 聯OL. 則$\angle COL=\angle MOL$.

$\therefore$ $$AL:LM=OA:OM$$

$\therefore$ $$AL+LM:LM=OA+OM:OM$$

即 $$AM:LM=OA+OM:OM$$

$\because$ $$AM=MB=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}S'_n$$

$$LM=MN=\frac{1}{2}LN=\frac{1}{2}S'_{2n}$$

$$OM=r$$

$$OA=\sqrt{\overline{OM}^2+\overline{AM}^2}=\sqrt{r^2+\frac{S^2_n}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{4r^2+S^2_n}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}S'_n:\frac{1}{2}S'_{2n}=\frac{1}{2}\sqrt{4r^2+S_n^2}+r:r$$

$$\therefore \quad S'_n:S'_{2n}=\sqrt{4r^2+S_n^2}+2r:2r$$

$$\therefore \quad S'_{2n}=\frac{2rS'_n}{\sqrt{4r^2+S'^2_n}+2r},$$

$$=\frac{2r}{S'_n}(\sqrt{4r^2+S'^2_n}-2r).$$

〔推論〕 若圓的半徑是單位,

則 $$S'_{2n}=\frac{2}{S'_n}(\sqrt{4+S'^2_n}-2).$$

§256. **定理九.** 設一個圓的圓周和直徑的比是π. 求證π的近似値爲3.1416.

設 圓的半徑爲1. S_n和S'_n各表内接,和外接正n角形每邊之長. P_n和P'_n各表内接,和外接正n角形周界.

則 $$S_6=1,\ P_6=S_6\times 6=6.$$

代入 §251推論的公式,得

$$S_{12}=\sqrt{2-\sqrt{4-1}}=0.51763809\cdots.$$

$$P_{12}=12(0.51763809)=6.21165708\cdots.$$

同樣求 $S_{24}, P_{24}, S_{48}, P_{48}, \cdots$, 便得

$S_{12}=\sqrt{2-\sqrt{4-1}}=.51763809$ $\quad\therefore P_{12}=6.21165708.$

$S_{24}=\sqrt{2-\sqrt{4-(.51763809)^2}}=.26105238$

$\therefore P_{24}=6.26525722.$

$S_{48}=\sqrt{2-\sqrt{4-(.26105238)^2}}=.13080626$

$\therefore P_{48}=6.27870041.$

$S_{96}=\sqrt{2-\sqrt{4-(.13080626)^2}}=.06543817$

$\therefore P_{96}=6.28206396.$

$S_{192}=\sqrt{2-\sqrt{4-(.06543817)^2}}=.0327346$

$\therefore P_{192}=6.28290510.$

$S_{384}=\sqrt{2-\sqrt{4-(.03272346)^2}}=.01638228$

$\therefore P_{384}=6.28311544.$

$S_{768}=\sqrt{2-\sqrt{4-(.01636228)^2}}=.00818121$

$\therefore P_{768}=6.28316941.$

又因 $S'_4=2$, $\therefore P'_4=S'_4\times 4=8.$

代入 §252 推論的公式可求得

$S'_8, P'_8, S'_{16}, P'_{16}.$

今將所得結果列表如下:

邊數	每邊的長	周界
4	2.000000	8.000000
8	0.828428	6.627418
16	0.397824	6.365196
32	0.196984	6.303450
64	0.098254	6.288236
128	0.049078	6.284448
256	0.024544	6.283500
512	0.012272	6.283264
1024	0.006136	6.283205
2048	0.003068	6.283190

因內接正多角形的周界必比圓周小,又因外接正多角形的周界必比圓周大,故若以C表圓周之長,則 $P_n<C<P'_m$, n, m 爲任意整正數.

$$\therefore \quad P_{768}<C<P'_{2048}.$$

$$\therefore \quad 6.28316941\cdots<C<6.283190.$$

若取四位小數的近似值時,

$$C=6.2832,$$

以d表直徑之長 $=2$

$$\therefore \qquad \pi=C:d=6.2832:2=3.1416$$

〔證〕從§250. 的推論,外接多角形的面積,等於他的周界同圓的半徑相乘積的一半,設周界是p,半徑是r,面積是a,那麼

$$a=\frac{1}{2}p\cdot r.$$

這個公式不問多角形的邊數是多少,總是對的.

現在我們假定把一個外接多角形的邊數,繼續加倍. 到無限多時,則此多角形每邊之長就無限小,而p同圓周c無限的接近,多角形的面積同圓的面積也無限接近.

$$\therefore \quad \text{圓的面積}=\frac{1}{2}c\cdot r$$

而c又等於$2\pi r$.

$$\therefore \quad \text{圓的面積}=\frac{1}{2}c\cdot r=\frac{1}{2}\cdot 2\pi r\cdot r=\pi r^2.$$

§257. **定理十.** 一個圓的面積,等於他

的半徑的平方的π倍. 用字母來記他.

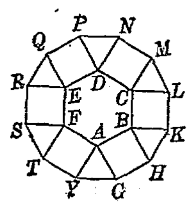
圓的面積$=\pi r^2$.

§258. **定理十一.** 兩個圓面積的比,等於他們半徑平方,或直徑平方的比.

〔證〕 因圓面積是πr^2,若所給兩圓的半徑各是r同r'並他們的直徑各是d同d',那麼他們的面積a同a'的比就是.

$$\frac{a}{a'}=\frac{\pi r^2}{\pi r'^2}=\frac{r^2}{r'^2}=\frac{d^2}{d'^2}.$$

理 解 題

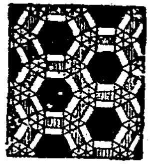


1. 如圖 $ABCDEF$ ……是正六角形, $ABHG, BCLK,$ ……是在他的邊上所作的平方. 證明 $GHKL$ ……TY是十二角形.

2. 用上圖求正十二角形的面積(各邊都 6 吋).

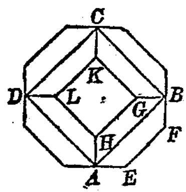
〔提示〕 十二角形中含有一個正六角形,六個等邊三角形,同六個正方形.

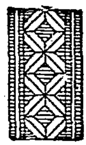
看右圖上面的方磚設計,就是照這個圖形製造的.



3. 若一個正十二角形的每邊是a,他的面積該怎樣表出?

4. 如圖把一個正八角形每間一邊的中點聯結起來. AH垂直於AE並等於AE同樣作BG, CK同DL.





證明$ABCD$同$HGKL$都是正方形.

5. 一圓的直徑是5吋. 求他的面積和圓周.

6. 一圓的圓周是10呎. 求他的半徑同面積.

7. 一圓的面積是24平方吋. 找出他的半徑同圓周.

8. 找出同圓的內接同外接正三角形面積的比. 并找出這樣正方形同這樣六角形面積的比

9. 找出6吋圓半徑的內接正三角形的面積.

10. 找出6吋圓半徑的內接正六角形的面積.

中華民國十三年[illegible]初版
中華民國二十一年五月國[illegible]第一版
中華民國二十七年十月國難後訂正第四版

(51322B)

現代初中教科書　幾何　二冊

下冊實價國幣肆角
外埠酌加運費匯費

編纂者　周宣德
校訂者　段育華　榮方舟
發行兼印刷者　商務印書館　長沙南正路
發行所　商務印書館　各埠

(本書校對者湯陞人)

*F三六二二

版權所有　翻印必究

776

3
77232