Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2020/2021**

Algebraische Zahlentheorie

Arbeitsblatt 28

Aufgaben

Aufgabe 28.1. Zeige, dass zu einer endlichen Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subseteq K$ die Menge

$$\left\{ x \in K^\times \mid |\tau(x)| = 1 \text{ für alle Einbettungen } \tau \right\}$$

eine Untergruppe der Einheitengruppe von K ist, die die Einheitswurzelgruppe $\mu(K)$ umfasst, und dass die Einheitswurzelgruppe im Allgemeinen kleiner ist.

Aufgabe 28.2. Es sei $\mathbb{Q} \subseteq K$ eine endliche Körpererweiterung mit ausschließlich reellen Einbettungen. Es sei $K \subseteq L$ eine quadratische Körpererweiterung und L besitze keine reelle Einbettung. Zeige, dass ein kommutatives Diagramm

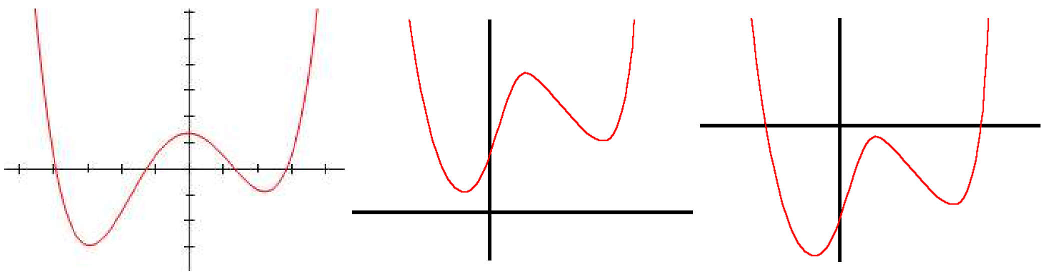
$$\begin{array}{ccccc} K^\times & \xrightarrow{\tau^{\mathbb{R}}} & (\mathbb{R}^\times)^r & \xrightarrow{\ln|-|} & \mathbb{R}^r \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \cdot 2 \\ L^\times & \xrightarrow{\tau^{\mathbb{R}}} & (\mathbb{C}^\times)^r & \xrightarrow{2\ln|-|} & \mathbb{R}^r \end{array}$$

existiert, wobei die Abbildungen rechts komponentenweise zu verstehen sind und wobei die horizontalen Abbildungen die logarithmischen Gesamtabbildungen sind.

Aufgabe 28.3. Skizziere die Situation in Lemma 28.6 für verschiedene Zahlbereiche von kleinem Grad.

Aufgabe 28.4. Es sei V ein euklidischer Vektorraum, $\Delta \subseteq V$ eine diskrete Untergruppe und $B \subseteq V$ eine beschränkte Teilmenge derart, dass $\bigcup_{v \in \Delta} v + B = V$ ist. Zeige, dass Δ ein Gitter ist.

AUFGABE 28.5. Im Folgenden sind die Graphen zu normierten irreduziblen Polynomen F vom Grad 4 mit ganzzahligen Koeffizienten abgebildet. Es sei R der Zahlbereich zur Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subseteq K = \mathbb{Q}[X]/(F)$. Bestimme den Rang der Einheitengruppe $R^\times$.



a) b) c)

AUFGABE 28.6.*

Es sei R ein Zahlbereich und es seien $u, v \in R^\times$ Einheiten und a, b von 0 verschiedene ganze Zahlen mit $u^a = v^b$. Zeige, dass es ganze Zahlen c, d und Einheitswurzeln $\zeta, \xi \in \mu(R)$ und eine Einheit w derart gibt, dass $u = \zeta w^c$ und $v = \xi w^d$ gilt.

AUFGABE 28.7. Es sei R ein Zahlbereich und $u \in R^\times$ eine Einheit, die keine Einheitswurzel sei. Zeige, dass man aus u nur zu endlich vielen Exponenten Wurzeln ziehen kann.

AUFGABE 28.8. Es sei R ein Zahlbereich und sei $u \in R^\times$ Teil eines Systems von Fundamentaleinheiten. Zeige, dass u keinerlei Wurzel besitzt.

AUFGABE 28.9.*

Es sei R ein Zahlbereich und sei $u \in R^\times$ derart, dass ζu, wobei ζ eine Einheitswurzel in R bezeichnet, in R keinerlei Wurzel besitze. Zeige, dass dann u Teil eines Systems von Fundamentaleinheiten ist.

AUFGABE 28.10. Es sei R ein Zahlbereich mit $r \geq 1$ reellen Einbettungen und s Paaren von komplexen Einbettungen. Es gelte $r + s \geq 3$ und es sei $R \subseteq \mathbb{R}$ eine fixierte reelle Einbettung. Zeige, dass es zu jedem $\delta > 0$ Einheiten $u \in R$ mit $1 < u \leq 1 + \delta$ gibt.

AUFGABE 28.11. Es sei $S = \mathbb{Z}[Y]/(Y^2 - 6Y + 1)$ und p eine ungerade Primzahl derart, dass $Y^2 - 6Y + 1$ in $\mathbb{Z}/(p)[X]$ irreduzibel ist. Zeige, dass Y kein Erzeuger der multiplikativen Gruppe von $\mathbb{Z}/(p)[Y]/(Y^2 - 6Y + 1)$ ist.

AUFGABE 28.12.*

Es sei $R = \mathbb{Z}[X]/(F)$ ein Zahlbereich mit einem normierten ganzzahligen irreduziblen Polynom F. Sei $n \in \mathbb{N}_+$ fixiert. Es sei p eine Primzahl mit den folgenden Eigenschaften.

(1) n und $p-1$ sind nicht teilerfremd.
(2) F ist irreduzibel in $\mathbb{Z}/(p)[X]$.
(3) Die Restklasse von X in $L = \mathbb{Z}/(p)[X]/(F)$ ist ein Erzeuger der multiplikativen Gruppe $L^\times$

Zeige, dass dann X in R keine n-te Wurzel besitzt.

AUFGABE 28.13. Es sei $R = \mathbb{Z}[X]/(F)$ ein Zahlbereich mit einem normierten ganzzahligen irreduziblen Polynom F. Sei $n \in \mathbb{N}_+$ fixiert. Es sei p eine Primzahl derart, dass $p-1$ nicht teilerfremd zu n sei. Es sei L ein Restekörper des Faserringes R/pR mit der Eigenschaft, dass die Restklasse von X in L ein Erzeuger der multiplikativen Gruppe $L^\times$ sei. Zeige, dass dann X in R keine n-te Wurzel besitzt.

AUFGABE 28.14.*

Es sei $R = \mathbb{Z}[X]/(X^3 - 3X + 1)$. Zeige mit Aufgabe 28.13, dass die Restklasse x von X in R keine dritte Wurzel besitzt.

AUFGABE 28.15.*

Wir betrachten das Polynom $F = X^3 - 3X + 1$ über $\mathbb{Z}/(7)$.

(1) Zeige, dass F ein irreduzibles Polynom in $\mathbb{Z}/(7)[X]$ ist.
(2) Es sei x die Restklasse von X in $\mathbb{Z}/(7)[X]/(X^3 - 3X + 1)$. Berechne x^7 und x^{49}.
(3) Zeige, dass x in $\mathbb{Z}/(7)[X]/(X^3 - 3X + 1)$ eine dritte Wurzel besitzt.

AUFGABE 28.16. Es seien G und H kommutative Gruppen und sei $\varphi\colon G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus.

(1) Zeige, dass dies einen Homomorphismus

$$\operatorname{tor}(G) \longrightarrow \operatorname{tor}(H)$$

zwischen den Torsionsuntergruppen und einen Homomorphismus

$$G/\operatorname{tor}(G) \longrightarrow H/\operatorname{tor}(H)$$

derart induziert, dass sich ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \operatorname{tor}(G) & \longrightarrow & G & \longrightarrow & G/\operatorname{tor}(G) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \operatorname{tor}(H) & \longrightarrow & H & \longrightarrow & H/\operatorname{tor}(H) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

mit exakten Zeilen ergibt.

(2) Sei φ injektiv. Zeige, dass dann auch die induzierten Homomorphismen aus (1) injektiv sein müssen.

(3) Sei φ surjektiv. Müssen die induzierten Homomorphismen aus (1) surjektiv sein?

Aufgabe 28.17. Es seien R und S Zahlbereiche und sei $\varphi\colon R \to S$ ein Ringhomomorphismus. Zeige, dass ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & \mu(R) & \longrightarrow & R^\times & \longrightarrow & R^\times/\mu(R) & \longrightarrow & 1 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & \longrightarrow & \mu(S) & \longrightarrow & S^\times & \longrightarrow & S^\times/\mu(S) & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

von Gruppenhomomorphismen mit exakten Zeilen existiert, und dass die vertikalen Homomorphismen injektiv sind.

Aufgabe 28.18.*

Es seien R und S Zahlbereiche und sei $\varphi\colon\ R \to S$ ein Ringhomomorphismus vom Grad d. Es sei $u \in R^\times$ eine Einheit, die in $R^\times/\mu(R)$ keinerlei Wurzel besitze (dazu ist äquivalent, dass u Teil eines Systems von Fundamentaleinheiten ist). Es sei $v \in S$ mit

$$u = v^n.$$

Zeige, dass n ein Teiler von d ist.

Aufgabe 28.19. Es sei R_n der n-te Kreisteilungsring und $S_n = R_n \cap \mathbb{R}$, vergleiche Aufgabe 17.5. Zeige, dass die Restklassengruppe $R_n^\times/S_n^\times$ endlich sind.

Aufgabe 28.20.*

Es sei p eine Primzahl, R_p der p-te Kreisteilungsring und $S_p = R_p \cap \mathbb{R}$, vergleiche Aufgabe 17.5. Zeige, dass für die Einheitengruppen die Beziehung

$$R_p^\times = \mu(R_p) \cdot S_p^\times$$

gilt. D.h. die Einheitengruppe wird von den Einheitswurzeln und den reellen Einheiten erzeugt.

Aufgabe 28.21. Es sei R ein Zahlbereich und sei $u \in R^\times$ Teil eines Systems von Fundamentaleinheiten von R. Zeige, dass es eine Erweiterung von Zahlbereichen $R \subseteq S$ derart gibt, dass u in S nicht zu einem System von Fundamentaleinheiten gehört.

Aufgabe 28.22.*

Man gebe Beispiele für eine endliche Galoiserweiterung $\mathbb{Q} \subseteq K$ mit zugehörigem Zahlbereich R derart, dass der natürliche Gruppenhomomorphismus

$$\mathrm{Gal}\,(K|\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathrm{Aut}\,(R^\times)$$

(1) bijektiv,
(2) injektiv und nicht surjektiv,
(3) surjektiv und nicht injektiv,
(4) weder injektiv noch surjektiv

ist.

Aufgabe 28.23. Es sei $\mathbb{Q} \subseteq K$ eine endliche Körpererweiterung mit Galoisgruppe G und sei R der zugehörige Zahlbereich mit r reellen Einbettungen und s Paaren von komplexen Einbettungen. Zeige, dass die Galoisgruppe in natürlicher Weise auf der Gruppe $\mathbb{Z}^{r+s-1}$ durch lineare Automorphismen wirkt.

Aufgabe 28.24. Es sei R ein reell-quadratischer Zahlbereich. Zeige, dass die Konjugation auf

$$R^\times/\{\pm 1\} \cong \mathbb{Z}$$

als Negation wirkt.

Aufgabe 28.25. Es sei $\mathbb{Q} \subseteq K$ eine endliche Körpererweiterung mit Galoisgruppe G und sei R der zugehörige Zahlbereich mit r reellen Einbettungen und s Paaren von komplexen Einbettungen. Zeige, dass die Galoisgruppe in natürlicher Weise auf der Gruppe $\mathbb{Z}^{r+s-1}$ durch lineare Automorphismen wirkt.

Aufgabe 28.26.*

Wir betrachten den Zahlbereich $R = \mathbb{Z}[X]/(X^3 - 3X + 1)$. Es ist (vergleiche Beispiel 25.5)

$$\mathrm{Gal}\,(R|\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/(3) = \langle \varphi \rangle$$

und

$$R^\times/\{\pm 1\} \cong \mathbb{Z}^2$$

Bestimme die Matrix, die die Wirkung von φ auf $\mathbb{Z}^2$ beschreibt.

Aufgabe 28.27. Es sei R ein kommutativer Ring und A eine kommutative R-Algebra. Zeige, dass durch

$$A^{\times} \longrightarrow \Omega_{A|R},\ f \longmapsto \frac{df}{f},$$

ein Gruppenhomomorphismus von der Einheitengruppe in den Modul der Kähler-Differentiale definiert wird.

Die vorstehende Abbildung heißt *logarithmische Ableitung*.

Aufgabe 28.28.*

Beschreibe die logarithmische Ableitung explizit für die imaginär-quadratischen Zahlbereiche.

Aufgabe 28.29.*

Es sei p eine Primzahl und R_p der p-te Kreisteilungsring. Zeige, dass durch die logarithmische Ableitung ein Gruppenhomomorphismus

$$\mu(R_p) \longrightarrow \Omega_{R_p|\mathbb{Z}}$$

gegeben ist, dessen Kern gleich $\{\pm 1\}$ ist.

Aufgabe 28.30.*

Es sei R ein Zahlbereich mit r reellen und s Paaren von komplexen Einbettungen. Es sei $f \in R$, $f \neq 0$, ein Element mit der Primidealzerlegung

$$(f) = \mathfrak{p}_1^{r_1} \cdots \mathfrak{p}_k^{r_k}.$$

Zeige, dass die Einheitengruppe $R_f^{\times}$ der Nenneraufnahme R_f isomorph zu $\mu(R) \times \mathbb{Z}^{r+s+k-1}$ ist.

Abbildungsverzeichnis