Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück SS 2018**

Einführung in die mathematische Logik

Arbeitsblatt 17

Übungsaufgaben

Aufgabe 17.1. Bestimme die funktionale Hülle zu einem Element $x \in M$, wobei auf M eine Permutation π fixiert sei.

Aufgabe 17.2. Es sei S ein Symbolalphabet, das neben Variablen aus einer Konstanten e und einem einzigen zweistelligen Funktionssymbol f bestehe. Es sei G eine endliche Gruppe, wobei e als neutrales Element und f als die Verknüpfung interpretiert werde. Zeige, dass die funktionale Hülle zu einem Element $g \in G$ mit der von g erzeugten Untergruppe übereinstimmt.

Aufgabe 17.3. Erstelle Funktionssymbolstammbäume, die den arithmetischen Ausdrücken

$$(x+y)z,\ xz+yz,\ x^3+yz^2$$

entsprechen.

Aufgabe 17.4. Definiere einen Isomorphismus auf $\{1, 2, \ldots, 10\}$ zur Permutation

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\pi(x)$	4	9	3	10	8	5	2	6	7	1

anhand von Satz 17.6, wobei im ersten Schritt 4 auf 6 abgebildet werden soll.

Aufgabe 17.5. Bestimme die Automorphismengruppe zu einer fixierten Permutation π auf einer endlichen Menge M.

Aufgabe 17.6. Es sei $M = \mathbb{Z}/(12)$, aufgefasst als Gruppe. Definiere entlang von Satz 17.6 einen Isomorphismus

$$\varphi\colon \mathbb{Z}/(12) \longrightarrow \mathbb{Z}/(12),$$

startend mit $S_1 = \{0\}$ und weiter mit S_2, wobei S_2 die funktionale Hülle von 0 und $m_2 = 3$ sei, und n_2 als 9 gewählt wird, etc. Welche Wahlmöglichkeiten hat man für $\varphi_3(m_3)$ mit $m_3 = 1$?

Aufgabe 17.7. Definiere die Stelligkeit für ein formal-zusammengesetztes Funktionssymbol.

Aufgabe 17.8. Zeige, dass eine funktional abgeschlossene Teilmenge $T \subseteq M$ einer S-Struktur M auch unter jedem formal-zusammengesetzten Funktionssymbol abgeschlossen ist.

Aufgabe 17.9. Wir betrachten das Symbolalphabet S, welches neben Variablen aus $0, 1, +, \cdot$ besteht, mit der Standardinterpretation auf $\mathbb{R}$. Bestimme die funktionale Hülle der einzelnen Elemente $1, 3\sqrt{7}, e, \pi$. Welche sind untereinander S-isomorph, welche nicht?

Aufgabe 17.10. Es sei $S = \{0, 1, +, \cdot\}$. Zeige, dass die Automorphismengruppen der S-Strukturen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ jeweils trivial sind.

Aufgabe 17.11. Es sei $S = \{0, 1, +, \cdot\}$ die Symbolmenge eines Körpers. Zeige, dass es einen Unterkörper $K \subseteq \mathbb{R}$ derart gibt, dass $S - \text{Aut } K$ nicht trivial ist.

Aufgabe 17.12. Es sei $S = \{0, 1, +, \cdot, \geq\}$ die Symbolmenge eines angeordneten Körpers. Zeige, dass für jeden Unterkörper $K \subseteq \mathbb{R}$ die Automorphismengruppe $S - \text{Aut } K$ trivial ist.

Aufgabe 17.13. Es sei $S = \{0, 1, +, \cdot, \geq\}$ die Symbolmenge eines angeordneten Körpers. Zeige, dass es einen angeordneten Körper K derart gibt, dass $S - \text{Aut } K$ nicht trivial ist.

Aufgabe 17.14.*

Es sei

$$S = \{0, 1, +, \cdot, \geq$$

das Symbolalphabet für einen angeordneten Körper und es sei $\mathbb{R}$ die S-Struktur mit der Standardinterpretation.

(1) Zeige, dass die Äquivalenzklassen zur elementaren Äquivalenz einelementig sind.
(2) Zeige, dass es für die Elemente im Allgemeinen keinen charakterisierenden Ausdruck gibt.

Aufgabe 17.15. Wir betrachten die beiden folgenden Punktkonfigurationen im $\mathbb{R}^2$,

$$M = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (2, 0)\} \text{ und } N = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (3, 0)\}\,.$$

Zeige, dass es keine lineare Abbildung

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

gibt, die M in N überführt. Widerspricht dies Satz 17.6?

Aufgabe 17.16. Es sei f ein zweistelliges Funktionssymbol und g ein einstelliges Funktionssymbol. Man mache sich klar, dass die Symbolkette $fggg$ in zweifacher Weise als formal-zusammengesetztes Funktionssymbol gelesen werden kann.

Aufgabe 17.17. Es sei S ein erststufiges Symbolalphabet, M eine S-Struktur und $T \subseteq M$ eine Teilmenge. Zeige, dass die (rekursiv definierte) funktionale Hülle von T gleich dem Durchschnitt über alle funktional abgeschlossenen Teilmengen $N \subseteq M$ ist, die T umfassen.

In der Mathematik interessiert man sich nicht nur für die von einer Teilmenge einer Struktur erzeugte funktionale Hülle, sondern auch für Unterstrukturen, in denen zusätzlich noch die gleichen Gesetzmäßigkeiten (ausgedrückt durch ein Axiomensystem Γ) wie in der Struktur gelten, beispielsweise die von einer Teilmenge erzeugten Untergruppen, Unterringe, Unterkörper, Untervektorräume. Diese von einer Teilmenge erzeugten $S-\Gamma$-Strukturen kann man oft, wenn es sie überhaupt gibt, als Durchschnitt über alle $S-\Gamma$-Unterstrukturen erhalten, die die Teilmenge umfassen.

Aufgabe 17.18. Wir betrachten die Gruppe $(\mathbb{Z}, 0, +)$. Bestimme die funktionale Hülle von $T = \{15, 20\}$ (hier spricht man vom erzeugten Untermonoid) und die von T erzeugte Untergruppe.

Aufgabe 17.19. Das Symbolalphabet S bestehe neben Variablen aus einem einstelligen Funktionssymbol f und es sei $\Gamma = \{\alpha\}$ mit $\alpha = \forall x \exists y (fy = x)$. Es sei $M = \mathbb{Z}$, wobei f als $+2$ interpretiert wird mit der einzigen Ausnahme

$$f(x) = \begin{cases} x+1, \text{ falls } x \geq 0\,, \\ 0, \text{ falls } x = -1\,, \\ x+2, \text{ falls } x \leq -2\,. \end{cases}$$

a) Zeige, dass Γ von M erfüllt wird.

b) Bestimme die funktionale Hülle von $\{0\}$.

c) Zeige, dass die funktionale Hülle von $\{0\}$ nicht Γ erfüllt.

d) Man gebe zwei funktional abgeschlossene, Γ-erfüllende und 0 enthaltende Teilmengen $T_1, T_2 \subseteq \mathbb{Z}$ an, deren Durchschnitt $T_1 \cap T_2$ nicht Γ erfüllt.

Zu einer S-Struktur M und einer S-Unterstruktur $N \subseteq M$ versteht man unter der relativen S-*Automorphismengruppe* von M bezüglich N die Menge der S-Automorphismen auf M, die die Elemente aus N in sich überführen. Sie wird mit $S - \operatorname{Aut}_N M$ bezeichnet.

Aufgabe 17.20. Es sei S ein Symbolalphabet, M eine S-Struktur und $N \subseteq M$ eine S-Unterstruktur. Zeige, dass die relative Automorphismengruppe $S - \operatorname{Aut}_N M$ eine Untergruppe der Automorphismengruppe $S - \operatorname{Aut} M$ ist.

Aufgabe 17.21. Interpretiere die Galoisgruppe zu einer Körpererweiterung $K \subseteq L$ als eine relative Automorphismengruppe zu einem geeigneten Symbolalphabet. Welche Rolle spielen dabei die Körperaxiome?

Aufgabe 17.22. Es sei S ein Symbolalphabet, M eine S-Struktur und $N \subseteq M$ eine S-Unterstruktur. Zeige, dass man durch eine Symbolmengenerweiterung $S \subseteq S'$, wobei nur Konstanten hinzugenommen werden, erreichen kann, dass die relative Automorphismengruppe $S - \mathrm{Aut}_N\, M$ der S'-Automorphismengruppe $S' - \mathrm{Aut}\, M$ entspricht (dazu muss insbesondere S' auf M und N interpretiert werden).

Wir erinnern an die Definition eines algebraisch abgeschlossenen Körpers. Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ sind algebraisch abgeschlossen (Fundamentalsatz der Algebra), die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ nicht.

Ein Körper K heißt *algebraisch abgeschlossen*, wenn jedes nichtkonstante Polynom $F \in K[X]$ eine Nullstelle in K besitzt.

Aufgabe 17.23. Definiere über der Symbolmenge $\{0, 1, +, \cdot\}$ einen algebraisch abgeschlossenen Körper mit Hilfe eines Axiomenschemas.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 17.24. (3 Punkte)

Es sei S ein Symbolmenge und M eine endliche S-Struktur. Zeige, dass zwei Elemente $m, n \in M$ genau dann elementar äquivalent sind, wenn es einen S-Automorphismus

$$\varphi\colon\ M \longrightarrow M$$

mit $\varphi(m) = n$ gibt.

Aufgabe 17.25. (4 Punkte)

Zeige, dass ein angeordneter Körper, der die Supremumseigenschaft für erststufige Ausdrücke besitzt, reell-abgeschlossen ist.

Verwende, dass Polynomfunktionen auf einem angeordneten Körper stetig sind.

Aufgabe 17.26. (4 Punkte)

Es sei S das Symbolalphabet, das neben Variablen aus einem zweistelligen Relationssymbol G besteht. Wir betrachten vierelementige S-Strukturen, die $\forall x \forall y\, (Gxy \rightarrow \neg Gyx)$ erfüllen (also WM-Fußballgruppen, wobei $G(m, n)$ als m gewinnt gegen n interpretiert wird). Erstelle Aussagen $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_9$ in einer freien Variablen x derart, dass

$$M\frac{m}{x} \vDash \alpha_k$$

bedeutet, dass m in der Abschlusstabelle k Punkte hat.

Aufgabe 17.27. (3 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für zwei (abstrakte) WM-Fußballgruppen, die die gleiche Abschlusspunktetabelle besitzen, aber nicht isomorph sind.