

Grundkurs Mathematik II**Arbeitsblatt 53****Die Pausenaufgabe**

AUFGABE 53.1. Berechne

$$5^{\frac{2}{3}}$$

bis auf einen Fehler von 1.

ÜbungsaufgabenAUFGABE 53.2. Es sei b eine positive reelle Zahl und $q = n/m \in \mathbb{Q}$. Zeige, dass die durch

$$b^q := (b^n)^{1/m}$$

definierte Zahl unabhängig von der Bruchdarstellung für q ist.AUFGABE 53.3. Sei $b > 0$ eine reelle Zahl. Zeige, dass die durch

$$\sqrt[k]{b} = b^{1/k}$$

definierte Folge gegen 1 konvergiert.

AUFGABE 53.4.*

Es sei b eine positive reelle Zahl. Zeige, dass die Exponentialfunktion

$$f: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}, q \longmapsto b^q,$$

stetig ist.

AUFGABE 53.5.*

Entscheide, ob die reelle Folge

$$x_n = \frac{5n^{\frac{3}{2}} + 4n^{\frac{4}{3}} + n}{7n^{\frac{5}{3}} + 6n^{\frac{3}{2}}}$$

(mit $n \geq 1$) in \mathbb{R} konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

AUFGABE 53.6.*

Entscheide, ob die reelle Folge

$$x_n = \frac{3n^{\frac{5}{4}} - 2n^{\frac{4}{3}} + n}{4n^{\frac{7}{5}} + 5n^{\frac{1}{2}} + 1}$$

(mit $n \geq 1$) in \mathbb{R} konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

AUFGABE 53.7. Es sei

$$f: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine monotone Funktion und es sei

$$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

die dazu in Lemma 53.4 definierte Funktion. Zeige, dass g auf \mathbb{Q} nicht unbedingt mit f übereinstimmen muss.

AUFGABE 53.8. Es sei

$$f: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine monotone Funktion und es sei

$$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

die dazu in Lemma 53.4 definierte Funktion. Zeige, dass g ebenfalls monoton ist.

AUFGABE 53.9. Es sei

$$f: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige monotone Funktion und es sei

$$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

die dazu in Lemma 53.4 definierte Funktion. Zeige, dass g auf \mathbb{Q} mit f übereinstimmt.

AUFGABE 53.10. Es sei b eine positive reelle Zahl. Zeige, dass die Exponentialfunktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto b^x,$$

folgende Eigenschaften besitzt.

- (1) Es ist $b^{x+x'} = b^x \cdot b^{x'}$ für alle $x, x' \in \mathbb{R}$.
- (2) Es ist $b^{-x} = \frac{1}{b^x}$.
- (3) Für $b > 1$ und $x > 0$ ist $b^x > 1$.
- (4) Für $b < 1$ und $x > 0$ ist $b^x < 1$.
- (5) Für $b > 1$ ist f streng wachsend.
- (6) Für $b < 1$ ist f streng fallend.

- (7) Es ist $(b^x)^{x'} = b^{x \cdot x'}$ für alle $x, x' \in \mathbb{R}$.
 (8) Für $a \in \mathbb{R}_+$ ist $(ab)^x = a^x \cdot b^x$.

AUFGABE 53.11.*

Es sei

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion $\neq 0$, die die Gleichung

$$f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ erfüllt. Zeige, dass f eine Exponentialfunktion ist, d.h. dass es ein $b > 0$ mit $f(x) = b^x$ gibt.

AUFGABE 53.12.*

Berechne

$$2^{\frac{9}{10}}$$

bis auf einen Fehler von $\frac{1}{10}$.

AUFGABE 53.13.*

Vergleiche die beiden Zahlen

$$\sqrt{3}^{-\frac{9}{4}} \text{ und } \sqrt{3}^{-\sqrt{5}}.$$

AUFGABE 53.14. Berechne

$$\sqrt{2}^{\sqrt{3}}$$

bis auf einen Fehler von $\frac{1}{10}$.

AUFGABE 53.15. Zeige, dass eine Exponentialfunktion

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+, x \longmapsto b^x,$$

aus einem arithmetischen Mittel ein geometrisches Mittel macht.

AUFGABE 53.16.*

Es sei

$$f(x) = a^x$$

eine Exponentialfunktion mit $a \neq 1$. Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ definiert die Gerade durch die beiden Punkte $(x, f(x))$ und $(x + 1, f(x + 1))$ einen Schnittpunkt mit der x -Achse, den wir mit $s(x)$ bezeichnen. Zeige

$$s(x + 1) = s(x) + 1.$$

Skizziere die Situation.

AUFGABE 53.17. Skizziere die Graphen zu den Funktionen

$$f_k(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

für $n = 2, 3, 4, 5, 6$ auf $[-3, 3]$.

AUFGABE 53.18.*

Ordne die Zahlen

$$\exp(0, 6), \exp(0, 7) \text{ und } 2$$

gemäß ihrer Größe.

AUFGABE 53.19. Wir betrachten die Exponentialreihe

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Zeige, dass die Ableitung von f mit f übereinstimmt. Verwende dabei, dass in diesem Fall die Ableitung einer unendlichen Summe von Polynomen gleich der Summe der einzelnen Ableitungen ist.

AUFGABE 53.20. Man gebe ein Beispiel einer stetigen, streng wachsenden Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

mit $f(0) = 1$ und mit $f(x+1) = 2f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, die von 2^x verschieden ist.

AUFGABE 53.21. Eine Währungsgemeinschaft habe eine Inflation von jährlich 2%. Nach welchem Zeitraum (in Jahren und Tagen) haben sich die Preise verdoppelt?

AUFGABE 53.22. Man bastle einen *Rechenschieber*, der die Multiplikation von positiven reellen Zahlen ausführt.

AUFGABE 53.23. Zeige, dass die Logarithmen zur Basis b die folgenden Rechenregeln erfüllen.

- (1) Es gilt $\log_b(y \cdot z) = \log_b y + \log_b z$.
- (2) Es gilt $\log_b y^u = u \cdot \log_b y$ für $u \in \mathbb{R}$.
- (3) Es gilt

$$\log_a y = \log_a (b^{\log_b y}) = \log_b y \cdot \log_a b.$$

Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 53.24. (3 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für eine stetige, streng wachsende Funktion

$$f: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit der Eigenschaft, dass es keine stetige Funktion

$$g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

gibt, die auf \mathbb{Q} mit f übereinstimmt.

AUFGABE 53.25. (5 Punkte)

Es sei

$$f: (\mathbb{Q}, +, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}_+, \cdot, 1)$$

ein Gruppenhomomorphismus. Zeige, dass f eine Exponentialfunktion ist, d.h. dass es ein reelles $b > 0$ mit $f(x) = b^x$ für alle $x \in \mathbb{Q}$ gibt.

AUFGABE 53.26. (2 Punkte)

Vergleiche

$$5^{-\frac{4}{7}} \text{ und } 5^{-\frac{5}{9}}.$$

AUFGABE 53.27. (4 Punkte)

Berechne

$$3^{\frac{4}{5}}$$

bis auf einen Fehler von $\frac{1}{10}$.

AUFGABE 53.28. (4 Punkte)

Berechne e^3 mit der Exponentialreihe bis auf einen Fehler von $\frac{1}{1000}$.