Prof. Dr. H. Brenner **Osnabrück WS 2015/2016**

Lineare Algebra und analytische Geometrie I

Arbeitsblatt 22

Die Pausenaufgabe

Aufgabe 22.1. Bestimme die Eigenwerte, die Eigenräume und die geometrischen Vielfachheiten zur Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 3 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 3 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Übungsaufgaben

Aufgabe 22.2. Bestimme den Eigenraum und die geometrische Vielfachheit zu -2 zur Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 7 \\ 9 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 22.3.*

Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung. Zeige, dass es maximal $\dim(V)$ viele Eigenwerte zu φ gibt.

Aufgabe 22.4. Man gebe zu einem $a \in K$ und einem m, $1 \leq m \leq n$, eine $n \times n$-Matrix über K an, deren einziger Eigenwert a mit geometrischer Vielfachheit m ist.

Aufgabe 22.5.*

Es sei

$$M \in \mathrm{Mat}_n(K)$$

eine Matrix mit n (paarweise) verschiedenen Eigenwerten. Zeige, dass die Determinante von M das Produkt der Eigenwerte ist.

Aufgabe 22.6. Es sei

$$M \in \mathrm{Mat}_n(K)$$

eine Matrix mit n (paarweise) verschiedenen Eigenwerten. Zeige, dass die Spur von M die Summe der Eigenwerte ist.

Aufgabe 22.7.*

Zeige, dass die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{Q}$ diagonalisierbar ist.

Aufgabe 22.8. Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei

$$\varphi \colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung und $\lambda \in K$. Zeige, dass der Exponent, mit dem $X - \lambda$ im Minimalpolynom zu φ vorkommt, sowohl kleiner als auch größer als die geometrische Vielfachheit von λ sein kann.

Aufgabe 22.9. Zeige, dass die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar ist und bestimme eine Basis aus Eigenvektoren. Führe den Basiswechsel explizit durch, der zu einer beschreibenden Diagonalmatrix führt.

Aufgabe 22.10. Zeige, dass die Matrix

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar ist und bestimme eine Basis aus Eigenvektoren. Führe den Basiswechsel explizit durch, der zu einer beschreibenden Diagonalmatrix führt.

Aufgabe 22.11. Es sei M eine invertierbare Matrix über K. Zeige, dass M genau dann diagonalisierbar ist, wenn die inverse Matrix M^{-1} diagonalisierbar ist.

Aufgabe 22.12. Bestimme, welche Elementarmatrizen diagonalisierbar sind.

Aufgabe 22.13. Zeige, dass eine Projektion diagonalisierbar ist.

Aufgabe 22.14. Es sei $\varphi\colon V \to V$ ein diagonalisierbarer Endomorphismus auf dem endlichdimensionalen K-Vektorraum V und sei $P \in K[X]$ ein Polynom. Zeige, dass $P(\varphi)$ ebenfalls diagonalisierbar ist.

Aufgabe 22.15. Es sei M eine diagonalisierbare Matrix. Zeige, dass das Minimalpolynom von M die Form

$$(X - \lambda_1) \cdots (X - \lambda_k)$$

mit verschiedenen λ_i besitzt.

Die Umkehrung der vorstehenden Aufgabe gilt ebenfalls, siehe Aufgabe 28.2.

Aufgaben zum Abgeben

Aufgabe 22.16. (4 Punkte)

Es seien $V_1, \ldots, V_n$ endlichdimensionale Vektorräume über dem Körper K und

$$\varphi_i\colon V_i \longrightarrow V_i$$

lineare Abbildungen und es sei

$$\varphi = \varphi_1 \times \cdots \times \varphi_n\colon V_1 \times \cdots \times V_n \longrightarrow V_1 \times \cdots \times V_n$$

die Produktabbildung. Zeige, dass φ genau dann diagonalisierbar ist, wenn dies für alle φ_i gilt.

Aufgabe 22.17. (3 Punkte)

Es sei K ein Körper und es sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Es sei

$$\varphi\colon V \longrightarrow V$$

eine lineare Abbildung und

$$\varphi^*\colon V^* \longrightarrow V^*$$

die duale Abbildung. Zeige, dass φ genau dann diagonalisierbar ist, wenn φ^* diagonalisierbar ist.

Aufgabe 22.18. (4 Punkte)

Zeige, dass die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar ist, nicht aber über $\mathbb{R}$. Führe die Diagonalisierung über $\mathbb{C}$ durch.

Aufgabe 22.19. (4 Punkte)

Zeige, dass die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

über dem Körper mit zwei Elementen $\mathbb{F}_2$ nicht diagonalisierbar ist.