

**Lineare Algebra und analytische Geometrie II****Arbeitsblatt 39****Übungsaufgaben**

AUFGABE 39.1. Es sei  $V$  ein  $n$ -dimensionaler reeller Vektorraum und  $\langle -, - \rangle$  eine symmetrische Bilinearform auf  $V$  vom Typ  $(p, q)$ . Zeige, dass

$$p + q \leq n$$

ist.

AUFGABE 39.2. Man gebe ein Beispiel einer symmetrischen Bilinearform, das zeigt, dass der Unterraum maximaler Dimension, auf dem die Einschränkung der Form positiv definit ist, nicht eindeutig bestimmt ist.

AUFGABE 39.3. Auf dem  $\mathbb{R}^2$  sei durch

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1 x_2 - y_1 y_2$$

eine symmetrische Bilinearform gegeben. Bestimme zu jeder Geraden  $G$  durch den Nullpunkt, ob die Einschränkung der Form auf die Gerade positiv definit, negativ definit oder die Nullform ist.

AUFGABE 39.4. Man gebe ein Beispiel für einen endlichdimensionalen reellen Vektorraum  $V$  mit einer symmetrischen Bilinearform  $\langle -, - \rangle$  auf  $V$  und einer Basis  $u_1, \dots, u_n$  von  $V$  derart, dass  $\langle u_i, u_i \rangle > 0$  für alle  $i = 1, \dots, n$  ist, aber  $\langle -, - \rangle$  nicht positiv definit ist.

AUFGABE 39.5. Sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum mit einer symmetrischen Bilinearform  $\langle -, - \rangle$  auf  $V$ . Es sei  $u_1, \dots, u_n$  eine Orthogonalbasis auf  $V$  mit der Eigenschaft  $\langle u_i, u_i \rangle > 0$  für alle  $i = 1, \dots, n$ . Zeige, dass  $\langle -, - \rangle$  positiv definit ist.

AUFGABE 39.6. Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und  $\langle -, - \rangle$  eine symmetrische Bilinearform vom Typ  $(p, q)$ . Zeige, dass die Dimension des Ausartungsraumes gleich

$$n - p - q$$

ist.

AUFGABE 39.7. Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum und  $\langle -, - \rangle$  eine symmetrische Bilinearform auf  $V$ . Zeige, dass die Dimension des Ausartungsraumes nicht mit der maximalen Dimension eines Untervektorraumes übereinstimmen muss, auf dem die eingeschränkte Form die Nullform ist.

AUFGABE 39.8. Es sei  $V$  ein  $n$ -dimensionaler reeller Vektorraum und  $\langle -, - \rangle$  eine symmetrische Bilinearform auf  $V$ . Zeige, dass folgende Eigenschaften äquivalent sind.

- (1) Die Bilinearform ist nicht ausgeartet.
- (2) Die Gramsche Matrix der Bilinearform bezüglich einer Basis ist invertierbar.
- (3) Die Bilinearform ist vom Typ  $(p, n - p)$  (mit einem  $p \in \{1, \dots, n\}$ .)

AUFGABE 39.9. Bestimme den Typ der durch die Gramsche Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$$

gegebenen symmetrischen Bilinearform.

AUFGABE 39.10. Bestimme den Typ der durch die Gramsche Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

gegebenen symmetrischen Bilinearform.

AUFGABE 39.11.\*

Es sei  $V$  ein  $n$ -dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit einer Bilinearform vom Typ  $(p, q)$  und es sei  $U \subseteq V$  ein  $d$ -dimensionaler Untervektorraum. Die Einschränkung der Bilinearform sei vom Typ  $(p', q')$ . Zeige

$$p' \geq d + p - n.$$

AUFGABE 39.12. Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und  $\langle -, - \rangle$  eine symmetrische Bilinearform auf  $V$ . Zeige, dass die Gramsche Matrix zu dieser Bilinearform bezüglich einer geeigneten Basis eine Diagonalmatrix ist, deren Diagonaleinträge 1,  $-1$  oder 0 sind.

AUFGABE 39.13. Es sei  $M$  eine symmetrische reelle  $n \times n$ -Matrix. Zeige, dass es eine invertierbare Matrix  $A$  derart gibt, dass

$$A^{\text{tr}}MA = D$$

eine Diagonalmatrix ist, deren Diagonaleinträge 1,  $-1$  oder 0 sind.

AUFGABE 39.14.\*

Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum mit einer Bilinearform  $\langle -, - \rangle$ . Es sei  $v_1, \dots, v_n$  eine Basis von  $V$  und es sei  $G$  die Gramsche Matrix bezüglich dieser Basis. Es sei

$$\Psi: V \longrightarrow V^*, v \longmapsto (w \mapsto \langle v, w \rangle),$$

die zugehörige lineare Abbildung in den Dualraum  $V^*$  und es sei  $v_1^*, \dots, v_n^*$  die Dualbasis von  $V^*$ . Zeige, dass die beschreibende Matrix von  $\Psi$  bezüglich der beiden Basen die transponierte Matrix von  $G$  ist.

AUFGABE 39.15. Es sei  $K$  ein Körper und es seien  $V$  und  $W$  endlichdimensionale  $K$ -Vektorräume. Zeige, dass durch die Spur

$$\text{Hom}_K(V, W) \times \text{Hom}_K(W, V) \longrightarrow K, (A, B) \longmapsto \text{Spur}(A \circ B),$$

eine vollständige Dualität gestiftet wird, dass also  $\text{Hom}_K(V, W)$  und  $\text{Hom}_K(W, V)$  in natürlicher Weise dual zueinander sind.

### Aufgaben zum Abgeben

AUFGABE 39.16. (2 Punkte)

Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum mit einer symmetrischen Bilinearform  $\langle -, - \rangle$ . Es sei  $M$  die Gramsche Matrix zur Form bezüglich einer gegebenen Basis von  $V$ . Zeige, dass der Eigenraum zum Eigenwert 0 von  $M$ , aufgefasst als lineare Abbildung von  $V$  nach  $V$  bezüglich dieser Basis, gleich dem Ausartungsraum der Form ist.

AUFGABE 39.17. (2 Punkte)

Bestimme den Typ der durch die Gramsche Matrix

$$\begin{pmatrix} 6 & 7 & -1 \\ 7 & 5 & 6 \\ -1 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

gegebenen symmetrischen Bilinearform.

## AUFGABE 39.18. (3 Punkte)

Es sei  $\langle -, - \rangle$  eine nicht-ausgeartete symmetrische Bilinearform vom Typ  $(n - q, q)$  auf einem  $n$ -dimensionalen reellen Vektorraum. Es sei  $v_1, \dots, v_n$  eine Basis von  $V$  und es sei  $G$  die Gramsche Matrix zu  $\langle -, - \rangle$  bezüglich dieser Basis. Zeige, dass das Vorzeichen von  $\det G$  gleich  $(-1)^q$  ist.

## AUFGABE 39.19. (5 Punkte)

Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit einer symmetrischen Bilinearform vom Typ  $(p, q)$  und sei  $a$  die Dimension des Ausartungsraumes der Form. Zeige, dass es einen Untervektorraum  $U \subseteq V$  derart gibt, dass die Einschränkung der Form die Nullform ist und mit

$$\dim(U) = \min(p, q) + a.$$

Zeige ebenfalls, dass es keinen Untervektorraum größerer Dimension gibt, auf dem die Einschränkung die Nullform ist.

## AUFGABE 39.20. (3 Punkte)

Es sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $K$ -Vektorraum mit dem Dualraum  $V^*$ . Zeige, dass die Abbildung

$$V \times V^* \longrightarrow K, (v, f) \longmapsto f(v),$$

eine vollständige Dualität zwischen  $V$  und  $V^*$  stiftet.