

Maß- und Integrationstheorie

Prof. Dr. Holger Brenner
Universität Osnabrück
Fachbereich Mathematik/Informatik

Wintersemester 2022/2023

INHALTSVERZEICHNIS

| | |
|---------------------------------------|----|
| 1. Vorlesung - Mengensysteme | 7 |
| 1.1. Mengensysteme | 8 |
| 1.2. Messbare Abbildungen | 11 |
| 1. Arbeitsblatt | 11 |
| 1.1. Übungsaufgaben | 11 |
| 1.2. Aufgaben zum Abgeben | 15 |
| 2. Vorlesung - Maße | 16 |
| 2.1. Topologische Räume | 16 |
| 2.2. Borel-Mengen | 18 |
| 2.3. Maße und Maßräume | 20 |
| 2.4. Beispiele für diskrete Maße | 21 |
| 2. Arbeitsblatt | 22 |
| 2.1. Übungsaufgaben | 22 |
| 2.2. Aufgaben zum Abgeben | 26 |
| 3. Vorlesung - Eindeutigkeitssatz | 27 |
| 3.1. Gittermaße | 27 |
| 3.2. Ausschöpfungseigenschaften | 27 |
| 3.3. Der Eindeutigkeitssatz für Maße | 30 |
| 3.4. Bildmaße | 31 |
| 3.5. Produkt von topologischen Räumen | 33 |
| 3. Arbeitsblatt | 34 |
| 3.1. Übungsaufgaben | 34 |
| 3.2. Aufgaben zum Abgeben | 38 |
| 4. Vorlesung - Existenzsatz | 39 |
| 4.1. Fortsetzung von äußeren Maßen | 39 |
| 4.2. Existenzsätze für Maße | 43 |
| 4.3. Produkt-Messräume | 43 |
| 4. Arbeitsblatt | 45 |
| 4.1. Übungsaufgaben | 45 |
| 4.2. Aufgaben zum Abgeben | 47 |
| 5. Vorlesung - Produktmaß | 48 |

| | |
|---|----|
| 5.1. Produkt-Präringe | 48 |
| 5.2. Produktprämaße | 49 |
| 5. Arbeitsblatt | 53 |
| 5.1. Aufwärmaufgaben | 53 |
| 5.2. Aufgaben zum Abgeben | 56 |
| 6. Vorlesung - Borel-Lebesgue-Maß | 57 |
| 6.1. Das Borel-Lebesgue-Maß auf \mathbb{R} . | 57 |
| 6.2. Das Borel-Lebesgue-Maß auf \mathbb{R}^n . | 58 |
| 6.3. Die Translationsinvarianz des Borel-Lebesgue-Maßes | 59 |
| 6. Arbeitsblatt | 62 |
| 6.1. Aufwärmaufgaben | 62 |
| 6.2. Aufgaben zum Abgeben | 65 |
| 7. Vorlesung - Determinante | 66 |
| 7.1. Das Verhalten von Maßen bei linearen Abbildungen | 66 |
| 7.2. Volumina in euklidischen Räumen | 70 |
| 7. Arbeitsblatt | 72 |
| 7.1. Aufwärmaufgaben | 72 |
| 7.2. Aufgaben zum Abgeben | 74 |
| 8. Vorlesung - Messbare Funktionen | 76 |
| 8.1. Messbare numerische Funktionen | 76 |
| 8.2. Einfache Funktionen | 80 |
| 8. Arbeitsblatt | 81 |
| 8.1. Aufwärmaufgaben | 81 |
| 8.2. Aufgaben zum Abgeben | 83 |
| 9. Vorlesung - Integrierbare Funktionen | 84 |
| 9.1. Integrierbare Funktionen | 84 |
| 9.2. Die Tschebyschow-Abschätzung | 88 |
| 9.3. Bildmaße und allgemeine Transformationsformel | 89 |
| 9. Arbeitsblatt | 90 |
| 9.1. Aufwärmaufgaben | 91 |
| 9.2. Aufgaben zum Abgeben | 93 |
| 10. Vorlesung - Konvergenzsätze | 94 |
| 10.1. Ausschöpfungseigenschaften | 94 |

| | |
|--|-----|
| 10.2. Lebesgue-Integral und Riemann-Integral | 95 |
| 10.3. Linearität des Integrals | 96 |
| 10.4. Weitere Konvergenzsätze | 97 |
| 10. Arbeitsblatt | 99 |
| 10.1. Aufwärmaufgaben | 99 |
| 10.2. Aufgaben zum Abgeben | 102 |
| 11. Vorlesung - Cavalieri-Prinzip | 103 |
| 11.1. Parameterabhängige Integrale | 103 |
| 11.2. Das Cavalieri-Prinzip | 106 |
| 11. Arbeitsblatt | 110 |
| 11.1. Aufwärmaufgaben | 110 |
| 11.2. Aufgaben zum Abgeben | 113 |
| 12. Vorlesung - Satz von Fubini | 114 |
| 12.1. Einige Volumina | 115 |
| 12.2. Der Satz von Fubini | 119 |
| 12. Arbeitsblatt | 122 |
| 12.1. Aufwärmaufgaben | 122 |
| 12.2. Aufgaben zum Abgeben | 125 |
| 13. Vorlesung - Folgerungen | 125 |
| 13.1. Folgerungen aus dem Satz von Fubini | 125 |
| 13.2. Dichten | 126 |
| 13.3. Nullmengen unter differenzierbaren Abbildungen | 127 |
| 13.4. Die Transformationsformel für Quader | 128 |
| 13. Arbeitsblatt | 130 |
| 13.1. Aufwärmaufgaben | 130 |
| 13.2. Aufgaben zum Abgeben | 133 |
| 14. Vorlesung - Transformationsformel | 135 |
| 14.1. Die Transformationsformel für Integrale | 135 |
| 14.2. Beispiele zur Transformationsformel | 138 |
| 14. Arbeitsblatt | 141 |
| 14.1. Aufwärmaufgaben | 141 |
| 14.2. Aufgaben zum Abgeben | 143 |
| 15. Vorlesung - Normierte Räume | 144 |

| | |
|--|-----|
| 15.1. Halbmetriken | 145 |
| 15.2. Vektorräume mit Halbnormen | 146 |
| 15.3. Separable Räume | 149 |
| 15. Arbeitsblatt | 150 |
| 15.1. Übungsaufgaben | 150 |
| 15.2. Aufgaben zum Abgeben | 153 |
| 16. Vorlesung - Lebesgueräume | 153 |
| 16.1. p -Integrierbarkeit | 153 |
| 16. Arbeitsblatt | 159 |
| 16.1. Übungsaufgaben | 159 |
| 16.2. Aufgaben zum Abgeben | 160 |
| 17. Vorlesung - Kompaktheit | 161 |
| 17.1. Kompaktheit | 161 |
| 17.2. Stetige Abbildungen auf kompakten Räumen | 163 |
| 17.3. Kompakte metrische Räume | 164 |
| 17. Arbeitsblatt | 165 |
| 17.1. Aufgaben zum Abgeben | 168 |
| 17.2. Die Aufgabe zum Aufgeben | 168 |
| 18. Vorlesung - Approximationssatz von Stone-Weierstrass | 169 |
| 18.1. Der Satz von Arzelà-Ascoli | 169 |
| 18.2. Der Approximationssatz von Stone-Weierstrass | 172 |
| 18. Arbeitsblatt | 174 |
| 18.1. Übungsaufgaben | 174 |
| 18.2. Aufgaben zum Abgeben | 176 |
| 19. Vorlesung - Summierbarkeit (Die Vorlesung wurde nicht durchgeführt.) | 177 |
| 20. Vorlesung - Approximation in Lebesgueräumen(Die Vorlesung wurde nicht durchgeführt.) | 177 |
| 21. Vorlesung - Hilberträume | 177 |
| 21.1. Hilberträume | 177 |
| 21.2. Minimaler Abstand | 178 |
| 21.3. Topologische Eigenschaften | 181 |
| 21. Arbeitsblatt | 183 |

| | |
|---|-----|
| 21.1. Übungsaufgaben | 183 |
| 21.2. Aufgaben zum Abgeben | 186 |
| 22. Vorlesung - Orthonormalsysteme | 187 |
| 22.1. Orthonormalsysteme | 187 |
| 22.2. Vollständige Orthonormalsysteme | 192 |
| 22. Arbeitsblatt | 194 |
| 22.1. Übungsaufgaben | 194 |
| 22.2. Aufgaben zum Abgeben | 196 |
| 23. Vorlesung - Fourierreihen | 197 |
| 23.1. Fourierreihen | 197 |
| 23.2. Bernoulli-Polynome | 202 |
| 23. Arbeitsblatt | 205 |
| 23.1. Übungsaufgaben | 205 |
| 23.2. Aufgaben zum Abgeben | 209 |
| 24. Vorlesung - Legendre- und Tschebyschow-Polynome | 210 |
| 24.1. Legendre-Polynome | 210 |
| 24.2. Tschebyschow-Polynome | 212 |
| 24. Arbeitsblatt | 216 |
| 24.1. Übungsaufgaben | 216 |
| 24.2. Aufgaben zum Abgeben | 218 |
| Abbildungsverzeichnis | 219 |

1. VORLESUNG - MENGENSYSTEME

In diesem Kurs beschäftigen wir uns mit dem „Flächeninhalt“ von ebenen Gebilden und den Volumina von räumlichen Gebilden. Für ein Rechteck setzt man den Inhalt als Produkt der beiden Seiten und für einen Quader als Produkt von Breite, Länge und Höhe an. Die durch den Graphen einer stetigen Funktion, die x -Achse und zwei dazu senkrechte Geraden eingeschlossene Fläche wird über das Riemann-Integral ein Inhalt zugeordnet. Die Berechnung der Flächeninhalte von Dreiecken, Parallelogrammen, des Kreises, der Volumina von Pyramiden, Kegeln und der Kugel sind klassische Themen der Mathematik. Eine intuitive Vorstellung, die die Existenz eines sinnvollen Volumenbegriffs nahelegt, ist, dass wenn man den Körper „wasserdicht“ in eine Flüssigkeit in einem quaderförmigen Becken ganz untertaucht, dass dann das Volumen sich als Grundfläche des Beckens mal gestiegenem Wasserstand errechnet. Für Flächen kann man sich vorstellen, dass man die ebenen Figuren ausmalt und der Flächeninhalt proportional zur verwendeten Farbe sein muss, die ihrerseits wiederum proportional zum Höhengswund im Farbeimer ist. Doch das sind nur Gedankenexperimente, die einen sinnvollen Maßbegriff erahnen lassen, keinesfalls zufriedenstellende Begründungen.



Wir werden im Folgenden die *Maßtheorie* einschließlich der Integrationstheorie entwickeln. Dabei werden insbesondere folgende Fragestellungen betrachten.

- Was ist ein Maß (eine Länge, ein Flächeninhalt, ein Volumen)?
- Welchen Mengen kann man ein Maß zuordnen? Allen Teilmengen des \mathbb{R}^2 ?
- Welches Volumen hat der \mathbb{R}^n ?
- Welche Rechenregeln gelten für das Volumen?
- Welche Möglichkeiten gibt es, Volumina zu berechnen?

Die ersten beiden Fragen erweisen sich schon dann als nicht trivial, wenn man ein Rechteck betrachtet. Macht es beispielsweise einen Unterschied, ob man ein Rechteck mit oder ohne den Rand betrachtet? Ändert sich der Inhalt, wenn ich einen Punkt aus dem Inneren herausnehme? Besitzt das „rationale Rechteck“, das nur aus den Punkten des Rechtecks mit rationalen Koordinaten besteht, einen sinnvollen Flächeninhalt? Wie sieht es mit dem „irrationalen Rechteck“ aus? Ist die Summe dieser beiden Flächeninhalte, vorausgesetzt, dass sie existieren, gleich dem Rechtecksinhalt?

1.1. Mengensysteme.

Es ist nicht möglich, für beliebige Teilmengen des \mathbb{R}^n ein sinnvolles Maß zu definieren. Stattdessen sucht man nach einer möglichst großen Auswahl von Teilmengen, für die ein Maß definiert werden kann. Um über solche Mengensysteme und ihre strukturellen Eigenschaften reden zu können, brauchen wir die folgenden Definitionen.

Definition 1.1. Zu einer Menge M heißt eine Teilmenge $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{P}(M)$ der Potenzmenge ein (Teil)-*Mengensystem* auf M .

Definition 1.2. Ein Teilmengensystem \mathcal{A} auf einer Menge M heißt *Mengen-Präring*, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind.

- (1) Es ist $\emptyset \in \mathcal{A}$.
- (2) Mit $S, T \in \mathcal{A}$ gehört auch $S \setminus T$ zu \mathcal{A} .
- (3) Für je zwei Mengen $S, T \in \mathcal{A}$ ist auch $S \cup T \in \mathcal{A}$.

Definition 1.3. Ein Teilmengensystem \mathcal{A} auf einer Menge M heißt *Mengen-Algebra*, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind.

- (1) Es ist $M \in \mathcal{A}$.
- (2) Mit $T \in \mathcal{A}$ gehört auch das Komplement $M \setminus T$ zu \mathcal{A} .
- (3) Für je zwei Mengen $S, T \in \mathcal{A}$ ist auch $S \cup T \in \mathcal{A}$.

Statt Mengenalgebra sagt man auch *Mengenring*, doch ist das missverständlich, da auch die Mengen-Präringe manchmal Mengenringe genannt werden.

Beispiel 1.4. Es sei M eine Menge und \mathcal{C} das Mengensystem auf M , das aus allen endlichen Teilmengen von M und deren Komplementen besteht. Dann ist \mathcal{C} eine Mengenalgebra. Die ganze Menge ist das Komplement der leeren Menge und gehört somit dazu. Das System ist nach Definition unter Komplementbildung abgeschlossen. Die Vereinigung zweier endlicher Teilmengen ist wieder endlich, und die Vereinigung einer Menge, deren Komplement endlich ist, mit einer weiteren Menge (egal, ob sie zu dem System gehört oder nicht) besitzt ebenfalls diese Eigenschaft.

Für die Maßtheorie ist das folgende Konzept am wichtigsten.

Definition 1.5. Ein Teilmengensystem \mathcal{A} auf einer Menge M heißt *σ -Algebra*, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind.

- (1) Es ist $M \in \mathcal{A}$.
- (2) Mit $T \in \mathcal{A}$ gehört auch das Komplement $M \setminus T$ zu \mathcal{A} .
- (3) Für jede abzählbare Familie $T_i \in \mathcal{A}$, $i \in I$, ist auch

$$\bigcup_{i \in I} T_i \in \mathcal{A}.$$

Eine σ -Algebra ist also eine Mengenalgebra, die nicht nur unter endlichen Vereinigungen, sondern auch unter abzählbaren Vereinigungen abgeschlossen

ist. Sie ist im Allgemeinen nicht unter beliebigen Vereinigungen abgeschlossen. Die trivialen Beispiele für eine σ -Algebra sind die Potenzmenge und das Mengensystem $\{\emptyset, M\}$. Die Elemente aus der σ -Algebra, also die Teilmengen von M , die zu \mathcal{A} gehören, nennt man auch einfach *messbare Mengen*. Im Rahmen der Wahrscheinlichkeitstheorie spricht man von *Ereignissen*. Zu einer Teilmenge $A \subseteq M$ heißt die aus $\emptyset, A, M \setminus A, M$ bestehende σ -Algebra die *Ereignisalgebra* zu A .

Definition 1.6. Eine Menge M , auf der eine σ -Algebra \mathcal{A} erklärt ist, heißt ein *Messraum*.

Lemma 1.7. *Es sei \mathcal{A} eine σ -Algebra auf einer Menge M . Dann gelten folgende Aussagen.*

- (1) *Es ist $\emptyset \in \mathcal{A}$.*
- (2) *Mit $S, T \in \mathcal{A}$ gehört auch $T \setminus S$ zu \mathcal{A} .*
- (3) *Für jede abzählbare Familie $T_i \in \mathcal{A}$, $i \in I$, ist auch*

$$\bigcap_{i \in I} T_i \in \mathcal{A}.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 1.11. □

Bemerkung 1.8. Es sei (M, \mathcal{A}) ein Messraum und es sei A_n , $n \in \mathbb{N}$, eine Folge von messbaren Teilmengen. Dann sind auch die Mengen

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{k \geq n} A_k \right)$$

und

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcap_{k \geq n} A_k \right)$$

messbar, da in beiden Fällen die inneren Mengen messbar sind und damit auch die Gesamtmenge messbar ist. Die erste Menge nennt man auch den *Limes superior* und die zweite den *Limes inferior* der Mengenfølge. Die erste Menge besteht dabei aus allen Elementen aus M , die in unendlich vielen der A_n enthalten sind, und die zweite Menge aus allen Elementen aus M , die in fast allen der A_n enthalten sind.

Lemma 1.9. *Es sei M eine Menge und sei \mathcal{A}_j , $j \in J$, eine beliebige Familie von σ -Algebren auf M . Dann ist auch der Durchschnitt*

$$\mathcal{A} = \bigcap_{j \in J} \mathcal{A}_j$$

eine σ -Algebra auf M .

Beweis. Siehe Aufgabe 1.16. □

Aufgrund dieses Lemmas gibt es zu jeder Teilmenge $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{P}(M)$ eine kleinste σ -Algebra, die \mathcal{E} umfasst, nämlich der Durchschnitt über alle \mathcal{E} -umfassenden σ -Algebren.

Definition 1.10. Es sei M eine Menge und $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{P}(M)$ eine Menge von Teilmengen aus M . Dann nennt man die kleinste σ -Algebra, die \mathcal{E} enthält, die von \mathcal{E} erzeugte σ -Algebra. Sie wird mit $\sigma(\mathcal{E})$ bezeichnet. Das System \mathcal{E} heißt *Erzeugendensystem* dieser σ -Algebra.

Eine explizite Beschreibung dieser Mengen ist häufig schwierig. Bei $\mathcal{E} = \{A\}$ ist $\sigma(\mathcal{E})$ die oben erwähnte Ereignisalgebra.

Die folgenden Mengensysteme spielen in Beweisen eine wichtige Rolle.

Definition 1.11. Ein Teilmengensystem \mathcal{A} auf einer Menge M heißt *Dynkin-System*, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind.

- (1) Es ist $M \in \mathcal{A}$.
- (2) Mit $S, T \in \mathcal{A}$ und $S \subseteq T$ gehört auch $T \setminus S$ zu \mathcal{A} .
- (3) Für jede abzählbare Familie $T_i \in \mathcal{A}$, $i \in I$, mit paarweise disjunkten Mengen T_i ist auch

$$\bigcup_{i \in I} T_i \in \mathcal{A}.$$

Lemma 1.12. *Es sei M eine Menge. Für ein Mengensystem \mathcal{A} auf M sind äquivalent.*

- (1) \mathcal{A} ist ein durchschnittsstabiles Dynkin-System
- (2) \mathcal{A} ist eine σ -Algebra.

Beweis. Siehe Aufgabe 1.20. □

Da der Durchschnitt von Dynkin-Systemen wieder ein Dynkin-System ist, gibt es zu jedem Mengensystem ein davon erzeugtes Dynkin-System.

Lemma 1.13. *Es sei M eine Menge und \mathcal{E} ein durchschnittsstabiles Mengensystem auf M . Dann stimmt das von \mathcal{E} erzeugte Dynkin-System mit der von \mathcal{E} erzeugten σ -Algebra überein.*

Beweis. Wir müssen zeigen, dass das von \mathcal{E} erzeugte Dynkin-System \mathcal{D} eine σ -Algebra ist. Dazu genügt es aufgrund von Lemma 1.12 zu zeigen, dass \mathcal{D} durchschnittsstabil ist. Zu einer Teilmenge $T \subseteq M$ mit $T \in \mathcal{D}$ betrachten wir das Mengensystem

$$\mathcal{D}_T = \{S \in \mathcal{D} \mid T \cap S \in \mathcal{D}\}.$$

Wir müssen

$$\mathcal{D}_T = \mathcal{D}$$

zeigen, denn dies bedeutet die Durchschnittsstabilität. Eine direkte Überlegung zeigt, dass \mathcal{D}_T ebenfalls ein Dynkin-System ist. Für $E \in \mathcal{E}$ gilt

$\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}_E$, da \mathcal{E} durchschnittsstabil ist. Daher ist $\mathcal{D}_E = \mathcal{D}$ für alle $E \in \mathcal{E}$. Dann ist aber auch $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}_T$ für alle $T \in \mathcal{D}$ und somit generell $\mathcal{D}_T = \mathcal{D}$. \square

1.2. Messbare Abbildungen.

Definition 1.14. Es seien (M, \mathcal{A}) und (N, \mathcal{B}) Messräume. Eine Abbildung

$$\varphi: M \longrightarrow N$$

heißt *messbar* (oder genauer *\mathcal{A} - \mathcal{B} -messbar*), wenn für alle $T \in \mathcal{B}$ das Urbild $\varphi^{-1}(T)$ zu \mathcal{A} gehört.

Lemma 1.15. *Für messbare Abbildungen gelten die folgenden Eigenschaften.*

- (1) *Die Hintereinanderschaltung von messbaren Abbildungen ist messbar.*
- (2) *Jede konstante Abbildung ist messbar.*
- (3) *Die Identität ist messbar.*
- (4) *Es seien \mathcal{A} und \mathcal{B} zwei σ -Algebren auf einer Menge M . Dann ist die Identität auf M genau dann \mathcal{A} - \mathcal{B} -messbar, wenn $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{B}$ gilt.*

Beweis. Siehe Aufgabe 1.21. \square

Lemma 1.16. *Es seien (M, \mathcal{A}) und (N, \mathcal{B}) zwei Messräume und es sei*

$$\varphi: M \longrightarrow N$$

eine Abbildung. Es sei \mathcal{E} ein Erzeugendensystem für \mathcal{B} . Dann ist φ bereits dann messbar, wenn für jede Teilmenge $T \subseteq N$ mit $T \in \mathcal{E}$ das Urbild $\varphi^{-1}(T)$ zu \mathcal{A} gehört.

Beweis. Wir betrachten das Mengensystem

$$\mathcal{C} = \{T \subseteq N \mid \varphi^{-1}(T) \in \mathcal{A}\}.$$

Da das Urbildnehmen mit sämtlichen Mengenoperationen verträglich ist, ist \mathcal{C} eine σ -Algebra auf N . Da diese das Erzeugendensystem \mathcal{E} umfasst, ist $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$. \square

1. ARBEITSBLATT

1.1. Übungsaufgaben.

Aufgabe 1.1. Von welchen ebenen Figuren und räumlichen Gebilden kennen Sie den Flächeninhalt bzw. das Volumen?

Aufgabe 1.2. Was ist das Volumen (der Inhalt, das Maß) eines einzelnen Punktes im \mathbb{R}^0 , im \mathbb{R}^1 , im \mathbb{R}^2 u.s.w.?

Aufgabe 1.3. Es sei M eine Menge und \mathcal{C} das Mengensystem auf M , das aus allen endlichen Teilmengen von M besteht. Zeige, dass \mathcal{C} ein Mengen-Präring ist.

Aufgabe 1.4.*

Es sei M eine Menge und \mathcal{C} das Mengensystem auf M , das aus allen endlichen Teilmengen von M und deren Komplementen besteht. Zeige, dass \mathcal{C} eine Mengenalgebra ist.

Aufgabe 1.5. Zeige, dass eine Mengenalgebra insbesondere ein Mengen-Präring ist.

Aufgabe 1.6. Es sei M eine Menge. Zeige, dass die Potenzmenge $\mathfrak{P}(M)$ mit dem Durchschnitt \cap als Multiplikation und der symmetrischen Differenz

$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

als Addition (mit welchen neutralen Elementen?) ein kommutativer Ring ist.

Aufgabe 1.7. Es sei M eine Menge und sei $\mathcal{P} \subseteq \mathfrak{P}(M)$ ein Mengensystem. Zeige, dass \mathcal{P} genau dann ein Mengen-Präring ist, wenn es die drei Bedingungen

- (1) $\emptyset \in \mathcal{P}$.
- (2) Mit $A, B \in \mathcal{P}$ ist auch $A\Delta B \in \mathcal{P}$.
- (3) Mit $A, B \in \mathcal{P}$ ist auch $A \cap B \in \mathcal{P}$

erfüllt.

Aufgabe 1.8. Es sei M eine Menge und \mathcal{R} ein Mengensystem auf M . Zeige, dass \mathcal{R} genau dann eine Mengenalgebra ist, wenn es ein Unterring des Potenzmengenringes $(\mathfrak{P}(M), \Delta, \cap)$ ist.

Aufgabe 1.9. Es sei M eine Menge und es bezeichne $A\Delta B$ die symmetrische Differenz für Mengen $A, B \subseteq M$. Zeige die folgenden Aussagen.

(1)

$$A \setminus B = (A\Delta B) \cap A.$$

(2)

$$A \cup B = A\Delta B\Delta(A \cap B).$$

Aufgabe 1.10. Es sei M eine Menge und es bezeichne $A \Delta B$ die symmetrische Differenz für Mengen $A, B \subseteq M$. Zeige, dass $A_1 \Delta A_2 \Delta \cdots \Delta A_n$ genau aus den Elementen besteht, die in einer ungeraden Anzahl der A_i enthalten sind.

Aufgabe 1.11. Es sei \mathcal{A} eine σ -Algebra auf einer Menge M . Zeige, dass die folgenden Aussagen gelten.

- (1) Es ist $\emptyset \in \mathcal{A}$.
- (2) Mit $S, T \in \mathcal{A}$ gehört auch $T \setminus S$ zu \mathcal{A} .
- (3) Für jede abzählbare Familie $T_i \in \mathcal{A}$, $i \in I$, ist auch

$$\bigcap_{i \in I} T_i \in \mathcal{A}.$$

Aufgabe 1.12. Es sei \mathcal{A} das Mengensystem auf \mathbb{N} , das aus allen Teilmengen $T \subseteq \mathbb{N}$ besteht, die durch einen mathematischen Ausdruck beschreibbar sind. Zeige, dass \mathcal{A} eine Mengenalgebra, aber keine σ -Algebra ist.

Aufgabe 1.13. Es sei A_n , $n \in \mathbb{N}$, eine Folge von Teilmengen in einer Menge M mit

$$A_{n+1} \subseteq A_n$$

für alle n . Bestimme den Limes inferior und den Limes superior der Familie in diesem Fall.

Aufgabe 1.14.*

Es sei $\epsilon > 0$ fixiert und sei

$$A_q =]q - \epsilon, q + \epsilon[$$

die ϵ -Umgebung von q . Bestimme den Limes inferior und den Limes superior dieser (abzählbaren) Familie.

Aufgabe 1.15. Es seien

$$A_k = \{x \in [0, 1[\mid \text{die } k\text{-te Nachkommastelle von } x \text{ in der Dezimalentwicklung ist } 0\}.$$

Bestimme den Limes inferior und den Limes superior von dieser Mengenfolge.

Aufgabe 1.16. Es sei M eine Menge und sei $\mathcal{A}_j, j \in J$, eine beliebige Familie von σ -Algebren auf M . Zeige, dass der Durchschnitt

$$\mathcal{A} = \bigcap_{j \in J} \mathcal{A}_j$$

ebenfalls eine σ -Algebra auf M ist.

Aufgabe 1.17. Es sei (M, \mathcal{A}) ein Messraum und $N \subseteq M$ eine Teilmenge. Zeige, dass das Mengensystem

$$N \cap T, T \in \mathcal{A},$$

eine σ -Algebra auf N ist (man spricht von der *induzierten σ -Algebra*).

Aufgabe 1.18. Es sei M eine Menge und $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}'$ seien Mengensysteme. Dabei sei \mathcal{E}' in der von \mathcal{E} erzeugten σ -Algebra $\sigma(\mathcal{E})$ enthalten. Zeige

$$\sigma(\mathcal{E}) = \sigma(\mathcal{E}').$$

Aufgabe 1.19. Es sei M eine endliche Menge mit einer geraden Anzahl. Es sei \mathcal{G} das Mengensystem, das aus allen Teilmengen von M besteht, die eine gerade Anzahl besitzen. Zeige, dass \mathcal{G} ein Dynkin-System ist und dass \mathcal{G} im Allgemeinen nicht durchschnittsstabil ist.

Aufgabe 1.20.*

Es sei M eine Menge und \mathcal{A} ein Mengensystem auf M . Zeige, dass \mathcal{A} genau dann ein durchschnittsstabiles Dynkin-System ist, wenn \mathcal{A} eine σ -Algebra ist.

Aufgabe 1.21. Zeige, dass messbare Abbildungen zwischen Messräumen die folgenden Eigenschaften erfüllen.

- (1) Die Hintereinanderschaltung von messbaren Abbildungen ist messbar.
- (2) Jede konstante Abbildung ist messbar.
- (3) Die Identität ist messbar.
- (4) Es seien \mathcal{A} und \mathcal{B} zwei σ -Algebren auf einer Menge M . Dann ist die Identität auf M genau dann $\mathcal{A} - \mathcal{B}$ -messbar, wenn $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{B}$ gilt.

Aufgabe 1.22. Es sei (M, \mathcal{A}) ein Messraum und es sei \mathbb{Z} mit der ganzen Potenzmenge als σ -Algebra versehen. Es sei $T \subseteq M$. Zeige, dass T genau dann messbar ist, wenn die Indikatorfunktion

$$e_T: M \rightarrow \mathbb{Z}$$

messbar ist.

1.2. Aufgaben zum Abgeben.

Aufgabe 1.23. (3 Punkte)

Es sei M eine Menge und \mathcal{A} das Mengensystem auf M , das aus allen abzählbaren Teilmengen von M und deren Komplementen besteht. Zeige, dass \mathcal{A} eine σ -Algebra ist.

Aufgabe 1.24. (4 Punkte)

Es sei M eine n -elementige Menge und sei k ein Teiler von n . Zeige, dass die Menge der Teilmengen von M , deren Elementanzahl ein Vielfaches von k ist, ein Dynkin-System bilden, das bei $k \neq 1, n$ keine Mengen-Algebra ist.

Aufgabe 1.25. (4 Punkte)

Es seien M und N Mengen und es sei

$$F: M \longrightarrow N$$

eine Abbildung.

a) Es sei \mathcal{A} eine σ -Algebra auf M . Zeige, dass das Mengensystem

$$\{T \subseteq N \mid F^{-1}(T) \in \mathcal{A}\}$$

eine σ -Algebra auf N ist.

b) Es sei \mathcal{B} eine σ -Algebra auf N . Zeige, dass das Mengensystem

$$\{F^{-1}(T) \mid T \in \mathcal{B}\}$$

eine σ -Algebra auf M ist.

Aufgabe 1.26. (4 Punkte)

Es sei (M, \mathcal{A}) ein Messraum und es sei $M = \bigsqcup_{i \in I} M_i$ eine Zerlegung von M in abzählbar viele messbare Teilmengen. Es sei

$$\varphi: M \longrightarrow N$$

eine Abbildung in einen weiteren Messraum (N, \mathcal{B}) . Zeige, dass φ genau dann messbar ist, wenn sämtliche Einschränkungen

$$\varphi_i = \varphi|_{M_i}: M_i \longrightarrow N$$

messbar sind.

2. VORLESUNG - MASSE

Wir beschäftigen uns weiter mit der Frage, welchen Teilmengen des \mathbb{R}^n man ein sinnvolles Volumen zuordnen kann. Es wird sich herausstellen, dass diese „messbaren Mengen“ eine σ -Algebra bilden, nämlich die σ -Algebra der *Borel-Mengen*. Diese ist zwar sehr groß, und zwar gehören nahezu alle irgendwie „kohärent beschreibbaren“ Teilmengen dazu, aber eben doch nicht alle. Die Borel-Mengen explizit zu beschreiben, ist nicht möglich, stattdessen gibt man ein einfaches Erzeugendensystem für diese σ -Algebra an, nämlich die Menge aller offenen Teilmengen des euklidischen Raumes. Es empfiehlt sich, diese Konstruktion sofort für topologische Räume durchzuführen.

2.1. Topologische Räume.

Die Menge der offenen Teilmengen des \mathbb{R}^n , oder allgemeiner eines metrischen Raumes, bilden ein Mengensystem, das eine Topologie im Sinne der folgenden Definition ist.

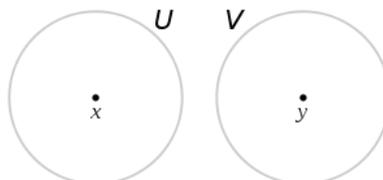
Definition 2.1. Es sei X eine Menge. Eine Familie \mathcal{T} von Teilmengen von X heißt *Topologie* auf X , wenn die folgenden Axiome erfüllt sind:

- (1) Es ist $\emptyset \in \mathcal{T}$ und $X \in \mathcal{T}$.
- (2) Sind $U \in \mathcal{T}$ und $V \in \mathcal{T}$, so ist auch $U \cap V \in \mathcal{T}$.
- (3) Ist I eine Indexmenge und $U_i \in \mathcal{T}$ für alle $i \in I$, so ist auch $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$.

Ein *topologischer Raum* ist ein Paar (X, \mathcal{T}) , wobei X eine Menge und \mathcal{T} eine Topologie auf X ist.

Die Teilmengen von X , die zu \mathcal{T} gehören, heißen *offene Mengen*. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ heißt *abgeschlossen*, wenn ihr Komplement offen ist, also zur Topologie gehört.

Definition 2.2. Ein topologischer Raum X heißt *hausdorffsch*, wenn es zu je zwei verschiedenen Punkten $x, y \in X$ offene Mengen U und V mit $x \in U$, $y \in V$ und mit $U \cap V = \emptyset$ gibt.



Definition 2.3. Es sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum. Ein System \mathcal{C} von offenen Mengen in X heißt *Basis der Topologie*, wenn man jede offene Menge in \mathcal{T} als Vereinigung von offenen Mengen aus \mathcal{C} erhalten kann.

In einem metrischen Raum bilden die offenen Bälle eine Basis der Topologie.

Definition 2.4. Es sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum. Man sagt, dass X eine *abzählbare Basis* besitzt, wenn es eine Basis der Topologie gibt, die nur aus abzählbar vielen offenen Mengen besteht.

Im \mathbb{R}^n gibt es überabzählbar viele offene Mengen, es gibt aber eine abzählbare Basis, nämlich alle offenen Bälle $U(P, r)$, deren Mittelpunktskoordinaten und deren Radien rationale Zahlen sind, siehe Aufgabe 2.23.

Definition 2.5. Eine Abbildung

$$\varphi: X \longrightarrow Y$$

zwischen topologischen Räumen X und Y heißt *stetig*, wenn Urbilder von offenen Mengen wieder offen sind.

Diese Definition stimmt wegen Lemma 34.3 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)) mit der Definition für metrische Räume überein.

Definition 2.6. Zwei topologische Räume X und Y heißen *homöomorph*, wenn es eine bijektive stetige Abbildung

$$\varphi: X \longrightarrow Y$$

gibt, deren Umkehrabbildung φ^{-1} ebenfalls stetig ist.

Beispielsweise ist nach Aufgabe 34.29 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)) das offene Einheitsideal $]0, 1[$ homöomorph zu \mathbb{R} , aber nach Aufgabe 34.18 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)) nicht homöomorph zum abgeschlossenen Einheitsintervall $[0, 1]$. Eine stetige bijektive Abbildung mit stetiger Umkehrabbildung nennt man *Homöomorphie*.

Definition 2.7. Es sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$ eine Teilmenge. Folgende Vorschrift definiert eine Topologie \mathcal{T}_Y auf Y

Für eine Teilmenge

$U \subseteq Y$ gilt $U \in \mathcal{T}_Y$ genau dann, wenn es eine in X offene Menge $V \in \mathcal{T}$ gibt, so dass $V \cap Y = U$ gilt.

Es lässt sich leicht nachweisen, dass \mathcal{T}_Y eine Topologie ist. Sie heißt *Unterraumtopologie* (oder *induzierte Topologie*), und der topologische Raum (Y, \mathcal{T}_Y) heißt ein *Unterraum* von (X, \mathcal{T}) .

2.2. Borel-Mengen.

Definition 2.8. Es sei (M, \mathcal{T}) ein topologischer Raum. Dann nennt man die von \mathcal{T} erzeugte σ -Algebra die *Menge der Borel-Mengen* von M .

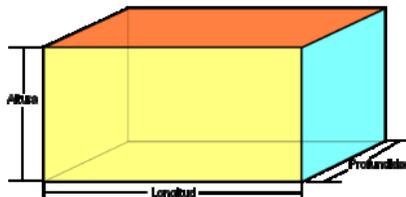
Insbesondere nennt man im \mathbb{R}^n die durch die Topologie zur euklidischen Metrik definierte σ -Algebra die *Menge der Borel-Mengen*. Dies ist ein extrem reichhaltiger Begriff; es ist nämlich gar nicht einfach, eine Teilmenge des \mathbb{R}^n anzugeben, die keine Borel-Menge ist. Da es auf jedem endlichdimensionalen Vektorraum V zwar keine natürliche Metrik, aber doch nach Lemma 37.1 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)) eine natürliche Topologie gibt, gibt es auf diesen Räumen ein wohldefiniertes Konzept von Borel-Mengen.

Lemma 2.9. *Die folgenden Teilmengen des \mathbb{R}^n sind Borel-Mengen.*

- (1) *Alle offenen Teilmengen des \mathbb{R}^n .*
- (2) *Alle abgeschlossenen Teilmengen des \mathbb{R}^n .*
- (3) *Alle abzählbaren Teilmengen des \mathbb{R}^n .*
- (4) *Alle abgeschlossenen Kugeln $B(x, \epsilon)$ und alle offenen Kugeln $U(x, \epsilon)$.*
- (5) *Alle abgeschlossenen Quader $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ und alle offenen Quader $]a_1, b_1[\times \cdots \times]a_n, b_n[$.*

Beweis. (1) folgt aus der Definition der Borel-Mengen. (2) folgt aus (1), da eine σ -Algebra mit einer Menge auch stets deren Komplement enthält, und die abgeschlossenen Mengen die Komplemente der offenen Mengen sind. (3). Einpunktige Mengen im \mathbb{R}^n sind abgeschlossen und daher Borel-Mengen. Damit ist auch jede abzählbare Punktmenge als eine abzählbare Vereinigung von einpunktigen Teilmengen eine Borel-Menge. (4) und (5) sind Spezialfälle von (1) und (2). \square

Wie gesagt, Borel-Mengen sind ein recht umfassender Begriff. Andererseits wird die σ -Algebra der Borel-Mengen bereits durch die Menge aller Quader erzeugt, also durch diejenigen Teilmengen, für die unmittelbar ein sinnvoller Volumenbegriff existiert.



Lemma 2.10. *Die Menge der Borel-Mengen im \mathbb{R}^n stimmt mit der von der Menge aller offenen Quader erzeugten σ -Algebra überein. Dabei kann man*

sich sogar auf die Menge der offenen achsenparallelen Quader mit rationalen Eckpunkten beschränken.

Beweis. Wir beweisen den Zusatz. Es genügt zu zeigen, dass jede offene Menge im \mathbb{R}^n sich als eine abzählbare Vereinigung von achsenparallelen offenen Quadern mit rationalen Eckpunkten schreiben lässt. Da die Menge der rationalen Zahlen abzählbar ist, ist auch die Menge aller Quader mit rationalen Ecken abzählbar. Wir müssen daher nur zeigen, dass jede offene Menge eine Vereinigung von offenen achsenparallelen Quadern mit rationalen Ecken ist. Es sei dazu $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sei $x \in U$ ein Punkt. Daher gibt es ein $\epsilon > 0$, das wir rational wählen können, mit

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in U(x, \epsilon) \subseteq U.$$

Jede Koordinate x_i ist eine reelle Zahl, und damit der Limes einer Folge von rationalen Zahlen. Sei

$$y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{Q}^n$$

mit

$$d(x_i, y_i) < \frac{\epsilon}{3n}.$$

für alle $i = 1, \dots, n$. Damit ist einerseits

$$x \in Q =]y_1 - \frac{\epsilon}{3n}, y_1 + \frac{\epsilon}{3n}[\times \dots \times]y_n - \frac{\epsilon}{3n}, y_n + \frac{\epsilon}{3n}[$$

und andererseits gilt für $z \in Q$ die Beziehung

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} < \epsilon,$$

also $z \in U(x, \epsilon)$. Damit ist $x \in Q \subseteq U(x, \epsilon) \subseteq U$. Die Vereinigung dieser so konstruierten Quader ist genau U . \square

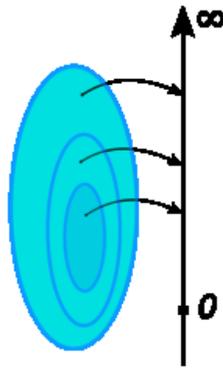
Lemma 2.11. *Es seien X und Y topologische Räume, die wir als Messräume mit den zugehörigen σ -Algebren der Borelmengen auffassen. Dann ist jede stetige Abbildung*

$$\varphi: X \longrightarrow Y$$

messbar.

Beweis. Nach Definition bedeutet die Stetigkeit, dass das Urbild $\varphi^{-1}(V)$ von jeder offenen Menge $V \subseteq Y$ offen in X ist. Nach Definition ist das Mengensystem der offenen Mengen einer Topologie ein Erzeugendensystem für die Algebra der Borelmengen. Nach Lemma 1.16 ist somit φ messbar. \square

2.3. Maße und Maßräume.



In der Praxis gibt man einen Flächeninhalt in Quadratmeter m^2 und ein Volumen in Kubikmeter m^3 an. Diese Einheiten legen die Skala fest, auf der dann mit nichtnegativen reellen Zahlen gemessen wird. Als Wertemenge für ein Maß bieten sich demnach die nichtnegativen reellen Zahlen an. Besitzt der Gesamttraum \mathbb{R}^3 ein Volumen? Sicherlich keines, das durch eine reelle Zahl ausgedrückt werden könnte. Daher erlaubt man bei einem Maß auch den Wert ∞ , und setzt

$$\overline{\mathbb{R}}_{\geq} = \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\} \text{ und } \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}.$$

Das bedeutet nicht, dass wir die reellen Zahlen ändern, sondern dass wir im maßtheoretischen Kontext mit einer bestimmten Mengenerweiterung der reellen Zahlen arbeiten. Einen Teil der Rechenoperationen dehnen wir auf die zusätzlichen Symbole aus, aber nicht alles, wobei man sich von der maßtheoretischen Zweckmäßigkeit leiten lässt. Die Ordnungsrelation wird durch

$$-\infty < r < \infty$$

für jede reelle Zahl r ausgedehnt. Wir setzen

$$r + \infty = \infty \text{ und } r - \infty = -\infty$$

für $r \in \mathbb{R}$. Der Ausdruck $\infty + (-\infty)$ ist nicht definiert. Für positive reelle Zahlen r ist $r \cdot \infty = \infty$, und wir setzen $0 \cdot \infty = 0$.

Definition 2.12. Es sei M eine Menge und \mathcal{P} ein Mengen-Präring auf M . Dann heißt eine Abbildung

$$\mu: \mathcal{P} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}, T \longmapsto \mu(T),$$

ein *Prämaß* auf M , wenn folgende Bedingung erfüllt ist.

Für jede abzählbare Familie von paarweise disjunkten Teilmengen T_i , $i \in I$, aus \mathcal{P} , für die $\bigcup_{i \in I} T_i$ ebenfalls zu \mathcal{P} gehört, gilt

$$\mu\left(\bigcup_{i \in I} T_i\right) = \sum_{i \in I} \mu(T_i).$$

Wenn man die leere Indexmenge betrachtet, so folgt aus der Definition die Eigenschaft $\mu(\emptyset) = 0$, da die leere Summe als 0 angesetzt wird. Wenn man diese Interpretation zu spitzfindig findet, so muss man diese Eigenschaft explizit fordern.

Definition 2.13. Es sei M eine Menge und \mathcal{A} eine σ -Algebra auf M . Ein Prämaß auf M nennt man ein *Maß*.

Ein Maß unterscheidet sich also von einem Prämaß nicht durch die strukturellen Eigenschaften, sondern lediglich durch Eigenschaften des Definitionsbereiches. Letztlich ist man an Maßen interessiert, doch Prämaße sind für deren Konstruktion wichtige Zwischenschritte.

Definition 2.14. Eine Menge M , auf der eine σ -Algebra \mathcal{A} und ein Maß

$$\mu: \mathcal{A} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}, T \longmapsto \mu(T),$$

erklärt ist, heißt ein *Maßraum*. Man schreibt dafür kurz (M, \mathcal{A}, μ) .

Mit der folgenden Definition ist die Wahrscheinlichkeitstheorie ein Spezialfall der Maßtheorie.

Definition 2.15. Ein *Wahrscheinlichkeitsraum* ist ein Maßraum (M, \mathcal{A}, μ) mit $\mu(M) = 1$.

2.4. Beispiele für diskrete Maße.

Wir besprechen kurz einige „diskrete Maße“. Das für uns wichtigste Maß, das *Borel-Lebesgue-Maß* auf dem \mathbb{R}^n , ist kein diskretes Maß, sondern ein „stetiges Maß“.

Beispiel 2.16. Es sei M eine Menge und es sei

$$b: M \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, x \longmapsto b_x,$$

eine Funktion, die wir *Belegungsfunktion* nennen.¹ Dann wird für jede Teilmenge $T \subseteq M$ durch die Zuordnung

$$\beta(T) := \sum_{x \in T} b_x$$

ein Maß auf $(M, \mathfrak{P}(M))$ definiert. Dabei ist die Summe als der Grenzwert zu interpretieren, falls die Familie b_x , $x \in T$, summierbar ist, und andernfalls als ∞ . Dass es sich dabei um ein Maß handelt folgt aus dem großen Umordnungssatz, und zwar gilt die Summationseigenschaft sogar für beliebige

¹Manchmal erlaubt man auch den Wert ∞ für eine Belegungsfunktion.

disjunkte Vereinigungen, nicht nur für abzählbare. Man spricht von einem *Summationsmaß*.

Wenn die Belegungsfunktion für jedes x einen positiven Wert annimmt, so folgt aus Aufgabe 17.26 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)), dass das Maß jeder überabzählbaren Menge den Wert ∞ zuweist. Wenn andererseits die Belegungsfunktion für jedes x den Wert 0 annimmt, so liegt das *Nullmaß* vor, d.h. jede Menge hat das Maß 0. Insbesondere kann man über diesen Weg kein Maß auf \mathbb{R} gewinnen, das zugleich dem Einheitsintervall den Wert 1 und jedem einzelnen Punkt das gleiche Maß zuweist.

Von diesen *Summationsmaßen* bekommen wiederum einige einen eigenen Namen.

Definition 2.17. Auf einer Menge M nennt man das auf $(M, \mathfrak{P}(M))$ durch

$$z(T) = \begin{cases} \#(T), & \text{falls } T \text{ endlich,} \\ \infty & \text{sonst,} \end{cases}$$

definierte Maß das *Zählmaß* auf M .

Das Zählmaß ist das Summationsmaß zur konstanten Belegungsfunktion $b = 1$.

Definition 2.18. Es sei M eine Menge und $x \in M$ ein Punkt. Das auf $(M, \mathfrak{P}(M))$ durch

$$\delta_x(T) = \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in T, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

definierte Maß heißt das im Punkt x konzentrierte *Dirac-Maß* auf M .

2. ARBEITSBLATT

2.1. Übungsaufgaben.

Aufgabe 2.1. Es sei (M, d) ein metrischer Raum. Zeige, dass in M die sogenannte *Hausdorff-Eigenschaft* gilt, d.h. zu je zwei verschiedenen Punkten x und y gibt es offene Mengen U und V mit

$$x \in U \text{ und } y \in V \text{ und } U \cap V = \emptyset.$$

Aufgabe 2.2.*

Zeige, dass in einem Hausdorff-Raum X jeder Punkt $x \in X$ abgeschlossen ist.

Wir verallgemeinern einige Konzepte von metrischen Räumen auf topologische Räume.

Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in einem topologischen Raum X . Man sagt, dass die Folge gegen $x \in X$ *konvergiert*, wenn folgende Eigenschaft erfüllt ist.

Zu jeder offenen Umgebung $U \subseteq X$ von x gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n \geq n_0$ die Folgenglieder x_n zu U gehören.

In diesem Fall heißt x der *Grenzwert* oder der *Limes* der Folge. Dafür schreibt man auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

Wenn die Folge einen Grenzwert besitzt, so sagt man auch, dass sie *konvergiert* (ohne Bezug auf einen Grenzwert), andernfalls, dass sie *divergiert*.

Aufgabe 2.3. Es sei (M, d) ein metrischer Raum und sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in M . Zeige, dass die Folge in M genau dann im Sinne der Metrik konvergiert, wenn sie im Sinne der Topologie konvergiert.

Aufgabe 2.4. Zeige, dass eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in einem Hausdorffraum X höchstens einen Grenzwert besitzt.

Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in einem topologischen Raum X . Ein Punkt $x \in X$ heißt *Häufungspunkt* der Folge, wenn in jeder offenen Umgebung U von x unendlich viele Folgenglieder x_n liegen.

Aufgabe 2.5. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in einem topologischen Raum X und sei $x \in X$. Es gebe eine gegen x konvergente Teilfolge. Zeige, dass x ein Häufungspunkt der Folge ist.

Eine Teilmenge $T \subseteq X$ eines topologischen Raumes X heißt *dicht*, wenn für jede nichtleere offene Menge $U \subseteq X$ die Beziehung $T \cap U \neq \emptyset$ gilt.

Es wurde bereits in Aufgabe 35.7 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)) gezeigt, dass dieses Konzept mit der Dichtheit in einem metrischen Raum übereinstimmt.

Aufgabe 2.6. Man beschreibe einen topologischen Raum, der aus zwei Punkten besteht, wobei der eine Punkt dicht und der andere Punkt nicht dicht sei.

Aufgabe 2.7. Es sei X ein topologischer Raum mit einer abzählbaren Basis. Zeige, dass dann auch jeder Unterraum $Y \subseteq X$ mit der induzierten Topologie eine abzählbare Basis besitzt.

Aufgabe 2.8. Es sei X ein topologischer Raum mit einer abzählbaren Basis. Zeige, dass es zu jeder Überdeckung $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ mit offenen Mengen U_i eine abzählbare Teilüberdeckung gibt.

Aufgabe 2.9. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in einem topologischen Raum X , der eine abzählbare Basis besitze, und sei $x \in X$. Zeige, dass x genau dann ein Häufungspunkt der Folge ist, wenn es eine gegen x konvergente Teilfolge gibt.

Aufgabe 2.10.*

Es sei (X, \mathcal{T}) ein topologischer Raum und sei \mathcal{A} die davon erzeugte Mengenalgebra. Zeige, dass diese genau aus allen endlichen Vereinigungen

$$(U_1 \cap A_1) \cup (U_2 \cap A_2) \cup \dots \cup (U_n \cap A_n)$$

mit offenen Mengen U_1, \dots, U_n und abgeschlossenen Mengen A_1, \dots, A_n besteht.

Aufgabe 2.11. Es sei

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine messbare Funktion. Zeige, dass die Menge der Punkte, in denen f stetig ist, weder offen noch abgeschlossen sein muss.

Aufgabe 2.12. Es sei

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine messbare Funktion. Zeige, dass die Menge der Punkte, in denen f stetig ist, eine messbare Teilmenge von \mathbb{R} ist.

Aufgabe 2.13. Es sei (M, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum. Zeige, dass die Menge der Nullmengen von M ein Mengen-Präring ist.

Aufgabe 2.14. Es sei (M, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum. Zeige, dass die Mengen

$$\{T \in \mathcal{A} \mid \mu(T) < \infty\},$$

einen Mengen-Präring, aber im Allgemeinen keine Mengen-Algebra bilden.

Aufgabe 2.15.*

Es sei (X, \mathcal{B}) ein Messraum und μ und ν seien Maße darauf.

a) Ist die durch

$$(\mu + \nu)(T) := \mu(T) + \nu(T)$$

für $T \in \mathcal{B}$ definierte Abbildung ein Maß?

b) Ist die durch

$$(\mu * \nu)(T) := \max(\mu(T), \nu(T))$$

für $T \in \mathcal{B}$ definierte Abbildung ein Maß?

Aufgabe 2.16. Es sei (M, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum und $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Zeige, dass durch

$$\lambda(T) := c\mu(T)$$

ein Maß auf M definiert ist.² Diskutiere insbesondere die Teilmengen mit $\mu(T) = \infty$.

Aufgabe 2.17. Es sei (M, \mathcal{A}) ein Messraum, der als abzählbare disjunkte Vereinigung

$$M = \bigcup_{i \in I} M_i$$

mit $M_i \in \mathcal{A}$ gegeben ist. Es seien $\mu_i, i \in I$, Maße auf $(M_i, \mathcal{A}|_{M_i})$. Zeige, dass es ein eindeutiges Maß μ auf M derart gibt, dass die Einschränkungen von μ auf die $(M_i, \mathcal{A}|_{M_i})$ mit μ_i übereinstimmen.

Aufgabe 2.18. Es sei (M, \mathcal{A}) ein Messraum. Wir nennen ein Maß auf M *explosiv*, wenn es lediglich die Werte 0 und ∞ annimmt.

a) Zeige, dass (für $T \in \mathcal{A}$) durch

$$\gamma(T) = \begin{cases} 0, & \text{falls } T = \emptyset, \\ \infty, & \text{falls } T \neq \emptyset, \end{cases}$$

ein Maß definiert ist.

b) Es sei μ ein Maß auf (M, \mathcal{A}) . Zeige, dass durch

$$\lambda(T) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \mu(T) = 0, \\ \infty, & \text{falls } \mu(T) > 0, \end{cases}$$

ebenfalls ein Maß definiert ist.

Aufgabe 2.19. Bestimme die Belegungsfunktion zu einem Dirac-Maß.

²Dieses Maß nennt man das mit c umskalierte Maß.

Aufgabe 2.20. Man mache sich klar, dass die Maßtheorie auf den natürlichen Zahlen \mathbb{N} „nahezu“ äquivalent ist zur Theorie der Reihen mit nichtnegativen reellen Summanden. Warum nur nahezu? Welches maßtheoretische Konzept korrespondiert dabei zur Konvergenz der Reihe?

Aufgabe 2.21. Der Messraum $(\mathbb{N}_+, \mathfrak{P}(\mathbb{N}_+))$ sei mit dem Maß versehen, bei der die Zahl n den Wert $\mu(n) = \frac{1}{n}$ erhält. Bestimme für möglichst viele Teilmengen $T \subseteq \mathbb{N}_+$ den Wert $\mu(T)$.

2.2. Aufgaben zum Abgeben.

Aufgabe 2.22. (4 Punkte)

Es sei (M, \mathcal{A}) ein Messraum und sei

$$f_n: M \rightarrow \mathbb{R}$$

eine Folge von messbaren Funktionen. Zeige, dass

$$\{x \in M \mid f_n(x) \text{ konvergiert}\}$$

messbar ist.

Aufgabe 2.23. (3 Punkte)

Zeige, dass es eine abzählbare Familie von offenen Bällen im \mathbb{R}^n gibt, die eine Basis der Topologie bilden.

Aufgabe 2.24. (4 Punkte)

Es sei X ein Hausdorff-Raum und es seien $T_1, T_2 \subseteq X$ zwei disjunkte endliche Teilmengen. Zeige, dass es offene Mengen $U_1, U_2 \subseteq X$ mit $T_1 \subseteq U_1, T_2 \subseteq U_2$ und mit $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ gibt.

Aufgabe 2.25. (3 Punkte)

Zeige, dass es auf jedem endlichdimensionalen reellen Vektorraum ein wohldefiniertes Konzept von *Borel-Mengen* gibt.

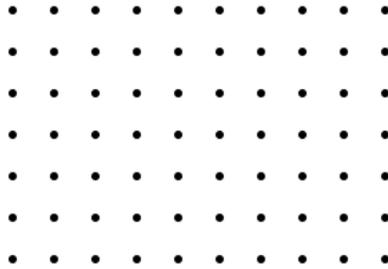
Aufgabe 2.26. (7 Punkte)

Zeige, dass die Menge der stetigen wachsenden Funktionen

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

mit $f(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$, mit $f(\mathbb{R}_{\leq 0}) = 0$ und $f(\mathbb{R}_{\geq 1}) = 1$ überabzählbar ist.

3. VORLESUNG - EINDEUTIGKEITSSATZ



Ein Gittermaß weist nur den Gitterpunkten ein positives Maß zu. Wenn der Gitterabstand hinreichend klein ist, liefert das Gittermaß eine gute Approximation für den Inhalt für Figuren, die nicht allzu kompliziert sind.

3.1. Gittermaße.

Als weiteres diskretes Maß besprechen wir Gittermaße.

Definition 3.1. Es sei $\epsilon > 0$ Die Menge

$$\Gamma_\epsilon = \{\epsilon(a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

nennt man das *Gitter* zum Gitterpunkt Abstand ϵ . Das durch

$$\mu_\epsilon(T) = \epsilon^n \cdot \#(T \cap \Gamma_\epsilon)$$

für $T \subseteq \mathbb{R}^n$ definierte Maß heißt das *Gittermaß* zum Gitterabstand ϵ .



Pointillismus: Der Flächeninhalt (auf dem Bild) der hellgrünen Rasenfläche entspricht in etwa der Anzahl der hellgrünen Farbtupfer, der Anzahl der hellgrünen Pixels und der Anzahl der hellgrünen Synapsen.

3.2. Ausschöpfungseigenschaften.

Definition 3.2. Es sei M eine Menge und sei T_n , $n \in \mathbb{N}$, eine Folge von Teilmengen in M mit $T_n \subseteq T_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es sei $T = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n$. Dann sagt man, dass diese Folge eine *Ausschöpfung* von T bildet (oder T ausschöpft), und schreibt dafür $T_n \uparrow T$.

Der \mathbb{R}^k wird beispielsweise durch die Bälle $B(0, n)$ oder die Würfel $[-n, n]^k$ ausgeschöpft.

Definition 3.3. Es sei M eine Menge und sei $T_n, n \in \mathbb{N}$, eine Folge von Teilmengen in M mit $T_n \supseteq T_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es sei $T = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} T_n$. Dann sagt man, dass diese Folge eine *Schrumpfung* von T bildet (oder gegen T schrumpft), und schreibt dafür $T_n \downarrow T$.

Beispielsweise ist eine reelle Intervallschachtelung eine Schrumpfung, bei der der Durchschnitt über alle beteiligten Mengen nur aus einem einzigen Punkt besteht.

Bei einer σ -Algebra \mathcal{A} gehört mit einer jeden solchen auf- oder absteigenden Folge von Teilmengen T_n auch die Vereinigung bzw. der Durchschnitt zu \mathcal{A} . Bei einem Prämaß auf einen Präring setzen wir, wenn wir von Ausschöpfung bzw. Schrumpfung sprechen, voraus, dass die Vereinigung bzw. der Durchschnitt zum Präring gehören.

Wir fassen einige Rechenregeln für Prämaße zusammen.

Lemma 3.4. *Es sei M eine Menge, \mathcal{P} ein Präring auf M und μ ein Prämaß auf \mathcal{P} . Dann gelten folgende Aussagen.*

- (1) *Es ist $\mu(\emptyset) = 0$.*
- (2) *Für Mengen $S, T \in \mathcal{P}$ mit $S \subseteq T$ gilt $\mu(T) = \mu(S) + \mu(T \setminus S)$. Insbesondere ist ein Prämaß monoton.*
- (3) *Für Mengen $S, T \in \mathcal{P}$ gilt $\mu(T \cup S) = \mu(S) + \mu(T) - \mu(S \cap T)$.*
- (4) *Seien $T_n, n \in \mathbb{N}$, und T aus \mathcal{P} mit $T \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n$ ³. Dann gilt*

$$\mu(T) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(T_n).$$

- (5) *Es sei $T_n \uparrow T$ eine Ausschöpfung in \mathcal{P} . Dann ist*

$$\mu(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(T_n),$$

wobei diese Folge monoton wachsend ist.

- (6) *Es sei $T_n \downarrow T$ eine Schrumpfung in \mathcal{P} und sei $\mu(T_0) < \infty$ vorausgesetzt. Dann ist*

$$\mu(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(T_n),$$

wobei diese Folge monoton fallend ist.

Beweis. (1) ist in der Definition von Prämaß enthalten, da die leere Summe als 0 definiert ist.⁴ (2) folgt direkt aus der Definition, da T die disjunkte Vereinigung aus S und $T \setminus S$ ist. (3) folgt daraus, dass $S \cup T$ die disjunkte

³Man sagt, dass die $T_n, n \in \mathbb{N}$, eine *Überpflasterung* von T bilden.

⁴Man kann auch, sobald es eine messbare Menge T mit endlichem Maß gibt, mittels $\mu(T) = \mu(T \cup \emptyset) = \mu(T) + \mu(\emptyset)$ argumentieren, woraus aus $\mu(T) < \infty$ direkt $\mu(\emptyset) = 0$ folgt.

Vereinigung aus den drei Mengen $S \setminus T$, $T \setminus S$ und $S \cap T$ ist. (4). Wir verwenden den folgenden Standardtrick: Wir schreiben $S_n = T_n \setminus (\bigcup_{i=0}^{n-1} T_i)$. Dann gilt offensichtlich $\bigcup_{i=0}^n T_i = \bigcup_{i=0}^n S_i$ für alle n , wobei die Vereinigungen der S_i jeweils disjunkt sind. Entsprechend Damit gilt

$$\begin{aligned} \mu(T) &= \mu\left(T \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} T_n\right)\right) \\ &= \mu\left(T \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n\right)\right) \\ &= \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} T \cap S_n\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mu(T \cap S_n) \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(S_n) \\ &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(T_n). \end{aligned}$$

(5). Wir schreiben die einzelnen Teilmengen T_n als disjunkte Vereinigung mittels $S_0 = T_0$ und $S_n = T_n \setminus T_{n-1}$. Damit ist

$$T_n = S_0 \cup S_1 \cup \dots \cup S_n,$$

und da dies eine disjunkte Vereinigung ist, gilt $\mu(T_n) = \sum_{i=0}^n \mu(S_i)$. Entsprechend gilt

$$T = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i$$

und daher

$$\mu(T) = \mu\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \mu(S_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=0}^n \mu(S_i)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(T_n).$$

(6) Wir setzen $S_0 = T_0 \setminus T_n$. Da T_n , $n \in \mathbb{N}$, eine absteigende Folge ist, ist S_n , $n \in \mathbb{N}$, eine aufsteigende Folge, und zwar gilt

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (T_0 \setminus T_n) = T_0 \setminus \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} T_n\right) = T_0 \setminus T.$$

Daher gilt

$$\mu(T_0 \setminus T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(T_0 \setminus T_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu(T_0) - \mu(T_n)) = \mu(T_0) - \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(T_n)$$

nach Teil (5). Somit ist (da $\mu(T_0) < \infty$ ist)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(T_n) = \mu(T_0) - \mu(T_0 \setminus T) = \mu(T).$$

□

Definition 3.5. Es sei M eine Menge, \mathcal{P} ein Präring auf M ,

$$\mu: \mathcal{P} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

ein Prämaß auf M . Dann heißt μ *endlich*, wenn

$$\mu(T) < \infty$$

für alle $T \in \mathcal{P}$ ist.

Wenn die Gesamtmenge M zu \mathcal{P} gehört, so ergibt sich die Endlichkeit des Prämaßes sofort aus der Bedingung $\mu(M) < \infty$ aufgrund der Monotonie.

Für die Maßtheorie des euklidischen Raumes ist dieser Begriff zu stark, da ja der \mathbb{R}^n kein endliches Volumen hat. Aber immerhin kann man den \mathbb{R}^n durch die abzählbar vielen Kugeln $B(0, k)$, $k \in \mathbb{N}$, die selbst endliches Volumen haben, ausschöpfen. Diese Eigenschaft wird durch folgende Definition präzisiert.

Definition 3.6. Es sei M eine Menge, \mathcal{P} ein Präring auf M ,

$$\mu: \mathcal{P} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

ein Prämaß auf M . Dann heißt μ *σ -endlich*, wenn man M als eine abzählbare Vereinigung von Teilmengen M_i aus \mathcal{P} mit

$$\mu(M_i) < \infty$$

schreiben kann.

3.3. Der Eindeutigkeitsatz für Maße.

Der folgende Satz ist der *Eindeutigkeitsatz für Maße*. Im Wesentlichen besagt er, dass unter gewissen Bedingungen ein Maß auf einem Erzeugendensystem der σ -Algebra schon eindeutig bestimmt ist.

Satz 3.7. *Es sei (M, \mathcal{A}) ein Messraum und es sei \mathcal{E} ein durchschnittsstabiles Erzeugendensystem für \mathcal{A} . Es seien μ_1 und μ_2 zwei Maße auf (M, \mathcal{A}) , die auf \mathcal{E} übereinstimmen. Es gebe eine Ausschöpfung $M_n \uparrow M$ mit $M_n \in \mathcal{E}$ und mit*

$$\mu_1(M_n) = \mu_2(M_n) < \infty.$$

Dann ist

$$\mu_1 = \mu_2.$$

Beweis. Für jede messbare Menge $T \in \mathcal{A}$ ist $(T \cap M_n) \uparrow T$ eine Ausschöpfung von T , so dass es nach Lemma 3.4 (5) genügt, die Gleichheit

$$\mu_1(T \cap M_n) = \mu_2(T \cap M_n)$$

für alle $T \in \mathcal{A}$ und alle $n \in \mathbb{N}$ zu zeigen. Es sei n fixiert. Wir betrachten das Mengensystem

$$\mathcal{D}_n = \{T \in \mathcal{A} \mid \mu_1(T \cap M_n) = \mu_2(T \cap M_n)\}$$

und wir wollen zeigen, dass dies ganz \mathcal{A} ist. Da \mathcal{E} durchschnittstabil ist, gehört nach Voraussetzung jede Menge $E \in \mathcal{E}$ zu \mathcal{D}_n . Wir behaupten, dass \mathcal{D}_n ein Dynkin-System ist. Offenbar ist $M \in \mathcal{D}_n$. Seien $S \subseteq T$ Teilmengen, die zu \mathcal{D}_n gehören. Dann ist

$$\begin{aligned} \mu_1((T \setminus S) \cap M_n) &= \mu_1((T \cap M_n) \setminus (S \cap M_n)) \\ &= \mu_1(T \cap M_n) - \mu_1(S \cap M_n) \\ &= \mu_2(T \cap M_n) - \mu_2(S \cap M_n) \\ &= \mu_2((T \cap M_n) \setminus (S \cap M_n)) \\ &= \mu_2((T \setminus S) \cap M_n), \end{aligned}$$

so dass auch $T \setminus S$ zu \mathcal{D}_n gehört. Es sei schließlich $T_i, i \in I$, eine abzählbare Familie paarweise disjunkter Teilmengen aus \mathcal{D}_n , und sei

$$T = \bigcup_{i \in I} T_i.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \mu_1(T \cap M_n) &= \mu_1\left(\bigcup_{i \in I} (T_i \cap M_n)\right) \\ &= \sum_{i \in I} \mu_1(T_i \cap M_n) \\ &= \sum_{i \in I} \mu_2(T_i \cap M_n) \\ &= \mu_2\left(\bigcup_{i \in I} (T_i \cap M_n)\right) \\ &= \mu_2(T \cap M_n), \end{aligned}$$

so dass auch T zu \mathcal{D}_n gehört. Damit ist \mathcal{D}_n ein Dynkin-System, das das durchschnittsstabile Erzeugendensystem \mathcal{E} enthält. Nach Lemma 1.13 ist daher $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}_n$, und es gilt Gleichheit. \square

3.4. Bildmaße.

Definition 3.8. Es sei (M, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum, (N, \mathcal{B}) ein Messraum und

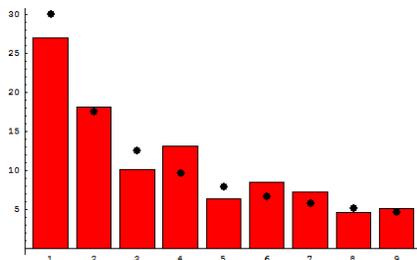
$$\varphi: M \longrightarrow N$$

eine messbare Abbildung. Dann nennt man das durch

$$\nu(T) := \mu(\varphi^{-1}(T))$$

definierte Maß auf N das *Bildmaß* von μ unter φ . Es wird mit $\varphi_*\mu$ bezeichnet.

Das Bildmaß ist in der Tat ein Maß, siehe Aufgabe 3.11.



Die Verteilung der Anfangsziffern der Bevölkerungsgröße der Länder der Erde.

Beispiel 3.9. Es sei

$$\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+, x \longmapsto 10^x,$$

die Exponentialfunktion zur Basis 10 und ν das Bildmaß zum eindimensionalen Borel-Lebesgue-Maß λ^1 (das wir zwar noch nicht eingeführt haben, von dem wir hier aber nur verwenden, dass es einem Intervall die Intervalllänge zuordnet). Für ein Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}_+$ ist

$$\nu([a, b]) = \lambda^1(\varphi^{-1}([a, b])) = \lambda^1([\log_{10}(a), \log_{10}(b)]) = \log_{10}(b) - \log_{10}(a).$$

Insbesondere haben die Intervalle

$$\dots, \left[\frac{1}{100}, \frac{1}{10}\right], \left[\frac{1}{10}, 1\right], [1, 10], [10, 100], [100, 1000], \dots$$

unter ν alle das Maß 1. Das Maß ν ist also „unter Berücksichtigung der Größenordnung gleichverteilt“.

Wenn man zur Menge aller Städte (auf der Erde oder in Deutschland) die Einwohnerzahl nimmt und davon die erste Ziffer, so kann man beobachten, dass die Ziffer 1 deutlich häufiger vorkommt als die Ziffern 2, 3, ... Beispielsweise gibt es in Deutschland relativ viele Städte mit zwischen 100000 und 200000 Einwohnern, aber keine mit zwischen 800000 und 900000 Einwohnern. Diese Beobachtung kann man in sehr vielen verschiedenen Situationen machen, und zwar genügt die erste Ziffer dem sogenannten *Benfordschen Gesetz*. Wenn man davon ausgeht, dass Städte zu unterschiedlichen Zeitpunkten gegründet werden, dass sie exponentiell wachsen (mit einer kleinen Basis), und dass die Verteilung der Stadtgründungen mit der Zeit gleichverteilt ist (in einem endlichen Zeitintervall), so kann man die Stadtgründungen durch λ^1 modellieren und erhält für die Verteilung der Stadtgrößen das Maß ν (bis auf einen Streckungsfaktor mit der Zeit). Es ist dann beispielsweise

$$\nu([1, 2]) = \log_{10}(2) = 0,301\dots$$

und

$$\nu([8, 9]) = \log_{10}(2) = 0,051\dots$$

und entsprechend für die Intervalle $[10, 20]$, $[100, 200]$, etc., was das Benfordsche Gesetz erklärt.

Lemma 3.10. *Es seien (M, \mathcal{A}) , (N, \mathcal{B}) und (S, \mathcal{C}) Messräume und*

$$\varphi: M \longrightarrow N$$

und

$$\psi: N \longrightarrow S$$

messbare Abbildungen. Es sei μ ein Maß auf M . Dann gilt für die Bildmaße

$$(\psi \circ \varphi)_*\mu = \psi_*(\varphi_*\mu).$$

Beweis. Siehe Aufgabe 3.12. □

Definition 3.11. Es seien (M, \mathcal{A}, μ) und (N, \mathcal{B}, ν) Maßräume. Eine messbare Abbildung

$$\varphi: M \longrightarrow N$$

heißt *maßtreu*, wenn für jede messbare Menge $T \subseteq N$ die Beziehung

$$\nu(T) = \mu(\varphi^{-1}(T))$$

gilt.

Eine messbare Abbildung $\varphi: (M, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow (N, \mathcal{B}, \nu)$ ist genau dann maßtreu, wenn ν das Bildmaß von μ unter φ ist.

3.5. Produkt von topologischen Räumen.

Definition 3.12. Unter dem *Produkt der topologischen Räume* X und Y versteht man die Produktmenge $X \times Y$ zusammen mit derjenigen Topologie (genannt *Produkttopologie*), bei der eine Teilmenge $W \subseteq X \times Y$ genau dann offen ist, wenn man sie als Vereinigung von Produktmengen der Form $U \times V$ mit offenen Mengen $U \subseteq X$ und $V \subseteq Y$ schreiben kann.



Eine Zylinderoberfläche ist der Produktraum aus einer Kreislinie und einem Intervall.

3. ARBEITSBLATT

3.1. Übungsaufgaben.

Aufgabe 3.1. Es sei $W = [0, 1]^n$ der halboffene Einheitswürfel im \mathbb{R}^n . Zeige, dass für jedes $k \in \mathbb{N}_+$ und das zugehörige Gittermaß $\mu_{\frac{1}{k}}$ die Beziehung

$$\mu_{\frac{1}{k}}(W) = 1$$

gilt.

Aufgabe 3.2. Wir betrachten die Menge $T = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$, und zu jedem $\epsilon > 0$ das zugehörige Gittermaß μ_ϵ . Zeige, dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_{\frac{1}{k}}(T)$$

existiert, dass aber

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mu_\epsilon(T)$$

nicht existiert.

Aufgabe 3.3.*

Es sei (M, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum und seien $T_i \subseteq M$, $i = 1, \dots, n$, messbare Teilmengen mit $\mu(T_i) < \infty$. Für eine Teilmenge $J \subseteq \{1, \dots, n\}$ sei

$$T_J = \bigcap_{i \in J} T_i.$$

Beweise die Formel

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^n T_i\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \left(\sum_{J \subseteq \{1, \dots, n\}, \#(J)=k} \mu(T_J) \right).$$

Aufgabe 3.4. Es sei

$$f: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

eine streng wachsende Funktion. Zu $k \in \mathbb{N}_+$ betrachten wir die äquidistante Unterteilung des Einheitsintervalls in k gleichlange Teilintervalle und die zugehörige maximale untere Treppenfunktion s_k von f und die zugehörige minimale obere Treppenfunktion t_k . Es seien S_k bzw. T_k die zugehörigen Subgraphen.

a) Zeige, dass im Allgemeinen S_k , $k \in \mathbb{N}_+$, keine Ausschöpfung und T_k , $k \in \mathbb{N}_+$, keine Schrumpfung ist.

b) Zeige, dass S_{2^n} , $n \in \mathbb{N}_+$, eine Ausschöpfung und T_{2^n} , $n \in \mathbb{N}_+$, eine Schrumpfung ist.

- c) Welche Mengen werden in (b) ausgeschöpft bzw. geschrumpft, und wie verhalten sich diese Mengen zum Subgraphen von f ?
- d) Wogegen konvergieren die zugehörigen Folgen von Treppenintegrale?

Aufgabe 3.5. Man zeige durch ein Beispiel, dass die „Schrumpfungsformel“ aus Lemma 3.4 (6) nicht ohne die Endlichkeitsvoraussetzung gilt.

Aufgabe 3.6. Wo geht in den Beweis zu Satz 3.7 die Endlichkeit der M_n ein?

Aufgabe 3.7. Zeige durch ein Beispiel, dass Satz 3.7 ohne die Voraussetzung, dass es eine Ausschöpfung mit endlichem Maß gibt, nicht gilt.

Aufgabe 3.8. Es sei X ein topologischer Raum und $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine Überdeckung aus offenen Mengen, wobei I abzählbar sei. Zeige folgende Aussagen.

- a) Eine Teilmenge $T \subseteq X$ ist genau dann eine Borelmenge, wenn $T \cap U_i$ eine Borelmenge ist für jedes $i \in I$.
- b) Ein σ -endliches Maß μ ist durch die Einschränkungen $\mu_i = \mu|_{U_i}$ eindeutig bestimmt.
- c) Es sei für jedes $i \in I$ ein σ -endliches Maß μ_i auf U_i gegeben. Für jedes Paar $i, j \in I$ sei

$$\mu_i|_{U_i \cap U_j} = \mu_j|_{U_i \cap U_j}.$$

Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes σ -endliches Maß auf X mit $\mu|_{U_i} = \mu_i$.

Aufgabe 3.9. Es sei

$$\beta: \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

eine Belegungsfunktion mit dem zugehörigen Summationsmaß μ . Es sei

$$T = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \beta(x) > 0\}.$$

Zeige, dass μ genau dann σ -endlich ist, wenn T abzählbar ist.

Aufgabe 3.10. Es sei

$$\beta: \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$$

eine Belegungsfunktion mit dem zugehörigen Summationsmaß μ . Für jede konvergente Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{R}^k sei die Bedingung $\sum_{n=0}^{\infty} \beta(x_n) < \infty$ erfüllt. Zeige, dass μ σ -endlich ist.

Aufgabe 3.11. Zeige, dass das Bildmaß eines Maßes unter einer messbaren Abbildung in der Tat ein Maß ist.

Aufgabe 3.12. Es seien (M, \mathcal{A}) , (N, \mathcal{B}) und (S, \mathcal{C}) Messräume und

$$\varphi: M \longrightarrow N$$

und

$$\psi: N \longrightarrow S$$

messbare Abbildungen. Es sei μ ein Maß auf M . Zeige, dass für die Bildmaße die Beziehung

$$(\psi \circ \varphi)_* \mu = \psi_*(\varphi_* \mu)$$

gilt.

Aufgabe 3.13. Es seien M und N Messräume und es sei

$$\varphi: M \longrightarrow N$$

eine messbare Abbildung. Es sei δ_x das im Punkt $x \in M$ konzentrierte Dirac-Maß. Zeige $\varphi_*(\delta_x) = \delta_{\varphi(x)}$.

Aufgabe 3.14. Es seien M und N Messräume und es sei

$$\varphi: M \longrightarrow N$$

eine messbare Abbildung. Es sei

$$\beta: M \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$$

eine Belegungsfunktion mit dem zugehörigen Summationsmaß μ . Zeige, dass das Bildmaß $\varphi_* \mu$ ebenfalls ein Summationsmaß ist und bestimme die zugehörige Belegungsfunktion.

Aufgabe 3.15.*

Es sei

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$$

der obere Einheitskreis und

$$p: M \longrightarrow [-1, 1], (x, y) \longmapsto x,$$

die Projektion auf die x -Achse. Zu $n \in \mathbb{N}$ seien $n+1$ Punkte auf M gleichverteilt in dem Sinne, dass $(1, 0)$ und $(-1, 0)$ dazugehören und dass der Winkel zwischen zwei benachbarten Punkten konstant ist.

a) Skizziere die Situation für $n = 7$ einschließlich der Bildpunkte unter p .

b) Es sei μ_n das Zählmaß auf M , bei dem jeder Punkt der Verteilung den Wert 1 erhält und es sei

$$\nu_n = p_* \mu_n$$

das zugehörige Bildmaß auf $[-1, 1]$. Man gebe eine Formel für

$$\nu_n([t, 1])$$

($t \in [-1, 1]$) mit Hilfe des Arkuskosinus an.

c) Bestimme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \nu_n\left(\left[1 - \frac{2}{n}, 1\right]\right).$$

Aufgabe 3.16. Es seien X und Y topologische Räume. Zeige, dass die Produkttopologie auf $X \times Y$ die kleinste Topologie ist, bezüglich der die beiden Projektionen $X \times Y \rightarrow X$ und $X \times Y \rightarrow Y$ stetig sind.

Aufgabe 3.17.*

Es sei X ein Hausdorff-Raum. Zeige, dass die Diagonale

$$\Delta = \{(x, y) \in X \times X \mid x = y\}$$

eine abgeschlossene Teilmenge im Produktraum $X \times X$ ist.

Aufgabe 3.18. Es seien X, Y, Z topologische Räume und

$$f: X \longrightarrow Y$$

und

$$g: X \longrightarrow Z$$

stetige Abbildungen. Zeige, dass die Abbildung

$$(f, g): X \longrightarrow Y \times Z, x \longmapsto (f(x), g(x)),$$

ebenfalls stetig ist.

Es sei M eine Menge. Unter der *diskreten Topologie* auf M versteht man diejenige Topologie, bei der jede Teilmenge $T \subseteq M$ offen ist.

Aufgabe 3.19. Es seien X und Y diskrete topologische Räume. Zeige, dass auch der Produktraum diskret ist.

3.2. Aufgaben zum Abgeben.

Aufgabe 3.20. (2 Punkte)

Bestimme die Belegungsfunktion zum Gittermaß zum Gitterabstand $\epsilon > 0$ im \mathbb{R}^n .

Eine *Äquivalenzrelation* auf einer Menge M ist eine Relation $R \subseteq M \times M$, die die folgenden drei Eigenschaften besitzt (für beliebige $x, y, z \in M$).

- (1) Es ist $x \sim x$ (*reflexiv*).
- (2) Aus $x \sim y$ folgt $y \sim x$ (*symmetrisch*).
- (3) Aus $x \sim y$ und $y \sim z$ folgt $x \sim z$ (*transitiv*).

Dabei bedeutet $x \sim y$, dass das Paar (x, y) zu R gehört.

Aufgabe 3.21. (3 Punkte)

Es sei (M, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum, (N, \mathcal{B}) ein Messraum und C die Menge der messbaren Abbildungen von M nach N . Für $f, g \in C$ sei

$$f \sim g, \text{ falls } \mu(\{x \in M \mid f(x) \neq g(x)\}) = 0$$

(dabei sei vorausgesetzt, dass diese Mengen messbar seien). Zeige, dass \sim eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 3.22. (6 Punkte)

Wir betrachten die abgeschlossene Kreisscheibe

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Zeige, dass

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mu_\epsilon(S) = \pi,$$

wobei μ_ϵ das Gittermaß zu $\epsilon > 0$ bezeichnet.

(Man denke an das Riemann-Integral.)

Aufgabe 3.23. (3 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für einen σ -endlichen Maßraum (M, \mathcal{A}, μ) und eine messbare Abbildung

$$\varphi: M \longrightarrow N$$

in einen Messraum N derart, dass das Bildmaß $\varphi_*\mu$ nicht σ -endlich ist.

Aufgabe 3.24. (4 Punkte)

Es seien (M_1, d_1) und (M_2, d_2) metrische Räume. Zeige, dass auf der Produktmenge $M_1 \times M_2$ durch

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \sqrt{d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2}$$

eine Metrik gegeben ist, und dass die dadurch definierte Topologie mit der Produkttopologie übereinstimmt.

4. VORLESUNG - EXISTENZSATZ

Es ist eine naheliegende Idee, den Flächeninhalt einer beliebigen Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}^2$ als das Infimum über alle Summen von Rechtecksinhalten anzusetzen, die die Menge überdecken (oder überpflastern). So geht man auch beim Riemannsches Integral vor, wenn man Oberintegrale betrachtet. Mit diesem Ansatz kann man jeder Teilmenge eine Zahl zuordnen, dies ist aber kein Maß. Wichtig sind vielmehr diejenigen Teilmengen, auf denen diese Festlegung zu einem Maß führt.

4.1. Fortsetzung von äußeren Maßen.



Constantin Carathéodory (1873-1950). Auf ihn geht der Fortsetzungssatz für Maße zurück.

Definition 4.1. Es sei M eine Menge und \mathcal{P} ein Präring auf M . Dann heißt eine Abbildung

$$\mu: \mathcal{P} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}, T \longmapsto \mu(T),$$

ein *äußeres Maß* auf M , wenn folgende Bedingungen erfüllt sind.

- (1) Für je zwei Mengen $S, T \in \mathcal{P}$ mit $S \subseteq T$ gilt $\mu(S) \leq \mu(T)$.

- (2) Für jede abzählbare Familie von paarweise disjunkten Teilmengen T_i , $i \in I$, aus \mathcal{P} , für die $\bigcup_{i \in I} T_i$ ebenfalls zu \mathcal{P} gehört, gilt

$$\mu\left(\bigcup_{i \in I} T_i\right) \leq \sum_{i \in I} \mu(T_i).$$

Die sogenannte σ -Subadditivitätseigenschaft, die für ein äußeres Maß für disjunkte Vereinigungen gefordert wird, gilt auch für beliebige abzählbare Vereinigungen, siehe Aufgabe 4.1.

Definition 4.2. Es sei M eine Menge, \mathcal{P} ein Präring auf M und

$$\mu: \mathcal{P} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

ein äußeres Maß auf M . Für eine beliebige Teilmenge $T \subseteq M$ definiert man

$$\tilde{\mu}(T) := \inf \left(\sum_{i \in I} \mu(T_i), T \subseteq \bigcup_{i \in I} T_i, T_i \in \mathcal{P}, I \text{ abzählbar} \right)$$

und nennt dies die *Fortsetzung des äußeren Maßes* μ .

Bei dieser Definition nimmt man also das Infimum über alle Überpflasterungen.

Lemma 4.3. Es sei M eine Menge, \mathcal{P} ein Präring auf M und

$$\mu: \mathcal{P} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

ein äußeres Maß auf M . Dann ist die Fortsetzung $\tilde{\mu}$ des äußeren Maßes μ ein äußeres Maß auf der Potenzmenge $\mathfrak{P}(M)$, das auf \mathcal{P} mit μ übereinstimmt.

Beweis. Es sei $T \in \mathfrak{P}(M)$. Das Mengensystem $\{T_i\}$ ist natürlich eine Überpflasterung von T , so dass $\mu(T)$ in der Menge vorkommt, über die das Infimum genommen wird. Für jede Überpflasterung T_i , $i \in I$, von T gilt $T = \bigcup_{i \in I} T \cap T_i$ und somit

$$\mu(T) \leq \sum_{i \in I} \mu(T \cap T_i) \leq \sum_{i \in I} \mu(T_i),$$

so dass $\mu(T) = \tilde{\mu}(T)$ gilt. Für beliebige Teilmengen $S \subseteq T$ gilt trivialerweise $\tilde{\mu}(S) \leq \tilde{\mu}(T)$, da eine Überpflasterung von T insbesondere eine Überpflasterung von S ist. Es sei nun T_i , $i \in I$, eine abzählbare Familie von Teilmengen von M . Wir müssen $\tilde{\mu}(\bigcup_{i \in I} T_i) \leq \sum_{i \in I} \tilde{\mu}(T_i)$ nachweisen. Wenn der rechte Ausdruck gleich ∞ ist, so ist nichts zu zeigen. Wir können also voraussetzen, dass die rechte Familie summierbar ist. Die Summanden dieser Familie sind jeweils das Infimum über Summen, die jeweils zu Überpflasterungen gehören. Nehmen wir an, dass die linke Seite größer als die rechte Seite sei, wobei die Differenz größer als $\epsilon > 0$ sei. Sei $\epsilon_i > 0$, $i \in I$, so gewählt, dass $\sum_{i \in I} \epsilon_i \leq \epsilon$ ist; eine solche Familie gibt es aufgrund der Abzählbarkeit von I , siehe Aufgabe 9.24 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)). Zu jedem $i \in I$ gibt es eine

Überpflasterung $T_i \subseteq \bigcup_{j \in J_i} T_{ij}$ mit einer abzählbaren Indexmenge J_i , mit $T_{ij} \in \mathcal{P}$ und mit

$$\tilde{\mu}(T_i) \leq \sum_{j \in J_i} \mu(T_{ij}) \leq \tilde{\mu}(T_i) + \epsilon_i.$$

Die Menge $L = \bigcup_{i \in I} J_i$ ist als abzählbare Vereinigung abzählbarer Mengen wieder abzählbar. Wir betrachten nun die durch T_ℓ , $\ell \in L$, (mit $\ell = (i, j)$) gegebene Überpflasterung von $\bigcup_{i \in I} T_i$. Damit gelten unter Verwendung des großen Umordnungssatzes die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}\left(\bigcup_{i \in I} T_i\right) &\leq \sum_{\ell \in L} \mu(T_\ell) \\ &= \sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in J_i} \mu(T_{ij}) \right) \\ &\leq \sum_{i \in I} (\tilde{\mu}(T_i) + \epsilon_i) \\ &= \sum_{i \in I} \tilde{\mu}(T_i) + \sum_{i \in I} \epsilon_i \\ &\leq \sum_{i \in I} \tilde{\mu}(T_i) + \epsilon, \end{aligned}$$

ein Widerspruch. □

Es ist keineswegs so, dass die Fortsetzung eines Prämaßes auf der Potenzmenge ein Maß liefert. Dies gilt allerdings auf der von dem Präring erzeugten σ -Algebra, was wir im Folgenden nach einigen Vorbereitungen beweisen werden. Zunächst führen wir den folgenden technischen Hilfsbegriff ein.

Definition 4.4. Es sei M eine Menge, \mathcal{P} ein Präring auf M ,

$$\mu: \mathcal{P} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

ein äußeres Maß auf M und $\tilde{\mu}$ die Fortsetzung von μ auf die Potenzmenge $\mathfrak{P}(M)$. Man sagt, dass eine Teilmenge $Z \subseteq M$ die *Zerlegungseigenschaft* besitzt, wenn für alle $S \subseteq M$ die Gleichheit $\tilde{\mu}(S) = \tilde{\mu}(S \cap Z) + \tilde{\mu}(S \cap (M \setminus Z))$ gilt.

Eine Teilmenge Z besitzt also die Zerlegungseigenschaft, wenn man für jede Menge S die Berechnung ihres äußeren Maßes auf die durch Z gegebene Zerlegung von S zurückführen kann. Die schwächere Eigenschaft $\tilde{\mu}(S) \leq \tilde{\mu}(S \cap Z) + \tilde{\mu}(S \cap (M \setminus Z))$ gilt für jede Teilmenge $Z \subseteq M$, siehe Aufgabe 4.2.

Lemma 4.5. *Es sei M eine Menge, \mathcal{P} ein Präring auf M ,*

$$\mu: \mathcal{P} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

ein äußeres Maß auf M und $\tilde{\mu}$ die Fortsetzung von μ auf die Potenzmenge $\mathfrak{P}(M)$. Dann gelten folgende Aussagen.

- (1) Das Mengensystem aller Teilmengen $Z \subseteq M$, die die Zerlegungseigenschaft besitzen, bilden eine σ -Algebra.
 (2) Die Einschränkung von $\tilde{\mu}$ auf diese σ -Algebra ist ein Maß.

Beweis. (1). Sei

$$\mathcal{Z} = \{Z \subseteq M \mid Z \text{ besitzt die Zerlegungseigenschaft}\}.$$

Offensichtlich gehört M zu \mathcal{Z} und dieses System ist abgeschlossen unter Komplementbildung. Bevor wir zeigen können, dass \mathcal{Z} unter abzählbaren Vereinigungen abgeschlossen ist, zeigen wir, dass dies für endliche Vereinigungen gilt. Es seien also Z_1 und Z_2 aus \mathcal{Z} und sei $S \subseteq M$ eine beliebige Teilmenge. Dann ist

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}(S) &= \tilde{\mu}(S \cap Z_1) + \tilde{\mu}(S \cap (M \setminus Z_1)) \\ &= \tilde{\mu}(S \cap Z_1) + \tilde{\mu}(S \cap (M \setminus Z_1) \cap Z_2) + \tilde{\mu}(S \cap (M \setminus Z_1) \cap (M \setminus Z_2)) \\ &= \tilde{\mu}(S \cap Z_1) + \tilde{\mu}(S \cap (Z_2 \setminus Z_1)) + \tilde{\mu}(S \cap (M \setminus (Z_1 \cup Z_2))) \\ &= \tilde{\mu}(S \cap (Z_1 \cup Z_2) \cap Z_1) + \tilde{\mu}(S \cap (Z_1 \cup Z_2) \cap (M \setminus Z_1)) + \tilde{\mu}(S \cap (M \setminus (Z_1 \cup Z_2))) \\ &= \tilde{\mu}(S \cap (Z_1 \cup Z_2)) + \tilde{\mu}(S \cap (M \setminus (Z_1 \cup Z_2))). \end{aligned}$$

Damit ist \mathcal{Z} auch unter endlichen Vereinigungen abgeschlossen und somit liegt insgesamt eine Mengen-Algebra vor. Es sei nun Z_n , $n \in \mathbb{N}_+$, eine abzählbare Familie aus \mathcal{Z} . Wir wissen, dass die Teilmengen $Z_n \setminus (Z_1 \cup \dots \cup Z_{n-1})$ zu \mathcal{Z} gehören. Deren Vereinigung ist gleich der Vereinigung der Z_n , so dass wir annehmen können, dass die Z_n paarweise disjunkt sind. Wegen der Disjunktheit ergibt sich induktiv für eine beliebige Teilmenge $S \subseteq M$

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}(S \cap (Z_1 \cup \dots \cup Z_n)) &= \tilde{\mu}(S \cap (Z_1 \cup \dots \cup Z_n) \cap Z_1) + \tilde{\mu}(S \cap (Z_1 \cup \dots \cup Z_n) \cap (M \setminus Z_1)) \\ &= \tilde{\mu}(S \cap Z_1) + \tilde{\mu}(S \cap (Z_2 \cup \dots \cup Z_n)) \\ &= \tilde{\mu}(S \cap Z_1) + \tilde{\mu}(S \cap Z_2) + \tilde{\mu}(S \cap (Z_3 \cup \dots \cup Z_n)) \\ &= \tilde{\mu}(S \cap Z_1) + \tilde{\mu}(S \cap Z_2) + \dots + \tilde{\mu}(S \cap Z_n). \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich unter Verwendung der Zerlegungseigenschaft von $Z_1 \cup \dots \cup Z_n$ und der Monotonie des äußeren Maßes die Abschätzung

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}(S) &= \tilde{\mu}(S \cap (Z_1 \cup \dots \cup Z_n)) + \tilde{\mu}(S \cap (M \setminus (Z_1 \cup \dots \cup Z_n))) \\ &\geq \tilde{\mu}(S \cap Z_1) + \tilde{\mu}(S \cap Z_2) + \dots + \tilde{\mu}(S \cap Z_n) + \tilde{\mu}\left(S \cap \left(M \setminus \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}_+} Z_k\right)\right)\right). \end{aligned}$$

Da dies für alle n gilt, und da ein äußeres Maß vorliegt, folgt

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}(S) &\geq \sum_{n \in \mathbb{N}_+} \tilde{\mu}(S \cap Z_n) + \tilde{\mu}\left(S \cap \left(M \setminus \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}_+} Z_k\right)\right)\right) \\ &\geq \tilde{\mu}(S \cap \bigcup_{k \in \mathbb{N}_+} Z_k) + \tilde{\mu}\left(S \cap \left(M \setminus \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}_+} Z_k\right)\right)\right). \end{aligned}$$

Da die umgekehrte Abschätzung sowieso gilt, haben wir die gewünschte Gleichheit. (2). Für paarweise disjunkte Mengen Z_n , $n \in \mathbb{N}_+$, aus \mathcal{Z} ist, wie unter (1) bewiesen,

$$\tilde{\mu}(Z_1) + \dots + \tilde{\mu}(Z_n) = \tilde{\mu}(Z_1 \cup \dots \cup Z_n) \leq \tilde{\mu}\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}_+} Z_k\right).$$

Da dies für alle n gilt, folgt

$$\sum_{k \in \mathbb{N}_+} \tilde{\mu}(Z_k) \leq \tilde{\mu}\left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}_+} Z_k\right).$$

Da auch die umgekehrte Abschätzung gilt, liegt Gleichheit vor. \square

Lemma 4.6. *Es sei M eine Menge, \mathcal{P} ein Präring auf M ,*

$$\mu: \mathcal{P} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

ein Prämaß auf M und $\tilde{\mu}$ die Fortsetzung von μ auf die Potenzmenge $\mathfrak{P}(M)$. Dann besitzen alle Mengen aus \mathcal{P} die Zerlegungseigenschaft.

Beweis. Es sei $Z \in \mathcal{P}$ und $S \subseteq M$. Es sei S_i , $i \in I$, eine abzählbare Überpflasterung von S mit Mengen aus \mathcal{P} . Die Durchschnitte $S_i \cap Z$, $i \in I$, bzw. $S_i \cap (M \setminus Z)$, $i \in I$, sind Überpflasterungen von $S \cap Z$ bzw. von $S \cap (M \setminus Z)$. Für jedes S_i gilt $\mu(S_i) = \mu(S_i \cap Z) + \mu(S_i \cap (M \setminus Z))$, da ein Prämaß vorliegt. Daher ist

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} \mu(S_i) &= \sum_{i \in I} \mu(S_i \cap Z) + \sum_{i \in I} \mu(S_i \cap (M \setminus Z)) \\ &\geq \tilde{\mu}(S \cap Z) + \tilde{\mu}(S \cap (M \setminus Z)). \end{aligned}$$

Da dies für alle Überpflasterungen gilt, folgt

$$\tilde{\mu}(S) \geq \tilde{\mu}(S \cap Z) + \tilde{\mu}(S \cap (M \setminus Z)).$$

Da auch die umgekehrte Abschätzung gilt, liegt Gleichheit vor. \square

4.2. Existenzsätze für Maße.

Satz 4.7. *Es sei M eine Menge, \mathcal{P} ein Präring auf M ,*

$$\mu: \mathcal{P} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

ein Prämaß auf M und $\tilde{\mu}$ die Fortsetzung von μ auf die von \mathcal{P} erzeugte σ -Algebra \mathcal{A} . Dann ist $\tilde{\mu}$ ein Maß auf \mathcal{A} . Wenn μ σ -endlich ist, so ist $\tilde{\mu}$ die einzige Fortsetzung von μ zu einem Maß auf \mathcal{A} .

Beweis. Dies folgt aus Lemma 4.5 und Lemma 4.6. Der Zusatz ergibt sich aus Satz 3.7. \square

4.3. Produkt-Messräume.

In den nächsten Vorlesungen wollen wir Produkte von Maßräumen definieren und insbesondere auf dem \mathbb{R}^n ein Maß definieren.

Definition 4.8. Es seien $(M_1, \mathcal{A}_1), \dots, (M_n, \mathcal{A}_n)$ Mengen mit darauf erklärten σ -Algebren. Dann nennt man die von allen Quadern

$$S_1 \times \cdots \times S_n \text{ mit } S_i \in \mathcal{A}_i \text{ für alle } i = 1, \dots, n$$

auf $M_1 \times \cdots \times M_n$ erzeugte σ -Algebra die *Produkt- σ -Algebra* der (M_i, \mathcal{A}_i) , $i = 1, \dots, n$. Sie wird mit $\mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n$ bezeichnet.

Lemma 4.9. *Es seien (M, \mathcal{A}) und (N, \mathcal{B}) Messräume und es sei $(M \times N, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ die Produktmenge mit der Produkt- σ -Algebra. Dann sind die Projektionen*

$$p_1 : M \times N \longrightarrow M \text{ und } p_2 : M \times N \longrightarrow N$$

messbar.

Beweis. Dies folgt direkt daraus, dass zu einer messbaren Teilmenge $T \subseteq N$ die Urbildmenge

$$p_2^{-1}(T) = M \times T$$

ein Quader ist und daher nach Definition zu $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ gehört. \square

Diese Aussage gilt natürlich auch für beliebige endliche Produkte. Man kann den Beweis von solchen Aussagen sehr häufig durch eine einfache Induktion auf den Fall von zwei Faktoren zurückführen, so dass wir uns zumeist auf diesen Fall beschränken werden.

Lemma 4.10. *Es seien (M, \mathcal{A}) und (N, \mathcal{B}) Messräume und $T \subseteq M \times N$ eine messbare Teilmenge des Produktes $(M \times N, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$. Dann sind für jedes $x \in M$ und jedes $y \in N$ die Mengen*

$$T(x) = \{y \in N \mid (x, y) \in T\} \text{ und } T(y) = \{x \in M \mid (x, y) \in T\}$$

messbar in M bzw. in N .

Beweis. Wir zeigen, dass für jedes $y \in N$ die Inklusionsabbildung

$$\iota_y : M \longrightarrow M \times N, x \longmapsto (x, y),$$

messbar ist. Dazu genügt es nach Lemma 1.16, die Urbilder von messbaren Mengen der Form $A \times B \subseteq M \times N$ zu betrachten. Für eine solche Menge gilt

$$\iota_y^{-1}(A \times B) = \{x \in M \mid (x, y) \in A \times B\},$$

und dies ist leer, falls $y \notin B$ und gleich A , falls $y \in B$. So oder so ist sie also eine messbare Teilmenge. Für eine beliebige Teilmenge $T \subseteq M \times N$ ist daher

$$T(y) = \{x \in M \mid (x, y) \in T\} = \iota_y^{-1}(T)$$

messbar. \square

Lemma 4.11. *Es seien M, N_1, N_2 Messräume und es seien $f_1 : M \rightarrow N_1$ und $f_2 : M \rightarrow N_2$ messbare Abbildungen. Dann ist auch die Abbildung*

$$(f_1, f_2) : M \longrightarrow N_1 \times N_2, x \longmapsto (f_1(x), f_2(x)),$$

messbar.

Beweis. Siehe Aufgabe 4.15. \square

4. ARBEITSBLATT

4.1. Übungsaufgaben.

Aufgabe 4.1. Zeige, dass ein äußeres Maß die Subadditivitätseigenschaft für beliebige abzählbare Vereinigungen besitzt.

Aufgabe 4.2. Es sei M eine Menge, \mathcal{P} ein Präring auf M ,

$$\mu: \mathcal{P} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

ein äußeres Maß auf M und $\tilde{\mu}$ die Fortsetzung von μ auf die Potenzmenge $\mathfrak{P}(M)$. Zeige, dass für jede Teilmenge $S \subseteq M$ die Beziehung

$$\tilde{\mu}(S) \leq \tilde{\mu}(S \cap Z) + \tilde{\mu}(S \cap (M \setminus Z))$$

gilt.

Aufgabe 4.3. Bestimme das Infimum über alle Summen von Intervalllängen zu einer Familie von offenen reellen Intervallen, die \mathbb{Z} überdecken.

Aufgabe 4.4.*

Zu jeder rationalen Zahl $q \in \mathbb{Q}$ sei ein Intervall $[a_q, b_q]$ derart gegeben, dass q in dessen Innern liegt, also $q \in]a_q, b_q[$. Ist

$$\bigcup_{q \in \mathbb{Q}} [a_q, b_q] = \mathbb{R}?$$

Aufgabe 4.5. Bestimme das Infimum über alle Summen von Intervalllängen zu einer Familie von offenen reellen Intervallen, die \mathbb{Q} überdecken.

Aufgabe 4.6. Es sei $T \subseteq \mathbb{R}^k$ eine abzählbare Menge. Zeige, dass das Infimum über die Summe der Volumina der beteiligten offenen Intervall-Quader zu Überpflasterungen von T aus solchen Quadern gleich 0 ist.

Aufgabe 4.7. Es sei $T = \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$. Zeige, dass das Infimum über die Summe der Flächen zu Überpflasterungen von T mit offenen Rechtecken gleich 0 ist.

Aufgabe 4.8. Es sei $T = \mathbb{Q} \times \mathbb{R}$. Zeige, dass das Infimum über die Summe der Flächen zu Überpflasterungen von T mit offenen Rechtecken gleich 0 ist.

Aufgabe 4.9. Es sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und sei $\Gamma \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ihr Graph. Zeige, dass das Infimum der Summen der Rechtecksinhalte über alle Überpflasterungen von Γ mit achsenparallelen Rechtecken gleich 0 ist.

Aufgabe 4.10. Es sei

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

eine Riemann-integrierbare Funktion und T der (abgeschlossene) Subgraph von f . Zeige, dass das äußere Maß von T (zu dem Rechtecksprämaß) gleich dem bestimmten Integral $\int_a^b f(t)dt$ ist.

Aufgabe 4.11. Welche „vertrauten geometrischen Figuren“ kann man als (verallgemeinerte) Quader in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ oder in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ auffassen?

Aufgabe 4.12. Es seien M und N Mengen und sei $T \subseteq M \times N$ eine Teilmenge. Zu $x \in M$ sei $T(x) = \{y \in N \mid (x, y) \in T\}$. Zeige, dass $\{x\} \times T(x)$ die Faser der Hintereinanderschaltung

$$T \hookrightarrow M \times N \xrightarrow{p_1} M$$

über x ist.

Aufgabe 4.13. Es seien (M, \mathcal{A}) und (N, \mathcal{B}) zwei Messräume, die nicht leer seien und wobei die einelementigen Teilmengen messbar seien. Alle Teilmengen von $M \times N$ seien mit der durch $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ induzierten σ -Algebra versehen. Es sei $S \subseteq M$. Zeige, dass folgende Eigenschaften äquivalent sind.

- (1) S ist eine messbare Teilmenge von M .
- (2) Es gibt ein $y \in N$ derart, dass $S \times \{y\} \subseteq M \times \{y\}$ messbar ist.
- (3) Für alle $y \in N$ ist $S \times \{y\} \subseteq M \times \{y\}$ messbar.
- (4) Es gibt ein $y \in N$ derart, dass $S \times \{y\}$ messbar in $M \times N$ ist.
- (5) Für alle $y \in N$ ist $S \times \{y\}$ messbar in $M \times N$.

Aufgabe 4.14. Es sei X ein Hausdorff-Raum. Zeige, dass die Diagonale

$$\Delta = \{(x, y) \in X \times X \mid x = y\}$$

eine messbare Teilmenge im Produktraum $X \times X$ ist.

Aufgabe 4.15. Es seien M, N_1, N_2 Messräume und es seien $f_1: M \rightarrow N_1$ und $f_2: M \rightarrow N_2$ messbare Abbildungen. Zeige, dass auch die Abbildung

$$(f_1, f_2): M \longrightarrow N_1 \times N_2, x \longmapsto (f_1(x), f_2(x)),$$

messbar ist.

4.2. Aufgaben zum Abgeben.

Aufgabe 4.16. (2 Punkte)

Es sei \mathcal{P} ein Präring auf \mathbb{R} , der die Intervalle $[a, b]$, $a < b$, enthalte, und es sei μ ein äußeres Maß darauf, das auf diesen Intervallen den Wert $b - a$ besitze. Zeige, dass die Fortsetzung dieses äußeren Maßes auf allen abzählbaren Teilmengen von \mathbb{R} den Wert 0 besitzt.

Aufgabe 4.17. (5 (2+3) Punkte)

Es sei $f: \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ eine stetige Funktion derart, dass das uneigentliche Integral $\int_0^\infty f(t)dt$ existiert.

- (1) Zeige, dass es zu jedem $\epsilon > 0$ obere Treppenfunktionen T_n zu f auf $[n - 1, n]$ derart gibt, dass die Gesamtdifferenz

$$\sum_{n \in \mathbb{N}_+} \int_{n-1}^n T_n(t)dt - \int_0^\infty f(t)dt \leq \epsilon$$

erfüllt.

- (2) Man gebe ein Beispiel einer solchen Funktion f derart, dass es keine solche Approximation mit oberen Treppenfunktionen gibt, wenn man zusätzlich fordert, dass sie zu der äquidistanten Unterteilung der Intervalle $[n - 1, n]$ zu einem festen Stammbruch $\frac{1}{k}$ (unabhängig von n) gehören.

Aufgabe 4.18. (3 Punkte)

Bestimme das Urbild der Einheitskreisscheibe $E \subseteq \mathbb{R}^2$ unter den Inklusionsabbildungen

$$\iota_y: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, x \longmapsto (x, y).$$

Aufgabe 4.19. (3 Punkte)

Es seien $(M_1, \mathcal{A}_1), \dots, (M_n, \mathcal{A}_n)$ Mengen mit darauf erklärten σ -Algebren. Zeige, dass die Produkt- σ -Algebra $\mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n$ die kleinste σ -Algebra auf $M_1 \times \dots \times M_n$ ist, für die alle Projektionen messbar sind.

Aufgabe 4.20. (4 Punkte)

Es seien X und Y zwei topologische Räume mit abzählbarer Topologie und mit den zugehörigen σ -Algebren der Borelmengen $\mathcal{B}(X)$ und $\mathcal{B}(Y)$. Zeige, dass das Mengensystem der Borelmengen auf dem Produktraum $X \times Y$ mit dem Produkt von $\mathcal{B}(X)$ und $\mathcal{B}(Y)$ übereinstimmt.

5. VORLESUNG - PRODUKTMASS

Es ist unser Ziel zu zeigen, dass auf der Produktmenge von Maßräumen unter recht allgemeinen Voraussetzungen ein Maß definiert ist, das durch die Produktwerte auf den Quadern festgelegt ist. Dafür gehen wir den Weg über den Produkt-Präring.

5.1. Produkt-Präringe.

Definition 5.1. Es seien $(M_1, \mathcal{P}_1), \dots, (M_n, \mathcal{P}_n)$ Mengen mit darauf erklärten Präringen. Dann nennt man den von allen Quadern

$$S_1 \times \cdots \times S_n \text{ mit } S_i \in \mathcal{P}_i \text{ für alle } i = 1, \dots, n$$

erzeugten Präring den *Produkt-Präring* der (M_i, \mathcal{P}_i) , $i = 1, \dots, n$.

Lemma 5.2. *Es seien $(M_1, \mathcal{P}_1), \dots, (M_n, \mathcal{P}_n)$ Mengen mit darauf erklärten Präringen. Dann besteht der Produkt-Präring aus allen endlichen disjunkten Vereinigungen von Quadern.*

Beweis. Die Quader $S_1 \times \cdots \times S_n$ mit $S_i \in \mathcal{P}_i$ gehören zum Produkt-Präring, und damit auch endliche Vereinigungen davon. Wir müssen also zeigen, dass das angegebene Mengensystem \mathcal{H} (das aus den endlichen disjunkten Vereinigungen von Quadern besteht) ein Präring ist. Wir beschränken uns dabei auf den Fall von zwei Mengen (M, \mathcal{P}) und (N, \mathcal{R}) , der allgemeine Fall folgt daraus durch Induktion. Die leere Menge ist als leerer Quader in \mathcal{H} enthalten. Wir diskutieren zunächst die Mengenoperationen für zwei Quader $S_1 \times T_1$ und $S_2 \times T_2$. Der Durchschnitt davon ist gleich $(S_1 \times T_1) \cap (S_2 \times T_2) = (S_1 \cap S_2) \times (T_1 \cap T_2)$, also wieder ein Quader. Für die Vereinigung gilt

$$\begin{aligned} & (S_1 \times T_1) \cup (S_2 \times T_2) \\ &= ((S_1 \setminus S_2) \times T_1) \uplus ((S_1 \cap S_2) \times (T_1 \cup T_2)) \uplus ((S_2 \setminus S_1) \times T_2), \end{aligned}$$

was eine endliche disjunkte Vereinigung aus Quadern ist. Für die Differenzmenge ist

$$(S_1 \times T_1) \setminus (S_2 \times T_2) = ((S_1 \setminus S_2) \times T_1) \uplus ((S_1 \cap S_2) \times (T_1 \setminus T_2))$$

ebenfalls eine endliche disjunkte Vereinigung von Quadern. Es seien nun zwei disjunkte endliche Vereinigungen von Quadern, $V_1 = \bigsqcup_{i \in I} Q_i$ und $V_2 = \bigsqcup_{j \in J} L_j$, gegeben. Dann ist

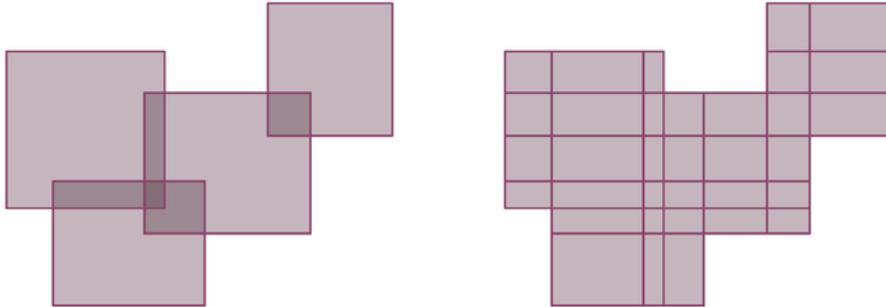
$$\begin{aligned} V_1 \setminus V_2 &= \left(\bigsqcup_{i \in I} Q_i \right) \setminus \left(\bigsqcup_{j \in J} L_j \right) \\ &= \bigsqcup_{i \in I} \left(Q_i \setminus \left(\bigsqcup_{j \in J} L_j \right) \right) \end{aligned}$$

$$= \bigsqcup_{i \in I} \left((Q_i \setminus L_{j_0}) \setminus \left(\bigsqcup_{j \in J, j \neq j_0} L_j \right) \right).$$

Nach der obigen Überlegung ist $Q_i \setminus L_{j_0}$ für jedes i eine endliche disjunkte Vereinigung von Quadern. Diese kann man zu einer disjunkten Vereinigung von kleineren Quadern über eine größere Indexmenge I' zusammenfassen. Die Behauptung folgt somit durch Induktion über die Anzahl von J . Für die Vereinigung ist

$$V_1 \cup V_2 = \left(\bigsqcup_{i \in I} Q_i \right) \cup \left(\bigsqcup_{j \in J} L_j \right)$$

eine endliche Vereinigung von Quadern. Durch Induktion über die Anzahl der Quader kann man unter Verwendung der obigen Überlegung für zwei Quader zeigen, dass man dies auch als eine endliche disjunkte Vereinigung von Quadern darstellen kann. \square



Der obige Beweis beinhaltet insbesondere, dass man jede endliche Vereinigung von Quadern als eine endliche disjunkte Vereinigung schreiben kann.

5.2. Produktprämaße.

Lemma 5.3. *Es seien $(M_1, \mathcal{P}_1, \mu_1), \dots, (M_n, \mathcal{P}_n, \mu_n)$ Mengen mit darauf erklärten Präringen und Prämaßen. Dann gelten folgende Aussagen.*

- (1) *Die für eine endliche disjunkte Vereinigung*

$$V = \bigsqcup_{i \in I} Q_i$$

von Quadern $Q_i = S_{i1} \times \dots \times S_{in}$ (wobei die Seiten endliches Maß haben) durch

$$\mu(V) = \sum_{i \in I} \mu(Q_i)$$

mit $\mu(Q_i) = \mu_1(S_{i1}) \cdots \mu_n(S_{in})$ definierte Zahl ist unabhängig von der gewählten Zerlegung.

- (2) Es seien $\mu_i(M_i) < \infty$ (insbesondere sei dies definiert). Dann ist die Zuordnung $V \mapsto \mu(V)$ ein Prämaß auf dem Produkt-Präring.

Beweis. (1). Wir beschränken uns im Beweis auf zwei Mengen (M, \mathcal{P}, π) und (N, \mathcal{R}, ρ) , die allgemeine Aussage folgt daraus durch Induktion. Seien

$$V = \bigsqcup_{i \in I} Q_i = \bigsqcup_{j \in J} L_j$$

zwei Darstellungen einer Menge $V \subseteq M \times N$ als endliche disjunkte Vereinigung von Quadern. Wir müssen $\sum_{i \in I} \mu(Q_i) = \sum_{j \in J} \mu(L_j)$ zeigen. Für jeden Quader Q_i ist insbesondere $Q_i \subseteq \bigcup_{j \in J} L_j$. Damit ist auch

$$Q_i = Q_i \cap \left(\bigsqcup_{j \in J} L_j \right) = \bigsqcup_{j \in J} (Q_i \cap L_j).$$

Nach Lemma 5.2 sind die Durchschnitte rechts selbst Quader. Damit erhalten wir eine dritte Darstellung von V , die beide Darstellungen verfeinert. Daher können wir gleich annehmen, dass jedes L_j Teilmenge eines Q_i ist. Dann ist insbesondere $Q_i = \bigsqcup_{j \in J_i} L_j$ mit einer gewissen Teilmenge $J_i \subseteq J$, wobei die J_i für verschiedene i disjunkt sind. Es genügt also, für einen Quader

$$Q = A \times B = \bigsqcup_{j \in J} L_j$$

die Gleichheit

$$\mu(Q) = \sum_{j \in J} \mu(L_j)$$

zu zeigen. Da J endlich ist, sind überhaupt nur endlich viele Seiten S_j aus \mathcal{P} und T_j aus \mathcal{R} an diesen überdeckenden Quadern beteiligt. Aus diesen Seiten kann man ein Mengensystem \mathcal{S} bilden, das aus allen möglichen feinsten Durchschnitten der S_j und ihrer Komplemente $A \setminus S_j$ besteht, und ein Mengensystem \mathcal{T} bilden, das aus allen möglichen feinsten Durchschnitten der T_j und ihrer Komplemente $B \setminus T_j$ besteht. Diese Mengen sind disjunkt und seien mit S_λ , $\lambda \in \Lambda$, und T_γ , $\gamma \in \Gamma$, bezeichnet (das bedeutet, dass wir ein „Raster“ einführen). Damit kann man jeden Quader L_j als eine endliche disjunkte Vereinigung aus Quadern der Form $S_\lambda \times T_\gamma$ schreiben, und zwar als

$$L_j = \left(\bigsqcup_{\lambda \in \Lambda_j} S_\lambda \right) \times \left(\bigsqcup_{\gamma \in \Gamma_j} T_\gamma \right) = \bigsqcup_{(\lambda, \gamma) \in \Lambda_j \times \Gamma_j} S_\lambda \times T_\gamma,$$

und jeder dieser Quader kommt in genau einem L_j vor. Insgesamt ergibt sich

$$\begin{aligned} \mu(Q) &= \pi(A) \cdot \rho(B) \\ &= \pi \left(\bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda \right) \cdot \rho \left(\bigsqcup_{\gamma \in \Gamma} T_\gamma \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\sum_{\lambda \in \Lambda} \pi(S_\lambda) \right) \cdot \left(\sum_{\gamma \in \Gamma} \rho(T_\gamma) \right) \\
&= \sum_{(\lambda, \gamma) \in \Lambda \times \Gamma} \pi(S_\lambda) \cdot \rho(T_\gamma) \\
&= \sum_{j \in J} \left(\sum_{(\lambda, \gamma) \in \Lambda_j \times \Gamma_j} \pi(S_\lambda) \cdot \rho(T_\gamma) \right) \\
&= \sum_{j \in J} \left(\sum_{\lambda \in \Lambda_j} \pi(S_\lambda) \right) \cdot \left(\sum_{\gamma \in \Gamma_j} \rho(T_\gamma) \right) \\
&= \sum_{j \in J} \mu(L_j).
\end{aligned}$$

(2). Es sei $V = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} V_n$ eine abzählbare disjunkte Vereinigung, wobei V und die V_n endliche disjunkte Vereinigungen von Quadern sind. Wir müssen $\mu(V) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(V_n)$ zeigen. Dies kann man direkt auf den Fall zurückführen, wo $V = Q$ und $V_n = Q_n$ Quader sind. Zu einer Teilmenge

$$T \subseteq M \times N$$

und zu $x \in M$ betrachten wir

$$T(x) = \{y \in N \mid (x, y) \in T\}.$$

Wenn T zum Produkt-Präring gehört, also eine endliche disjunkte Vereinigung von Quadern ist, so gehören diese Mengen zu \mathcal{R} , da sie eine endliche Vereinigung gewisser (N -)Seiten dieser Quader sind. Zu einer positiven reellen Zahl a kann man die Menge

$$T^a = \{x \in M \mid \rho(T(x)) = a\}$$

betrachten. Diese Menge ist wiederum eine endliche Vereinigung von (M -)Seiten der beteiligten Quader und gehört somit zu \mathcal{P} . Weiterhin kann $T^a \neq \emptyset$ nur für endlich viele Werte $a \in \mathbb{R}$ sein, nämlich nur für die Teilsommen der Werte des Prämaßes ρ der (N -)Seiten der beteiligten Quader. Mit diesen Notationen gilt

$$\mu(T) = \sum_{a \in \mathbb{R}_+} \pi(T^a) \cdot a,$$

da dies für jeden Quader gilt und daraus durch Aufsummieren folgt. Sei also nun $Q = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} Q_n$ eine abzählbare Zerlegung in Quader. Wir müssen

$$\begin{aligned}
\mu(Q) &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(Q_i) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n \mu(Q_i) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(Q_0 \sqcup \dots \sqcup Q_n)
\end{aligned}$$

zeigen. Nach Übergang zu den Komplementen in Q ist dies äquivalent damit, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(T_n) = 0$$

ist für $T_n = Q \setminus (Q_0 \uplus \dots \uplus Q_n)$. Es ist $T_n \downarrow \emptyset$, und damit ist auch $T_n(x) \downarrow \emptyset$ für jedes $x \in M$. Nach Lemma 3.4 ist daher $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(T_n(x)) = 0$. Zu $\delta > 0$ definieren wir

$$T_n^{\geq \delta} = \{x \in M \mid \rho(T_n(x)) \geq \delta\} = \bigcup_{a \geq \delta} T_n^a.$$

Da für jedes $x \in M$ die Folge $\rho(T_n(x))$ gegen 0 konvergiert, schrumpft die Mengensequenz $T_n^{\geq \delta}$ für jedes $\delta > 0$ gegen \emptyset . Daraus folgt, wieder mit Lemma 3.4, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \pi(T_n^{\geq \delta}) = 0$. Seien nun $\delta, \epsilon > 0$ gegeben. Zu ϵ gibt es ein n_0 mit

$$\pi(T_n^{\geq \delta}) \leq \epsilon$$

für alle $n \geq n_0$. Für diese n hat man dann insgesamt die Abschätzung

$$\begin{aligned} \mu(T_n) &= \sum_{a \in \mathbb{R}_+} \pi(T_n^a) \cdot a \\ &= \left(\sum_{a < \delta} \pi(T_n^a) \cdot a \right) + \left(\sum_{\rho(N) \geq a \geq \delta} \pi(T_n^a) \cdot a \right) \\ &\leq \left(\sum_{a < \delta} \pi(T_n^a) \cdot a \right) + \left(\sum_{\rho(N) \geq a \geq \delta} \pi(T_n^a) \right) \rho(N) \\ &\leq \pi(M) \cdot \delta + \epsilon \cdot \rho(N). \end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung $\pi(M)$ und $\rho(N)$ endlich sind, kann man den letzten Term durch geeignete Wahl von δ und ϵ beliebig klein machen. Daher konvergiert $\mu(T_n)$ gegen 0. \square

Satz 5.4. *Es seien n σ -endliche Maßräume $(M_1, \mathcal{A}_1, \mu_1), \dots, (M_n, \mathcal{A}_n, \mu_n)$ gegeben. Dann gibt es genau ein (σ -endliches) Maß μ auf der Produkt- σ -Algebra $\mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n$, das für alle messbaren Quader (deren Seiten endliches Maß besitzen) den Wert*

$$\mu(T_1 \times \dots \times T_n) = \mu_1(T_1) \cdot \dots \cdot \mu_n(T_n)$$

besitzt.

Beweis. Wir beschränken uns auf den Fall von zwei σ -endlichen Maßräumen (M, \mathcal{A}, π) und (N, \mathcal{B}, ρ) . Es seien $M_n, n \in \mathbb{N}$, bzw. $N_n, n \in \mathbb{N}$, jeweils Ausschöpfungen der Räume durch Teilmengen mit endlichem Maß. Die Eindeutigkeit folgt aus Satz 3.7, da das Maß auf dem durchschnittsstabilen Erzeugendensystem aller Quader festgelegt ist, und die Mengen $M_n \times N_n, n \in \mathbb{N}$, eine Ausschöpfung des Produktraumes mit endlichem Maß bilden.

Zur Existenz. Wir ersetzen zuerst die Ausschöpfungen durch disjunkte Vereinigungen, indem wir $M_n \setminus M_{n-1}$ statt M_n betrachten. Dann bilden die

$M_i \times N_j$, $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, eine disjunkte Vereinigung von $M \times N$. Da ein Maß nach Aufgabe 2.17 durch die Einschränkungen auf einer abzählbaren disjunkten Vereinigung eindeutig bestimmt ist, genügt es, auf jedem $M_i \times N_j$ ein Maß zu konstruieren. D.h. wir können annehmen, dass die Maße π und ρ endlich sind. Es sei \mathcal{H} der Produkt-Präring auf $M \times N$. Nach Lemma 5.3 gibt es auf diesem Mengensystem ein wohldefiniertes Prämaß, das auf den Quadern durch das Produkt der Seitenmaße gegeben ist. Aufgrund von Satz 4.7 kann man dieses Prämaß zu einem Maß auf der σ -Algebra $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ fortsetzen. \square

Definition 5.5. Es seien $(M_1, \mathcal{A}_1, \mu_1), \dots, (M_n, \mathcal{A}_n, \mu_n)$ σ -endliche Maßräume. Dann nennt man das in Lemma 5.3 und Satz 5.4 konstruierte Maß das *Produktmaß* auf $M_1 \times \dots \times M_n$. Es wird mit $\mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n$ bezeichnet.

5. ARBEITSBLATT

5.1. Aufwärmaufgaben.

Aufgabe 5.1. Wir betrachten die beiden Rechtecke

$$Q = [-1, 2] \times [1, 4] \text{ und } L = [1, 5] \times [3, 6]$$

im \mathbb{R}^2 . Schreibe den Durchschnitt und die Differenzmengen als disjunkte Vereinigung von Rechtecken. Schreibe die Vereinigung der beiden Mengen auf mehrere Arten als disjunkte Vereinigung von Rechtecken. Welche Darstellung ist eine Verfeinerung einer anderen Darstellung? Wie sieht ein „Raster“ aus, mit dem man alle beteiligten Mengen ausdrücken kann? Bestätige, dass die Summe der beteiligten Rechteckinhalte stets gleich ist.

Aufgabe 5.2. Zeige, dass das durch die drei Punkte $(0, 0)$, $(0, 1)$ und $(1, 0)$ gegebene abgeschlossene Dreieck nicht zum Produktpräring von $(\mathbb{R}, \mathfrak{P}(\mathbb{R}))$ und $(\mathbb{R}, \mathfrak{P}(\mathbb{R}))$ gehört.

Aufgabe 5.3. Es seien (M, \mathcal{A}) und (N, \mathcal{B}) Messräume und es sei μ das in $x \in M$ konzentrierte Dirac-Maß auf M und ν das in $y \in N$ konzentrierte Dirac-Maß auf N . Zeige, dass $\mu \otimes \nu$ das in (x, y) konzentrierte Dirac-Maß auf $M \times N$ ist.

Aufgabe 5.4.*

Es seien M und N zwei abzählbare Mengen, die beide mit der σ -Algebra aller Teilmengen und mit dem Zählmaß (genannt μ bzw. ν) versehen seien.

a) Zeige, dass M und N σ -endliche Maßräume sind.

b) Zeige, dass das Produktmaß $\mu \otimes \nu$ auf $M \times N$ ebenfalls das Zählmaß ist.

Aufgabe 5.5. Es seien (M, \mathcal{A}) und (N, \mathcal{B}) Messräume und es sei μ das zur Belegungsfunktion

$$b: M \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, x \longmapsto b_x,$$

gehörige Maß auf M und ν das zur Belegungsfunktion

$$c: N \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, y \longmapsto c_y,$$

gehörige Maß auf N (diese Maße seien als σ -endlich angenommen). Zeige, dass $\mu \otimes \nu$ das zur Belegungsfunktion

$$M \times N \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq}, (x, y) \longmapsto b_x c_y,$$

gehörige Maß auf $M \times N$ ist.

Aufgabe 5.6. Es seien $(M_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(M_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ zwei σ -endliche Maßräume, es seien (N_1, \mathcal{B}_1) und (N_2, \mathcal{B}_2) zwei Messräume und es seien

$$\varphi_1: M_1 \longrightarrow N_1$$

und

$$\varphi_2: M_2 \longrightarrow N_2$$

zwei messbare Abbildungen, unter denen die Bildmaße $(\varphi_1)_*\mu_1$ und $(\varphi_2)_*\mu_2$ σ -endlich seien. Zeige, dass für das Bildmaß unter der Produktabbildung $\varphi = \varphi_1 \times \varphi_2$ die Gleichung

$$\varphi_*(\mu_1 \otimes \mu_2) = ((\varphi_1)_*\mu_1) \otimes ((\varphi_2)_*\mu_2)$$

gilt.

Aufgabe 5.7.*

Es seien (M, \mathcal{A}, μ) und (N, \mathcal{B}, ν) endliche Maßräume und $(M \times N, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$ ihr Produktmaßraum. Zeige, dass das Bildmaß von $\mu \otimes \nu$ unter der Projektion

$$M \times N \longrightarrow M, (x, y) \longmapsto x,$$

gleich (dem umskalierten Maß) $\nu(N) \cdot \mu$ ist.

Aufgabe 5.8. Man gebe ein Beispiel für endliche Maßräume und einem Maß λ auf $(M \times N, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$, das nicht das Produktmaß ist, das aber

$$\lambda(S \times N) = \mu(S) \times \nu(N)$$

und

$$\lambda(M \times T) = \mu(M) \times \nu(T)$$

für alle messbaren Teilmengen $S \subseteq M$ und $T \subseteq N$ erfüllt.

Aufgabe 5.9.*

Zeige, dass sich die abgeschlossene Einheitskreisscheibe

$$B(0, 1) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 \right\}$$

nicht durch abzählbar viele abgeschlossene Rechtecke $[a, b] \times [c, d] \subseteq B(0, 1)$ (mit $a \leq b$ und $c \leq d$) überdecken lässt.

Aufgabe 5.10.*

Man schreibe eine Animation, die die Unabhängigkeit des Maßes von der Quaderzerlegung im Beweis zu Lemma 5.3 (1) am Beispiel des \mathbb{R}^2 deutlich macht. Insbesondere soll die Einführung eines Rasters und der Begriff der Verfeinerung sichtbar werden.

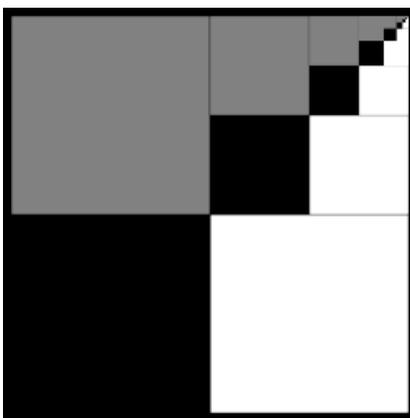
Aufgabe 5.11.

Durch eine Kombination von Produktmaß und Bildmaß kann man die sogenannte Faltung von Maßen definieren.

Zum σ -endlichen Maßen μ und ν auf dem \mathbb{R}^n nennt man das Bildmaß des Produktmaßes $\mu \otimes \nu$ unter der Addition

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, (x, y) \longmapsto x + y,$$

die *Faltung* der beiden Maße. Sie wird mit $\mu * \nu$ bezeichnet.



Man erläutere Lemma 5.3 (2) anhand des Bildes.

Aufgabe 5.12. Zeige, dass das Dirac-Maß δ_0 das neutrale Element für die Faltungsverknüpfung ist.

Aufgabe 5.13. Bestimme die Faltung $\delta_P * \delta_Q$ von Dirac-Maßen δ_P, δ_Q zu Punkten $P, Q \in \mathbb{R}^n$.

5.2. Aufgaben zum Abgeben.

Aufgabe 5.14. (5 Punkte)

Zeige, dass die offene Einheitskreisscheibe nicht zum Produktpräring von $(\mathbb{R}, \mathfrak{P}(\mathbb{R}))$ und $(\mathbb{R}, \mathfrak{P}(\mathbb{R}))$ gehört.

Aufgabe 5.15. (4 Punkte)

Es sei T die Vereinigung der drei Quader

$$Q_1 = [2, 7] \times [1, 3], Q_2 = [1, 4] \times [2, 5] \text{ und } Q_3 = [3, 6] \times [4, 6]$$

im \mathbb{R}^2 . Bestimme

$$T(x) = \{y \in \mathbb{R} \mid (x, y) \in T\}$$

für jedes $x \in \mathbb{R}$ und

$$T^a = \{x \in \mathbb{R} \mid \lambda(T(x)) = a\}$$

für jedes $a \in \mathbb{R}$ (dabei ist λ einfach die Summe der Länge der disjunkten Intervalle, aus denen sich $T(x)$ zusammensetzt).

Einen Maßraum mit dem Gesamtmaß 1 nennt man einen Wahrscheinlichkeitsraum. Für die Wahrscheinlichkeitstheorie ist das folgende Konzept enorm wichtig.

Es sei (M, \mathcal{E}, μ) ein Wahrscheinlichkeitsraum. Man nennt zwei σ -Algebren $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{E}$ *unabhängig*, wenn für jedes $A \in \mathcal{A}$ und jedes $B \in \mathcal{B}$ die Gleichheit

$$\mu(A \cap B) = \mu(A) \cdot \mu(B)$$

gilt.

Aufgabe 5.16. (4 Punkte)

Es seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ zwei Wahrscheinlichkeitsräume und $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$ ihr Produktraum. Zeige, dass die „Zylinderalgebren“

$$\mathcal{Z}_1 = \{S \times \Omega_2 \mid S \in \mathcal{A}_1\} \text{ und } \mathcal{Z}_2 = \{\Omega_1 \times T \mid T \in \mathcal{A}_2\}$$

unabhängig sind.

6. VORLESUNG - BOREL-LEBESGUE-MASS

Wir haben jetzt alle Hilfsmittel zusammen, um auf den Borel-Mengen des \mathbb{R}^n ein Maß zu definieren, das für einen Quader, dessen Seiten reelle Intervalle sind, einfach das Produkt der Seitenlängen ist. Dieses Maß heißt *Borel-Lebesgue-Maß*. Wir beginnen mit der eindimensionalen Situation.



Henri Léon Lebesgue (1875-1941)

6.1. Das Borel-Lebesgue-Maß auf \mathbb{R} .

Lemma 6.1. *Das Mengensystem aller Teilmengen $T \subseteq \mathbb{R}$, die sich als eine endliche (disjunkte) Vereinigung von halboffenen Intervallen $[a, b[$ schreiben lassen, ist ein Mengen-Präring.*

Beweis. Eine Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}$ lässt sich genau dann als eine endliche Vereinigung von halboffenen Intervallen schreiben, wenn dies mit endlich vielen disjunkten halboffenen Teilmengen möglich ist, siehe Aufgabe 6.20. Die leere Menge ist das halboffene Interall $[a, a[$ (bzw. die leere Vereinigung). Die Abgeschlossenheit unter Vereinigungen ist klar. Sei $V = I_1 \cup \dots \cup I_m$ und $W = J_1 \cup \dots \cup J_n$. Dann ist

$$\begin{aligned} V \setminus W &= (I_1 \cup \dots \cup I_m) \setminus (J_1 \cup \dots \cup J_n) \\ &= (I_1 \setminus (J_1 \cup \dots \cup J_n)) \cup \dots \cup (I_m \setminus (J_1 \cup \dots \cup J_n)) \\ &= ((I_1 \setminus J_1) \setminus (J_2 \cup \dots \cup J_n)) \cup \dots \cup ((I_m \setminus J_1) \setminus (J_2 \cup \dots \cup J_n)). \end{aligned}$$

Da $I_1 \setminus J_1$ eine Vereinigung von maximal zwei halboffenen Intervallen ist, folgt die Behauptung durch Induktion über n . \square

Lemma 6.2. *Es sei \mathcal{V} der Mengen-Präring aller Teilmengen $T \subseteq \mathbb{R}$, die sich als eine endliche Vereinigung von halboffenen Intervallen $[a, b[$ schreiben lassen. Dann gelten folgende Aussagen.*

- (1) *Die zu $V \in \mathcal{V}$ über eine Zerlegung in disjunkte halboffene Intervalle $V = [a_1, b_1[\uplus \dots \uplus [a_n, b_n[$ definierte Zahl*

$$\mu(V) = \sum_{i=1}^n (b_i - a_i)$$

ist wohldefiniert.

- (2) *Durch die Zuordnung $V \mapsto \mu(V)$ wird ein Prämaß auf diesem Präring definiert.*

Beweis. Siehe Aufgabe 6.21. □

Satz 6.3. *Es sei $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ die σ -Algebra der Borel-Mengen auf \mathbb{R} . Dann gibt es genau ein (σ -endliches) Maß λ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, das für jedes halboffene Intervall $[a, b[$ den Wert $\lambda([a, b]) = b - a$ besitzt. Statt halboffene Intervalle kann man auch offene oder abgeschlossene Intervalle nehmen.*

Beweis. Dies folgt aus Lemma 6.2, aus Satz 3.7 und aus Satz 4.7. Durch die gegebene Normierung auf den Intervallen sind die in Frage stehenden Maße von vornherein σ -endlich. Der Zusatz gilt, da man halboffene Intervalle durch offene bzw. abgeschlossene Intervalle beliebig gut approximieren kann. □

Definition 6.4. Das eindeutig bestimmte Maß $\lambda^1 = \lambda$ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, das für jedes halboffene Intervall $[a, b[$ den Wert $\lambda([a, b]) = b - a$ besitzt, heißt (eindimensionales) *Borel-Lebesgue-Maß*.

Für jede Borel-Menge $T \subseteq \mathbb{R}$ ist

$$\lambda(T) = \inf \left(\left\{ \sum_{i \in I} (b_i - a_i) \mid T \subseteq \bigcup_{i \in I} [a_i, b_i[, I \text{ abzählbar} \right\} \right).$$

6.2. Das Borel-Lebesgue-Maß auf \mathbb{R}^n .

Satz 6.5. *Der \mathbb{R}^n sei mit der σ -Algebra der Borel-Mengen \mathcal{B}^n versehen. Dann gibt es auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ genau ein (σ -endliches) Maß*

$$\lambda^n: \mathcal{B}^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}, T \longmapsto \lambda^n(T),$$

das für alle Quader

$$Q = [a_1, b_1[\times \dots \times [a_n, b_n[$$

den Wert

$$\lambda^n(Q) = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n)$$

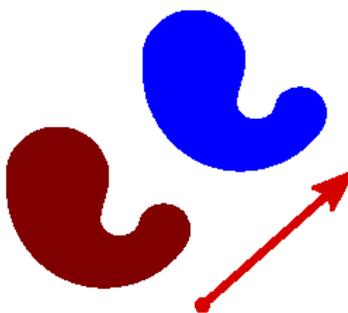
besitzt. Die Aussage gilt auch für (achsenparallele) Quader mit offenen bzw. abgeschlossenen Intervallen als Seiten.

Beweis. Für $n = 1$ ist dies der Inhalt von Satz 6.3. Für $n \geq 2$ folgt dies aus Satz 5.4, angewendet auf das n -fache Produkt von $(\mathbb{R}, \mathcal{B}^1, \lambda^1)$ mit sich selbst. \square

Definition 6.6. Das eindeutig bestimmte Maß $\lambda = \lambda^n$ auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$, das für jeden Quader der Form $Q = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ den Wert $\lambda(Q) = (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n)$ besitzt, heißt *Borel-Lebesgue-Maß* auf \mathbb{R}^n .

Bemerkung 6.7. Das Borel-Lebesgue-Maß ordnet also jeder Borel-Menge eine reelle Zahl oder das Symbol ∞ zu. Die Quader bilden dabei die Grundkörper, denen auf eine besonders einfache Weise ein Maß zugeordnet wird, wodurch das gesamte Maß festgelegt wird. Für eine beliebige messbare Menge $T \subseteq \mathbb{R}^n$ ist dabei $\lambda(T)$ gegeben als das Infimum von $\sum_{i \in I} \lambda^n(Q_i)$ über alle abzählbaren Überpflasterungen von T mit Quadern (so war eben das äußere Maß definiert, mit dessen Hilfe wir den Fortsetzungssatz für Maße aufstellen konnten). Es gibt kein allgemeines Verfahren, für gegebene Mengen (beispielsweise Flächenstücke, Körper) ihr Maß (ihren Flächeninhalt, ihr Volumen) effektiv zu bestimmen. Eine wichtige Technik ist die Integration von Funktionen in einer und in mehreren Variablen.

6.3. Die Translationsinvarianz des Borel-Lebesgue-Maßes.



Für eine beliebige Teilmenge $T \subseteq V$ in einem Vektorraum V und einen Vektor $v \in V$ nennt man

$$T + v = \{x + v \mid x \in T\}$$

die um v *verschobene Menge*.

Definition 6.8. Ein Maß auf einem reellen endlichdimensionalen Vektorraum $(V, \mathcal{B}(V))$ heißt *translationsinvariant*, wenn für alle messbaren Teilmengen $T \subseteq V$ und alle Vektoren $v \in V$ die Gleichheit

$$\mu(T) = \mu(T + v)$$

gilt.

Satz 6.9. *Das Borel-Lebesgue-Maß λ^n auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$ ist translationsinvariant.*

Beweis. Zu $v \in \mathbb{R}^n$ betrachten wir die Translationsabbildung

$$\varphi_v: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, P \longmapsto P + v.$$

Es sei $\mu := (\varphi_v)_* \lambda^n$ das Bildmaß unter der Translationsabbildung. Dieses ist wieder ein σ -endliches Maß. Für jeden Quader $Q = [a_1, b_1[\times \cdots \times [a_n, b_n[$ ist $Q' = Q + v$ bzw. $\tilde{Q} = Q - v$ wieder ein achsenparalleler Quader, wobei sich die Seitenlängen nicht ändern. Daher ist

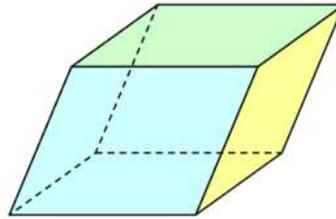
$$\mu(Q) = ((\varphi_v)_* \lambda^n)(Q) = \lambda^n(\varphi_v^{-1}(Q)) = \lambda^n(Q - v) = \lambda^n(\tilde{Q}) = \lambda^n(Q).$$

Das Maß μ stimmt also auf den Quadern mit λ^n überein und daher ist nach Satz 6.5 überhaupt

$$\mu = \lambda^n.$$

□

Die Translationsinvarianz des Borel-Lebesgue-Maßes kann man auch so formulieren, dass jede Translation eine maßtreue Abbildung ist.



Definition 6.10. Es sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und seien linear unabhängige Vektoren $v_1, \dots, v_n \in V$ gegeben. Dann nennt man

$$P = \{a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n \mid a_i \in [0, 1]\}$$

das von den v_i erzeugte *Parallelotop*.

Lemma 6.11. *Es sei μ ein translationsinvariantes Maß auf dem \mathbb{R}^n , das auf dem Einheitswürfel endlich sei. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein echter Untervektorraum. Dann ist $\mu(U) = 0$.*

Beweis. Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ ein Untervektorraum der Dimension $d < n$ und nehmen wir an, dass $\mu(U) > 0$ ist. Es sei u_1, \dots, u_d eine Basis von U und

$$P = \{a_1 u_1 + \cdots + a_d u_d \mid a_i \in [0, 1]\}$$

das davon erzeugte d -dimensionale Parallelotop.⁵ Dies lässt sich durch endlich viele verschobene Einheitswürfel überpflastern und besitzt demnach ein endliches Maß. Die verschobenen Parallelotope

$$P_k = P + k_1 u_1 + \cdots + k_d u_d, \quad k = (k_1, \dots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$$

besitzen wegen der Translationsinvarianz alle dasselbe Maß und bilden eine Überpflasterung von U . Da es abzählbar viele sind, muss $\mu(P) > 0$ gelten. Es sei nun u_{d+1}, \dots, u_n eine Ergänzung der Basis zu einer Basis von V , und sei

$$R = \{a_1 u_1 + \cdots + a_d u_d + \cdots + a_n u_n \mid a_i \in [0, 1]\}$$

das zugehörige n -dimensionale Parallelotop. Für dieses ist

$$\mu(R) < \infty.$$

Wir betrachten nun die abzählbar unendlich vielen Parallelotope

$$P_q = P + q u_n \text{ mit } q \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}.$$

Diese liegen alle innerhalb von R und besitzen wegen der Translationsinvarianz alle das gleiche Maß wie P . Ferner sind sie paarweise disjunkt, da andernfalls ein nichttriviales Vielfaches von u_n zu U gehören würde. Aus

$$\sum_{q \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}} \mu(P_q) = \mu\left(\bigcup_{q \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}} P_q\right) \leq \mu(R)$$

folgt $\mu(R) = \infty$, ein Widerspruch. □

Allgemein nennt man Unterräume (und zwar nicht nur Untervektorräume, sondern auch affine Unterräume, also verschobene Untervektorräume) des \mathbb{R}^n der Dimension $n - 1$ *Hyperebenen*. Insbesondere besitzen Hyperebenen das Maß 0.

Satz 6.12. *Das Borel-Lebesgue-Maß λ^n ist das einzige translationsinvariante Maß auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n)$, das auf dem Einheitswürfel den Wert 1 besitzt.*

Beweis. Das Borel-Lebesgue-Maß λ^n erfüllt nach Satz 6.9 diese Bedingungen. Es sei μ ein solches Maß. Nach Lemma 6.11 ist es egal, ob diese Bedingung an den abgeschlossenen, den offenen oder einen halboffenen Einheitswürfel gestellt wird. Wir werden durchgehend mit rechtsseitig offenen Quadern arbeiten. Da der \mathbb{R}^n durch abzählbar viele Verschiebungen des Einheitswürfels überdeckt wird, die wegen der Translationsinvarianz von μ alle das gleiche Maß besitzen, ist μ σ -endlich. Wir müssen zeigen, dass μ mit λ^n übereinstimmt, wobei es aufgrund des Eindeutigkeitsatzes genügt, die Gleichheit auf einem durchschnittsstabilen Erzeugendensystem für die Borelmengen nachzuweisen. Ein solches System bilden die Quader der Form

⁵Wenn man eine Orthonormalbasis wählt handelt es sich um einen Würfel.

$[a_1, b_1[\times \cdots \times [a_n, b_n[$ mit rationalen Ecken. Wegen der Translationsinvarianz von μ besitzt ein solcher Quader das gleiche Maß wie der verschobene Quader $[0, b_1 - a_1[\times \cdots \times [0, b_n - a_n[$. Wir schreiben einen solchen Quader unter Verwendung eines Hauptnenners als $Q = [0, \frac{c_1}{m}[\times \cdots \times [0, \frac{c_n}{m}[$ mit $m, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{N}$. Dieser Quader setzt sich disjunkt aus $c_1 \cdots c_n$ Quadern (nämlich $[\frac{i_1}{m}, \frac{i_1+1}{m}[\times \cdots \times [\frac{i_n}{m}, \frac{i_n+1}{m}[$ mit $i_j \in \{0, \dots, c_j - 1\}$) zusammen, die alle das gleiche μ -Maß haben, da sie ineinander verschoben werden können. Das μ -Maß des Quaders Q ist also das $c_1 \cdots c_n$ -fache des μ -Maßes des Quaders $\tilde{Q} = [0, \frac{1}{m}[\times \cdots \times [0, \frac{1}{m}[$. Da sich der Einheitswürfel aus m^n verschobenen Kopien dieses kleineren Würfels zusammensetzt, muss $\mu(\tilde{Q}) = \frac{1}{m^n}$ und damit

$$\mu(Q) = c_1 \cdots c_n \cdot \frac{1}{m^n} = \lambda^n(Q)$$

sein. □

Korollar 6.13. *Es sei ν ein translationsinvariantes Maß auf $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$, das auf dem Einheitswürfel ein endliches Maß habe. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Zahl $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\nu = c\lambda^n$.*

Beweis. Es sei $c = \nu(E)$, wobei E der Einheitswürfel im \mathbb{R}^n sei. Wenn $c = 0$ ist, so liegt das Nullmaß vor, da sich der \mathbb{R}^n mit abzählbar vielen verschobenen Einheitswürfeln überdecken lässt, die wegen der Translationsinvarianz ebenfalls das Maß 0 haben. Dann hat der Gesamttraum das Maß 0 und damit hat jede messbare Teilmenge das Maß 0. Es sei also $c \neq 0$. In diesem Fall betrachten wir das durch

$$\mu(T) := \frac{1}{c}\nu(T)$$

definierte (umskalierte) Maß. Dieses ist nach wie vor translationsinvariant und besitzt auf dem Einheitswürfel den Wert 1. Nach Satz 6.12 ist also $\mu = \lambda^n$ und somit ist $\nu = c\lambda^n$. □

6. ARBEITSBLATT

6.1. Aufwärmangaben.

Aufgabe 6.1. Es seien $[a, b[$ und $[c, d[$ zwei halboffene Intervalle (mit $a \leq b$ und $c \leq d$). Beschreibe den Durchschnitt $[a, b[\cap [c, d[$ als eine disjunkte Vereinigung von halboffenen Intervallen.

Aufgabe 6.2. Zeige, dass es zu einer disjunkten Vereinigung von endlich vielen halboffenen Intervallen $[a_i, b_i[$ eine eindeutige Darstellung gibt, wenn man zusätzlich fordert, dass die Anzahl der beteiligten Intervalle unter allen möglichen Darstellungen minimal ist.

Aufgabe 6.3. Es sei \mathcal{M} das Mengensystem, das aus allen endlichen disjunkten Vereinigungen von offenen, reellen Intervallen besteht. Zeige, dass \mathcal{M} kein Mengen-Präring ist.

Aufgabe 6.4. Es sei \mathcal{M} das Mengensystem, das aus allen endlichen disjunkten Vereinigungen von offenen, abgeschlossenen, einseitig halboffenen, leeren, beschränkten oder unbeschränkten reellen Intervallen besteht. Zeige, dass \mathcal{M} eine Mengenalgebra ist.

Aufgabe 6.5.*

Man gebe ein Beispiel für eine beschränkte Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}$, die man als eine abzählbare disjunkte Vereinigung von rechtsseitig halboffenen Intervallen schreiben kann, aber nicht als eine endliche Vereinigung.

Aufgabe 6.6. Zeige, dass unter einer polynomialen Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

vom Grad $\neq 1$ das Urbild eines rechtsseitig halboffenen Intervalls nicht rechtsseitig halboffen sein muss.

Aufgabe 6.7. Es sei $T \subseteq \mathbb{R}^n$ eine messbare beschränkte Teilmenge. Zeige, dass $\lambda^n(T) < \infty$ ist.

Aufgabe 6.8. Es sei $T \subseteq \mathbb{R}$ eine Borel-Menge. Zeige, dass

$$\lambda(T) = \inf \left(\left\{ \sum_{i \in I} (b_i - a_i) \mid T \subseteq \bigcup_{i \in I} [a_i, b_i[, I \text{ abzählbar} \right\} \right)$$

mit

$$\inf \left(\left\{ \sum_{i \in I} (b_i - a_i) \mid T \subseteq \bigcup_{i \in I} [a_i, b_i], I \text{ abzählbar} \right\} \right)$$

und mit

$$\inf \left(\left\{ \sum_{i \in I} (b_i - a_i) \mid T \subseteq \bigcup_{i \in I}]a_i, b_i[, I \text{ abzählbar} \right\} \right)$$

übereinstimmt.

Aufgabe 6.9. Es seien endlich viele linear unabhängige Vektoren $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ gegeben und es sei

$$P = \{a_1 v_1 + \dots + a_k v_k \mid a_i \in [0, 1]\}$$

das dadurch erzeugte Parallelotop. Zeige, dass P beschränkt ist.

Aufgabe 6.10. Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, eine nichtleere offene Teilmenge. Zeige, dass $\lambda^n(U) > 0$ ist. Zeige ebenso, dass dies für abgeschlossene Mengen nicht gelten muss.

Aufgabe 6.11. Man gebe ein Beispiel für ein σ -endliches Maß μ auf \mathbb{R} an, das auf allen Intervallen mit positiver Länge den Wert ∞ besitzt.

Aufgabe 6.12. Es seien V und W reelle Vektorräume und

$$\varphi: V \longrightarrow W$$

eine injektive lineare Abbildung. Zeige, dass das Bild eines Parallelotops wieder ein Parallelotop ist.

Aufgabe 6.13. Zeige, dass das Zählmaß auf dem \mathbb{R}^n translationsinvariant, aber auf dem Einheitswürfel nicht beschränkt ist.

Aufgabe 6.14. Zeige, dass das Gittermaß zum Gitterabstand $\epsilon > 0$ auf dem \mathbb{R}^n nicht translationsinvariant, aber auf dem Einheitswürfel beschränkt ist.

Aufgabe 6.15.*

Die Grundfläche eines Kochtopfes sei eine Kreisscheibe mit Radius 13 cm, der Topf sei 10 cm hoch und auf die Höhe von 7,7 cm mit Wasser gefüllt. Eine Kartoffel wird in den Topf geworfen und taucht voll unter, wobei das Wasser auf eine Höhe von 8,8 cm ansteigt.

- Berechne das Volumen der Kartoffel (rechne mit $\pi = 3,14$; Einheit nicht vergessen)!
- Welche maßtheoretischen Gesetzmäßigkeiten wurden bei der Berechnung von a) verwendet?
- Handelt es sich um eine große oder um eine kleine Kartoffel?

Aufgabe 6.16.*

Eine Bratpfanne hat einen Durchmesser von 30 cm und wird mit Öl und mit 25 kreisrunden Bratkartoffeln überschneidungsfrei bedeckt, die alle einen Durchmesser von 4 cm und eine Höhe von 0,5 cm haben. Das Öl bildet unterhalb der Bratkartoffeln einen dünnen Ölfilm von 0,1 mm Höhe und erreicht in den Zwischenräumen eine Höhe von 1 mm.

- Wie viel Öl befindet sich in der Pfanne (rechne mit $\pi = 3,14$; Einheit nicht vergessen)?
- Welche maßtheoretischen Gesetzmäßigkeiten wurden bei der Berechnung von a) verwendet?

Aufgabe 6.17.*

Eine Klorolle hat einen äußeren Durchmesser von 12 cm und einen inneren Durchmesser von 4 cm. Das ausgewickelte Klopapier ergibt eine Länge von 20 Metern. Wie dick ist das Klopapier?

Aufgabe 6.18.*

Aus einem Blatt Papier mit den Seitenlängen 30 und 20 cm sollen kreisförmige Konfettiplättchen mit einem Durchmesser von 0,5 cm herausgestanzt werden.

- Zeige, dass man höchstens 3057 Konfettiplättchen aus einem Blatt erhalten kann.
- Zeige, dass man mindestens 2607 Konfettiplättchen aus einem Blatt erhalten kann.
- Der geniale Narr Karl-Heinz kommt auf die Idee, das Blatt insgesamt neunmal zu falten, wobei jeweils die längere Seite halbiert wird. Anschließend wird das entstandene Bündel gestanzt. Wie viele Plättchen kann man mit dieser Methode erhalten?

Aufgabe 6.19. Es seien $I = [a, b]$ und $J = [c, d]$ reelle Intervalle und es seien μ_I bzw. μ_J die zugehörigen Maße auf \mathbb{R} , die jeweils auf den Intervallen gleichverteilt sind. Bestimme $\mu_I * \mu_J$.

6.2. Aufgaben zum Abgeben.**Aufgabe 6.20.** (4 Punkte)

Zeige, dass sich eine Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}$ genau dann als eine endliche Vereinigung von rechtsseitig halboffenen Intervallen schreiben lässt, wenn dies mit endlich vielen disjunkten rechtsseitig halboffenen Intervallen möglich ist.

Aufgabe 6.21. (6 (3+3) Punkte)

Es sei \mathcal{V} der Mengen-Präring aller Teilmengen $T \subseteq \mathbb{R}$, die sich als eine endliche Vereinigung von (rechtsseitig) halboffenen Intervallen $[a, b[$ schreiben lassen. Beweise folgende Aussagen.

- Die zu V über eine Zerlegung in disjunkte halboffene Intervalle

$$V = [a_1, b_1[\uplus \dots \uplus [a_n, b_n[$$

definierte Zahl

$$\mu(V) = \sum_{i=1}^n (b_i - a_i)$$

ist wohldefiniert.

- (2) Durch die Zuordnung $V \mapsto \mu(V)$ wird ein Prämaß auf diesem Prering definiert.



Die Cantor-Menge ist das Endprodukt des in dieser Skizze angedeuteten Ausdünnungsprozesses.

Aufgabe 6.22. (5 (1+2+2) Punkte)

Die *Cantor-Menge* ist definiert durch

$$C = \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} z_i 3^{-i} \mid z_i \in \{0, 2\} \text{ für alle } i \in \mathbb{N}_+ \right\}.$$

- Zeige, dass C überabzählbar ist.
- Zeige, dass C eine Borel-Menge ist.
- Zeige $\lambda^1(C) = 0$.

Aufgabe 6.23. (6 Punkte)

Es sei v_1, \dots, v_n eine Basis des \mathbb{R}^n . Zeige, dass das von diesen Vektoren erzeugte Parallelotop einen achsenparallelen Würfel (mit positiver Länge) enthält.

Aufgabe 6.24. (12 Punkte)

Es sei μ ein Maß auf dem \mathbb{R}^n , das für alle offenen Bällen $U(P, r)$ mit dem Borel-Lebesgue-Maß übereinstimmt. Zeige $\mu = \lambda^n$.

(Für den zweidimensionalen Fall gibt es 10 Punkte.)

Aufgabe 6.25. (5 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für eine offene Menge $U \subseteq [0, 1]$, deren Abschluss das Einheitsintervall ist, deren Borel-Lebesgue-Maß aber kleiner als 1 ist.

7. VORLESUNG - DETERMINANTE

7.1. Das Verhalten von Maßen bei linearen Abbildungen.

Lemma 7.1. *Es sei V ein reeller endlichdimensionaler Vektorraum und*

$$L: \mathbb{R}^n \longrightarrow V$$

eine bijektive lineare Abbildung. Dann gelten für das Bildmaß L_λ^n des Borel-Lebesgue-Maßes λ^n unter L folgende Eigenschaften.*

- (1) $L_*\lambda^n$ ist translationsinvariant.
 (2) Bei $V = \mathbb{R}^n$ ist $L_*\lambda^n = \frac{1}{\lambda^n(P_L)} \cdot \lambda^n$, wobei P_L das von den Bildvektoren $L(e_1), \dots, L(e_n)$ erzeugte Parallelotop bezeichnet.

Beweis. (1). Es sei τ_v die Translation um den Vektor $v \in V$. Es sei $w = L^{-1}(v)$. Dabei ist

$$\tau_v \circ L = L \circ \tau_w.$$

Somit ist für eine beliebige messbare Menge $B \subseteq V$ aufgrund der Translationsinvarianz von λ^n

$$\begin{aligned} (L_*\lambda^n)(B + v) &= \lambda^n(L^{-1}(B + v)) \\ &= \lambda^n(\tau_w^{-1}(L^{-1}(B + v))) \\ &= \lambda^n(L^{-1}(\tau_v^{-1}(B + v))) \\ &= \lambda^n(L^{-1}(B)) \\ &= (L_*\lambda^n)(B). \end{aligned}$$

(2) folgt aus (1) mit Korollar 6.13. □

Satz 7.2. *Es sei*

$$L: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine lineare Abbildung. Dann gilt für jede messbare Menge $S \subseteq \mathbb{R}^n$ die Beziehung

$$\lambda^n(L(S)) = |\det L| \cdot \lambda^n(S).$$

Beweis. Wenn L nicht bijektiv ist, so steht links und rechts einfach 0, wie aus Lemma 6.11 und Satz 16.11 (Lineare Algebra (Osnabrück 2017-2018)) folgt. Wir können also annehmen, dass L bijektiv ist. Dann kann man die Aussage mit dem Bildmaß als

$$L_*\lambda^n = \frac{1}{|\det L|} \lambda^n$$

formulieren. Aufgrund von Satz 12.9 (Lineare Algebra (Osnabrück 2017-2018)) in Verbindung mit Lemma 12.8 (Lineare Algebra (Osnabrück 2017-2018)) gibt es Elementarmatrizen E_1, \dots, E_k und eine Diagonalmatrix D mit $L = E_1 \circ \dots \circ E_\ell \circ D \circ E_{\ell+1} \circ \dots \circ E_k$ ⁶ Aufgrund des Determinantenmultiplikationssatzes und wegen Lemma 3.10 und Aufgabe 7.7 genügt es, die Aussage für Diagonalmatrizen und Elementarmatrizen zu beweisen.

Wegen Lemma 7.1 ist also für diese Matrizen zu zeigen, dass das Volumen des von den Bildvektoren der Standardvektoren erzeugten Parallelotops gleich dem Betrag der Determinante der Matrix ist. Für eine Diagonalmatrix ist das erzeugte Parallelotop der Quader, dessen Seitenlängen die Beträge der Diagonaleinträge sind, so dass das Volumen das Produkt davon ist. Nach Lemma 16.4 (Lineare Algebra (Osnabrück 2017-2018)) ist die Determinante

⁶Da hier alle Matrizen invertierbar sind, genügen allein die links stehenden Elementarmatrizen ohne die Skalierungsmatrizen.

das Produkt der Diagonaleinträge, so dass im Betrag Gleichheit gilt. Damit gilt die Aussage auch für eine elementare Skalierungsmatrix, die ja eine Diagonalmatrix ist.

Da die Determinante der übrigen Elementarmatrizen 1 oder -1 ist, müssen wir zeigen, dass das Volumen des von den Spaltenvektoren einer solchen Elementarmatrix erzeugten Parallelotops gleich 1 ist. Dies ist klar für den Typ (1), also für die elementare Vertauschungsmatrix, da es sich um den Einheitswürfel handelt, wobei lediglich die Reihenfolge der erzeugenden Vektoren geändert wird. Es bleibt also eine elementare Scherungsmatrix $A_{ij}(a)$ mit $a \neq 0$ und $i \neq j$ zu betrachten. Wegen (Wir notieren nur die zweidimensionale Situation, da sich alles in zwei Zeilen und zwei Spalten abspielt)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{-1} & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und dem schon bewiesenen kann man $a = 1$ annehmen. Ferner kann man durch unnummerieren annehmen, dass $i = 1$ und $j = 2$ ist. Es geht dann um das Volumen des von

$$e_1, e_1 + e_2, e_3, \dots, e_n$$

erzeugten Parallelotops, also um

$$\begin{aligned} P &= \{t_1 e_1 + t_2(e_1 + e_2) + t_3 e_3 + \dots + t_n e_n \mid t_i \in [0, 1]\} \\ &= \{(t_1 + t_2)e_1 + t_2 e_2 + t_3 e_3 + \dots + t_n e_n \mid t_i \in [0, 1]\} \\ &= \{s e_1 + t_2 e_2 + t_3 e_3 + \dots + t_n e_n \mid t_i \in [0, 1] \\ &\quad \text{für } i \geq 2, s \in [0, 2], t_2 \leq s \leq 1 + t_2\}. \end{aligned}$$

Wir betrachten

$$H_1 = \{s e_1 + t_2 e_2 + t_3 e_3 + \dots + t_n e_n \mid t_i \in [0, 1] \text{ für } i \geq 2, s \in [0, 1], t_2 \geq s\}$$

und

$$H_2 = \{s e_1 + t_2 e_2 + t_3 e_3 + \dots + t_n e_n \mid t_i \in [0, 1] \\ \text{für } i \geq 2, s \in [1, 2], s \geq 1 + t_2\}.$$

Dann ist

$$[0, 2] \times [0, 1] \times \dots \times [0, 1] = H_1 \cup P \cup H_2,$$

wobei die Durchschnitte dieser drei Mengen jeweils in einer Hyperebene enthalten sind und daher nach Lemma 6.11 das Maß 0 besitzen. Also ist einerseits

$$\lambda^n(P) = 2 - \lambda^n(H_1) - \lambda^n(H_2).$$

Andererseits geht H_2 durch verschieben um e_1 aus

$$G_2 = \{s e_1 + t_2 e_2 + t_3 e_3 + \dots + t_n e_n \mid t_i \in [0, 1] \text{ für } i \geq 2, s \in [0, 1], s \geq t_2\}$$

hervor und besitzt damit wegen der Translationsinvarianz dasselbe Volumen wie G_2 . Da $H_1 \cup G_2$ der Einheitswürfel ist, wobei der Durchschnitt wieder in einer Hyperebene liegt, ist

$$\lambda^n(H_1) + \lambda^n(H_2) = \lambda^n(H_1) + \lambda^n(G_2) = 1$$

und somit ist $\lambda^n(P) = 1$. \square

Insbesondere kann man das Maßverhältnis bei einer linearen Abbildung mit einer beliebigen Teilmenge mit positivem Maß im Definitionsraum ablesen.

Korollar 7.3. *Bei einer Streckung*

$$\varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, v \longmapsto av,$$

um den Streckungsfaktor $a \in \mathbb{R}$ gilt für jede messbare Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}^n$ die Formel

$$\lambda^n(\varphi(T)) = |a|^n \cdot \lambda^n(T).$$

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus Satz 7.2. \square

Korollar 7.4. *Eine lineare Isometrie*

$$L: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

ist volumentreu.

Beweis. Dies folgt wegen Lemma 7.1 und Satz 7.2 aus Lemma 33.13 (Lineare Algebra (Osnabrück 2017-2018)). \square

Korollar 7.5. *Eine Drehung*

$$D(\alpha): \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

(die durch eine Drehmatrix $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$ gegeben ist) ist flächentreu.

Beweis. Dies folgt wegen Satz 7.2 aus Satz 15.10 (Analysis (Osnabrück 2021-2023))(6). \square

Beispiel 7.6. Ein achsenparalleles Ellipsoid wird im \mathbb{R}^3 durch

$$E = \{(x, y, z) \mid ax^2 + by^2 + cz^2 \leq r^2\}$$

mit $a, b, c > 0$ beschrieben. Es ist das Bild der Einheitskugel

$$K_3 = \{(u, v, w) \mid u^2 + v^2 + w^2 \leq 1\}$$

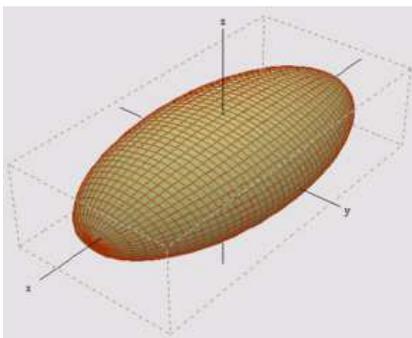
unter der linearen Abbildung

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{r}{\sqrt{a}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r}{\sqrt{b}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r}{\sqrt{c}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix},$$

also mit $x = \frac{r}{\sqrt{a}}u$, $y = \frac{r}{\sqrt{b}}v$ und $z = \frac{r}{\sqrt{c}}w$. Nach Satz 7.2 ist daher das Volumen dieses Ellipsoids gleich

$$\text{vol}(E) = \frac{r^3}{\sqrt{abc}} \cdot \text{vol}(K_3).$$

Das Volumen der Einheitskugel ist $\frac{4}{3}\pi$, siehe Beispiel 12.4.



7.2. Volumina in euklidischen Räumen.

Auf jedem reellen n -dimensionalen Vektorraum V kann man ein sinnvolles Maß definieren, indem man eine Isomorphie

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow V$$

wählt und das Bildmaß zum Borel-Lebesgue-Maß nimmt. Dieses Maß ist allerdings abhängig von der gewählten Isomorphie, bei zwei verschiedenen Isomorphismen unterscheiden sich die so gewonnenen Maße um einen skalaren positiven Faktor. Bei euklidischen Räumen kann man aber mit Hilfe von Orthonormalbasen ein kanonisches Borel-Lebesgue-Maß definieren.

Satz 7.7. *Es sei $(V, \langle -, - \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes translationsinvariantes Maß λ_V auf den Borelmengen von V , das jedem von einer Orthonormalbasis aufgespannten Parallelotop den Wert 1 zuweist.*

Beweis. Es sei u_1, \dots, u_n eine Orthonormalbasis von V und es sei

$$L_u: \mathbb{R}^n \longrightarrow V, e_i \longmapsto u_i,$$

die dadurch definierte lineare Isometrie. Dann ist das Bildmaß $L_{u*}\lambda^n$ nach Lemma 7.1 translationsinvariant und besitzt auf dem von den u_1, \dots, u_n erzeugten Parallelotop den Wert 1. Es bleibt also zu zeigen, dass dieses Maß auch jedem anderen orthonormalen Parallelotop den Wert 1 zuweist. Es sei

also v_1, \dots, v_n eine weitere Orthonormalbasis mit dem zugehörigen Parallelotop P_v und der zugehörigen Isometrie

$$L_v: \mathbb{R}^n \longrightarrow V, e_i \longmapsto v_i.$$

Dann ist

$$L_u^{-1}(P_v) = (L_v^{-1} \circ L_u)^{-1}(L_v^{-1}(P_v)) = (L_v^{-1} \circ L_u)^{-1}(E),$$

wobei E den Einheitswürfel im \mathbb{R}^n bezeichnet. Da $L_v^{-1} \circ L_u$ eine Isometrie des \mathbb{R}^n ist, folgt die Aussage aus Korollar 7.4. \square

Das in dieser Aussage für euklidische Vektorräume definierte Maß heißt ebenfalls *Borel-Lebesgue-Maß*.

Satz 7.8. *Es sei $(V, \langle -, - \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum, sei v_1, \dots, v_n eine Basis von V und sei P das davon erzeugte Parallelotop. Dann gilt für das Borel-Lebesgue-Maß λ_V auf V*

$$\lambda_V(P) = (\det(\langle v_i, v_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n})^{1/2}.$$

Beweis. Die Positivität der Determinante der Gramschen Matrix folgt aus Satz 48.12 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)). Es sei u_1, \dots, u_n eine Orthonormalbasis von V und es sei

$$v_j = \sum_{k=1}^n a_{kj} u_k.$$

Die Spalten der Matrix $A = (a_{kj})_{kj}$ sind also die Koeffizienten von v_j bezüglich der gegebenen Orthonormalbasis. Nach Satz 7.2 und aufgrund der Definition des Maßes λ_V in Satz 7.7 ist somit

$$\lambda_V(P) = |\det A|.$$

Wegen

$$\langle v_i, v_j \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n a_{ki} u_k, \sum_{k=1}^n a_{kj} u_k \right\rangle = \sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj}$$

ist

$$A^{\text{tr}} A = (\langle v_i, v_j \rangle)_{ij}.$$

Nach Satz 17.5 (Lineare Algebra (Osnabrück 2017-2018)) ist $\det A = \det A^{\text{tr}}$, so dass sich die Aussage aus Satz 17.4 (Lineare Algebra (Osnabrück 2017-2018)) ergibt. \square

Die vorstehende Aussage erlaubt es, auch bei $k < n$ das k -dimensionale Maß eines k -dimensionalen Parallelotops im \mathbb{R}^n auszurechnen (ihr n -dimensionales Maß ist 0, da sie in einem echten Untervektorraum liegen). Die einfachste Situation liegt bei $k = 1$ vor, dann handelt es sich um eine einfache Längenberechnung mit Hilfe des Skalarproduktes. Ein typischeres Beispiel ist die Flächenberechnung eines Parallelogramms im \mathbb{R}^3 .

Beispiel 7.9. Wir betrachten das von den Vektoren $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ aufgespannte Parallelogramm im \mathbb{R}^3 . Nach Satz 7.8 müssen wir die Skalarprodukte dieser Vektoren berechnen. Es ist

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = 13, \quad \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle = 2, \quad \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle = 21.$$

Dies führt zur Matrix

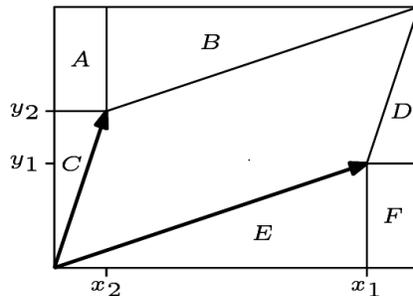
$$\begin{pmatrix} 13 & 2 \\ 2 & 21 \end{pmatrix}$$

mit der Determinante 269. Der Flächeninhalt des Parallelogramms ist also $\sqrt{269}$.

7. ARBEITSBLATT

7.1. Aufwärmaufgaben.

Aufgabe 7.1.*



Man begründe anhand des Bildes, dass zu zwei Vektoren (x_1, y_1) und (x_2, y_2) die Determinante der durch die Vektoren definierten 2×2 -Matrix mit dem Flächeninhalt des von den beiden Vektoren aufgespannten *Parallelogramms* (bis auf das Vorzeichen) übereinstimmt.

Aufgabe 7.2.*

Es seien $P_1 = (a_1, b_1)$, $P_2 = (a_2, b_2)$ und $P_3 = (a_3, b_3)$ drei Punkte im \mathbb{R}^2 . Stelle den Flächeninhalt des zugehörigen Dreiecks mit $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$ dar.

Aufgabe 7.3.*

Berechne das Volumen des von den drei Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

im \mathbb{R}^3 erzeugten Parallelotops.

Aufgabe 7.4.*

Berechne das Volumen des von den drei Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

im \mathbb{R}^3 erzeugten Parallelotops.

Aufgabe 7.5.*

Zeige, dass die Determinante einer linearen Isometrie

$$\varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

gleich 1 oder gleich -1 ist.

(Tipp: Betrachte $L^{\text{tr}} \circ L$).

Aufgabe 7.6. Man gebe ein Beispiel für eine lineare Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

derart, dass φ volumentreu, aber keine Isometrie ist.

Aufgabe 7.7. Es sei

$$L: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine lineare Abbildung und $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Zeige die Gleichheit $L_*(c\lambda^n) = c(L_*\lambda^n)$.

Aufgabe 7.8. Es sei

$$p_1: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

die lineare Projektion auf die erste Komponente. Man skizziere drei messbare Teilmengen $T_1, T_2, T_3 \subseteq \mathbb{R}^2$ derart an, dass ihr Flächeninhalt gleich 0 bzw. 1 bzw. ∞ ist und deren Bild in \mathbb{R} die Länge 1 besitzt.

Aufgabe 7.9. Es sei

$$\varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

ein linearer Endomorphismus, der nicht bijektiv sei. Zeige, dass das Bildmaß $\varphi_*\lambda^n$ nicht σ -endlich ist.

Aufgabe 7.10. Es sei $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass es eine positive reelle Zahl κ_n gibt derart, dass das n -dimensionale Volumen einer abgeschlossenen Kugel im \mathbb{R}^n mit Radius r und mit einem beliebigen Mittelpunkt gleich $\kappa_n r^n$ ist.

Aufgabe 7.11. Berechne den Flächeninhalt des von den Vektoren

$$(1, 3, 5) \text{ und } (-2, 4, 1)$$

im \mathbb{R}^3 erzeugten Parallelogramms (in dem von diesen Vektoren erzeugten Unterraum).

Aufgabe 7.12.*

Berechne den Flächeninhalt des von den Vektoren

$$v = (2, 3, -4) \text{ und } w = (1, -1, 7)$$

im \mathbb{R}^3 erzeugten Parallelogramms (in dem von diesen Vektoren erzeugten Unterraum).

Aufgabe 7.13.*

Berechne das Volumen des von den Vektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

im \mathbb{R}^4 erzeugten Parallelotops (in dem von diesen Vektoren erzeugten Unterraum).

7.2. Aufgaben zum Abgeben.

Aufgabe 7.14. (4 Punkte)

Berechne das Volumen des von den Vektoren

$$(2, 1, 3, 4), (4, 0, -1, 3) \text{ und } (5, -2, -2, 0)$$

im \mathbb{R}^4 erzeugten Parallelotops (in dem von diesen Vektoren erzeugten Unterraum).

Aufgabe 7.15. (5 Punkte)

Berechne den Flächeninhalt des von den Vektoren $(0, 1)$, $(2, 0)$, $(1, 3)$ erzeugten „Pseudoparallelogramms“, also von

$$S = \{a(0, 1) + b(2, 0) + c(1, 3) \mid a, b, c \in [0, 1]\}.$$

Aufgabe 7.16. (6 Punkte)

Es sei

$$\varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

eine lineare Abbildung, die surjektiv, aber nicht injektiv sei. Zeige, dass das Bildmaß $\mu = \varphi_*\lambda^n$ für jede Borelmenge $T \subseteq \mathbb{R}^m$ durch

$$\mu(T) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \lambda^m(T) = 0, \\ \infty, & \text{falls } \lambda^m(T) > 0, \end{cases}$$

bestimmt ist.

Aufgabe 7.17. (4 Punkte)

Es sei $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ die Oberfläche der Einheitskugel. Zeige, dass das Volumen dieser Oberfläche 0 ist.

Aufgabe 7.18. (5 Punkte)

Es sei $u \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl mit $|u| = 1$. Zeige, dass die Multiplikationsabbildung

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, z \longmapsto uz,$$

flächentreu ist.

(Dabei ist $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ mit dem Borel-Lebesgue-Maß versehen).

Aufgabe 7.19. (6 Punkte)

Es seien drei Vektoren $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^2$ gegeben und es sei

$$S = \{av_1 + bv_2 + cv_3 \mid a, b, c \in [0, 1]\}$$

das davon erzeugte „Pseudoparallelogramm“. Zeige, dass der Flächeninhalt von S gleich der Summe der Flächeninhalte der drei Parallelogramme ist, die von je zwei der beteiligten Vektoren aufgespannt werden.

8. VORLESUNG - MESSBARE FUNKTIONEN

Wir beginnen jetzt mit der allgemeinen Integrationstheorie, die auf der Maßtheorie aufbaut. Wie schon im Fall von stetigen Funktionen

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

geht es um den (Flächen-)Inhalt unterhalb des Graphen der Funktion. Jetzt wird allerdings der Definitionsbereich nicht mehr unbedingt ein Intervall sein, sondern ein beliebiger (zumeist σ -endlicher) Maßraum (M, \mathcal{A}, μ) . Eine Funktion

$$f: M \longrightarrow \mathbb{R}$$

definiert nach wie vor einen Graphen in $M \times \mathbb{R}$ und damit eine Teilmenge aus $M \times \mathbb{R}$, die unterhalb des Graphen (und innerhalb von $M \times \mathbb{R}_{\geq 0}$) liegt. Auf $M \times \mathbb{R}$ existiert unter gewissen schwachen Voraussetzungen das Produktmaß $\mu \otimes \lambda^1$, und mit diesem Maß wird das Integral erklärt. Die Funktionen, die man sinnvoll integrieren kann, gehen weit über die stetigen Funktionen hinaus. Sie müssen allerdings mit den gegebenen Maßräumen verträglich sein, was zum Begriff der messbaren Funktion bzw. der numerischen Funktion führt.

8.1. Messbare numerische Funktionen.

Wir erinnern daran, dass wir

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$$

gesetzt haben. Diese Menge versehen wir mit einer σ -Algebra $\overline{\mathcal{B}}$, zu der eine Teilmenge $T \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ genau dann gehört, wenn $T \cap \mathbb{R}$ eine Borel-Menge in \mathbb{R} ist. Man kann auf $\overline{\mathbb{R}}$ auch eine Topologie definieren derart, dass das zugehörige System der Borel-Mengen gleich $\overline{\mathcal{B}}$ ist. Die (halb)offenen Intervalle bilden wieder ein Erzeugendensystem für $\overline{\mathcal{B}}$. Auch das Borel-Lebesgue-Maß lässt sich durch $\lambda^1(T) = \lambda^1(T \cap \mathbb{R})$ darauf ausdehnen, d.h. die beiden unendlichen Punkte kann man, wie jeden einzelnen Punkt, für das Borel-Lebesgue-Maß ignorieren.

Auch den Supremumsbegriff für Teilmengen und den Konvergenzbegriff für Folgen kann man auf $\overline{\mathbb{R}}$ in naheliegender Weise ausdehnen. Eine nach oben unbeschränkte Menge besitzt $+\infty$ als Supremum, und eine Folge reeller Zahlen konvergiert gegen $\pm\infty$, wenn sie bestimmt gegen $\pm\infty$ divergiert. Eine Funktion $f: M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ nennt man auch eine *numerische Funktion*.

Definition 8.1. Es sei (M, \mathcal{A}) ein Messraum. Dann nennt man eine numerische Funktion

$$M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

messbar, wenn sie $\mathcal{A} - \overline{\mathcal{B}}$ -messbar ist.

Lemma 8.2. *Es sei (M, \mathcal{A}) ein Messraum und sei*

$$f: M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

eine numerische Funktion. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

- (1) *f ist messbar.*
- (2) *Für alle $a \in \mathbb{R}$ ist $\{x \in M \mid f(x) \geq a\}$ messbar.*
- (3) *Für alle $a \in \mathbb{R}$ ist $\{x \in M \mid f(x) > a\}$ messbar.*
- (4) *Für alle $a \in \mathbb{R}$ ist $\{x \in M \mid f(x) \leq a\}$ messbar.*
- (5) *Für alle $a \in \mathbb{R}$ ist $\{x \in M \mid f(x) < a\}$ messbar.*

Beweis. Die Bedingungen (2), (3), (4), (5) sind jeweils notwendig, da halbseitig unbeschränkte Intervalle Borel-Mengen von $\overline{\mathbb{R}}$ sind. Ist umgekehrt eine der Bedingungen (2), (3), (4) oder (5) erfüllt, so betrachtet man für $a < b$ die Menge $[a, b[= [a, \infty] \setminus [b, \infty]$ (unter Bedingung (2) bzw. entsprechende Mengen unter den anderen Bedingungen). Nach Voraussetzung sind dann auch die Urbilder von diesen halboffenen Intervallen messbare Teilmengen in M . Da die halboffenen Intervalle nach Lemma 2.10 ein Erzeugendensystem der Borel-Mengen von \mathbb{R} bilden, folgt die Aussage aus Lemma 1.16. \square

Lemma 8.3. *Es sei (M, \mathcal{A}) ein Messraum und seien*

$$f, g: M \longrightarrow \mathbb{R}$$

messbare Funktionen. Dann gelten folgende Aussagen.

- (1) *Die Funktion $-f$ ist ebenfalls messbar.*
- (2) *Es sei $g(x) \neq 0$ für alle $x \in M$. Dann ist auch die Funktion $1/g$ messbar.*
- (3) *Die Funktionen $f + g$ und $f - g$ sind messbar.*
- (4) *Die Funktion $f \cdot g$ ist messbar. Wenn g keine Nullstelle besitzt, so ist auch f/g messbar.*

Beweis. Die Rechenoperationen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto -t$, $\mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}, t \mapsto t^{-1}$, $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (s, t) \mapsto s + t$, und $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (s, t) \mapsto s \cdot t$, sind nach Lemma 34.6 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)) und Lemma 34.7 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)) stetig und daher nach Lemma 2.11 messbar. Ferner ist eine Hintereinanderschaltung von messbaren Abbildungen wieder messbar, und mit f und g ist nach Lemma 4.11 auch die Abbildung

$$M \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}, x \longmapsto (f(x), g(x)),$$

messbar. Daher ergeben sich die Behauptungen durch Betrachten der Hintereinanderschaltungen

$$M \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{-} \mathbb{R}, M \xrightarrow{f} \mathbb{R} \setminus \{0\} \xrightarrow{-1} \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ und } M \xrightarrow{f, g} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \xrightarrow{+, \cdot} \mathbb{R},$$

\square

Die vorstehende Aussage könnte man auch für $\overline{\mathbb{R}}$ formulieren, wobei man dann allerdings noch einige Rechenregeln festlegen müsste.

Mit den zusätzlichen Symbolen $+\infty$ und $-\infty$ lassen sich insbesondere Grenzfunktionen von Funktionenfolgen einfach erfassen. Das *Supremum einer Funktionenfamilie* ist punktweise durch

$$(\sup (f_i, i \in I))(x) := \sup (f_i(x), i \in I)$$

definiert. Es kann den Wert ∞ annehmen, und zwar auch dann, wenn alle f_i reellwertig sind.

Lemma 8.4. *Es sei I eine abzählbare Indexmenge und (M, \mathcal{A}) ein Messraum. Es sei*

$$f_i: M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

($i \in I$) eine Familie von messbaren numerischen Funktionen. Dann sind auch die Funktionen $\sup (f_i, i \in I)$ und $\inf (f_i, i \in I)$ messbar.

Beweis. Für jedes $a \in \mathbb{R}$ ist

$$\{x \in M \mid \sup (f_i, i \in I)(x) \geq a\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}_+} \left(\bigcup_{i \in I} \left\{ x \in M \mid f_i(x) \geq a - \frac{1}{k} \right\} \right).$$

Zum Beweis dieser Gleichung sei x links enthalten und $k \in \mathbb{N}_+$ vorgegeben. Wegen $\sup (f_i(x), i \in I) \geq a$ kann nicht

$$f_i(x) < a - \frac{1}{k}$$

für alle i gelten, da sonst das Supremum echt kleiner als a wäre. Es gibt also ein $i \in I$ mit $f_i(x) \geq a - \frac{1}{k}$, und x gehört auch rechts dazu. Wenn umgekehrt x zur rechten Menge dazugehört, so gibt es für jedes $k \in \mathbb{N}_+$ ein $i \in I$ mit $f_i(x) \geq a - \frac{1}{k}$. Daher ist $\sup (f_i(x), i \in I) \geq a - \frac{1}{k}$ für alle k und somit $\sup (f_i(x), i \in I) \geq a$.

Die Menge rechts ist als abzählbarer Durchschnitt von abzählbaren Vereinigungen von nach Voraussetzung messbaren Mengen wieder messbar. Nach Lemma 8.2 folgt daraus die Messbarkeit der Supremumsabbildung. Die Messbarkeit der Infimumsabbildung beweist man ähnlich oder führt sie durch Betrachten der negativen Funktionen auf die Messbarkeit der Supremumsabbildung zurück. \square

Beispiel 8.5. Wir betrachten die konstante Funktionenfolge $f_n := -\frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}_+$) auf einer beliebigen Menge M . Deren Supremum ist die 0-Funktion. Dabei ist

$$\{x \in M \mid \sup (f_n, n \in \mathbb{N}_+)(x) \geq 0\} = M,$$

aber

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}_+} \{x \in M \mid f_n(x) \geq 0\} = \emptyset,$$

d.h. ohne den Durchschnitt über $k \in \mathbb{N}_+$ mit dem Abweichungsterm $-\frac{1}{k}$ ist die Gleichung im Beweis zu Lemma 8.4 nicht richtig.

Korollar 8.6. *Es sei (M, \mathcal{A}) ein Messraum und sei*

$$f: M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

eine messbare numerische Funktion. Dann ist auch die Betragsfunktion $|f|$ messbar.

Beweis. Dies folgt wegen $|f| = \sup(f, -f)$ aus Lemma 8.3 (1) und aus Lemma 8.4. \square

Definition 8.7. Zu einer Funktion

$$f: M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

nennt man $f_+ = \sup(f, 0)$ den *positiven Teil* und $f_- = -\inf(f, 0) = \sup(-f, 0)$ den *negativen Teil* von f .

Dieses Konzept ist hilfreich, um Aussagen für beliebige Funktionen auf nicht-negative Funktionen zurückführen zu können. Man beachte, dass beide Teile nichtnegativ sind. Nach Lemma 8.4 ist der positive als auch der negative Teil einer messbaren Funktionen wieder messbar. Es ist $f = f_+ - f_-$.

Korollar 8.8. *Es sei (M, \mathcal{A}) ein Messraum und sei*

$$f_n: M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

eine Folge von messbaren numerischen Funktionen, die punktweise gegen eine Grenzfunktion f konvergiere. Dann ist auch f messbar.

Beweis. Wir zeigen, dass die Urbilder von Mengen der Form $]a, \infty]$ unter der Grenzfunktion f messbare Mengen sind. Daraus folgt nach Lemma 8.2 die Messbarkeit von f . Für jedes $a \in \mathbb{R}$ gilt die Gleichheit

$$\{x \in M \mid f(x) > a\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}_+} \left(\bigcup_{n_0 \in \mathbb{N}} \left(\bigcap_{n \geq n_0} \left\{ x \in M \mid f_n(x) > a + \frac{1}{k} \right\} \right) \right).$$

Zum Beweis dieser Gleichheit sei zuerst $f(x) > a$. Dann gilt auch $f(x) > a + \frac{1}{k}$ für ein hinreichend großes k . D.h. dass $]a + \frac{1}{k}, \infty]$ eine offene Umgebung von $f(x)$ ist. Dann gehört x auch zur inneren Vereinigung der rechten Seite, da diese die mengentheoretische Formulierung für den Sachverhalt ist, dass es ein n_0 derart gibt, dass für alle $n \geq n_0$ die Folgenglieder $f_n(x)$ ebenfalls zu $]a + \frac{1}{k}, \infty]$ gehören. Wenn hingegen x zur rechten Seite gehört, so bedeutet dies, dass es $k, n_0 \in \mathbb{N}_+$ derart gibt, dass für alle $n \geq n_0$ die Beziehung $f_n(x) > a + \frac{1}{k}$ besteht. Dann gilt für den Limes $f(x) \geq a + \frac{1}{k}$ und damit $f(x) > a$. Die rechte Seite der Gleichung zeigt, dass es sich um eine messbare Menge handelt, da abzählbare Durchschnitte und abzählbare Vereinigungen von messbaren Mengen wieder messbar sind. \square

8.2. Einfache Funktionen.

Ein äußerst wichtiges Konzept für die Integrationstheorie ist es, dass sich beliebige messbare Funktionen durch besonders einfache Funktionen approximieren lassen, für die das Integral eine Summe ist. Auf diesem Konzept beruhte schon das Riemann-Integral, das wir im ersten Semesters entwickelt haben. Im Rahmen des Lebesgue-Integrals gibt es eine andere Art von Treppenfunktionen. Dabei wird nicht der Definitionsbereich in endlich viele einfache Stücke (Intervalle) unterteilt, sondern die Bildmenge soll besonders einfach sein.

Definition 8.9. Es sei (M, \mathcal{A}) ein Messraum. Eine messbare numerische Funktion

$$f: M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

heißt *einfach*, wenn sie nur endlich viele Werte besitzt.

Definition 8.10. Es sei (M, \mathcal{A}) ein Messraum. Eine messbare numerische Funktion

$$f: M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

heißt σ -*einfach*, wenn sie nur abzählbar viele Werte besitzt.

Die Terminologie ist hierbei extrem uneinheitlich. Man findet für diese beiden Begriffe auch die Wörter Elementarfunktion und Treppenfunktion, wobei manchmal die Messbarkeit vorausgesetzt wird, manchmal nicht. Manchmal wird auch noch die Nichtnegativität vorausgesetzt.

Lemma 8.11. *Es sei (M, \mathcal{A}) ein Messraum und sei*

$$f: M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

eine messbare numerische nichtnegative Funktion. Dann gibt es eine wachsende Folge von nichtnegativen einfachen Funktionen

$$f_n: M \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0},$$

die punktweise gegen f konvergieren.

Beweis. Die Idee ist, die Funktion f im n -ten Schritt durch eine einfache Funktion f_n zu approximieren, deren Werte rationale Zahlen der Form $\frac{k}{2^n}$ mit $0 \leq k \leq n2^n$ sind. Dies sind nur endlich viele Zahlen. Für jede nichtnegative reelle Zahl a ist entweder $a \geq n$, oder es gibt ein eindeutig bestimmtes k zwischen 0 und $n2^n - 1$ mit $\frac{k}{2^n} \leq a < \frac{k+1}{2^n}$. Daher ist die folgende einfache Funktion wohldefiniert.

$$f_n(x) := \begin{cases} \frac{k}{2^n}, & \text{falls } \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n} \text{ mit } k \leq n2^n - 1, \\ n & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sie ist messbar, da aufgrund der Messbarkeit von f die Mengen

$$\left\{ x \in M \mid \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n} \right\}$$

messbar sind. Die Folge dieser Funktionen wächst offenbar gegen f . \square

Für jedes $x \in M$ gibt ab $n \geq f(x)$ die Folge $f_n(x)$ den Wert der Dualbruchentwicklung für $f(x)$ bis zur n -ten Ziffer nach dem Komma an.

8. ARBEITSBLATT

8.1. Aufwärmaufgaben.

Aufgabe 8.1. Wir definieren auf $\overline{\mathbb{R}}$ eine Topologie, indem wir die Mengen

$$]a, b[\text{ (mit } a, b \in \mathbb{R}), [-\infty, a[\text{ (mit } a \in \mathbb{R}) \text{ und }]a, \infty] \text{ (mit } a \in \mathbb{R})$$

als Basis der Topologie nehmen. Zeige, dass \mathbb{R} offen in dieser Topologie ist und die Unterraumtopologie zu dieser Topologie trägt.

Aufgabe 8.2. Zeige, dass die Borelmengen auf $\overline{\mathbb{R}}$ zu der in Aufgabe 8.1 eingeführten Topologie mit den in der Vorlesung direkt eingeführten Borelmengen übereinstimmen.

Aufgabe 8.3. Zeige, dass $\overline{\mathbb{R}}$ mit der in Aufgabe 8.1 eingeführten Topologie homöomorph zum abgeschlossenen Intervall $[0, 1]$ ist.

Aufgabe 8.4. Zeige, dass man die übliche Metrik auf \mathbb{R} nicht zu einer Metrik auf $\overline{\mathbb{R}}$ fortsetzen kann.

Aufgabe 8.5.*

Es sei

$$f: M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

eine numerische Funktion. Zeige

$$|f| = f_+ + f_-.$$

Aufgabe 8.6. Bestimme das Supremum und das Infimum der Funktionenfolge

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k.$$

Aufgabe 8.7.*

Es sei M ein Messraum und $f: M \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine nichtnegative messbare Funktion. Zeige, dass auch die Funktion

$$\sqrt{f}: M \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, x \longmapsto \sqrt{f(x)},$$

messbar ist.

Aufgabe 8.8.*

Es sei X ein Messraum und es sei

$$f_n: X \longrightarrow \mathbb{R}$$

($n \in \mathbb{N}$) eine Folge von messbaren Funktionen, wobei \mathbb{R} die σ -Algebra der Borelmengen trägt. Es sei $a \in \mathbb{R}$. Zeige, dass die Menge

$$M = \{x \in X \mid a \text{ ist ein Häufungspunkt der Folge } (f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}\}$$

eine messbare Teilmenge von X ist.

Aufgabe 8.9. Beschreibe eine beliebige einfache Funktion mit Hilfe von Indikatorfunktionen.

Aufgabe 8.10. Zeige, dass die Summe und das Produkt von zwei einfachen Funktionen auf einem Messraum wieder einfach ist.

Aufgabe 8.11. Es sei $[a, b]$ ein reelles Intervall und sei

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

ein wachsende Funktion. Zeige, dass die approximierenden einfachen Funktionen aus Lemma 8.11 Treppenfunktionen sind.

Aufgabe 8.12. Es sei $[a, b]$ ein reelles Intervall und sei

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

ein stetige Funktion. Zeige, dass die approximierenden einfachen Funktionen aus Lemma 8.11 im Allgemeinen keine Treppenfunktionen sind.

Aufgabe 8.13. Es sei

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine messbare Funktion. Zeige, dass die Menge der Punkte, in denen f stetig ist, eine messbare Teilmenge von \mathbb{R} ist.

8.2. Aufgaben zum Abgeben.

Aufgabe 8.14. (2 Punkte)

Es sei (M, \mathcal{A}) ein Messraum und es seien

$$f, g: M \longrightarrow \mathbb{R}$$

messbare Funktionen. Zeige, dass die Menge

$$\{x \in M \mid f(x) = g(x)\}$$

messbar ist.

Aufgabe 8.15. (2 Punkte)

Zeige, dass die Summe und das Produkt von zwei σ -einfachen Funktionen auf einem Messraum wieder σ -einfach ist.

Eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *periodisch* mit *Periode* $L > 0$, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichheit

$$f(x) = f(x + L)$$

gilt.

Aufgabe 8.16. (5 (3+2) Punkte)

Es sei

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine periodische Funktion mit der Periode $L > 0$.

a) Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

- (1) f ist messbar.
- (2) Die Einschränkung von f auf das Intervall $[0, L[$ ist messbar.
- (3) Die Einschränkung von f auf jedes Intervall der Form $[a, a + L[$ ist messbar.

b) Zeige, dass diese Äquivalenz für die Stetigkeit nicht gelten muss.

Aufgabe 8.17. (4 Punkte)

Bestimme die approximierenden Funktionen f_0, f_1, \dots, f_5 für die Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^2,$$

gemäß dem Beweis zu Lemma 8.11.

Aufgabe 8.18. (6 (1+2+2+1) Punkte)

Es sei

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Zu $n \in \mathbb{N}_+$ sei die Funktion f_n durch

$$f_n(x) = \frac{\lfloor nf(x) \rfloor}{n}$$

definiert.

- a) Zeige, dass die f_n σ -einfach sind.
- b) Zeige, dass die Funktionenfolge f_n , $n \in \mathbb{N}$, punktweise gegen f konvergiert.
- c) Zeige, dass diese Funktionenfolge nicht wachsend sein muss.
- d) Sind die f_n messbar?

9. VORLESUNG - INTEGRIERBARE FUNKTIONEN

9.1. Integrierbare Funktionen.



Wir führen nun das *Lebesgue-Integral* für messbare Funktionen auf einem Maßraum ein. Dieser Integralbegriff hat gegenüber dem Riemann-Integral folgende Vorteile.

- (1) Der Integralbegriff bekommt ein maßtheoretisches Fundament.
- (2) Es kann über einer (fast) beliebigen Menge integriert werden.
- (3) Es kann eine weit größere Funktionenklasse integriert werden.
- (4) Das Grenzwertverhalten von Funktionenfolgen ist einfacher.
- (5) Man kann Funktionen auf Nullmengen abändern, ohne das Integral zu verändern.
- (6) Uneigentliche Integrale werden direkt mitbehandelt.
- (7) Die Summe einer abzählbaren Familie reeller Zahlen ist ein Spezialfall.

Definition 9.1. Es sei M eine Menge und

$$f: M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

eine nichtnegative Funktion. Dann nennt man die Menge

$$S(f) = \{(x, y) \in M \times \overline{\mathbb{R}} \mid 0 \leq y \leq f(x)\}$$

den *Subgraphen* der Funktion.

Lemma 9.2. *Es sei (M, \mathcal{A}) ein Messraum und*

$$f: M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

eine messbare Funktion. Dann sind der Graph $\Gamma(f)$ und der Subgraph $S(f)$ messbare Teilmengen in $M \times \overline{\mathbb{R}}$.

Beweis. Die Projektion

$$p_2: M \times \overline{\mathbb{R}} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}, (x, y) \longmapsto y,$$

ist nach Lemma 4.9 messbar, und ebenso ist

$$\psi: M \times \overline{\mathbb{R}} \xrightarrow{p_1} M \xrightarrow{f} \overline{\mathbb{R}}$$

messbar. Nach Lemma 4.11 und Lemma 8.3 ist dann auch die Abbildung⁷

$$\varphi: M \times \overline{\mathbb{R}} \xrightarrow{\psi \times p_2} \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \xrightarrow{\neg} \overline{\mathbb{R}}$$

messbar. Es ist

$$\Gamma(f) = \{(x, y) \in M \times \overline{\mathbb{R}} \mid y = f(x)\} = \varphi^{-1}(0)$$

und

$$S(f) = \{(x, y) \in M \times \overline{\mathbb{R}} \mid 0 \leq y \leq f(x)\} = p_2^{-1}(\overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}) \cap \varphi^{-1}(\overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}),$$

so dass diese beiden Mengen messbar sind. \square

Definition 9.3. Es sei (M, \mathcal{A}, μ) ein σ -endlicher Maßraum und

$$f: M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

eine messbare numerische nichtnegative Funktion. Dann heißt

$$\int_M f d\mu := (\mu \otimes \lambda^1)(S(f))$$

das *Integral* von f über M (zum Maß μ).

Diese Definition ist sowohl unmittelbar anschaulich als auch vom theoretischen Standpunkt her sehr schlagkräftig, da sie auf dem Maßbegriff beruht. Dagegen ist sie für Berechnungen direkt nicht geeignet, weshalb wir im Folgenden entsprechende Rechentechniken entwickeln werden. Diese Definition lässt die Möglichkeit zu, dass die Funktion den Wert ∞ annimmt, und dass das Integral diesen Wert annimmt. Im Fall von numerischen Funktionen, die auch negative Werte annehmen können, führt man den Integralbegriff auf die

⁷Für diese Argumentation setzt man $\infty - \infty = -\infty - (-\infty) = 0$ und ansonsten $\infty - x = \infty$ u.s.w. Man kann auch die messbaren Mengen $f^{-1}(\infty) \times \{\infty\}$ und $f^{-1}(-\infty) \times \{-\infty\}$ aus dem Graphen bzw. Subgraphen herausnehmen und nur \mathbb{R} -wertige Funktionen betrachten.

Integrale der positiven und negativen Teilfunktion zurück. Dies ergibt aber nur dann Sinn, wenn beide Teilintegrale endlich sind.

Definition 9.4. Es sei (M, \mathcal{A}, μ) ein σ -endlicher Maßraum und

$$f: M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

eine messbare numerische Funktion. Dann heißt f *integrierbar*, wenn die beiden Integrale $\int_M f_+ d\mu$ und $\int_M f_- d\mu$ endlich sind. In diesem Fall nennt man

$$\int_M f d\mu = \int_M f_+ d\mu - \int_M f_- d\mu$$

das *Integral* von f .

Mit dieser Situation ergibt sich der leicht paradoxe Sprachgebrauch, dass eine nichtnegative Funktion stets ein Integral besitzt, dass aber, wenn dieses Integral unendlich ist, die Funktion nicht integrierbar ist. Die Integrierbarkeit ist, abgesehen von der vorausgesetzten Messbarkeit, die aber nahezu immer erfüllt ist, in erster Linie ein Endlichkeitsbegriff. In diese Richtung weist auch das folgende Lemma.

Lemma 9.5. *Es sei (M, \mathcal{A}, μ) ein σ -endlicher Maßraum und*

$$f: M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

eine messbare numerische Funktion. Dann sind folgende Eigenschaften äquivalent.

- (1) f ist integrierbar.
- (2) Der positive und der negative Teil von f sind integrierbar.
- (3) Die Betragsfunktion $|f|$ ist integrierbar.
- (4) Es gibt eine integrierbare messbare Funktion

$$h: M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

mit $|f(x)| \leq h(x)$ für alle $x \in M$.

Beweis. Die Äquivalenz von (1) und (2) ist die Definition von integrierbar. Für die Äquivalenz von (2) und (3) verwendet man die Beziehung $|f| = f_+ + f_-$. Dabei ist der Subgraph von $|f|$ die Vereinigung der beiden Subgraphen zu f_+ bzw. f_- , wobei der Durchschnitt dieser Subgraphen aus der Menge $M \times \{0\}$ besteht und somit nach Aufgabe 9.4 das Maß 0 besitzt. Also ist⁸

$$\begin{aligned} \int_M |f| d\mu &= (\mu \otimes \lambda^1)(S(|f|)) \\ &= (\mu \otimes \lambda^1)(S(f_+)) + (\mu \otimes \lambda^1)(S(f_-)) \\ &= \int_M f_+ d\mu + \int_M f_- d\mu, \end{aligned}$$

⁸Wir werden später sehen, dass generell das Integral mit der Addition von Funktionen verträglich ist, das haben wir hier aber noch nicht zur Verfügung.

und die beiden Summanden sind genau dann endlich, wenn die Summe endlich ist. Aus (3) folgt (4), indem man $h = |f|$ nimmt. Wenn (4) erfüllt ist, so ist der Subgraph von $|f|$ im Subgraphen von h enthalten, und die Monotonie des Maßes $\mu \otimes \lambda^1$ ergibt die Endlichkeit von $\int_M |f| d\mu$, also (3). Aus (3) folgt entsprechend (2), da der Subgraph von f_+ bzw. von f_- eine Teilmenge des Subgraphen zu $|f|$ ist. \square

Für eine messbare Teilmenge $T \subseteq M$ setzt man

$$\int_T f d\mu := \int_T (f|_T) d\mu,$$

d.h. man schaut sich die auf den Teilmaßraum T eingeschränkte Funktion an. Man könnte genauso gut die Funktion f durch diejenige Funktion \tilde{f} ersetzen, die auf T mit f übereinstimmt und die außerhalb davon gleich 0 ist. Wenn man die Indikatorfunktion e_T zu einer messbaren Teilmenge $T \subseteq M$ heranzieht, so ergibt sich

$$\int_M e_T d\mu = \int_T 1 d\mu = \mu(T).$$

Diese Beschreibung des Maßes als ein Integral kann durchaus nützlich sein.

Man kann den Subgraphen als

$$S(f) = S^o(f) \uplus \Gamma(f)$$

schreiben, wobei $\Gamma(f) = \{(x, y) \in M \times \overline{\mathbb{R}} \mid y = f(x)\}$ der Graph ist und

$$S^o(f) = \{(x, y) \in M \times \overline{\mathbb{R}} \mid 0 \leq y < f(x)\}$$

gesetzt wird. Das folgende Lemma zeigt, dass der Graph eine Nullmenge ist und dass man somit den Subgraphen durch dieses $S^o(f)$ ersetzen kann. Dies ist für einige Ausschöpfungseigenschaften von Vorteil.

Lemma 9.6. *Es sei (M, \mathcal{A}, μ) ein σ -endlicher Maßraum und*

$$f: M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

eine messbare numerische Funktion. Dann ist der Graph $\Gamma(f)$ eine Nullmenge in $M \times \overline{\mathbb{R}}$.

Beweis. Die Mengen $f^{-1}(\infty) \times \{\infty\}$ und $f^{-1}(-\infty) \times \{-\infty\}$, die beide Teilmengen des Graphen sind, sind Nullmengen in $M \times \overline{\mathbb{R}}$. Man kann also annehmen, dass von vornherein eine messbare Funktion

$$f: M \longrightarrow \mathbb{R}$$

vorliegt. Ferner können wir annehmen, dass μ ein endliches Maß ist, da zu einer Ausschöpfung $M_n \uparrow M$ mit $\mu(M_n) < \infty$ auch $M_n \times \mathbb{R}$ eine Ausschöpfung von $M \times \mathbb{R}$ ist. Wenn der Durchschnitt des Graphen mit allen

$M_n \times \mathbb{R}$ das Maß 0 hat, so auch der Gesamtgraph. Nehmen wir nun an, dass $(\mu \otimes \lambda^1)(\Gamma(f)) > 0$ ist. Es ist

$$\Gamma(f) = \bigsqcup_{n \in \mathbb{Z}} (\Gamma(f) \cap (M \times [n, n+1]))$$

eine disjunkte abzählbare Vereinigung, so dass mindestens einer dieser „Streifen“ ein positives Maß haben muss. Wir können M durch $f^{-1}([n, n+1])$ ersetzen und daher annehmen, dass das Bild von f in $[n, n+1]$ liegt. Wir betrachten die abzählbar unendlich vielen Verschiebungen

$$\Gamma(f) + q \text{ mit } q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1].$$

Diese sind paarweise disjunkt und sie liegen alle in $M \times [n, n+2]$. Wegen der Translationsinvarianz von λ^1 ist auch für jedes q die Abbildung

$$M \times \mathbb{R} \longrightarrow M \times \mathbb{R}, (x, t) \longmapsto (x, t + q),$$

maßtreu (man betrachte die Quader, die das Produktmaß festlegen, siehe Aufgabe 9.15), und daher besitzt jede Verschiebung des Graphen das gleiche Maß wie der Graph selbst. Aus

$$\begin{aligned} \sum_{q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]} (\mu \otimes \lambda^1)(\Gamma(f) + q) &= (\mu \otimes \lambda^1) \left(\bigsqcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]} (\Gamma(f) + q) \right) \\ &\leq (\mu \otimes \lambda^1)(M \times [n, n+2]) \\ &= \mu(M) \cdot 2 \\ &< \infty \end{aligned}$$

ergibt sich ein Widerspruch. □

9.2. Die Tschebyschow-Abschätzung.

Für einen endlichen Maßraum M und eine integrierbare Funktion

$$f: M \longrightarrow \mathbb{R}$$

ist $\int_M f d\mu$ eine reelle Zahl. Bei $\mu(M) \in \mathbb{R}_+$ nennt man den Quotienten $h = \frac{\int_M f d\mu}{\mu(M)}$ den *Durchschnittswert* oder *Mittelwert* der Funktion f , da ja $\int_M f d\mu$ den gleichen Wert hat wie das Integral

$$\int_M h d\mu = h \cdot \mu(M)$$

zur konstanten Funktion h .

Die folgende Aussage nennt man *Tschebyschow-Abschätzung* oder *Tschebyschow-Ungleichung*.

Lemma 9.7. *Es sei (M, \mathcal{A}, μ) ein σ -endlicher Maßraum und*

$$f: M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

eine messbare numerische nichtnegative Funktion. Dann gilt für jedes $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ die Abschätzung

$$\int_M f d\mu \geq a \cdot \mu\{x \in M \mid f(x) \geq a\}.$$

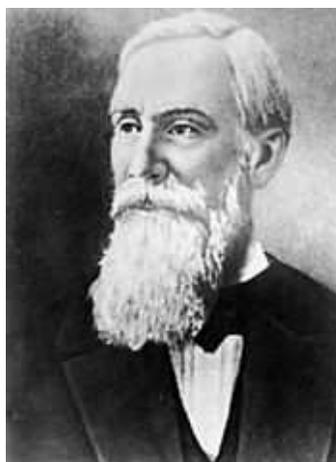
Beweis. Es sei $T = \{x \in M \mid f(x) \geq a\}$. Dann ist

$$T \times [0, a] \subseteq S(f),$$

also

$$a \cdot \mu(T) = (\mu \otimes \lambda^1)(T \times [0, a]) \leq (\mu \otimes \lambda^1)(S(f)) = \int_M f d\mu.$$

□



Pafnuti Lwowitsch Tschebyschow (1821-1894)

9.3. Bildmaße und allgemeine Transformationsformel.

Satz 9.8. *Es sei (M, \mathcal{A}, μ) ein σ -endlicher Maßraum, (N, \mathcal{B}) ein Messraum und*

$$\varphi: M \longrightarrow N$$

eine messbare Abbildung. Es sei ν das Bildmaß von μ unter φ , das ebenfalls als σ -endlich vorausgesetzt sei, und es sei

$$f: N \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

eine ν -integrierbare Funktion. Dann ist auch $f \circ \varphi$ μ -integrierbar, und es gilt

$$\int_N f d\nu = \int_M (f \circ \varphi) d\mu.$$

Beweis. Für nichtnegatives f ergibt sich dies unter Verwendung von Aufgabe 5.6 und Aufgabe 9.1 aus

$$\begin{aligned} \int_N f d\nu &= (\nu \otimes \lambda^1)(S(f)) \\ &= ((\varphi \times \text{Id})_*(\mu \otimes \lambda^1))(S(f)) \\ &= (\mu \otimes \lambda^1)((\varphi \times \text{Id})^{-1}(S(f))) \\ &= (\mu \otimes \lambda^1)(S(f \circ \varphi)) \\ &= \int_M (f \circ \varphi) d\mu. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich auch der allgemeine Fall. □

Bemerkung 9.9. Wenn $M = [c, d]$ und $N = [a, b]$ und

$$\varphi: M \longrightarrow N$$

eine differenzierbare bijektive streng wachsende Funktion ist, so gilt für eine stetige Funktion

$$f: N \longrightarrow \mathbb{R}$$

die Substitutionsregel

$$\int_a^b f(t) dt = \int_c^d f(\varphi(s)) \cdot \varphi'(s) ds.$$

Um eine mit der allgemeinen Transformationsformel vergleichbare Substitutionsformel zu haben, muss man auf M die Funktion $g = f \circ \varphi$ mit dem Maß λ^1 und auf N die Funktion $f = (f \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}$ betrachten. Die Substitutionsregel liefert dann

$$\int_c^d f(\varphi(s)) ds = \int_a^b f(\varphi(\varphi^{-1}(t))) \cdot (\varphi^{-1})'(t) dt = \int_a^b f(t) \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(t))} dt.$$

Links steht das Integral $\int_M f \circ \varphi d\lambda^1$, also muss rechts das Integral $\int_N f d\varphi_*\lambda^1$ stehen. Somit wird das Bildmaß $\varphi_*\lambda^1$ durch die⁹ Dichte $\frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(t))}$ bezüglich λ^1 gegeben. Das Bildmaß ist auch durch

$$\begin{aligned} (\varphi_*\lambda^1)([r, s]) &= \lambda^1(\varphi^{-1}([r, s])) \\ &= \lambda^1([\varphi^{-1}(r), \varphi^{-1}(s)]) \\ &= \varphi^{-1}(s) - \varphi^{-1}(r) \\ &= \int_r^s \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(u))} du \end{aligned}$$

bestimmt.

9. ARBEITSBLATT

In diesem Arbeitsblatt geht es ausschließlich um das Lebesgue-Integral, es darf nicht mit dem Riemann-Integral argumentiert werden.

⁹Dichten werden wir in Vorlesung 13 einführen.

9.1. AufwärmAufgaben.

Aufgabe 9.1. Es seien M und N Mengen und es seien

$$\varphi: M \longrightarrow N$$

und

$$f: N \longrightarrow \mathbb{R}$$

Abbildungen. Zeige, dass für die Subgraphen die Beziehung

$$(\varphi \times \text{Id}_{\mathbb{R}})^{-1}(S(f)) = S(f \circ \varphi)$$

gilt.

Aufgabe 9.2. Zeige, dass das Integral der Nullfunktion gleich 0 ist.

Aufgabe 9.3. Zeige, dass das Integral einer messbaren Funktion über einer Nullmenge gleich 0 ist.

Aufgabe 9.4. Es sei M ein σ -endlicher Maßraum,

$$f: M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

eine messbare Funktion und $c \in \overline{\mathbb{R}}$. Zeige, dass

$$\{(x, c) \mid f(x) = c\} \subseteq M \times \overline{\mathbb{R}}$$

eine Nullmenge ist.

Aufgabe 9.5. Es sei (M, \mathcal{A}, μ) ein σ -endlicher Maßraum, sei f eine integrierbare nichtnegative numerische Funktionen auf M und $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Zeige, dass auch af integrierbar ist und dass

$$\int_M af \, d\mu = a \cdot \int_M f \, d\mu$$

gilt.

Aufgabe 9.6. Es sei M eine abzählbare Menge, die mit dem Zählmaß versehen sei, und sei

$$f: M \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion. Zeige, dass f genau dann integrierbar ist, wenn die Familie $f(m)$, $m \in M$, summierbar ist, und dass in diesem Fall das Integral gleich der Summe ist.

Aufgabe 9.7. Bestimme den Flächeninhalt des Subgraphen zur linearen Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto cx,$$

über dem Intervall $[a, b]$ mit $c \geq 0, b \geq a \geq 0$.

Aufgabe 9.8. Bestimme den Flächeninhalt des Subgraphen zur Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto 1 + \sin x,$$

über dem Intervall $[0, 2\pi]$.

Aufgabe 9.9.*

Es sei M eine Menge und es sei $T_n \uparrow M$ eine Ausschöpfung von M mit Teilmengen $T_n \subseteq M, n \in \mathbb{N}$. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ sei $A_n \subseteq M \times \mathbb{R}$ der Subgraph zur Indikatorfunktion e_{T_n} . Zeige, dass die $A_n, n \in \mathbb{N}$, eine Ausschöpfung von $M \times [0, 1]$ bilden.

Aufgabe 9.10. Es seien (M, \mathcal{A}, μ) und (N, \mathcal{B}, ν) zwei endliche Maßräume und es sei

$$f: M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

integrierbare Funktion. Zeige

$$\int_{M \times N} f d\mu \otimes \nu = \nu(N) \cdot \int_M f(x) d\mu(x).$$

Aufgabe 9.11. Wir betrachten die Funktion

$$f: [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto 1 - t^2.$$

Für welches $a \in [0, 1]$ ist die Tschebyschow-Abschätzung für diese Funktion am besten?

Aufgabe 9.12.*

Es sei

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine integrierbare Funktion. Zeige, dass es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $r \in \mathbb{R}_+$ derart gibt, dass

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0, r)} f d\lambda^n \leq \epsilon$$

ist

Aufgabe 9.13. Es sei

$$L: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine lineare Abbildung, $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine messbare Teilmenge und $N = L(M)$.

Es sei

$$N \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

eine messbare Funktion. Zeige

$$\int_M (f \circ \varphi) d\lambda^n = \int_N f(\det L)^{-1} d\lambda^n.$$

9.2. Aufgaben zum Abgeben.

Aufgabe 9.14. (3 Punkte)

Es sei $T \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge und sei

$$f: T \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Zeige, dass f integrierbar ist. Man gebe auch eine Abschätzung für das Integral $\int_T f d\lambda^n$ an.

Aufgabe 9.15. (4 Punkte)

Es sei (M, \mathcal{A}, μ) ein σ -endlicher Maßraum. Zeige, dass für jedes $r \in \mathbb{R}$ die Abbildung

$$M \times \mathbb{R} \longrightarrow M \times \mathbb{R}, (x, t) \longmapsto (x, t + r),$$

maßtreu ist.

Aufgabe 9.16. (4 Punkte)

Bestimme das Volumen des Subgraphen zur linearen Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto cx + dy,$$

(mit $c, d \in \mathbb{R}_{\geq 0}$) über dem Einheitsquadrat $[0, 1] \times [0, 1]$.

Aufgabe 9.17. (6 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f: [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto \sin t.$$

Für welches $a \in [0, 1]$ ist die Tschebyschow-Abschätzung für diese Funktion am besten? Bestimme a numerisch bis auf 5 Nachkommastellen.

10. VORLESUNG - KONVERGENZSÄTZE

10.1. Ausschöpfungseigenschaften.

Die folgenden Rechenregeln für Integrale beruhen auf dem Ausschöpfungssatz für Maße. Man kann den Subgraphen sowohl dadurch ausschöpfen, dass man die Grundmenge ausschöpft, als auch dadurch, dass man die Funktion ausschöpft, also durch andere Funktionen approximiert.

Lemma 10.1. *Es sei (M, \mathcal{A}, μ) ein σ -endlicher Maßraum und sei $M = \bigsqcup_{i \in I} M_i$ eine abzählbare Zerlegung in messbare Teilmengen. Dann gilt für eine integrierbare messbare numerische Funktion die Beziehung*

$$\int_M f d\mu = \sum_{i \in I} \left(\int_{M_i} f d\mu \right).$$

Beweis. Die beiden Subgraphen zum positiven und zum negativen Teil, also $S(f_+)$ und $S(f_-)$, haben endliches Maß, und es gilt

$$S(f_+) = \bigsqcup_{i \in I} S(f_+, M_i)$$

und

$$S(f_-) = \bigsqcup_{i \in I} S(f_-, M_i).$$

Daher folgt die Aussage für die beiden Teile direkt aus der σ -Additivität des Maßes $\mu \otimes \lambda^1$. Daraus folgt die Aussage für f aus dem großen Umordnungssatz. \square

Satz 10.2. *Es sei (M, \mathcal{A}, μ) ein σ -endlicher Maßraum und sei M_n , $n \in \mathbb{N}$, eine messbare Ausschöpfung von M . Dann gilt für eine integrierbare messbare numerische Funktion die Beziehung*

$$\int_M f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{M_n} f d\mu \right).$$

Beweis. Durch Betrachten von f_+ und f_- kann man annehmen, dass f nichtnegativ ist. Dann schöpfen die Subgraphen $S(f, M_n)$ den Subgraphen $S(f, M)$ aus und die Aussage folgt aus Lemma 3.4. \square

Den folgenden Satz nennt man *Satz von der monotonen Konvergenz* oder *Satz von Beppo Levi*.

Satz 10.3. *Es sei (M, \mathcal{A}, μ) ein σ -endlicher Maßraum und sei*

$$f_n: M \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

eine wachsende Folge von nichtnegativen messbaren numerischen Funktionen mit der Grenzfunktion f . Dann gilt

$$\int_M f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_M f_n d\mu.$$

Beweis. Zunächst ist die Grenzfunktion nach Korollar 8.8 wieder messbar, so dass das Integral links wohldefiniert ist. Für die „halboffenen“ Subgraphen $S^o(f_n)$ gilt die Beziehung $S^o(f_n) \uparrow S^o(f)$. Daher ist nach Lemma 3.4

$$(\mu \otimes \lambda^1)(S^o(f)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mu \otimes \lambda^1)(S^o(f_n))$$

Wegen Lemma 9.6 ist dies die Behauptung. \square

Korollar 10.4. *Es sei (M, \mathcal{A}, μ) ein σ -endlicher Maßraum und sei*

$$f: M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

eine messbare nichtnegative numerische Funktion. Dann ist das Integral $\int_M f d\mu$ gleich dem Supremum der Integrale zu allen einfachen Funktionen $s \leq f$.

Beweis. Dies folgt aus Lemma 8.11 und aus Satz 10.3. \square

Hierbei ist wichtig, dass man beliebige einfache Funktionen und nicht nur, wie beim Riemann-Integral, die Treppenfunktionen zur Verfügung hat.

10.2. Lebesgue-Integral und Riemann-Integral.

Satz 10.5. *Es sei*

$$f: I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine messbare Riemann-integrierbare Funktion. Dann gilt

$$\int_I f d\lambda^1 = \int_a^b f(x) dx.$$

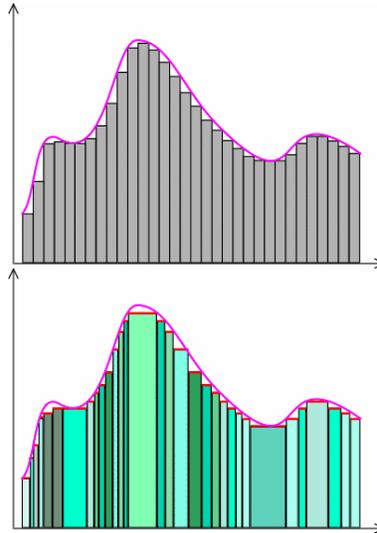
Beweis. Wir nehmen an, dass f nichtnegativ ist. Es seien

$$s, t: I = [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine obere bzw. eine untere Treppenfunktion, wobei wir die untere Treppenfunktion ebenfalls als nichtnegativ annehmen können. Dann gilt aufgrund der Monotonie des Maßes die Beziehung

$$\int_I s d\lambda^1 \leq \int_I f d\lambda^1 \leq \int_I t d\lambda^1.$$

Die beiden Subgraphen zu den Treppenfunktionen s und t sind dabei jeweils eine endliche disjunkte Vereinigung von (halboffenen) Rechtecken. Daher sind die beiden äußeren Integrale aufgrund der Definition des Produktmaßes gleich dem Treppenintegral. Somit ist das Integral $\int_I f d\lambda^1$ kleiner/gleich jeder Obersumme und größer/gleich jeder Untersumme von f . Diese Abschätzungen gelten dann auch für das Infimum der Obersummen bzw. das Supremum der Untersummen. Da diese aufgrund der Riemann-Integrierbarkeit übereinstimmen, muss das maßtheoretische Integral gleich dem Riemann-Integral sein. \square



Diese Animation zeigt, wie der Flächeninhalt unter dem Graphen mit (äquidistanten) Treppenfunktionen (Riemann-Integral) und mit einfachen Funktionen (Lebesgue-Integral) approximiert wird.

Auf die Voraussetzung, dass die Riemann-integrierbare Funktion messbar ist, kann man dabei nicht verzichten.

10.3. Linearität des Integrals.

Satz 10.6. *Es sei (M, \mathcal{A}, μ) ein σ -endlicher Maßraum. Es seien f, g integrierbare messbare reellwertige Funktionen auf M und $a, b \in \mathbb{R}$. Dann ist auch $af + bg$ integrierbar, und es gilt*

$$\int_M (af + bg) d\mu = a \int_M f d\mu + b \int_M g d\mu.$$

Beweis. Durch Betrachten des positiven und des negativen Teils kann man die Behauptung auf den Fall von nichtnegativen Funktionen und nichtnegativen Zahlen zurückführen. Wir behandeln die Additivität und die Verträglichkeit mit der Skalarmultiplikation getrennt. Nach Lemma 8.11 gibt es wachsende Folgen f_n bzw. g_n von messbaren einfachen Funktionen, die punktweise gegen f bzw. g konvergieren. Dann konvergiert auch $f_n + g_n$ wachsend und punktweise gegen $f + g$. Zwei einfache Funktionen α und β können wir bezüglich einer geeigneten (endlichen) Zerlegung C_i , $i \in I$, von M als $\alpha = \sum_{i \in I} a_i \cdot e_{C_i}$ und $\beta = \sum_{i \in I} b_i \cdot e_{C_i}$ schreiben. Damit gilt (bei α, β messbar)

$$\begin{aligned} \int_M (\alpha + \beta) d\mu &= \int_M \left(\sum_{i \in I} (a_i + b_i) \cdot e_{C_i} \right) d\mu \\ &= \sum_{i \in I} (a_i + b_i) \mu(C_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i \in I} a_i \mu(C_i) + \sum_{i \in I} b_i \mu(C_i) \\
&= \int_M \left(\sum_{i \in I} a_i \cdot e_{C_i} \right) d\mu + \int_M \left(\sum_{i \in I} b_i \cdot e_{C_i} \right) d\mu \\
&= \int_M \alpha d\mu + \int_M \beta d\mu
\end{aligned}$$

und die Verträglichkeit mit der Summe gilt für einfache Funktionen. Nach dem Satz von der monotonen Konvergenz und Lemma 6.1 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)) gilt

$$\begin{aligned}
\int_M (f + g) d\mu &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_M (f_n + g_n) d\mu \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_M f_n d\mu + \int_M g_n d\mu \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_M f_n d\mu \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_M g_n d\mu \right) \\
&= \int_M f d\mu + \int_M g d\mu.
\end{aligned}$$

Der Beweis für die skalare Multiplikation verläuft ähnlich, siehe Aufgabe 9.5. \square

10.4. Weitere Konvergenzsätze.

Wir erinnern daran, dass ein Häufungspunkt einer Folge in einem metrischen Raum ein Punkt mit der Eigenschaft ist, dass es in jeder ϵ -Umgebung des Punktes unendlich viele Folgenglieder gibt.

Definition 10.7. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und es sei H die Menge der Häufungspunkte dieser Folge. Dann setzt man

$$\liminf ((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \inf(H)$$

und

$$\limsup ((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \sup(H)$$

und nennt diese Zahlen den *Limes inferior* bzw. den *Limes superior* der Folge. (Wenn es keinen Häufungspunkt gibt, so ist dies als ∞ bzw. als $-\infty$ zu interpretieren).

Nach Aufgabe 33.27 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)) ist die Menge der Häufungspunkte einer Folge abgeschlossen und insbesondere messbar. Für eine Folge von numerischen Funktionen wird der Limes inferior und der Limes superior punktweise definiert. Für messbare Funktionenfolgen sind dies wieder messbare Funktionen, siehe Aufgabe 10.9.

Die folgende Aussage heißt *Lemma von Fatou*.

Satz 10.8. *Es sei (M, \mathcal{A}, μ) ein σ -endlicher Maßraum und es sei*

$$f_n: M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

eine Folge von nichtnegativen messbaren numerischen Funktionen. Dann gilt

$$\int_M \liminf (f_n) d\mu \leq \liminf \left(\int_M f_n d\mu \right).$$

Beweis. Die Funktionen $f = \liminf (f_n)$ und $h_n = \inf (f_m, m \geq n)$ sind nach Aufgabe 10.9 bzw. Lemma 8.4 messbar, und die Folge h_n konvergiert nach Aufgabe 10.8 wachsend gegen f . Wir können den Satz von der monotonen Konvergenz anwenden und erhalten

$$\int_M f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_M h_n d\mu \right).$$

Für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist wegen

$$h_k \leq f_m$$

für alle $m \geq k$ auch

$$\int_M h_k d\mu \leq \int_M f_m d\mu$$

für alle $m \geq k$ und damit

$$\int_M h_k d\mu \leq \liminf_{n \geq k} \left(\int_M f_n d\mu \right) = \liminf_{n \geq 0} \left(\int_M f_n d\mu \right),$$

wobei die Gleichheit rechts darauf beruht, dass Häufungspunkte nicht von endlich vielen Folgengliedern abhängen. Dies ergibt insgesamt die Behauptung. \square

Wir kommen zum *Satz von der majorisierten Konvergenz*, der auch *Satz von Lebesgue* heißt.

Satz 10.9. *Es sei (M, \mathcal{A}, μ) ein σ -endlicher Maßraum und es sei*

$$f_n: M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

eine punktweise konvergente Folge von messbaren Funktionen. Es gebe eine messbare integrierbare Funktion

$$h: M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

mit $|f_n(x)| \leq h(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in M$. Dann ist auch die Grenzfunktion $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ integrierbar, und es gilt

$$\int_M f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_M f_n d\mu.$$

Beweis. Die Majorante h sichert nach Lemma 9.5, dass die f_n integrierbar sind; da diese Abschätzung auch für die Grenzfunktion gilt, ist diese ebenfalls

integrierbar. Wir wenden das Lemma von Fatou auf die beiden nichtnegativen Funktionenfolgen $(h + f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(h - f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ an und erhalten unter Verwendung der Linearität einerseits

$$\begin{aligned} \int_M h \, d\mu + \int_M f \, d\mu &= \int_M (h + f) \, d\mu \\ &\leq \liminf \left(\int_M (h + f_n) \, d\mu \right) \\ &= \liminf \left(\int_M h \, d\mu + \int_M f_n \, d\mu \right) \\ &= \int_M h \, d\mu + \liminf \left(\int_M f_n \, d\mu \right) \end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{aligned} \int_M h \, d\mu - \int_M f \, d\mu &= \int_M (h - f) \, d\mu \\ &\leq \liminf \left(\int_M (h - f_n) \, d\mu \right) \\ &= \liminf \left(\int_M h \, d\mu - \int_M f_n \, d\mu \right) \\ &= \int_M h \, d\mu - \limsup \left(\int_M f_n \, d\mu \right). \end{aligned}$$

Zusammenfassend ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_M f \, d\mu &\leq \liminf \left(\int_M f_n \, d\mu \right) \\ &\leq \limsup \left(\int_M f_n \, d\mu \right) \\ &\leq \int_M f \, d\mu. \end{aligned}$$

Daher stimmt der Limes inferior von $\int_M f_n \, d\mu$ mit dem Limes superior davon überein und somit ist dies nach Aufgabe 10.4 gleich dem Limes von $\int_M f_n \, d\mu$. \square

10. ARBEITSBLATT

10.1. Aufwärmaufgaben.

Aufgabe 10.1. Es sei M ein Messraum mit einer Ausschöpfung $M_n \uparrow M$ und sei

$$f_n: M \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine wachsende Folge von nichtnegativen messbaren Funktionen mit der Grenzfunktion

$$f: M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}.$$

Zeige, dass $S^o(M_n; f_n)$ eine Ausschöpfung von $S^o(M; f)$ ist.

Aufgabe 10.2. Wir betrachten die Funktionenfolge

$$f_n: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit $f_n = 1 - \frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}_+$). Es sei f die Grenzfunktion. Zeige die Beziehung

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}_+} S(f_n) = S(f) \setminus \Gamma_f.$$

Aufgabe 10.3.*

Es seien (M, \mathcal{A}, μ) und (N, \mathcal{B}, ν) zwei endliche Maßräume und es seien

$$f: M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

und

$$g: N \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

integrierbare Funktionen. Zeige

$$\int_{M \times N} (f + g) d\mu \otimes \nu = \nu(N) \cdot \int_M f(x) d\mu(x) + \mu(M) \cdot \int_N g(y) d\nu(y).$$

Aufgabe 10.4. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\overline{\mathbb{R}}$. Zeige, dass die Folge genau dann konvergiert, wenn

$$\liminf ((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \limsup ((x_n)_{n \in \mathbb{N}}).$$

Aufgabe 10.5.*

Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte reelle Folge,

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Abbildung und $y_n = f(x_n)$ die Bildfolge. Es sei H die Menge der Häufungspunkte von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und G die Menge der Häufungspunkte von $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

a) Zeige $f(H) \subseteq G$.

b) Zeige

$$f(\limsup ((x_n)_{n \in \mathbb{N}})) \leq \limsup ((y_n)_{n \in \mathbb{N}}).$$

c) Zeige, dass die Abschätzung aus Teil b) echt sein kann.

Aufgabe 10.6. Es sei $f_n : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, für $n \in \mathbb{Z}_+$, die Funktionenfolge

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n^2}, & \text{falls } x \in [n, +\infty[, \\ 0, & \text{anderfalls.} \end{cases}$$

Berechnen Sie

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[1, +\infty]} f_n d\lambda^1.$$

Aufgabe 10.7. Es sei $f_n : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, für $n \in \mathbb{Z}_+$, die Funktionenfolge

$$f_n(x) = \frac{\exp(-nx)}{x+n}.$$

Berechnen Sie

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{[0, +\infty]} f_n d\lambda^1.$$

Aufgabe 10.8. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\overline{\mathbb{R}}$ und sei

$$y_n := \inf (x_k, k \geq n).$$

a) Zeige, dass die Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wachsend ist.

b) Zeige, dass die Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $\liminf ((x_n)_{n \in \mathbb{N}})$ punktweise konvergiert.

Aufgabe 10.9. Es sei (M, \mathcal{A}) ein Messraum und sei

$$f_n : M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

eine Folge von messbaren Funktionen. Zeige, dass dann auch die Funktionen

$$\liminf ((f_n)_{n \in \mathbb{N}}) : M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, x \mapsto \liminf ((f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}),$$

und

$$\limsup ((f_n)_{n \in \mathbb{N}}) : M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}, x \mapsto \limsup ((f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}),$$

messbar sind.

Aufgabe 10.10. Es sei (M, \mathcal{A}, μ) ein σ -endlicher Maßraum und sei

$$f_n : M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

$(n \in \mathbb{N})$ eine Folge von nichtnegativen messbaren numerischen Funktionen. Zeige, dass

$$\int_M \sum_{n=0}^{\infty} f_n d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int_M f_n d\mu$$

gilt.

Aufgabe 10.11. Berechnen Sie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} (1 - \sqrt{\sin x})^n \cos x dx.$$

Aufgabe 10.12. Unter einer *Quader-Treppenfunktion* verstehen wir eine Abbildung

$$t: [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d] \longrightarrow \mathbb{R},$$

für die es Intervallunterteilungen

$$a_1 = c_{10} < c_{11} < \cdots < c_{1n_1} = b_1, \dots, a_d = c_{d0} < c_{d1} < \cdots < c_{dn_d} = b_d,$$

derart gibt, dass

$$t|_{[c_{1j_1}, c_{1j_1+1}] \times \cdots \times [c_{dj_d}, c_{dj_d+1}]}$$

konstant ist. Das zugehörige Integral nennen wir Treppenintegral.

Es sei

$$f: [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d] \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Zeige, dass das Supremum der Treppenintegrale zu unteren Treppenfunktionen von f gleich dem Infimum der Treppenintegrale zu oberen Treppenfunktionen von f ist, und somit auch gleich dem Lebesgue-Integral.

10.2. Aufgaben zum Abgeben.

Aufgabe 10.13. (3 Punkte)

Man gebe ein Beispiel einer integrierbaren Funktion

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

für die das Integral nicht das Supremum über alle Treppenintegrale zu unteren Treppenfunktionen ist.

Aufgabe 10.14. (5 (2+3) Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f: [0, 1] \longrightarrow [0, 1], x \longmapsto x^2.$$

Berechne für $n = 1, 2, \dots, 5$ das Supremum der Integrale zu den folgenden einfachen Funktionen.

- Die Funktionen $g \leq f$, die auf den n Teilintervallen $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[$ (mit $k = 0, \dots, n-1$) konstant sind.
- Die Funktionen $h \leq f$, die nur die Werte $\frac{k}{n}$ annehmen.

Aufgabe 10.15. (4 Punkte)

Bestimme für die Funktionenfolge

$$f_n: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f_n(x) = x^n,$$

die zugehörigen Integrale, den Grenzwert der Integrale, die Grenzfunktion und das Integral der Grenzfunktion.

Aufgabe 10.16. (4 Punkte)

Bestimme die Häufungspunkte der Folge $x_n = \sin\left(n\frac{\pi}{4}\right)$. Was ist der Limes inferior, was der Limes superior?

Aufgabe 10.17. (8 Punkte)

Bestimme den Limes inferior und den Limes superior der Funktionenfolge $f_n(x) = \sin(nx)$ auf $[0, \pi]$.

Aufgabe 10.18. (4 Punkte)

Zeige, dass der Satz von der majorisierten Konvergenz ohne die Voraussetzung über die Existenz einer Majorante $h \geq |f_n|$ nicht gilt.

Aufgabe 10.19. (3 Punkte)

Es sei $]a, b[$ ein (eventuell unbeschränktes) Intervall und es sei

$$f:]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$$

eine nichtnegative stetige Funktion. Zeige, dass das uneigentliche Integral $\int_a^b f(t)dt$ gleich dem Lebesgue-Integral $\int_{]a, b[} f d\lambda$ (also gleich dem Flächeninhalt des Subgraphen) ist.

11. VORLESUNG - CAVALIERI-PRINZIP

11.1. Parameterabhängige Integrale.

Wie diskutieren nun, wie Integrale von einem Parameter abhängen, der sich in einem metrischen Raum bewegt. Dazu muss man in erster Linie das Verhalten bezüglich einer Folge verstehen, so dass man die Ergebnisse der letzten Vorlesung anwenden kann. Der folgende Stetigkeitssatz ist eine weitreichende Verallgemeinerung von Satz 58.2 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)).

Es sei (M, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum, E ein metrischer Raum und

$$f: E \times M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}, (t, x) \longmapsto f(t, x),$$

eine Funktion. Dann gibt es einerseits zu jedem $x \in M$ die Funktion

$$f(-, x): E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}, t \longmapsto f_x(t) = f(t, x),$$

die man auf Stetigkeit untersuchen kann, und andererseits für jeden „Parameter“ $t \in E$ die Funktion

$$f(t, -): M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}, x \longmapsto f_t(x) = f(t, x)$$

und dazu (im Falle der Integrierbarkeit) das Integral $\int_M f_t d\mu$. Wir interessieren uns für die Abhängigkeit von diesem Integral vom Parameter $t \in E$. Um deutlich zu machen, dass über $x \in M$

(nicht über $t \in E$) integriert wird, schreiben wir manchmal $\int_M f_t d\mu(x)$ oder $\int_M f(t, x) d\mu(x)$, wobei x die Variable zu M bezeichnet.

Satz 11.1. *Es sei (M, \mathcal{A}, μ) ein σ -endlicher Maßraum, E ein metrischer Raum, $t_0 \in E$ und*

$$f: E \times M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}, (t, x) \longmapsto f(t, x),$$

eine Funktion, die die folgenden Eigenschaften erfülle.

- (1) Für alle $t \in E$ ist die Funktion $x \mapsto f(t, x)$ messbar.
- (2) Für alle $x \in M$ ist die Funktion $t \mapsto f(t, x)$ stetig in t_0 .
- (3) Es gibt eine nichtnegative messbare integrierbare Funktion

$$h: M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

mit

$$|f(t, x)| \leq h(x)$$

für alle $t \in E$ und alle $x \in M$.

Dann ist die Funktion

$$\varphi: E \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto \varphi(t) = \int_M f(t, x) d\mu(x),$$

wohldefiniert und stetig in t_0 .

Beweis. Die Integrierbarkeit der einzelnen Funktionen $x \mapsto f(t, x)$ folgt aus Lemma 9.5. Wir müssen die Stetigkeit der Funktion

$$t \mapsto \varphi(t) = \int_M f(t, x) d\mu(x)$$

in t_0 zeigen. Wir wenden das Folgenkriterium für die Stetigkeit an, sei also $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in E , die gegen t_0 konvergiert. Wir setzen $f_n(x) = f(s_n, x)$. Aufgrund der zweiten Voraussetzung konvergiert die Folge $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ für jedes $x \in M$ gegen $f(t_0, x)$. Daher konvergiert die Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise gegen $f(t_0, -)$. Wegen der dritten Bedingung kann man den Satz von der majorisierten Konvergenz anwenden und erhält

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(s_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_M f_n(x) d\mu(x) = \int_M f(t_0, x) d\mu(x) = \varphi(t_0).$$

□

Satz 11.2. *Es sei (M, \mathcal{A}, μ) ein σ -endlicher Maßraum, I ein nichtleeres offenes Intervall und*

$$f: I \times M \longrightarrow \mathbb{R}, (t, x) \longmapsto f(t, x),$$

eine Funktion, die die folgenden Eigenschaften erfülle.

- (1) *Für alle $t \in I$ ist die Funktion $x \mapsto f(t, x)$ integrierbar.*
- (2) *Für alle $x \in M$ ist die Funktion $t \mapsto f(t, x)$ (stetig) differenzierbar.*
- (3) *Es gibt eine nichtnegative messbare integrierbare Funktion*

$$h: M \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$|f'(t, x)| \leq h(x)$$

für alle $t \in I$ und alle $x \in M$.

Dann ist die Funktion

$$\varphi: I \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto \varphi(t) = \int_M f(t, x) d\mu(x),$$

(stetig) differenzierbar in t , die Zuordnung $x \mapsto f'(t, x)$ ist integrierbar und es gilt die Formel

$$\varphi'(t) = \int_M f'(t, x) d\mu(x).$$

Beweis. Der Differenzenquotient für φ in einem Punkt $t \in I$ und $s \neq t$ ist

$$\frac{\varphi(s) - \varphi(t)}{s - t} = \frac{\int_M f(s, x) d\mu(x) - \int_M f(t, x) d\mu(x)}{s - t}.$$

Wir müssen für jede Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in I mit $s_n \neq t$, die gegen t konvergiert, zeigen, dass die zugehörige Folge der Differenzenquotienten konvergiert. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gibt es (für jedes $x \in M$ und jedes n) ein $c \in I$ mit

$$\left| \frac{f(s_n, x) - f(t, x)}{s_n - t} \right| = |f'(c, x)| \leq h(x).$$

Da h integrierbar ist, ist auch für jedes $n \in \mathbb{N}$ der Differenzenquotient als Funktion in x nach Lemma 9.5 integrierbar. Dann ist unter Verwendung der Linearität des Integrals und des Satzes von der majorisierten Konvergenz

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(s_n) - \varphi(t)}{s_n - t} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_M f(s_n, x) d\mu(x) - \int_M f(t, x) d\mu(x)}{s_n - t} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_M \frac{f(s_n, x) - f(t, x)}{s_n - t} d\mu(x) \\ &= \int_M \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(s_n, x) - f(t, x)}{s_n - t} \right) d\mu(x) \end{aligned}$$

$$= \int_M f'(t, x) d\mu(x).$$

Die stetige Differenzierbarkeit folgt aus Satz 11.1. \square

Korollar 11.3. *Es sei (M, \mathcal{A}, μ) ein σ -endlicher Maßraum, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und*

$$f: U \times M \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine Funktion, die die folgenden Eigenschaften erfülle.

- (1) *Für jedes $z \in U$ ist die Funktion*

$$M \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(z, x),$$

integrierbar.

- (2) *Für jedes $x \in M$ ist die Funktion*

$$U \longrightarrow \mathbb{R}, z \longmapsto f(z, x),$$

stetig differenzierbar.

- (3) *Es gibt eine nichtnegative integrierbare Funktion*

$$h: M \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial z_i}(z, x) \right\| \leq h(x)$$

für alle $z \in U$, alle $x \in M$ und alle $i = 1, \dots, n$.

Dann ist die Funktion

$$\varphi: U \longrightarrow \mathbb{R}, z \longmapsto \varphi(z) = \int_M f(z, x) d\mu(x),$$

stetig differenzierbar und es gilt für jedes $i = 1, \dots, n$ die Formel

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z_i}(z) = \int_M \frac{\partial f}{\partial z_i}(z, x) d\mu(x).$$

Beweis. Dies folgt aus Satz 11.2, indem man zu $i \in \{1, \dots, n\}$ und $P \in U$ die lineare Kurve

$$\psi: I \longrightarrow U, t \longmapsto P + te_i,$$

vorschaltet und $f \circ (\psi \times \text{Id}_M)$ betrachtet. \square

11.2. Das Cavalieri-Prinzip.



Bonaventura Cavalieri (1598-1647)

Es seien (M, \mathcal{A}, μ) und (N, \mathcal{B}, ν) σ -endliche Maßräume und $T \subseteq M \times N$ eine messbare Teilmenge. Für jeden Punkt $x \in M$ ist

$$T(x) = \{y \in N \mid (x, y) \in T\}.$$

Wir erinnern an Lemma 4.10, nachdem diese Mengen messbar sind. In welcher Beziehung steht $(\mu \otimes \nu)(T)$ zur Funktion

$$M \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \nu(T(x))?$$

Bei $N = \mathbb{R}$ und wenn T der Subgraph zu einer nichtnegativen messbaren Funktion f ist, so ist $\lambda^1(T(x)) = f(x)$ und nach der Definition des Integrals gilt

$$(\mu \otimes \lambda^1)(T) = \int_M f(x) d\mu = \int_M \lambda^1(T(x)) d\mu.$$

Der Satz von Cavalieri besagt, dass die Gleichheit zwischen links und rechts für beliebige messbare Teilmengen T gilt. Um diesen Satz überhaupt formulieren zu können, müssen wir zunächst sicherstellen, dass die Funktion $x \mapsto \nu(T(x))$ messbar ist.

Lemma 11.4. *Es seien (M, \mathcal{A}, μ) und (N, \mathcal{B}, ν) σ -endliche Maßräume und sei $T \subseteq M \times N$ eine messbare Teilmenge. Dann sind die Funktionen*

$$M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}, x \longmapsto \nu(T(x)),$$

und

$$N \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}, y \longmapsto \mu(T(y)),$$

messbar.

Beweis. Wir zeigen die Messbarkeit der ersten Funktion $x \mapsto \nu(T(x))$. Dabei reduzieren wir zuerst auf die Situation in der das Maß ν auf N endlich ist. Nach Voraussetzung gibt es eine abzählbare messbare Ausschöpfung $N_n \uparrow N$ mit $\nu(N_n) < \infty$. Wir setzen $T_n = T \cap (M \times N_n)$. Dann ist $T_n \uparrow T$ und

damit auch $T_n(x) \uparrow T(x)$ für jedes $x \in M$. Wenn wir für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Messbarkeit von $x \mapsto \nu(T_n(x))$ gezeigt haben, so folgt sie wegen Lemma 8.4 auch für $x \mapsto \nu(T(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu(T_n(x))$. Wir können also annehmen, dass $\nu(N) < \infty$ ist.

Wir wollen zeigen, dass für jedes $T \subseteq M \times N$ die Funktion $x \mapsto \nu(T(x))$ messbar ist. Wie setzen

$$\mathcal{D} = \{T \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \mid \text{Die Funktion } x \mapsto \nu(T(x)) \text{ ist messbar}\}$$

und müssen zeigen, dass dies die gesamte Produkt- σ -Algebra ist. Zunächst gehören die messbaren Quader $A \times B$ zu \mathcal{D} . Es ist ja

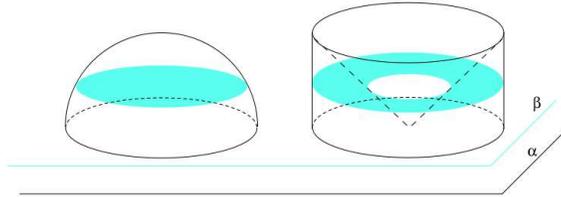
$$(A \times B)(x) = \begin{cases} B, & \text{falls } x \in A \\ \emptyset & \text{sonst,} \end{cases}$$

und damit ist

$$\nu(T(x)) = \nu(B) \cdot e_A(x)$$

messbar. Wir zeigen, dass \mathcal{D} ein Dynkin-System ist. Es ist $M \times N \in \mathcal{D}$. Seien $S \subseteq T$ Teilmengen, die zu \mathcal{D} gehören. Dann ist $(T \setminus S)(x) = T(x) \setminus S(x)$ und $\nu((T \setminus S)(x)) = \nu(T(x)) - \nu(S(x))$ ist nach Lemma 8.3 messbar. Für eine disjunkte abzählbare Vereinigung $T = \bigsqcup_{i \in I} T_i$ ist $T(x) = \bigsqcup_{i \in I} T_i(x)$. Wenn $T_i \in \mathcal{D}$ für alle $i \in I$ ist, so ist die Funktion $x \mapsto \nu(T(x)) = \sum_{i \in I} \nu(T_i(x))$ nach Korollar 8.8 wieder messbar. Damit ist insgesamt \mathcal{D} ein Dynkin-System, das das durchschnittsstabile Erzeugendensystem aller Quader für die σ -Algebra $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ enthält. Deshalb ist $\mathcal{D} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ nach Lemma 1.13. \square

Wir werden im Folgenden die Notation $\int_M f(x) d\mu(x)$ verwenden, die betont, dass die Funktion f von $x \in M$ abhängt. Dies ist insbesondere dann sinnvoll, wenn es um einen Produktraum $M \times N$ geht und Verwechslungen möglich sind.



Satz 11.5. *Es seien (M, \mathcal{A}, μ) und (N, \mathcal{B}, ν) σ -endliche Maßräume. Dann gilt für alle messbaren Teilmengen $T \subseteq M \times N$ die Beziehung*

$$(\mu \otimes \nu)(T) = \int_M \nu(T(x)) d\mu(x) = \int_N \mu(T(y)) d\nu(y).$$

Beweis. Wir zeigen zuerst, dass die Zuordnung

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}, T \longmapsto \int_M \nu(T(x)) d\mu(x),$$

ein Maß auf der Produkt- σ -Algebra ist. Es sei dazu $T = \bigsqcup_{i \in I} T_i$ eine abzählbare Zerlegung in paarweise disjunkte messbare Teilmengen. Nach Aufgabe 10.10 ist

$$\begin{aligned} \int_M \nu(T(x)) d\mu &= \int_M \nu\left(\left(\bigsqcup_{i \in I} T_i\right)(x)\right) d\mu \\ &= \int_M \nu\left(\bigsqcup_{i \in I} T_i(x)\right) d\mu \\ &= \int_M \sum_{i \in I} \nu(T_i(x)) d\mu \\ &= \sum_{i \in I} \int_M \nu(T_i(x)) d\mu, \end{aligned}$$

so dass die σ -Additivität erfüllt ist. Für einen Quader $A \times B$ ist

$$\int_M \nu((A \times B)(x)) d\mu = \int_A \nu(B) d\mu = \mu(A) \cdot \nu(B).$$

Aufgrund des Eindeutigkeitsatzes für das Produktmaß muss daher das durch das Integral definierte Maß mit dem Produktmaß übereinstimmen. \square

11. ARBEITSBLATT

11.1. Aufwärmaufgaben.

Aufgabe 11.1. Es sei

$$f(x, y) = x^3 - yx^2 + 7 \sin y.$$

Berechne die Integrale zum Parameter $y \in [0, \pi]$ über $x \in [0, 1]$ und zum Parameter $x \in [0, 1]$ über $y \in [0, \pi]$. Bestimme jeweils die extremalen Integrale.

Mit Aufgabe 10.19 ist jetzt die folgende Aufgabe einfach zu lösen.

Aufgabe 11.2.*

Es sei

$$f:]0, 1] \longrightarrow [0, \infty[$$

eine stetige, streng fallende, bijektive Funktion mit der ebenfalls stetigen Umkehrfunktion

$$f^{-1}: [0, \infty[\longrightarrow]0, 1].$$

Es sei vorausgesetzt, dass das uneigentliche Integral $\int_0^1 f(t) dt$ existiert. Zeige, dass dann auch das uneigentliche Integral $\int_0^\infty f^{-1}(y) dy$ existiert und dass der Wert dieser beiden Integrale übereinstimmt.

Zur folgenden Aufgabe vergleiche Aufgabe 12.22 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)) und Beispiel 35.5 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)).

Aufgabe 11.3. Es sei

$$E = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}_+ \right\} \cup \{0\},$$

(mit der von \mathbb{R} induzierten Metrik) und es seien $(n \in \mathbb{N}_+)$

$$g, f_n: M \longrightarrow \mathbb{R}$$

messbare Funktionen auf einem σ -endlichen Maßraum M . Wir betrachten die Funktion

$$f: E \times M \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$f\left(\frac{1}{n}, x\right) = f_n(x)$$

und

$$f(0, x) = g(x).$$

Diskutiere den Satz von der majorisierten Konvergenz und Satz 11.1 in dieser Situation.

Aufgabe 11.4.*

Es sei (M, \mathcal{A}, μ) ein endlicher Maßraum und A_t , $t \in \mathbb{R}$, eine Familie von messbaren Mengen mit den zugehörigen Indikatorfunktionen e_{A_t} . Wir betrachten die Abbildung

$$f: \mathbb{R} \times M \longrightarrow \mathbb{R}, (t, x) \longmapsto f(t, x) = e_{A_t}(x).$$

Zeige, dass die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto \varphi(t) = \int_M f(t, x) d\mu(x),$$

nicht stetig sein muss. Welche Voraussetzungen aus Satz 11.1 sind erfüllt, welche nicht?

Aufgabe 11.5. Beweise Satz 58.2 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)), Satz 58.3 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)) und Korollar 58.4 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)) aus Satz 11.1, Satz 11.2 und Korollar 11.3.

Aufgabe 11.6. Formuliere Satz 11.1, Satz 11.2 und Korollar 11.3 für die Situation, wo der Maßraum M die natürlichen Zahlen \mathbb{N} mit dem Zählmaß sind.

Aufgabe 11.7. Es seien $h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und $g: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen. Bestätige Satz 11.2 für

a) $f(x, y) = g(x) + h(y)$,

b) $f(x, y) = g(x) \cdot h(y)$.

Aufgabe 11.8. Zeige, dass die dritte Bedingung in Korollar 11.3 äquivalent zur Existenz von nichtnegativen, integrierbaren Funktionen

$$h_i: M \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial z_i}(z, x) \right\| \leq h_i(x)$$

ist.

Aufgabe 11.9. Es sei

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

definiert durch

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^4 + x^2 t^2 + 1} dt.$$

Untersuchen Sie f auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit. Falls f differenzierbar ist, was ist die Ableitung?

Aufgabe 11.10. Wir interpretieren eine Potenzreihe $\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n z^n$ als eine Funktion auf $U(0, r) \times \mathbb{N}$, wobei der offene Ball $E = U(0, r) \subseteq \mathbb{C}$ mit der induzierten Metrik und \mathbb{N} mit dem Zählmaß versehen sei. Welche Eigenschaften von Satz 11.1 und von (einer komplexen Version von) Satz 11.2 sind (in Abhängigkeit von r) erfüllt? Wie kann man daraus Korollar 16.9 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)) und Satz 20.9 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)) erhalten?

Aufgabe 11.11. Begründe die Additivität des Integrals mit Hilfe von Satz 11.5.

Aufgabe 11.12. Diskutiere den Wikipediaartikel „Prinzip von Cavalieri“, insbesondere in Hinblick auf die Formulierung:

„Aus dem Prinzip von Cavalieri lässt sich herleiten, dass das Volumen eines 'höhengedehnten' Körpers (bei gleichbleibender Grundfläche) proportional zu seiner Höhe ist. Als Beispiel: Ein Körper, dessen Höhe auf diese Weise verdoppelt wird, kann durch 2 gleiche Ausgangskörper konstruiert werden, indem zuerst alle äquivalenten Schnittflächen zusammengelegt werden und diese in der entsprechenden Reihenfolge des Ausgangskörpers aufgeschichtet werden (beide Ausgangskörper werden quasi ineinandergeschoben)“. (Version vom 16. November 2015).

Aufgabe 11.13. Bestimme den Flächeninhalt eines Dreiecks mit dem Cavalieri-Prinzip.

Aufgabe 11.14.*

Die rechteckige Grundseite (Unterseite) eines Bootes (unter Wasser) habe die Breite 2m und die Länge 10m, die (ebenfalls rechteckige) Deckseite (Oberseite) habe die Breite 3m und die Länge 12m, wobei die Seiten parallel zueinander seien und den Abstand 2m besitzen. Die vier übrigen Seiten seien ebene Verbindungen zwischen Ober- und Unterseite. Das Boot wiegt mit Besatzung, aber ohne Ladung 12.000kg. Der Tiefgang des Bootes soll maximal 1,5m betragen. Mit welcher Masse kann das Boot maximal beladen werden?

Aufgabe 11.15.*

Es sei Z der Zylinder um die x -Achse und W der Zylinder um die z -Achse, beide zum Radius 1. Bestimme das Volumen des Durchschnitts $Z \cap W$.

Aufgabe 11.16. Es sei (M, \mathcal{A}, μ) ein σ -endlicher Maßraum und

$$h_1, h_2: M \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

messbare Funktionen. Zeige

$$\int_M h_1 h_2 d\mu = \int_{S(h_1)} h_2 d\mu \otimes \lambda^1,$$

wobei h_2 in natürlicher Weise als Funktion auf dem Subgraphen $S(h_1)$ zu h_1 aufgefasst wird.

Aufgabe 11.17. Es sei $T \subseteq \mathbb{R}^n$ eine messbare Teilmenge und es sei

$$\varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n-1}$$

eine surjektive lineare Abbildung derart, dass für alle $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ die Menge $T \cap \varphi^{-1}(x)$ abzählbar sei. Zeige

$$\lambda^n(T) = 0.$$

11.2. Aufgaben zum Abgeben.

Aufgabe 11.18. (3 Punkte)

Es seien $[a, b]$ und $[c, d]$ kompakte Intervalle und es sei

$$f: [a, b] \times [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto f(x, y),$$

eine stetige Funktion. Zeige mit Hilfe von Satz 11.1, dass auch die Funktion

$$[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \int_c^d f(x, y) dy,$$

stetig ist.

Aufgabe 11.19. (4 Punkte)

Zeige, dass die Fakultätsfunktion $\text{Fak}(x)$ beliebig oft differenzierbar ist mit den Ableitungen

$$\text{Fak}^{(n)}(x) = \int_0^\infty (\ln t)^n t^x e^{-t} dt.$$

Aufgabe 11.20. (4 Punkte)

Berechne das Volumen des Kegels, dessen Spitze in $(2, 3, 5)$ liegt und dessen Grundfläche die durch

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x^2 + 2y^2 \leq 4\}$$

gegebene Ellipse ist.

Aufgabe 11.21. (6 Punkte)

Es sei $\mu = \varphi_*\lambda^2$ das Bildmaß unter der Multiplikation

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto xy.$$

Zeige, dass für jede Borelmenge $T \subseteq \mathbb{R}$

$$\mu(T) = \begin{cases} 0, & \text{falls } \lambda^1(T) = 0, \\ \infty, & \text{falls } \lambda^1(T) > 0, \end{cases}$$

gilt.

Aufgabe 11.22. (5 Punkte)

Es sei $F \neq 0$ ein Polynom in n Variablen über \mathbb{R} und es sei

$$T = \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) = 0\}$$

die Nullstellenmenge des Polynoms. Zeige

$$\lambda^n(T) = 0.$$

12. VORLESUNG - SATZ VON FUBINI



Korollar 12.1. *Es sei (M, \mathcal{A}, μ) ein σ -endlicher Maßraum und*

$$v: M \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine messbare Abbildung. Dann ist die Abbildung

$$\varphi_v: M \times \mathbb{R}^n \longrightarrow M \times \mathbb{R}^n, (x, y) \longmapsto (x, y + v(x)),$$

bijektiv und maßtreu.

Beweis. Die Abbildung φ_v ist messbar nach Lemma 4.11 und nach Lemma 8.3. Sie ist ferner bijektiv, die Umkehrabbildung ist φ_{-v} . Sei $T \subseteq M \times \mathbb{R}^n$ messbar. Wir müssen

$$(\mu \otimes \lambda^n)(T) = (\mu \otimes \lambda^n)(\varphi_v^{-1}(T))$$

zeigen. Für $x \in M$ ist

$$(\varphi_v^{-1}(T))(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid (x, y) \in \varphi_v^{-1}(T)\} = \{y \in \mathbb{R}^n \mid (x, y + v(x)) \in T\}.$$

Aufgrund der Translationsinvarianz des Borel-Lebesgue-Maßes besitzt diese Menge das gleiche Maß wie

$$\{y + v(x) \in \mathbb{R}^n \mid (x, y + v(x)) \in T\} = \{z \in \mathbb{R}^n \mid (x, z) \in T\} = T(x).$$

Aufgrund der Integrationsversion des Cavalieri-Prinzips gilt also

$$\begin{aligned} (\mu \otimes \lambda^n)(T) &= \int_M \lambda^n(T(x)) d\mu(x) \\ &= \int_M \lambda^n((\varphi_v^{-1}(T))(x)) d\mu(x) \\ &= (\mu \otimes \lambda^n)(\varphi_v^{-1}(T)). \end{aligned}$$

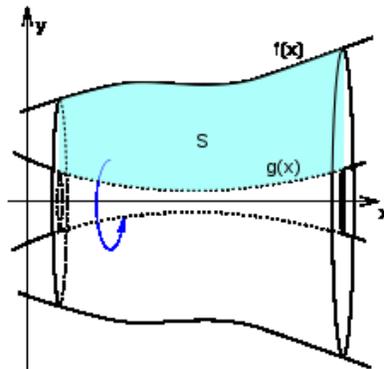
□

12.1. Einige Volumina.

Definition 12.2. Zu einer Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ nennt man

$$\{(x, y \cos \alpha, y \sin \alpha) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in T, \alpha \in [0, 2\pi]\}$$

die zugehörige *Rotationsmenge* (um die x -Achse).



Satz 12.3. Es sei

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, t \longmapsto f(t),$$

eine nichtnegative messbare Funktion und sei $K \subseteq \mathbb{R}^3$ der Rotationskörper zum Subgraphen von f um die x -Achse. Dann besitzt K das Volumen

$$\lambda^3(K) = \pi \cdot \int_{[a,b]} (f(t))^2 d\lambda(t) = \pi \cdot \int_a^b (f(t))^2 dt,$$

wobei für die zweite Formel f als stetig vorausgesetzt sei.

Beweis. Nach dem Cavalieri-Prinzip und nach der Formel für den Flächeninhalt des Kreises ist

$$(\lambda \otimes \lambda^2)(K) = \int_{[a,b]} \lambda^2(K(t)) d\lambda(t) = \pi \int_{[a,b]} (f(t))^2 d\lambda(t).$$

Für stetiges f ist dies nach Satz 10.5 gleich

$$\pi \int_a^b (f(t))^2 dt.$$

□

Den Oberflächeninhalt eines Rotationskörpers zu einer (differenzierbaren) Funktion werden wir in der Differentialgeometrie berechnen.

Beispiel 12.4. Wir wollen das Volumen einer n -dimensionalen abgeschlossenen Kugel vom Radius r berechnen, also von

$$B_n(r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq r\}.$$

Wegen Satz 7.2 gilt dabei $\lambda^n(B_n(r)) = r^n \lambda^n(B_n(1))$, d.h. es geht im Wesentlichen darum, das Volumen der Einheitskugel auszurechnen.

Ihr Volumen bezeichnen wir mit $\beta_n = \lambda^n(B_n(1))$. Zur Berechnung gehen wir induktiv vor (es ist $\beta_1 = 2$). Wir betrachten

$$B_n \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}.$$

Für jedes fixierte h , $-1 \leq h \leq 1$, kann man den Querschnitt als

$$\begin{aligned} B_n(h) &= \{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid (x_1, \dots, x_{n-1}, h) \in B_n\} \\ &= \{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 + h^2 \leq 1\} \\ &= \{(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} \mid x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 \leq 1 - h^2\} \\ &= B_{n-1}(0, \sqrt{1 - h^2}) \end{aligned}$$

schreiben, d.h. als eine $(n-1)$ -dimensionale Kugel vom Radius $\sqrt{1-h^2}$. Aufgrund des Cavalieri-Prinzips ist daher

$$\begin{aligned} \beta_n &= \lambda^n(B_n(1)) \\ &= (\lambda^{n-1} \otimes \lambda^1)(B_n(1)) \\ &= \int_{[-1,1]} \lambda^{n-1}(B_{n-1}(\sqrt{1-h^2})) d\lambda^1 \\ &= \int_{[-1,1]} (\sqrt{1-h^2})^{n-1} \lambda^{n-1}(B_{n-1}(1)) d\lambda^1 \\ &= \lambda^{n-1}(B_{n-1}(1)) \cdot \int_{[-1,1]} (\sqrt{1-h^2})^{n-1} d\lambda^1 \\ &= \beta_{n-1} \cdot \int_{[-1,1]} (\sqrt{1-h^2})^{n-1} d\lambda^1. \end{aligned}$$

Dabei können wir das Integral rechts wegen Satz 10.5 und Korollar 24.7 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)) über Stammfunktionen ausrechnen. Die Substitution

$$h = \sin t$$

liefert

$$\int_{-1}^1 (\sqrt{1-h^2})^{n-1} dh = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt.$$

Im Beweis zu Korollar 25.4 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)) wurden diese Integrale berechnet; mit $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$ gilt

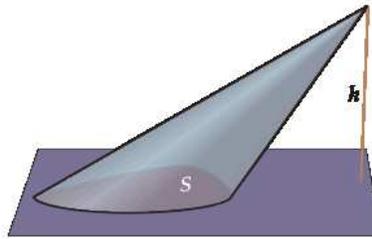
$$a_n = \begin{cases} \frac{(n-1)(n-3)\cdots 3\cdot 1}{n(n-2)\cdots 4\cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} & \text{bei } n \text{ gerade } \geq 2, \\ \frac{(n-1)(n-3)\cdots 4\cdot 2}{n(n-2)\cdots 5\cdot 3} & \text{bei } n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Mit diesen Formeln und der Rekursionsvorschrift $\beta_n = 2\beta_{n-1}a_n$ kann man schließlich mit Hilfe der Fakultätsfunktion das Kugelvolumen als

$$\beta_n = \frac{\pi^{n/2}}{\text{Fak}(n/2)}$$

schreiben. Diese Formel ergibt sich durch Induktion aus Satz 32.3 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)), siehe Aufgabe 12.20.

Speziell ergibt sich für die Fläche des Einheitskreises der Wert π , für das Volumen der Einheitskugel der Wert $\frac{4}{3}\pi$ und für das vierdimensionale Volumen der vierdimensionalen Standardkugel der Wert $\frac{\pi^2}{2}$.



Definition 12.5. Es sei $B \subseteq \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times 0$ und $P \in \mathbb{R}^{n+1}$ ein Punkt. Dann nennt man die Menge

$$K_B = \{P + t(Q - P) \mid Q \in B, t \in [0, 1]\}$$

den *Kegel* zur Basis B mit der Spitze P .

Satz 12.6. Es sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar, $P \in \mathbb{R}^{n+1}$ ein Punkt und K_B der zugehörige Kegel. Es sei $h = P_{n+1}$ die letzte Koordinate von P . Dann ist K_B ebenfalls messbar, und es gilt

$$\lambda^{n+1}(K_B) = \frac{1}{n+1} \lambda^n(B) \cdot |h|.$$

Beweis. Bei $h = 0$ liegt der gesamte Kegel in \mathbb{R}^n und sein λ^{n+1} -Maß ist 0 nach Lemma 6.11, sei also $h \neq 0$. Der Durchschnitt von $K = K_B$ mit der durch $x_{n+1} = t$, t zwischen 0 und h , gegebenen Hyperebene ist

$$\begin{aligned} K(t) &= \{(x_1, \dots, x_n) \mid (x_1, \dots, x_n, t) \in K_B\} \\ &= \left\{ (x_1, \dots, x_n) \mid (x_1, \dots, x_n, t) = P + \frac{(h-t)}{h}(Q - P), Q \in B \right\}. \end{aligned}$$

Wegen der Translationsinvarianz und Korollar 7.3 ist dessen Volumen gleich $\left|\frac{h-t}{h}\right|^n \lambda^n(B)$. Nach dem Cavalieri-Prinzip ist also (mit $s = h - t$)

$$\begin{aligned} \lambda^{n+1}(K_B) &= \int_0^{|h|} \lambda^n(K(s)) ds \\ &= \int_0^{|h|} \lambda^n(B) \cdot \left(\frac{s}{|h|}\right)^n ds \\ &= \lambda^n(B) \cdot \frac{1}{|h|^n} \cdot \int_0^{|h|} s^n ds \\ &= \lambda^n(B) \cdot \frac{1}{|h|^n} \cdot \frac{1}{n+1} |h|^{n+1} \\ &= \lambda^n(B) \cdot \frac{1}{n+1} \cdot |h|. \end{aligned}$$

□

Beispiel 12.7. Wir stellen eine falsche Berechnung der Kugeloberfläche an, die auf einem falsch interpretierten Cavalieri-Prinzip beruht. Wir betrachten die obere Einheitshalbkugel. Zu jeder Höhe $h \in [0, 1]$ ist der Querschnitt der Kugeloberfläche mit der durch $z = h$ definierten Ebene eine Kreislinie mit dem Radius $\sqrt{1 - h^2}$. Der Kreisumfang eines solchen Kreises ist $2\pi\sqrt{1 - h^2}$. Wir wollen die Oberfläche der oberen Halbkugel berechnen, indem wir diese Umfänge über die Höhe aufintegrieren. Für die Kugeloberfläche würde sich dann (mit der Substitution $h = \sin s$)

$$\begin{aligned} A &= 2 \int_0^1 2\pi\sqrt{1 - h^2} dh \\ &= 4\pi \int_0^1 \sqrt{1 - h^2} dh \\ &= 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 s ds \\ &= 4\pi \frac{1}{2} (s + \sin s \cos s) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2\pi \frac{\pi}{2} \\ &= \pi^2. \end{aligned}$$

Der wahre Wert ist aber mit 4π deutlich größer.

12.2. Der Satz von Fubini.

Es seien (M, \mathcal{A}, μ) und (N, \mathcal{B}, ν) σ -endliche Maßräume und sei

$$f: M \times N \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

eine messbare Funktion. Der Satz von Fubini bringt das Integral $\int_{M \times N} f d(\mu \otimes \nu)$ mit dem Integral über M der Funktion

$$M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}, x \longmapsto \int_N f(x, y) d\nu(y),$$

in Verbindung. Er erlaubt es, Integrale über einem höherdimensionalen Bereich auf eindimensionale Integrale zurückzuführen. Sein Beweis beruht auf dem Cavalieri-Prinzip, angewendet auf den Produktraum $M \times N \times \overline{\mathbb{R}}$, und ist prinzipiell nicht schwierig. Allerdings muss man bei einigen Details (Nichtnegativität, undefinierter Stellen, Nullmengen) doch präzise sein, so dass wir einige vorbereitende Lemmata anführen.

Eine Teilmenge $Z \subseteq M$ eines Maßraumes M heißt *Nullmenge*, wenn $\mu(Z) = 0$ ist. Beispielsweise ist jede abzählbare Menge in \mathbb{R}^n eine Nullmenge. Manchmal verwendet man diesen Begriff auch für nicht notwendigerweise messbare Teilmengen Z , für die es eine messbare Menge $Z \subseteq Z'$ gibt mit $\mu(Z') = 0$. Für eine Eigenschaft E , die für die Punkte eines Maßraumes erklärt ist, sagt man, dass die Eigenschaft *fast überall* gilt, wenn die Ausnahmemenge

$$\{x \in M \mid E(x) \text{ gilt nicht}\}$$

eine Nullmenge ist. Insbesondere spricht man von *fast überall definierten Funktionen*. Da es bei Integralen nicht auf Nullmengen des Definitionsbereiches ankommt, kann man häufig solche „kleinen“ undefinierter Stellen ignorieren.

Lemma 12.8. *Es seien (M, \mathcal{A}, μ) und (N, \mathcal{B}, ν) σ -endliche Maßräume und sei*

$$f: M \times N \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

eine nichtnegative messbare Funktion. Dann gelten folgende Aussagen.

- (1) *Für jedes $x \in M$ ist die Funktion*

$$N \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}, y \longmapsto f(x, y),$$

und für jedes $y \in N$ ist die Funktion

$$M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}, x \longmapsto f(x, y),$$

messbar.

- (2) *Die Funktion*

$$N \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}, y \longmapsto \int_M f(x, y) d\mu(x),$$

und die Funktion

$$M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}, x \longmapsto \int_N f(x, y) d\nu(y),$$

sind messbar.

(3) Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{M \times N} f d(\mu \otimes \nu) &= \int_M \left(\int_N f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) \\ &= \int_N \left(\int_M f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y). \end{aligned}$$

Beweis. (1) folgt direkt aus der Messbarkeit der Inklusionen

$$M \longrightarrow M \times N, x \longmapsto (x, y),$$

für jedes $y \in N$. (2) folgt aus Lemma 11.4 angewendet auf

$$S(f) \subseteq M \times (N \times \overline{\mathbb{R}}),$$

da $(S(f))(x)$ der Subgraph von $f(x, -)$ und $\int_N f(x, -) d\nu = \nu \otimes \lambda^1(S(f)(x))$ ist. (3). Nach Satz 11.5, angewendet auf das Produkt $M \times (N \times \overline{\mathbb{R}})$, ist

$$\begin{aligned} \int_{M \times N} f d(\mu \otimes \nu) &= (\mu \otimes \nu \otimes \lambda^1)(S(f)) \\ &= \int_M (\nu \otimes \lambda^1)((S(f))(x)) d\mu \\ &= \int_M \left(\int_N f(x, y) d\nu \right) d\mu. \end{aligned}$$

Da man die Rollen von M und N vertauschen kann, ergibt sich auch die andere Darstellung. \square

Lemma 12.9. *Es seien (M, \mathcal{A}, μ) und (N, \mathcal{B}, ν) σ -endliche Maßräume und sei*

$$f: M \times N \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

eine messbare Funktion. Dann ist f genau dann integrierbar, wenn

$$\int_M \left(\int_N |f(x, y)| d\nu(y) \right) d\mu(x) \text{ oder } \int_N \left(\int_M |f(x, y)| d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

endlich ist.

Beweis. Die Integrierbarkeit von f ist nach Lemma 9.5 äquivalent zur Integrierbarkeit der Betragsfunktion, was die Endlichkeit von $\int_{M \times N} |f| d(\mu \otimes \nu)$ bedeutet. Die Aussage folgt daher aus Lemma 12.8. \square

Wir kommen nun zum *Satz von Fubini*.

Satz 12.10. *Es seien (M, \mathcal{A}, μ) und (N, \mathcal{B}, ν) σ -endliche Maßräume und sei*

$$f: M \times N \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

eine integrierbare Funktion. Dann sind die beiden Funktionen

$$M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}, x \longmapsto \int_N f(x, y) d\nu(y),$$

und

$$N \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}, y \longmapsto \int_M f(x, y) d\mu(x),$$

fast überall reellwertig und fast überall integrierbar, und es gilt

$$\begin{aligned} \int_{M \times N} f d(\mu \otimes \nu) &= \int_M \left(\int_N f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) \\ &= \int_N \left(\int_M f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y) \end{aligned}$$

Beweis. Nach Voraussetzung und nach Lemma 12.9 ist die Funktion $x \mapsto \int_N |f(x, y)| d\nu(y)$ integrierbar. Dies bedeutet insbesondere, dass das Integral $\int_N |f(x, y)| d\nu(y)$ fast überall einen endlichen Wert hat, dass es also eine Nullmenge $Z \subseteq M$ gibt mit $\int_N |f(x, y)| d\nu(y) < \infty$ für $x \notin Z$. Daher sind nach Lemma 9.5 für $x \notin Z$ die Integrale $\int_N f(x, y) d\nu(y)$ definiert und endlich, und dies gilt ebenso für die positiven und negativen Teile $f_+(x, y)$ und $f_-(x, y)$.

Da sich Integrale nicht ändern, wenn man im Integrationsgebiet eine Nullmenge weglässt, und da $Z \times N$ eine Nullmenge in der Produktmenge ist, kann man M durch $M \setminus Z$ ersetzen. Wir schreiben

$$\begin{aligned} \int_{M \times N} f d(\mu \otimes \nu) &= \int_{M \times N} (f_+ - f_-) d(\mu \otimes \nu) \\ &= \int_{M \times N} f_+ d(\mu \otimes \nu) - \int_{M \times N} f_- d(\mu \otimes \nu) \end{aligned}$$

und wenden auf die beiden Summanden Lemma 12.8 an, so dass dies gleich

$$\begin{aligned} &= \int_M \left(\int_N f_+(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) - \int_M \left(\int_N f_-(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) \\ &= \int_M \left(\int_N (f_+(x, y) - f_-(x, y)) d\nu(y) \right) d\mu(x) \\ &= \int_M \left(\int_N f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) \end{aligned}$$

ist. □

12. ARBEITSBLATT

12.1. Aufwärmaufgaben.

Aufgabe 12.1. Bestimme das Volumen einer gleichseitigen Pyramide (eines *Tetraeders*) mit Seitenlänge 1.

Aufgabe 12.2. Bestimme das Volumen des Rotationskörpers, der entsteht, wenn der Sinusbogen zwischen 0 und π um die x -Achse gedreht wird.

Aufgabe 12.3.*

Bestimme das Volumen des Rotationskörpers, der entsteht, wenn man den Graphen der Funktion

$$f: [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, t \longmapsto t + \sqrt{t} + 1,$$

um die t -Achse rotieren lässt.

Aufgabe 12.4. Bestimme das Volumen des Körpers, der entsteht, wenn die Standardparabel um die y -Achse gedreht wird und dies mit der Ebene zu $y = h$ „gedeckelt“ wird, in Abhängigkeit von $h \geq 0$.

Aufgabe 12.5.*

Berechne das Volumen der Einheitskugel mit dem Cavalieri-Prinzip.

Aufgabe 12.6. Fasse die Einheitskugel als Rotationskörper auf und berechne damit ihr Volumen.

Aufgabe 12.7. Beweise Satz 12.3 für stetige Funktionen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ direkt über Treppenfunktionen und Überpflasterungen des Rotationskörpers.

Aufgabe 12.8.*

Häuptling Winnetou möchte sich ein neues Tipi über einer quadratischen Grundfläche von 3×3 Metern errichten. Er verwendet dafür vier Stangen mit einer Länge von 5 Metern, die in den Eckpunkten der Grundfläche stehen und sich in der Zeltspitze treffen sollen.

- a) Wie viel Quadratmeter Büffelhaut wird für das Zeltdach gebraucht?
- b) Wie viel Kubikmeter Rauminhalt hat das neue Zelt?

Aufgabe 12.9.*

Ein Eimer steht im Garten, gestern abend war er leer. Der Eimer ist 30 cm hoch, er hat am Boden einen Durchmesser von 20 cm und oben am Rand einen Durchmesser von 25 cm. Über Nacht hat es 5 cm geregnet. Wie hoch ist der Wasserstand im Eimer am Morgen?

Aufgabe 12.10. Bestimme das Volumen des Körpers, der entsteht, wenn man aus dem Einheitszylinder, dessen Grundfläche eine Einheitskreisscheibe ist und der die Höhe 1 besitzt, den (offenen) Kegel herausnimmt, der den oberen Zylinderdeckel als Grundfläche und den unteren Kreismittelpunkt als Spitze besitzt.

Aufgabe 12.11. Es sei

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}_+, x \longmapsto f(x),$$

eine positive stetige Funktion (mit $a \leq b$ aus \mathbb{R}). Zeige, dass die Oberfläche des zugehörigen Rotationskörpers, also die Menge

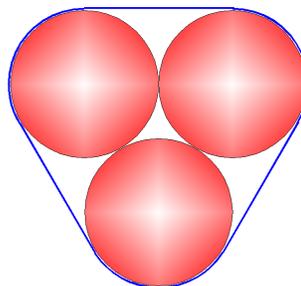
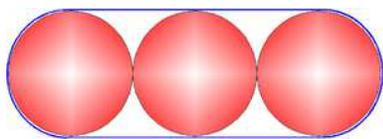
$$M = \{(x, f(x) \cos \alpha, f(x) \sin \alpha) \mid x \in [a, b], \alpha \in [0, 2\pi[\} \subseteq \mathbb{R}^3,$$

das Volumen 0 besitzt.

Aufgabe 12.12.*

Es sollen drei Kugeln mit Radius 1 straff in eine Folie eingepackt werden. Berechne das Volumen des Gesamtpakets, wenn

- die Kugeln linear und anliegend angeordnet werden,
- die Kugeln als Dreieck anliegend angeordnet werden.



Aufgabe 12.13. Wo liegt der Fehler in Beispiel 12.7?

Für eine Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}^n$ haben wir bisher nur das n -dimensionale Volumen $\lambda^n(T)$ zur Verfügung. Viele „niedrigerdimensionale“ Teilmengen wie die Kugeloberfläche besitzen dabei das Volumen 0, denen man aber gerne auch einen passenden „niedrigerdimensionalen“ Inhalt zuordnen möchte. Für Kurven haben wir in Analysis II einen adäquaten Längenbegriff entwickelt, siehe Satz 38.6 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)), für d -dimensionale abgeschlossene Untermannigfaltigkeiten wird eine entsprechende Theorie in der Differentialgeometrie entwickelt. Hier werden wir an einigen Beispielen die Idee verfolgen, durch Verdickungen von T und einen geeigneten Limesprozess zu einem niedrigerdimensionalen Inhalt zu gelangen. Zu $\epsilon > 0$ nennen wir

$$T(\epsilon) := \bigcup_{P \in T} U(P, \epsilon)$$

die ϵ -Verdickung von T .

Aufgabe 12.14. Wir betrachten die lineare Verbindungsstrecke S zwischen zwei Punkten $P, Q \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Zeige, dass

$$\frac{\lambda^n(S(\epsilon))}{\epsilon^{n-1} \beta_{n-1}}$$

für $\epsilon \rightarrow 0$ gegen die Länge von S konvergiert.

Aufgabe 12.15. Es sei

$$\gamma: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

$n \geq 2$, eine stetig differenzierbare Kurve mit dem Bild $S = \gamma([a, b])$. Zeige, dass

$$\frac{\lambda^n(S(\epsilon))}{\epsilon^{n-1} \beta_{n-1}}$$

für $\epsilon \rightarrow 0$ gegen die Kurvenlänge konvergiert.

Aufgabe 12.16. Die Ableitung des Flächeninhaltes πr^2 des Kreises mit Radius r ist $2\pi r$, also der Umfang des Kreises. Die Ableitung des Volumens $\frac{4}{3}\pi r^3$ der Kugel mit Radius r ist $4\pi r^2$, also der Flächeninhalt der Kugeloberfläche. Es sei $T(r) \subseteq \mathbb{R}^n$ die Kugeloberfläche der allgemeinen Kugel $B(r) \subseteq \mathbb{R}^n$.

(1) Zeige (für $0 < \epsilon < r$)

$$(T(r))(\epsilon) = U(0, r + \epsilon) \setminus B(0, r - \epsilon).$$

(2) Zeige, dass

$$\frac{\lambda^n((T(r))(\epsilon))}{2\epsilon}$$

für $\epsilon \rightarrow 0$ gegen die Ableitung der Formel für die allgemeine n -dimensionale Kugel mit Radius r konvergiert.

(3)

12.2. Aufgaben zum Abgeben.

Aufgabe 12.17. (5 Punkte)

Es sei K die Kreisscheibe mit dem Mittelpunkt in $(0, R)$ und dem Radius $0 < r < R$. Berechne das Volumen des Rotationskörpers, der entsteht, wenn sich K um die x -Achse dreht.

Aufgabe 12.18. (6 Punkte)

Es sei V der Viertelkreis mit dem Mittelpunkt in $(1, 0)$, dem Radius 1 und den Eckpunkten $(0, 0)$ und $(1, 1)$. Berechne das Volumen des „runden Trichters“, der entsteht, wenn man V um die y -Achse dreht.

Aufgabe 12.19. (5 Punkte)

Es sei D das Dreieck mit den Eckpunkten $(3, 4)$, $(5, 5)$ und $(4, 6)$. Bestimme das Volumen des Rotationskörpers, der entsteht, wenn man D um die x -Achse dreht.

Aufgabe 12.20. (2 Punkte)

Zeige

$$\beta_n = \frac{\pi^{n/2}}{\text{Fak}(n/2)}$$

durch Induktion über n unter Verwendung von Beispiel 12.4 und Satz 32.3 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)).

13. VORLESUNG - FOLGERUNGEN

13.1. Folgerungen aus dem Satz von Fubini.

Beispiel 13.1. Wir wollen das Integral der Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 - xy + 2y^3,$$

über dem Rechteck $Q = [-2, 1] \times [0, 2]$ mit dem Satz von Fubini ausrechnen. Dies führt auf

$$\begin{aligned} \int_Q f \, d\lambda^2 &= \int_0^2 \left(\int_{-2}^1 (x^2 - xy + 2y^3) \, dx \right) dy \\ &= \int_0^2 \left(\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2y + 2y^3x \right) \Big|_{-2}^1 \right) dy \\ &= \int_0^2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}y + 2y^3 + \frac{8}{3} + 2y + 4y^3 \right) dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^2 \left(3 + \frac{3}{2}y + 6y^3 \right) dy \\
&= \left(3y + \frac{3}{4}y^2 + \frac{3}{2}y^4 \right) \Big|_0^2 \\
&= 6 + 3 + 24 \\
&= 33.
\end{aligned}$$

Korollar 13.2. *Es seien (M, \mathcal{A}, μ) und (N, \mathcal{B}, ν) σ -endliche Maßräume und es seien $f: M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ und $g: N \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ integrierbare Funktionen. Dann ist auch die Funktion*

$$fg: M \times N \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}, (x, y) \longmapsto f(x) \cdot g(y),$$

integrierbar und es gilt

$$\int_{M \times N} fg \, d(\mu \otimes \nu) = \int_M f \, d\mu \cdot \int_N g \, d\nu.$$

Beweis. Wir nehmen zuerst f und g als nichtnegativ an. Dann gilt nach Satz 12.10

$$\begin{aligned}
\int_{M \times N} fg \, d(\mu \otimes \nu) &= \int_M \left(\int_N (fg)(x, y) \, d\nu(y) \right) d\mu(x) \\
&= \int_M \left(\int_N f(x)g(y) \, d\nu(y) \right) d\mu(x) \\
&= \int_M f(x) \left(\int_N g(y) \, d\nu(y) \right) d\mu(x) \\
&= \left(\int_N g(y) \, d\nu(y) \right) \cdot \left(\int_M f(x) \, d\mu(x) \right).
\end{aligned}$$

Für beliebige integrierbare Funktionen folgt daraus, angewendet auf die Betragsfunktionen, zunächst die Integrierbarkeit des Produkts und daraus mit derselben Rechnung die Formel. \square

13.2. Dichten.

Die bisher bewiesenen Eigenschaften des Integrals erlauben es, ausgehend von einem Maß und einer integrierbaren Funktion neue Maße zu definieren.

Definition 13.3. Es sei (M, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum und es sei

$$g: M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

eine nichtnegative messbare Funktion. Dann nennt man das für jede messbare Teilmenge $T \subseteq M$ durch

$$\nu(T) := \int_T g \, d\mu$$

definierte Maß auf M das *Maß zur Dichte g* . Es wird mit $g\mu$ bezeichnet.

Bemerkung 13.4. Die Vorstellung, die hinter einer Dichte liegt und zu dem Namen geführt hat, ist die physikalische Dichte eines Körpers. Zu einem Körper im Raum berechnet das Borel-Lebesgue-Maß das Volumen. Wenn man aber an der Masse dieses Körpers interessiert ist, so reicht die Kenntnis des Volumens nicht aus, es sei denn, der Körper ist homogen und besitzt überall eine konstante Dichte. In diesem Fall ist die Masse proportional zum Volumen. Bei einem nicht homogenen Körper hingegen muss man wissen, wie sich die Masse auf dem Körper verteilt. Eine solche Massenverteilung wird durch eine Dichtefunktion beschrieben, die jedem Punkt des Körpers die „infinitesimale Dichte“ in diesem Punkt zuordnet. Die Gesamtmasse ergibt sich dann durch Integration dieser Dichte bezüglich des Volumenmaßes.

13.3. Nullmengen unter differenzierbaren Abbildungen.

Wir beginnen nun mit den Vorbereitungen zum Beweis der Transformationsformel.

Lemma 13.5. *Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sei*

$$\varphi: G \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine Lipschitz-stetige Abbildung. Es sei $S \subseteq G$ eine Nullmenge. Dann ist auch $\varphi(S)$ eine Nullmenge.

Beweis. Es gelte

$$d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq L \cdot d(x, y)$$

mit einer Lipschitz-Konstanten $L \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Zunächst ist für jeden Würfel

$$W \subseteq G$$

mit der Kantenlänge δ das Bild $\varphi(W)$ in einem Ball mit einem Radius $\leq n\delta L$ enthalten. Daher gibt es ein (von δ unabhängiges) $c > 0$ mit

$$\lambda^n(\varphi(W)) \leq c\delta^n = c\lambda^n(W)$$

für alle Würfel. Diese Abschätzung gilt dann auch für alle Quader, da diese beliebig nahe durch Vereinigungen von Würfeln approximiert werden können.

Da S eine messbare Nullmenge ist, gibt es aufgrund der Konstruktion des Borel-Lebesgue-Maßes über das äußere Maß zu jedem $\epsilon > 0$ eine abzählbare Überpflasterung

$$S \subseteq \bigcup_{i \in I} Q_i$$

mit Quadern Q_i und mit

$$\sum_{i \in I} \lambda^n(Q_i) \leq \epsilon.$$

Daher gilt $\varphi(S) \subseteq \bigcup_{i \in I} \varphi(Q_i)$ und somit

$$\lambda^n(\varphi(S)) \leq \lambda^n\left(\bigcup_{i \in I} \varphi(Q_i)\right)$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sum_{i \in I} \lambda^n(\varphi(Q_i)) \\
&\leq \sum_{i \in I} c \lambda^n(Q_i) \\
&= c \sum_{i \in I} \lambda^n(Q_i) \leq c\epsilon.
\end{aligned}$$

Da man ϵ beliebig klein wählen kann, muss $\varphi(S)$ eine Nullmenge sein. \square

Korollar 13.6. *Es sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sei*

$$\varphi: G \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

eine stetig differenzierbare Abbildung. Es sei $S \subseteq G$ eine Nullmenge. Dann ist auch $\varphi(S)$ eine Nullmenge.

Beweis. Nach (einem Spezialfall von) Lemma 55.4 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)) ist φ lokal Lipschitz-stetig. Die Nullmenge S kann man abzählbar überdecken mit offenen Mengen, worauf φ Lipschitz-stetig ist. Die Aussage folgt dann aus Lemma 13.5. \square

13.4. Die Transformationsformel für Quader.

Lemma 13.7. *Es seien G und H offene Mengen im \mathbb{R}^n und es sei*

$$\varphi: G \longrightarrow H$$

ein C^1 -Diffeomorphismus mit der Jacobi-Determinante

$$(J(\varphi))(x) = \det(D\varphi)_x$$

für $x \in G$. Es sei $Q \subseteq G$ ein kompakter achsenparalleler Quader. Dann gelten die Abschätzungen

$$\begin{aligned}
\lambda^n(Q) \cdot \min(|(J(\varphi))(x)|, x \in Q) &\leq \lambda^n(\varphi(Q)) \\
&\leq \lambda^n(Q) \cdot \max(|(J(\varphi))(x)|, x \in Q).
\end{aligned}$$

Beweis. Wir setzen $j(x) = |\det(D\varphi)_x|$. Wir beweisen zuerst die Abschätzung nach oben. Wir schreiben $\lambda^n(\varphi(Q)) = c \cdot \lambda^n(Q)$ mit einem $c \neq 0$ und wir müssen $c \leq \max(j(x), x \in Q)$ zeigen. Wir konstruieren induktiv eine Folge von abgeschlossenen achsenparallelen Teilquadern Q_m , $m \in \mathbb{N}$, mit der Eigenschaft

$$\lambda^n(\varphi(Q_m)) \geq c \cdot \lambda^n(Q_m).$$

Es sei $Q_0 = Q$. Für den Induktionsschluss von m auf $m+1$ betrachten wir sämtliche 2^n Teilquader von Q_m mit halbiertem Kantenlänge. Würden diese Teilquader K_i alle die Ungleichung $\lambda^n(\varphi(K_i)) < c \cdot \lambda^n(K_i)$ erfüllen, so ergebe sich durch Aufsummieren sofort ein Widerspruch zur Induktionsvoraussetzung (wegen Korollar 13.6 sind die Ränder der Quader unerheblich). Es gibt also mindestens einen Quader $Q_{m+1} = K_i$ mit $\lambda^n(\varphi(Q_{m+1})) \geq c \cdot \lambda^n(Q_{m+1})$. Diese Quaderschachtelung definiert in jeder Komponente eine

Intervallschachtelung und damit nach Satz 7.3 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)) einen Punkt $P \in \bigcap_{m \in \mathbb{N}} Q_m$. Wegen der Translationsinvarianz des Borel-Lebesgue-Maßes können wir $P = 0$ und $\varphi(P) = 0$ annehmen. Es sei $L = (D\varphi)_0$ das totale Differential. Da φ in 0 differenzierbar ist, gilt

$$\varphi(v) = (D\varphi)_0(v) + \|v\|r(v)$$

mit einer in 0 stetigen Abbildung r , die dort den Limes 0 besitzt. Die lineare Approximation

$$L: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, v \longmapsto L(v) = (D\varphi)_0(v),$$

bildet jeden Quader K auf ein Parallelotop $T = L(K)$ ab, das nach Satz 7.2 das Maß $\lambda^n(L(K)) = j(0) \cdot \lambda^n(K)$ besitzt. Wir wollen $\varphi(K)$ mit $L(K)$ für einen geeigneten Quader K vergleichen. Da ein Diffeomorphismus vorliegt, ist L ein Isomorphismus und daher gibt es ein $b \geq 0$ mit $\|v\| \leq b\|L(v)\|$ für alle v . Somit gibt es wegen der Stetigkeit von $b\|r(v)\|$ zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$\|v\| \cdot \|r(v)\| \leq \epsilon\|L(v)\|$$

für alle v mit $\|v\| \leq \delta$. Es sei $K \subseteq B(0, \delta)$, $0 \in K$, ein Quader. Für $v \in K$ ist

$$\begin{aligned} \|\varphi(v) - L(v)\| &= \|v\| \cdot \|r(v)\| \\ &\leq \epsilon\|L(v)\|. \end{aligned}$$

D.h. dass $\varphi(K)$ in dem Parallelotop T' liegt, das aus $T = L(K)$ durch Streckung mit dem Streckungsfaktor $1 + \epsilon$ entsteht. Damit gilt

$$\lambda^n(\varphi(K)) \leq \lambda^n(T') = (1 + \epsilon)^n \cdot \lambda^n(T) = (1 + \epsilon)^n \cdot j(0) \cdot \lambda^n(K).$$

Wir nehmen an, dass $\max(j(x), x \in Q) < c$ gilt. Dann kann man auch ein $\epsilon > 0$ mit $(1 + \epsilon)^n j(0) < c$ finden. Wir nehmen ein $\delta > 0$ derart, dass die oben beschriebene Eigenschaft bezüglich diesem ϵ besitzt. Für m hinreichend groß kann man dann die obige Überlegung auf die Quader $K = Q_m$ anwenden und erhält

$$\lambda^n(\varphi(Q_m)) < c \cdot \lambda^n(Q_m)$$

im Widerspruch zur Konstruktion dieser Quaderfolge. Wir zeigen zunächst, dass die Abschätzung nach oben nicht nur für Quader, sondern für beliebige kompakte Mengen T gilt. Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es eine abzählbare Überpflasterung mit achsenparallelen Quadern Q_i , $i \in I$, von T mit

$$\lambda^n(T) \leq \sum_{i \in I} \lambda^n(Q_i) \leq \lambda^n(T) + \epsilon.$$

Durch Beschränkung der Kantenlängen der Q_i kann man weiter erreichen, dass alle Q_i in einer größeren ebenfalls kompakten Menge $\tilde{T} \supseteq T$ liegen. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von j auf \tilde{T} , die auf Satz 36.10 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)) beruht, kann man zu gegebenem $\tilde{\epsilon} > 0$ die Q_i so

wählen, dass $\max(j(x), x \in Q_i) \leq \max(j(x), x \in T) + \tilde{\epsilon}$ gilt. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \lambda^n(\varphi(T)) &\leq \lambda^n\left(\bigcup_{i \in I} \varphi(Q_i)\right) \\
 &\leq \sum_{i \in I} \lambda^n(\varphi(Q_i)) \\
 &\leq \sum_{i \in I} \max(j(x), x \in Q_i) \lambda^n(Q_i) \\
 &\leq \sum_{i \in I} (\max(j(x), x \in T) + \tilde{\epsilon}) \lambda^n(Q_i) \\
 &= (\max(j(x), x \in T) + \tilde{\epsilon}) \cdot \left(\sum_{i \in I} \lambda^n(Q_i)\right) \\
 &\leq (\max(j(x), x \in T) + \tilde{\epsilon}) \cdot (\lambda^n(T) + \epsilon).
 \end{aligned}$$

Da ϵ und $\tilde{\epsilon}$ beliebig klein gewählt werden können, gilt diese Abschätzung auch ohne ϵ und $\tilde{\epsilon}$. Wir wenden nun die Abschätzung nach oben auf die Umkehrabbildung φ^{-1} und $T = \varphi(Q)$ an. Als Bild einer kompakten Menge ist T nach Satz 36.11 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)) wieder kompakt. Dabei gilt aufgrund des Determinantenmultiplikationssatzes die Beziehung

$$(D(\varphi^{-1}))_y = ((D\varphi)_x)^{-1}$$

mit $y = \varphi(x)$. Dies ergibt

$$\begin{aligned}
 \lambda^n(Q) &= \lambda^n(\varphi^{-1}(\varphi(Q))) \\
 &\leq \max\left(|\det(D\varphi^{-1})_y|, y \in \varphi(Q)\right) \cdot \lambda^n(\varphi(Q)) \\
 &= \max\left(|\det(D\varphi^{-1})_{\varphi(x)}|, x \in Q\right) \cdot \lambda^n(\varphi(Q)) \\
 &= \max\left(|\det(D\varphi)_x^{-1}|, x \in Q\right) \cdot \lambda^n(\varphi(Q)) \\
 &= \max\left(|\det(D\varphi)_x|^{-1}, x \in Q\right) \cdot \lambda^n(\varphi(Q)).
 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \lambda^n(Q) \cdot \min(|\det(D\varphi)_x|, x \in Q) &= \lambda^n(Q) \cdot \frac{1}{\max(|\det(D\varphi)_x|^{-1}, x \in Q)} \\
 &\leq \lambda^n(\varphi(Q)).
 \end{aligned}$$

□

13. ARBEITSBLATT

13.1. Aufwärmaufgaben.

Aufgabe 13.1. Berechne das Integral

$$\int_Q xy \, d\lambda^2$$

über dem Quader $Q = [a, b] \times [c, d]$.

Aufgabe 13.2. Es sei G der Subgraph unterhalb der Standardparabel zwischen 1 und 3. Berechne das Integral

$$\int_G x^2 + xy - y^3 d\lambda^2.$$

Aufgabe 13.3.*

- Was ist das durchschnittliche Ergebnis, wenn man eine reelle Zahl aus $[a, b]$ mit einer reellen Zahl aus $[c, d]$ addiert?
- Was ist das durchschnittliche Ergebnis, wenn man eine reelle Zahl aus $[a, b]$ mit einer reellen Zahl aus $[c, d]$ multipliziert?
- Was ist das durchschnittliche Ergebnis, wenn man eine reelle Zahl aus $[a, b]$ durch eine reelle Zahl aus $[c, d]$ ($c > 0$) dividiert?

Aufgabe 13.4.*

Berechne das Integral zur Funktion

$$f(r, s, t) = s^2 t + r \cos t$$

über dem Einheitswürfel $W = [0, 1]^3$.

Aufgabe 13.5.*

Es sei G der Subgraph der Sinusfunktion auf dem Intervall $[0, \pi]$, wobei G mit dem zweidimensionalen Borel-Lebesgue-Maß λ^2 versehen sei. Berechne die beiden folgenden Integrale.

- $\int_G x d\lambda^2$
- $\int_G y d\lambda^2$

Aufgabe 13.6.*

Wir betrachten die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto x^2 + y^4.$$

- Bestimme zu jedem Punkt $(r, s) \in \mathbb{R}^2$ das Volumen des Körpers

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid r \leq x \leq r + 1, s \leq y \leq s + 1, 0 \leq z \leq f(x, y)\}.$$

- Zeige, dass das (von (r, s) abhängige) Volumen aus Teil a) in genau einem Punkt (r, s) minimal ist (dieser Punkt muss nicht explizit angegeben werden).

Aufgabe 13.7. Beweise den Satz von Fubini für eine stetige Funktion

$$f: [a, b] \times [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit Hilfe von Aufgabe 10.12.

Aufgabe 13.8. Es sei

$$f: \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine messbare integrierbare Funktion. Zu einem fixierten Startpunkt $(a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^d$ betrachten wir (für $(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}_{\geq a_1} \times \dots \times \mathbb{R}_{\geq a_d}$) die Abbildung

$$F(x_1, \dots, x_d) := \int_{[a_1, x_1] \times \dots \times [a_d, x_d]} f d\lambda^d.$$

a) Es sei f stetig. Zeige

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} \dots \frac{\partial}{\partial x_d} F = f$$

b) Wie ist $F(x_1, \dots, x_d)$ für beliebige $x \in \mathbb{R}^d$ zu definieren?

Aufgabe 13.9. Stelle eine Formel für

$$\int_{[a_1, b_1] \times \dots \times [a_d, b_d]} x_1^{r_1} \dots x_d^{r_d} d\lambda^d$$

auf und beweise sie

a) mittels dem Satz von Fubini,

b) mittels Aufgabe 13.8,

c) mittels Aufgabe 10.12.

Aufgabe 13.10. Es sei (M, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum und es sei

$$g: M \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$$

eine nichtnegative messbare Funktion. Zeige, dass die Zuordnung

$$\mathcal{A} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}, T \longmapsto \int_T g d\mu$$

ein Maß auf M ist.

Aufgabe 13.11. Welche Dichte besitzt das Borel-Lebesgue-Maß auf dem \mathbb{R}^n bezüglich des Borel-Lebesgue-Maßes?

Aufgabe 13.12. Man gebe ein Beispiel für ein Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$, das keine Dichte bezüglich des Borel-Lebesgue-Maßes besitzt.

Für integrierbare Funktionen

$$f, g: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$$

nennt man die durch

$$(f * g)(u) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(u-x)dx$$

definierte Funktion die *Faltung* von f und g .

Aufgabe 13.13. Es seien

$$f, g: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

Dichten auf dem \mathbb{R}^n mit den zugehörigen Maßen $\mu = f\lambda^n$ bzw. $\nu = g\lambda^n$. Zeige, dass die Faltung $\mu * \nu$ der beiden Maße die Faltung $f * g$ als Dichte besitzt.

Aufgabe 13.14. Es sei $g: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Dichte und $\mu = g\lambda^d$ das zugehörige Maß. Zeige, dass für jeden Punkte $P \in \mathbb{R}^d$ die Folge

$$\frac{\mu(B(P, \frac{1}{n}))}{\lambda^d(B(P, \frac{1}{n}))}$$

gegen $g(P)$ konvergiert.

Aufgabe 13.15. Zeige, dass bei einer Lipschitz-stetigen Abbildung zwischen Räumen unterschiedlicher Dimension das Bild einer Nullmenge keine Nullmenge sein muss. Wo bricht der Beweis zu Lemma 13.5 zusammen?

Aufgabe 13.16. Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (x + \sin y, y + \cos x).$$

Berechne das Minimum und das Maximum von $|\det(D\varphi)_P|$ auf dem Quadrat $Q = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$. Welche Abschätzung ergibt sich daraus für $\lambda^2(\varphi(Q))$?

13.2. Aufgaben zum Abgeben.

Aufgabe 13.17. (5 Punkte)

Es sei G der Subgraph der Sinusfunktion zwischen 0 und π . Berechne die Integrale

a) $\int_G x d\lambda^2,$

b) $\int_G y d\lambda^2.$

Aufgabe 13.18. (5 Punkte)

Berechne das Integral zur Funktion $f(x, y) = x(\sin x)(\cos(xy))$ über dem Rechteck $Q = [0, 3\pi] \times [0, 1]$.

Aufgabe 13.19. (6 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (u, v) \longmapsto \frac{2uv}{(u^2 + 1)(v^2 + v + 1)}.$$

Für welche Quadrate $Q = [a, a + 1] \times [b, b + 1]$ der Kantenlänge 1 wird das Integral

$$\int_Q f \, d\lambda^2$$

maximal? Welchen Wert besitzt es?

Aufgabe 13.20. (5 Punkte)

Es sei (M, \mathcal{A}, μ) ein σ -endlicher Maßraum, es sei

$$g: M \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine messbare nichtnegative integrierbare Funktion und sei $g\mu$ das Maß zur Dichte g . Zeige, dass für jede messbare Funktion

$$f: M \longrightarrow \mathbb{R}$$

die Beziehung

$$\int_M f \, d(g\mu) = \int_M fg \, d\mu$$

gilt.

Aufgabe 13.21. (5 Punkte)

Es seien (M, \mathcal{A}, μ) und (N, \mathcal{B}, ν) σ -endliche Maßräume, und es seien

$$g: M \longrightarrow \mathbb{R}$$

und

$$h: N \longrightarrow \mathbb{R}$$

messbare nichtnegative integrierbare Funktionen mit den zu diesen Dichten gehörigen Maßen $g\mu$ und $h\nu$. Zeige, dass auf $M \times N$ das Produktmaß $(g\mu) \otimes (h\nu)$ mit dem Maß zur Dichte

$$gh: M \times N \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto g(x)h(y),$$

bezüglich $\mu \otimes \nu$ übereinstimmt.

Aufgabe 13.22. (6 Punkte)

Wir betrachten das Bildmaß $\mu = \varphi_* \lambda^n$ zur Abbildung ($n \geq 1$)

$$\varphi: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

- a) Zeige, dass μ ein σ -endliches Maß auf \mathbb{R} ist.
 b) Zeige, dass μ bezüglich λ^1 die Dichte

$$h(t) = \begin{cases} 0, & \text{falls } t < 0, \\ n\beta_n t^{n-1} & \text{falls } t \geq 0, \end{cases}$$

besitzt, wobei β_n das Volumen der n -dimensionalen Einheitskugel bezeichnet.

Aufgabe 13.23. (5 Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (x^3 - y^2, xy^2).$$

Berechne das Minimum und das Maximum von $|\det(D\varphi)_P|$ auf den beiden Quadraten $Q_1 = [0, 1] \times [0, 1]$ und $Q_2 = [1, 2] \times [1, 2]$. Welche Abschätzungen ergeben sich daraus für $\lambda^2(\varphi(Q_1))$ und für $\lambda^2(\varphi(Q_2))$?

14. VORLESUNG - TRANSFORMATIONSFORMEL

14.1. Die Transformationsformel für Integrale.

Korollar 14.1. *Es seien G und H offene Mengen im \mathbb{R}^n und es sei*

$$\varphi: G \longrightarrow H$$

ein C^1 -Diffeomorphismus mit der Jacobi-Determinante

$$(J(\varphi))(x) = \det(D\varphi)_x$$

für $x \in G$. Es sei $Q \subseteq G$ ein kompakter achsenparalleler Quader. Dann gilt

$$\lambda^n(\varphi(Q)) = \int_Q |(J(\varphi))(x)| d\lambda^n.$$

Beweis. Da φ stetig differenzierbar ist, ist die Abbildung

$$G \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto j(x) = |(J(\varphi))(x)| = |\det(D\varphi)_x|,$$

stetig und daher nach Satz 36.10 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)) gleichmäßig stetig auf dem kompakten Quader Q . D.h. zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit $j(B(x, \delta)) \subseteq B(j(x), \epsilon)$ für alle $x \in Q$. Dann gibt es auch ein $\tilde{\delta} > 0$ derart, dass für alle kompakten Teilquader $K \subseteq Q$ mit maximaler Kantenlänge $\leq \tilde{\delta}$ das Bild $j(K)$ in einem abgeschlossenen Intervall der Länge 2ϵ liegt. Damit ist die Differenz zwischen dem Minimum und dem Maximum von $\{j(x) \mid x \in K\}$ maximal gleich 2ϵ .

Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Wir unterteilen Q in k^n kompakte Teilquader, indem wir jede Quaderkante in k gleichlange Teile unterteilen, und wählen dabei $k \in \mathbb{N}$ so groß, dass die entstehenden k^n Teilquader die oben beschriebene Eigenschaft haben. Es sei I eine Indexmenge zu dieser Unterteilung, es ist also $Q = \bigcup_{i \in I} K_i$ und damit $\varphi(Q) = \bigcup_{i \in I} \varphi(K_i)$. Diese beiden Vereinigungen sind nicht disjunkt, jedoch sind die Schnittmengen der Quader nach Lemma 6.11 und die Schnittmengen der $\varphi(K_i)$ als Bilder von Quaderseiten nach Korollar 13.6 Nullmengen. Wir wenden Lemma 13.7 auf die Teilquader K_i an und erhalten

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} \lambda^n(K_i) \cdot \min(j(x), x \in K_i) &\leq \lambda^n(\varphi(Q)) \\ &= \sum_{i \in I} \lambda^n(\varphi(K_i)) \\ &\leq \sum_{i \in I} \lambda^n(K_i) \cdot \max(j(x), x \in K_i). \end{aligned}$$

Dabei ist die Differenz zwischen links und rechts durch

$$\sum_{i \in I} \lambda^n(K_i) 2\epsilon = 2\epsilon \lambda^n(Q)$$

beschränkt, kann also durch $\epsilon \rightarrow 0$ beliebig klein gemacht werden. Die gleichen Abschätzungen gelten wegen der Monotonie des Integrals auch für das Integral $\int_Q j(x) d\lambda^n(x)$, so dass

$$\lambda^n(\varphi(Q)) = \int_Q j(x) d\lambda^n(x)$$

gilt. □

Satz 14.2. *Es seien G und H offene Mengen im \mathbb{R}^n und es sei*

$$\varphi: G \longrightarrow H$$

ein C^1 -Diffeomorphismus mit der Jacobi-Determinante

$$(J(\varphi))(x) = \det(D\varphi)_x$$

für $x \in G$. Es sei $S \subseteq G$ eine messbare Menge. Dann ist $\varphi(S)$ ebenfalls messbar und es gilt

$$\lambda^n(\varphi(S)) = \int_S |J(\varphi)| d\lambda^n.$$

Beweis. Ein Diffeomorphismus und seine Umkehrabbildung sind stetig, daher liegt eine Bijektion der messbaren Teilmengen von G und von H vor. Wir betrachten die beiden Zuordnungen

$$\mathcal{B}(G) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}, S \longmapsto \int_S |J(\varphi)(x)| d\lambda^n(x),$$

also das Maß auf G mit der Dichte $|J(\varphi)(x)|$, und

$$\mathcal{B}(G) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}, S \longmapsto \lambda^n(\varphi(S)),$$

also das Bildmaß von λ^n unter der Umkehrabbildung φ^{-1} , und müssen zeigen, dass diese beiden Maße gleich sind. Nach Korollar 14.1 gilt die Gleichheit für alle kompakten achsenparallelen Quader. Aufgrund von Aufgabe 9.3 bzw. Korollar 13.6 gilt die Gleichheit auch für alle offenen bzw. „nach oben halboffenen“ achsenparallelen Quader, also Produkte von nach oben halboffenen Intervallen. Die Menge der endlichen disjunkten Vereinigungen von diesen zuletzt genannten Quadern bilden einen Mengen-Präring im \mathbb{R}^n . Diese Menge ist auch ein durchschnittsstabiles Erzeugendensystem für das System der Borelmengen. Daher müssen nach Satz 3.7 die beiden Maße generell übereinstimmen. \square

Wir kommen zur *Transformationsformel für Integrale*.

Satz 14.3. *Es seien G und H offene Mengen im \mathbb{R}^n und es sei*

$$\varphi: G \longrightarrow H$$

ein C^1 -Diffeomorphismus mit der Jacobi-Determinante

$$(J(\varphi))(x) = \det(D\varphi)_x$$

für $x \in G$. Es sei

$$f: H \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine messbare Funktion. Dann ist f auf H genau dann integrierbar, wenn die Hintereinanderschaltung $f \circ \varphi$ auf G integrierbar ist. In diesem Fall gilt

$$\int_H f d\lambda^n = \int_G (f \circ \varphi) |J(\varphi)| d\lambda^n.$$

Beweis. Die Zuordnung $S \mapsto \lambda^n(\varphi(S))$ für messbare Mengen $S \subseteq G$ ist ein Maß auf $\mathcal{B}(G)$ und zwar handelt es sich um das Bildmaß $\varphi_*^{-1}\lambda^n$ von λ^n unter der Umkehrabbildung

$$\varphi^{-1}: H \longrightarrow G.$$

Nach Satz 14.2 besitzt dieses Maß die Dichte $x \mapsto |(J(\varphi))(x)|$. Daher gilt nach Aufgabe 13.20 und der allgemeinen Transformationsformel

$$\begin{aligned} \int_G (f \circ \varphi) \cdot |J(\varphi)| d\lambda^n &= \int_G (f \circ \varphi) d(\varphi_*^{-1}\lambda^n) \\ &= \int_H (f \circ \varphi \circ \varphi^{-1}) d\lambda^n \\ &= \int_H f d\lambda^n. \end{aligned}$$

\square

14.2. Beispiele zur Transformationsformel.

Wenn bei einem Diffeomorphismus der Betrag der Jacobi-Determinante überall 1 ist, so ist er maßtreu. Es ist einfach, maßtreue, nichtlineare Abbildungen zu konstruieren.

Beispiel 14.4. Es sei $h \in \mathbb{R}[y]$ ein beliebiges Polynom in der einen Variablen y . Dann ist die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (x + h(y), y)$$

ein flächentreuer Diffeomorphismus. Die Jacobi-Matrix von φ ist ja

$$\text{Jak}(\varphi)_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 1 & h'(y) \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

so dass die Jacobi-Determinante konstant gleich 1 ist. Wenn man die Rollen von x und y vertauscht und die Hintereinanderschaltung von solchen Abbildungen betrachtet, so erhält man flächentreue Abbildungen, denen man es nicht auf den ersten Blick ansieht. Beispielsweise ist zu $\varphi(x, y) = (x + y^2, y)$ und $\psi(x, y) = (x, y + x^3)$ die Hintereinanderschaltung

$$\begin{aligned} (\psi \circ \varphi)(x, y) &= \psi(\varphi(x, y)) \\ &= \psi(x + y^2, y) \\ &= (x + y^2, y + (x + y^2)^3) \\ &= (x + y^2, y + x^3 + 3x^2y^2 + 3xy^4 + y^6). \end{aligned}$$

Korollar 14.5. *Es sei*

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (r, \theta) \longmapsto (r \cos \theta, r \sin \theta),$$

die Polarkoordinatenauswertung und es seien G und H offene Mengen, auf denen φ einen Diffeomorphismus induziert. Es sei

$$f: H \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine integrierbare Funktion. Dann ist

$$\int_H f(x, y) d\lambda^2(x, y) = \int_G f(r \cos \theta, r \sin \theta) \cdot |r| d\lambda^2(r, \theta).$$

Dies gilt auch dann, wenn außerhalb von Nullmengen ein Diffeomorphismus vorliegt. Insbesondere gilt bei stetigem f die Formel

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) d\lambda^2(x, y) = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \cdot r d\theta dr.$$

Beweis. Dies folgt wegen

$$\det(D\varphi)_{(r,\theta)} = \det \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r$$

direkt aus Satz 14.3. □

Lemma 14.6. *Es ist*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Beweis. Durch eine einfache Substitution ist die Aussage äquivalent zu

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1.$$

Nennen wir dieses Integral I . Nach Korollar 13.2 ist

$$I^2 = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} d\lambda^2.$$

Durch Einführung von Polarkoordinaten $x = r \cos \theta$ und $y = r \sin \theta$ ist dieses Integral nach Korollar 14.5 und nach einer erneuten Anwendung von Korollar 13.2 gleich

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi} \int_{[0,2\pi] \times \mathbb{R}_{\geq 0}} e^{-\frac{r^2}{2}} \cdot r d\lambda^2(r, \theta) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{[0,2\pi]} 1 d\lambda^1(\theta) \right) \left(\int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} e^{-\frac{r^2}{2}} \cdot r d\lambda^1(r) \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} e^{-\frac{r^2}{2}} \cdot r d\lambda^1(r) \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} \cdot r dr \\ &= -e^{-\frac{r^2}{2}} \Big|_0^{\infty} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Damit ist auch $I = 1$. □



Beispiel 14.7. Es soll eine Straße in der Ebene der Breite $2a$ asphaltiert werden. Dabei wird die Straße durch den Verlauf des Mittelstreifen vorgegeben, der durch die Kurve

$$[0, s] \longrightarrow \mathbb{R}^2, t \longmapsto \psi(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix},$$

bestimmt ist. Dabei sei ψ zweimal stetig differenzierbar und bogenparametrisiert, d.h. es sei $f'(t)^2 + g'(t)^2 = 1$, was bedeutet, dass die Mittelstreifenkurve mit normierter Geschwindigkeit durchlaufen wird. Die Breite ist dabei senkrecht zum Mittelstreifen zu messen. Die zu asphaltierende Trasse wird dann durch die Abbildung

$$\varphi: [0, s] \times [-a, a] \longrightarrow \mathbb{R}^2, (t, r) \longmapsto \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -g'(t) \\ f'(t) \end{pmatrix},$$

parametrisiert. Wir nehmen an, dass diese Parametrisierung injektiv ist, was erfüllt ist, wenn die Mittelstreifenabbildung ψ injektiv ist und die Straße nicht zu breit werden soll.

Die Jacobi-Matrix der Parametrisierung ist

$$(D\varphi)_{(t,r)} = \begin{pmatrix} f'(t) - rg''(t) & -g'(t) \\ g'(t) + rf''(t) & f'(t) \end{pmatrix}.$$

Die Determinante davon ist

$$\begin{aligned} & f'(t)f'(t) + g'(t)g'(t) - r(g''(t)f'(t) - f''(t)g'(t)) \\ = & 1 - r(g''(t)f'(t) - f''(t)g'(t)). \end{aligned}$$

Daher ist die Asphaltfläche nach der Transformationsformel gleich

$$\int_{[0,s] \times [-a,a]} |1 - r(g''(t)f'(t) - f''(t)g'(t))| d\lambda^2.$$

Wenn wir weiter annehmen, dass

$$|g''(t)f'(t) - f''(t)g'(t)| \leq \frac{1}{a}$$

ist (was bedeutet, dass die Straßenbreite nicht allzu groß ist), so ist dieses Integral nach Korollar 13.2 gleich

$$\begin{aligned} & \int_{[0,s] \times [-a,a]} 1 - r(g''(t)f'(t) - f''(t)g'(t)) d\lambda^2 \\ = & 2as - \left(\int_{-a}^a r dr \right) \left(\int_0^s g''(t)f'(t) - f''(t)g'(t) dt \right) \\ = & 2as - 0 \cdot \left(\int_0^s g''(t)f'(t) - f''(t)g'(t) dt \right) \\ = & 2as. \end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass die Asphaltfläche gleich der Mittelstreifenlänge mal der Straßenbreite ist.

14. ARBEITSBLATT

14.1. Aufwärmfragen.

Aufgabe 14.1. Es sei

$$\varphi: [a, b] \longrightarrow [c, d]$$

eine bijektive, stetig differenzierbare Abbildung. Was besagt in dieser Situation die Transformationsformel für Quader und was die Newton-Leibniz-Formel?

Aufgabe 14.2. Zeige, dass die Abbildung

$$\mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2, (x, y) \longmapsto (xe^y, -e^{-y}),$$

in jedem Punkt maßtreu, aber nicht injektiv ist.

Aufgabe 14.3. Zeige, dass die Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (x + y^2, -y^4 - 2xy^2 - x^2 + y^2 + x + y),$$

flächentreu ist.

Aufgabe 14.4. Zeige, dass die Transformation

$$[0, 2\pi] \times [0, 1] \longrightarrow B(0, 1), (\alpha, w) \longmapsto (\sqrt{w} \cos \alpha, \sqrt{w} \sin \alpha),$$

auf geeigneten offenen Teilmengen ein Diffeomorphismus ist und berechne die Jacobi-Determinante in jedem Punkt.

Aufgabe 14.5. Es sei

$$\varphi: G \longrightarrow H$$

ein C^1 -Diffeomorphismus mit offenen zusammenhängenden Mengen G und H im \mathbb{R}^n . Zeige, dass φ genau dann maßtreu ist, wenn die Jacobi-Determinante überall den Wert 1 oder überall den Wert -1 hat.

Aufgabe 14.6.*

Berechne den Flächeninhalt des Bildes des Rechtecks $Q = [-1, 3] \times [0, 2]$ unter der Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (x^3, y - x^2).$$

Aufgabe 14.7. Es sei

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

eine stetig differenzierbare Funktion. Beweise die Volumenformel für den zugehörigen Rotationskörper K mit der Transformationsformel und der Abbildung

$$\varphi: [a, b] \times D \longrightarrow K, (x, y, z) \longmapsto (x, f(x)y, f(x)z),$$

wobei D die Einheitskreisscheibe bezeichnet.

Aufgabe 14.8.*

Es sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ messbar, $P = (a_1, \dots, a_n, a_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ ein Punkt mit $a_{n+1} > 0$ und K_B der zugehörige Kegel. Beweise die Maßformel für den Kegel mit der Transformationsformel und der Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{R}^n \times [0, a_{n+1}] &\longrightarrow \mathbb{R}^n \times [0, a_{n+1}], \\ (x_1, \dots, x_n, t) &\longmapsto (x_1, \dots, x_n, 0) + \frac{t}{a_{n+1}}(a_1 - x_1, \dots, a_n - x_n, a_{n+1}). \end{aligned}$$

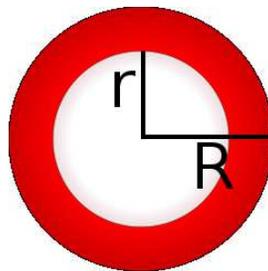
Aufgabe 14.9. Es sei

$$T = \left\{ (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \theta, \cos \theta \geq 0, \sin \theta \geq 0 \right\}.$$

Berechne den Flächeninhalt von T .

Aufgabe 14.10. Interpretiere die Substitutionsregel als einen Spezialfall der Transformationsformel.

Aufgabe 14.11. Zeige, dass der Flächeninhalt eines Annulus gleich dem Produkt aus der Länge des Mittelkreises und der Breite ist.



Aufgabe 14.12. Es sei (M, \mathcal{A}, μ) ein σ -endlicher Maßraum und

$$h_1, h_2: M \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

messbare Funktionen. Zeige

$$\int_M h_1 h_2 d\mu = \int_{S(h_1)} h_2 d\mu \otimes \lambda^1,$$

wobei h_2 in natürlicher Weise als Funktion auf dem Subgraphen $S(h_1)$ zu h_1 aufgefasst wird.

Aufgabe 14.13.*

Berechne $\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{1+(x^2+y^2)^2} dx dy$ mit Korollar 14.5.

14.2. Aufgaben zum Abgeben.

Aufgabe 14.14. (4 Punkte)

Berechne den Wert des Quadrats $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x|, |y| \leq 1\}$ für das Bildmaß $\mu = \varphi_* \lambda^2$ unter der Abbildung

$$\varphi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \longmapsto (x + y, xy).$$

Aufgabe 14.15. (4 (1+3) Punkte)

Es seien G und H offene Mengen im \mathbb{R}^n und es sei

$$\varphi: G \longrightarrow H$$

ein C^1 -Diffeomorphismus. Es sei

$$f: H \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

eine stetige Funktion.

a) Definiere einen Diffeomorphismus zwischen den offenen Subgraphen zu f bzw. zu $f \circ \varphi$.

b) Beweise die Transformationsformel für Integrale in diesem Fall direkt aus Satz 14.2, angewendet auf den Subgraphen, mit Hilfe von Aufgabe 14.12.

Aufgabe 14.16. (7 (3+2+2) Punkte)

Wir betrachten die Abbildung

$$[0, 10] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^2,$$

und interessieren uns für die Straße der Breite 1, deren Mittelstreifen der vorgegebene Funktionsgraph ist.

- a) Zeige, dass zu zwei verschiedenen Punkten auf dem Funktionsgraphen die Senkrechten der Länge 1 (mit dem Mittelpunkt auf dem Graphen) untereinander überschneidungsfrei sind.
- b) Man gebe eine (möglichst einfache) Parametrisierung der Straße an.
- c) Bestimme den Flächeninhalt der Straße.

15. VORLESUNG - NORMIERTE RÄUME

Zu einem Maßraum X gibt es den Vektorraum der auf X definierten messbaren \mathbb{K} -wertigen Funktionen und darin den Untervektorraum der integrierbaren Funktionen. Wenn X ein topologischer oder ein metrischer Raum ist, so gibt es den Raum der stetigen Funktionen auf X , die bezüglich der Borel-Mengen auch messbar sind, aber ohne weiteres nicht integrierbar sind. In den folgenden Vorlesungen werden wir versuchen zu verstehen, wie diese Funktionsklassen zusammenhängen und insbesondere, welche Approximationseigenschaften gelten. Um präzise von Approximation sprechen zu können, werden wir die angesprochenen Funktionenräume mit Normen bzw. Metriken versehen. Da messbare Funktionen, die außerhalb einer Nullmenge die Nullfunktion sind, zwar nicht selbst die Nullfunktion sind, aber doch für viele Fragen so behandelt werden können, ist es wichtig, auch die Konzepte Halbmetrik und Halbnorm zur Verfügung zu haben.

Beispiel 15.1. Zu einer Menge M kann man den reellen Vektorraum V aller Funktionen $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ betrachten. Ein wichtiger Konvergenzbegriff ist die punktweise Konvergenz. Wenn man den Untervektorraum der beschränkten reellwertigen Funktionen betrachtet, so kann man diesen Untervektorraum mit der Supremumsnorm versehen, die durch

$$\|f\| = \sup(|f(x)|, x \in M)$$

definiert ist. Die Konvergenz einer Funktionenfolge bezüglich der Supremumsnorm bedeutet dann die gleichmäßige Konvergenz der Funktionenfolge, siehe Aufgabe 55.13 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)). Diese Konvergenz ist stärker als die punktweise Konvergenz.

Die konstanten Funktionen und die Funktionen mit nur endlich vielen Werten (bzw. die einfachen Funktionen im Falle eines Messraumes) bilden besonders einfache Untervektorräume des Funktionenraumes zu M . Wenn M ein topologischer Raum ist, so kann man die Untervektorräume der stetigen Funktionen oder der stetigen beschränkten Funktionen betrachten. Wenn M ein Maßraum ist, so kann man den Untervektorraum der messbaren oder den Untervektorraum der integrierbaren Funktionen betrachten. In all diesen Situationen kann man Approximationseigenschaften und Konvergenzfragen untersuchen. Resultate in diese Richtung sind Lemma 8.11, Satz 10.3, Satz 10.9.

Beispiel 15.2. Es sei (M, \mathcal{A}, μ) ein σ -endlicher Maßraum und V der Vektorraum der integrierbaren Funktionen auf M . Dann ist es naheliegend, durch $\int_M |f| d\mu$ eine „Norm“ auf diesem Raum zu definieren. Allerdings ist dies keine Norm im Sinne der Definition, da das Integral einer nichtnegativen Funktion gleich 0 sein kann, ohne dass die Funktion selbst die Nullfunktion ist.

15.1. Halbmetriken.

Definition 15.3. Es sei M eine Menge. Eine Abbildung $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Halbmetrik*, wenn für alle $x, y, z \in M$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (1) Für $x = y$ ist $d(x, y) = 0$.
- (2) $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie), und
- (3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (Dreiecksungleichung).

Wegen

$$0 = d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x) = 2d(x, y)$$

gilt dabei stets $d(x, y) \geq 0$, diese *Semipositivität* muss man also nicht eigens fordern.

Definition 15.4. Es sei M eine Menge mit einer Halbmetrik d . Eine Teilmenge $U \subseteq M$ heißt *offen*, wenn für jedes $x \in U$ ein $\epsilon > 0$ mit

$$U(x, \epsilon) \subseteq U$$

existiert.

Lemma 15.5. *Es sei M eine Menge, die mit einer Halbmetrik versehen sei. Dann ist M ein topologischer Raum.*

Beweis. Siehe Aufgabe 15.1. □

Lemma 15.6. *Es sei M eine Menge, die mit einer Halbmetrik d versehen sei. Dann gelten folgende Aussagen.*

- (1) *Durch $x \sim y$, falls $d(x, y) = 0$, ist eine Äquivalenzrelation auf M gegeben.*
- (2) *Die Halbmetrik induziert eine Metrik auf der Quotientenmenge M/\sim .*
- (3) *Die Quotientenabbildung $M \rightarrow M/\sim$ ist stetig.*
- (4) *Die offenen Mengen von M sind genau die Urbilder der offenen Mengen des metrischen Raumes M/\sim .*

Beweis. (1) Die Symmetrie und die Reflexivität sind direkt klar. Bei $x \sim y$ und $y \sim z$, also $d(x, y) = 0 = d(y, z)$, folgt aus der Dreiecksabschätzung $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ sofort $d(x, z) = 0$, also $x \sim z$.

- (2) Wir müssen zeigen, dass durch

$$\tilde{d}([x], [y]) := d(x, y)$$

eine wohldefinierte Metrik definiert ist. Seien $x \sim x'$ und $y \sim y'$, also $d(x, x') = 0$ und $d(y, y') = 0$. Dann ist nach der Dreiecksabschätzung

$$d(x, y) \leq d(x, x') + d(x', y') + d(y', y) = d(x', y')$$

und ebenso $d(x', y') \leq d(x, y)$, also $d(x', y') = d(x, y)$, was die Wohldefiniertheit von \tilde{d} bedeutet. Die Symmetrie, die Semipositivität und die Dreiecksabschätzung von d übertragen sich direkt auf \tilde{d} . Aus $\tilde{d}([x], [y]) = 0$ folgt direkt $d(x, y) = 0$, also $x \sim y$ und damit $[x] = [y]$.

- (3) Sei $U \subseteq M/\sim$ offen und sei V das Urbild davon. Sei $x \in V$ ein Punkt. Nach Voraussetzung gibt es ein $\epsilon > 0$ mit $U([x], \epsilon) \subseteq U$ in M/\sim . Daraus folgt direkt $U(x, \epsilon) \subseteq V$, da $U(x, \epsilon)$ das Urbild von $U([x], \epsilon)$ ist.
- (4) Dies ergibt sich, da äquivalente Punkte in M die gleichen offenen Ballumgebungen besitzen.

□

Die Stetigkeit einer Abbildung zwischen Räumen, die mit Halbmetriken versehen sind, kann man wie im metrischen Fall durch ein $\epsilon - \delta$ -Kriterium ausdrücken, siehe Aufgabe 15.4 und Aufgabe 15.5.

15.2. Vektorräume mit Halbnormen.

Definition 15.7. Es sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum. Eine Abbildung

$$\|-\|: V \longrightarrow \mathbb{R}, v \longmapsto \|v\|,$$

heißt *Halbnorm*, wenn die folgenden Eigenschaften für alle $v, w \in V$ gelten.

- (1) Es ist $\|v\| \geq 0$ für alle $v \in V$.
- (2) Es ist $\|0\| = 0$.
- (3) Für $\lambda \in \mathbb{K}$ und $v \in V$ gilt

$$\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|.$$

- (4) Für $v, w \in V$ gilt

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|.$$

Definition 15.8. Auf einem \mathbb{K} -Vektorraum V mit einer Halbnorm $\|-\|$ definiert man die *zugehörige Halbmetrik* durch

$$d(v, w) := \|v - w\|.$$

Definition 15.9. Ein \mathbb{K} -Vektorraum V heißt *topologischer Vektorraum*, wenn auf ihm eine Topologie derart festgelegt ist, dass sowohl die Addition

$$+: V \times V \longrightarrow V$$

als auch die Skalarmultiplikation

$$\cdot: \mathbb{K} \times V \longrightarrow V$$

stetig sind.

Lemma 15.10. *Zu einem \mathbb{K} -Vektorraum V mit einer Halbnorm $\|-\|$ ist die zugehörige Halbmetrik in der Tat eine Halbmetrik. Ein mit einer Halbnorm versehener \mathbb{K} -Vektorraum ist ein topologischer Vektorraum.*

Beweis. (1) Es ist $d(u, v) = \|u - v\| \geq 0$.

(2) Es ist

$$\begin{aligned} d(u, v) &= \|u - v\| \\ &= \|-1(v - u)\| \\ &= |-1| \cdot \|v - u\| \\ &= d(v, u). \end{aligned}$$

(3) Für beliebiges $w \in V$ ist nach der Definition einer Halbnorm

$$\begin{aligned} d(u, v) &= \|u - v\| \\ &\leq \|u - w\| + \|w - v\| \\ &= d(u, w) + d(w, v). \end{aligned}$$

Zum Nachweis der Stetigkeit der Addition sei $(u, v) \in V \times V$ fixiert und $\epsilon > 0$ vorgegeben. Es sei

$$(u', v') \in U\left(u, \frac{\epsilon}{2}\right) \times U\left(v, \frac{\epsilon}{2}\right),$$

hierbei ist die Produktmenge links eine offene Umgebung von (u, v) . Hier gilt

$$\begin{aligned} \|u' + v' - (u + v)\| &\leq \|u' - u\| + \|v' - v\| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Zum Nachweis der Stetigkeit der Skalarmultiplikation sei $(s, v) \in \mathbb{K} \times V$ fixiert und $\epsilon > 0$ vorgegeben, das wir als ≤ 1 annehmen. Es sei $D = \|v\|$ und

$$C = \max(D, |s|, 1).$$

Es sei $(t, u) \in U\left(s, \frac{\epsilon}{4C}\right) \times U\left(v, \frac{\epsilon}{4C}\right)$. Dann ist

$$\begin{aligned} \|tu - sv\| &\leq \|tu - su\| + \|su - sv\| \\ &= |t - s| \|u\| + |s| \|u - v\| \\ &\leq \frac{\epsilon}{4C} \left(C + \frac{\epsilon}{4C}\right) + C \frac{\epsilon}{4C} \\ &\leq \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

□

Lemma 15.11. *Es sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum mit einer Halbnorm $\|-\|$. Dann gelten folgende Aussagen.*

- (1) *Die Menge der Vektoren $\{v \in V \mid \|v\| = 0\}$ ist ein Untervektorraum Z von V .*
- (2) *Die Halbnorm induziert auf dem Restklassenraum V/Z eine Norm.*

Beweis. (1) Folgt direkt aus der Verträglichkeit der Halbnorm mit der Skalarmultiplikation und aus der Dreiecksabschätzung.

- (2) Für $z \in Z$ ist

$$\|v + z\| \leq \|v\| + \|z\| = \|v\|$$

und ebenso

$$\|v\| \leq \|v + z\| + \|-z\| = \|v + z\| + \|z\| = \|v + z\|,$$

also ist

$$\|v\| = \|v + z\|.$$

Die Halbnorm induziert also eine wohldefinierte Abbildung auf dem Restklassenraum V/Z . Dabei bleiben alle Eigenschaften einer Halbnorm erhalten. Ferner gilt $\|[v]\| = 0$ genau dann, wenn $v \in Z$ ist, also $[v] = 0$ in V/Z . Daher liegt eine Norm vor. □

Die folgende Aussage charakterisiert stetige lineare Abbildungen zwischen normierten Vektorräumen, man könnte sie auch für lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen formulieren, die mit einer Halbnorm versehen sind. Für endlichdimensionale Vektorräume (entscheidend ist der Ausgangsraum) liegt nach Satz 34.10 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)) oder allgemeiner Satz 52.17 (Lineare Algebra (Osnabrück 2017-2018)) stets Stetigkeit vor, die Aussage ist also für unendlichdimensionale Vektorräume relevant.

Satz 15.12. *Es seien V und W normierte \mathbb{K} -Vektorräume und*

$$\varphi: V \longrightarrow W$$

eine lineare Abbildung. Dann sind folgende Eigenschaft äquivalent.

- (1) *φ ist stetig.*
- (2) *φ ist stetig im Nullpunkt.*
- (3) *Die Menge*

$$\{\varphi(v) \mid v \in V, \|v\| = 1\}$$

ist beschränkt.

Beweis. Von (1) nach (2) ist klar. Von (2) nach (3). Es gibt insbesondere für $\epsilon = 1$ ein $\delta > 0$ derart, dass aus

$$\|v\| \leq \delta$$

die Abschätzung

$$\|\varphi(v)\| \leq 1$$

folgt. Aus

$$\|v\| \leq 1$$

folgt dann wegen der skalaren Verträglichkeit

$$\|\varphi(v)\| \leq \frac{1}{\delta}.$$

Von (3) nach (1). Es sei C eine obere Schranke für die Norm der Werte auf der Einssphäre. Sei $v \in V$ gegeben. Es ist

$$\begin{aligned} d(\varphi(v), \varphi(w)) &= \|\varphi(v) - \varphi(w)\| \\ &= \|\varphi(v - w)\| \\ &= \|v - w\| \cdot \left\| \varphi\left(\frac{v - w}{\|v - w\|}\right) \right\| \\ &\leq \|v - w\| \cdot C. \end{aligned}$$

Zu $\epsilon > 0$ kann man also

$$\delta := \epsilon/C$$

wählen. □

15.3. Separable Räume.

Lemma 15.13. *Ein metrischer Raum besitzt genau dann eine abzählbare Basis der Topologie, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt.*

Beweis. Siehe Aufgabe 15.13. □

Definition 15.14. Ein normierter \mathbb{K} -Vektorraum heißt *separabel*, wenn seine Topologie eine abzählbare Basis besitzt.

Lemma 15.15. *Für einen normierten \mathbb{K} -Vektorraum V sind folgende Aussagen äquivalent.*

- (1) V ist separabel.
- (2) V besitzt eine abzählbare dichte Teilmenge.
- (3) V besitzt einen dichten Untervektorraum mit abzählbarer Dimension.

Beweis. Die Äquivalenz von (1) und (2) ergibt sich aus Lemma 15.13. Wenn (2) erfüllt ist, so besitzt natürlich der durch eine abzählbare dichte Punktmenge erzeugte Untervektorraum U eine abzählbare Basis und U ist dicht. Es sei (3) erfüllt mit

$$U = \langle v_n, n \in \mathbb{N} \rangle$$

und dicht. Wir nehmen $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ an und behaupten, dass der \mathbb{Q} -Vektorraum $T = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}v_n$, der nach Lemma 10.10 (Analysis (Osnabrück 2021-2023))

abzählbar ist, eine dichte Teilmenge von V ist. Es sei dazu $Q \in U(Q, \epsilon) \subseteq V$ eine offene Umgebung eines Punktes $Q \in V$. Es gibt dann ein Element

$$u = \sum_{n \in E} a_n v_n \in U$$

mit $E \subseteq \mathbb{N}$ endlich mit m Elementen und $d(Q, u) = \delta < \epsilon$. Es sei S eine obere Schranke für $\|v_n\|$, $n \in E$. Wenn man in u die reellen Koeffizienten a_n durch rationale Koeffizienten b_n mit

$$|b_n - a_n| < \frac{\epsilon - \delta}{mS}$$

ersetzt, so erhält man das Element $\sum_{n \in E} b_n v_n \in T$ innerhalb von $U(Q, \epsilon)$. Es ist ja

$$\begin{aligned} \|Q - \sum_{n \in E} b_n v_n\| &\leq \|Q - \sum_{n \in E} a_n v_n\| + \|\sum_{n \in E} b_n v_n - \sum_{n \in E} a_n v_n\| \\ &\leq \delta + \sum_{n \in E} |b_n - a_n| \|v_n\| \\ &< \delta + \epsilon - \delta \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

□

Wenn ein dichter Untervektorraum mit abzählbarer Dimension vorliegt, so gibt es davon eine Basis der Form f_1, f_2, \dots . In vielen Beispielen, insbesondere, wenn ein separabler Hilbertraum vorliegt, lässt sich eine solche „dichte Basis“ des Gesamttraumes explizit angeben, siehe beispielsweise Satz 23.6, Satz 24.2 und Satz 24.8.

Definition 15.16. Ein normierter \mathbb{K} -Vektorraum, der mit der zugehörigen Metrik ein vollständiger metrischer Raum ist, heißt *Banachraum*.

15. ARBEITSBLATT

15.1. Übungsaufgaben.

Aufgabe 15.1. Es sei M eine Menge, die mit einer Halbmetrik versehen sei. Zeige, dass M ein topologischer Raum ist.

Aufgabe 15.2. Es sei M eine Menge, die mit einer Halbmetrik d versehen sei. Zeige, dass d genau dann eine Metrik ist, wenn der topologische Raum M ein Hausdorffraum ist.

Aufgabe 15.3. Es sei X ein topologischer Raum. Wir nennen Punkte $x, y \in X$ *umgebungsäquivalent*, wenn für jede offene Menge $U \subseteq X$ die Zugehörigkeit $x \in U$ genau dann gilt, wenn $y \in U$ gilt. Zeige, dass es sich dabei um eine Äquivalenzrelation handelt.

Aufgabe 15.4. Es seien X und Y Mengen, auf denen jeweils eine Halbmetrik definiert sei und es sei

$$\varphi: X \longrightarrow Y$$

eine Abbildung. Zeige, dass φ genau dann stetig ist, wenn es zu jedem $x \in X$ und jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart existiert, dass aus $d(x, x') \leq \delta$ die Abschätzung $d(\varphi(x), \varphi(x')) \leq \epsilon$ folgt.

Aufgabe 15.5. Es seien X und Y Mengen, auf denen jeweils eine Halbmetrik definiert sei und es sei

$$\varphi: X \longrightarrow Y$$

eine stetige Abbildung. Zeige, dass φ eine stetige Abbildung

$$\tilde{\varphi}: X/\sim \longrightarrow Y/\sim$$

induziert, die mit den Quotientenabbildungen verträglich ist.

Aufgabe 15.6. Es sei V der \mathbb{R} -Vektorraum aller konvergenten Folgen. Zeige, dass durch

$$\|v\| := \left| \lim_{n \rightarrow \infty} v_n \right|$$

eine Halbnorm auf V gegeben ist. Bestimme Z aus Lemma 15.11 und V/Z .

Aufgabe 15.7. Es sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum mit einer Halbnorm $\|-\|$, zugehöriger Halbmetrik d und sei

$$Z = \{v \in V \mid \|v\| = 0\}.$$

Zeige, dass der Restklassenraum V/Z in kanonischer Weise mit der Quotientenmenge V/\sim übereinstimmt, wobei \sim die zu d gehörige Äquivalenzrelation ist, und dass die induzierte Metrik auf V/\sim von der induzierten Norm herrührt.

Aufgabe 15.8. Es sei X ein topologischer Raum und sei $C^b(X, \mathbb{K})$ der \mathbb{K} -Vektorraum der stetigen beschränkten \mathbb{K} -wertigen Funktionen auf X , versehen mit der Supremumsnorm. Es sei $x \in X$. Zeige, dass die Auswertung an x , also die Abbildung

$$C^b(X, \mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}, f \longmapsto f(x),$$

\mathbb{K} -linear und stetig ist.

Aufgabe 15.9. Man gebe ein Beispiel für einen σ -endlicher Maßraum (M, \mathcal{A}, μ) derart, dass

$$V \longrightarrow \mathbb{R}, f \longmapsto \int_M f d\mu,$$

nicht stetig ist, wobei V den \mathbb{R} -Vektorraum der beschränkten integrierbaren Funktionen auf M , versehen mit der Supremumsnorm, bezeichnet.

Eine *topologische Gruppe* ist eine Gruppe G , die zugleich ein topologischer Raum ist derart, dass die Verknüpfung

$$G \times G \longrightarrow G, (g, h) \longmapsto g \circ h,$$

und die Inversenbildung

$$G \longrightarrow G, g \longmapsto g^{-1},$$

stetige Abbildungen sind.

Aufgabe 15.10. Zeige, dass ein topologischer Vektorraum eine (additive) topologische Gruppe ist.

Aufgabe 15.11. Zeige, dass die Gruppen $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{C}, +)$, $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{R}^n, +)$, $(S^1, \text{ mit der Winkeladdition})$, die allgemeine lineare Gruppe $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ bzw. $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ topologische Gruppen sind.

Es sei V ein topologischer Vektorraum über \mathbb{K} . Dann heißt

$$V' = \{f \in \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K}) : f \text{ stetig} \}$$

der *topologische Dualraum* zu V .

Aufgabe 15.12. Es sei V ein normierter \mathbb{K} -Vektorraum und sei V' der stetige Dualraum zu V . Zeige, dass V' über

$$\|f\| := \sup(|f(x)|, \|x\| = 1)$$

zu einem normierten Vektorraum wird.

Aufgabe 15.13.*

Zeige, dass ein metrischer Raum genau dann eine abzählbare Basis der Topologie besitzt, wenn er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt.

15.2. Aufgaben zum Abgeben.

Aufgabe 15.14. (4 Punkte)

Es sei (M, \mathcal{A}, μ) ein endlicher Maßraum und sei V der \mathbb{R} -Vektorraum der beschränkten integrierbaren Funktionen auf M , den wir mit der Supremumsnorm versehen. Zeige, dass

$$V \longrightarrow \mathbb{R}, f \longmapsto \int_M f d\mu,$$

stetig ist.

Aufgabe 15.15. (3 Punkte)

Es sei V ein unendlichdimensionaler normierter \mathbb{R} -Vektorraum. Zeige, dass es eine lineare Abbildung

$$V \longrightarrow \mathbb{R}$$

gibt, die nicht stetig ist.

16. VORLESUNG - LEBESGUERÄUME

16.1. p -Integrierbarkeit.

Definition 16.1. Es sei $p \geq 1$ eine reelle Zahl und (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum. Eine messbare Funktion

$$f: X \longrightarrow \mathbb{K}$$

heißt p -integrierbar, wenn $\int_X |f|^p d\mu$ endlich ist.

Der Menge aller p -integrierbaren Funktionen wird mit

$$\mathcal{L}^p(X) = \mathcal{L}^p(X, \mathcal{A}, \mu)$$

bezeichnet, es handelt sich um einen \mathbb{K} -Vektorraum.

Beispiel 16.2. Wir betrachten die natürlichen Zahlen \mathbb{N} als Maßraum mit dem Zählmaß. Die Funktionen

$$f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{K}$$

sind einfach die \mathbb{K} -wertigen Folgen, diese sind automatisch messbar. Die p -Integrierbarkeit ist in diesem Fall einfach die p -Summierbarkeit, es geht also um diejenigen Folgen f , für die

$$\|f\|_p = \sum_{n \in \mathbb{N}} |f_n|^p < \infty$$

gilt. Die f_n sind von daher eher als Reihenglieder denn als Folgenglieder anzusehen. Für $p = 1$ handelt es sich um die absolute Konvergenz der Reihe bzw. schlicht um die Summierbarkeit, für $p = 2$ spricht man von quadratsummierbaren Folgen. Die harmonische Reihe ist nicht summierbar, aber 2-summierbar und sogar p -summierbar für jedes $p > 1$.

Lemma 16.3. *Es sei $p \geq 1$ eine reelle Zahl und (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum. Dann ist die Menge $\mathcal{L}^p(X)$ der p -integrierbaren Funktionen ein \mathbb{C} -Vektorraum.*

Beweis. Siehe Aufgabe 16.1. □

Definition 16.4. Es sei $p \geq 1$ eine reelle Zahl und (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum. Zu einer p -integrierbaren Funktion nennt man

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}$$

die p -Norm von f .

Bemerkung 16.5. Häufig möchte man auch für $p = \infty$ zu Lemma 16.3 entsprechende Funktionenräume mit einer entsprechenden Halbnorm zur Verfügung haben. Zu einer messbaren Funktion $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem Maßraum (X, \mathcal{A}, μ) setzt man

$$\|f\|_\infty := \inf \{ b, \mu(f^{-1}(\mathbb{R}_{>b})) = 0 \}.$$

Diese Zahl (die eventuell ∞ sein kann) nennt man auch das *wesentliche Supremum* von f . Die entscheidende Eigenschaft ist, dass f zwar auch Werte oberhalb dieses wesentlichen Supremums annehmen kann, aber nur auf einer Nullmenge. Man nennt f *wesentlich beschränkt*, wenn ihr wesentliches Supremum eine reelle Zahl ist. Mit \mathcal{L}^∞ bezeichnet man den Vektorraum der wesentlich beschränkten Funktionen auf X , auf diesem ist $\|-\|$ eine Halbnorm.

Lemma 16.6. *Es sei (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum. Dann sind für eine messbare Funktion $f: X \rightarrow \mathbb{K}$ folgende Aussagen äquivalent.*

- (1) *Es ist $f = 0$ fast überall.*
- (2) *Es gibt ein $p \geq 1$ mit*

$$\int_X |f|^p d\mu = 0.$$

- (3) *Für alle $p \geq 1$ ist*

$$\int_X |f|^p d\mu = 0.$$

Beweis. Siehe Aufgabe 16.2. □

Wir werden zeigen, dass die p -Norm eine Halbnorm auf \mathcal{L}^p ist und daher nach Lemma 15.11 auf einem geeigneten Restklassenraum eine Norm ist. Die folgende Aussage heißt *Höldersche Abschätzung* oder *Höldersche Ungleichung*.

Lemma 16.7. *Es seien $p, q \geq 1$ reelle Zahlen mit*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

und es sei (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum. Es seien

$$f, g: X \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

messbare Funktionen, die p - bzw. q -integrierbar seien. Dann gilt

$$\int_X fg d\mu = \|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

Beweis. Bei $\|f\|_p = 0$ ist die Aussage nach Lemma 16.6 klar, wir können also von $\|f\|_p, \|g\|_q > 0$ ausgehen. Zu $x \in X$ wenden wir auf $A = \frac{|f(x)|}{\|f\|_p}$ und $B = \frac{|g(x)|}{\|g\|_q}$ die Abschätzung

$$AB \leq \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}$$

(siehe Aufgabe 20.25 (Analysis (Osnabrück 2021-2023))) an und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{1}{\|f\|_p \cdot \|g\|_q} \int_X |fg| d\mu &= \int_X \frac{|f|}{\|f\|_p} \cdot \frac{|g|}{\|g\|_q} d\mu \\ &\leq \int_X \frac{|f|^p}{p\|f\|_p^p} + \frac{|g|^q}{q\|g\|_q^q} d\mu \\ &= \frac{1}{p\|f\|_p^p} \int_X |f|^p d\mu + \frac{1}{q\|g\|_q^q} \int_X |g|^q d\mu \\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Multiplikation mit dem Vorfaktor ergibt die Behauptung. \square

Lemma 16.8. *Es sei $p \geq 1$ eine reelle Zahl und es sei (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum. Es seien*

$$f, g: X \longrightarrow \mathbb{R}$$

p -integrierbare Funktionen. Dann gilt

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Beweis. Es sei $1 < p < \infty$, für die anderen Fälle siehe die Aufgaben. Wegen

$$\|f + g\|_p \leq \| |f| + |g| \|_p$$

können wir f und g als reellwertig und nichtnegativ annehmen. Es sei q die durch die Bedingung

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

bestimmte Zahl, also

$$q = \frac{p}{p-1}.$$

Mit Lemma 16.7 folgt

$$\|f + g\|_p^p = \int_X (f + g)^p d\mu$$

$$\begin{aligned}
&= \int_X f(f+g)^{p-1} + g(f+g)^{p-1} d\mu \\
&= \|f(f+g)^{p-1}\|_1 + \|g(f+g)^{p-1}\|_1 \\
&\leq \|f\|_p \cdot \|(f+g)^{p-1}\|_q + \|g\|_p \cdot \|(f+g)^{p-1}\|_q \\
&\leq (\|f\|_p + \|g\|_p) \|(f+g)^{p-1}\|_q \\
&= (\|f\|_p + \|g\|_p) \left(\int_X (f+g)^{(p-1)q} d\mu \right)^{1/q} \\
&= (\|f\|_p + \|g\|_p) \left(\int_X (f+g)^p d\mu \right)^{(p-1)/p} \\
&= (\|f\|_p + \|g\|_p) \|f+g\|_p^{p-1}.
\end{aligned}$$

Wir können nun mit $\|f+g\|_p^{p-1}$ kürzen (wenn diese Zahl gleich 0 ist, stimmt die Aussage sowieso). \square

Lemma 16.9. *Es sei (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum und $p \geq 1$. Dann ist $\|-\|_p$ auf dem \mathbb{K} -Vektorraum $\mathcal{L}^p(X)$ der p -integrierbaren Funktionen eine Halbnorm.*

Beweis. Die Dreiecksabschätzung ist Lemma 16.8, die anderen Eigenschaften sind klar. \square

Zu einem Maßraum X betrachten wir

$$\mathcal{N} = \{f : X \rightarrow \mathbb{K} \text{ messbar} \mid f = 0 \text{ fast überall}\}.$$

Dies ist ein \mathbb{K} -Vektorraum, der aus allen messbaren Funktionen besteht, für die die Menge $\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$ eine Nullmenge ist. Nach Lemma 16.6 stimmt dieser Raum mit dem Raum aller Funktionen überein, für die die p -Norm gleich 0 ist. Daher liegt für jede reelle Zahl $p \geq 1$ die Unterraumbeziehung

$$\mathcal{N} \subseteq \mathcal{L}^p$$

vor, und \mathcal{N} entspricht für jeden \mathcal{L}^p dem Untervektorraum \mathcal{Z} aus Lemma 15.11.

Definition 16.10. Zu einem Maßraum (X, \mathcal{A}, μ) und einer reellen Zahl $p \geq 1$ definiert man die L^p -Räume durch

$$L^p(X) := \mathcal{L}^p(X) / \mathcal{N}.$$

Beispiel 16.11. Wir betrachten die natürlichen Zahlen \mathbb{N} als Maßraum mit dem Zählmaß, siehe Beispiel 16.2. Dabei ist die Nullfolge die einzige Folge, deren Träger das Maß 0 besitzt, d.h. es ist $\mathcal{N} = 0$ und es erübrigt sich der Übergang von $\mathcal{L}^p(X)$ nach $L^p(X)$.

Lemma 16.12. *Zu einem Maßraum (X, \mathcal{A}, μ) und $p \geq 1$ ist der Lebesgueräum $L^p(X, \mu)$ durch*

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}$$

ein normierter \mathbb{K} -Vektorraum.

Beweis. Nach Lemma 16.3 ist $\mathcal{L}^p(X)$ ein \mathbb{K} -Vektorraum, auf dem $\|-\|_p$ nach Lemma 16.8 eine Halbnorm ist. Nach Lemma 16.6 besteht \mathcal{N} genau aus den Funktionen, deren Norm gleich 0 ist. Deshalb folgt die Aussage aus Lemma 15.11. \square

Wegen der Identifizierung von Funktionen, die sich nur in einer Nullmenge unterscheiden, kann man bei Funktionsklassen nicht unmittelbar von punktweiser Konvergenz sprechen. Man kann allerdings davon sprechen, dass fast überall punktweise Konvergenz vorliegt. Die folgende Aussage sichert, dass dies auch auf $L^p(X)$ eine wohldefinierte Eigenschaft ist.

Lemma 16.13. *Es sei (X, \mathcal{A}, μ) ein Maßraum und $p \geq 1$. Es seien f, g messbare Funktionen und seien f_n und g_n Folgen von messbaren Funktionen auf X . Es sei $f = g$ fast überall und es sei $f_n = g_n$ fast überall. Dann konvergiert f_n fast überall gegen f genau dann, wenn g_n fast überall gegen g konvergiert.*

Beweis. Siehe Aufgabe 16.9. \square

Entsprechend kann man ähnliche Sprechweisen über messbare Funktionen auf X auf Funktionsklassen in $L^p(X)$ übertragen.

Lemma 16.14. *Es sei (X, \mathcal{A}, μ) ein σ -endlicher Maßraum und $p \geq 1$. Es sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von messbaren Funktionen auf X , die fast überall gegen die messbare Funktion f konvergiere. Es gebe ein reellwertiges $g \in L^p(X)$, das fast überall für alle $|f_n|$ eine obere Schranke sei. Dann konvergiert f_n auch in $L^p(X)$ gegen f .*

Beweis. Die Bedingung $|f_n| \leq g$ sichert einerseits, dass die f_n zu $L^p(X)$ gehören, und andererseits, dass auch $|f| \leq g$ fast überall gilt, weshalb wiederum f zu $L^p(X)$ gehört. Es konvergiert $|f - f_n|$ und damit auch $|f - f_n|^p$ fast überall gegen 0. Wegen

$$|f - f_n|^p \leq (2g)^p = 2^p g^p$$

und wegen $g \in L^p(X)$ können wir auf die Folge $|f - f_n|^p$ den Satz von der majorisierten Konvergenz anwenden und erhalten $\|f - f_n\|_p \rightarrow 0$, also konvergiert f_n in der p -Norm gegen f . \square

Lemma 16.15. *Es sei (X, \mathcal{A}, μ) ein σ -endlicher Maßraum und $p \geq 1$. Es sei g_n eine Folge von Funktionen in $\mathcal{L}^p(X)$ derart, dass die reelle Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \|g_n\|_p$ konvergiert. Dann konvergiert die Funktionenreihe $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$ fast überall und auch bezüglich der p -Norm gegen eine Funktion $g \in \mathcal{L}^p(X)$.*

Beweis. Es sei $b = \sum_{n=0}^{\infty} \|g_n\|_p$. Wir betrachten die Partialsummen

$$h_m = \sum_{n=0}^m |g_n|$$

und die Grenzfunktion

$$h = \lim_{m \rightarrow \infty} h_m = \sum_{n=0}^{\infty} |g_n|,$$

die auch den Wert ∞ annehmen kann. Daher ist auch

$$h^p = \lim_{m \rightarrow \infty} h_m^p$$

und nach dem Satz von der monotonen Konvergenz ist

$$\int_X h^p d\mu = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_X h_m^p d\mu.$$

Für Potenzieren mit dem Exponenten $1/p$ und erhalten

$$\|h\|_p = \lim_{m \rightarrow \infty} \|h_m\|_p = \lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \sum_{n=0}^m |g_n| \right\|_p.$$

Wegen

$$\left\| \sum_{n=0}^m |g_n| \right\|_p \leq \sum_{n=0}^m \|g_n\|_p \leq b$$

für alle m ist dies beschränkt. Es folgt $h \in \mathcal{L}^p$ und insbesondere ist h^p integrierbar. Dies bedeutet, dass h allenfalls auf einer Nullmenge den Wert ∞ annimmt. Die Funktionenreihe $\sum_{n=0}^{\infty} |g_n|$ ist also außerhalb einer Nullmenge punktweise konvergent und daher ist nach Lemma 16.14 auch die Funktionenreihe $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$ außerhalb einer Nullmenge punktweise konvergent gegen eine Funktion g . Mit Lemma 16.14 folgt, dass auch Konvergenz bezüglich der p -Norm vorliegt. \square

Die folgende Aussage heißt Vollständigkeitssatz von Fischer-Riesz.

Satz 16.16. *Es sei (X, \mathcal{A}, μ) ein σ -endlicher Maßraum. Dann ist der Lebesgueraum $L^p(X)$ der p -integrierbaren Funktionen vollständig.*

Beweis. Es sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von (Äquivalenzklassen von) p -integrierbaren Funktionen auf X , die bezüglich der p -Norm $\|-\|_p$ eine Cauchy-Folge bilden. Da wir zu einer Teilfolge übergehen können, können wir (nach neuer Indizierung) annehmen, dass

$$\|f_{n+1} - f_n\|_p \leq \frac{1}{2^n}$$

ist. Wir setzen $g_n = f_{n+1} - f_n$, und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|g_n\|_p \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \leq 2.$$

Nach Lemma 16.15 konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$ fast überall und bezüglich der p -Norm gegen eine Funktion $g \in \mathcal{L}^p(X)$. Daher konvergiert die Folge

$$f_n = f_0 + \sum_{i=0}^{n-1} (f_{i+1} - f_i) = f_0 + \sum_{i=0}^{n-1} g_i$$

gegen $f_0 + g$ in den beiden beschriebenen Sinnen. \square

Diese Aussage besagt also, dass ein Lebesgueraum ein Banachraum ist.

16. ARBEITSBLATT

16.1. Übungsaufgaben.

Aufgabe 16.1.*

Es sei $p \geq 1$ eine reelle Zahl und X ein Maßraum. Zeige, dass die Menge $\mathcal{L}^p(X)$ der p -integrierbaren Funktionen ein \mathbb{C} -Vektorraum ist.

Aufgabe 16.2. Es sei X ein Maßraum. Zeige, dass für eine messbare Funktion $f: X \rightarrow \mathbb{K}$ folgende Aussagen äquivalent sind.

- (1) Es ist $f = 0$ fast überall.
- (2) Es gibt ein $p \geq 1$ mit

$$\int_X |f|^p d\mu = 0.$$

- (3) Für alle $p \geq 1$ ist

$$\int_X |f|^p d\mu = 0.$$

Aufgabe 16.3.*

Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und sei $L^2(U, \lambda^n)$ der zugehörige L^2 -Raum. Zeige, dass es für jede Funktionsklasse $f \in L^2(U, \lambda^n)$ einen Repräsentanten gibt, der in keinem Punkt stetig ist.

Aufgabe 16.4. Zeige, dass für einen σ -endlichen Maßraum die Identität auf dem reellen Vektorraum V aller beschränkten integrierbaren Funktionen im Allgemeinen nicht stetig ist, wenn man den Ausgangsraum mit der Supremumsnorm und den Zielraum mit der L^1 -Halbnorm versieht. Zeige ebenso, dass die Identität bei vertauschten Rollen der Normen ebenfalls nicht stetig sein muss.

Für die beiden folgenden Aufgaben vergleiche Beispiel 31.5 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)) und Beispiel 31.6 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)).

Aufgabe 16.5. Zeige, dass auf $]0, 1]$ die Funktion x^{-1} für kein $p \geq 1$ p -integrierbar ist.

Aufgabe 16.6. Zeige, dass auf $\mathbb{R}_{\geq 1}$ die Funktion x^{-1} für $p = 1$ nicht p -integrierbar, aber für jedes $p > 1$ p -integrierbar ist.

Aufgabe 16.7.*

Es sei X ein endlicher Maßraum und sei $1 \leq p \leq q$. Zeige $\mathcal{L}^q(X) \subseteq \mathcal{L}^p(X)$.

Aufgabe 16.8. Es sei X ein Maßraum, $x \in X$ ein fixierter Punkt und $p \geq 1$.

(1) Zeige, dass die Auswertung

$$\mathcal{L}^p(X) \longrightarrow \mathbb{K}, f \longmapsto f(x),$$

im Allgemeinen nicht stetig ist, wenn $\mathcal{L}^p(X)$ mit der p -Halbnorm versehen ist.

(2) Zeige, dass die Auswertung an x auf $L^p(X)$ nicht wohldefiniert ist.

Aufgabe 16.9. Es sei (X, μ) ein Maßraum und $p \geq 1$. Es seien f, g messbare Funktionen und seien f_n und g_n Folgen von messbaren Funktionen auf X . Es sei $f = g$ fast überall und es sei $f_n = g_n$ fast überall. Zeige, dass f_n fast überall gegen f genau dann konvergiert, wenn g_n fast überall gegen g konvergiert.

16.2. Aufgaben zum Abgeben.

Aufgabe 16.10. (3 Punkte)

Es sei $0 < p < 1$. Zeige, dass auf dem \mathbb{R}^n für $n \geq 2$ durch

$$\|v\|_p := (v_1^p + \dots + v_n^p)^{1/p}$$

keine Norm definiert wird.

Aufgabe 16.11. (4 Punkte)

Es sei X ein σ -endlicher Maßraum und $Z \subseteq X$ eine messbare Teilmenge. Zeige, dass es (zu $p \geq 1$) eine natürliche Untervektorraumbeziehung

$$L^p(Z) \subseteq L^p(X)$$

gibt, die die p -Norm erhält.

Aufgabe 16.12. (3 Punkte)

Sei $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 1}$. Man gebe ein Beispiel für einen σ -endlichen Maßraum M und eine messbare Funktion $f: M \rightarrow \mathbb{R}$, die p -integrierbar ist für jedes $1 \leq p < \alpha$ und nicht p -integrierbar ist für $p > \alpha$.

Aufgabe 16.13. (4 Punkte)

Man gebe ein Beispiel für eine reelle Folge, die gegen 0 konvergiert und die für kein $p \geq 1$ p -summierbar ist.

17. VORLESUNG - KOMPAKTHEIT

17.1. Kompaktheit.

Bisher haben wir den Kompaktheitsbegriff nur für abgeschlossene und beschränkte Teilmengen $T \subseteq \mathbb{R}^n$ verwendet.

Teilmengen eines euklidischen Raumes, die sowohl abgeschlossen als auch beschränkt sind, nennt man kompakt. Auf topologischen Räumen, die nicht durch eine Metrik gegeben sind, kann man nicht von beschränkt sprechen, aber auch bei einem metrischen Raum, der keine Teilmenge eines \mathbb{R}^n ist, führen die beiden Eigenschaften abgeschlossen und beschränkt nicht sehr weit. Jeder metrische Raum ist in sich selbst abgeschlossen und jede Metrik kann man so abändern, dass sie beschränkt wird, ohne dass die Topologie sich ändert. Schlagkräftiger ist das folgende rein topologische Konzept.

Definition 17.1. Ein topologischer Raum X heißt *kompakt* (oder *überdeckungskompakt*), wenn es zu jeder offenen Überdeckung

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i \quad \text{mit } U_i \text{ offen und einer beliebigen Indexmenge } I$$

eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$ derart gibt, dass

$$X = \bigcup_{i \in J} U_i$$

ist.

Diese Eigenschaft nennt man manchmal auch *überdeckungskompakt*. Häufig nimmt man zu kompakt noch die Eigenschaft Hausdorffsch mit hinzu. Es sei betont, dass diese Eigenschaft *nicht* besagt, dass es eine endliche Überdeckung aus offenen Mengen gibt (es gibt immer die triviale offene Überdeckung mit dem Gesamtraum), sondern dass man, wenn irgendeine irgendwie indizierte offene Überdeckung vorliegt, dann nur eine endliche Teilmenge aus der Indexmenge für die Überdeckung nötig ist.

Lemma 17.2. *Es sei X ein Hausdorffraum und es sei $Y \subseteq X$ eine Teilmenge, die die induzierte Topologie trage. Es sei Y kompakt. Dann ist Y abgeschlossen in X .*

Beweis. Siehe Aufgabe 17.21. \square

Lemma 17.3. *Es sei X ein kompakter Raum und es sei $Y \subseteq X$ eine abgeschlossene Teilmenge, die die induzierte Topologie trage. Dann ist Y ebenfalls kompakt.*

Beweis. Siehe Aufgabe 17.3. \square

Eine Variante des Kompaktheitsbegriffes ist die sogenannte *Folgenkompaktheit*, die besagt, dass jede Folge eine konvergente Teilfolge besitzt. Nach Aufgabe 2.9 ist dies im Fall einer abzählbaren Basis (es genügt eine abzählbare Umgebungsbasis für jeden Punkt) äquivalent dazu, dass jede Folge einen Häufungspunkt besitzt. Wir werden hier hauptsächlich Situationen besprechen, in denen überdeckungskompakt und folgenkompakt übereinstimmen.

Lemma 17.4. *Es sei X ein topologischer Raum mit einer abzählbaren Basis. Dann ist X genau dann kompakt, wenn jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in X einen Häufungspunkt (in X) besitzt.*

Beweis. Es sei X kompakt und sei eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegeben. Nehmen wir an, dass diese Folge keinen Häufungspunkt besitzt. Das bedeutet, dass es zu jedem $y \in X$ eine offene Umgebung $y \in U_y$ gibt, in der es nur endlich viele Folgenglieder gibt. Wegen

$$X = \bigcup_{y \in X} U_y$$

gibt es nach Voraussetzung eine endliche Teilüberdeckung

$$X = \bigcup_{i=1}^n U_{y_i}.$$

Diese enthält einerseits alle Folgenglieder und andererseits nur endlich viele Folgenglieder, ein Widerspruch.

Es sei die Folgeeigenschaft erfüllt und sei $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ eine Überdeckung mit offenen Mengen. Da X eine abzählbare Basis besitzt, gibt es nach Aufgabe 2.8 eine abzählbare Teilmenge $J \subseteq I$ mit

$$X = \bigcup_{i \in J} U_i.$$

Wir können $J = \mathbb{N}$ annehmen. Nehmen wir an, dass die Überdeckung $X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i$ keine endliche Teilüberdeckung besitzt. Dann ist insbesondere $\bigcup_{i=0}^n U_i \neq X$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und daher gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in X$ mit $x_n \notin \bigcup_{i=0}^n U_i$. Nach Voraussetzung besitzt diese Folge einen Häufungspunkt x . Da eine Überdeckung $X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i$ vorliegt, gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $x \in U_k$. Da x ein Häufungspunkt ist, liegen unendlich viele Folgenglieder in U_k . Dies ist ein Widerspruch, da nach Konstruktion für $n \geq k$ die Folgenglieder x_n nicht zu U_k gehören. \square

Der folgende Satz heißt *Satz von Heine-Borel*.

Satz 17.5. *Es sei $T \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Teilmenge. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

- (1) T ist überdeckungskompakt.
- (2) Jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in T besitzt einen Häufungspunkt in T .
- (3) Jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in T besitzt eine in T konvergente Teilfolge.
- (4) T ist abgeschlossen und beschränkt.

Beweis. Die Äquivalenz von (1) und (2) wurde allgemeiner in Lemma 17.4 bewiesen, für die Existenz einer abzählbaren Basis siehe Aufgabe 2.23. Die Äquivalenz von (2) und (3) ist klar. Die Äquivalenz von (3) und (4) wurde in Satz 36.9 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)) gezeigt. \square

17.2. Stetige Abbildungen auf kompakten Räumen.

Lemma 17.6. *Es seien X und Y topologische Räume und es sei*

$$\varphi: X \longrightarrow Y$$

eine stetige Abbildung. Es sei X kompakt. Dann ist das Bild $\varphi(X) \subseteq Y$ ebenfalls kompakt ist.

Beweis. Siehe Aufgabe 17.22. \square

Die folgende Aussage ist eine wesentliche Verallgemeinerung von Satz 13.10 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)) und von Satz 36.12 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)).

Satz 17.7. *Es sei X ein nichtleerer kompakter topologischer Raum und sei*

$$f: X \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Funktion. Dann gibt es ein $x \in X$ mit

$$f(x) \geq f(x') \text{ für alle } x' \in X.$$

D.h., dass die Funktion ihr Maximum (und ihr Minimum) annimmt.

Beweis. Aufgrund von Lemma 17.6 ist $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ kompakt, also nach Satz 17.5 abgeschlossen und beschränkt. Insbesondere ist $f(X) \leq M$ für eine reelle Zahl M . Wegen $X \neq \emptyset$ besitzt $f(X)$ wegen Satz 7.5 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)) ein Supremum s in \mathbb{R} , das wegen der Abgeschlossenheit nach Korollar 33.18 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)) zu $f(X)$ gehört, also das Maximum von $f(X)$ ist. Daher gibt es auch ein $x \in X$ mit $f(x) = s$. \square

Bemerkung 17.8. Es sei X ein kompakter topologischer Raum. Aufgrund von Lemma 17.7 ist jede stetige Funktion

$$f: X \longrightarrow \mathbb{R}$$

beschränkt, und damit stimmt der Vektorraum $C(X, \mathbb{R})$ aller stetigen Funktionen mit dem Vektorraum $C^b(X, \mathbb{R})$ aller stetigen und beschränkten Funktionen überein. Bei $X \neq \emptyset$ gibt es auf $C^b(X, \mathbb{R})$ stets die Supremumsnorm, die im kompakten Fall wieder wegen Lemma 17.7 zur Maximumsnorm wird, da das Supremum angenommen wird.

Die folgende Aussage heißt *Satz von Dini*.

Satz 17.9. *Es sei X ein kompakter topologischer Raum. Es sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $C(X, \mathbb{R})$, die punktweise und monoton gegen ein $f \in C(X, \mathbb{R})$ konvergiert. Dann ist die Konvergenz gleichmäßig.*

Beweis. Die Funktionenfolge sei wachsend und es sei $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wir betrachten die offenen Mengen

$$U_n = \{x \in X \mid f(x) - f_n(x) < \epsilon\}.$$

Wegen der Monotonie ist

$$f(x) - f_{n+1}(x) \leq f(x) - f_n(x)$$

und daher ist $U_n \subseteq U_{n+1}$. Wegen der punktweisen Konvergenz ist

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n.$$

Aufgrund der Kompaktheit gibt es ein n_0 mit

$$X = U_{n_0},$$

was die Behauptung bedeutet. □

17.3. Kompakte metrische Räume.

Lemma 17.10. *Ein kompakter metrischer Raum X ist vollständig.*

Beweis. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in X . Nehmen wir an, dass diese Folge nicht konvergiert. Nach Aufgabe 36.7 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)) besitzt sie dann auch keinen Häufungspunkt. Das bedeutet, dass es zu jedem Punkt $y \in X$ eine offene Umgebung $y \in U_y$ derart gibt, dass es darin nur endlich viele Folgenglieder gibt. Aufgrund der Kompaktheit gibt es zur Überdeckung

$$X = \bigcup_{y \in X} U_y$$

eine endliche Teilüberdeckung, also

$$X = \bigcup_{i=1}^m U_{y_i}.$$

Dann wären ab einem N alle Folgenglieder außerhalb dieser Menge, was absurd ist. □

Definition 17.11. Ein metrischer Raum M heißt *total beschränkt*, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ endlich viele Punkte $x_1, \dots, x_n \in M$ derart gibt, dass

$$M = \bigcup_{i=1}^n U(x_i, \epsilon)$$

gilt.

Satz 17.12. *Es sei X ein metrischer Raum. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

- (1) X ist kompakt.
- (2) X ist folgenkompakt.
- (3) X ist vollständig und total beschränkt.

Beweis. Die Folgenkompaktheit ist äquivalent dazu, dass jede Folge einen Häufungspunkt besitzt. Von (1) nach (2) ergibt sich wie im Beweis zu Lemma 17.4. Aus (2) folgt (1) mit Lemma 17.4 wegen Aufgabe 17.20. Es sei (2) erfüllt. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in X . Nach Voraussetzung besitzt sie eine konvergente Teilfolge. Daraus folgt aber schon, dass die Folge konvergiert. Der Raum ist also vollständig. Wenn X nicht total beschränkt ist, so gibt es ein $\epsilon > 0$ derart, dass von den offenen Bällen $U(x, \epsilon)$ keine endliche Auswahl ganz X überdeckt. Wir können daher eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konstruieren mit der Eigenschaft, dass zu $n > m$ der Abstand

$$d(x_n, x_m) \geq \epsilon$$

ist. Eine solche Folge besitzt keine konvergente Teilfolge.

Es sei nun (3) erfüllt und wir wollen auf (2) schließen. Es sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X . Wir definieren induktiv unendliche Teilmengen $N_k \subseteq N_{k-1} \subseteq \mathbb{N}$ in folgender Weise: Es sei N_{k-1} schon konstruiert. Es sei $U(y_1, \frac{1}{k}), \dots, U(y_r, \frac{1}{k})$ eine offene Überdeckung von X , die es aufgrund der totalen Beschränktheit gibt. Dann gibt es eine unendliche Teilmenge $N_k \subseteq N_{k-1}$ derart, dass die $x_n, n \in N_k$, in einem der Bälle $U(y_i, \frac{1}{k})$ liegen. Wir wählen eine Teilfolge x_{n_k} mit $n_k \in N_k$ und n_k aufsteigend. Dann ist für $\ell \geq k$ stets

$$d(x_{n_k}, x_{n_\ell}) \leq \frac{2}{k}.$$

Es liegt also eine Cauchy-Folge vor, die wegen der Vollständigkeit konvergiert. \square

17. ARBEITSBLATT

Aufgabe 17.1. Es sei X ein topologischer Raum, der nur aus endlich vielen Elementen bestehe. Zeige, dass X kompakt ist.

Aufgabe 17.2. Es sei X ein topologischer Raum und es seien $Y_1, \dots, Y_n \subseteq X$ kompakte Teilmengen. Zeige, dass auch die Vereinigung $Y = \bigcup_{i=1}^n Y_i$ kompakt ist.

Aufgabe 17.3.*

Es sei X ein kompakter Raum und es sei $Y \subseteq X$ eine abgeschlossene Teilmenge, die die induzierte Topologie trage. Zeige, dass Y ebenfalls kompakt ist.

Aufgabe 17.4. Zeige, dass die Menge der reellen Zahlen \mathbb{R} nicht überdeckungskompakt ist.

Aufgabe 17.5. Zeige auf möglichst viele Arten, dass der Raum

$$M = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}_+ \right\} \cup \{0\}$$

kompakt ist.

Aufgabe 17.6. Es seien X und Y kompakte topologische Räume. Zeige, dass auch der Produktraum $X \times Y$ kompakt ist.

Aufgabe 17.7. Beweise den Satz von Bolzano-Weierstraß aus dem Satz von Heine-Borel.

Aufgabe 17.8. Wir betrachten die natürlichen Zahlen \mathbb{N} und versehen sie mit der diskreten Metrik. Zeige, dass \mathbb{N} abgeschlossen und beschränkt, aber nicht überdeckungskompakt ist.

Aufgabe 17.9. Es sei

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow S^1$$

eine stetige Abbildung. Zeige, dass das Bild von f homöomorph zu einem offenen, einem halboffenen, einem abgeschlossenen Intervall oder zu S^1 ist.

Aufgabe 17.10. Es sei

$$f: S^1 \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine stetige Abbildung. Zeige, dass das Bild von f homöomorph zu einem abgeschlossenen Intervall ist.

Aufgabe 17.11. Es sei $V \neq 0$ ein normierter Vektorraum. Zeige, dass V nicht kompakt ist.

Aufgabe 17.12. Zeige, dass ein total beschränkter metrischer Raum beschränkt ist.

Aufgabe 17.13. Zeige, dass eine Teilmenge $T \subseteq M$ eines total beschränkten metrischen Raumes M wieder total beschränkt ist.

Aufgabe 17.14. Es sei $T \subseteq \mathbb{R}^2$ ein abgeschlossenes gleichseitiges Dreieck (gemeint ist die Fläche mit Rand) mit Seitenlänge 2. Bestimme die minimale Anzahl an offenen Bällen mit Radius 1, mit denen man T überdecken kann.

Aufgabe 17.15. Es sei $T \subseteq \mathbb{R}^2$ ein offenes gleichseitiges Dreieck (gemeint ist die Fläche ohne den Rand) mit Seitenlänge 2. Bestimme die minimale Anzahl an offenen Bällen mit Radius 1, mit denen man T überdecken kann.

Aufgabe 17.16. Wir betrachten den abgeschlossenen Ball

$$X = U((0, 0), 1) \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Bestimme die minimale Anzahl an offenen Bällen $U(P_i, 1)$, mit der man X überdecken kann.

Aufgabe 17.17. Man gebe ein Beispiel für einen vollständigen beschränkten metrischen Raum M , der nicht total beschränkt ist.

Aufgabe 17.18.*

Es sei $T \subseteq M$ eine total beschränkte Teilmenge in einem metrischen Raum M . Zeige, dass auch der Abschluss \overline{T} total beschränkt ist.

Aufgabe 17.19. Zeige, dass für eine Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}^n$ die Konzepte beschränkt und total beschränkt zusammenfallen.

Aufgabe 17.20. Es sei X ein folgenkompakter topologischer Raum. Zeige, dass X eine abzählbare Basis besitzt.

17.1. Aufgaben zum Abgeben.

Aufgabe 17.21. (4 Punkte)

Es sei X ein Hausdorffraum und es sei $Y \subseteq X$ eine Teilmenge, die die induzierte Topologie trage. Es sei Y kompakt. Zeige, dass Y abgeschlossen in X ist.

Aufgabe 17.22. (4 Punkte)

Es seien X und Y topologische Räume und es sei

$$\varphi: X \longrightarrow Y$$

eine stetige Abbildung. Es sei X kompakt. Zeige, dass das Bild $\varphi(X) \subseteq Y$ ebenfalls kompakt ist.

Aufgabe 17.23. (4 Punkte)

Untersuche die folgenden Teilmengen $T \subseteq \mathbb{R}$ auf Vollständigkeit, Beschränktheit und totale Beschränktheit.

- (1) $T = \mathbb{Z}$,
- (2) $T =]0, 1[$,
- (3) $T = \mathbb{Q}$,
- (4) $T =]0, 1[\cap \mathbb{Q}$.

Aufgabe 17.24. (4 Punkte)

Es sei $\varphi: X \rightarrow Y$ eine stetige Abbildung zwischen metrischen Räumen X und Y . Es sei X kompakt. Zeige, dass φ gleichmäßig stetig ist.

17.2. Die Aufgabe zum Aufgeben.

Aufgabe 17.25. (10 Punkte)

Wir betrachten den offenen Ball

$$X = U((0, 0), 2) \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Bestimme die minimale Anzahl an offenen Bällen $U(P_i, 1)$, mit der man X überdecken kann.

18. VORLESUNG - APPROXIMATIONSSATZ VON STONE-WEIERSTRASS

18.1. Der Satz von Arzelà-Ascoli.

Wir betrachten einen kompakten topologischen Raum X und darauf den \mathbb{K} -Vektorraum $C(X, \mathbb{K})$ der stetigen Funktionen von X nach \mathbb{K} . Auf diesem Raum ist die Maximumsnorm wohldefiniert und eine Norm. Die Konvergenz ist die gleichmäßige Konvergenz und der Raum ist vollständig mit dieser Norm, siehe Satz 55.9 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)) für den Fall einer kompakten Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^k$ und Lemma 55.8 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)).

Wir möchten verstehen, wann eine gegebene Teilmenge

$$T \subseteq C(X, \mathbb{K})$$

kompakt ist. Dies wird durch den Satz von Arzelà-Ascoli beantwortet.

Definition 18.1. Es sei X ein topologischer Raum, Z ein metrischer Raum und sei $T \subseteq \text{Abb}(X, Z)$ eine Menge von Abbildungen von X nach Z . Man nennt T *gleichgradig stetig* in einem Punkt $x \in X$, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ eine offene Umgebung $x \in U \subseteq X$ derart gibt, dass für alle $x' \in U$ und alle $f \in T$ gilt

$$d(f(x), f(x')) \leq \epsilon.$$

Man nennt T *gleichgradig stetig*, wenn T gleichgradig stetig in jedem Punkt $x \in X$ ist.

Eine einzelne Abbildung ist genau dann gleichgradig stetig in x , wenn sie stetig in x ist. Auch eine Ansammlung von endlich vielen stetigen Funktionen ist automatisch gleichgradig stetig, siehe Aufgabe 18.1. Im Allgemeinen geht es darum, ob es für eine gegebene Funktionenmenge und jede vorgegebene Zielgenauigkeit $\epsilon > 0$ eine Startumgebung gibt, die für alle Funktionen simultan die Zielbedingung sichert. Wenn X ein metrischer Raum ist, so wird die Startumgebung durch eine Startgenauigkeit $\delta > 0$ beschrieben.

Beispiel 18.2. Es sei $[a, b]$ ein reelles Intervall und sei

$$S = \{cx + d \mid c, d \in \mathbb{R}\}$$

die Menge aller affin-linearen Funktionen, aufgefasst als Funktionen auf dem Intervall. Dann ist S nicht gleichgradig stetig, da die Beziehung zwischen einer Zielgenauigkeit $\epsilon > 0$ und einer Aufwandsgenauigkeit $\delta > 0$ wesentlich von der Steigung c der affin-linearen Funktion abhängt. Wenn man hingegen Schranken $c_0 < c_1$ fixiert und

$$T = \{cx + d \mid c, d \in \mathbb{R}, c_0 \leq c \leq c_1\} \subseteq S$$

betrachtet, so liegt gleichgradige Stetigkeit vor.

Lemma 18.3. *Es sei X ein kompakter topologischer Raum und $T \subseteq C(X, \mathbb{K})$, versehen mit der Maximumsnorm. Es gelten die beiden Eigenschaften*

- (1) *T ist gleichgradig stetig.*
- (2) *Für jeden Punkt $x \in X$ ist das Auswertungsbild $\{f(x) \mid f \in T\}$ beschränkt.*

Dann ist T total beschränkt.

Beweis. Es sei $\epsilon > 0$ gegeben. Wegen der gleichgradigen Stetigkeit gibt es zu jedem $x \in X$ eine offene Umgebung $x \in U_x \subseteq X$ mit

$$d(f(x), f(x')) < \frac{\epsilon}{4}$$

für alle $x' \in U_x$ und alle $f \in T$. Wegen der Kompaktheit von X gibt es endlich viele Punkte x_1, \dots, x_n mit

$$X = \bigcup_{i=1}^n U_{x_i}.$$

Es sei

$$M = \{f(x_i) \mid f \in T, i = 1, \dots, n\} = \bigcup_{i=1}^n \{f(x_i) \mid f \in T\} \subseteq \mathbb{K}.$$

Da die einzelnen Auswertungsbilder $\{f(x_i) \mid f \in T\}$ beschränkt sind, ist auch M beschränkt und daher gibt es endlich viele Punkte z_1, \dots, z_m in \mathbb{K} mit

$$M \subseteq \bigcup_{j=1}^m U\left(z_j, \frac{\epsilon}{4}\right).$$

Zu einem Tupel $(j_1, \dots, j_n) \in \{1, \dots, m\}^n$ definieren wir

$$T_{(j_1, \dots, j_n)} = \left\{ f \in T \mid f(x_i) \in U\left(z_{j_i}, \frac{\epsilon}{4}\right) \text{ für } i = 1, \dots, n \right\}.$$

Es ist

$$T = \bigcup_{(j_1, \dots, j_n)} T_{(j_1, \dots, j_n)}.$$

Für $f, g \in T_{(j_1, \dots, j_n)}$ und $x \in X$ gibt es ein i mit $x \in U_{x_i}$ und somit ist

$$\begin{aligned} & d(f(x), g(x)) \\ & \leq d(f(x), f(x_i)) + d(f(x_i), g(x_i)) + d(g(x_i), g(x)) \\ & < d(f(x), f(x_i)) + d(f(x_i), z_{j_i}) + d(z_{j_i}, g(x_i)) + d(g(x_i), g(x)) \\ & \leq \frac{\epsilon}{4} = \epsilon. \end{aligned}$$

so ist

$$T_{(j_1, \dots, j_n)} \subseteq U(f, \epsilon)$$

für jedes $f \in T_{(j_1, \dots, j_n)}$. Wir wählen zu jedem Tupel (j_1, \dots, j_n) eine Funktion $f_{(j_1, \dots, j_n)} \in T_{(j_1, \dots, j_n)}$. Dann wird T von den endlich vielen offenen Bällen $U(f_{(j_1, \dots, j_n)}, \epsilon)$ überdeckt. \square

In Beispiel 18.2 sind die Auswertungsbilder nicht beschränkt, da d in ganz \mathbb{R} variieren kann. Wenn man das Intervall kompakt wählt und sowohl für c als auch für d einem beschränkten Bereich festlegt, so erhält man mit Lemma 18.3 eine total beschränkte Menge an affin-linearen Funktionen. Der folgende Satz heißt Satz von Arzelà-Ascoli.

Satz 18.4. *Es sei X ein kompakter topologischer Raum und $T \subseteq C(X, \mathbb{K})$, versehen mit der Maximumsnorm. Dann ist T genau dann kompakt, wenn die drei folgenden Bedingungen erfüllt sind.*

- (1) T ist abgeschlossen.
- (2) T ist gleichgradig stetig.
- (3) Für jeden Punkt $x \in X$ ist das Auswertungsbild $\{f(x) \mid f \in T\}$ beschränkt.

Beweis. Es sei zuerst T kompakt. Die Eigenschaft (1) folgt aus Lemma 17.2. Die Eigenschaft (3) folgt wegen der Stetigkeit der Auswertung (siehe Aufgabe 15.8)

$$C(X, \mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}, f \longmapsto f(x),$$

aus Lemma 17.6 und aus Satz 17.5. Zum Nachweis der gleichgradigen Stetigkeit sei ein Punkt $x \in X$ und ein $\epsilon > 0$ fixiert. Aufgrund der totalen Beschränktheit von T gemäß Satz 17.12 gibt es endlich viele Funktionen $f_1, \dots, f_n \in T$ derart, dass

$$T \subseteq \bigcup_{i=1}^n U\left(f_i, \frac{\epsilon}{3}\right)$$

ist. Für diese endlich vielen Funktionen f_i finden wir eine gemeinsame offene Umgebung $x \in U \subseteq X$ mit

$$d(f_i(x), f_i(x')) \leq \frac{\epsilon}{3}$$

für alle $x' \in U$ und alle $i = 1, \dots, n$. Für ein beliebiges $f \in T$ ist $f \in U(f_i, \frac{\epsilon}{3})$ für ein i und daher ist (für $x' \in U$)

$$\begin{aligned} d(f(x), f(x')) &\leq d(f(x), f_i(x)) + d(f_i(x), f_i(x')) + d(f_i(x'), f(x')) \\ &\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Es seien nun umgekehrt die drei Bedingungen erfüllt, wir zeigen die Kompaktheit gemäß Satz 17.12. Nach Aufgabe 36.22 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)) ist wegen der Abgeschlossenheit von T in $C(X, \mathbb{K})$ auch T vollständig und nach Lemma 18.3 ist T total beschränkt. \square

18.2. Der Approximationssatz von Stone-Weierstrass.

Unter einer \mathbb{K} -Algebra versteht man einen \mathbb{K} -Vektorraum, auf dem zugleich eine Multiplikation mit einem neutralen Element 1 für die Multiplikation erklärt ist. Speziell interessieren wir uns für Unteralgebren der Algebra aller \mathbb{K} -wertigen Funktionen auf einem topologischen Raum X mit der punktweisen Multiplikation.

Definition 18.5. Es sei X eine Menge und sei $T \subseteq \text{Abb}(X, \mathbb{K})$ eine Menge von auf X definierten \mathbb{K} -wertigen Funktionen. Man sagt, dass T die Punkte von X trennt, wenn es zu je zwei Punkten $x, y \in X$ eine Funktion $f \in T$ mit $f(x) \neq f(y)$ gibt.

Hier wird X stets ein topologischer Raum und T wird eine Teilmenge von stetigen Funktionen auf X sein. Ein wichtiges Beispiel ist $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $X = [a, b]$ und T die Menge der polynomialen Funktionen auf dem Intervall.

Lemma 18.6. *Es sei X eine Menge und sei $T \subseteq \text{Abb}(X, \mathbb{K})$ eine \mathbb{R} -Unteralgebra, die die Punkte aus X trennt. Dann gibt es zu Punkten $x \neq y$ aus X und zu vorgegebenen Werten $a, b \in \mathbb{R}$ ein $g \in T$ mit $g(x) = a$ und $g(y) = b$.*

Beweis. Siehe Aufgabe 18.7. □

Lemma 18.7. *Es sei X ein kompakter topologischer Raum und $T \subseteq C(X, \mathbb{R})$ eine abgeschlossene \mathbb{R} -Unteralgebra. Dann gehört mit f auch $|f|$ zu T .*

Beweis. Es sei f gegeben. Wegen

$$|f| = \sqrt{f^2}$$

genügt es zu zeigen, dass mit einer nichtnegativen Funktion g auch deren Quadratwurzel zu T gehört. Durch Multiplikation mit einer Konstanten können wir nach Lemma 17.7 davon ausgehen, dass $|g| \leq 1$ ist. Es gibt nach Aufgabe 18.9 eine Folge von Polynomen $P_n(t)$, die auf $[0, 1]$ gleichmäßig gegen \sqrt{t} konvergiert. Dann konvergiert in $C(X, \mathbb{R})$ auch $P_n \circ g$ gegen \sqrt{g} , die polynomialen Ausdrücke $P_n \circ g$ in g gehören zu T und wegen der Abgeschlossenheit von T ist auch $\sqrt{g} \in T$. □

Korollar 18.8. *Es sei X ein kompakter topologischer Raum und $T \subseteq C(X, \mathbb{R})$ eine abgeschlossene \mathbb{R} -Unteralgebra. Dann gehören mit f und g auch $\max(f, g)$ und $\min(f, g)$ zu T .*

Beweis. Dies folgt wegen

$$\max(f, g) = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|)$$

aus Lemma 18.7. □

Der folgende Satz heißt *Approximationssatz von Stone-Weierstrass*.

Satz 18.9. *Es sei X ein kompakter topologischer Raum und $T \subseteq C(X, \mathbb{R})$ eine \mathbb{R} -Unteralgebra, die die Punkte aus X trennt. Dann ist*

$$\overline{T} = C(X, \mathbb{R}).$$

D.h. jede stetige Funktion $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ lässt sich beliebig gut durch Funktionen aus T approximieren.

Beweis. Es sei die stetige Funktion

$$f: X \longrightarrow \mathbb{R}$$

und ein $\epsilon > 0$ gegeben. Wegen der Trennungseigenschaft gibt es für je zwei Punkte x, y nach Lemma 18.6 eine Funktion $g_{xy} \in T$ mit $g_{xy}(x) = f(x)$ und $g_{xy}(y) = f(y)$. Diese seien für jedes Punktepaar gewählt. Wir betrachten zu $x \in X$ die offenen Mengen

$$U_y = \{z \in X \mid g_{xy}(z) < f(z) + \epsilon\},$$

die y enthalten. Wegen $X = \bigcup_{y \in X} U_y$ und der Kompaktheit von X gibt es endlich viele Punkte y_1, \dots, y_n mit $X = \bigcup_{i=1}^n U_{y_i}$. Wir setzen

$$g_x := \min(g_{xy_i} \mid i = 1, \dots, n),$$

diese Funktionen gehören nach Korollar 18.8 zu T . Nach Konstruktion ist

$$g_x < f + \epsilon$$

auf ganz X . Ferner ist $g_x(x) = f(x)$, da dies für jedes der beteiligten g_{xy_i} gilt. Deshalb gibt es wiederum eine offene Umgebung $x \in V_x$, auf der

$$f - \epsilon < g_x$$

gilt. Es gibt wieder endlich viele Punkte x_1, \dots, x_m derart, dass die V_{x_j} bereits X überdecken. Daher gehört wegen Korollar 18.8

$$h := \max(g_{x_j} \mid j = 1, \dots, m)$$

zu T . Es gilt

$$f - \epsilon < h < f + \epsilon$$

und somit hat man ein $h \in T$ aus der ϵ -Umgebung von f gefunden. \square

Wir erwähnen die folgenden Spezialfälle.

Satz 18.10. *Es sei $T \subseteq \mathbb{R}^n$ eine kompakte Teilmenge und sei $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein reelles Polynom p in n Variablen mit*

$$|f(z) - p(z)| \leq \epsilon$$

für alle $z \in T$. Die Polynomalgebra $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$ ist dicht in $C(T, \mathbb{R})$.

Beweis. Dies folgt aus Satz 18.9, da Polynome Punkte trennen. \square

Satz 18.11. *Es sei $[a, b]$ ein abgeschlossenes Intervall und $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein reelles Polynom p mit*

$$|f(t) - p(t)| \leq \epsilon$$

für alle $t \in [a, b]$. Die Polynomialgebra $\mathbb{R}[t]$ ist dicht in $C([a, b], \mathbb{R})$.

Beweis. Dies folgt aus Satz 18.9, da $[a, b]$ kompakt ist und Polynome Punkte trennen. \square

Wir erwähnen noch die folgende komplexe Variante.

Satz 18.12. *Es sei X ein kompakter topologischer Raum und $T \subseteq C(X, \mathbb{C})$ eine \mathbb{C} -Unteralgebra, die die Punkte aus X trennt und die mit jeder Funktion auf ihre komplex-konjugierte Funktion enthält. Dann ist*

$$\overline{T} = C(X, \mathbb{C}).$$

D.h. jede stetige Funktion $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ lässt sich beliebig gut durch Funktionen aus T approximieren.

Beweis. Siehe Aufgabe 18.14 \square

18. ARBEITSBLATT

18.1. Übungsaufgaben.

Aufgabe 18.1. Es sei X ein topologischer Raum, Z ein metrischer Raum und seien f_1, \dots, f_n stetige Abbildungen von X nach Z . Zeige, dass diese Familie gleichgradig stetig ist.

Aufgabe 18.2. Es sei X ein topologischer Raum und seien f_1, \dots, f_n stetige reellwertige Funktionen auf X . Es sei $c \geq 0$. Zeige, dass die Menge

$$T = \{c_1 f_1 + \dots + c_n f_n \mid |c_i| \leq c\}$$

gleichgradig stetig ist.

Aufgabe 18.3. Wir betrachten die Menge von linearen reellen Polynomen

$$T = \{cx + d \mid |c|, |d| \leq 1\}$$

als Funktionen auf dem Einheitsintervall $[0, 1]$. Man gebe für $\epsilon = \frac{1}{2}$ explizit endlich viele offene Bälle $U(f, \epsilon)$ mit $f \in T$ an, die T überdecken.

Aufgabe 18.4. Es seien X und Y metrische Räume und sei $L \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Zeige, dass die Funktionenmenge

$$\{f : X \rightarrow Y \mid f \text{ ist Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante } L\}$$

gleichgradig stetig ist.

Aufgabe 18.5. Es seien $x_1, \dots, x_n \in [a, b]$ verschiedene Punkte aus einem reellen Intervall und $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$.

(1) Zeige, dass die Funktionenmenge

$$T = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig} \mid f(x_i) = y_i \text{ für alle } i\}$$

nicht gleichgradig stetig ist.

(2) Wie sieht es aus, wenn man nur die Polynome aus T betrachtet?

(3) Wie sieht es aus, wenn man nur die Polynome aus T vom Grad $\leq n$ betrachtet?

Aufgabe 18.6. Es sei

$$M = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}_+ \right\} \cup \{0\} \subseteq \mathbb{R}$$

und es sei

$$T := \{f : M \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig und } f(0) = 0\} \subseteq C^0(M, \mathbb{R}),$$

versehen mit der Maximumsnorm.

(1) Ist T abgeschlossen in $C^0(M, \mathbb{R})$?

(2) Ist T gleichgradig stetig?

(3) Für welche Punkte $x \in M$ ist das Auswertungsbild zu

$$T \longrightarrow \mathbb{R}, f \longmapsto f(x),$$

beschränkt?

Aufgabe 18.7. Es sei X eine Menge und sei $T \subseteq \text{Abb}(X, \mathbb{K})$ eine \mathbb{R} -Unteralgebra, die die Punkte aus X trennt. Zeige, dass es zu Punkten $x \neq y$ aus X und zu vorgegebenen Werten $a, b \in \mathbb{R}$ ein $g \in T$ mit $g(x) = a$ und $g(y) = b$ gibt.

Aufgabe 18.8.*

Wir definieren rekursiv eine Folge von reellen Polynomen P_n durch $P_0 = 0$ und

$$P_{n+1}(t) = P_n(t) + \frac{1}{2}(t - P_n(t))^2.$$

Zeige, dass diese Folge auf $[0, 1]$ punktweise gegen \sqrt{t} konvergiert.

Aufgabe 18.9. Wir definieren rekursiv eine Folge von reellen Polynomen P_n durch $P_0 = 0$ und

$$P_{n+1}(t) = P_n(t) + \frac{1}{2}(t - P_n(t)^2).$$

Zeige, dass diese Folge auf $[0, 1]$ gleichmäßig gegen \sqrt{t} konvergiert.

Aufgabe 18.10. Es sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und es sei ein Stift gegeben, der einen Strich mit der Dicke $\epsilon > 0$ zeichnet. Zeige, dass es ein reelles Polynom derart gibt, dass wenn man seinen Graphen mit dem Stift nachfährt, auch den Graphen von f vollständig überdeckt.

Aufgabe 18.11. Es sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Diskutiere Beziehungen zwischen den polynomialen Interpolationen von f , den Approximationen durch Taylor-Polynome und dem Satz von Weierstrass.

Aufgabe 18.12. Zeige, dass der Approximationssatz von Weierstrass nicht für stetige Funktionen auf \mathbb{R} gilt.

Aufgabe 18.13. Zeige, dass der Approximationssatz von Weierstrass nicht für stetige Funktionen auf $]0, 1[$ gilt.

Aufgabe 18.14. Es sei X ein kompakter topologischer Raum und $T \subseteq C(X, \mathbb{C})$ eine \mathbb{C} -Unteralgebra, die die Punkte aus X trennt und die mit jeder Funktion auf ihre komplex-konjugierte Funktion enthält. Zeige

$$\overline{T} = C(X, \mathbb{C}).$$

18.2. Aufgaben zum Abgeben.

Aufgabe 18.15. (6 Punkte)

Wir betrachten die Menge von quadratischen reellen Polynomen

$$T = \{ax^2 + bx + c \mid |a|, |b|, |c| \leq 1\}$$

als Funktionen auf dem Einheitsintervall $[0, 1]$. Man gebe für $\epsilon = \frac{1}{2}$ explizit endlich viele offene Bälle $U(f, \epsilon)$ mit $f \in T$ an, die T überdecken.

Aufgabe 18.16. (4 Punkte)

Es sei X ein topologischer Raum und

$$A \subseteq C^b(X, \mathbb{K})$$

eine Unteralgebra der Algebra der beschränkten und stetigen Funktionen auf X . Zeige, dass der Abschluss \overline{A} ebenfalls eine Unteralgebra von $C^b(X, \mathbb{K})$ ist.

Aufgabe 18.17. (5 Punkte)

Man gebe explizit ein reelles Polynom an, das auf dem Intervall $[-1, 1]$ zur Betragsfunktion den maximalen Abstand $\frac{1}{10}$ besitzt.

Aufgabe 18.18. (4 Punkte)

Zeige, dass der Approximationssatz von Weierstrass nicht für beschränkte stetige Funktionen auf $]0, 1[$ gilt.

19. VORLESUNG - SUMMIERBARKEIT

Die Vorlesung wurde nicht durchgeführt.

20. VORLESUNG - APPROXIMATION IN LEBESGUERÄUMEN

Die Vorlesung wurde nicht durchgeführt.

21. VORLESUNG - HILBERTRÄUME

Zu einem σ -endlichen Maßraum X und einer reellen Zahl $p \geq 1$ sind die Lebesgueräume $L^p(X)$ nach dem Satz von Fischer-Riesz vollständige normierte Vektorräume. Wir haben schon erwähnt, dass dabei $L^2(X)$ eine besondere Rolle spielt. Dies beruht darauf, dass man zu integrierbaren Funktionen

$$f, g: X \longrightarrow \mathbb{K}$$

das Integral $\int_X f \bar{g} d\mu$ betrachten kann, das ein Skalarprodukt definiert, dessen zugehörige Norm gerade die L^2 -Norm ist (siehe auch Beispiel 32.9 (Analysis (Osnabrück 2021-2023))). Diese zusätzliche Struktur erlaubt es, über Winkel, Orthogonalität, orthogonale Projektion etc. auch im Kontext von Funktionen zu sprechen. Der theoretische Rahmen wird durch das Konzept eines Hilbertraumes abgesteckt.

21.1. Hilberträume.

Definition 21.1. Ein \mathbb{K} -Vektorraum mit Skalarprodukt, der mit der zugehörigen Metrik ein vollständiger metrischer Raum ist, heißt *Hilbertraum*.

Endlichdimensionale \mathbb{K} -Vektorräume mit einem Skalarprodukt sind vollständig nach Aufgabe 36.9 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)), also Hilberträume. Der Begriff ist insbesondere für unendlichdimensionale Vektorräume relevant.

Lemma 21.2. *Ein Untervektorraum $U \subseteq V$ eines \mathbb{K} -Hilbertraumes ist genau dann ein Hilbertraum, wenn er abgeschlossen in V ist.*

Beweis. Siehe Aufgabe 21.9. □

Wir halten die folgende Aussage über den Raum der quadratintegrierbaren Funktionen fest.

Lemma 21.3. *Es sei (X, \mathcal{A}, μ) ein σ -endlicher Maßraum. Dann ist der Lebesgueraum $L^2(X)$ der quadratintegrierbaren Funktionen, versehen mit dem Skalarprodukt*

$$\langle f, g \rangle := \int_X f \bar{g} d\mu,$$

ein Hilbertraum.

Beweis. Wir argumentieren zuerst auf der Ebene von $\mathcal{L}^2(X)$. Zu quadratintegrierbaren Funktionen f, g zeigt die Höldersche Abschätzung

$$\int_X f \bar{g} d\mu \leq \|f\|_2 \cdot \|g\|_2,$$

dass das angegebene Integral endlich ist. Mit Lemma 16.6 folgt, dass sein Wert unabhängig von den gewählten Repräsentanten sind und eine Funktion auf $L^2(X) \times L^2(X)$ definiert. Eigenschaften des Integrals wie Satz 10.6 sichern, dass ein Skalarprodukt vorliegt. Die Vollständigkeit ergibt sich aus dem Satz von Fischer-Riesz. \square

Beispiel 21.4. Wir betrachten die natürlichen Zahlen \mathbb{N} als Maßraum mit dem Zählmaß, siehe Beispiel 16.2 und Beispiel 16.11. Der zugehörige Raum der quadratsummierbaren Folgen besitzt das Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n \bar{g}_n,$$

die Norm eines Elementes ist

$$\|f\| = \sqrt{\sum_{n \in \mathbb{N}} |f_n|^2}.$$

Dieser Hilbertraum wird mit l_2 oder mit $L^2(\mathbb{N})$ bezeichnet, man spricht vom *Hilbertschen Folgenraum*.

21.2. Minimaler Abstand.

Definition 21.5. Eine Teilmenge $T \subseteq V$ in einem reellen Vektorraum V heißt *konvex*, wenn mit je zwei Punkten $P, Q \in T$ auch jeder Punkt der Verbindungsstrecke, also jeder Punkt der Form

$$rP + (1 - r)Q \text{ mit } r \in [0, 1],$$

ebenfalls zu T gehört.

Lemma 21.6. *Es sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum mit Skalarprodukt und sei $T \subseteq V$ eine nichtleere konvexe vollständige Teilmenge. Dann enthält T einen eindeutigen Punkt $P \in T$, indem die Norm $\|P\|$ (unter allen Punkten aus T) das Minimum annimmt.*

Beweis. Es sei δ das Infimum von

$$\{\|Q\| \mid Q \in T\} \subseteq \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

Mit Hilfe von Aufgabe 32.25 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)) erhält man für Punkte $P, Q \in T$ die Identität

$$\|P - Q\|^2 = 2\|P\|^2 + 2\|Q\|^2 - 4\left\|\frac{P+Q}{2}\right\|^2.$$

Wegen der Konvexität gilt $\frac{P+Q}{2} \in T$ und daher ist

$$\|P - Q\|^2 \leq 2\|P\|^2 + 2\|Q\|^2 - 4\delta^2.$$

Es seien nun P, Q Punkte, in denen das Infimum angenommen wird. Dann folgt aus

$$\|P\| = \|Q\| = \delta$$

sofort $\|P - Q\| = 0$ und damit $P = Q$, was die Eindeutigkeit bedeutet.

Da das Infimum einer nichtleeren Teilmenge von \mathbb{R} durch eine Folge beliebig nah angenähert werden kann, gibt es eine Folge $Q_n \in T$ derart, dass $\|Q_n\|$ gegen δ konvergiert. Die obige Abschätzung ergibt für Folgenglieder Q_n, Q_m die Abschätzung

$$\|Q_n - Q_m\|^2 \leq 2\|Q_n\|^2 + 2\|Q_m\|^2 - 4\delta^2.$$

Da $\|Q_n\|$ gegen δ konvergiert, folgt daraus, dass die Differenz links beliebig klein wird. Dies bedeutet, dass Q_n eine Cauchy-Folge ist. Wegen der Vollständigkeit von T konvergiert die Folge gegen ein $P \in T$. \square

Korollar 21.7. *Es sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum mit Skalarprodukt und sei $U \subseteq V$ ein vollständiger Untervektorraum. Dann gibt es zu jedem Punkt $Q \in V$ einen eindeutigen Punkt $P \in U$, für den der Abstand von Q zu Punkten aus U minimal wird.*

Beweis. Wir verschieben die Situation um $-Q$ und haben dann einen vollständigen (da die Verschiebung stetig ist) affinen Unterraum $U - Q$ und betrachten den Abstand zum Nullpunkt. Der Untervektorraum ist konvex und dies überträgt sich auf den verschobenen Untervektorraum. Daher folgt die Aussage aus Lemma 21.6. \square

Korollar 21.8. *Es sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum mit Skalarprodukt und sei $U \subseteq V$ ein vollständiger Untervektorraum. Dann gibt es zu jedem $v \in V$ eine eindeutige Darstellung*

$$v = u + w$$

mit $u \in U$ und $w \in U^\perp$.

Beweis. Aus zwei solchen Darstellungen

$$v = u + w = u' + w'$$

mit den geforderten Eigenschaften folgt

$$0 = u - u' + w - w' = \tilde{u} + \tilde{w},$$

wobei die beiden Summanden \tilde{u} und $\tilde{w} = -\tilde{u}$ orthogonal zueinander sind, woraus folgt, dass sie 0 sind.

Zum Existenznachweis sei $u \in U$ der gemäß Korollar 21.7 eindeutig bestimmte Punkt, in dem der Abstand von v zu U minimal wird. Sei

$$w = v - u.$$

Es ist

$$\langle v - u, u' \rangle = 0$$

für jedes $u' \in U$ zu zeigen. Wir können $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ annehmen. Nehmen wir an, dass es ein $u' \in U$ mit

$$\langle v - u, u' \rangle = c \neq 0$$

gibt, wobei wir c , indem wir eventuell u' durch $-u'$ ersetzen, als negativ annehmen können. Es ist dann

$$2 \langle v - u, \lambda u' \rangle + \langle \lambda u', \lambda u' \rangle = 2c\lambda + \lambda^2 \langle u', u' \rangle = \lambda(2c + \lambda \langle u', u' \rangle),$$

was für λ positiv und hinreichend klein negativ ist. Dann ist aber

$$\begin{aligned} \langle v - u + \lambda u', v - u + \lambda u' \rangle &= \langle v - u, v - u \rangle + 2 \langle v - u, \lambda u' \rangle + \langle \lambda u', \lambda u' \rangle \\ &< \langle v - u, v - u \rangle \end{aligned}$$

im Widerspruch dazu, dass der Abstand (und damit das Abstandsquadrat) von v zu U in u minimal wird. \square

Definition 21.9. Es sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum mit Skalarprodukt und sei $U \subseteq V$ ein vollständiger Untervektorraum. Die Abbildung $p_U: V \rightarrow U$, die jedem Element $v \in V$ das $u \in U$ aus der nach Korollar 21.8 eindeutigen Zerlegung $v = u + w$ mit $u \in U$ und $w \in U^\perp$ zuordnet, heißt *orthogonale Projektion* auf U .

Wir erwähnen die folgenden Spezialfälle für abgeschlossene Teilmengen in einem Hilbertraum.

Korollar 21.10. *Es sei V ein \mathbb{K} -Hilbertraum und sei $T \subseteq V$ eine nichtleere konvexe abgeschlossene Teilmenge. Dann enthält T einen eindeutigen Punkt $P \in T$, in dem die Norm $\|P\|$ (unter allen Punkten aus T) das Minimum annimmt.*

Beweis. Dies ist ein Spezialfall von Lemma 21.6. \square

Korollar 21.11. *Es sei V ein \mathbb{K} -Hilbertraum und sei $U \subseteq V$ ein abgeschlossener Untervektorraum. Dann gibt es zu jedem Punkt $Q \in V$ einen eindeutigen Punkt $P \in U$, für den der Abstand von Q zu Punkten aus U minimal wird.*

Beweis. Dies ist ein Spezialfall von Korollar 21.7. \square

Korollar 21.12. *Es sei V ein \mathbb{K} -Hilbertraum und sei $U \subseteq V$ ein abgeschlossener Untervektorraum. Dann gibt es zu jedem $v \in V$ eine eindeutige Darstellung*

$$v = u + w$$

mit $u \in U$ und $w \in U^\perp$.

Beweis. Dies ist ein Spezialfall von Korollar 21.8. □

Insbesondere gibt es zu einem abgeschlossenen Untervektorraum $U \subseteq V$ in einem Hilbertraum die orthogonale Projektion $p_U: V \rightarrow U$.

21.3. Topologische Eigenschaften.

Lemma 21.13. *Es sei V ein \mathbb{K} -Hilbertraum und sei $U \subseteq V$ ein abgeschlossener Untervektorraum mit dem orthogonalen Komplement U^\perp . Dann gelten folgenden Aussagen.*

- (1) U^\perp ist ebenfalls abgeschlossen.
- (2) Es gilt

$$v = p_U(v) + p_{U^\perp}(v).$$

- (3) p_U ist linear und stetig.

Beweis. (1) Siehe Aufgabe 21.10.

(2) Klar.

(3) Eine mehrfache Anwendung von (2) liefert

$$\begin{aligned} & p_U(a_1v_1 + a_2v_2) + p_{U^\perp}(a_1v_1 + a_2v_2) \\ &= a_1v_1 + a_2v_2 \\ &= a_1p_U(v_1) + a_1p_{U^\perp}(v_1) + a_2p_U(v_2) + a_2p_{U^\perp}(v_2) \\ &= a_1p_U(v_1) + a_2p_U(v_2) + a_1p_{U^\perp}(v_1) + a_2p_{U^\perp}(v_2). \end{aligned}$$

Die Linearität folgt durch Vergleich der Summanden in U und in U^\perp .
Wegen

$$\begin{aligned} \|v\|^2 &= \langle v, v \rangle \\ &= \langle p_U(v) + p_{U^\perp}(v), p_U(v) + p_{U^\perp}(v) \rangle \\ &= \langle p_U(v), p_U(v) \rangle + \langle p_{U^\perp}(v), p_{U^\perp}(v) \rangle \\ &= \|p_U(v)\|^2 + \|p_{U^\perp}(v)\|^2 \end{aligned}$$

ist

$$\|p_U(v)\| \leq \|v\|,$$

woraus die Stetigkeit mit Satz 15.12 folgt. □

Die folgende Aussage besagt, dass eine stetige Linearform auf einem Hilbertraum einen Gradienten besitzt. Im endlichdimensionalen Fall, in dem die Stetigkeit automatisch erfüllt ist, folgt dies auch aus Lemma 47.5 (Analysis

(Osnabrück 2021-2023)) (3). Für eine andere Formulierung dieses Sachverhaltes, den man den Darstellungssatz von Riesz nennt, siehe Aufgabe 21.12.

Lemma 21.14. *Es sei V ein \mathbb{K} -Hilbertraum und sei*

$$\varphi: V \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine stetige Linearform. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Vektor $x \in V$ mit

$$\varphi(v) = \langle v, x \rangle$$

für alle $v \in V$.

Beweis. Bei der Nullabbildung ist $x = 0$ zu nehmen, sei also φ nicht die Nullabbildung. Es sei $z \in V$ mit $\varphi(z) \neq 0$ und sei $U = \text{kern } \varphi$. Durch Multiplikation mit einem Skalar können wir davon ausgehen, dass $\varphi(z)$ eine positive reelle Zahl ist. Wegen der Stetigkeit und der Linearität ist U ein abgeschlossener Untervektorraum von V . Das orthogonale Komplement U^\perp ist eindimensional: Zu $w, w' \in U^\perp$ gibt es $a \in \mathbb{K}$ mit $\varphi(w') = a\varphi(w)$, daher ist $w' - aw \in U$ und wegen der Orthogonalität ist $w' - aw = 0$. Wir schreiben

$$z = p_U(z) + y$$

mit $p_U(z) \in U$ und $y \in U^\perp$ im Sinne von Korollar 21.9. Es ist $\varphi(z) = \varphi(y)$. Wir setzen

$$x := \frac{\varphi(y)}{\|y\|^2} y,$$

dies sichert

$$\begin{aligned} \langle x, x \rangle &= \left\langle \frac{\varphi(y)}{\|y\|^2} y, \frac{\varphi(y)}{\|y\|^2} y \right\rangle \\ &= \frac{\varphi(y)^2}{\|y\|^4} \langle y, y \rangle \\ &= \frac{\varphi(y)}{\|y\|^2} \varphi(y) \\ &= \varphi(x). \end{aligned}$$

Für $v \in V$ mit der kanonischen Zerlegung

$$v = u + w$$

ist dann

$$\begin{aligned} \langle v, x \rangle &= \langle u + w, x \rangle \\ &= \langle w, x \rangle \\ &= \langle ax, x \rangle \\ &= a \langle x, x \rangle \\ &= a\varphi(x) \\ &= \varphi(w) \\ &= \varphi(u + w) \\ &= \varphi(v). \end{aligned}$$

□

Korollar 21.15. *Es sei (X, \mathcal{A}, μ) ein σ -endlicher Maßraum und $L^2(X)$ der zugehörige Lebesgueraum der quadratintegrierbaren Funktionen. Es sei*

$$\varphi: L^2(X) \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine stetige Linearform. Dann gibt es eine quadratintegrierbare Funktion $g \in L^2(X)$ mit

$$\varphi(f) = \int_X f \bar{g} d\mu.$$

Beweis. Dies folgt aus Lemma 21.3 und aus Lemma 21.14. □

Lemma 21.16. *Es sei V ein \mathbb{K} -Hilbertraum und $T \subseteq V$ eine Teilmenge. Dann erzeugt T genau dann einen dichten Untervektorraum in V , wenn die Eigenschaft*

$$\langle v, w \rangle = 0$$

für alle $w \in T$ nur für $v = 0$ gilt.

Beweis. Es erzeuge zuerst T einen dichten Untervektorraum U und sei $v \in V$ gegeben mit

$$\langle v, w \rangle = 0$$

für alle $w \in T$. Diese Eigenschaft überträgt sich auf alle $w \in U$. Wegen der Dichtheit von U gibt es eine Folge $w_n \in U$, die gegen v konvergiert. Dann konvergiert wegen der Stetigkeit des Skalarproduktes die Folge $\langle v, w_n \rangle = 0$ gegen $\langle v, v \rangle = 0$. also ist $v = 0$.

Es erzeuge nun T einen Untervektorraum U , der nicht dicht sei, es sei

$$W = \bar{U}$$

und sei $z \in V \setminus W$. Es sei $z = y + v$ die Zerlegung im Sinne von Korollar 21.9 mit $y \in W$ und $v \in W^\perp$. Dann ist

$$v \neq 0,$$

dieser Vektor steht aber senkrecht auf allen Vektoren aus W . □

21. ARBEITSBLATT

21.1. Übungsaufgaben.

Wir erinnern an einige Konzepte, die aus der linearen Algebra bekannt sein dürften. Wichtig ist dabei, dass sie für jeden Vektorraum mit einem Skalarprodukt definiert sind, auch wenn in der linearen Algebra der endlichdimensionale Fall im Vordergrund steht.

Es sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum mit Skalarprodukt und $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Dann heißt

$$U^\perp = \{v \in V \mid \langle v, u \rangle = 0 \text{ für alle } u \in U\}$$

das *orthogonale Komplement* von U .

Es sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum mit einem Skalarprodukt. Eine Basis $v_i, i \in I$, von V heißt *Orthogonalbasis*, wenn

$$\langle v_i, v_j \rangle = 0 \text{ für } i \neq j$$

gilt.

Aufgabe 21.1. Es sei V ein Vektorraum über \mathbb{K} mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ und sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Zeige, dass das orthogonale Komplement ebenfalls ein Untervektorraum von V ist.

Aufgabe 21.2. Es sei V ein Vektorraum über \mathbb{K} mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ und sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Es sei $u_i, i \in I$, ein Erzeugendensystem von U . Zeige, dass ein Vektor $v \in V$ genau dann zum orthogonalen Komplement U^\perp gehört, wenn

$$\langle v, u_i \rangle = 0$$

für alle $i \in I$ ist.

Aufgabe 21.3. Es sei V ein Vektorraum über \mathbb{K} mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ und sei $v_i, i \in I$, eine Orthogonalbasis von V . Zu jeder Teilmenge $J \subseteq I$ sei der von $v_i, i \in J$, erzeugte Untervektorraum mit U_J bezeichnet. Zeige, dass das orthogonale Komplement von U_J gleich $U_{I \setminus J}$ ist.

Aufgabe 21.4. Es sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum mit Skalarprodukt und seien $U_1, U_2 \subseteq V$ Untervektorräume. Zeige, dass für die orthogonalen Komplemente die Gleichheit

$$(U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp$$

gilt.

Aufgabe 21.5. Es sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$. Zeige die folgenden Aussagen.

- (1) Zu Untervektorräumen $U \subseteq U' \subseteq V$ ist

$$U^\perp \supseteq U'^\perp.$$

- (2) Es ist $0^\perp = V$ und $V^\perp = 0$.
 (3) Es sei V endlichdimensional. Dann ist

$$(U^\perp)^\perp = U.$$

- (4) Es sei V endlichdimensional. Dann ist

$$\dim(U^\perp) = \dim(V) - \dim(U).$$

Aufgabe 21.6. Es sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum mit einem Skalarprodukt. Zeige, dass zu einem fixierten Vektor $w \in V$ die Abbildung

$$V \longrightarrow \mathbb{K}, v \longmapsto \langle v, w \rangle,$$

stetig ist.

Aufgabe 21.7. Es sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum mit einem Skalarprodukt. Zeige, dass die Abbildung

$$V \times V \longrightarrow \mathbb{K}, (v, w) \longmapsto \langle v, w \rangle,$$

stetig ist, wenn $V \times V$ die Produkttopologie trägt.

Aufgabe 21.8. Zeige, dass ein \mathbb{C} -Vektorraum mit einem Skalarprodukt genau dann ein Hilbertraum ist, wenn er als reeller Vektorraum ein Hilbertraum ist.

Aufgabe 21.9. Zeige, dass ein Untervektorraum $U \subseteq V$ eines \mathbb{K} -Hilbertraumes genau dann ein Hilbertraum ist, wenn er abgeschlossen in V ist.

Aufgabe 21.10. Es sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum mit Skalarprodukt und sei $U \subseteq V$ ein Untervektorraum. Zeige, dass das orthogonale Komplement U^\perp ein abgeschlossener Untervektorraum ist.

Aufgabe 21.11. Es sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum mit Skalarprodukt und sei $U \subseteq V$ ein abgeschlossener Untervektorraum. Zeige

$$(U^\perp)^\perp = U.$$

Aufgabe 21.12.*

Es sei V ein \mathbb{K} -Hilbertraum und sei V' der stetige Dualraum von V . Zeige, dass die natürliche lineare Abbildung

$$V \longrightarrow V', w \longmapsto (v \mapsto \langle v, w \rangle),$$

eine isometrische Isomorphie von Hilberträumen ist.

Aufgabe 21.13. Es sei (X, \mathcal{A}, μ) ein σ -endlicher Maßraum und sei $L^2(X)$ der zugehörige Vektorraum der quadratintegrierbaren Funktionen auf X . Es sei $T \subseteq X$ eine messbare Teilmenge. Zeige, dass

$$L^2(T) \subseteq L^2(X)$$

ein abgeschlossener Untervektorraum ist und beschreibe die orthogonale Projektion

$$L^2(X) \longrightarrow L^2(T).$$

Wie kann man $(L^2(T))^\perp$ beschreiben?

Aufgabe 21.14. Es sei (X, \mathcal{A}, μ) ein σ -endlicher Maßraum und sei $L^2(X)$ der zugehörige Vektorraum der quadratintegrierbaren Funktionen auf X . Es sei $T \subseteq X$ eine messbare Teilmenge mit $\mu(T) < \infty$.

(1) Zeige, dass

$$\varphi_T: L^2(X) \longrightarrow \mathbb{K}, f \longmapsto \int_T f d\mu,$$

eine stetige Linearform ist.

(2) Man gebe explizit ein $g \in L^2(X)$ an, dass φ_T im Sinne von Korollar 21.15 beschreibt.

21.2. Aufgaben zum Abgeben.

Aufgabe 21.15. (3 Punkte)

Es sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum mit Skalarprodukt und es seien

$$U \subseteq W \subseteq V$$

vollständige Untervektorräume. Es bezeichne p_U^V die orthogonale Projektion von U auf V . Zeige

$$p_U^V = p_U^W \circ p_W^V.$$

Aufgabe 21.16. (2 Punkte)

Es sei (X, \mathcal{A}, μ) ein σ -endlicher Maßraum und sei $L^2(X)$ der zugehörige Vektorraum der quadratintegrierbaren Funktionen auf X . Es seien $T_1, T_2 \subseteq X$ messbare Teilmengen mit $\mu(T_1), \mu(T_2) < \infty$ mit den zugehörigen Indikatorfunktionen e_{T_1} bzw. e_{T_2} . Zeige, dass diese Funktionen genau dann orthogonal zueinander sind, wenn $\mu(T_1 \cap T_2) = 0$ ist.

Aufgabe 21.17. (2 Punkte)

Es sei \mathbb{N} mit dem Zählmaß versehen und sei T die Menge der Standardvektoren $e_n, n \in \mathbb{N}$, in $L^2(\mathbb{N})$. Beweise Lemma 21.16 in diesem Fall direkt.

22. VORLESUNG - ORTHONORMALSYSTEME

22.1. Orthonormalsysteme.

Definition 22.1. Es sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$. Eine Familie von Vektoren $v_i, i \in I$, von V heißt *Orthonormalsystem*, wenn

$$\langle v_i, v_i \rangle = 1 \text{ für alle } i \in I \text{ und } \langle v_i, v_j \rangle = 0 \text{ für } i \neq j$$

gilt.

Zu einem gegebenen Orthonormalsystem $v_i, i \in I$, und einem Vektor $v \in V$ spielen die Koeffizienten $\langle v, v_i, \rangle$ eine wichtige Rolle, man spricht von den *Fourierkoeffizienten* des Vektors bezüglich des Systems, wobei diese Sprechweise insbesondere im Kontext von Fourierreihen verwendet wird. Eine wichtige Frage ist, in welcher Beziehung v zu $\sum_{i \in I} \langle v, v_i \rangle v_i$ steht, wobei bei I unendlich zuerst zu klären ist, in welchem Sinne eine solche unendlich Summe verstanden werden kann. Im endlichen Fall haben wir folgende Beschreibung, auf die man weitere Resultate zurückführen kann.

Lemma 22.2. *Es sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$, sei $v_i, i \in E$, ein endliches Orthonormalsystem mit dem davon erzeugten Untervektorraum U . Dann gilt für die orthogonale Projektion*

$$p_U(v) = \sum_{i \in E} \langle v, v_i \rangle v_i.$$

Beweis. Es sei

$$w = v - \sum_{i \in E} \langle v, v_i \rangle v_i,$$

es ist nach Korollar 21.8 lediglich zu zeigen, dass w orthogonal zu den v_j ist. Dies ergibt sich direkt aus

$$\begin{aligned} \langle w, v_j \rangle &= \left\langle v - \sum_{i \in E} \langle v, v_i \rangle v_i, v_j \right\rangle \\ &= \langle v, v_j \rangle - \sum_{i \in E} \langle \langle v, v_i \rangle v_i, v_j \rangle \\ &= \langle v, v_j \rangle - \langle v, v_j \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Beispiel 22.3. Es sei E eine endliche Menge und

$$V = \mathbb{K}^E \cong \mathbb{K}^{\#(E)}$$

die Menge der \mathbb{K} -wertigen Funktionen auf E , versehen mit dem Standardskalarprodukt. Eine Funktion $f \in V$ kann einfach durch eine vollständige Wertetabelle beschrieben werden. Es kann aber auch sinnvoll sein, die Funktion f durch eine Funktion g aus einem vorgegebenen Untervektorraum $U \subseteq V$

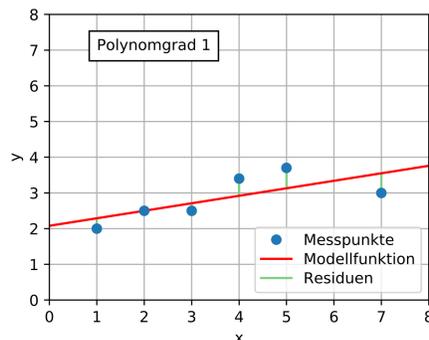
zu approximieren. Dabei liefert das Skalarprodukt und die zugehörige orthogonale Projektion auf U ein naheliegendes Hilfsmittel, um eine optimale Approximation zu finden. Nach Korollar 21.7 ist $p_U(f)$ diejenige Funktion, die unter allen Funktionen aus U zu f den minimalen Abstand besitzt, wobei der Abstand zu f über das Skalarprodukt gegeben ist, also durch

$$\|g - f\|^2 = \sum_{i \in E} |g_i - f_i|^2.$$

Wenn $g_j, j \in J$, eine Orthonormalbasis von U ist, so ist

$$g = p_U(f) = \sum_{j \in J} \langle f, g_j \rangle g_j$$

nach Lemma 22.2 die beste Approximation. Das so bestimmte g minimiert also die Summe der einzelnen Differenzquadrate, man spricht von der *Methode der kleinsten Fehlerquadrate*.



Eine typische Anwendung ist, wenn E Messtellen repräsentiert, etwa $E \subseteq \mathbb{R}^d$, und f_e Messergebnisse, die eventuell fehlerhaft sein können. Man weiß aus physikalischen Gründen, dass die Abhängigkeit einer gewissen Gesetzmäßigkeit gehorchen muss, beispielsweise ein linearer Zusammenhang sein muss oder als Flugbahn eines Planeten eine Ellipse sein muss oder ähnliches. Diese Gesetzmäßigkeit legt den (typischerweise niedrigdimensionalen) Untervektorraum U fest, in dem nach einer optimalen Approximation gesucht wird, das den Messergebnissen möglichst nahe kommt.

Beispiel 22.4. Von einer unbekanntem Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei der Datensatz $(1, 11), (4, 20), (6, 23)$ gegeben und es sei bekannt, dass f eine affin-lineare Funktion sein muss. Der Datensatz beruht auf Messungen, in denen Fehler und Ungenauigkeiten vorkommen können, die drei Punkte liegen nicht wirklich auf einer Geraden. Es wird nach der affin-linearen Funktion $ax + b$ gesucht, die gut zu den Daten passt. Wir betrachten die Abbildung

$$\Psi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, (a, b) \longmapsto (a + b, 4a + b, 6a + b),$$

die einem Parameterpaar (a, b) , das die affin-lineare Funktion $ax + b$ repräsentiert, die Auswertung an den drei Punkten $(1, 4, 6)$ zuordnet. Dabei ist Ψ eine injektive lineare Abbildung und das Bild $U = \text{bild } \varphi$ ist ein zweidimensionaler Untervektorraum von \mathbb{R}^3 . Diese Ebene steht senkrecht zum Vektor $\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$, eine Basis ist durch $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ gegeben (die unter Ψ von der

Basis $\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ des \mathbb{R}^2 herrührt). Die optimale Approximation (im Sinne der euklidischen Norm bzw. im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate) ist

die orthogonale Projektion des Wertetupels $\begin{pmatrix} 11 \\ 20 \\ 23 \end{pmatrix}$ auf die Ebene. Dies führt

zum linearen Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 11 \\ 20 \\ 23 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

mit den Lösungen $\alpha = \frac{218}{95}$, $\beta = \frac{901}{190}$ und $\gamma = \frac{9}{38}$. Daher ist

$$\begin{aligned} p_U \begin{pmatrix} 11 \\ 20 \\ 23 \end{pmatrix} &= \frac{218}{95} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{901}{190} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{190} \begin{pmatrix} 2180 \\ 3575 \\ 4505 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{38} \begin{pmatrix} 436 \\ 715 \\ 901 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Der entsprechende Punkt auf dem \mathbb{R}^2 ist

$$\begin{aligned} \frac{218}{95} \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix} + \frac{901}{190} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} &= \frac{1}{190} \begin{pmatrix} -436 + 901 \\ 2616 - 901 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{190} \begin{pmatrix} 465 \\ 1715 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{38} \begin{pmatrix} 93 \\ 343 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die beste Approximation ist also

$$f(x) = \frac{93}{38}x + \frac{343}{38}.$$

Es ist $f(1) = \frac{436}{38} \sim 11,473$, $f(4) = \frac{715}{38} \sim 18,815$ und $f(6) = \frac{901}{38} \sim 23,710$.

Satz 22.5. Es seien x_1, \dots, x_n verschiedene reelle Zahlen, $n \geq 2$, und y_1, \dots, y_n reelle Zahlen. Es sei¹⁰ $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$ und $\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}$. Dann ist die affin-lineare Funktion $ax + b$ mit

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})y_i}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

und

$$b = \bar{y} - a\bar{x}$$

die optimale lineare Approximation für den Datensatz

$$f(x_i) = y_i$$

im Sinne der minimalen Fehlerquadrate. D.h. die Summe der Fehlerquadrate $\sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2$ wird für die angegebenen Koeffizienten a und b minimal.

Beweis. Wir betrachten die Abbildung

$$\psi: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^n, (a, b) \longmapsto (ax_1 + b, \dots, ax_n + b).$$

Diese Abbildung ist linear und injektiv, da

$$\psi(1, 0) = (x_1, \dots, x_n) =: v_1$$

und

$$\psi(0, 1) = (1, \dots, 1) =: v_2$$

linear unabhängig sind. Es sei

$$U = \text{bild } \psi = \langle v_1, v_2 \rangle \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Es geht darum, die orthogonale Projektion von $y = (y_1, \dots, y_n)$ auf U zu bestimmen. Der Vektor

$$u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

ist normiert. Wegen

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \bar{x} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

bildet

$$u_1 := \frac{v_1 - \bar{x}v_2}{\|v_1 - \bar{x}v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}} \begin{pmatrix} x_1 - \bar{x} \\ \vdots \\ x_n - \bar{x} \end{pmatrix}$$

zusammen mit u_2 eine Orthonormalbasis von U . Es entspricht u_2 der konstanten Funktion $\frac{1}{\sqrt{n}}$ und u_1 der affin-linearen Funktion $\frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}(x - \bar{x})$.

Nach Lemma 22.2 ist

$$p_U(y) = \langle y, u_1 \rangle u_1 + \langle y, u_2 \rangle u_2,$$

¹⁰ \bar{x} bzw. \bar{y} bezeichnen also den Durchschnitt der Messstellen bzw. der Messwerte.

dabei ist

$$\langle y, u_1 \rangle = \frac{\sum_{i=1}^n y_i (x_i - \bar{x})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}}$$

und

$$\langle y, u_2 \rangle = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{\sqrt{n}}.$$

Somit ist die optimale affin-lineare Funktion gleich

$$\frac{\sum_{i=1}^n y_i (x_i - \bar{x})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}} (x - \bar{x}) + \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{n},$$

also ist

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n y_i (x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

und

$$b = \bar{y} - a\bar{x}.$$

□

Den Graphen der approximierenden affin-linearen Funktion im vorstehenden Satz nennt man *Ausgleichsgerade*.

Beispiel 22.6. In der Situation von Beispiel 22.4 kommt man mit Satz 22.5 deutlich schneller ans Ziel. Es ist

$$\bar{x} = \frac{1 + 4 + 6}{3} = \frac{11}{3}$$

und daher

$$\begin{aligned} a &= \frac{(1 - \frac{11}{3}) \cdot 11 + (4 - \frac{11}{3}) \cdot 20 + (6 - \frac{11}{3}) \cdot 23}{(1 - \frac{11}{3})^2 + (4 - \frac{11}{3})^2 + (6 - \frac{11}{3})^2} \\ &= \frac{-\frac{8}{3} \cdot 11 + \frac{1}{3} \cdot 20 + (\frac{7}{3}) \cdot 23}{(-\frac{8}{3})^2 + (\frac{1}{3})^2 + (\frac{7}{3})^2} \\ &= 3 \cdot \frac{-88 + 20 + 161}{64 + 1 + 49} \\ &= 3 \cdot \frac{93}{114} \\ &= \frac{93}{38} \end{aligned}$$

und

$$b = \bar{y} - a\bar{x} = 18 - \frac{93}{38} \cdot \frac{11}{3} = \frac{2052 - 1023}{114} = \frac{1029}{114} = \frac{343}{38}.$$

22.2. Vollständige Orthonormalsysteme.

Definition 22.7. Ein Orthonormalsystem $v_i, i \in I$, in einem \mathbb{K} -Vektorraum V mit Skalarprodukt heißt *vollständig* oder eine *Hilbertbasis*, wenn der von den v_i erzeugte Untervektorraum dicht in V ist.

Die folgende Aussage heißt *Besselsche Abschätzung*.

Lemma 22.8. *Es sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ und sei $v_i, i \in I$, ein Orthonormalsystem. Dann ist für jeden Vektor $v \in V$ die Familie $|\langle v, v_i \rangle|^2, i \in I$, summierbar und es gilt*

$$\sum_{i \in I} |\langle v, v_i \rangle|^2 \leq \|v\|^2.$$

Beweis. Für jede endliche Teilmenge $E \subseteq I$ schreiben wir

$$v = \sum_{i \in E} \langle v, v_i \rangle v_i + w$$

(dabei ist w orthogonal zu $\langle v_i, i \in E \rangle$ und hängt von E ab) und erhalten aufgrund der Orthogonalitätsbeziehungen

$$\begin{aligned} \sum_{i \in E} |\langle v, v_i \rangle|^2 &= \sum_{i \in E} |\langle v, v_i \rangle|^2 \langle v_i, v_i \rangle \\ &\leq \sum_{i \in E} \langle \langle v, v_i \rangle v_i, \langle v, v_i \rangle v_i \rangle + \langle w, w \rangle \\ &= \left\langle \sum_{i \in E} \langle v, v_i \rangle v_i + w, \sum_{i \in E} \langle v, v_i \rangle v_i + w \right\rangle \\ &= \langle v, v \rangle \\ &= \|v\|^2. \end{aligned}$$

Nach Aufgabe 17.14 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)) ist die Familie summierbar und ihre Summe ist durch $\|v\|^2$ beschränkt. \square

Korollar 22.9. *Es sei V ein \mathbb{K} -Hilbertraum und sei $v_i, i \in I$, ein Orthonormalsystem. Dann ist zu einem Vektor $v \in V$ die Vektorenfamilie $\langle v, v_i \rangle v_i, i \in I$, summierbar.*

Beweis. Für jede endliche Teilmenge $E \subseteq I$ ist

$$\left\| \sum_{i \in E} \langle v, v_i \rangle v_i \right\|^2 = \sum_{i \in E} \|\langle v, v_i \rangle v_i\|^2 = \sum_{i \in E} |\langle v, v_i \rangle|^2,$$

was nach Lemma 22.8 durch $\|v\|^2$ beschränkt ist. Daher ist die Familie eine Cauchy-Familie und somit wegen der Vollständigkeit des Raumes nach Lemma 19.3 summierbar. \square

Im Allgemeinen gibt es keinen direkten Zusammenhang zwischen v und $\sum_{i \in I} \langle v, v_i \rangle v_i$, man denke etwa an kleine Orthonormalsysteme. Der folgende Satz charakterisiert die vollständigen Orthonormalsysteme.

Satz 22.10. *Es sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ und sei $v_i, i \in I$, ein Orthonormalsystem. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

- (1) *Die Familie ist vollständig.*
- (2) *Für jedes $v \in V$ gilt*

$$v = \sum_{i \in I} \langle v, v_i \rangle v_i.$$

- (3) *Für jedes $v \in V$ gilt*

$$\|v\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle v, v_i \rangle|^2.$$

Beweis. Von (1) nach (2). Die Vollständigkeit des Orthonormalsystems bedeutet, dass es zu jedem Vektor $v \in V$ und jedem $\epsilon > 0$ ein Koeffiziententupel a_i mit einer endlichen Trägermenge $E \subseteq I$ mit

$$\|v - \sum_{i \in E} a_i v_i\| \leq \epsilon$$

gibt. Nach Lemma 22.2 erfüllt erst recht $\sum_{i \in E} \langle v, v_i \rangle v_i$ diese Eigenschaft. Dies heißt aber, dass die Summe $\sum_{i \in I} \langle v, v_i \rangle v_i$ gleich v ist. Von (2) nach (1) ergibt sich aus Lemma 19.4.

Zum Nachweis der Äquivalenz von (2) und (3) ziehen wir für eine endliche Teilmenge $E \subseteq I$ die Gleichung

$$\|v - \sum_{i \in E} \langle v, v_i \rangle v_i\|^2 = \|v\|^2 - \sum_{i \in E} |\langle v, v_i \rangle|^2$$

heran. (2) bedeutet, dass die linke Seite beliebig klein wird, (3) bedeutet, dass die rechte Seite beliebig klein wird, daher sind die Eigenschaften äquivalent. \square

Die Gleichung in (3) des vorstehenden Satzes nennt man auch *Parsevalsche Gleichung*.

Lemma 22.11. *Es sei $v_i, i \in I$, ein Orthonormalsystem in einem \mathbb{K} -Hilbertraum V . Dann kann man das System zu einem vollständigen Orthonormalsystem ergänzen.*

Beweis. Siehe Aufgabe 22.12. \square

Bemerkung 22.12. In einem \mathbb{K} -Vektorraum V mit Skalarprodukt kann man ein gegebenes System von linear unabhängigen Vektoren $v_n, n \in \mathbb{N}$, mit Hilfe des Orthonormalisierungsverfahrens im endlichdimensionalen Fall in ein abzählbar unendliches Orthonormalsystem überführen. Speziell kann man in einem separablen Hilbertraum aus jeder linear unabhängigen Familie, die einen dichten Untervektorraum erzeugt, ein abzählbares vollständiges Orthonormalsystem gewinnen.

Definition 22.13. Es sei V ein \mathbb{K} -Hilbertraum und sei $v_i, i \in I$, ein vollständiges Orthonormalsystem. Dann nennt man zu $v \in V$ die Darstellung

$$v = \sum_{i \in I} \langle v, v_i \rangle v_i$$

die *Fourierentwicklung* von v und die rechte Seite eine *Fouriersumme*. Die Koeffizienten $\langle v, v_i \rangle$ heißen *Fourierkoeffizienten*.

Im separablen Fall, wenn das vollständige Orthonormalsystem abzählbar ist und durch $v_n, n \in \mathbb{N}$, (oder \mathbb{Z} als geordnete Indexmenge) gegeben ist, so nennt man die Darstellung

$$v = \sum_{n \in \mathbb{N}} \langle v, v_n \rangle v_n$$

auch die Fourierreihe zu v bezüglich des gegebenen Systems. Die Sprechweise wird insbesondere bei periodischen Funktionen der Periodenlänge 1 mit dem trigonometrischen Orthonormalsystem verwendet, siehe insbesondere Satz 23.6. Bei anderer Periodenlänge ist der Sprachgebrauch nicht einheitlich.

22. ARBEITSBLATT

22.1. Übungsaufgaben.

Aufgabe 22.1. Bestimme die optimale Approximation für den Datensatz $f(0) = 0, f(1) = 2, f(2) = 2$, durch eine konstante Funktion bezüglich der folgenden Normen des \mathbb{R}^n .

- (1) Summennorm,
- (2) euklidische Norm (L^2 -Norm),
- (3) Maximumsnorm,
- (4) L^p -Norm für $p \geq 1$.

Aufgabe 22.2. Es sei x_1, \dots, x_n verschiedene reelle Zahlen und seien y_1, \dots, y_n reelle Zahlen. Bestimme die optimale Approximation für den Datensatz $f(x_i) = y_i$ durch eine konstante Funktion bezüglich der folgenden Normen des \mathbb{R}^n .

- (1) Summennorm,
- (2) euklidische Norm (L^2 -Norm),
- (3) Maximumsnorm,
- (4) L^p -Norm für $p \geq 1$.

Wann gibt es eine „geschlossene Formel“, wann nicht? Wie sieht es bei $n = 1, 2, 3$ aus?

Aufgabe 22.3. Bestimme in Beispiel 22.4 die optimale affin-lineare Approximation im Sinne der Summe der kleinsten Quadrate mit Lemma 22.2 unter Verwendung einer Orthonormalbasis von U .

Aufgabe 22.4.*

Beweise Satz 22.5 analytisch.

Aufgabe 22.5. Bestimme in Beispiel 22.4 die optimale affin-lineare Approximation im Sinne der Summennorm.

Aufgabe 22.6. Bestimme in Beispiel 22.4 die optimale affin-lineare Approximation im Sinne der Maximumsnorm.

Aufgabe 22.7. Es seien x_1, \dots, x_n verschiedene reelle Zahlen, $n \geq 2$, und y_1, \dots, y_n reelle Zahlen. Bestimme analytisch die optimale affin-lineare Approximation $ax + b$ für den Datensatz $f(x_i) = y_i$ bezüglich der p -Norm im \mathbb{R}^n für p eine positive gerade Zahl.

Aufgabe 22.8. Es seien x_1, \dots, x_n verschiedene reelle Zahlen, $n \geq 2$, und y_1, \dots, y_n reelle Zahlen. Es sei $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$ und $\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}$. Zeige, dass (\bar{x}, \bar{y}) auf der optimalen linearen Approximation im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate für den Datensatz liegt.

Aufgabe 22.9. Bestimme die optimale affin-lineare Approximation im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate für die Messdaten $(2, 8)$, $(5, 14)$, $(7, 20)$.

Aufgabe 22.10. Bestimme die optimale affin-lineare Approximation im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate für die Messdaten

$$(x_1, 0), \dots, (x_{i-1}, 0), (x_i, 1), (x_{i+1}, 0), \dots, (x_n, 0).$$

Aufgabe 22.11. Für die Bewegung eines Teilchens in der Ebene liegen zu verschiedenen Zeitpunkten die gemessenen Ortspunkte gemäß der Tabelle

| | | | |
|--------|--------|--------|--------|
| t | 0 | 1 | 2 |
| $P(t)$ | (5, 1) | (5, 2) | (4, 3) |

vor. Aus theoretischen Gründen ist klar, dass es sich um eine Kreisbewegung um den Nullpunkt mit konstanter Geschwindigkeit handeln müsste, die sich

zum Zeitpunkt 0 auf der x -Achse befinden müsste. Die Bewegung sollte also von der Form

$$g(t) = (a \cos(ct), a \sin(ct))$$

sein. Bestimme (a, c) derart, dass die zugehörige Kreisbewegung mit den Messdaten im Sinne der kleinsten Quadrate optimal übereinstimmt.

Aufgabe 22.12. Es sei $v_i, i \in I$, ein Orthonormalsystem in einem \mathbb{K} -Hilbertraum V . Zeige, dass man das System zu einem vollständigen Orthonormalsystem ergänzen kann.

Die folgende Aufgabe verallgemeinert Lemma 22.2.

Aufgabe 22.13. Es sei V ein \mathbb{K} -Hilbertraum und sei $v_i, i \in I$, ein Orthonormalsystem mit dem davon erzeugten Untervektorraum U und dem zugehörigen Abschluss $W = \overline{U}$. Dann gilt für die orthogonale Projektion

$$p_W(v) = \sum_{i \in I} \langle v, v_i \rangle v_i.$$

Aufgabe 22.14. Es sei $v_i, i \in I$, ein vollständiges Orthonormalsystem in einem Hilbertraum V . Es seien $v, w \in V$ Vektoren mit den Darstellungen $v = \sum_{i \in I} c_i v_i$ und $w = \sum_{i \in I} d_i v_i$. Zeige

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i \in I} c_i \overline{d_i}.$$

Aufgabe 22.15. Zeige, dass zwei separable Hilberträume von unendlicher Dimension zueinander isometrisch isomorph sind.

22.2. Aufgaben zum Abgeben.

Aufgabe 22.16. (3 Punkte)

Bestimme die optimale affin-lineare Approximation im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate für die Messdaten $(-2, 10), (3, 5), (4, 8), (7, 15)$.

Aufgabe 22.17. (5 Punkte)

Bestimme die optimale Approximation durch ein quadratisches Polynom vom Grad ≤ 2 im Sinne der kleinsten Fehlerquadrate für die Messdaten $(-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 10)$.

Aufgabe 22.18. (5 Punkte)

Für die Bewegung eines Teilchens in der Ebene liegen zu verschiedenen Zeitpunkten die gemessenen Ortspunkte gemäß der Tabelle

| | | | | |
|--------|--------|-----------------|-----------|------------------|
| t | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | π | $\frac{3\pi}{2}$ |
| $P(t)$ | (9, 0) | (2, 30) | (-21, -1) | (1, -32) |

vor. Aus theoretischen Gründen ist klar, dass es sich um eine Bewegung auf einer Ellipse mit konstanter Geschwindigkeit handeln müsste und die Bewegung durch eine Funktion der Form

$$g(t) = (a \cos(ct), b \sin(ct))$$

modelliert werden sollte. Bestimme (a, b, c) derart, dass die zugehörige Bewegung mit den Messdaten im Sinne der kleinsten Quadrate optimal übereinstimmt.

Aufgabe 22.19. (5 Punkte)

Es sei V ein unendlichdimensionaler \mathbb{K} -Hilbertraum. Zeige, dass V keine Orthonormalbasis besitzt.

23. VORLESUNG - FOURIERREIHEN

23.1. **Fourierreihen.**

Unter den periodischen Funktionen spielen die trigonometrischen Funktionen $\cos x$ und $\sin x$ bzw. die komplexe Exponentialfunktion e^{iz} eine besondere Rolle, die die Periode 2π haben. Neben diesen enthält man weitere periodische Funktionen, indem man das Argument x bzw. z durch ganzzahlige Vielfache nx bzw. nz ersetzt. Diese haben die kleineren Perioden $\frac{2\pi}{n}$, aber 2π bleibt eine Periode. Im Rahmen der Fourieranalysis (man spricht auch von harmonischer Analysis) möchte man periodische Funktionen als Reihen von trigonometrischen Funktionen darstellen. Eine periodische Funktion mit Periode T ist vollständig bestimmt durch ihren Verlauf auf dem Intervall $[0, T[$. Wir arbeiten im Kontext von Hilberträumen und insbesondere in $L^2([0, T])$, der Übergang vom halboffenen zum abgeschlossenen Intervall ist für diesen Funktionenraum unerheblich. Besonders wichtig sind die Periodenlängen 1 und 2π , wir werden zumeist eine beliebige Periodenlänge T zulassen und dann $\omega = \frac{2\pi}{T}$ setzen.

Die Funktionen $e^{\frac{2\pi}{T}int}$ sind auf $[0, T]$ quadratintegrierbar, wie sofort aus der Beschränktheit folgt. Daher sichert Lemma 21.3, dass die folgenden Definitionen sinnvoll sind. Insbesondere kann man sie auf messbare beschränkte periodische Funktionen und auf stückweise stetige Funktionen auf $[0, T]$ anwenden.

Definition 23.1. Es sei $T > 0$ und sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine auf $[0, T]$ quadratintegrierbare T -periodische Funktion. Dann nennt man (zu $n \in \mathbb{Z}$)

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-\frac{2\pi i}{T} nt} dt$$

den n -ten (komplexen) *Fourierkoeffizienten*.

Bis auf den Vorfaktor ist dieser Koeffizient gleich dem L^2 -Skalarprodukt $\langle f, e^{\frac{2\pi i}{T} nt} \rangle = \int_0^T f(t) e^{-\frac{2\pi i}{T} nt} dt$.

Definition 23.2. Es sei $T > 0$ und sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine auf $[0, T]$ quadratintegrierbare T -periodische Funktion. Dann nennt man (zu $n \in \mathbb{N}$ bzw. $n \in \mathbb{N}_+$ für die b -Koeffizienten)

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi}{T} nt\right) dt$$

und

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(\frac{2\pi}{T} nt\right) dt$$

die n -ten (reellen) *Fourierkoeffizienten*.

Nur wenn f reellwertig ist sind die Koeffizienten a_n bzw. b_n reell, die Koeffizienten c_n sind auch in diesem Fall nicht reell.

Lemma 23.3. *Es sei $T > 0$ und sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine auf $[0, T]$ quadratintegrierbare T -periodische Funktion. Dann besteht zwischen den reellen und den komplexen Fourierkoeffizienten von f die Beziehungen*

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{a_0}{2}, \\ c_n &= \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \\ c_{-n} &= \frac{1}{2}(a_n + ib_n), \\ a_0 &= 2c_0, \\ a_n &= c_n + c_{-n}, \\ b_n &= i(c_n - c_{-n}). \end{aligned}$$

Beweis. Unter Verwendung von Satz 15.10 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)) (1) ist

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-\frac{2\pi i}{T} nt} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \left(\cos\left(-\frac{2\pi}{T} nt\right) + i \sin\left(-\frac{2\pi}{T} nt\right) \right) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(-\frac{2\pi}{T} nt\right) dt + \frac{i}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(-\frac{2\pi}{T} nt\right) dt \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi}{T}nt\right) dt - \frac{i}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(\frac{2\pi}{T}nt\right) dt.$$

Bei $n \geq 0$ ist dies $\frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}ib_n$, bei $n < 0$ muss man zum Negativen übergehen und noch einmal Satz 15.10 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)) (3) verwenden. \square

Lemma 23.4. *Es sei $T > 0$ und $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Dann bildet die Familie*

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{\omega i n x}$$

zu $n \in \mathbb{Z}$ ein Orthonormalsystem im Hilbertraum $L^2([0, T], \mathbb{C})$.

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} \langle f_m, f_n \rangle &= \int_0^T f_m \overline{f_n} dx \\ &= \int_0^T \frac{1}{\sqrt{T}} e^{\omega i m x} \frac{1}{\sqrt{T}} \overline{e^{\omega i n x}} dx \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T e^{\omega i m x} e^{-\omega i n x} dx \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T e^{\omega i (m-n)x} dx. \end{aligned}$$

Bei $m = n$ ist dies

$$\frac{1}{T} \int_0^T e^0 dx = \frac{1}{T} \int_0^T 1 dx = 1.$$

Bei $m \neq n$ ist dies

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T e^{\omega i (m-n)x} dx &= \frac{1}{T \omega i (m-n)} (e^{\omega i (m-n)x}) \Big|_0^T \\ &= \frac{1}{2\pi i (m-n)} (e^{T \omega i (m-n)} - e^0) \\ &= \frac{1}{2\pi i (m-n)} (e^{2\pi i (m-n)} - e^0) \\ &= \frac{1}{2\pi i (m-n)} (1 - 1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

\square

Lemma 23.5. *Es sei $T > 0$ und $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Dann besteht die von den*

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{\omega i n x}$$

zu $n \in \mathbb{Z}$ erzeugte \mathbb{C} -Algebra aus allen endlichen Summen $\sum_n r_n f_n$. Diese Algebra enthält mit jeder Funktion auch ihre komplex-konjugierte Funktion und trennt die Punkte aus $[0, T[$.

Beweis. Wegen

$$f_m f_n = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{\omega i m x} \cdot \frac{1}{\sqrt{T}} e^{\omega i n x} = \frac{1}{T} e^{\omega i (m+n)x}$$

ist die Familie (bis auf den skalaren Vorfaktor) unter Multiplikation abgeschlossen. Daher sind die endlichen Linearkombinationen der f_n auch multiplikativ abgeschlossen und bilden eine \mathbb{C} -Algebra, der Fall $n = 0$ sichert, dass auch die Konstanten dazu gehören. Wegen

$$\overline{f_n} = f_{-n}$$

ist die Algebra auch unter komplexer Konjugation abgeschlossen. Die Trennung ist allein schon durch die Funktion $e^{i\omega x}$ gesichert. \square

Ausdrücke der Form

$$\sum_n r_n f_n = \sum_n \frac{r_n}{\sqrt{T}} e^{\omega i n z}$$

zu einer endlichem Indexmenge nennt man auch *trigonometrische Polynome*. Zumeist schreibt man sie als $\sum_{n=-N}^N \frac{r_n}{\sqrt{T}} e^{\omega i n z}$.

Satz 23.6. *Es sei $T > 0$ und $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Dann bildet die Familie*

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{\omega i n x}$$

zu $n \in \mathbb{Z}$ ein vollständiges Orthonormalsystem im Hilbertraum

$$L^2([0, T], \mathbb{C}).$$

Beweis. Die Orthonormalitätsrelationen wurden in Lemma 23.4 gezeigt. Nach Lemma 23.5 ist die von den $e^{\omega i n x}$ erzeugte Algebra punktetrennend und stimmt mit dem erzeugten Vektorraum überein. Nach dem komplexen Satz von Stone-Weierstrass gibt es zu jeder stetigen Funktion

$$h: [0, T] \longrightarrow \mathbb{C}$$

und jedem $\epsilon > 0$ ein trigonometrisches Polynom p mit

$$|h(x) - p(x)| \leq \epsilon$$

für alle x . Die entsprechende Approximationseigenschaft gilt dann auch in der L^2 -Norm. Die beschriebene Algebra ist also dicht in $C([0, T], \mathbb{C}) \subseteq L^2([0, T], \mathbb{C})$. Nach Korollar 20.10 ist die Algebra dann auch dicht in

$$L^2([0, T], \mathbb{C}).$$

\square

Aus Satz 23.6 folgt mit Satz 22.10, dass jede quadratintegrierbare Funktion

$$f: [0, T] \longrightarrow \mathbb{C}$$

eine konvergente Darstellung

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left\langle f_n, \frac{1}{\sqrt{T}} e^{\omega int} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{T}} e^{\omega int}$$

besitzt, die Konvergenz ist dabei im Sinne der L^2 -Norm zu verstehen. Im Allgemeinen liegt keine punktweise Konvergenz vor. Es ist

$$\begin{aligned} \left\langle f_n, \frac{1}{\sqrt{T}} e^{\omega int} \right\rangle &= \int_0^T f(t) \frac{1}{\sqrt{T}} e^{-\omega int} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T f(t) e^{-\omega int} dt \end{aligned}$$

und somit

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{T} \left(\int_0^T f(t) e^{-\omega int} dt \right) e^{\omega int} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{\omega int}$$

mit den komplexen Fourierkoeffizienten c_n . Diese beziehen sich also nicht unmittelbar auf das Orthonormalsystem, sondern auf eine skalierte Version davon. Die Darstellung $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in\omega t}$ nennt man die *Fourierreihe* zu f , auch wenn über \mathbb{Z} aufsummiert wird. Man spricht auch von der *Fourierentwicklung*. Die Umformung

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{\omega int} &= c_0 + \sum_{n \in \mathbb{N}_+} (c_n e^{\omega int} + c_{-n} e^{-\omega int}) \\ &= c_0 + \sum_{n \in \mathbb{N}_+} (c_n (\cos \omega nt + i \sin \omega nt) + c_{-n} (\cos \omega nt - i \sin \omega nt)) \\ &= c_0 + \sum_{n \in \mathbb{N}_+} ((c_n + c_{-n}) \cos \omega nt + i(c_n - c_{-n}) \sin \omega nt) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n \in \mathbb{N}_+} a_n \cos \omega nt + b_n \sin \omega nt \end{aligned}$$

unter Verwendung von Lemma 23.3 ergibt die Darstellung mit den reellen Koeffizienten.

Satz 23.7. *Es sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine periodische stetige und stückweise stetig differenzierbare Funktion. Dann konvergiert die Fourierreihe von f gleichmäßig und insbesondere punktweise gegen f .*

Beweis. Es sei 2π die Periodenlänge. Die stückweise existierende Ableitung von f ist stückweise stetig und ebenfalls periodisch, daher gibt es eine Fourierentwicklung

$$f' = \sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n e^{int}.$$

Dabei ist

$$d_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(t) e^{-itn} dt$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \left(f(t)e^{-itn} \Big|_0^{2\pi} + in \int_0^{2\pi} f(t)e^{-itn} \right) \\
&= inc_n.
\end{aligned}$$

Es ist

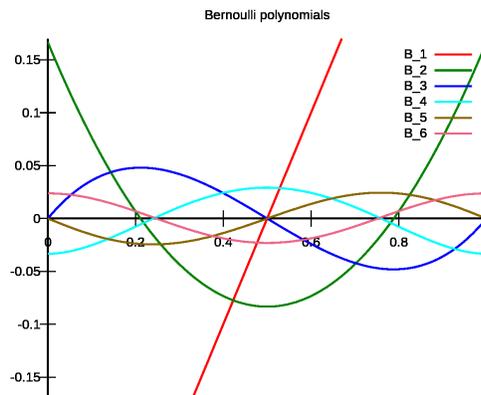
$$\sum_{n \neq 0} |c_n| = \sum_{n \neq 0} \frac{|d_n|}{|n|} \leq \frac{1}{2} \sum_{n \neq 0} \left(|d_n|^2 + \frac{1}{n^2} \right),$$

wobei die Abschätzung rechts summandenweise auf $(|d_n| - \frac{1}{n})^2 \geq 0$ beruht. Nach der Besselschen Abschätzung sind die Betragsquadrate $|d_n|^2$ summierbar und nach Beispiel 9.12 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)) sind die Quadrate der Stammbrüche summierbar und somit sind die Beträge der Fourierkoeffizienten zu f summierbar. Da die Beträge der Exponentialfunktionen e^{int} auf $[0, 2\pi]$ durch 1 beschränkt sind, ergibt sich die gleichmäßige Konvergenz aus Satz 16.6 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)). \square

Auch wenn f nur stückweise stetig und stückweise stetig differenzierbar ist, liegt auf jedem Teilintervall ohne Sprungstellen gleichmäßige Konvergenz vor.

23.2. Bernoulli-Polynome.

Jedes Polynom kann man auf $[0, 1[$ einschränken und dann 1-periodisch fortsetzen. Wir wollen verstehen, wie die zugehörigen Fourierreihen aussehen. Die Bernoulli-Polynome B_n , $n \in \mathbb{N}$, bilden eine Familie von normierten Polynomen vom Grad n mit vergleichsweise übersichtlichen Fourierreihen. Aus diesen kann man die Fourierreihe zu jedem Polynom linear berechnen.



Definition 23.8. Die *Bernoulli-Polynome* B_n für $n \in \mathbb{N}$ sind Polynome vom Grad n , die rekursiv definiert werden: B_0 ist das konstante Polynom mit dem Wert 1 und Polynom B_{n+1} ist durch die beiden Bedingungen festgelegt: B_{n+1}

ist eine Stammfunktion von $(n+1)B_n$ und es ist

$$\int_0^1 B_{n+1}(x) dx = 0.$$

Die ersten Bernoulli-Polynome lauten.

$$B_0(t) = 1,$$

$$B_1(t) = t - \frac{1}{2},$$

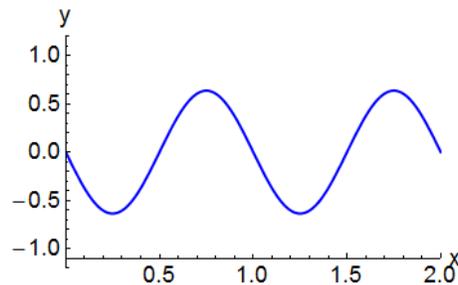
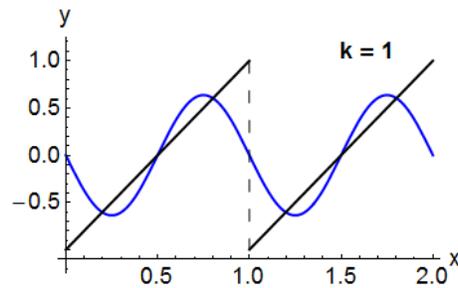
$$B_2(t) = t^2 - t + \frac{1}{6},$$

$$B_3(t) = t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{1}{2}t,$$

$$B_4(t) = t^4 - 2t^3 + t^2 - \frac{1}{30},$$

$$B_5(t) = t^5 - \frac{5}{2}t^4 + \frac{5}{3}t^3 - \frac{1}{6}t,$$

$$B_6(t) = t^6 - 3t^5 + \frac{5}{2}t^4 - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{42}.$$



Lemma 23.9. Die Identität auf dem Einheitsintervall (die Sägezahnfunktion) besitzt die Fourierreihe

$$t = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi nt)}{n}.$$

Beweis. Mit partieller Integration ist für $n \neq 0$

$$\begin{aligned} c_n &= \int_0^1 t e^{-2\pi i n t} dt \\ &= \frac{i}{2\pi n} t e^{-2\pi i n t} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{i}{2\pi n} e^{-2\pi i n t} dt \\ &= \frac{i}{2\pi n}, \end{aligned}$$

da der hintere Integrand eine periodische Stammfunktion besitzt. Ferner ist $c_0 = \frac{1}{2}$. Somit ist gemäß Lemma 23.3 $a_n = c_n + c_{-n} = 0$ und

$$b_n = i(c_n - c_{-n}) = i\left(\frac{i}{2\pi n} - \frac{i}{2\pi(-n)}\right) = -\frac{1}{\pi n}.$$

Die Fourierreihe ist also

$$\frac{1}{2} + \sum_{n \neq 0} \frac{i}{2\pi n} e^{2\pi i n t} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi n t)}{n}.$$

□

Satz 23.10. Die Bernoulli-Polynome besitzen auf dem Einheitsintervall die folgenden Darstellungen als Fourierreihen.

$$B_{2k}(t) = 2 \cdot (-1)^{k-1} \frac{(2k)!}{(2\pi)^{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi n t)}{n^{2k}}$$

im geraden Fall ($k \geq 1$) und

$$B_{2k+1}(t) = 2 \cdot (-1)^{k-1} \frac{(2k+1)!}{(2\pi)^{2k+1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi n t)}{n^{2k+1}}$$

im ungeraden Fall.

Beweis. Es seien F_{2k} bzw. F_{2k+1} die rechten Seiten der Gleichung. Wir zeigen, dass diese die gleichen Rekursionen wie die Bernoulli-Polynome erfüllen und daher mit diesen übereinstimmen müssen. Zunächst ist

$$F_1(t) = 2 \cdot (-1) \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi n t)}{n} = -\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi n t)}{n} = t - \frac{1}{2} = B_1(t)$$

nach Lemma 23.9. Es ist

$$\begin{aligned} F'_{2k} &= 2 \cdot (-1)^{k-1} \frac{(2k)!}{(2\pi)^{2k}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi n t)}{n^{2k}} \right)' \\ &= 2 \cdot (-1)^k \frac{(2k-1)!}{(2\pi)^{2k-1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi n t)}{n^{2k-1}} \\ &= (2k) F_{2k-1}. \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} F'_{2k+1} &= 2 \cdot (-1)^{k-1} \frac{(2k+1)!}{(2\pi)^{2k+1}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi nt)}{n^{2k+1}} \right)' \\ &= 2 \cdot (-1)^{k-1} \frac{(2k+1)!}{(2\pi)^{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi nt)}{n^{2k}} \\ &= (2k+1)F_{2k}. \end{aligned}$$

Ferner ist $F_{2k}(0) = F_{2k}(1)$ und $F_{2k+1}(0) = F_{2k+1}(1) = 0$, woraus die Normierungseigenschaft über das Integral folgt. \square

Korollar 23.11. *Es ist*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Beweis. Satz 23.10 für $k = 1$ besagt

$$B_2(t) = t^2 - t + \frac{1}{6} = \frac{1}{\pi^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi nt)}{n^2},$$

wobei Konvergenz im Sinne der L^2 -Norm vorliegt. Wegen

$$B_2(0) = B_2(1)$$

kann man Satz 23.7 anwenden, die Konvergenz liegt also auch punktweise vor. Für $t = 0$ ergibt dies

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{\pi^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

also

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

\square

23. ARBEITSBLATT

23.1. Übungsaufgaben.

Aufgabe 23.1. Bestimme Fourierkoeffizienten c_{-1}, c_0, c_1, c_2 für die Funktion $t^2 - 3t + 4$ auf $[0, 2\pi]$.

Aufgabe 23.2. Es sei

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$

eine Funktion und sei $T > 0$. Zeige, dass f genau dann T -periodisch ist, wenn es eine Faktorisierung

$$\mathbb{R} \xrightarrow{p} S^1 \xrightarrow{\tilde{f}} \mathbb{C}$$

gibt, wobei p die Quotientenabbildung modulo der Untergruppe $\mathbb{Z}T \subseteq \mathbb{R}$ ist.

Wenn man $S^1 \subseteq \mathbb{C}$ auffasst, so kann man p als $t \mapsto e^{\frac{2\pi}{T}it}$ realisieren. Wenn f ein trigonometrisches Polynom zur Periode T ist, sagen wir

$$f = \sum_{n=-N}^N r_n e^{\omega i n t} = \sum_{n=-N}^N r_n (e^{\omega i t})^n,$$

so ist $f = \tilde{f} \circ p$ mit

$$\tilde{f}(z) = \sum_{n=-N}^N r_n z^n.$$

Man erhält also f , indem man in die rationale Funktion \tilde{f} für die Variable die Funktion $e^{\omega i t}$ einsetzt.

Aufgabe 23.3.*

Es sei $T > 0$ und $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Zeige, dass ein trigonometrisches Polynom $f = \sum_{n=-N}^N c_n e^{i\omega n t}$ höchstens $2N$ Nullstellen in $[0, T[$ besitzt.

Aufgabe 23.4. Multipliziere die beiden trigonometrischen Polynome

$$f = 4e^{-2it} + 5e^{-it} + 7 + 3e^{it} + 6e^{2it}$$

und

$$g = -2e^{-2it} + 3e^{-it} - 3 + 6e^{it} - e^{2it}.$$

Aufgabe 23.5. Es sei $f \in L^2([0, T])$ mit den Fourierkoeffizienten c_n , $n \in \mathbb{Z}$. Zeige, dass die konjugiert-komplexe Funktion \bar{f} die Fourierkoeffizienten

$$d_n = \overline{c_{-n}}$$

besitzt.

Aufgabe 23.6. Es sei $T > 0$ und $f \in L^2([0, T])$ mit den Fourierkoeffizienten c_n , $n \in \mathbb{Z}$. Zeige, dass die (zu $s > 0$) umskalierte Funktion

$$g(t) := f(st)$$

die Periodenlänge $\frac{T}{s}$ besitzt und dass die Fourierkoeffizienten von g ebenfalls gleich c_n sind (die sich nun aber auf ein anderes Orthonormalsystem beziehen).

Aufgabe 23.7. Es sei $T > 0$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ und $f \in L^2([0, T])$ mit den Fourierkoeffizienten c_n , $n \in \mathbb{Z}$. Zeige, dass die im Argument verschobene Funktion $g(t) := f(t + a)$ zu einem $a \in \mathbb{R}$ die Fourierkoeffizienten $c_n e^{in\omega a}$ besitzt.

Aufgabe 23.8. Es sei $T > 0$ und sei

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine T -periodische Funktion. Zeige, dass f genau dann eine gerade Funktion ist, wenn der Graph von f auf $[0, T]$ achsensymmetrisch zur Achse durch $(\frac{T}{2}, 0)$ ist.

Aufgabe 23.9. Es sei $T > 0$ und sei

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine T -periodische Funktion. Zeige, dass f genau dann eine ungerade Funktion ist, wenn der Graph von f auf $[0, T]$ punktsymmetrisch zum Punkt $(\frac{T}{2}, 0)$ ist.

Aufgabe 23.10. Es sei $T > 0$ und sei

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine stetige T -periodische Funktion. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

- (1) f ist gerade.
- (2) Für die Fourierkoeffizienten gilt $c_n = c_{-n}$.
- (3) Die reellen Koeffizienten b_n sind alle 0.

Aufgabe 23.11. Es sei $T > 0$ und sei

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}$$

eine stetige T -periodische Funktion. Zeige, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

- (1) f ist ungerade.
- (2) Für die Fourierkoeffizienten gilt $c_n = -c_{-n}$.

(3) Die reellen Koeffizienten a_n sind alle 0.

Aufgabe 23.12.*

Bestimme die Fourierreihen zu den Funktionen e^{imt} , $m \in \mathbb{Z}$, wenn man sie auf $[0, \pi]$ auffasst.

Aufgabe 23.13. Zeige, dass die Funktionen

$$1, \sqrt{2} \cos 2\pi nt, n \in \mathbb{N}_+, \sqrt{2} \sin 2\pi nt, n \in \mathbb{N}_+,$$

ein vollständiges Orthonormalsystem von $L^2([0, 1])$ bilden.

Es sei $T > 0$ und es seien $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ T -periodische messbare Funktionen, die auf $[0, T]$ L^2 -integrierbar sind. Dann ist die *periodische Faltung* $f * g$ durch

$$(f * g)(t) := \frac{1}{T} \int_0^T f(t-s)g(s)ds$$

definiert.

Aufgabe 23.14.*

Es sei $T > 0$ und es seien $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ T -periodische messbare Funktionen, die auf $[0, T]$ L^2 -integrierbar sind und die Fourierreihen $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{in\omega t}$ bzw. $\sum_{n \in \mathbb{Z}} d_n e^{in\omega t}$ besitzen. Zeige, dass die periodische Faltung die Fourierreihe $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n d_n e^{in\omega t}$ besitzt.

Aufgabe 23.15. Es sei $T > 0$. Zeige, dass $L^2([0, T])$ mit der Addition von Funktionen und der periodischen Faltung zu einem kommutativen Ring wird, in dem allerdings das neutrale Element für die Multiplikation fehlt.

Aufgabe 23.16.*

Die sogenannten *Bernoulli-Polynome* B_n für $n \in \mathbb{N}$ sind Polynome vom Grad n , die rekursiv definiert werden: B_0 ist das konstante Polynom mit dem Wert 1. Das Polynom B_{n+1} berechnet sich aus dem Polynom B_n über die beiden Bedingungen: B_{n+1} ist eine Stammfunktion von $(n+1)B_n$ und es ist

$$\int_0^1 B_{n+1}(x)dx = 0.$$

- (1) Berechne B_1 .
- (2) Berechne B_2 .
- (3) Berechne B_3 .

Aufgabe 23.17.*

Es seien $c_{m,n}$ die Fourierkoeffizienten zu den Potenzen t^m (auf dem Einheitsintervall). Zeige, dass diese die rekursiven Bedingungen

$$c_{0,0} = 1,$$

$$c_{0,n} = 0$$

für $n \geq 1$,

$$c_{m,0} = \frac{1}{m+1}$$

für $m \geq 1$ und

$$c_{m,n} = -\frac{e^{-2\pi in}}{2\pi in} + \frac{m}{2\pi in} c_{m-1,n}$$

für $m, n \geq 1$ erfüllen.

Aufgabe 23.18. Bestimme die Fourierentwicklung zu t^2 auf $[0, 1]$ unter Verwendung der Fourierreihen der Bernoulli-Polynome.

Aufgabe 23.19. Zeige

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$$

mit Lemma 23.9.

Aufgabe 23.20.*

Zeige

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

mit Satz 23.10.

23.2. Aufgaben zum Abgeben.

Aufgabe 23.21. (4 Punkte)

Bestimme Fourierkoeffizienten c_{-1}, c_0, c_1, c_2 für die Funktion $3t^2 - 5it - 1$ auf $[0, 2\pi]$.

Aufgabe 23.22. (5 Punkte)

Bestimme die Fourierkoeffizienten der 2-periodischen Funktion, die auf $[-1, 1]$ durch die Betragsfunktion gegeben ist.

Aufgabe 23.23. (3 Punkte)

Zeige

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

mit Satz 23.10.

Aufgabe 23.24. (3 Punkte)

Zeige

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$$

mit Satz 23.10.

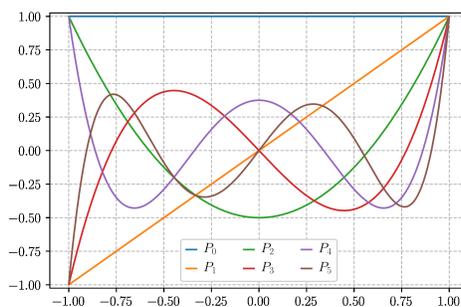
24. VORLESUNG - LEGENDRE- UND TSCHEBYSCHOW-POLYNOME

Wir besprechen weitere polynomiale orthonomale System in L^2 -Räumen.

24.1. Legendre-Polynome.

Definition 24.1. Unter dem n -ten *Legendre-Polynom* $P_n(t)$ versteht man das Polynom

$$\frac{1}{2^n(n!)} ((t^2 - 1)^n)^{(n)}.$$

Die ersten sechs Legendre-Polynome im für die Orthogonalitätsrelation entscheidenden Intervall $[-1, 1]$.Aus der Definition ist ablesbar, dass das n -te Legendre-Polynom den Grad n besitzt. Die ersten Legendre-Polynome lauten.

$$\begin{aligned} P_0(t) &= 1, \\ P_1(t) &= t, \\ P_2(t) &= \frac{1}{2}(3t^2 - 1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_3(t) &= \frac{1}{2}(5t^3 - 3t), \\
P_4(t) &= \frac{1}{8}(35t^4 - 30t^2 + 3), \\
P_5(t) &= \frac{1}{8}(63t^5 - 70t^3 + 15t), \\
P_6(t) &= \frac{1}{16}(231t^6 - 315t^4 + 105t^2 - 5).
\end{aligned}$$

Satz 24.2. Die Legendre-Polynome P_n , $n \in \mathbb{N}$, bilden ein Orthogonalsystem in $L^2([-1, 1])$. Die normierten (im Sinne der L^2 -Norm) Legendre-Polynome $\frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2}}P_n$ entstehen aus den Potenzen t^0, t^1, t^2 mit dem Orthonormalisierungsverfahren und bilden ein vollständiges Orthonormalsystem.

Beweis. Wir schreiben

$$f_n = (t^2 - 1)^n,$$

es ist also

$$P_n = \frac{f_n^{(n)}}{2^n(n!)}.$$

Für $n \geq m, 1$ ergibt sich mit iterierter partieller Integration und da $f_n^{(n-k)}$ für $k \geq 1$ den Faktor $t^2 - 1$ enthält

$$\begin{aligned}
2^n(n!) \langle t^m, P_n \rangle &= \langle t^m, f_n^{(n)} \rangle \\
&= \int_{-1}^1 t^m f_n^{(n)}(t) dt \\
&= (t^m f_n^{(n-1)}(t)) \Big|_{-1}^1 - m \int_{-1}^1 t^{m-1} f_n^{(n-1)}(t) dt \\
&= -m \int_{-1}^1 t^{m-1} f_n^{(n-1)}(t) dt \\
&= (-1)^2 m(m-1) \int_{-1}^1 t^{m-2} f_n^{(n-2)}(t) dt \\
&= \dots \\
&= (-1)^m (m!) \int_{-1}^1 f_n^{(n-m)}(t) dt.
\end{aligned}$$

Bei $m < n$ ist dies gleich 0, da $f_n^{(n-m-1)}(t)$ eine Stammfunktion von $f_n^{(n-m)}(t)$ ist und den Faktor $(t-1)^2$ enthält. Es liegt also ein Orthogonalsystem vor.

Bei $m = n$ ist der Ausdruck nach Aufgabe 25.2 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)) gleich

$$\begin{aligned}
(-1)^n(n!) \int_{-1}^1 f_n(t) dt &= (-1)^n(n!)(-1)^n \cdot 2 \cdot \frac{2^n(n!)}{(2n+1)(2n-1)\cdots 5 \cdot 3 \cdot 1} \\
&= 2 \cdot \frac{2^n(n!)^2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 5 \cdot 3 \cdot 1}.
\end{aligned}$$

Somit ist insbesondere

$$\langle t^n, P_n \rangle = 2 \cdot \frac{n!}{(2n+1)(2n-1)\cdots 5 \cdot 3 \cdot 1}$$

und daher ist unter Verwendung der bewiesenen Orthogonalitätsrelation und von Aufgabe 24.2

$$\begin{aligned} \langle P_n, P_n \rangle &= \left\langle \frac{(2n)\cdots(n+1)}{2^n(n!)} t^n, P_n \right\rangle \\ &= \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} \langle t^n, P_n \rangle \\ &= \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2} \cdot 2 \cdot \frac{n!}{(2n+1)(2n-1)\cdots 5 \cdot 3 \cdot 1} \\ &= \frac{(2n)!}{2^n \cdot (n!) \cdot (2n-1)\cdots 5 \cdot 3 \cdot 1} \cdot \frac{2}{2n+1} \\ &= \frac{2}{2n+1}. \end{aligned}$$

Somit bilden die $\frac{\sqrt{2n+1}}{\sqrt{2}} P_n$ ein Orthonormalsystem. Wegen

$$\langle t^0, t^1, \dots, t^n \rangle = \langle P_0, P_1, \dots, P_n \rangle$$

und da die Leitkoeffizienten der P_n positiv ist, ergeben sich die normierten Legendre-Polynomen auch beim Orthonormalisierungsverfahren. Die Vollständigkeit ergibt sich aus Korollar 20.12 und aus dem Weierstrassschen Approximationssatz. \square

24.2. Tschebyschow-Polynome.

Wir betrachten das Intervall $[-1, 1]$ als Maßraum mit dem Maß μ , das durch die Dichte $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ bezüglich dem Lebesgue-Maß gegeben ist. Diese Funktion beschreibt den Kehrwert des oberen Halbkreises, dadurch werden die Ränder stark gewichtet, eine Stammfunktion dieser Dichte ist $\arcsin t$ gemäß Aufgabe 21.7 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)). Die Zugehörigkeit einer messbaren Funktion f zu $L^2([-1, 1], \mu)$ bedeutet

$$\int_{-1}^1 \frac{|f(t)|^2}{\sqrt{1-t^2}} dt < \infty.$$

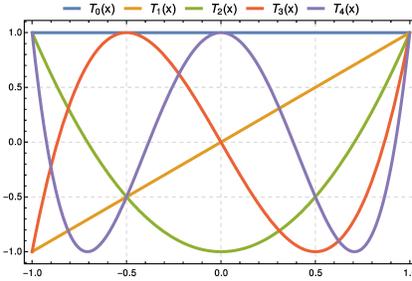
Dieses maßtheoretische Integral ist für eine stetige Funktion f ein uneigentliches Integral, dessen Existenz aus Aufgabe 31.10 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)) folgt. Das Skalarprodukt auf $L^2([-1, 1], \mu)$ für bezüglich der Dichte quadratintegrierbare Funktionen f, g ist durch

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t) \overline{g(t)} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

gegeben.

Definition 24.3. Unter dem n -ten *Tschebyschow-Polynom* versteht man das Polynom

$$T_n(t) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} t^{n-2k} (t^2 - 1)^k.$$



Die ersten fünf Tschebyschow-Polynome im für die Orthogonalitätsrelation entscheidenden Intervall $[-1, 1]$. Der Wertebereich auf diesem Intervall ist ebenfalls $[-1, 1]$, obwohl die Leitkoeffizienten große Zweierpotenzen sind.

Aus der Definition ist ablesbar, dass das n -te Tschebyschow-Polynom den Grad n besitzt. Die ersten Tschebyschow-Polynome lauten.

$$\begin{aligned} T_0(t) &= 1, \\ T_1(t) &= t, \\ T_2(t) &= 2t^2 - 1, \\ T_3(t) &= 4t^3 - 3t, \\ T_4(t) &= 8t^4 - 8t^2 + 1, \\ T_5(t) &= 16t^5 - 20t^3 + 5t, \\ T_6(t) &= 32t^6 - 48t^4 + 18t^2 - 1. \end{aligned}$$

Satz 24.4. Für das n -te Tschebyschow-Polynom gilt

$$T_n(\cos z) = \cos(nz)$$

für alle $z \in \mathbb{C}$.

Beweis. Nach Satz 15.10 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)) (1) und Satz 15.7 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)) ist

$$\cos(nz) + i \sin(nz) = e^{inz} = (e^{iz})^n = (\cos(z) + i \sin(z))^n.$$

Wenn wir die rechte Seite ausmultiplizieren erhalten wir mit Satz 3.9 (Analysis (Osnabrück 2021-2023))

$$\sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} i^\ell \sin^\ell z \cos^{n-\ell} z = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k} \sin^{2k} z \cos^{n-2k} z$$

$$+i \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k+1} \sin^{2k+1} z \cos^{n-2k-1} z.$$

Der Vergleich der Realteile bei z reell und Satz 15.10 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)) (6) ergibt

$$\begin{aligned} \cos nz &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \binom{n}{2k} (1 - \cos^2 z)^k \cos^{n-2k} z \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} \cos^{n-2k} z (\cos^2 z - 1)^k \\ &= T_n(\cos z). \end{aligned}$$

Als eine Gleichheit für analytische Funktionen gilt sie auch für alle $z \in \mathbb{C}$. \square

Für reelles t zwischen -1 und 1 ist der Kosinus nach Korollar 21.4 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)) bijektiv und es gibt ein eindeutiges $z \in [0, \pi]$ mit $t = \cos z$ bzw. $z = \arccos t$. Somit kann man auf diesen reellen Intervallen Satz 24.4 auch also

$$T_n(t) = T_n(\cos z) = \cos(nz) = \cos(n \arccos t)$$

schreiben.

Lemma 24.5. *Die Tschebyschow-Polynome erfüllen die Rekursionsbedingungen $T_0 = 1$, $T_1(t) = t$ und*

$$T_{n+1}(t) = 2tT_n(t) - T_{n-1}(t).$$

Beweis. Eine doppelte Anwendung des Additionstheorems für den Kosinus ergibt mit Satz 24.4

$$\begin{aligned} T_{n+1}(\cos z) &= \cos((n+1)z) \\ &= \cos(nz) \cos(z) - \sin(nz) \sin z \\ &= 2 \cos(nz) \cos(z) - \cos(nz) \cos(z) - \sin(nz) \sin z \\ &= 2 \cos z \cos(nz) - \cos(n-1)z \\ &= 2 \cos z \cdot T_n(\cos z) - T_{n-1}(\cos(z)) \end{aligned}$$

für alle $z \in [0, \pi]$. Daher muss überhaupt die behauptete polynomiale Identität vorliegen. \square

Aus dieser Rekursionsformel ergibt sich unmittelbar, dass der Leitkoeffizient von T_n gleich 2^{n-1} ist. Gelegentlich betrachtet man auch die normierten Tschebyschow-Polynome, bei denen man einfach durch 2^{n-1} teilt.

Lemma 24.6. *Die Tschebyschow-Polynome T_n erfüllen im Reellen die folgenden Eigenschaften.*

- (1) *Das Bild von $[-1, 1]$ unter T_n liegt in $[-1, 1]$.*

- (2) T_n besitzt die n reellen Nullstellen $\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)$, $k = 1, \dots, n$, die alle in $[-1, 1]$ liegen. Diese Nullstellen sind einfach und T_n besitzt (auch in \mathbb{C}) keine weiteren Nullstellen.
- (3) Die Extrema von T_n auf $[-1, 1]$ werden in den Punkten $\cos\left(\frac{k}{n}\pi\right)$, $k = 0, \dots, n$, mit den Werten $(-1)^k$ angenommen. Für $k = 1, \dots, n-1$ sind dies die lokalen Extrema von T_n .

Beweis. Wir arbeiten für $t \in [-1, 1]$ mit der Darstellung

$$T_n(t) = \cos(n \arccos t),$$

die sich aus Satz 24.4 ergibt. Die Aussagen folgen dann aus Korollar 21.4 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)). Dass die Nullstellen einfach sind und dass es auch im Komplexen keine weiteren Nullstellen gibt folgt aus Korollar 11.7 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)), da T_n den Grad n besitzt. Dass es nicht mehr lokale Extrema geben kann folgt aus Satz 19.1 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)). \square

Korollar 24.7. *Es sei P ein reelles normiertes Polynom vom Grad n . Dann ist*

$$\max(|P(t)| \mid -1 \leq t \leq 1) \geq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Beweis. Wir betrachten die normierten Tschebyschow-Polynome

$$Q_n = \frac{1}{2^{n-1}} T_n,$$

die normiert sind und deren Bild von $[-1, 1]$ nach Lemma 24.6 in $[-\frac{1}{2^{n-1}}, \frac{1}{2^{n-1}}]$ liegt, wobei die Maxima bzw. Minima in den $n+1$ Punkten $\cos\left(\frac{k}{n}\pi\right)$ mit $k = 0, \dots, n$ abwechselnd angenommen werden. Nehmen wir an, es gebe ein normiertes Polynom $P(t)$, dessen Betrag auf $[-1, 1]$ überall echt kleiner als $\frac{1}{2^{n-1}}$ ist. Wir betrachten das Differenzpolynom $D(t) = Q(t) - P(t)$. Dieses Polynom hat an den Stellen, wo $Q(t)$ den maximalen Wert $\frac{1}{2^{n-1}}$ annimmt, einen positiven Wert, und an den Stellen, wo $Q(t)$ den minimalen Wert $-\frac{1}{2^{n-1}}$ annimmt, einen negativen Wert. Da die Extrema von Q sich abwechseln, besitzt D zumindest n Vorzeichenwechsel und somit nach dem Zwischenwertsatz zumindest n Nullstellen. Da aber D die Differenz von zwei normierten Polynomen vom Grad n ist, besitzt D höchstens den Grad $n-1$ und kann nach Korollar 11.7 (Analysis (Osnabrück 2021-2023)) höchstens $n-1$ Nullstellen besitzen. \square

Satz 24.8. *Die Tschebyschow-Polynome T_n bilden ein Orthogonalsystem in $L^2[-1, 1]$ bezüglich des Maßes mit der Dichte $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$. Die Familie $\frac{T_0}{\sqrt{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ und $\frac{\sqrt{2}T_n}{\sqrt{\pi}}$, $n \geq 1$, bilden ein vollständiges Orthonormalsystem.*

Beweis. Es ist

$$\langle T_n, T_m \rangle = \int_{-1}^1 T_n(t) T_m(t) \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

Mit der Substitution (vergleiche Lemma 27.8 (Analysis (Osnabrück 2021-2023))) $t = \cos z$ kann man dies unter Verwendung von Satz 24.4 überführen in

$$\int_0^\pi T_n(\cos z)T_m(\cos z)dz = \int_0^\pi \cos(nz) \cos(mz) dz.$$

Mit dem Additionstheorem für den Kosinus in der Form

$$\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2 \cos x \cos y$$

kann man dies als

$$\frac{1}{2} \int_0^\pi \cos((n+m)z) dz + \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos((n-m)z) dz.$$

schreiben. Beide Integral sind gleich 0, außer bei $n = m$, in diesem Fall ist bei $n \geq 1$ das Ergebnis $\pi/2$ und bei $n = 0$ gleich π . Die Vollständigkeit ergibt sich aus dem Weierstrassschen Approximationssatz und aus Korollar 20.10. \square

24. ARBEITSBLATT

24.1. Übungsaufgaben.

Aufgabe 24.1. Es seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit m gerade und n ungerade. Zeige, dass die Potenzen t^m und t^n in $L^2([-1, 1], \lambda^1)$ orthogonal zueinander sind.

Aufgabe 24.2. Zeige, dass das n -te Legendre-Polynom P_n den Leitkoeffizienten

$$\frac{(2n) \cdots (n+1)}{2^n (n!)}$$

besitzt.

Aufgabe 24.3. Zeige, dass das n -te Legendre-Polynom P_n bei n gerade eine gerade Funktion und bei n ungerade eine ungerade Funktion ist.

Aufgabe 24.4. Zeige, dass die Legendre-Polynome die Rekursionsbedingungen $P_0 = 1$, $P_1 = t$ und

$$(n+1)P_{n+1}(t) = (2n+1)tP_n(t) - nP_{n-1}(t)$$

für $n \geq 1$ erfüllen.

Aufgabe 24.5. Bestimme die Fourierentwicklung der Legendre-Polynome P_0, P_1, P_2 . Überprüfe die Orthogonalitätsrelationen für die Fourierreihen.

Aufgabe 24.6.*

Bestimme ein lineares Polynom $ax+b \neq 0$, das im Lebesgue-Raum $L^2([-1, 1], \lambda^1)$ senkrecht auf der Exponentialfunktion e^x steht.

Aufgabe 24.7.*

Zeige, dass das n -te Tschebyschow-Polynom auf $[-1, 1]$ die Identität

$$T_n(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n}{2}$$

erfüllt.

Aufgabe 24.8. Skizziere die Graphen der folgenden Funktionen auf $[0, 2\pi]$.

- (1) $\cos x$.
- (2) $\cos 2x$.
- (3) $\cos^2 x$.
- (4) $2 \cos^2 x - 1$.

Aufgabe 24.9. Zeige, dass das n -te Tschebyschow-Polynom P_n bei n gerade eine gerade Funktion und bei n ungerade eine ungerade Funktion ist.

Aufgabe 24.10. Zeige, dass das n -te Tschebyschow-Polynom T_n die *Tschebyschowsche Differentialgleichung*

$$(1 - t^2)y'' - ty' + n^2y = 0$$

löst.

Aufgabe 24.11. Zeige, dass die von $\cos z$ erzeugte \mathbb{C} -Unteralgebra von $C(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ mit dem von den $\cos nz$, $n \in \mathbb{N}$, erzeugten Untervektorraum übereinstimmt.

Aufgabe 24.12. Es sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und sei $P \in \mathbb{R}[X]$ ein Polynom mit

$$P(f(t)) = 0$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Zeige, dass f eine konstante Funktion ist oder dass P das Nullpolynom ist.

24.2. Aufgaben zum Abgeben.

Aufgabe 24.13. (4 Punkte)

Führe für die Potenzen t^0, t^1, t^2, t^3 das Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren in $L^2([-1, 1], \lambda^1)$ durch.

Aufgabe 24.14. (5 Punkte)

Wir betrachten die Exponentialfunktion e^x in $L^2([-1, 1], \lambda^1)$. Es sei $U \subseteq L^2([-1, 1], \lambda^1)$ das orthogonale Komplement der Exponentialfunktion und es sei $V \subseteq L^2([-1, 1], \lambda^1)$ der Raum aller Polynome vom Grad ≤ 3 . Bestimme eine Basis von $U \cap V$.

Aufgabe 24.15. (3 Punkte)

Zeige, dass das n -te Tschebyschow-Polynom auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ die Identität

$$T_n\left(\frac{z + z^{-1}}{2}\right) = \frac{z^n + z^{-n}}{2}$$

erfüllt.

Aufgabe 24.16. (5 Punkte)

Es sei $P \in \mathbb{C}[X, Y]$ ein Polynom mit

$$P(\cos t, \sin t) = 0$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Zeige

$$P = Q \cdot (X^2 + Y^2 - 1)$$

für ein Polynom $Q \in \mathbb{C}[X, Y]$.

ABBILDUNGSVERZEICHNIS

| | |
|---|----|
| Quelle = Assorted polygons.svg , Autor = Benutzer CountingPine auf Commons, Lizenz = PD | 7 |
| Quelle = Hausdorff space.svg , Autor = Toby Bartels (hochgeladen von Benutzer Fibonacci auf Commons), Lizenz = copyleft | 16 |
| Quelle = Ortoedro.png , Autor = Benutzer Tomruen auf Commons, Lizenz = PD | 18 |
| Quelle = Measure illustration.png , Autor = Benutzer Oleg Alexandrov auf Commons, Lizenz = PD | 20 |
| Quelle = SquareLattice.svg , Autor = Benutzer Jim.belk auf Commons, Lizenz = PD | 27 |
| Quelle = Georges Seurat - Un dimanche après-midi à l'île de la Grande Jatte.jpg , Autor = Georges Seurat (hochgeladen von Benutzer Oxag auf Commons), Lizenz = PD | 27 |
| Quelle = Benfords law illustrated by world's countries population.png , Autor = Benutzer Jakob.scholbach auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 | 32 |
| Quelle = Cylinder (PSF).png , Autor = Benutzer Pearson Scott Foresman auf Commons, Lizenz = PD | 33 |
| Quelle = Caratheodory constantin.jpg , Autor = Benutzer Gernheim auf Commons, Lizenz = PD | 39 |
| Quelle = Simple set1.png , Autor = Benutzer Oleg Alexandrov auf Commons, Lizenz = PD | 49 |
| Quelle = Simple set2.png , Autor = Benutzer Oleg Alexandrov auf Commons, Lizenz = PD | 49 |
| Quelle = Geometric series 14 square.svg , Autor = Benutzer Melchoir auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 | 55 |
| Quelle = LebesgueH.gif , Autor = Benutzer Skraemer auf Commons, Lizenz = PD | 57 |
| Quelle = TraslazioneOK.png , Autor = Benutzer Toobaz auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 | 59 |
| Quelle = Parallelopipedum.png , Autor = Benutzer Svdmolén auf nl. Wikipedia, Lizenz = PD | 60 |
| Quelle = Cantor set in seven iterations.svg , Autor = Benutzer Hellisp auf Commons, Lizenz = PD | 66 |

| | |
|---|-----|
| Quelle = Ellipsoide.png , Autor = Benutzer Anarkman auf Commons, Lizenz = PD | 70 |
| Quelle = Linalg parallelogram area.png , Autor = Nicholas Longo (hochgeladen von Benutzer Thenub314 auf Commons), Lizenz = CC-by-sa 2.5 | 72 |
| Quelle = Volume under surface.png , Autor = Benutzer Oleg Alexandrov auf Commons, Lizenz = PD | 84 |
| Quelle = Chebyshev.jpg , Autor = Benutzer Maksim auf Commons, Lizenz = PD | 89 |
| Quelle = Lebesgue and Riemann integration animation.gif , Autor = Benutzer WarX auf pl. Wikipedia, Lizenz = CC-by-sa 2.5 | 96 |
| Quelle = Bonaventura Cavalieri.jpeg , Autor = Benutzer Gene.arboit auf Commons, Lizenz = PD | 107 |
| Quelle = Cavalieriho princip.svg , Autor = Benutzer Pajs auf cs Wikipedia, Lizenz = Public domain | 108 |
| Quelle = Cavalieri 004.jpg , Autor = Benutzer HB auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 4.0 | 114 |
| Quelle = Integral apl rot objem3.svg , Autor = Benutzer Pajs auf cs Wikipedia, Lizenz = PD | 115 |
| Quelle = Coneirr3.svg , Autor = Benutzer Mpfiz auf Commons, Lizenz = PD | 117 |
| Quelle = Wurst.png , Autor = Benutzer Rainer Bielefeld auf Wikipedia.de, Lizenz = GFDL | 123 |
| Quelle = Clusterförmige Anordnung.png , Autor = Benutzer Rainer Bielefeld auf Wikipedia.de, Lizenz = GFDL | 123 |
| Quelle = Hesoun? rybník.JPG , Autor = Benutzer Juan de Vojník auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 | 139 |
| Quelle = Annulus.svg , Autor = Benutzer Nandhp auf Commons, Lizenz = PD | 142 |
| Quelle = MDKQ anim ohne Ausreiser1.svg , Autor = Benutzer JoKalliauer auf Commons, Lizenz = | 188 |
| Quelle = Bernoulli polynomials.svg , Autor = Benutzer Linas auf en. Wikipedia, Lizenz = CC-by-sa 3.0 | 202 |
| Quelle = Sawtooth Fourier Animation.gif , Autor = Benutzer 4dhayman auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 | 203 |

| | |
|---|-----|
| | 221 |
| Quelle = Legendrepolynomials6.svg , Autor = Benutzer Geek3 auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 3.0 | 210 |
| Quelle = Chebyshev Polynomials of the First Kind.svg , Autor = Benutzer Rayhem auf Commons, Lizenz = CC-by-sa 4.0 | 213 |
| Erläuterung: Die in diesem Text verwendeten Bilder stammen aus Commons (also von http://commons.wikimedia.org) und haben eine Lizenz, die die Verwendung hier erlaubt. Die Bilder werden mit ihren Dateinamen auf Commons angeführt zusammen mit ihrem Autor bzw. Hochlader und der Lizenz. | 219 |
| Lizenzklärung: Diese Seite wurde von Holger Brenner alias Bocardodarapti auf der deutschsprachigen Wikiversity erstellt und unter die Lizenz CC-by-sa 3.0 gestellt. | 219 |